



# Modelamiento de un sistema de transmisión de potencia de dos etapas para detección de fallas a través del análisis de vibraciones

**Julián Andrés Villanueva Rodríguez**

Universidad Antonio Nariño  
Facultad de Ingeniería Mecánica, Electrónica y Biomédica  
Bogotá, Colombia  
2020



# Modelamiento de un sistema de transmisión de potencia de dos etapas para detección de fallas a través del análisis de vibraciones

**Julián Andrés Villanueva Rodríguez**

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Ingeniero Mecatrónico**

Director(a):  
Ing. Diego Calero Arellano PhD

Línea de investigación:  
Monitoreo y análisis de vibraciones  
Grupo de investigación  
Semillero de Control, Sistemas Embebidos e Instrumentación (CASEIB)

Universidad Antonio Nariño  
Facultad de Ingeniería Mecánica, Electrónica y Biomédica  
Bogotá, Colombia  
2020



# Agradecimientos

Agradecer a todas las personas que se han involucrado en la realización de este trabajo, es algo complicado. Debo hacer un reconocimiento a mi director de trabajo de grado, el Ing. Diego Calero Arellano PhD, el cual, fue un apoyo importante para el desarrollo del mismo, brindando todo su conocimiento, tiempo y paciencia, para llevar a cabo el proyecto de la mejor manera posible. A el, y todos los docentes que participaron durante mi formación académica, que aportaron toda su experiencia y facilitaron el aprendizaje de todos los conceptos necesarios para culminar mi carrera universitaria.

También, quiero agradecer de manera especial a mis padres y hermana, que durante el transcurso de mi formación, siempre estuvieron apoyando y brindando la motivación necesaria para continuar y finalizar satisfactoriamente cada una de las etapas de mi carrera profesional.



# Resumen

El diseño de los sistemas mecánicos en la actualidad es un factor clave para un adecuado funcionamiento de los mismos. Los componentes de la mayoría de la maquinaria de la industria hoy en día, deben cumplir ciertas características para tener una vida útil de acuerdo al tiempo que sean utilizados. Esta maquinaria incluye bombas hidráulicas, engranajes, motores, entre otros. Debido a que el mantenimiento preventivo no considera la condición real de los elementos de las máquinas, es necesario implementar estrategias de mantenimiento predictivo que aumente la eficiencia en el monitoreo de fallas. Entre estos métodos se encuentra la relación de cierto tipo de fallas en elementos rotativos con un patrón de vibración inusual, el cual puede ser detectado a través de instrumentos disponibles comercialmente.

Por lo tanto, se desarrolló un modelo que permita describir de manera adecuada el comportamiento de dichos sistemas, para analizar este tipo de vibración. A partir de este modelo, se analizó el comportamiento vibratorio de un sistema rotatorio, y así mismo, la simulación de posibles fallas, que se pueden presentar al momento de una implementación en la práctica. Adicionalmente, se planteó un método para la adquisición de datos como sensores acelerómetros, y el tratamiento de estas señales, en un software especializado, puede proveer de una solución útil a la industria.

**Palabras clave:**

Sistemas rotatorios, modelamiento, vibraciones mecánicas, sensores, procesamiento de señales.

# Abstract

Actually, the design of mechanical systems is an important factor to their proper operation. Today, the components of most machinery in the industry must satisfy some characteristics to have a useful life according to the time they are used. This machinery includes hydraulics pumps, gears, motors and others. Since preventive maintenance does not consider the real condition of the machine elements, it is necessary to implement predictive maintenance strategies that increase the efficiency of fault monitoring. Among these methods is the relationship of some types of failures in rotating elements with an unusual vibration pattern, which can be detected through commercially available instruments.

Therefore, a model was developed, that allows to adequately describe the behavior of these systems, to analyze this type of vibration. From this model, the vibratory behavior of a rotary system was analyzed, and the simulation of possible failures, which may happen at the time of an implementation in practice.

Additionally, it was proposed a method for data acquisition such as accelerometer sensors, and the signals processing, in software specialized, can provide a useful solution to the industry.

**Keywords:**

Rotating systems, modeling, mechanical vibrations, sensors, signals processing.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>9</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>9</b>
1.1 Estado del arte . . . . .	9
1.2 Planteamiento del problema . . . . .	13
1.3 Justificación . . . . .	14
1.4 Objetivos . . . . .	15
1.4.1 Objetivo general . . . . .	15
1.4.2 Objetivos específicos . . . . .	15
1.5 Estructura general . . . . .	16
<b>2 Marco teórico</b>	<b>17</b>
2.1 Fundamentos de vibración . . . . .	17
2.1.1 Modelo de un grado de libertad . . . . .	17
2.1.2 Transformación de señales al dominio de Laplace . . . . .	19
2.1.3 Modelo de varios grados de libertad . . . . .	20
2.2 Fundamentos de dinámica rotacional . . . . .	22
2.2.1 Modelo de 2 grados de libertad . . . . .	22
2.2.2 Modelo Rotacional de Jeffcott . . . . .	23
2.3 Sistemas de transmisión de potencia . . . . .	25
2.3.1 Bandas . . . . .	25
2.3.2 Cadenas . . . . .	26
2.3.3 Ejes y rodamientos . . . . .	27
2.3.4 Engranajes . . . . .	28
2.4 Fallas comunes en sistemas de transmisión . . . . .	29
2.4.1 Diagnóstico de vibraciones . . . . .	29
2.4.2 Fallas en engranes . . . . .	31
2.4.3 Diagnóstico de fallas en los engranajes . . . . .	34

2.4.4	Diagnóstico en cojinetes-rodamientos . . . . .	37
2.5	Sistemas de medición de vibración . . . . .	39
2.5.1	Instrumentación . . . . .	39
2.5.2	Análisis de señales . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>45</b>
3.1	Sistema de transmisión . . . . .	45
3.1.1	Descripción del sistema de transmisión . . . . .	45
3.2	Descripción de fallas . . . . .	47
3.3	Modelado del sistema de transmisión . . . . .	48
3.3.1	Modelo de un eje con engrane (8 GDL) . . . . .	48
3.3.2	Modelo de un eje con engrane y deformación axial . . . . .	49
3.3.3	Modelo de dos ejes acoplados . . . . .	50
3.3.4	Modelo completo . . . . .	52
3.4	Simulación de funcionamiento y falla . . . . .	53
3.4.1	Excitación armónica rotación y translación . . . . .	54
3.4.2	Impulso en rotación y translación . . . . .	55
3.4.3	Simulación de falla en engrane . . . . .	55
3.4.4	Simulación de falla en rodamiento . . . . .	56
3.5	Propuesta de sistema de medición . . . . .	57
3.5.1	Sensores . . . . .	57
3.5.2	Señal de entrada . . . . .	57
3.5.3	Tratamiento de señal . . . . .	58
3.5.4	Posicionamiento . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Resultados y análisis de resultados</b>	<b>63</b>
4.1	Respuesta del sistema de transmisión . . . . .	63
4.1.1	Respuesta del modelo de un eje con engrane y deformación axial . . . . .	63
4.1.2	Respuesta del modelo Jeffcott 8 GDL . . . . .	65
4.1.3	Respuesta del modelo del acoplamiento de dos ejes . . . . .	67
4.1.4	Modelado engrane helicoidal . . . . .	68
4.1.5	Modelado engrane hipoide . . . . .	71
4.1.6	Modelo completo . . . . .	74
4.2	Respuesta del sistema de transmisión con fallas . . . . .	79
4.2.1	Añadiendo una señal de falla a la entrada . . . . .	79
4.2.2	Variación de los parámetros de rigidez y amortiguamiento . . . . .	83
4.3	Análisis de elementos del sistema . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>91</b>
5.1	Recomendaciones y trabajos futuros . . . . .	93

---

<b>6</b>	<b>Anexos</b>	<b>95</b>
6.1	Anexo 1: Ecuaciones modelo Jeffcott de 8 GDL . . . . .	95
6.2	Anexo 2: Modelado engrane helicoidal complejo . . . . .	96
6.3	Anexo 3: Modelado engrane hipoide . . . . .	97
6.4	Anexo 4: Códigos Matlab Modelamiento . . . . .	98
6.4.1	Modelo simple: un disco y dos soportes-Transformada de Fourier . . .	98
6.4.2	Modelo JeffCott 8 GDL . . . . .	99
6.4.3	Modelo acoplamiento de los ejes . . . . .	100
6.4.4	Modelo helicoidal . . . . .	101
6.4.5	Modelo hipoide . . . . .	102
	<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>



# Lista de Figuras

1-1	Máquina para simular fallas de Spectraquest Inc . . . . .	10
1-2	Machine Fault Simulator de Spectraquest. Inc . . . . .	10
2-1	Modelo general del sistema masa resorte amortiguador . . . . .	17
2-2	Comportamiento en el dominio del tiempo de los sistemas dinámicos . . . . .	19
2-3	Modelo general con varios grados de libertad . . . . .	20
2-4	Modelo de un eje con dos grados de libertad . . . . .	22
2-5	Modelo de rotor Jeffcott . . . . .	23
2-6	Modelo no trivial de 8 GDL . . . . .	24
2-7	Tipos de bandas de transmisión . . . . .	25
2-8	Tipos de cadenas de transmisión . . . . .	26
2-9	Estructura de un rodamiento radial de bolas . . . . .	27
2-10	Tipos de rodamientos más comunes . . . . .	28
2-11	Características de los dientes de los engranajes . . . . .	29
2-12	Tipos de engranes . . . . .	30
2-13	Esquema de general de un engranaje . . . . .	34
2-14	Espectro en frecuencia de un engrane en buen estado . . . . .	35
2-15	Espectro de un engranaje desgastado . . . . .	35
2-16	Espectro del engranaje con carga . . . . .	36
2-17	Espectro cuando hay excentricidad en el engranaje . . . . .	36
2-18	Espectro en frecuencia con deterioro en la pista exterior . . . . .	37
2-19	Espectro en frecuencia con deterioro en la pista interior . . . . .	38
2-20	Espectro en frecuencia con deterioro en el elemento rodante . . . . .	38
2-21	Espectro en frecuencia con deterioro en la jaula del rodamiento . . . . .	39
2-22	Características de una señal senoidal . . . . .	40
2-23	Características de una señal impulso unitario o delta . . . . .	41
2-24	Suma de dos señales seno en el dominio del tiempo . . . . .	42
2-25	Transformada de Fourier de la señal de la figura <b>2-24</b> . . . . .	42
3-1	Esquema del sistema de transmisión . . . . .	46
3-2	Representación de un eje con un disco y dos soportes . . . . .	49
3-3	Representación de dos ejes acoplados con un engrane de tipo helicoidal . . . . .	51
3-4	Señal de entrada del sistema . . . . .	54
3-5	Sensor acelerómetro ADXL335 . . . . .	57

<b>3-6</b>	Pines del sensor acelerómetro ADXL335 . . . . .	58
<b>3-7</b>	Prueba de medición aleatoria con el acelerómetro . . . . .	59
<b>3-8</b>	Diagrama de bloques en Simulink para la adquisición de datos . . . . .	60
<b>3-9</b>	Propuesta de posicionamiento de los sensores para adquisición de datos . . . . .	61
<b>4-1</b>	Diagrama de Bode del modelo del eje con engrane y deformación axial . . . . .	63
<b>4-2</b>	Respuesta del sistema ante una entrada senoidal . . . . .	64
<b>4-3</b>	Transformada de Fourier de la señal de la figura <b>4-2</b> . . . . .	64
<b>4-4</b>	Respuesta del sistema ante una entrada impulso . . . . .	65
<b>4-5</b>	Diagrama de bode de la función correspondiente al grado de libertad ( $\theta_x$ ) . . . . .	65
<b>4-6</b>	Respuesta del modelo Jeffcott ( $\theta_x$ ) . . . . .	66
<b>4-7</b>	Respuesta en frecuencia del modelo Jeffcott en el GDL ( $\theta_x$ ) . . . . .	67
<b>4-8</b>	Diagrama de Bode del sistema acoplado en el GDL ( $y_2$ ) . . . . .	68
<b>4-9</b>	Respuesta del sistema acoplado en el GDL ( $y_2$ ) . . . . .	68
<b>4-10</b>	Respuesta del sistema acoplado con en GDL ( $y_6$ ) . . . . .	69
<b>4-11</b>	Respuesta en frecuencia del modelo Jeffcott en el GDL ( $y_2$ ) . . . . .	69
<b>4-12</b>	Respuesta en frecuencia del modelo del engrane helicoidal en el GDL $\theta_2$ . . . . .	70
<b>4-13</b>	Respuesta del modelo del engrane helicoidal ( $\theta_2$ ) . . . . .	71
<b>4-14</b>	Respuesta del modelo del engrane helicoidal ( $\theta_5$ ) . . . . .	71
<b>4-15</b>	Respuesta en frecuencia del modelo del engrane helicoidal en el GDL ( $\theta_2$ ) . . . . .	72
<b>4-16</b>	Respuesta en frecuencia del modelo del engrane hipoide en el GDL ( $\theta_4$ ) . . . . .	72
<b>4-17</b>	Respuesta del modelo del engrane hipoide ( $\theta_4$ ) . . . . .	73
<b>4-18</b>	Respuesta del modelo del engrane hipoide ( $\theta_3$ ) . . . . .	73
<b>4-19</b>	Respuesta en frecuencia del modelo del engrane hipoide aplicando la entrada en el GDL ( $\theta_4$ ) . . . . .	74
<b>4-20</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{4,4}$ ) . . . . .	75
<b>4-21</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{8,8}$ ) . . . . .	75
<b>4-22</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{38,38}$ ) . . . . .	76
<b>4-23</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{39,39}$ ) . . . . .	76
<b>4-24</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{9,9}$ ) . . . . .	77
<b>4-25</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{10,10}$ ) . . . . .	77
<b>4-26</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{19,19}$ ) . . . . .	78
<b>4-27</b>	Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{20,20}$ ) . . . . .	78
<b>4-28</b>	Respuesta en tiempo de los discos (hipoide) ante una entrada senoidal GDL ( $\theta_{23}$ ) . . . . .	80
<b>4-29</b>	Respuesta en frecuencia de los discos (hipoide) ante una entrada senoidal GDL ( $\theta_{23}$ ) . . . . .	80
<b>4-30</b>	Respuesta en frecuencia del sistema en buen estado (Engrane hipoide) . . . . .	81
<b>4-31</b>	Respuesta en frecuencia del sistema con sobrecarga en los dientes (Engrane hipoide) . . . . .	81

---

<b>4-32</b> Respuesta en frecuencia del sistema con la rotura/desgaste del diente (Engrane hipoide) . . . . .	82
<b>4-33</b> Espectro en frecuencia de la falla en el rodamiento por deterioro en la pista exterior GDL del Soporte ( $x_1$ ) . . . . .	83
<b>4-34</b> Espectro en frecuencia de la falla los elementos rodantes GDL del Soporte ( $x_1$ )	83
<b>4-35</b> Espectro en frecuencia de la falla en el engranaje variando el parámetro de rigidez $k_{d1}$ . . . . .	84
<b>4-36</b> Espectro en frecuencia de la falla en el engranaje variando el parámetro de amortiguamiento $b_{d1}$ . . . . .	85
<b>4-37</b> Comparación del espectro en frecuencia de la falla en el soporte con las primeras 4 combinaciones . . . . .	87
<b>4-38</b> Comparación del espectro en frecuencia de la falla en el soporte con las últimas cuatro combinaciones . . . . .	87
<b>6-1</b> Representación de dos ejes acoplados con un engrane de tipo helicoidal . . .	96
<b>6-2</b> Representación de un engrane hipoide . . . . .	97





# Lista de Tablas

<b>2-1</b>	Tipos de sistemas dinámicos . . . . .	19
<b>3-1</b>	Características de los engranes del mecanismo . . . . .	45
<b>3-2</b>	Características de los ejes y soportes del mecanismo . . . . .	47
<b>3-3</b>	Grados de libertad escogidos para evaluar las fallas . . . . .	53
<b>3-4</b>	Frecuencias características del sistema planteado . . . . .	62
<b>4-1</b>	Variación de rigidez y amortiguamiento para simular fallas en el engrane hipoide	84
<b>4-2</b>	Variación de rigidez y amortiguamiento para simular fallas en el engrane helicoidal . . . . .	85
<b>4-3</b>	Variación de rigidez y amortiguamiento para simular fallas en los soportes-rodamientos . . . . .	86



# 1 Introducción

Los sistemas mecánicos en la actualidad, particularmente las máquinas rotatorias que son sistemas dinámicos, se caracterizan porque en su composición, cuentan con elementos que no presentan un comportamiento rígido. En lugar de esto, se considera vibratorio. Si se analiza este comportamiento se pueden conocer las características del sistema en mención y también las fallas que se pueden llegar a presentar durante su funcionamiento.

Por tanto, las propiedades de los materiales que componen dichos elementos, así como las características de funcionamiento de las máquinas, como alineación, lubricación, entre otros; son factores muy relevantes a la hora de realizar el análisis del comportamiento del sistema y las causas de las posibles fallas que este puede presentar con el paso del tiempo.

## 1.1. Estado del arte

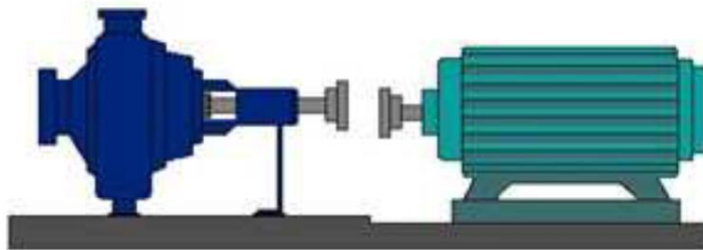
Este proyecto, se desarrolla a partir de algunos trabajos desarrollados previamente, los cuales tienen similitudes con la idea general del mismo, que consiste en analizar el comportamiento vibratorio de las máquinas rotatorias, así como, las fallas que se pueden presentar en algunos componentes del sistema a partir de ese comportamiento analizado. En la Universidad Tecnológica Centroamericana (UNITEC) de Honduras, se desarrolló un trabajo en el año 2013, donde se analizaron las vibraciones en máquinas rotatorias por medio de un software de simulación gracias a la compañía Spectraquest, Inc. que desarrolló un software llamado Machinery Fault Simulator, como se muestra en la figura **1-1**. [1].

En la figura **1-2**, se muestra un motor, un eje de transmisión y el objeto a analizar, en este caso, será la caja de engranajes, donde se planteará la ubicación de acelerómetros en posiciones diferentes para medir y comparar las vibraciones en cada punto.

Trabajos como los desarrollados en el Instituto Tecnológico de Florida, por parte del Departamento de Ingeniería Mecánica y Aeroespacial, donde se presenta información teórica relacionada con el monitoreo de las vibraciones, dentro de lo que se puede resaltar modelos o métodos que permiten analizar vibraciones de una forma mucho más detallada. [2] Estudiantes de la Universidad Tecnológica de Jalisco, desarrollaron un sistema didáctico que permitía monitorear en tiempo real, por medio, del software LabVIEW, las vibraciones generadas a partir de varias configuraciones mecánicas, donde pretendían comprobar el funcionamiento del sistema a partir de una serie de normas ISO ya establecidas. [3] En la Jornada Internacional de Ingeniería e Investigación de septiembre de 2014, se presentó un artículo, que se



**Figura 1-1:** Máquina para simular fallas de Spectraquest Inc



**Figura 1-2:** Machine Fault Simulator de Spectraquest. Inc

enfocaba en el monitoreo de vibraciones usando acelerómetros con tecnología MEMS, pero enfocado en un análisis matemático más profundo para el diseño del sistema, lo que les permitió demostrar gráficamente el comportamiento en frecuencia luego de una serie de pruebas que se pueden apreciar en el documento. [4]

En el año 2015, el Departamento de Física y Astronomía de la Universidad de Upsala en Suecia, desarrolló un proyecto donde se tenía como objetivo principal medir las vibraciones mecánicas con ayuda de un Arduino, para aplicar posteriormente un control, por medio de la plataforma EPICS. [5]

Algo similar fue desarrollado en el año 2017 en Suecia, cuatro colaboradores suecos, especialistas en sistemas de control y automatización de procesos, allí plantearon el análisis de las vibraciones mecánicas, por medio de un acelerómetro ADXL345 y una microcomputadora Raspberry Pi, donde se evidencia un sistema de monitoreo capaz de captar variaciones mínimas, empleando el sistema MAVAS. [6]

En ese mismo año, en Polonia, un grupo de seis personas de diferentes instituciones universitarias, presentaron una propuesta muy similar a la anterior; un sistema para analizar la

vibración por medio de una microcomputadora Rapsberry PI y el sensor ADXL345. En el documento se encuentran plasmadas las gráficas correspondientes de las pruebas realizadas en cada uno de los ejes. [7]

Adicionalmente, podemos encontrar algunos trabajos enfocados al análisis de vibraciones, orientado a la detección de fallas y realizar mantenimiento preventivo. Para la quinta edición del Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico de 2007 en México, en la de la Universidad de Guanajuato, fue presentado artículo, por parte de un grupo de estudiantes del Departamento de Electrónica de la Universidad de Guanajuato, donde se desarrolla un análisis de vibraciones para la detección de fallas, donde utilizaron acelerómetros con tecnología MEMS y un circuito FPGA. [8]

También se han desarrollado artículos donde se llevan a cabo, análisis de sistemas mecánicos y sus componentes, a partir de consideraciones de diferentes grados de libertad que ha medida que van aumentando, hacen que el mismo se vuelva más complejo. Particularmente, con sistemas de transmisión, donde se analiza el comportamiento característico de estos elementos, específicamente, engranajes.

Un artículo fue presentado por un grupo de ingenieros mecánicos para la Jornada de Sonido y Vibración del año 2007, llevado a cabo en Estados Unidos en la Universidad de Cincinnati, donde estudiaban la dinámica de un engrane hipoide, considerando varias características y condiciones del sistema. Allí desarrollan un modelo matemático que permitía describir el comportamiento del mecanismo. [9]

Para la Jornada de Vibración y Control, llevada a cabo en el presente año, fue presentado y publicado un artículo por 'Sage Publishing', similar al mencionado en el párrafo inmediatamente anterior, pero se enfocó en engranes helicoidales. En el artículo se presenta un modelo matemático que tiene en cuenta múltiples grados de libertad para permitir un análisis más completo del sistema, así como las gráficas que describen el comportamiento a partir de esas ecuaciones planteadas. [10]

También se han desarrollado artículos donde se analiza el comportamiento de los sistemas pero más orientado hacia las fallas en los mismos. Similar a la idea que se tiene en el proyecto, ya que a partir del modelo dinámico, se evaluarán algunas de estas fallas en el sistema. Para la Jornada de Análisis y Prevención de Fallas del año 2006, un grupo de colaboradores presentó un artículo donde se consideraba un rotor flexible, para su respectivo modelamiento, y el análisis de las posibles fallas que podía presentar, para este caso, desbalanceo y desalineamiento. [11]. Similar a este artículo, un grupo de docentes e investigadores de la Universidad de Belgrado, presentaron en el año 2007, una propuesta para monitorear y prevenir diferentes fallas en las partes o componentes de los sistemas rotatorios, donde mostraban algunos ejemplos de fallas en las máquinas, específicamente en rodamientos y ejes, y posibles soluciones para las mismas, a partir de su causa u origen. [12]

En la actualidad, las grandes industrias deben evaluar múltiples aspectos como el financiero,

los activos en cuanto a maquinaria se refiere, los empleados, etc, todo con el fin de obtener una elevada productividad y la mayor eficiencia posible. Los grandes avances tecnológicos, han permitido que se desarrolle una nueva manera de analizar el comportamiento de la mayor parte de la maquinaria de las grandes empresas, la Industria 4.0. La inteligencia artificial, el internet de las cosas, la implementación de robots, entre muchos otros, son las principales herramientas que se emplean para automatizar procesos y así elevar la producción.

Adicionalmente, este tipo de tecnología se puede usar para realizar control de la maquinaria. Allí, se evalúa el estado de las mismas y luego de hacer la evaluación correspondiente, se abre la posibilidad de efectuar mantenimiento predictivo, lo que permite reducir daños o prolongar la vida útil de los componentes y de la máquina en general. Las vibraciones mecánicas son un factor clave en todo tipo de maquinaria, sin importar el tamaño, su composición, etc. Siempre estará presente este fenómeno, generando principalmente desgaste y ruido al sistema en general. Se definen como cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo. También conocido como oscilaciones. [13]. Aunque no todas las oscilaciones son perjudiciales para los sistemas, puesto que cada mecanismo tiene una frecuencia natural de oscilación, que es inherente al funcionamiento del mecanismo. A medida que se presentan problemas de este tipo en la industria, va surgiendo la necesidad de realizar cambios para evitar estos daños. Es importante medir vibraciones por varios factores, entre ellos, realizar pruebas estructurales para medir propiedades de los materiales, implementar sistemas de control para detectar la presencia de las mismas y corregirlas, y finalmente, llevar a cabo mantenimientos predictivos para prevenir daños mucho mayores en las máquinas. [14].

Por tanto, se empezó a desarrollar tecnología capaz de percibir estas vibraciones ajenas al sistema base, o que simplemente se van generando a lo largo del tiempo de uso de la máquina. Existen dispositivos hoy en día, que ayudan en el análisis de este fenómeno, como el vibrómetro que se encarga de medir desplazamiento vibratorio, el velómetro que mide la velocidad de las vibraciones, o el que se utilizará en este caso, el acelerómetro, que se define como un instrumento que mide la aceleración de un cuerpo vibratorio. [15]

Existen equipos con la capacidad de realizar mediciones y análisis tomando como base un registro de datos previo, donde se puede obtener la vibración que genera un sistema mecánico, pero cuentan con tecnología que se encuentra fuera del alcance de muchas industrias, por lo que no tiene un uso común, por consiguiente, no se enfatiza en el estudio de los mismos. Por lo que se deben idear nuevas maneras de obtener resultados con un menor costo y cercanos a la realidad.

## 1.2. Planteamiento del problema

En la actualidad, uno de los factores que más afecta el desarrollo de las grandes empresas son las fallas que se van generando en su maquinaria a medida que va pasando el tiempo, debido al uso constante y muy pocas veces controlado de las maquinas en general, así como sus componentes internos. Podemos encontrar que uno de los factores que afecta el correcto funcionamiento de las máquinas, son las vibraciones, que se encuentran en cualquier sistema mecánico y que muchas veces no son tenidas en cuenta para evitar fallos posteriores, que pueden ser incluso más graves que los generados inicialmente.

Debido al elevado costo que representa cambiar las piezas, sin evaluar si ya se cumplió o no su vida útil, así como, implementar sistemas de medición que cuente con la capacidad de analizar las vibraciones, no es muy común apreciar estrategias de este tipo en las máquinas empleadas hoy en día. Adicionalmente, se puede llegar a pensar, que por medio de una aplicación en el área electrónica y gracias a los avances tecnológicos actuales, es posible encontrar una solución al problema, pero no se ha desarrollado el enfoque de este campo, hasta tal punto de llegar a profundizar en el mismo, y de esta manera, poder realizar análisis mucho más completos y detallados. Existen áreas encargadas de medir y comparar, pero no se explora del todo, de tal forma que se puedan plantear soluciones para estas condiciones inevitables que se presentan a diario en las industrias.

Es por esto que surge la necesidad de diseñar alternativas, para entender la dinámica de los sistemas y de esta forma desarrollar métodos de bajo costo que permitan su implementación. A partir de esta, obtener resultados similares a los ya desarrollados industrialmente, que sean capaces de captar dichas irregularidades, las cuales, se presentan en el momento de utilizar cualquier tipo de maquinaria, pero que no pueden ser eliminadas o disminuidas de manera netamente mecánica, ya que se podría llegar a afectar la producción o lo que se esté llevando a cabo en el proceso mismo.

### 1.3. Justificación

El análisis dinámico de los sistemas rotatorios es importante para entender el funcionamiento de los mismos, cuales componentes se encuentran más propensos a sufrir daños y como prevenirlos hasta donde sea posible. Como se mencionó anteriormente, estos métodos no son muy usados en la actualidad especialmente por sus costos, ya que son muy elevados y deben adaptarse principalmente a los cortos presupuestos de las industrias en países en desarrollo. Igualmente cabe resaltar que si existe una minoría de empresas que aplican este tipo de tecnologías. Por tanto, se pretende analizar este tipo de sistemas y proponer algunas alternativas similares a mecanismos ya desarrollados, que permita caracterizar las vibraciones de una serie de pruebas y representarlas como señales, gracias a los datos obtenidos del sensor empleado, facilitando así su análisis y el manejo de esta información, por medio de un monitoreo digital del proceso realizado.

El desarrollo del proyecto, consta principalmente del estudio de las vibraciones de cualquier tipo de máquina para este caso, una caja de engranajes, buscando un mejor rendimiento del mismo. El simple hecho de ayudar a los operarios a encontrar el momento indicado para realizar un mantenimiento previo, donde no se tenga que intervenir la máquina únicamente por un daño grave, facilita a las empresas a manejar menos inversiones, garantizando una mayor duración o vida útil de los componentes, entre otras, son algunas de las principales razones por las que se llevan a cabo este tipo de estudios. Para este caso, el diseño del sistema a implementar, será a una escala menor, permitiendo observar y estudiar este problema con ayuda de herramientas tecnológicas, que pueden llegar a mejorar el rendimiento del objeto analizado a mayores escalas.



## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo general**

Modelar un sistema de transmisión de potencia de dos etapas para detectar fallas a través del análisis de su comportamiento vibratorio.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

1. Definir un conjunto de fallas comunes para sistemas de transmisión de potencia, específicamente aquellos que involucren engranajes.
2. Seleccionar un sistema de transmisión de potencia que contenga engranajes, en el cual se presenten fallas comunes.
3. Representar matemáticamente la dinámica del sistema de transmisión de potencia seleccionado, a partir del estudio de uno de los diferentes métodos de modelado, para analizar su comportamiento vibratorio.
4. Realizar la simulación de una posible señal experimental, tomada por acelerómetros en una posición determinada del mecanismo, donde se puedan inducir fallas que serán detectadas a partir del análisis en frecuencia.
5. Desarrollar la propuesta de un sistema de medición de bajo costo, indicando el posicionamiento adecuado de acelerómetros y el análisis de las señales obtenidas.

## 1.5. Estructura general

El documento se desarrollará en varios capítulos. A continuación se presentará una breve descripción de cada uno:

En la introducción, se realizará una descripción general de las temáticas manejadas en el documento, así como, una breve revisión bibliográfica donde se contextualiza la idea general del proyecto en la actualidad.

En el marco teórico, se encontrará la fundamentación teórica del documento. Se profundizará en los conceptos principales para el desarrollo posterior de la idea propuesta inicialmente.

La metodología se desarrollará a partir de la fundamentación detallada en el marco teórico, en el tercer capítulo, se seccionará por etapas el desarrollo de la idea general del proyecto.

En la etapa de resultados, se realizará un análisis de cada una de las etapas de la metodología, y de los resultados obtenidos en cada una de las mismas.

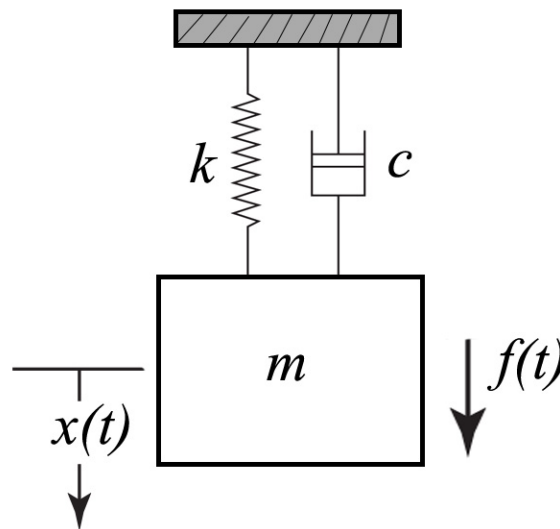
En las conclusiones, se realizará una revisión general de los resultados obtenidos en el desarrollo del trabajo, así como, el cumplimiento de los objetivos planteados inicialmente.

## 2 Marco teórico

### 2.1. Fundamentos de vibración

#### 2.1.1. Modelo de un grado de libertad

Un sistema básico para entender el comportamiento vibratorio de los sistemas dinámicos se encuentra detallado en la figura 2-1, donde se muestra el modelo de un sistema masa resorte amortiguador, donde  $m$  es la masa del sistema,  $k$  representa la rigidez,  $c$  el amortiguamiento,  $f(t)$  es la fuerza resultante del sistema y  $x(t)$  es el desplazamiento del mismo.



**Figura 2-1:** Modelo general del sistema masa resorte amortiguador

*Fuente: L. Adams-Rotating machinery vibration*

Inicialmente, el sistema se puede analizar por medio de la segunda ley de Newton, gracias al diagrama de cuerpo libre y la sumatoria de fuerzas, se obtiene la ecuación 2-1, que representa la ecuación general de movimiento del sistema.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = f(t) \quad (2-1)$$

El movimiento descrito por el modelo, es oscilatorio. Es el más sencillo que se puede presentar en un sistema mecánico. [16] Generalmente, gracias al movimiento generado a partir de una fuerza externa, una masa y un resorte y/o amortiguador, que se encarga de regresar

dicha masa a su posición inicial. Es un sistema con un solo grado de libertad, que, en condiciones ideales, tendría un comportamiento representado por una señal senoidal. En aplicaciones reales, el factor influyente es el amortiguamiento, ya que, a lo largo del tiempo, causará que la amplitud disminuya, hasta regresar a su posición inicial o de equilibrio. [16]. Se puede representar idealmente, por medio de una función matemática, que describe un comportamiento armónico, como se muestra en la ecuación 2-2 [13], donde  $\omega$  es la frecuencia natural del sistema, que se define como la frecuencia con la cual vibra un sistema de manera libre o natural, en condiciones ideales.

$$x(t) = A \text{ sen}(\omega t) \quad (2-2)$$

Donde  $A$  representa la amplitud de dicha señal, y  $\omega$  la frecuencia de la misma.

Para representar la dinámica de los sistemas incluyendo los factores de amortiguamiento y rigidez, se debe tener en cuenta las frecuencias naturales del mismo, y está representado por la ecuación 2-3. Esta describe el comportamiento de cada grado de libertad del sistema, a partir de su representación de manera matricial.

$$x(t) = X e^{\lambda t} \quad (2-3)$$

Un concepto importante para el análisis de los sistemas dinámicos, es la frecuencia natural del mismo. Dependiendo de la cantidad de grados de libertad que tenga, así mismo serán las frecuencias naturales del mecanismo.

Se entiende como la frecuencia a la cual vibra el sistema de manera libre o natural. De acuerdo con la ecuación de movimiento, esta frecuencia natural depende de cada uno de los factores que la componen. Como la ecuación 2-1, es de segundo orden, las raíces del polinomio representan la frecuencia natural del mismo. [17]

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)} \quad (2-4)$$

Donde la frecuencia natural  $\omega_n$  está dada por la ecuación 2-5:

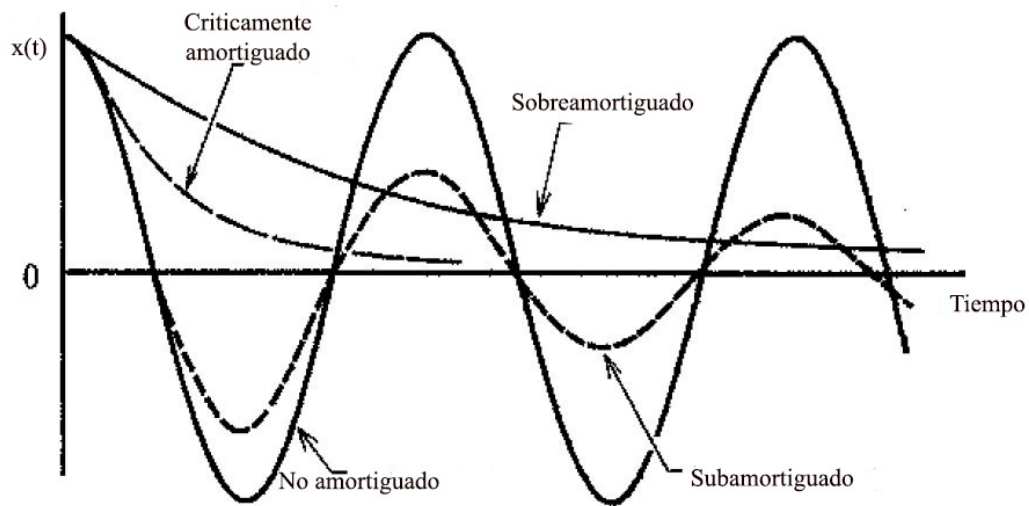
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-5)$$

Los sistemas se pueden dividir en 3 categorías dependiendo de las características del mismo y se muestran en la tabla **2-1**. [17]

El comportamiento de dichas categorías se aprecia en la figura **2-2**.

Categoría	Condición	Raíces
Subamortiguado	$(\frac{c}{2m})^2 < \frac{k}{m}$	Complejos conjugados ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega_d$ )
Críticamente amortiguado	$(\frac{c}{2m})^2 = \frac{k}{m}$	Reales iguales ( $\lambda_{1,2} = \alpha$ )
Sobreamortiguado	$(\frac{c}{2m})^2 > \frac{k}{m}$	Reales ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ )

**Tabla 2-1:** Tipos de sistemas dinámicos



**Figura 2-2:** Comportamiento en el dominio del tiempo de los sistemas dinámicos

*Fuente: L. Adams-Rotating machinery vibration*

### 2.1.2. Transformación de señales al dominio de Laplace

La transformada de Laplace permite convertir un sistema del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, ya que permite evaluar de mejor manera su comportamiento. Para realizar este procedimiento se tendrá en cuenta la ecuación general de movimiento 2-6, y se aplicará la transformada mencionada como se muestra en la ecuación 2-7:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = f(t) \quad (2-6)$$

$$m[X(S)]S^2 + c[X(S)]S + k[X(S)] = F(S) \quad (2-7)$$

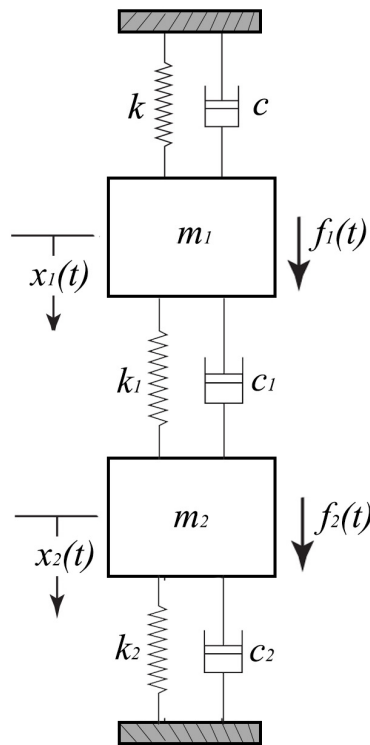
Para obtener la función de transferencia del sistema, se debe despejar de la ecuación obtenida, la salida en función de la entrada, es decir,  $X(S)$  en función de  $F(s)$ , como se muestra a continuación:

$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2 + cS + k} \quad (2-8)$$

Finalmente, esta función  $G(S)$ , es la que se evaluará durante el desarrollo del modelado del sistema rotatorio seleccionado.

### 2.1.3. Modelo de varios grados de libertad

Siguiendo el ejemplo básico mencionado en la figura 2-1, se plantea un modelo con más de una masa, ya que cada una de ellas representa un grado de libertad adicional. Este sistema se muestra en la figura 2-3:



**Figura 2-3:** Modelo general con varios grados de libertad

*Fuente: L. Adams-Rotating machinery vibration*

Para este caso, donde hay más de una masa, el comportamiento del sistema se desarrolla de la misma manera por medio de la ecuación de movimiento 2-1, y se obtiene la nueva expresión de forma matricial mostrada en la ecuación 2-9.

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2-9)$$

Donde  $\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t)\}$ , representa el vector que define los grados de libertad del sistema.

Las matrices que se aprecian en la ecuación 2-9, representan los coeficientes que acompañan al vector  $\{x(t)\}$  se muestran a continuación. [17]:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Donde  $M$  es la matriz de las masas del sistema,  $m_1$  y  $m_2$  corresponden a la masa 1 y 2 respectivamente.  $C$  es la matriz de amortiguamiento,  $c$ ,  $c_1$  y  $c_2$  corresponden a los coeficientes de amortiguamiento.  $K$  es la matriz de rigidez,  $k$ ,  $k_1$  y  $k_2$  corresponden a los coeficientes de rigidez.

El comportamiento del sistema, se plantea de la misma manera representada en la ecuación 2-2, pero cada masa, tiene su ecuación característica, puesto que cada una presenta una frecuencia natural determinada.

Para este caso, el procedimiento para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, se tendrá en cuenta la ecuación general de movimiento en forma matricial 2-9, y se aplicará la transformada de Laplace como se muestra en la ecuación 2-13:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$$[M] \{X(S)\} S^2 + [C] \{X(S)\} S + [K] \{X(S)\} = \{F(S)\} \quad (2-13)$$

Para obtener la función de transferencia del sistema, se debe despejar de la ecuación obtenida, la salida en función de la entrada, es decir,  $X(S)$  en función de  $F(s)$ , como se muestra a continuación:

$$G(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{[M]S^2 + [C]S + [K]} \quad (2-14)$$

Para este caso, la función de transferencia  $[G(S)]$ , pasa a ser una matriz de funciones de transferencia como se muestra a continuación:

$$[G(S)] = \begin{bmatrix} G_{(1,1)} & G_{(2,1)} \\ G_{(1,2)} & G_{(2,2)} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

Donde, por ejemplo  $G_{(1,1)}$ , representa que el sistema se somete a una entrada en el grado de libertad número uno, y que se evalúa la respuesta en el mismo grado de libertad.

## 2.2. Fundamentos de dinámica rotacional

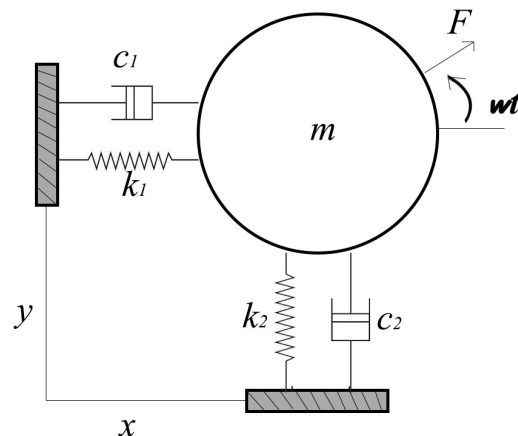
El estudio de la dinámica de los sistemas mecánicos en general ha permitido realizar mejoras en la mayoría de ellos, modificando algunos componentes o características. Una gran variedad de ellos, está conformado por los sistemas rotatorios, que se caracterizan porque cuentan con un rotor, que junto al estator generan el torque suficiente para transmitir movimiento, como su nombre lo indica de rotación. Los sistemas rotatorios se pueden representar por medio de sistemas lineales, que de manera similar a un sistema de varios grados de libertad (GDL), puede representarse por la ecuación de movimiento 2-16, que se muestra a continuación. [18]

$$M\ddot{q}(t) + (C + G)\dot{q}(t) + (K + H)q(t) = f(t); \quad (2-16)$$

Donde  $q(t)$  es el vector de posición que contiene las coordenadas generales del sistema,  $M$  representa la matriz de masa,  $C$  representa la matriz de amortiguación,  $G$  representa la matriz giroscópica,  $K$  representa la matriz de rigidez,  $H$  representa la matriz circulatoria.

### 2.2.1. Modelo de 2 grados de libertad

Una forma de simplificar el análisis de los sistemas rotacionales, se presenta en el esquema de la figura 2-4, que representa la vista frontal de un eje o disco, con sus respectivos grados de libertad en los ejes cartesianos  $X$  y  $Y$ .



**Figura 2-4:** Modelo de un eje con dos grados de libertad

*Fuente: L. Adams-Rotating machinery vibration*



La ecuación 2-17 [17], representa los grados de libertad del sistema, siguiendo las expresiones desarrolladas previamente son las siguientes:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x &= F_0\text{Cos}(\omega t) \\ m\ddot{y} + c_2\dot{y} + k_2y &= F_0\text{Sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (2-17)$$

Donde la primera ecuación representa el grado de libertad en el eje X, la segunda el del eje Y. Los coeficientes se representan a partir de la figura 2-4, y las fuerzas resultantes están dadas por cada uno de los ejes coordenados.

### 2.2.2. Modelo Rotacional de Jeffcott

Para el modelado dinámico del sistema, se tomó como base el “Modelo Rotacional de Jeffcott”, que consiste en un disco, montado en un eje, el cual permite evaluar el comportamiento del mismo y principalmente, las vibraciones. El modo trivial se muestra en la figura 2-5, y cuenta con 4 grados de libertad.

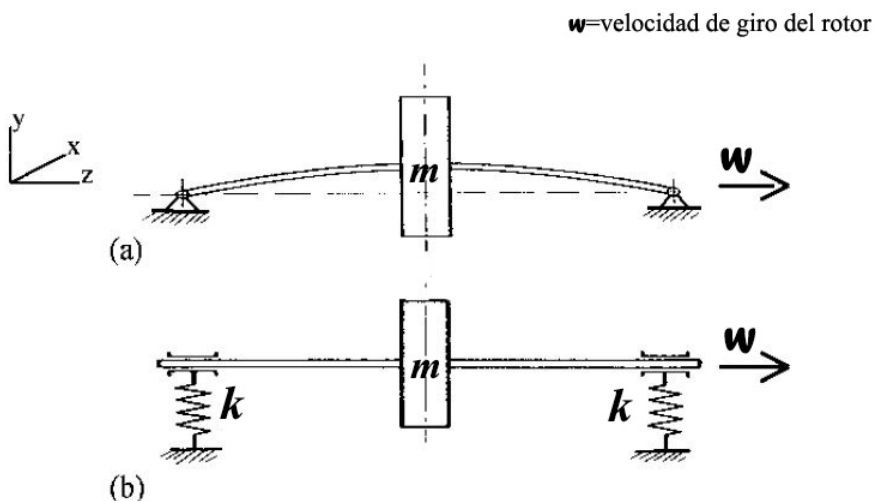


Figura 2-5: Modelo de rotor Jeffcott

- a) Modelo original b) Modelo modificado con flexibilidad en los soportes.

*Fuente: L. Adams-Rotating machinery vibration*

El modelo del sistema, presenta el siguiente comportamiento de forma matricial. Este es el modelo de Jeffcott teniendo en cuenta la flexibilidad en los soportes como se muestra en la figura 2-5, cuenta con cuatro grados de libertad, y su comportamiento se describe en la

ecuación 2-18. [17]

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega I_P \\ 0 & 0 & -\omega I_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ M_x(t) \\ M_y(t) \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

Donde:  $I_T$  es la Inercia transversal del disco,  $I_P$  es la Inercia polar del disco,  $M_X$  es el Momento aplicado sobre el disco (Eje X),  $M_Y$  es el Momento aplicado sobre el disco (Eje Y),  $\omega$  es la Velocidad de giro del rotor,  $K_X$  es el coeficiente de Rigidez (X),  $K_Y$  es el coeficiente Rigidez (Y),  $F_x$  es la fuerza resultante (Eje X) y  $F_y$  es la fuerza resultante (Eje Y).

Para un análisis más profundo del mismo sistema, se desarrolla el sistema mostrado en la figura 2-6 , que plantea el mismo disco montado en un eje, pero visto en 3 dimensiones, y teniendo en cuenta un grado de libertad adicional por cada elemento del ejercicio anterior, es decir, un sistema final que cuenta con 8 grados de libertad.

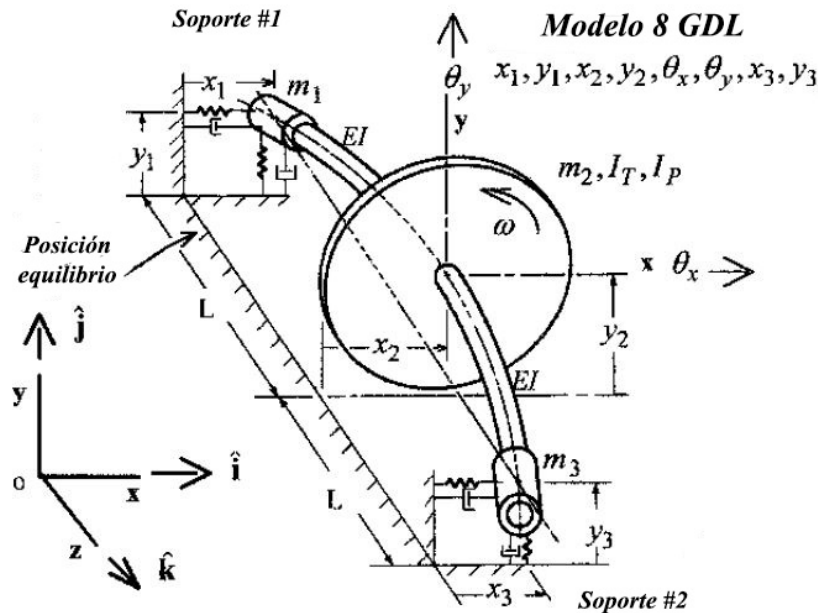


Figura 2-6: Modelo no trivial de 8 GDL

Fuente: L. Adams-Rotating machinery vibration

El procedimiento completo, para evaluar este sistema, se encuentra en el libro mencionado previamente [17]. En la metodología, se podrán apreciar las ecuaciones que describen el

comportamiento del mismo, cada una de las ecuaciones, representa un grado de libertad para el modelo. Para obtener la expresión completa, se realiza el procedimiento encontrado en el Anexo 6.1.

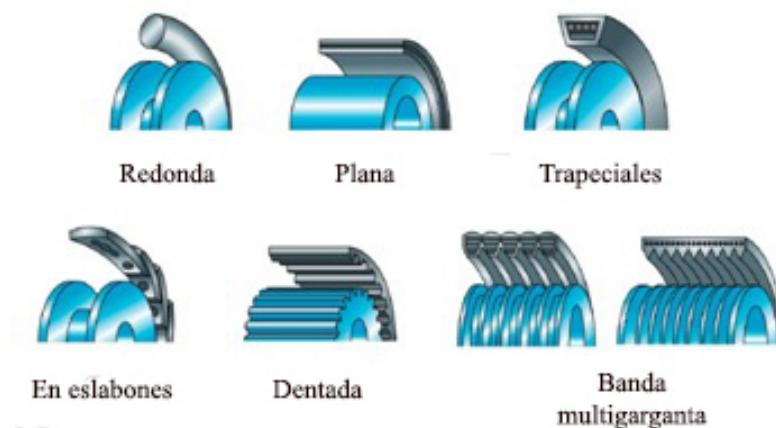
## 2.3. Sistemas de transmisión de potencia

Los principales componentes empleados para los sistemas de transmisión de potencia, son las bandas y las cadenas, junto con los engranes acoplados. [19]

### 2.3.1. Bandas

Una banda es un elemento que tiene como característica principal su elasticidad, y se usa para conectar dos poleas, generalmente, con el objetivo de reducir la velocidad de transmisión. Existen varios tipos de bandas dependiendo del uso, como se muestra en la figura 2-7, dentro de las que se pueden destacar las bandas de tipo plana, acanaladas, en V normal, en V en ángulo doble, entre muchas otras. [19]

La banda plana es la más sencilla y suele utilizarse para maquinaria delicada debido a que su superficie lisa permitirá un deslizamiento si en algún momento se aplica más torque evitando daños en los componentes de la máquina. Las bandas en V debido a su forma, permite que se acune en la ranura firmemente, incrementando la fricción y permitiendo así transmitir mayor potencia al sistema. Las bandas dentadas o acanaladas brindan más flexibilidad a la banda, brindando una mayor eficiencia. Adicionalmente, permiten trabajar con diámetros de polea mucho más pequeños que una banda normal.



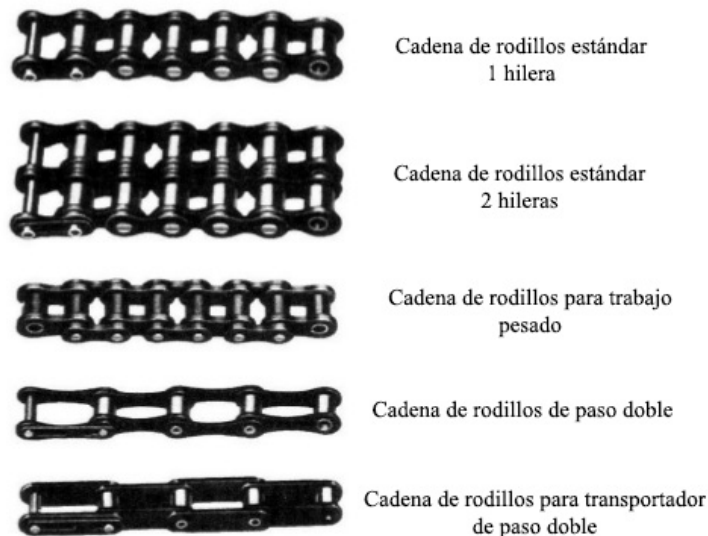
**Figura 2-7:** Tipos de bandas de transmisión

*Fuente: D. Algaba - Técnicas de transmisión de movimiento.*

### 2.3.2. Cadenas

Al igual que las bandas, son elementos empleados para poder transmitir la potencia en los sistemas mecánicos, pero se diferencian en su composición, ya que cuentan con una serie de eslabones que se unen por medio de pernos. Este diseño brinda mayor flexibilidad y la capacidad de transmitir fuerzas de tensión de una mayor magnitud. [19]

Al igual que las bandas, existen diferentes tipos de cadenas, dependiendo del uso. El más común es la cadena de rodillos que tiene como característica principal, que los rodillos sobre cada perno, permite una fricción muy baja entra la cadena y las catarinas o los piñones. Así mismo, este tipo de cadenas tienen diferentes diseños como se aprecia en la figura 2-8. Se diferencian principalmente por el tipo de trabajo al que serán sometidos, ya que deben cumplir determinadas especificaciones como resistencia a la tensión, trabajo en diferentes condiciones ambientales, entre otras.



**Figura 2-8:** Tipos de cadenas de transmisión

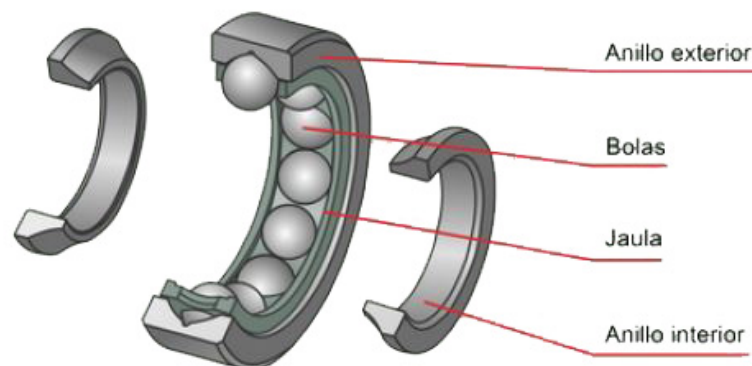
*Fuente: Mott-Diseño de elementos de máquinas-4ta Edición*

Las correas y cadenas deben ser elementos flexibles para poder soportar la tensión a la que son sometidas y de esta manera poder completar la transmisión de movimiento. Esto puede originar mayor ruido y presentar fallas de manera más frecuente que en elementos más rígidos como los engranajes o discos de transmisión. Este ruido se traduce en vibraciones anormales, que se pueden asociar a sobrecargas en las mismas. [20]

### 2.3.3. Ejes y rodamientos

Los cojinetes son los componentes mecánicos con mayor utilidad en sistemas rotarios, debido a su adaptación e implementación, ya que permite acoplar elementos móviles y fijos. Pero a su vez pueden presentar mayores problemas, puesto que se puede considerar que son el soporte para el funcionamiento adecuado de las demás partes del mecanismo.[19]

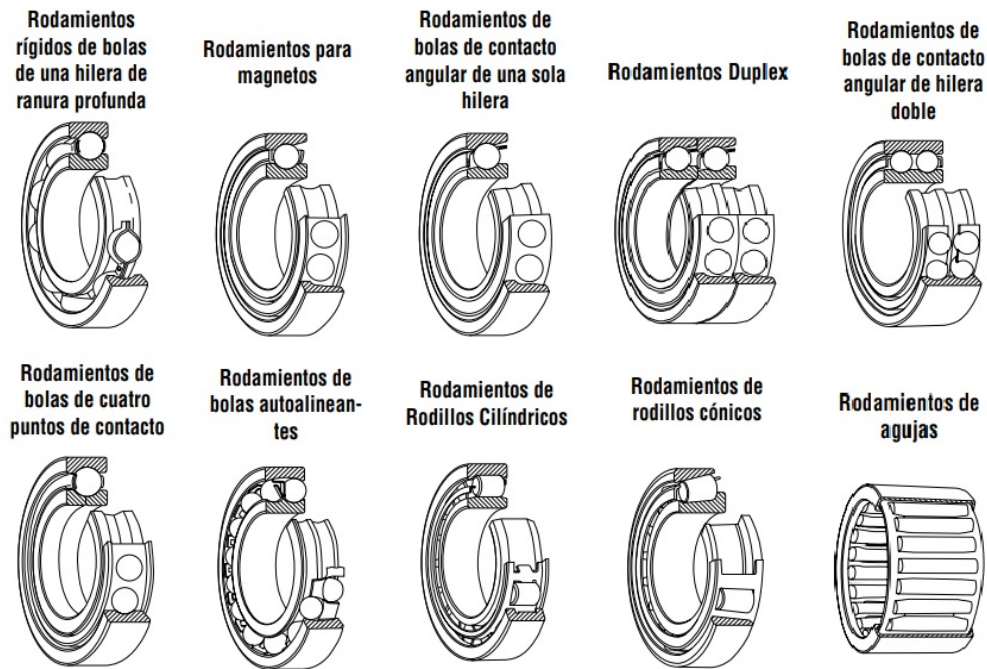
Por su parte, los rodamientos brindan el soporte necesario a los sistemas de transmisión de potencia, por lo que son componentes vitales en la industria para las máquinas rotativas. Sin embargo, la duración de su vida útil dependerá de múltiples factores, como puede ser la carga a la que sean sometidos, un adecuado mantenimiento, condiciones del ambiente de trabajo, velocidad de funcionamiento de la máquina, entre muchos otros. Por lo tanto, es indispensable revisar constantemente su comportamiento. En la figura 2-9, se muestra la estructura general de un rodamiento radial de bolas, que es comúnmente usado.



**Figura 2-9:** Estructura de un rodamiento radial de bolas

*Fuente: Catálogo: Tipos y características de los rodamientos. NSK*

Existe una gran variedad de tipos de rodamientos, dentro de los que cabe destacar rodamientos radiales o axiales, con subcategorías como rodamiento cilíndricos, de bolas, roldanas, entre otros.[21] Su implementación depende estrictamente del uso que se le vaya a dar, la carga a la que van a ser sometidos, entre otros factores. En la figura 2-10 se muestran los tipos de rodamientos más comunes, y son extraídas del manual de NSK. [22]



**Figura 2-10:** Tipos de rodamientos más comunes

*Fuente: Catálogo: Tipos y características de los rodamientos. NSK*

### 2.3.4. Engranajes

Un engrane, es uno de los componentes más usados en el diseño de maquinaria o mecanismos. Su función principal es transmitir el movimiento generado de un eje rotativo a otro, por medio de ruedas dentadas. Se pueden utilizar para aumentar o disminuir la velocidad dependiendo de las especificaciones de diseño planteadas inicialmente. El uso de los rodamientos en los sistemas de transmisión, por encima de las bandas o correas, reducen el ruido y el desgaste, y con ayuda del rodamiento, facilita el movimiento del eje. [23]

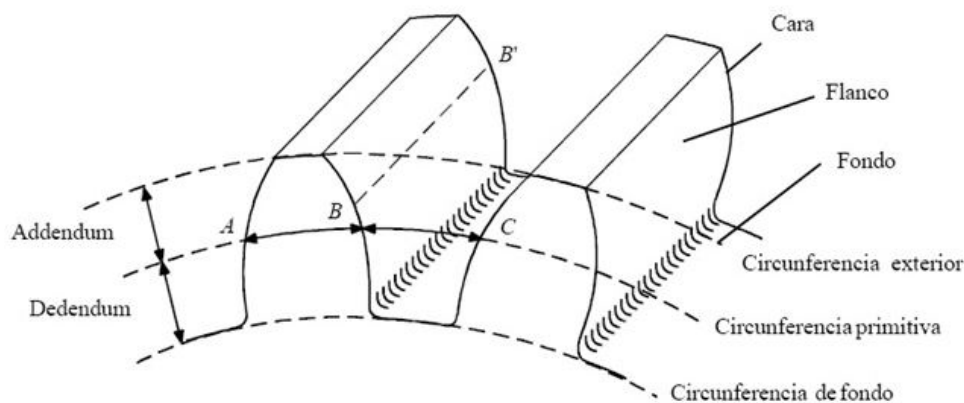
Un engrane presenta las siguientes características básicas:

Dentro de los tipos de engrane de la figura **2-12**, encontramos el recto (**2-12 a**) que es el más común y sencillo de los tipos de engranes. Sirven para transmitir el movimiento entre ejes paralelos entre sí, como la mayoría de mecanismos que se utilizan en la industria.

El engrane tipo piñón-cremallera figura (**2-12 b**), se caracteriza porque el piñón o engrane recto, gira alrededor de una base plana o cremallera. Este tipo se utiliza para transmitir movimientos de traslación.

El engrane Interno (**2-12 c**) diferencia de un engrane recto, estos tienen los dientes en su superficie interior. Se usan en conjunto con un engrane recto, generalmente, para reducir la velocidad de giro.

El engrane helicoidal (**2-12 d**) tiene muchas similitudes con los engranes rectos, ya que sirven



**Figura 2-11:** Características de los dientes de los engranajes

*Fuente: CLR - Características de un engranaje*

para las mismas aplicaciones. La diferencia es que los dientes están orientados con cierto ángulo de inclinación hacia el eje de rotación, brindando un mejor acoplamiento y reduciendo el ruido. Son ideales para aplicaciones donde se necesiten velocidades elevadas. Debido a esta inclinación, se generan fuerzas axiales debido a la forma de los dientes. [19]

El engrane de espina de pescado o helicoidal doble (2-12 e), se caracteriza por su diseño, ya que se puede explicar cómo dos engranes helicoidales opuestos. Sirve como contrapeso a la fuerza de empuje producida por un único engrane del mismo tipo.

El engrane cónico (2-12 f), tiene como característica que los dientes de este tipo, están moldeados sobre una superficie cónica, lo que les permite transmitir el movimiento entre dos ejes que no son paralelos entre sí. Generalmente son perpendiculares, pero se pueden usar con un ángulo de inclinación menor.

El engrane de inglete (2-12 g) es un tipo de engrane cónico donde los dos son iguales y están acoplados únicamente de forma perpendicular, es decir, solamente a  $90^\circ$ .

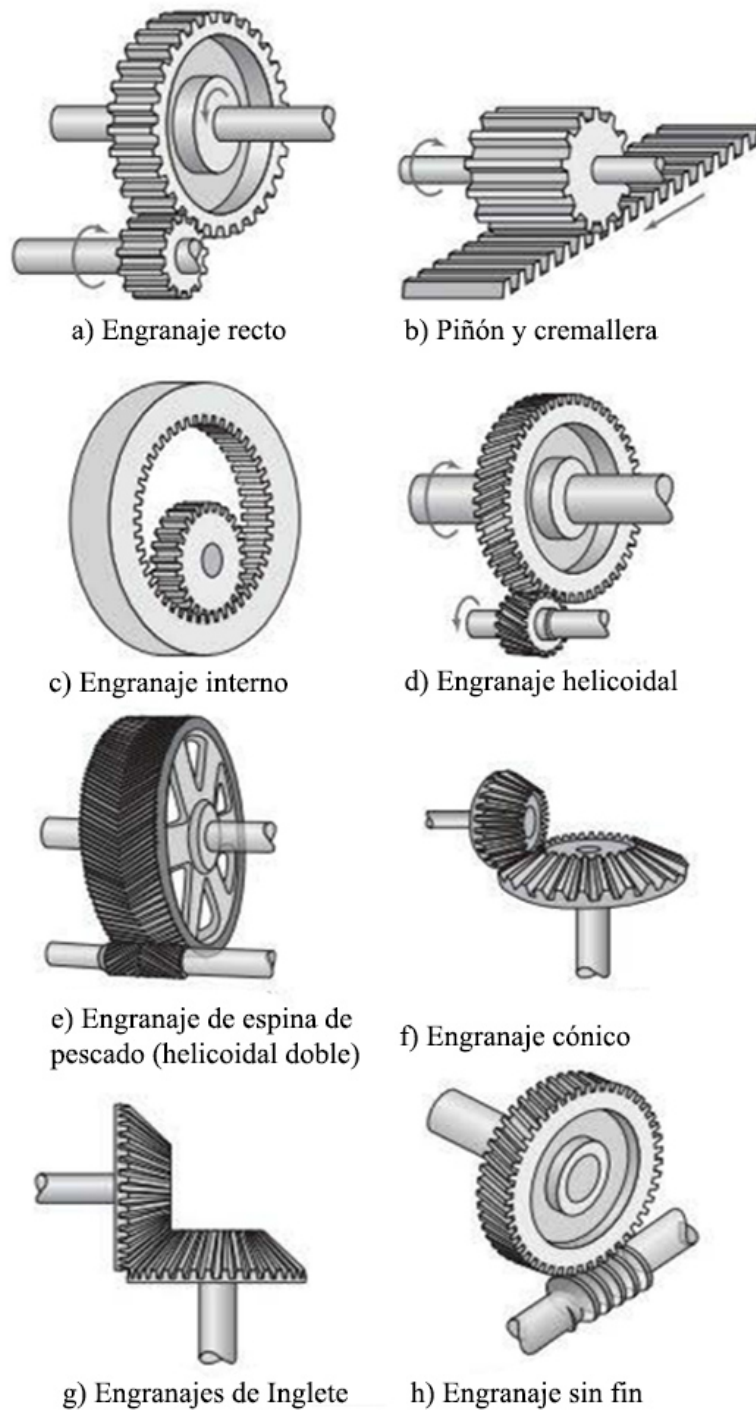
Los engranes sin fin (2-12 h), están conformados por un engrane sin fin y un tornillo sin fin. Este último tiene forma de espiral e impulsa el engrane, lo que permite reducir en gran medida la velocidad de giro. No se puede generar movimiento a partir del engrane, únicamente se puede transmitir por medio del eje que en este caso es tornillo.

## 2.4. Fallas comunes en sistemas de transmisión

### 2.4.1. Diagnóstico de vibraciones

Los tipos de fallas, que se mostrarán a continuación, fueron extraídos del documento Análisis de maquinaria. [24].

Además, para un correcto análisis de las máquinas y profundizar aún más se extreará la



**Figura 2-12:** Tipos de engranes

*Fuente: H. Myszka - Máquinas y mecanismos - 4ta Edición*

información mostrada en el manual de análisis de vibraciones desarrollado por Power-MI. [25].



El desbalanceo es uno de los que más afectan las máquinas rotatorias. Existen dos tipos de desbalanceo en las máquinas rotatorias. El estático y el dinámico, que se caracteriza porque presenta vibración con una frecuencia igual a la de la velocidad de giro del motor medida en Revoluciones por segundo (RPS).

La desalineación se divide en angular, que se caracteriza por altas vibraciones axiales y paralela, que tiene altas vibraciones radiales. Se presenta en las frecuencias  $1X$  y  $2X$  e incluso  $3X$ , donde  $X$  es la velocidad de giro, es decir, una, dos y hasta tres veces. La holgura mecánica se presenta por tolerancias inadecuadas o aflojamiento. Puede llegar a generar armónicos, que tienen como característica principal, que son armónicos fraccionarios de la velocidad de giro  $1X$  (RPS).

La excentricidad, es similar al problema de desbalanceo, por lo que suelen confundirse. El centro de rotación del eje del motor que transmite y el centro geométrico de la polea o engranaje, no coinciden. Presenta una mayor vibración en la frecuencia  $1X$  de velocidad de giro del motor (RPS).

El rotor o eje pandeado se produce cuando se somete el eje a esfuerzos excesivos, comúnmente en ejes largos. Si el pandeo está cercano al centro del eje, presenta vibraciones con frecuencia igual a la de giro  $1x$  (RPS), y si está más cerca del soporte o rodamiento, se presenta en  $2x$  (RPS).

La resonancia es uno de los problemas con más complicaciones y que se debe tener muy en cuenta. Si se le aplica una velocidad de giro, similar o incluso igual, a la frecuencia natural del sistema, se presenta una amplificación de la amplitud y por tanto, una vibración del sistema mucho mayor, causando daños más rápido de lo que se prevee.

## 2.4.2. Fallas en engranes

Las fallas en engranes han sido documentadas debido a su importancia dentro de la maquinaria [26].

### Fallas por desgaste

Se presentan por el contacto directo que existe entre los engranajes, generalmente, son de metal y se da por poca lubricación entre ellos. Debido al rozamiento entre los dientes, se va retirando material o capas pequeñas, lo que hace que el engrane pierda su perfil y, por consiguiente, sus características originales. Así mismo, puede generarse fallas por la aplicación de productos químicos resultantes del proceso de producción donde se desempeña el mecanismo.

Existen varios tipos de desgaste:

El pulimentado es un desgaste necesario, que se presenta en la etapa de ajuste, donde las superficies de los materiales (tienen cierta rugosidad desde el momento de fabricación), son sometidas a un acoplamiento inicial. A partir de allí, los engranes comienzan su funciona-

miento habitual.

Otra falla, es el desgaste moderado y excesivo. En el primero, se empieza a remover mínimas cantidades de material en la superficie de los dientes del engrane. Cuando ya es muy elevada dicha cantidad, se pasa a desgaste excesivo, donde ya es más evidente y se corre el riesgo de que se presenten picaduras o daños en el perfil inicial del engranaje. [26]

El tipo abrasivo generalmente, se produce cuando el lubricante o el aceite, tiene componentes extraños, generando rayaduras en la superficie del material de manera radial. Por tanto, es necesario revisar la composición del mismo, aplicando filtros que sean capaces de remover dichas partículas, o de ser necesario, realizar un cambio del mismo.

El corrosivo se produce por reacciones químicas cuando hay presencia de aceites, aditivos o vapores de agua, que van generando el deterioro uniforme en una zona determinada. Lo que genera que el material pierda sus propiedades como por ejemplo la dureza o la rugosidad.

El rayado se caracteriza que en el momento en el que alguno de los engranes tiene algún tipo de relieve en su superficie, se pueden llegar a generar un elevado número de líneas o rayaduras, que indican que el aceite o lubricante no es el apropiado para la carga a la que se están sometiendo. Si dichas rayaduras son constantes o profundas, se presentan picaduras lo que puede dar inicio al proceso de ruptura del diente.

El escoriado moderado, localizado y destructivo son muy similares. Con ligeras rayas y daños menores en la superficie de los engranajes. En el momento es que son evidentes las líneas o marcas radiales producidas, se concluye que ha habido una remoción de material elevada, que, en algunos casos, destruyen la forma original del engranaje, lo que lo vuelve inservible.[26]

## **La Fatiga superficial**

Se caracteriza porque este tipo de falla se presenta debido a la repetición de miles de ciclos a los que puede trabajar determinado engranaje. Sin importar si tiene la lubricación adecuada o una capa de aceite que los proteja, el rozamiento constante hace que se presenten fisuras en los dientes, generalmente, en el conducido. También, puede presentarse por un mal diseño, cuando se emplea un engrane que no es capaz de soportar la carga que se le está aplicando.

Este tipo de falla se presenta de diferentes maneras:

El picado inicial, es la falla por fatiga más leve. Se produce por imperfecciones en las superficies, pequeñas áreas sometidas a un mayor esfuerzo, o desalineamiento por parte del engranaje. Se puede corregir distribuyendo la carga uniformemente o corrigiendo la ligera desalineación.

El picado es destructivo si no se corrige a tiempo el picado inicial, se presenta un picado de mayor tamaño y profundidad en el diente, lo que destruye la forma original, incluso, generando grietas que, a futuro, originan la ruptura y daño total del mismo.

En el desprendimiento se produce un elevado daño por fatiga, se puede generar un desprendimiento total de material, es decir, el diente pierde una parte importante de su superficie

metálica, ya que el esfuerzo al que se sometió, excedió sus propiedades elásticas, generando daños en la estructura interna del mismo.

La rotura de la superficie, se caracteriza porque en el momento en que se originan líneas o grietas paralelas a la línea de paso, desde el núcleo del diente y en dirección radial, se entiende que se debe cambiar el engranaje lo antes posible, puesto que es un indicio de que el diente se puede llegar a romper. [26]

### **El flujo plástico**

Se presenta cuando no se tiene en cuenta la capacidad de deformación máxima de un material, generalmente, metálico. Todos los materiales tienen un límite para volver a su forma original, denominado elasticidad, pero si se excede y se pasa a la zona plástica, el material empieza a deformarse y pierde su forma original. Por tanto, esta falla se da en el momento en que se le aplica una carga permanente elevada, donde el material del cual se compone el engranaje, no tiene la capacidad de regresar a su forma previa. [26]

### **La rotura de dientes**

Se da en el momento en que un diente del engrane sufre una fisura ya sea por desgaste o por alguna sobrecarga, se puede llegar a presentar una rotura del mismo, generando una falla en el mecanismo. Esta ruptura será lisa, si el diente ha fallado por fatiga, o tendrá una apariencia fibrosa, si se ha sometido a una carga mayor a la que puede soportar. Las roturas se presentan generalmente en la base, donde visualmente se puede percibir una entalla, que muestra el punto inicial en el que se origina la falla. Las roturas se pueden presentar de diferentes maneras:

Las fracturas por fatiga se presentan debido a que el engranaje ha sido sometido a cargas periódicas, provocando pequeñas grietas o fisuras, que no son capaces de generar una ruptura total del diente. También, se sabe que por el diseño de la mayoría de engranes, la base de los dientes es la que más sufre el esfuerzo, lo que quiere decir, que el diente se va deteriorando desde la raíz hacia afuera.

La rotura por sobrecarga se produce cuando el material ha sido sometido a una carga elevada, es decir, se excede la resistencia final o a la tensión máxima que puede soportar el material. Lo que genera fisuras de mayor tamaño, hasta tal punto que puede darse una rotura del diente. En algunos casos, se puede originar por un desalineamiento de los engranajes y no por diseño de los mismos, lo que reduce la capacidad de carga que pueden soportar.[26]

### **Las fallas combinadas**

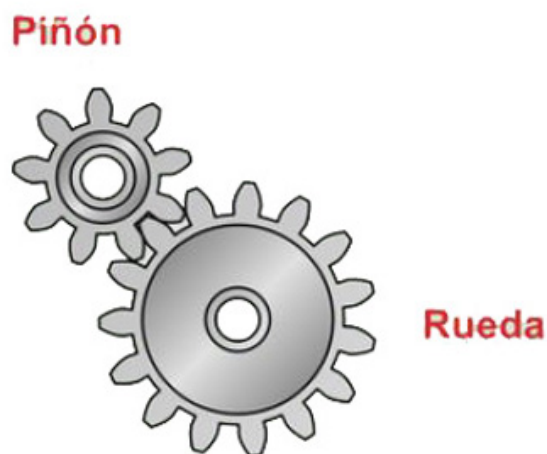
Se producen por la combinación de dos o más fallas de las mencionadas anteriormente. Generalmente, las fallas no suelen ocurrir de manera independiente. Si se analiza la causa de cada uno de los tipos, se puede evidenciar que están relacionados directa o indirectamente,

por lo que, al determinar el tipo de falla, se debe tener en cuenta cual fue la principal, y cuales se produjeron luego de esta.[26]

### 2.4.3. Diagnóstico de fallas en los engranajes

Antes de analizar las fallas de los engranajes, es importante poder diferenciar el comportamiento normal como se muestra en la figura 2-14 y como se explicará a continuación:

Un sistema de engranaje tiene un funcionamiento normal dado por la frecuencia media del engrane (GMF). Es importante conocer algunos datos de funcionamiento de la caja de transmisión, como lo son la velocidad de giro y el número de dientes. A partir de esta información es posible identificar la frecuencia del engrane.



**Figura 2-13:** Esquema de general de un engranaje

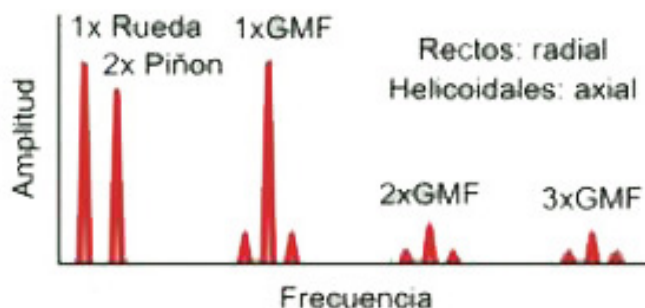
*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

$$GMF = Z_p \times RPM_p = Z_c \times RPM_c \quad (2-19)$$

Donde  $Z_p$  es el número de dientes del piñón,  $Z_c$  es el número de dientes de la corona, y las  $RPM_p$  y  $RPM_c$  son la velocidad de giro del piñón y de la corona de engrane respectivamente. Es la frecuencia característica de cada engrane y sin importar las condiciones en las que se encuentre, siempre debe aparecer en el espectro de frecuencia. Se calcula mediante la fórmula mencionada anteriormente. Puede presentar algunas bandas laterales, que corresponden a las frecuencias de giro de la corona y del piñón.

Las fallas en los engranajes, son extraídas del documento de las tablas de Charlotte, así como las imágenes que fueron extraídas del manual mencionado.

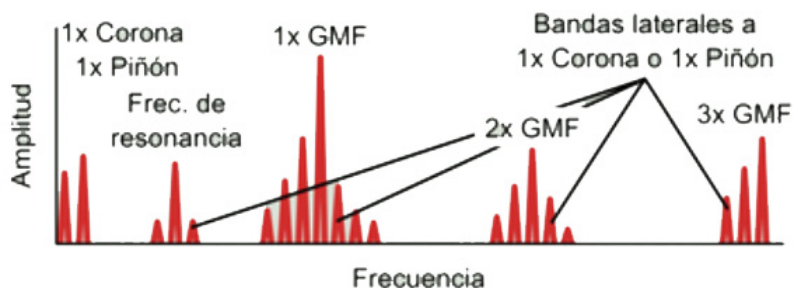
El espectro visto en la figura 2-14 muestra las velocidades de giro tanto del engranaje principal, como del piñón. Además de apreciar los armónicos del engrane y el piñón, que tienen menor amplitud. Como se puede apreciar, se encuentra referenciado el pico correspondiente a GMF.



**Figura 2-14:** Espectro en frecuencia de un engranaje en buen estado

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

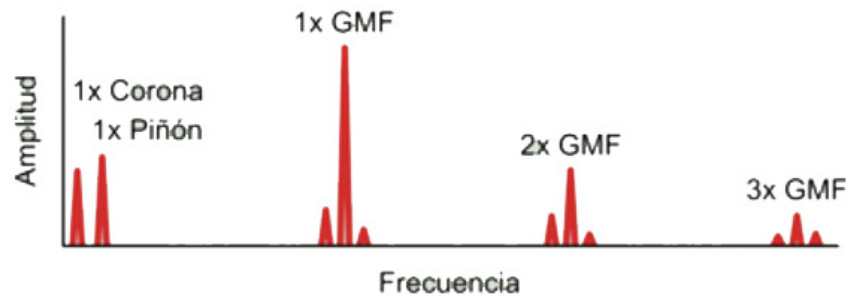
El espectro del desgaste o rotura del diente del engranaje, muestra como la frecuencia natural del engranaje se excitan más de lo normal. Es decir, aparecen más bandas que la acompañan, mostrando que el engranaje se encuentra en mal estado como se aprecia en la figura 2-15.



**Figura 2-15:** Espectro de un engranaje desgastado

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

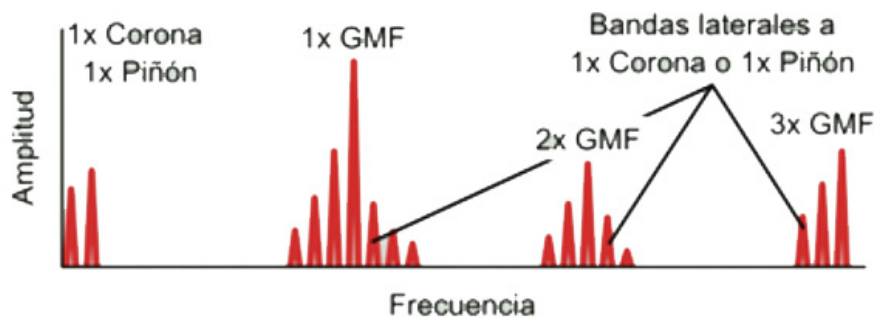
El espectro de la carga del diente, muestra como aumenta ligeramente la magnitud normal del engrane. Es decir, no se excita la frecuencia natural del engrane, y las bandas que acompañan cada armónico permanecen con magnitud baja.



**Figura 2-16:** Espectro del engranaje con carga

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

En la excentricidad del engranaje, aparecen bandas laterales en los armónicos de magnitud considerable. Adicionalmente, si hay un juego inadecuado entre los dientes, se excita la frecuencia natural del sistema, lo que lo eleva en magnitud mostrando bandas laterales nuevas en cada uno de sus armónicos como se aprecia en la figura 2-17.



**Figura 2-17:** Espectro cuando hay excentricidad en el engranaje

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

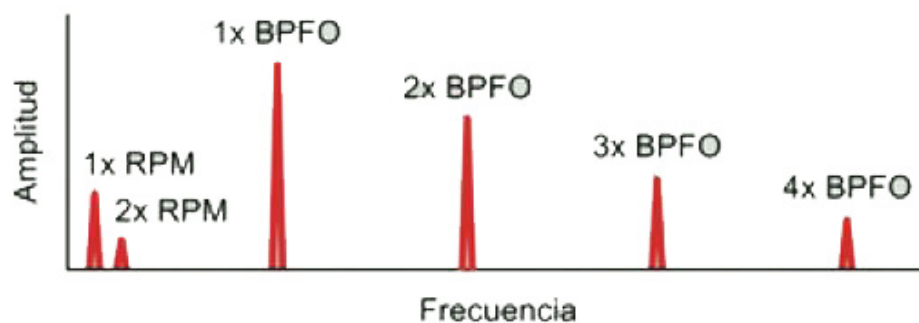
En el espectro de la desalineación del engranaje, se evidencia que hay una excitación en el armónico de segundo o mayor orden. Además, los picos de magnitud de las velocidades

cambian en cada uno de los armónicos. Esto se debe a que el diente no siempre recibirá la misma carga, lo que altera su comportamiento.

#### 2.4.4. Diagnóstico en cojinetes-rodamientos

Los problemas en estos componentes pueden presentarse básicamente por un mal montaje o por deficiente lubricación. Si analizamos la figura 2-9, el rodamiento puede presentar fallas en cuatro partes diferentes, que aparecer en el orden, mencionado a continuación:

El deterioro de la pista exterior produce una frecuencia de deterioro (BPFO-Ball Pass Frequency Outer) cada vez que el número de bolas o rodillos pasan por un punto específico de la pista exterior que presente deterioro. Esto cada vez que el eje da una revolución completa.



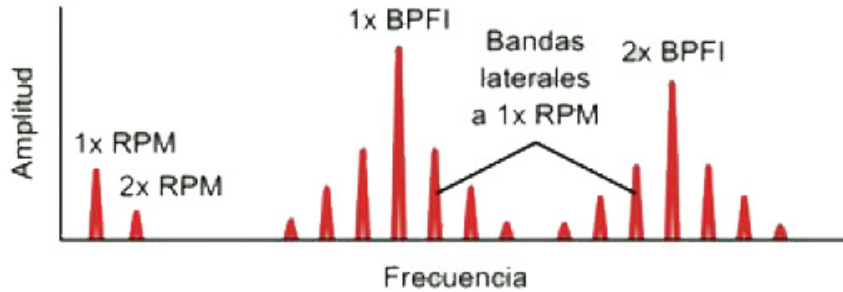
**Figura 2-18:** Espectro en frecuencia con deterioro en la pista exterior

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

El deterioro de la pista interior al igual que la anterior, produce una frecuencia de deterioro pero para la pista interior (BPFI-Ball Pass Frequency Inner). Se genera de la misma manera que la BPFO pero teniendo en cuenta el número de bolas o rodillos que pasan por un punto en deterioro en la pista interior cada vez que el eje da una revolución completa.

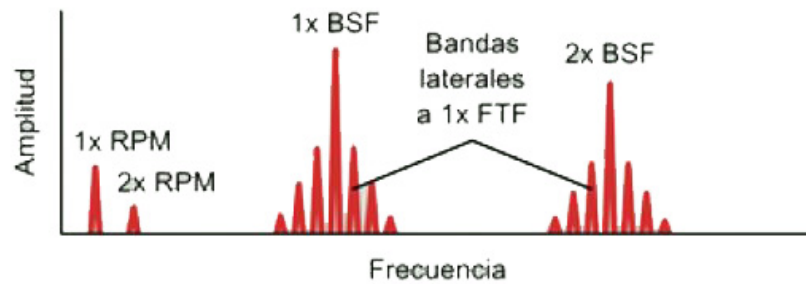
El deterioro de los elementos rodantes origina una frecuencia (BSF-Ball Spin Frequency), y está dada por el número de giros que da una bola o rodillo, cada vez que el eje da una revolución completa.

El deterioro de la jaula da origen a una frecuencia (FTF-Fundamental Train Frequency), al igual que la falla anterior, es el número de vueltas que da la jaula, cada vez que el eje da



**Figura 2-19:** Espectro en frecuencia con deterioro en la pista interior

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*



**Figura 2-20:** Espectro en frecuencia con deterioro en el elemento rodante

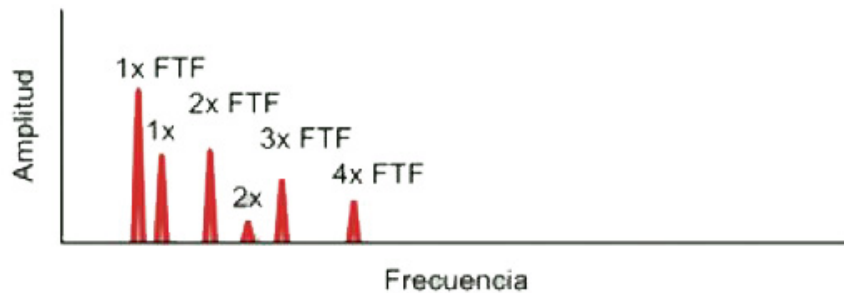
*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

una revolución.

Así como los engranes presentan una frecuencia característica de engrane, los rodamientos presentan frecuencias propias mencionadas en el párrafo inmediatamente anterior, y se pueden calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 BPFO &= 0.4 \times N_B \times RPM \\
 BPF1 &= 0.6 \times N_B \times RPM \\
 FTF &= 0.4 \times RPM
 \end{aligned}
 \tag{2-20}$$





**Figura 2-21:** Espectro en frecuencia con deterioro en la jaula del rodamiento

*Fuente: Manual de análisis de vibraciones - Power-MI*

## 2.5. Sistemas de medición de vibración

### 2.5.1. Instrumentación

Existen diferentes instrumentos y herramientas para realizar pruebas y mediciones relacionadas a los sistemas mecánicos y particularmente las vibraciones en los mismos.

Los sensores que permiten captar los fenómenos vibratorios son los acelerómetros. Estos son instrumentos precisos, capaces de medir la aceleración de un cuerpo. Es usado particularmente para captar movimientos sísmicos y vibraciones en los sistemas mecánicos. [15]

Sistemas de adquisición de datos son los sistemas utilizados en la actualidad para la toma y registro de datos, utilizan diferentes componentes como amplificadores, convertidores análogo/digital y viceversa, y principalmente los sensores. Estos sistemas deben tener en cuenta múltiples factores como frecuencia de muestreo, resolución, precisión, entre otras. Todo esto con el fin de obtener una respuesta sin pérdida de información. [27]

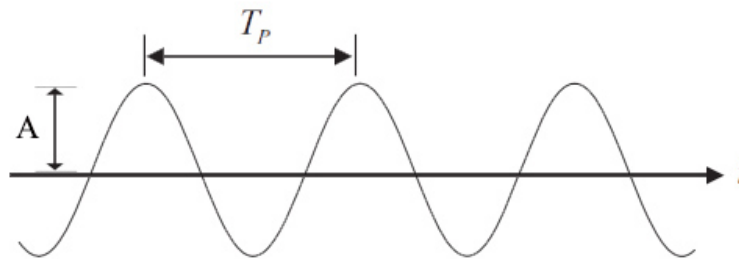
A diferencia del sensor el shaker, se puede considerar como un actuador, similar a un parlante, capaz de generar diferentes entradas para realizar pruebas con diferentes frecuencias y fuerzas, para aplicar sobre sistemas en análisis, con aplicaciones en dinámica estructural, movimientos sísmicos, búsqueda de frecuencias de resonancia en sistemas, entre otras.

Al igual que el shaker, el martillo de impacto, es un actuador, que si es usado con un sensor transductor de vibración, se puede realizar pruebas de impacto en algún elemento, ya que es posible ajustar la energía de entrada que se aplicará a la masa y evaluar la respuesta o fuerza soportada por el mismo. [28]

### 2.5.2. Análisis de señales

Es importante resaltar, que las señales que se pueden obtener de los acelerómetros son dinámicas y se encuentran en el dominio del tiempo. Por tanto, es necesario realizar una conversión de la señal al dominio de la frecuencia, por medio de la transformada de Fourier, que facilita el análisis del sistema, ya que es aquí donde se aprecia el comportamiento con información mucho más útil. Existen varias categorías y aplicaciones para las transformadas mencionadas.

Las funciones que se utilizarán como entrada para el sistema son la señal seno y la función impulso. La señal seno es una función periódica y permite representar el movimiento armónico simple que finalmente es el comportamiento que comprende el modelo desarrollado. Esta función y sus características principales se pueden apreciar en la figura 2-22.



**Figura 2-22:** Características de una señal senoidal

*Fuente: K.Shin - Fundamental of Signal Processing*

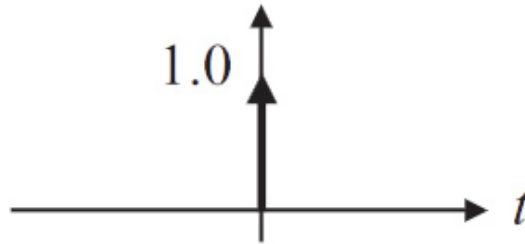
La señal impulso unitario, también conocida como función 'delta' ( $\delta$ ), está definida matemáticamente como se muestra en la ecuación 2-21 [29] y su comportamiento en el dominio del tiempo se evidencia en la figura 2-23.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \text{ para } t \neq 0 \\ \delta(t) &\rightarrow \infty \text{ para } t = 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Su representación en el dominio del tiempo es una flecha que tiende al infinito, en el origen, con una área bajo la curva unitaria como se muestra en la figura 2-23.

La serie de Fourier es ideal para analizar sistemas representados por señales periódicas. Se encarga de transformar dicha señal en un espectro de frecuencia discreto. Dichas señales se pueden representar como se muestra en la ecuación 2-22, donde  $x(t)$  es la señal a discretizar.



**Figura 2-23:** Características de una señal impulso unitario o delta

*Fuente: K.Shin - Fundamental of Signal Processing*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T_p} \quad C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) e^{-j2\pi nt/T_p} dt \quad (2-22)$$

Donde  $C_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier,  $T_p$  el período de muestreo, y  $x(t)$  la señal a muestrear.

La Transformada Integral de Fourier se usa para señales continuas pero que no tienen un patrón de repetición en el tiempo. Por medio de esta, se podrá transformar cualquier señal con esas características del dominio del tiempo, al dominio de la frecuencia, es decir, un espectro de frecuencias características del sistema. Con respecto a la serie de Fourier, cambia porque se puede aplicar en señales no periódicas, así como, el intervalo de integración como se muestra en la ecuación 2-23.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T_p} \quad C_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T_p} dt \quad (2-23)$$

Para demostrar el procedimiento realizado para obtener la transformada de Fourier, se toma la señal que se muestra en la figura **2-24**, que representa la suma de dos señales seno con diferente amplitud y período, y el resultado de la transformada, se aprecia en la figura **2-25**, que muestra el espectro en frecuencia de dicha señal

La transformada Rápida de Fourier es el algoritmo más eficaz para aplicar la transformada discreta de Fourier, con la ayuda de computadores digitales. La transformada Discreta de Fourier se caracteriza porque se realiza una toma de muestras en el dominio del tiempo, lo que puede generar pérdidas de información en el sistema. El espectro que resulta al aplicar esta transformada, es similar a la serie de Fourier. Dicha eficacia depende exclusivamente de la toma de muestras, es decir, la cantidad y la frecuencia con que son tomadas las mismas.

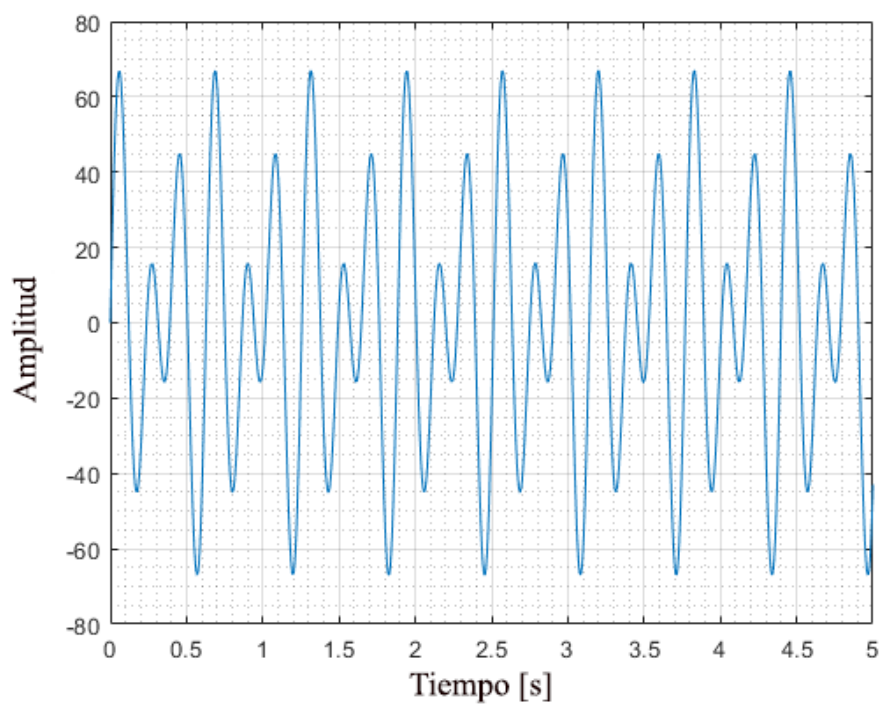


Figura 2-24: Suma de dos señales seno en el dominio del tiempo

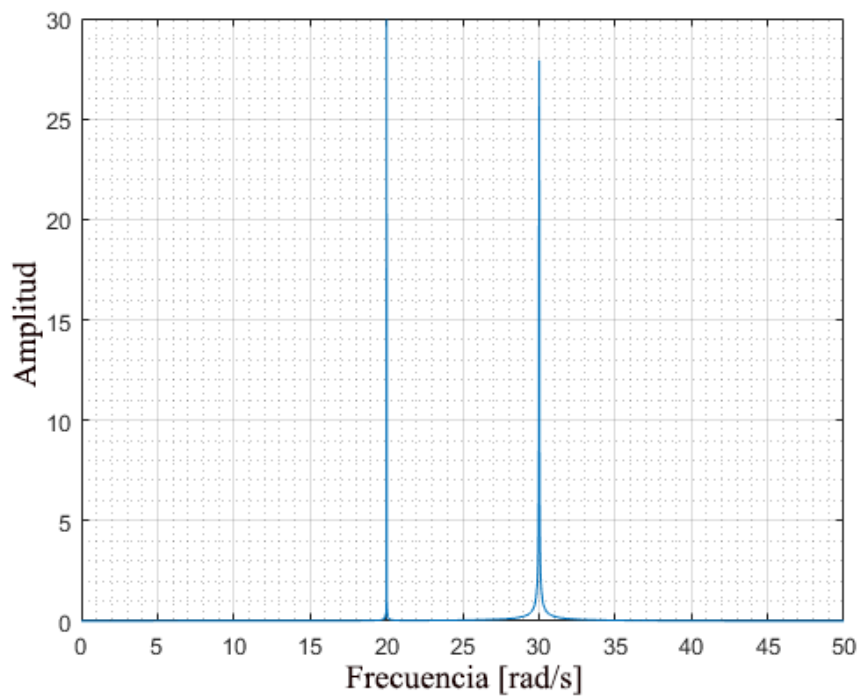


Figura 2-25: Transformada de Fourier de la señal de la figura 2-24

La formación de Aliases es un problema que se origina, si la frecuencia de la señal a la cual, se desea tomar las muestras, es igual a la de muestreo, no se tendrá problema alguno. Pero si, por el contrario, la frecuencia de la señal es más alta que la de muestreo, no se tendrá un patrón de medición correcto, por lo que posteriormente, puede que la reconstrucción de la señal a partir de los puntos o datos muestreados, no sea la analizada originalmente.

Por tanto, para solucionar dicho problema, se toma el teorema de Nyquist, el cual establece que, para discretizar una señal, la frecuencia de muestreo a la cual se deben adquirir los datos, debe ser mínimo dos veces mayor a la frecuencia máxima de funcionamiento del sistema, ya que por medio de la ecuación de interpolación es posible recuperar dicha señal completamente. Para este caso, la frecuencia de muestreo debe ser dos veces mayor a la frecuencia natural del sistema mecánico, lo que garantiza mayor precisión en la toma de los datos, así como la reconstrucción de la señal original dado el caso que se necesite.[29]



# 3 Metodología

## 3.1. Sistema de transmisión

### 3.1.1. Descripción del sistema de transmisión

Se revisaron posibles sistemas de transmisión, y se seleccionó un motor de lavadora convencional, debido a su tamaño, y su fuente de alimentación (110 V) para el momento en que se necesitara hacer pruebas. Además, por su estructura, ya que cuenta con dos etapas: la primera consta de un engrane de tipo helicoidal y la segunda cuenta con engrane de tipo hipoide. Como se puede observar en la figura **3-1**, y las tablas **3-1** y **3-2**, las dimensiones del eje son relativamente pequeñas en comparación con los diámetros de los engranes, por lo que se puede evaluar su comportamiento de manera mucho más simple, aunque como se mostrará en las siguientes etapas, se tomarán en cuenta múltiples grados de libertad para el análisis del mismo.

En la figura **3-1**, se muestran los engranes y su forma general. Como se puede apreciar los discos  $m_3$  y  $m_4$ , es el tipo hipoide y los discos  $m_2$  y  $m_5$ , son el tipo helicoidal. Las dimensiones se encuentran en milímetros (mm); por lo que en el modelo se mencionará como se tendrán en cuenta estos factores. Se asume como característica que el material es el acero AISI 1340, ya que es un mecanismo con especificaciones estándar.

De esta forma, se tiene un mecanismo no muy complejo, con materiales estándar y con dimensiones cómodas para simular y experimentar en posibles trabajos futuros para realizar mediciones cómodamente.

Componente	Diámetro (mm)	Número de dientes
Engrane helicoidal(Rueda)	126	112
Engrane helicoidal(Piñón)	35	31
Engrane hipoide(Rueda)	108	49
Engrane hipoide(Piñón)	28	5

**Tabla 3-1:** Características de los engranes del mecanismo

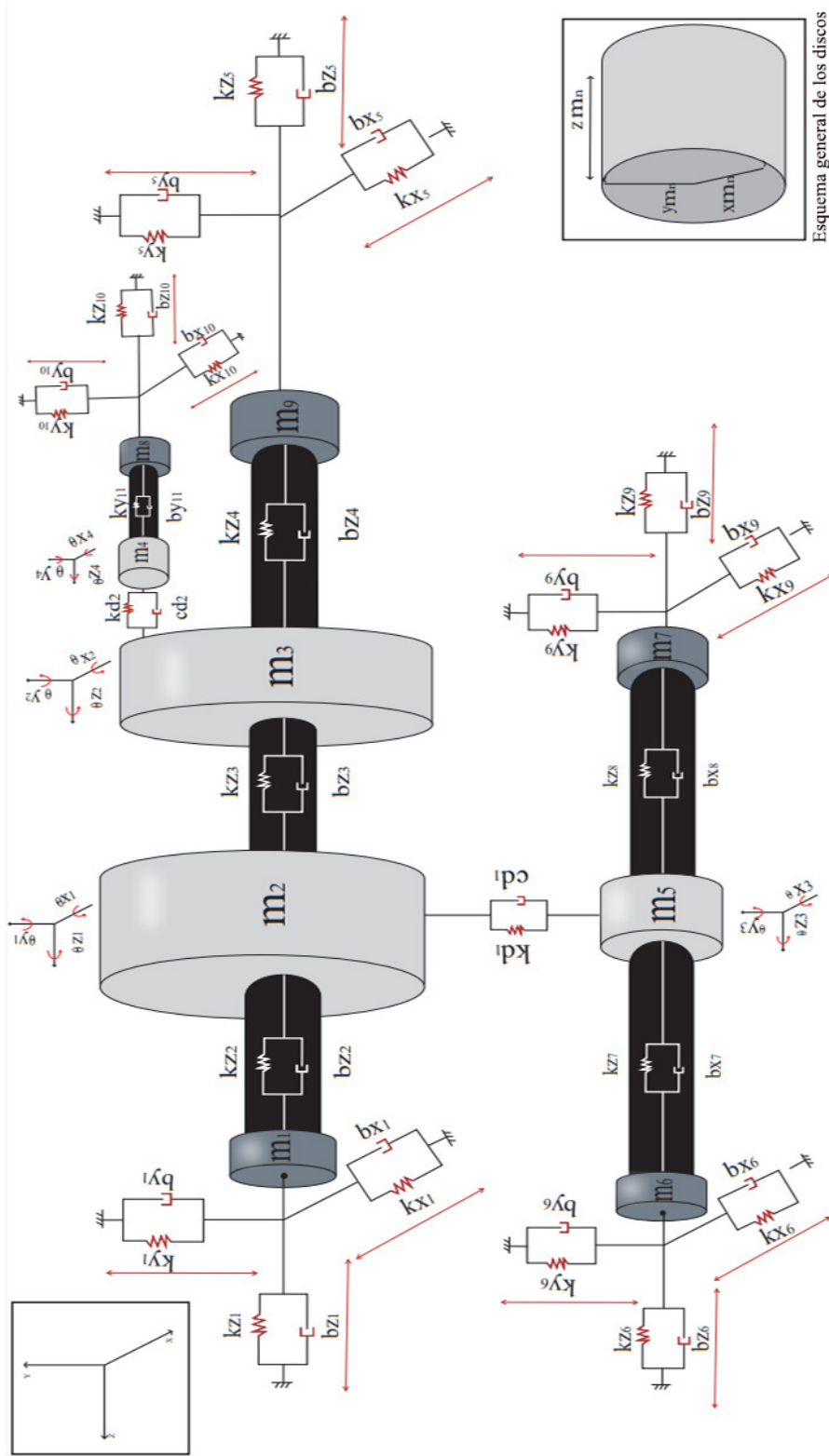


Figura 3-1: Esquema del sistema de transmisión



Componente	Diámetro (mm)	Longitud (mm)
Eje principal	33	67
Eje piñón helicoidal	27	129
Eje piñón hipoide	12.7	80

**Tabla 3-2:** Características de los ejes y soportes del mecanismo

## 3.2. Descripción de fallas

Para la selección de las fallas, se debe tener en cuenta la información consignada en la sección 2, puesto que las más comunes se encuentran en los engranajes y los apoyos de los sistemas mecánicos, y estos, a su vez, producen otros efectos perjudiciales para el mismo. Por tanto, en esta etapa se estudiará un poco más a fondo el comportamiento y así mismo, como se evidencia en el funcionamiento del sistema completo.

Se tendrán en cuenta fallas en engranes y rodamientos, que son las más comunes en los sistemas rotatorios.

La primera falla que se pretende analizar, y suele presentarse, es la ruptura de uno de los dientes de los engranajes. Esta se encuentra muy cerca de una de las frecuencias naturales del sistema, lo que puede ocasionar una excitación abrupta, y en el dominio de la frecuencia se verá un pico con una mayor amplitud a la normal. La frecuencia de engrane (GMF) es decir, la del piñón o la corona, aumenta su amplitud y adicionalmente, aparecen más bandas laterales como se aprecia en la figura **2-15**. Para este caso, la resonancia puede llegar a ser muy alta, para las frecuencias naturales del sistema, lo que puede producir daños mucho mayores, debido a la gran amplitud que tiene el sistema en ese punto específico.

Otra falla que se puede presentar, aunque no necesariamente sea del todo perjudicial, puesto que en ocasiones el engrane no presenta problemas por este tipo de síntomas, es cuando al engrane se le aplica una carga mayor de la que puede soportar conocido como sobrecarga. Lo que ocurre es un aumento de la amplitud de la frecuencia de engrane (GMF) y de sus armónicos. Las bandas laterales, que corresponden a las velocidades de giro permanecen iguales, como se evidencia en la figura **2-16**.

Para los rodamientos se tomarán en cuenta, dos fallas vistas previamente en la sección 2, deterioro en la pista exterior teniendo en cuenta la frecuencia BPFO y fallas en los elementos rodantes, teniendo en cuenta la frecuencia BSF. Por tanto, es importante tener en cuenta las figuras **2-18**, y **2-20**, que describen el comportamiento característico en frecuencia del sistema ante este tipo de problema. Más adelante en la etapa 4, se mostrará el comportamiento de dichas fallas, donde aparecerán a partir de la transformada de Fourier unos picos con valores específicos, diferentes a los de las frecuencias naturales del sistema completo.

### 3.3. Modelado del sistema de transmisión

Con el fin de verificar la implementación numérica del modelo, se realizarán diferentes etapas de modelamiento, donde se irán añadiendo los grados de libertad correspondientes para un análisis más completo.

#### 3.3.1. Modelo de un eje con engrane (8 GDL)

Teniendo como modelo base la figura 2-6 y las ecuaciones desarrolladas en la sección 2.2.2, se tiene un sistema de 8 grados de libertad, y de esta forma se obtienen las matrices correspondientes como se muestra a continuación:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Donde  $x(t)$  es un vector que contiene la cantidad de grados de libertad del sistema como se mencionó previamente, y se describe a continuación:

$$\{x(t)\} = \{x_1, y_1, \theta_x, \theta_y, x_2, x_3, y_3\}^T$$

A partir de las ecuaciones desarrolladas en el anexo 6.1, se obtiene el siguiente sistema matricial.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{xx}^{(1)} & c_{xy}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{yx}^{(1)} & c_{yy}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_P \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_P \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xx}^{(2)} & c_{xy}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yx}^{(2)} & c_{yy}^{(2)} \end{bmatrix}$$

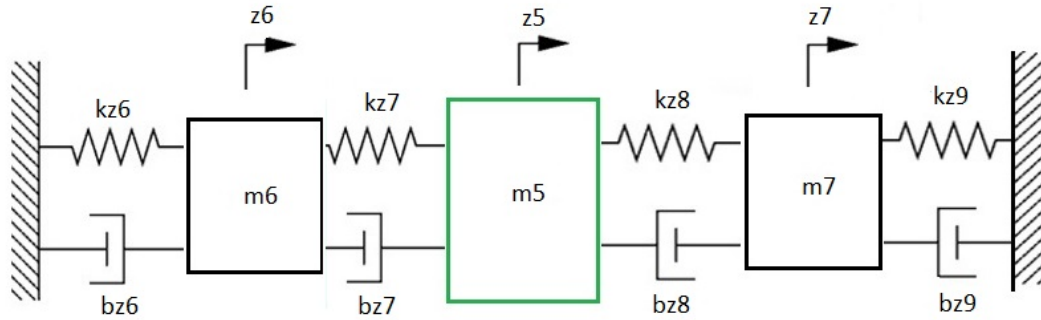
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} + k_{xx}^{(1)} & k_{xy}^{(1)} & 0 & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx}^{(1)} & \frac{3EI}{L^3} + k_{yy}^{(1)} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{6EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} + k_{xx}^{(2)} & k_{xy}^{(2)} \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & k_{yx}^{(2)} & \frac{3EI}{L^3} + k_{yy}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Donde se tienen adicionalmente:

$E$  es el módulo de elasticidad de Young,  $L$  es la longitud del eje,  $I$  es la inercia del disco.

### 3.3.2. Modelo de un eje con engrane y deformación axial

A continuación se representará el eje con un disco ( $m_5$ ) y dos soportes ( $m_6$  y  $m_7$ ), teniendo en cuenta las deformaciones axiales como se muestra en la figura 3-2.



**Figura 3-2:** Representación de un eje con un disco y dos soportes

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema de la figura 3-2 se representan en la ecuación 3-1.

$$\begin{aligned} m_6 \ddot{z}_6 + (b_{z_6} + b_{z_7}) \dot{z}_6 - b_{z_7} \dot{z}_5 + (k_{z_6} + k_{z_7}) z_6 - k_{z_7} z_5 &= F_{z_6} \\ m_5 \ddot{z}_5 + (b_{z_7} + b_{z_8}) \dot{z}_5 - b_{z_7} \dot{z}_6 + (k_{z_7} + k_{z_8}) z_5 - k_{z_7} z_6 - b_{z_8} \dot{z}_7 - k_{z_8} z_7 &= F_{z_5} \\ m_7 \ddot{z}_7 + (b_{z_8} + b_{z_9}) \dot{z}_7 - b_{z_8} \dot{z}_5 + (k_{z_8} + k_{z_9}) z_7 - k_{z_8} z_5 &= F_{z_7} \end{aligned} \quad (3-1)$$

Para este caso, las variables  $k_z$  y  $b_z$ , corresponden a la representación del eje, para poder simular sus características de rigidez que es alta, y su amortiguamiento que es relativamente bajo. Las masas  $m_6$  y  $m_7$  corresponden a los soportes, y la masa  $m_5$ , al disco.

El sistema matricial que representa el sistema de la figura 3-2, se muestra a continuación:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_6 & 0 & 0 \\ 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & m_7 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} b_{z6} + b_{z7} & -b_{z7} & 0 \\ -b_{z7} & b_{z7} + b_{z8} & -b_{z8} \\ 0 & -b_{z8} & b_{z8} + b_{z9} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{z6} + k_{z7} & -k_{z7} & 0 \\ -k_{z7} & k_{z7} + k_{z8} & -k_{z8} \\ 0 & -k_{z8} & k_{z8} + k_{z9} \end{bmatrix}$$

El vector  $\{x(t)\}$ , para este modelo se representa de la siguiente manera:

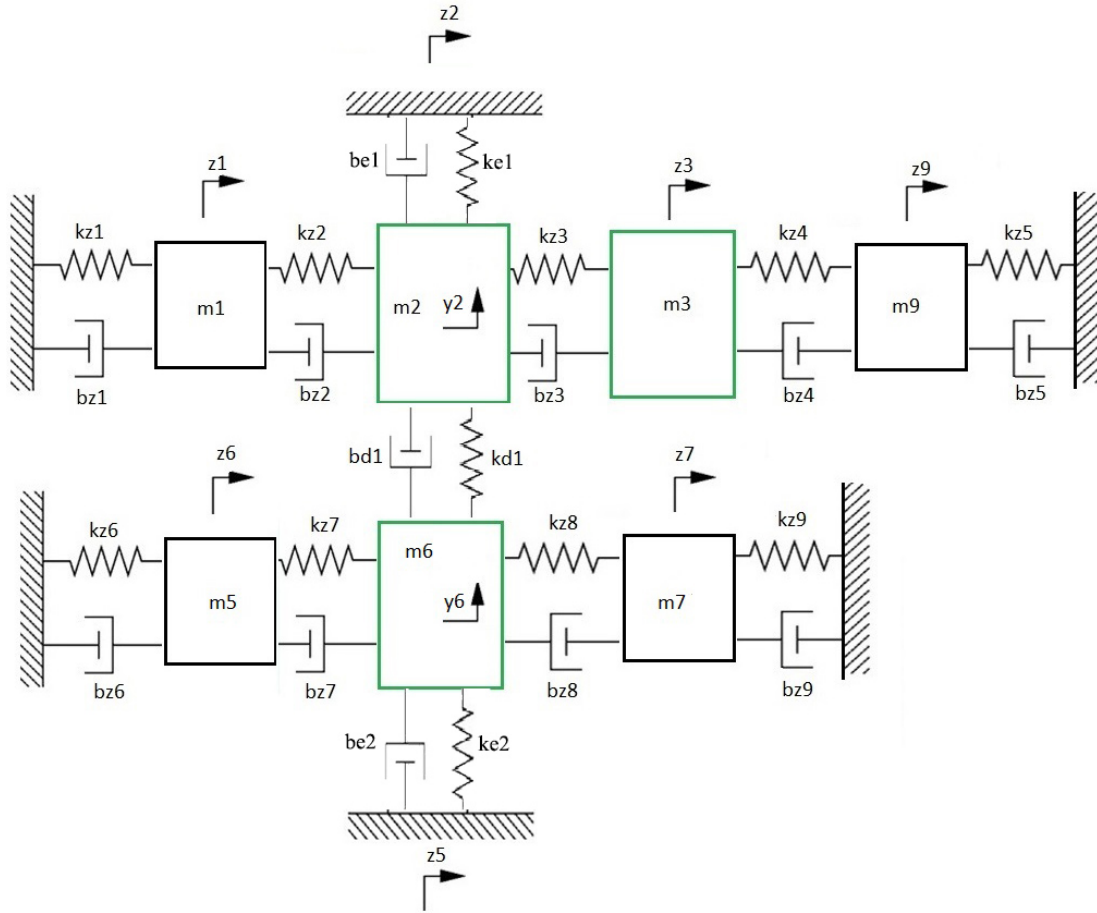
$$\{x(t)\} = \{z_6, z_5, z_7\}^T$$

### 3.3.3. Modelo de dos ejes acoplados

El sistema que se desarrollará, acopla dos ejes por medio de un engrane helicoidal. Inicialmente, se plantea el modelo de la figura **3-3**, donde se tiene una base para agregar los grados de libertad adicionales debido a las características de la superficie y la forma de los dientes. Al agregar los grados de libertad del eje adicional, siguiendo las ecuaciones previas, y el acoplamiento de los mismos, surgen dos nuevas expresiones que se muestran en la ecuación 3-2. Es importante resaltar que es necesario colocar referencias como se muestra en la figura, ya que de no hacerlo, tendría un comportamiento de cuerpo rígido. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se tiene un sistema de nueve grados de libertad, es decir, nueve frecuencias naturales para determinar el comportamiento del mismo en el dominio de Laplace.

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{y}_2 + (b_{e1} + b_{d1}) \dot{y}_2 - b_{d1} \dot{y}_6 + (k_{e1} + k_{d1}) y_2 - k_{d1} y_6 &= F_{2y} \\ m_6 \ddot{y}_6 + (b_{e2} + b_{d1}) \dot{y}_6 - b_{d1} \dot{y}_2 + (k_{e2} + k_{d1}) y_6 - k_{d1} y_5 &= F_{6y} \end{aligned} \quad (3-2)$$

El modelado donde se especifican las características propias del engrane helicoidal, se muestra en el anexo 6.2. Para el modelado que se realizará, se añadirán todas las ecuaciones correspondientes a los grados de libertad mencionados, pero solamente se tendrán en cuenta para realizar la simulación, los rotacionales, ya que en estos, es donde se ve representado el contacto del engranaje. Adicional a las ecuaciones mencionadas anteriormente, es necesario completar el modelo con el engrane hipoide, y así mismo sus grados de libertad axiales. Las



**Figura 3-3:** Representación de dos ejes acoplados con un engrane de tipo helicoidal

características propias del engrane, se representan con dos ecuaciones, y se obtienen como se muestra en el anexo 6.3.

Las matrices que representan este sistema, teniendo en cuenta los 9 GDL, se muestran a continuación:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} b_{z1} + b_{z2} & -b_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{z2} & b_{z2} + b_{z3} & -b_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{z3} & b_{z3} + b_{z4} & -b_{z4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{z4} & b_{z4} + b_{z5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{z6} + b_{z7} & -b_{z7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{z7} & b_{z7} + b_{z8} & -b_{z8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{z8} & b_{z8} + b_{z9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{d1} + b_{e1} & -b_{d1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{d1} & b_{e2} + b_{d1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{z1} + k_{z2} & -k_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{z2} & k_{z2} + k_{z3} & -k_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{z3} & k_{z3} + k_{z4} & -k_{z4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{z4} & k_{z4} + k_{z5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{z6} + k_{z7} & -k_{z7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{z7} & k_{z7} + k_{z8} & -k_{z8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{z8} & k_{z8} + k_{z9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{d1} + k_{e1} & -k_{d1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{d1} & k_{e2} + k_{d1} & 0 \end{bmatrix}$$

Así mismo, el vector  $\{x(t)\}$  que representa los grados de libertad del sistema mencionado, se muestran a continuación:

$$\{x(t)\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, y_2, y_6\}^T$$

### 3.3.4. Modelo completo

Como se aprecia, en el desarrollo de los modelos, a medida que se van añadiendo grados de libertad, aumenta el orden del sistema. Una vez se tienen todas las ecuaciones correspondientes, se tiene un sistema de 39 grados de libertad, por lo que es complejo introducir todas las matrices resultantes. Simplemente se mostrarán más adelante los resultados obtenidos al someter algunos de ellos a diferentes entradas para poder evaluar su comportamiento ante las mismas.

Para el modelo completo, se acoplan dos discos representando el modelado de un engrane helicoidal, pero adicionalmente, se tienen en cuenta los grados de libertad de los ejes vistos en el modelo Jeffcott y en la representación axial. También se tienen en cuenta las características mencionadas con respecto al engrane hipoide, como se muestra en la figura **3-1**. y

su representación en el anexo 6.4.4.

En este caso, el vector  $\{x(t)\}$ , cuenta con 39 GDL, siguiendo el modelo de la figura **3-1** y se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \{x(t)\} = & \{x_2, y_2, z_2, \theta_{z2}, x_5, y_5, z_5, \theta_{z5}, x_1, y_1, \theta_{x2}, \theta_{y2}, x_3, y_3, \theta_{x3}, \theta_{y3} \cdots\} \\ & \{\cdots x_9, y_9, x_6, y_6, \theta_{x5}, \theta_{y5}, x_7, y_7, x_4, y_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}, x_8, y_8, z_1 \cdots\} \\ & \{\cdots z_3, z_4, z_6, z_7, \theta_{z3}, \theta_{z4}\}^T \end{aligned} \quad (3-3)$$

### 3.4. Simulación de funcionamiento y falla

Como se tiene un sistema de 39 GDL, la matriz de funciones de transferencia, tiene la siguiente estructura, mostrada en la ecuación 3-4.

$$[G(S)] = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \cdots & G_{39,1} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \cdots & G_{39,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{39,1} & G_{39,2} & \cdots & G_{39,39} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Los grados de libertad que se van a evaluar posteriormente para inducir las fallas en el sistema se consideran en la tabla **3-3**, donde la función de transferencia, muestra el grado de libertad al que se aplica la entrada y la salida evaluada a partir de dicha entrada:

Función de transferencia	Entrada	Salida
$G_{4,4}$	$\theta_{z2}$	$\theta_{z2}$
$G_{8,8}$	$\theta_{z5}$	$\theta_{z5}$
$G_{38,38}$	$\theta_{z3}$	$\theta_{z3}$
$G_{39,39}$	$\theta_{z4}$	$\theta_{z4}$
$G_{9,9}$	$x_1$	$x_1$
$G_{10,10}$	$y_1$	$y_1$
$G_{19,19}$	$x_6$	$x_6$
$G_{20,20}$	$y_6$	$y_6$

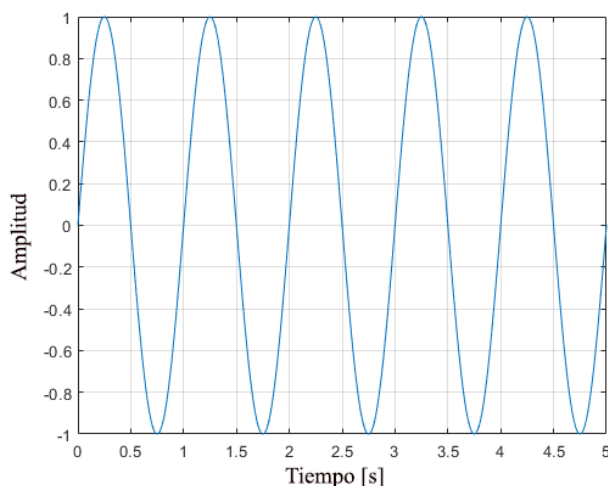
**Tabla 3-3:** Grados de libertad escogidos para evaluar las fallas

Para la entrada a la cual se someterá el sistema, se evaluarán dos opciones principalmente. Una entrada de tipo armónica como puede ser una señal senoidal y una entrada de tipo impulso. Gracias al software MATLAB, se puede evaluar al sistema determinado  $[G(s)]$ , que se puede obtener de la forma vista en la sección 2.1.2 y ser procesada con distintos comandos. De esta manera, se podrán inducir las fallas en el sistema para evaluar su respuesta posteriormente en el dominio de la frecuencia.

### 3.4.1. Excitación armónica rotación y translación

```
*u1=sin(wt);
y=lsim(G,u1,t);
```

La entrada  $u_1$ , se muestra en la figura **3-4**. Posteriormente, se le aplica esta entrada a la función de transferencia obtenida. Dado el caso que el sistema tenga dos o más grados de libertad, deberá especificarse la posición a la que se le aplicará la entrada, y así mismo, la salida que se desea analizar.



**Figura 3-4:** Señal de entrada del sistema

El comando 'lsim' permite evaluar determinada función de transferencia, ante una entrada, en este caso ' $u_1$ ', en un vector de tiempo ' $t$ '. Y almacenarlo, en la variable ' $y$ ' como un vector en función del tiempo.

Como se mencionó, si el sistema cuenta con varios grados de libertad, se puede aplicar a una posición determinada de la matriz de funciones de transferencia ' $G(S)$ ', esto se debe a que se puede evaluar la entrada del sistema en diferentes grados de libertad, y así mismo, obtener la respuesta de dicha entrada en algún punto específico del sistema, como se muestra a continuación, donde se evalúa la entrada en el primer grado de libertad, y se analiza la respuesta en el mismo ( $G(1,1)$ ).

```
*u1=sin(wt);
y=lsim(G(1,1),u1,t);
```

Guarda en la variable ' $y$ ' un vector en función del tiempo, ante una entrada ' $u_1$ ', en este caso, una función tipo seno, para la matriz ' $G$ ' en el primer grado de libertad o posición (1,1).



### 3.4.2. Impulso en rotación y translación

Al igual que con la entrada anterior, si el sistema tiene dos o más grados de libertad, se puede aplicar a posiciones determinadas de la matriz de funciones de transferencia, para obtener la respuesta en determinado punto del sistema ante una entrada en el mismo u otro grado de libertad seleccionado.

\*  $y=impulse(G,t);$

Guarda en la variable 'y' un vector en función del tiempo, ante una entrada de tipo impulso para la función 'G'.

\*  $y=impulse(G(1,1),t);$

Guarda en la variable 'y' un vector en función del tiempo, ante una entrada de tipo impulso para la matriz 'G' en el primer grado de libertad o posición (1,1).

### 3.4.3. Simulación de falla en engrane

Para analizar las fallas de los engranes, es importante tener en cuenta la sección 2.4.3. Se debe calcular la frecuencia de engrane (GMF) y también, las velocidades de giro del piñón y el engrane.

Tomando como ejemplo, el engrane helicoidal con una velocidad de entrada de 100 RPM, donde se conocen las características del engrane y el piñón, se pueden obtener frecuencias de giro y adicionalmente, de la ecuación 2-19 lo siguiente:

$$\omega_{gear} = \frac{100rev}{min} \frac{2\pi}{1rev} \frac{1min}{60s} = 10.47 rad/s$$

Por medio de la relación de transmisión, con el número de dientes y la velocidad del engrane se obtiene:

$$\omega_{pinion} = 10.47 \frac{rad}{s} \frac{112}{31} = 37.84 rad/s$$

Reemplazando los valores encontrados previamente, se obtiene:

$$GMF = Z_{gear} \cdot \omega_{gear} = Z_{pinion} \cdot \omega_{pinion}$$

$$GMF = 112 \cdot 10.47 = 31 \cdot 37.84 = 1173 rad/s$$

Donde GMF es característica de cada engrane, solo depende del número de dientes y de la velocidad de giro del mismo.

Una vez se obtienen estas frecuencias de entrada y de engrane, es posible simular fallas. Se genera una función de tipo senoidal como se mencionó previamente, para representar la entrada con una determinada velocidad de giro. Y adicionalmente, para emular las fallas, se genera una función adicional de frecuencia GMF. Para simular las fallas, se puede aumentar la amplitud de dicha señal, o modificar los parámetros de rigidez y amortiguamiento con el fin de alterar el resultado original. Las frecuencias se excitarán mostrando un comportamiento anormal. Lo que se verá reflejado más adelante al obtener la respuesta y la transformada de Fourier de la misma.

### 3.4.4. Simulación de falla en rodamiento

Para simular las fallas del rodamiento, se debe realizar un procedimiento similar al de los engranes. Se deben hallar las frecuencias mostradas en la sección 2-20.

Siguiendo con el ejemplo anterior, se tiene una velocidad de 100 RPM. Por tanto, se debe hallar la velocidad de giro del rodamiento a partir de la relación de transmisión. Y tomando 8 como el número de bolas del mismo, siguiendo el catálogo de SKF para un rodamiento rígido de bolas.

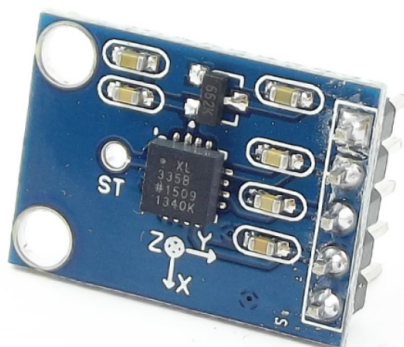
$$\omega_{bearing} = 10.47 \frac{rad}{s} \frac{126mm}{35mm} \qquad \omega_{bearing} = 37.69 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} BPF0 &= 0.4 \cdot 8 \cdot 37.69 \text{ rad/s} \\ BPFI &= 0.6 \cdot 8 \cdot 37.69 \text{ rad/s} \\ FTF &= 0.4 \cdot 37.69 \text{ rad/s} \end{aligned} \qquad (3-5)$$

## 3.5. Propuesta de sistema de medición

### 3.5.1. Sensores

Como propuesta del sensor se tiene el acelerómetro ADXL335, el cual es un sensor capacitivo con óptimas características de medición. Capta los cambios de aceleración en cada uno de los ejes de coordenadas. Tiene un ancho de banda ajustable entre 0.5 y 1600 Hz para los ejes X y Y, y entre 0.5 y 550 Hz para el eje Z. En condiciones estáticas, detecta la aceleración de la gravedad, correspondiente al eje Z. Sus principales aplicaciones pueden ser medición de movimiento, vibraciones o choques. Cuando el voltaje de alimentación del sensor es 3.6 V, el sensor tiene una sensibilidad de salida de 360 mV/g, y cuando es de 2 V, tiene 195 mV/g. [30].



**Figura 3-5:** Sensor acelerómetro ADXL335

*Fuente: Naylamp Mechatronics*

Por su costo y facilidad de implementación, el acelerómetro mencionado anteriormente es una buena opción para llevar a cabo la medición y el registro de los datos. Adicionalmente, es muy sencillo realizar la interacción con Matlab, gracias al uso de un Arduino de cualquier tipo y una serie de librerías como se explicará más adelante. También existen otras opciones para adquirir dichos datos, como el acelerómetro ADXL345 o el sensor giroscopio MPU6050; que son un poco más avanzados en cuanto a su calibración, y su implementación tanto en software como en hardware.

### 3.5.2. Señal de entrada

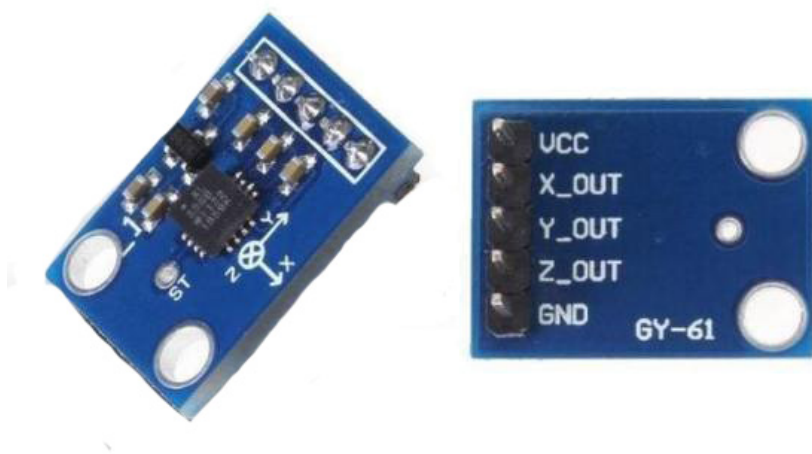
Como se muestra en la etapa de simulación de fallas, la entrada que recibirá el sistema inicialmente, es un impulso, que es equivalente a prender y apagar rápidamente la máquina, con el fin de observar el comportamiento que esta tendrá al recibir una entrada aleatoria. Como el sistema es de tipo oscilatorio debido a los componentes con los que se plantea el modelo, este intentará estabilizarse después de un período de tiempo dependiendo de las condiciones

iniciales planteadas como la rigidez y el amortiguamiento.

Adicionalmente, se evaluará el sistema con una entrada constante, para producir una velocidad de giro determinada en el eje que transmite el movimiento al resto del sistema. De esta forma, se puede evaluar el mecanismo en estado estable, es decir, en su funcionamiento normal, donde se podrá apreciar por medio de las señales medidas las posibles alteraciones en el mismo. Para representar esta señal se utilizará una señal seno, ya que permite regular la velocidad de giro a la cual se someterá el motor que se encargará de transmitir movimiento al resto del sistema. Como se muestra en la figura 3-7, la señal puede llegar a presentar mucho ruido o componentes no deseados, por lo que los dos factores que se mencionarán a continuación son muy importantes para reducir los errores en la adquisición de la misma.

### 3.5.3. Tratamiento de señal

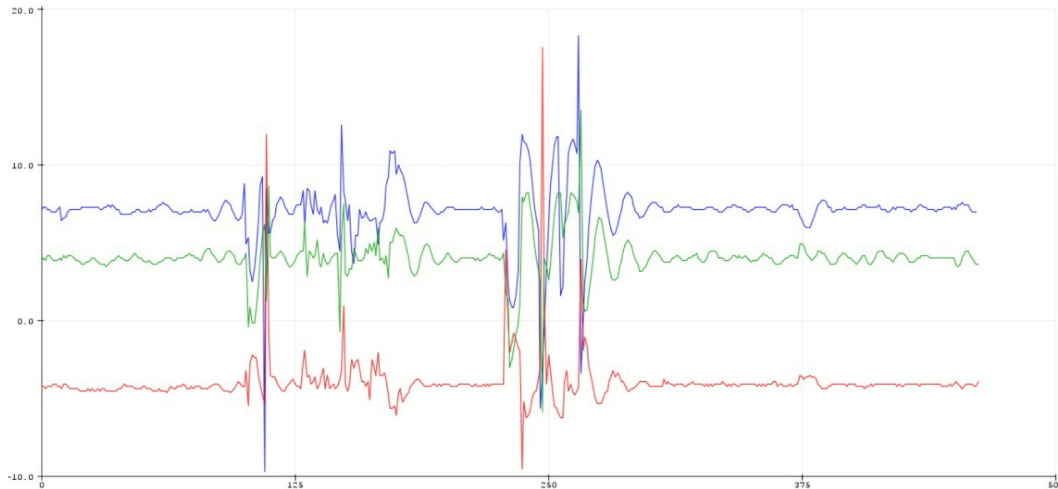
Para la propuesta de adquisición de datos en las posibles pruebas a realizar, para analizar las vibraciones y por consiguiente las fallas que puede tener el sistema, se utilizará un microcontrolador (Arduino ATmega 2560), sensores acelerómetros (ADXL335), y la extensión SIMULINK de MATLAB para almacenarlos. Inicialmente, se sabe que el microcontrolador tiene pines de lectura y escritura tanto análogos como digitales. Para este caso se utilizarán los pines análogos del mismo, ya que el sensor entrega un voltaje por cada cambio de aceleración en alguno de los 3 ejes de coordenadas. El sensor cuenta con 5 pines, dos para alimentación, 3.3 V y tierra, y 3 pines, uno para cada uno de los ejes, como se muestra en la figura 3-6.



**Figura 3-6:** Pines del sensor acelerómetro ADXL335

En el momento en que se energiza, el sensor hace un test inicial, para identificar los puntos neutros en cada uno de los ejes. Por tanto, si se ubica paralelo a una superficie horizontal,

el sensor indicará 0 tanto en el eje X como en el Y, pero en el eje Z marcará la aceleración de la gravedad, por lo que es importante tener esto en cuenta al momento de registrar las mediciones, ya que estará siempre condicionada por este valor.



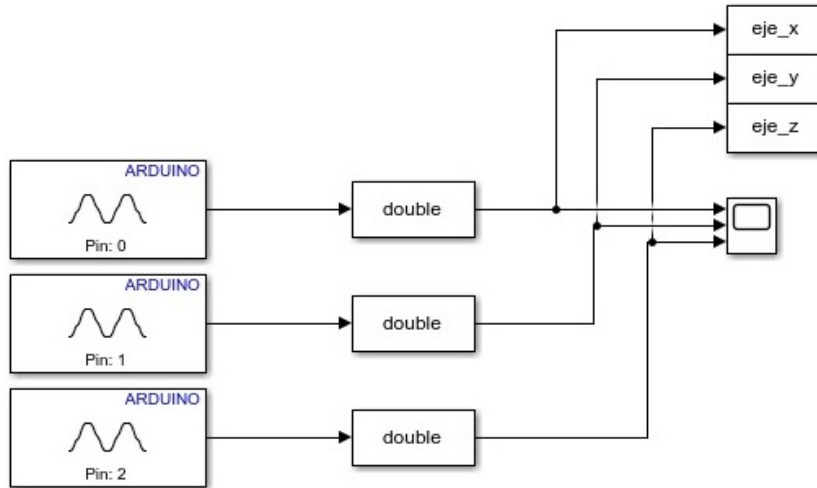
**Figura 3-7:** Prueba de medición aleatoria con el acelerómetro

Para realizar esta medición, es necesario instalar a Matlab, la extensión de Simulink *Simulink Support Package for Arduino Hardware*. Esta extensión habilita las funciones básicas del Arduino, como leer o escribir en pines digitales o análogos, generar señales PWM, entre otras más. Para este caso se tomará una lectura de un pin análogo para cada uno de los ejes. Es necesario especificar en el bloque del pin análogo, que el tiempo de muestreo será el asignado posteriormente en la configuración de Simulink, en este caso, se colocará un “-1” para que sea por defecto. Además, es necesario convertir el tipo de variable que se obtiene del bloque inicial. Se debe colocar tipo *double*.

Finalmente, sabemos que al realizar la lectura del pin análogo para el ATmega 2560, se tiene una precisión de 10 bits, por lo que puede entregar valores entre 0 y 1023. Por tanto, si se desea obtener un valor de voltaje que represente esa medición, se debe colocar una ganancia para realizar esa conversión final. En este caso, solo se realiza la prueba de funcionamiento, por lo cual no se colocó dicha ganancia. Para guardar los datos, se utiliza la herramienta *To workspace*, y se configura como *structure with time* para almacenarlos en función del tiempo en que toma la muestra.

Configurar el muestreo y las características de la simulación, se realiza, por medio de la pestaña *simulation* en *Model configuration parameters*. Una vez aparece la ventana correspondiente, se empieza a ajustar de acuerdo a lo que se necesite medir. En el ítem *Solver* se puede ajustar el tiempo inicial y final en el cual se desea medir. Para el tipo se ajusta *Fixed-step* con tipo de variable discreta.

Por último, se ajusta el tiempo de muestreo que para este caso es de 10ms, resaltando que entre más pequeño sea el tiempo de muestreo, se tendrá mayor precisión en los datos, siempre



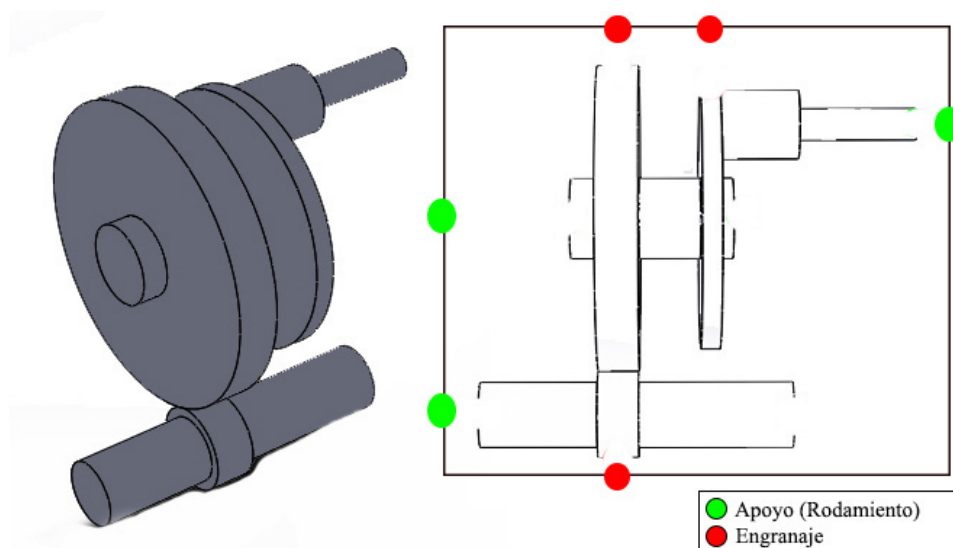
**Figura 3-8:** Diagrama de bloques en Simulink para la adquisición de datos

estando limitados por la frecuencia del microcontrolador de 16 MHz. Por lo que los 10ms no representan dificultad alguna para esta aplicación. En la pestaña *Hardware Implementation* se ajusta la tarjeta que se va a trabajar, para este caso, el *Arduino Mega 2560*. Adicionalmente, se puede encontrar más ajustes como importar o exportar datos o señales a matlab desde un documento externo. En este caso no es necesario. Simplemente corremos la simulación. Luego de un pequeño tiempo de espera donde se configura el Arduino y se programa, se puede apreciar en el *scope* del simulador las señales correspondientes como se muestra en la figura mencionada anteriormente. Una vez se cumple el tiempo, que para este caso es de 10 segundos, se aprecia en el workspace de MATLAB, las estructuras correspondientes a cada uno de los ejes, con los datos tomados. Ya quedan almacenados los vectores correspondientes. Si se desea, se puede almacenar esos mismos datos en un documento de texto o una tabla externa a MATLAB.

### 3.5.4. Posicionamiento

Para obtener un resultado más preciso, es importante conocer la estructura base del sistema mecánico a examinar. Una vez ubicados los rodamientos o soportes, engranes, entre otros componentes; es más factible ubicarlos justo al lado de los mencionados. Como se muestra en la figura 3-9, se tiene un esquema general del sistema de transmisión seleccionado, y al lado derecho, la vista lateral del mismo, con unos puntos específicos donde posiblemente se tendrá una mejor recepción de los datos.

La posición es clave al momento de realizar la adquisición de los datos, ya que en algunos puntos se pueden captar de manera más eficaz que en otros. Los puntos mencionados



**Figura 3-9:** Propuesta de posicionamiento de los sensores para adquisición de datos

anteriormente podrían facilitar el registro de los mismos. Aunque se debe tener en cuenta, que dependiendo de la calidad del sensor o del estado general de la máquina, existirá más o menos ruido, que puede alterar la señal que se desea almacenar.

Para esta implementación, se deben colocar los sensores de tal manera que se dejen fijos, es decir, que vibren con la máquina. Como se evidencia, se pueden colocar en la carcasa o estructura que contiene el motor, siempre teniendo en cuenta los puntos mostrados para captar de mejor manera la señal de vibración proveniente de los componentes del mecanismo. Si no se asegura esto, puede vibrar el sensor de manera diferente a como lo hace la máquina, y podría perjudicar la señal que se va adquirir. Esto ya depende de la posición que se desee elegir y donde se desee medir. Se debe realizar un test inicial, para verificar que se encuentra calibrado, es decir, que mida 0 en dos ejes coordenados y el valor de la gravedad en el eje restante, como se indicó previamente.

Al llevar esto a la práctica se deben tener en cuenta ciertas limitaciones de los componentes electrónicos que se van a usar. Para este caso, la frecuencia del cristal del microcontrolador (16 MHz), permite realizar mediciones pero no a elevadas frecuencias, puesto que la conversión que realiza el ADC también se encuentra limitada por la misma. Si se muestrea y se realiza la conversión a una frecuencia muy alta, se sobrecarga la memoria del dispositivo, y no puede realizar satisfactoriamente dichas mediciones. Por tanto, se debe realizar el siguiente análisis:

Teniendo en cuenta que la velocidad nominal de un motor de lavadora se encuentra entre 600 y 1400 revoluciones por minuto (RPM), se selecciona 800 RPM. De esta manera es posible determinar las frecuencias de trabajo del sistema general, que se analizan con suposiciones de los valores, y en la práctica se podrían tener como se muestra a continuación:

Tipo de frecuencia	Frecuencia (Hz)	Período (ms)
Giro del motor	13.3	75.2
GMF	1490	0.67
BPFO	153.22	6.53
BPFI	229.82	4.35
TFT	19.15	52.5

**Tabla 3-4:** Frecuencias características del sistema planteado

Teniendo en cuenta los valores registrados en la tabla **3-4**, y siguiendo el criterio de Nyquist, se debe tomar mínimo 2 veces la frecuencia máxima de funcionamiento del sistema, para este caso  $1490\text{Hz}$ , por lo que se toma, una frecuencia de 3000 Hz.

Una vez definida esta frecuencia, es importante verificar el funcionamiento del ADC del microcontrolador. Se encuentra optimizado para que su cristal pueda trabajar hasta 200 kHz, pero el dispositivo no podría realizar ninguna otra operación. Además, usando el comando *AnalogRead*, se tiene una frecuencia de hasta 15 kHz.

Por lo que se propone implementar adicionalmente, un ADC externo, que se encargue de realizar estas conversiones, puesto que pueden posicionarse varios sensores. Esto permite liberar el microcontrolador, para que solamente se encargue de leer y enviar los datos registrados al software de análisis de datos.

Para este ADC se podría implementar un ADS1115, que en modo de alta velocidad de operación, tiene un cristal de hasta 3.4 MHz, lo que permite realizar estas conversiones sin necesidad de ocupar la memoria del microcontrolador empleado. [31]



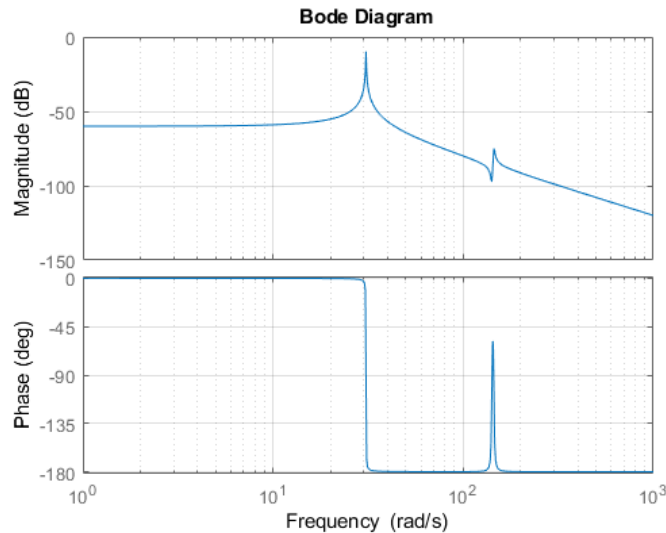
# 4 Resultados y análisis de resultados

## 4.1. Respuesta del sistema de transmisión

### 4.1.1. Respuesta del modelo de un eje con engrane y deformación axial

Inicialmente se observará la respuesta del sistema de la figura 3-2, aplicando diferentes entradas a los grados de libertad del disco, que en este caso es la masa  $m_5$  en la dirección axial, para evaluar el comportamiento del sistema ante diferentes entradas.

Tomando como ejemplo los valores de  $K=1000$  y los valores de  $B=0.1$ , como se muestra en el anexo 6.4.1, se puede realizar este modelamiento en MATLAB, de ahí se obtienen los resultados mostrados en la figura 4-1 a partir del diagrama de Bode y su comportamiento en frecuencia. Estos valores, se pueden considerar de acuerdo a las características de los materiales del sistema y los componentes del mismo.

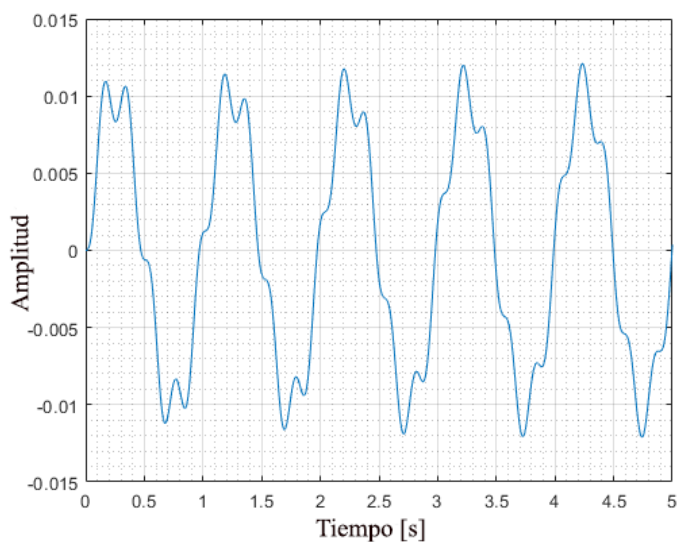


**Figura 4-1:** Diagrama de Bode del modelo del eje con engrane y deformación axial

Con el comando *eig* se pueden obtener los autovalores del sistema. La parte imaginaria de los mismos, representa las frecuencias naturales del sistema. Como se muestra en el diagrama de Bode, los valores son muy similares.

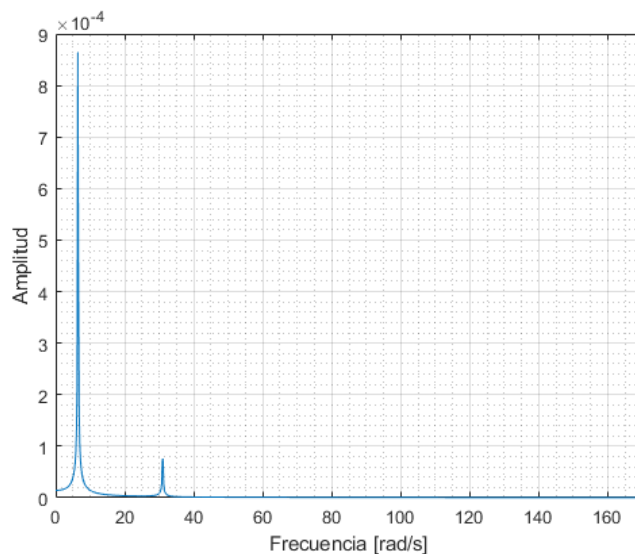
$$\lambda_1 = 145.1 \text{ rad/s} \quad \lambda_2 = 141.4 \text{ rad/s} \quad \lambda_3 = 30.8 \text{ rad/s}$$

Al someter al sistema una entrada senoidal se obtiene el resultado de la figura 4-2. Lo mismo sucede para una entrada de tipo impulso en la figura 4-4.



**Figura 4-2:** Respuesta del sistema ante una entrada senoidal

Se puede obtener la transformada de Fourier del sistema, donde se aprecia la frecuencia de la señal vista previamente.



**Figura 4-3:** Transformada de Fourier de la señal de la figura 4-2

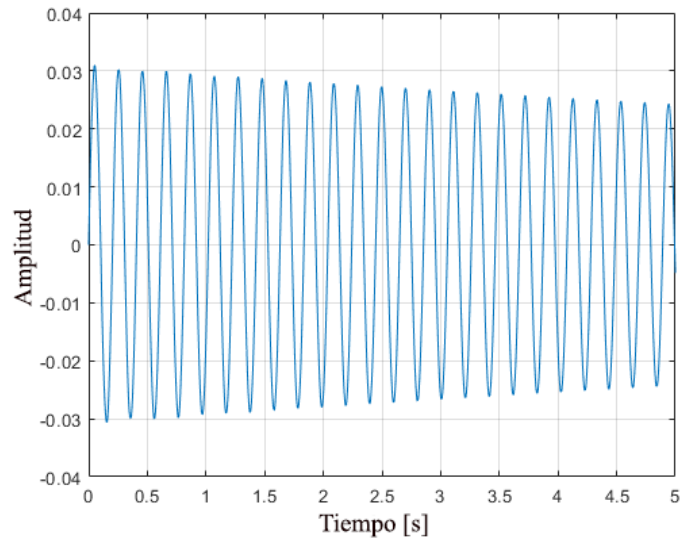


Figura 4-4: Respuesta del sistema ante una entrada impulso

#### 4.1.2. Respuesta del modelo Jeffcott 8 GDL

Para el modelo Jeffcott se realiza un procedimiento similar. Se aplica una entrada de tipo impulso y una senoidal, pero en este caso, se aplicará en 2 grados de libertad distintos. La figura 4-6, muestra la respuesta del sistema al aplicar una entrada en el grado de libertad 3 según el orden de las matrices, es decir,  $\theta_x$ . El diagrama de Bode, que representa el comportamiento del sistema en el grado de libertad mencionado, se muestra en la figura 4-5.

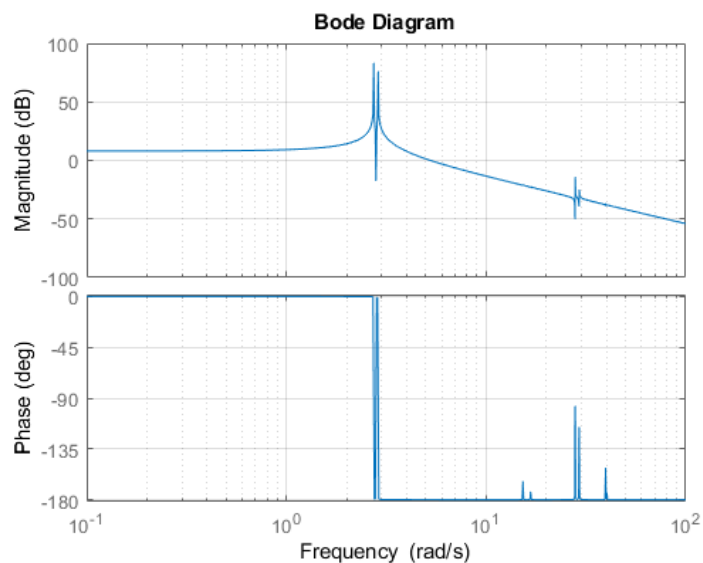
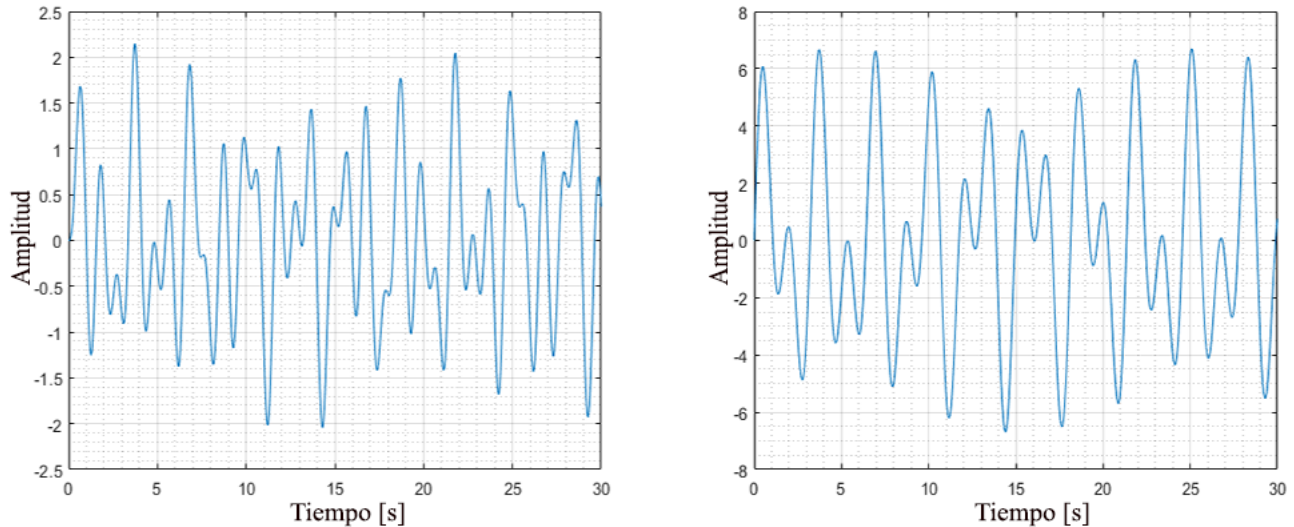


Figura 4-5: Diagrama de bode de la función correspondiente al grado de libertad ( $\theta_x$ )

En esta figura se evidencian las frecuencias naturales correspondientes al sistema planteado. Cabe resaltar que algunas son muy cercanas por lo que los picos puede que no se diferencien del todo con respecto a los otros que se muestran claramente.



**Figura 4-6:** Respuesta del modelo Jeffcott ( $\theta_x$ )

1) Entrada seno 2) Entrada impulso

Como se evidencia en este caso, la respuesta temporal ante una entrada impulso, no se amortigua, puesto que al aplicar dicha entrada en ese grado de libertad específico y como se aprecia en la matriz de amortiguamiento en la posición 3,3 de la sección 3.3.1, el valor correspondiente es 0. Lo mismo pasaría al tratar de simular dicha entrada al grado de libertad  $\theta_y$ .

En la figura 4-7, se aprecia la respuesta en frecuencia del sistema, una vez se le ha aplicado la entrada de tipo seno.

Como se puede apreciar en el diagrama de Bode de la figura 4-5, se tienen los picos de las frecuencias naturales del sistema. Algunas son muy cercanas, unas de las otras, por lo que no se aprecian todos los picos de la misma manera. En la figura 4-6 se aprecian las respuestas en el dominio del tiempo, ante una entrada seno y una impulso. La primera gráfica, muestra el sistema sometido a la entrada seno. Se aprecia el comportamiento oscilatorio, y la adición de la señal de entrada. La respuesta en frecuencia del sistema, vista en la figura 4-7, muestra las frecuencias naturales del sistema, a los cuales se les aplica dicha entrada, y adicionalmente, la frecuencia de esa señal senoidal que para este caso es de  $2\pi$ . Al someter al sistema a la entrada de tipo impulso, se muestra el comportamiento oscilatorio del mismo. El coeficiente de amortiguamiento hace que el mecanismo se vaya atenuando a medida que transcurre un período de tiempo determinado.

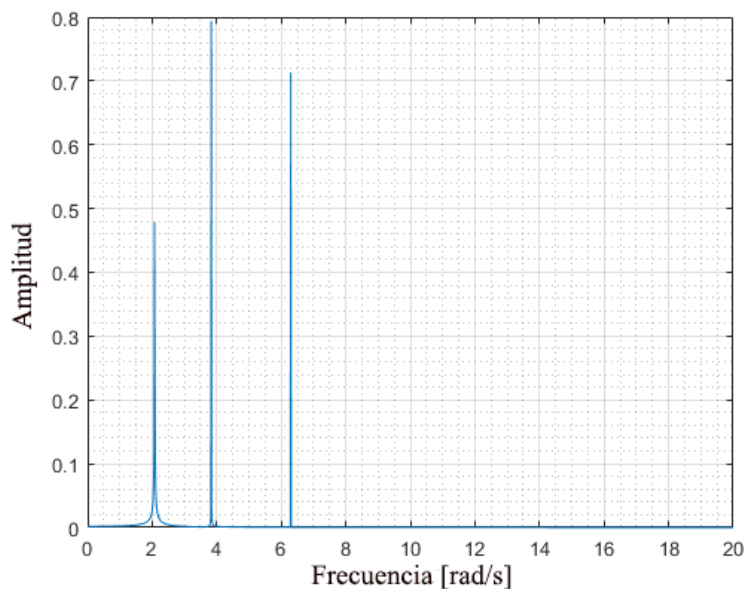


Figura 4-7: Respuesta en frecuencia del modelo Jeffcott en el GDL ( $\theta_x$ )

### 4.1.3. Respuesta del modelo del acoplamiento de dos ejes

Para el acoplamiento de los dos ejes, se toma el modelo de la figura 3-3, que cuenta con 9 GDL. Para este caso, se probarán las entradas en cada uno de los discos para evaluar que su comportamiento es similar debido a los valores que se consideran para el planteamiento matemático como se muestra en el anexo 6.4.3. En este caso, no se excitará el sistema en los grados de libertad axiales, si no, en los radiales. Obteniendo las respuestas vistas en las figuras 4-9 y 4-10. La figura 4-8, muestra el diagrama de Bode del grado de libertad  $y_2$ , con la entrada aplicada.

La respuesta en frecuencia del sistema en el grado de libertad mencionado, después de aplicar la entrada, se aprecia en la figura 4-11.

Así como en el grado de libertad anterior, el diagrama de Bode muestra todas las frecuencias naturales del sistema. En este caso, se aplica directamente sobre un soporte, por lo que se evidencia la interacción de más grados de libertad del sistema, y más picos de frecuencias en el mismo. La transformada de Fourier que se aprecia en la figura 4-11, muestra la frecuencia de la entrada, y algunos picos con magnitud pequeña en comparación a las anteriores. Esto se debe a que los factores de amortiguamiento o rigidez son diferentes en el disco, y en el soporte, y altera el valor de las frecuencias naturales del sistema y la magnitud de las mismas.

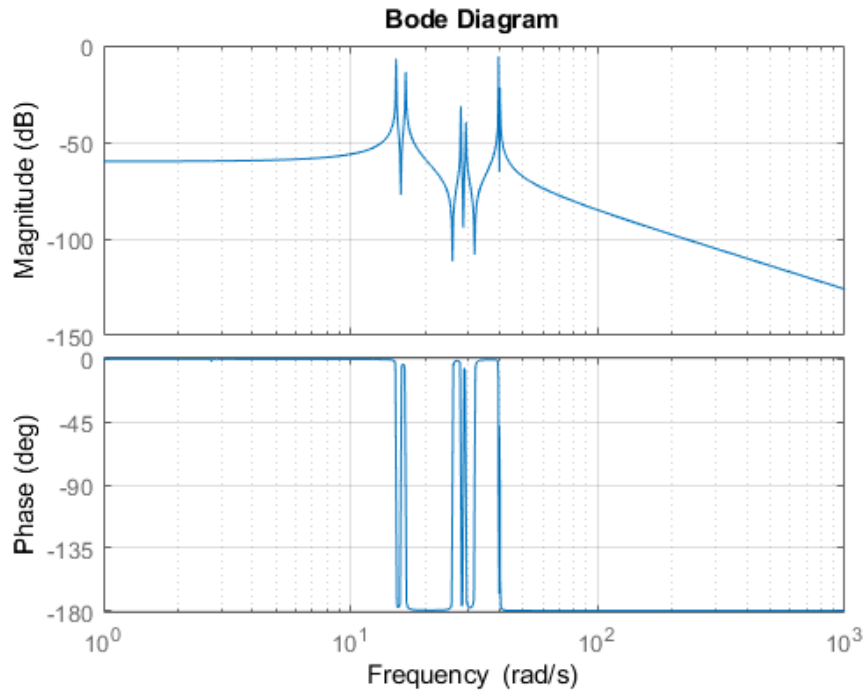


Figura 4-8: Diagrama de Bode del sistema acoplado en el GDL ( $y_2$ )

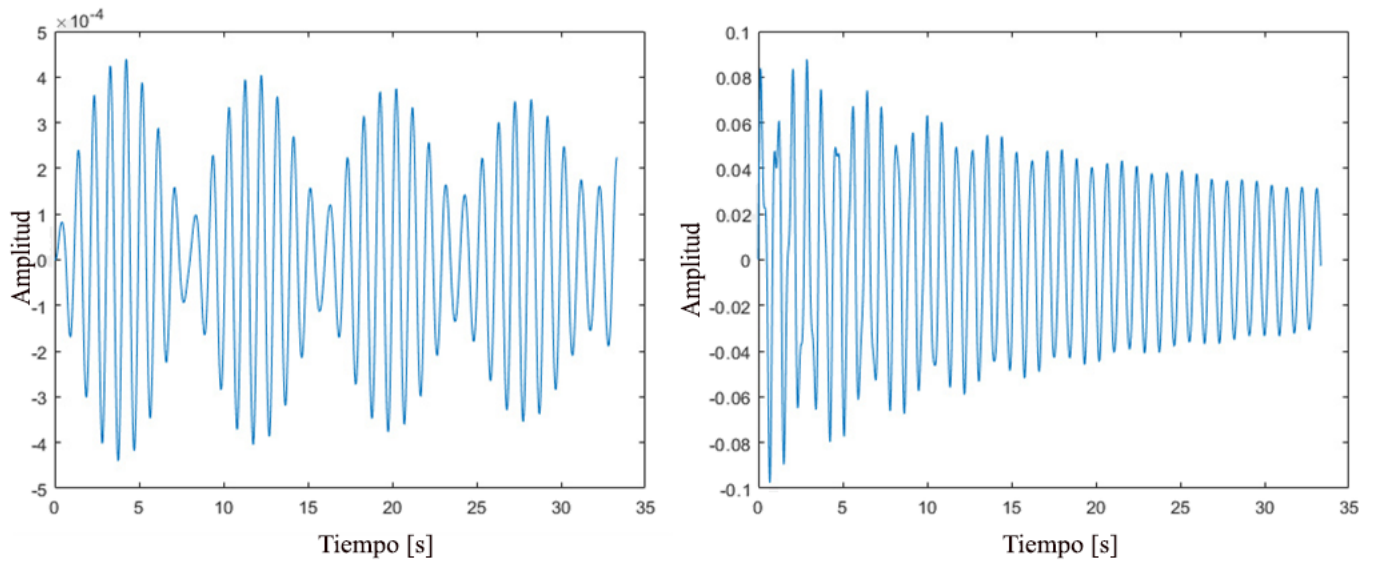
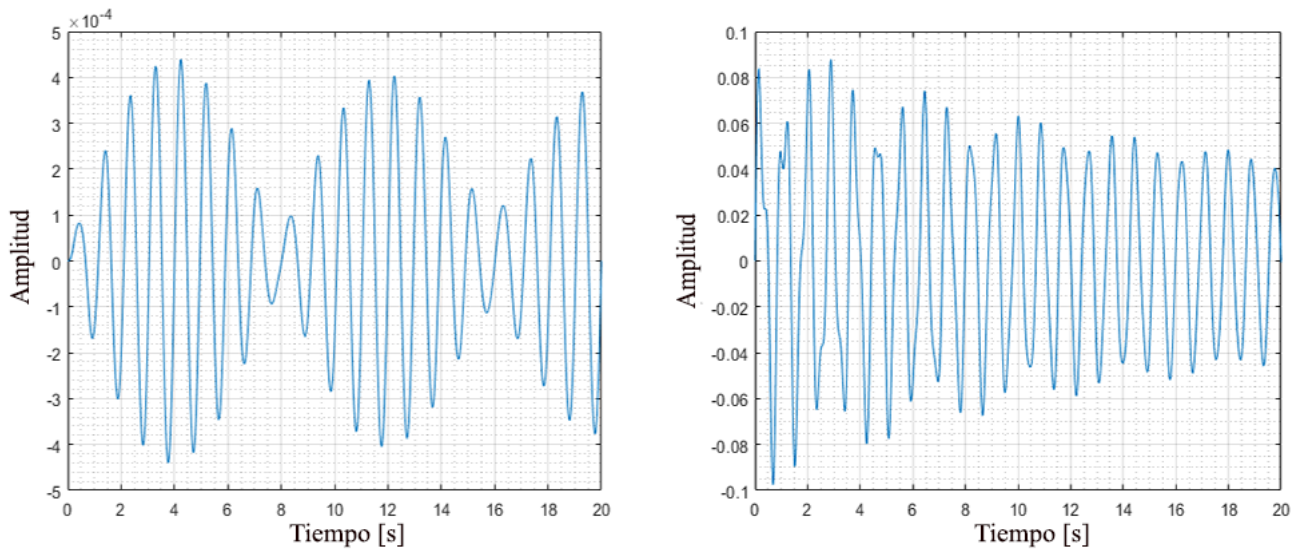


Figura 4-9: Respuesta del sistema acoplado en el GDL ( $y_2$ )

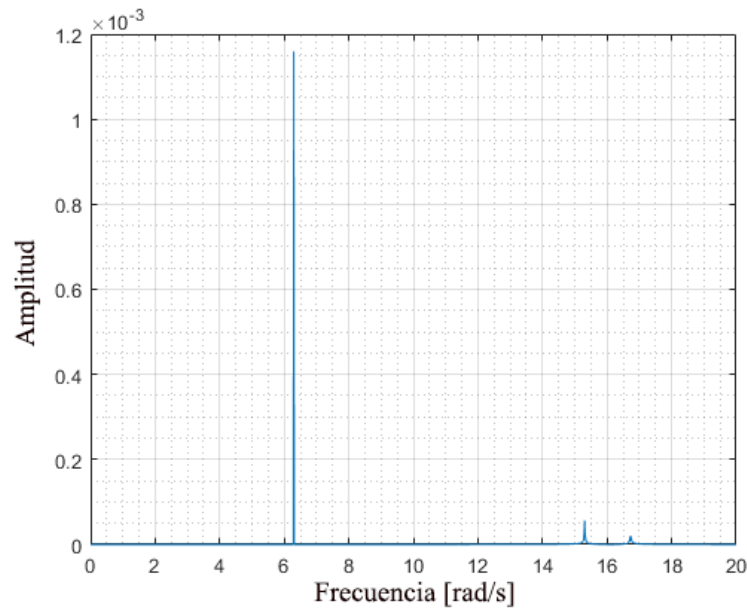
1) Entrada seno 2) Entrada impulso

#### 4.1.4. Modelado engrane helicoidal

A partir de las ecuaciones 6-5, planteadas en el marco teórico y teniendo en cuenta los valores que se mencionan a continuación, se puede evaluar el comportamiento de los dos



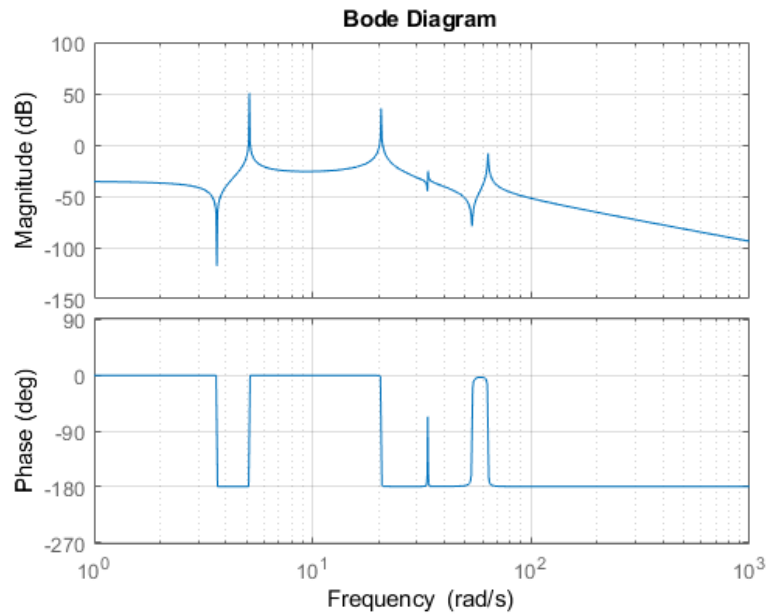
**Figura 4-10:** Respuesta del sistema acoplado con en GDL ( $y_6$ )  
1) Entrada seno 2) Entrada impulso



**Figura 4-11:** Respuesta en frecuencia del modelo Jeffcott en el GDL ( $y_2$ )

discos, engrane y piñón helicoidales, obteniendo como respuesta a una entrada seno y al impulso unitario, aplicados a los grados de libertad rotacionales  $\theta_2$  para el disco  $m_2$  y  $\theta_5$  para el disco  $m_5$ . Como valores iniciales, el contacto entre los discos está representado por  $k_{d1}=1000$  y  $c_{d1}=0.1$ . Estos valores van a cambiar posteriormente para la representación de las fallas.

El diagrama de Bode de la figura 4-12 representa el comportamiento en frecuencia del sis-



**Figura 4-12:** Respuesta en frecuencia del modelo del engrane helicoidal en el GDL  $\theta_2$

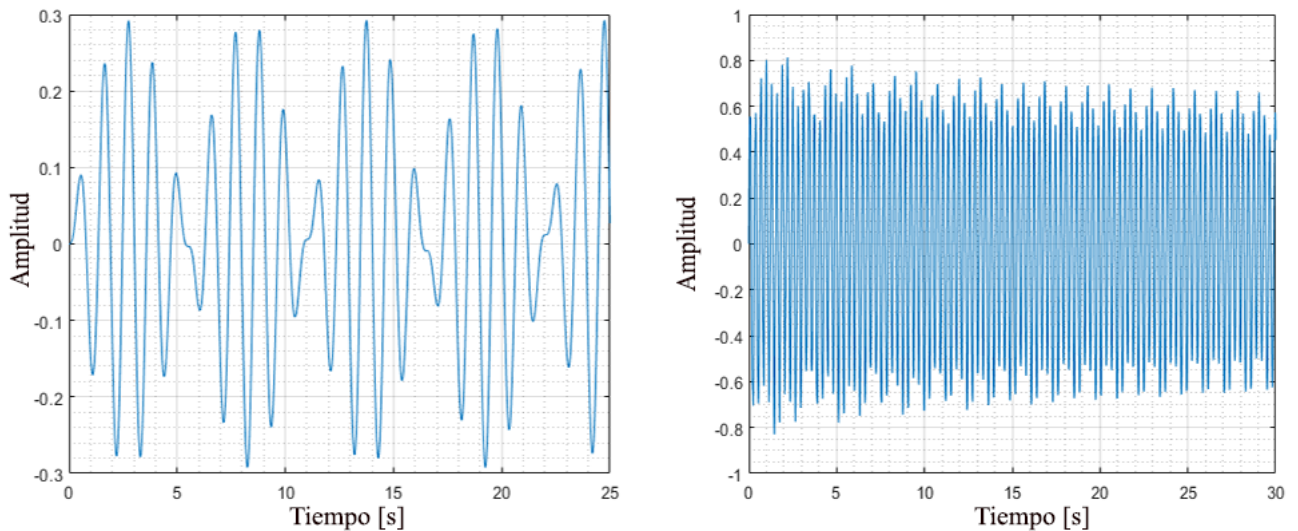
tema de engrane helicoidal, mostrando los picos correspondientes al grado de libertad ( $\theta_2$ ).

Así mismo, como se evalúan dos grados de libertad se obtienen las respuestas oscilatorias de los discos que componen el engrane helicoidal. Al ser grados rotacionales, relacionan el contacto entre los dientes, por lo que, su respuesta en el dominio del tiempo es algo diferente a las vistas previamente.

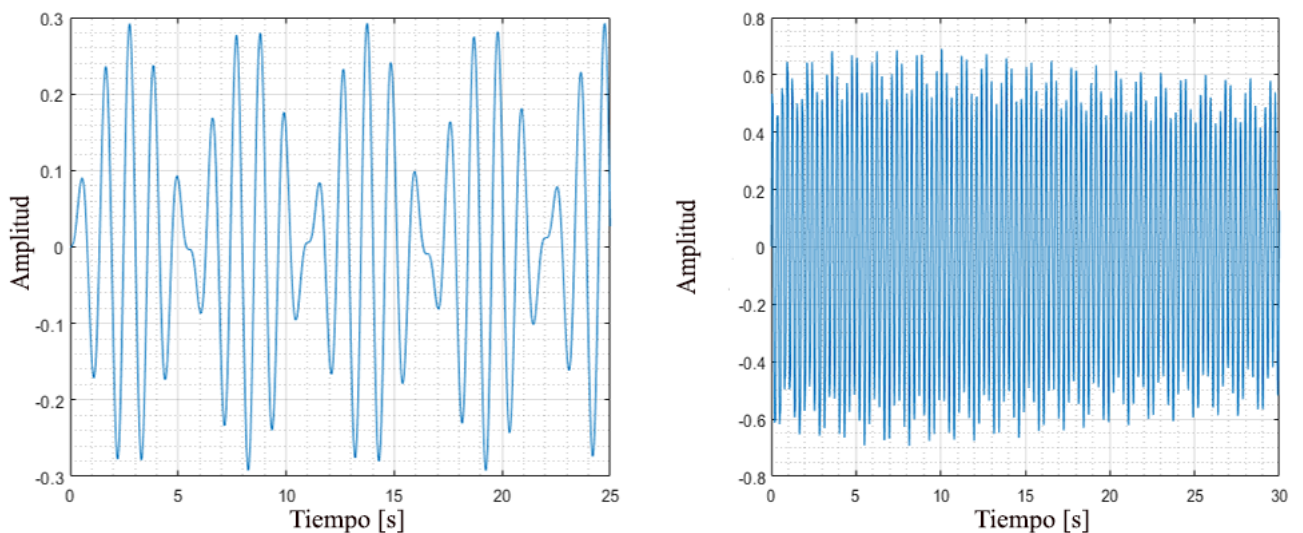
En el dominio de la frecuencia, se observan diferentes picos, luego de aplicar la entrada tipo seno, y de obtener la transformada de Fourier como se aprecia en la figura 4-15, se aprecian pequeños picos de las frecuencias naturales del sistema y la de la señal de entrada.

Como se muestra en la figura 4-15, aparece el pico característico de la frecuencia natural del grado de libertad analizado, y pequeños picos que representan los demás grados de libertad que no influyen directamente en el sistema, pero debido a la forma de los dientes del engrane, se debe tener en cuenta la mayoría de grados de libertad ya que ese contacto que se representa, con cierto ángulo de inclinación, genera fuerzas en los ejes coordenados.





**Figura 4-13:** Respuesta del modelo del engrane helicoidal ( $\theta_2$ )  
1) Entrada seno 2) Entrada impulso

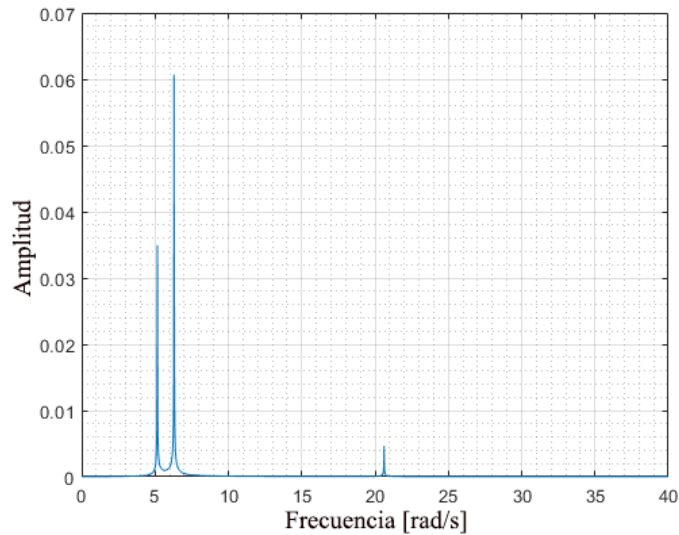


**Figura 4-14:** Respuesta del modelo del engrane helicoidal ( $\theta_5$ )  
1) Entrada seno 2) Entrada impulso

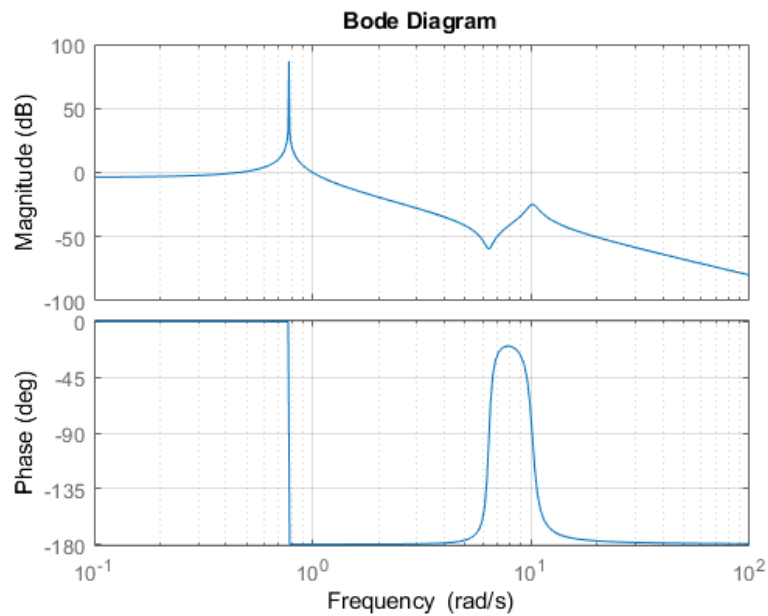
#### 4.1.5. Modelado engrane hipoide

A partir de las ecuaciones, planteadas en la sección 2, se puede evaluar el comportamiento de los dos discos, engrane y piñón hipoides, aplicando una entrada a los grados de libertad rotacionales  $\theta_4$  para el disco  $m_4$  y  $\theta_8$  para el disco  $m_8$ . Los valores para el acoplamiento son los mismos de la sección previa.

El contacto entre los discos está representado por  $k_{d2}=1000$  y  $c_{d2}=0.1$ . Los grados de liber-



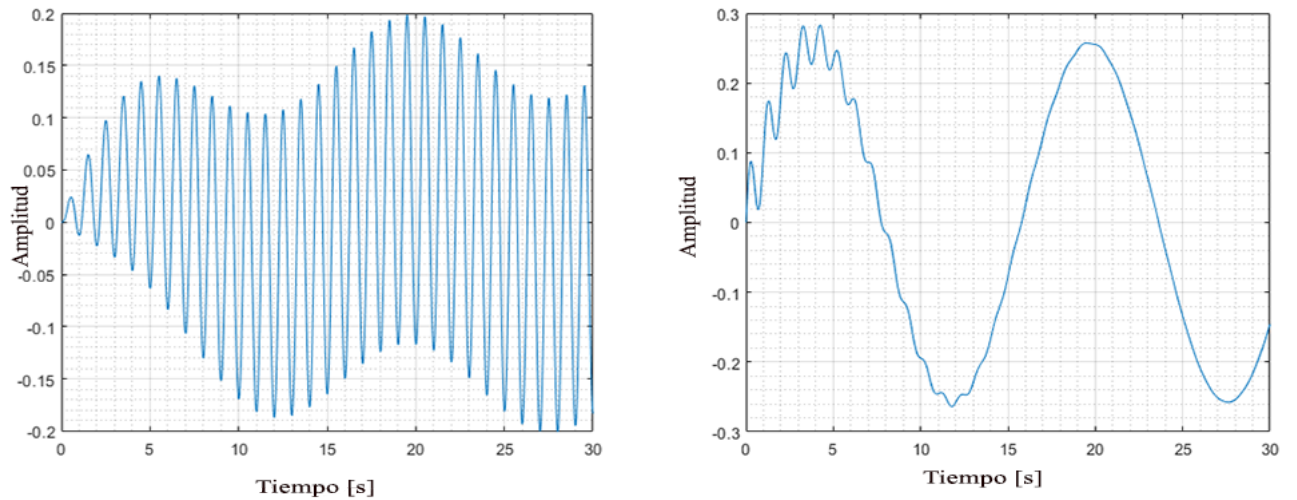
**Figura 4-15:** Respuesta en frecuencia del modelo del engrane helicoidal en el GDL ( $\theta_2$ )



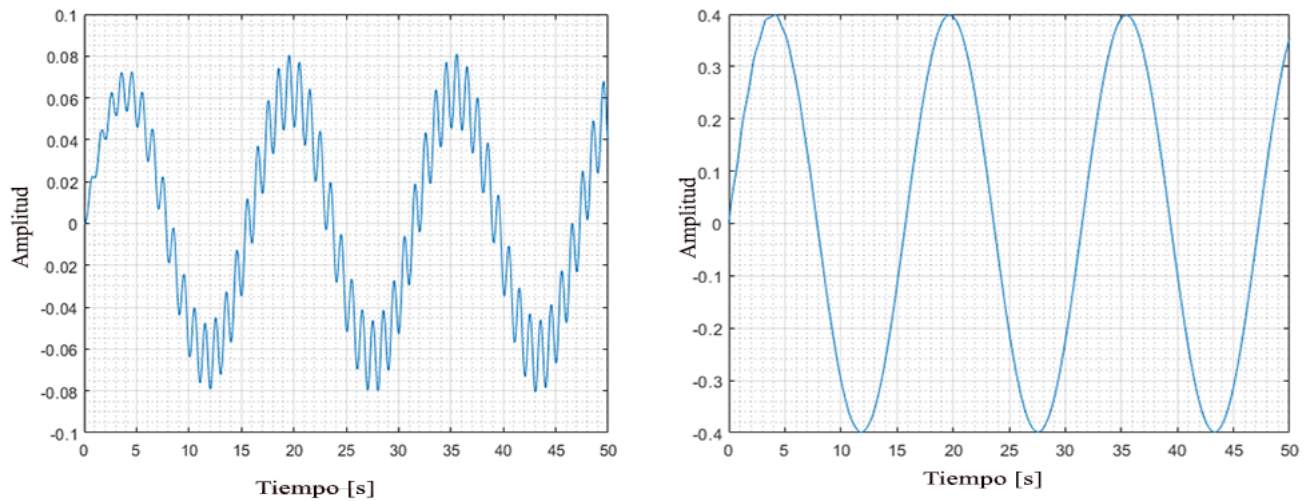
**Figura 4-16:** Respuesta en frecuencia del modelo del engrane hipoide en el GDL ( $\theta_4$ )

tad que se analizan son solamente los rotacionales, ya que como se muestra en la ecuaciones desarrolladas en el anexo 6.3, son las que relacionan el contacto entre los discos.

Como se muestra la respuesta en el dominio del tiempo, para ambos discos, que componen el engrane hipoide, son respuestas diferentes si se hace la comparación con el helicoidal. Las ecuaciones solo relacionan directamente los dos grados de libertad rotacionales, y el con-

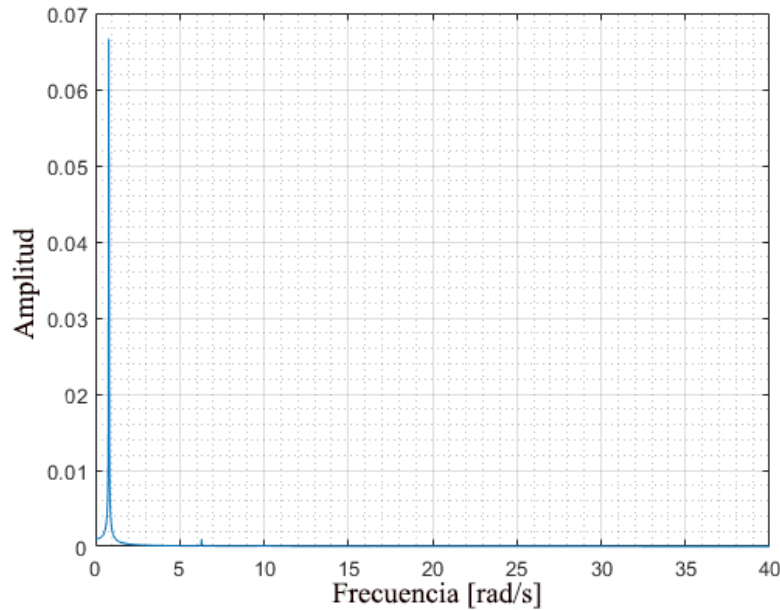


**Figura 4-17:** Respuesta del modelo del engrane hipoide ( $\theta_4$ )  
 1) Entrada seno 2) Entrada impulso



**Figura 4-18:** Respuesta del modelo del engrane hipoide ( $\theta_3$ )  
 1) Entrada seno 2) Entrada impulso

tacto entre los dientes de los engranes, que también, presenta un comportamiento oscilatorio. En la figura 4-19, se muestra el espectro en frecuencia con la entrada aplicada, donde se aprecia el pico correspondiente a la frecuencia natural del sistema, que debido a los valores tomados de rigidez y amortiguamiento del contacto entre los discos, tiene una magnitud mayor, y a medida que el sistema se va estabilizando, por el comportamiento que tiene, va disminuyendo la amplitud, así mismo, un pequeño pico en la frecuencia de dicha señal de



**Figura 4-19:** Respuesta en frecuencia del modelo del engrane hipoide aplicando la entrada en el GDL ( $\theta_4$ )

entrada.

#### 4.1.6. Modelo completo

Se realiza la simulación del sistema helicoidal con el contacto entre los discos pero incluyendo los demás grados de libertad del sistema, teniendo en cuenta el modelo de Jeffcott y la representación axial vista previamente.

La simulación permite obtener las respuestas como se vió previamente para los grados de libertad rotacionales, donde posteriormente se modificarán las condiciones para simular las fallas en los dientes de los engranes. Adicionalmente, se observará la respuesta de los rodamientos, para emular las fallas en los mismos, cambiando las condiciones originales del sistema. Igualmente, con el engrane hipoide, ya que acoplando todas las matrices, se obtienen diferentes respuestas puesto que dependen de otros grados de libertad.

A continuación se mostrará el diagrama de Bode, para determinar el comportamiento en frecuencia, y por ende, las frecuencias naturales del mismo en el grado de libertad evaluado.

Las respuestas temporales se mostraron previamente, y cambiarán al introducir las fallas.

Los grados de libertad que se consideran para los engranajes son  $\theta_{z2}$ ,  $\theta_{z5}$ ,  $\theta_{z3}$ ,  $\theta_{z4}$ , y para los rodamientos o soportes  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_6$ ,  $y_6$ . A continuación se mostrarán los diagramas de Bode de cada uno de los grados de libertad mencionados para mostrar su comportamiento en el dominio de la frecuencia.

Como se aprecia en los diagramas de Bode mostrados anteriormente, a medida que se van

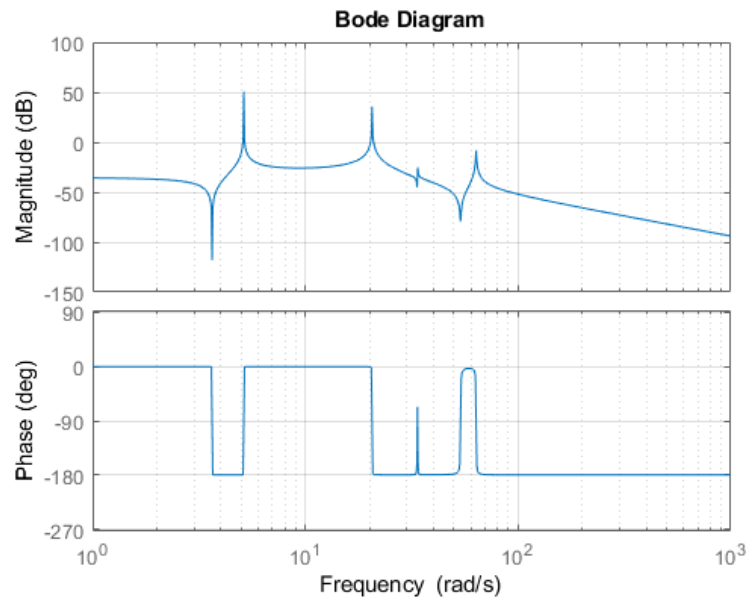


Figura 4-20: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{4,4}$ )

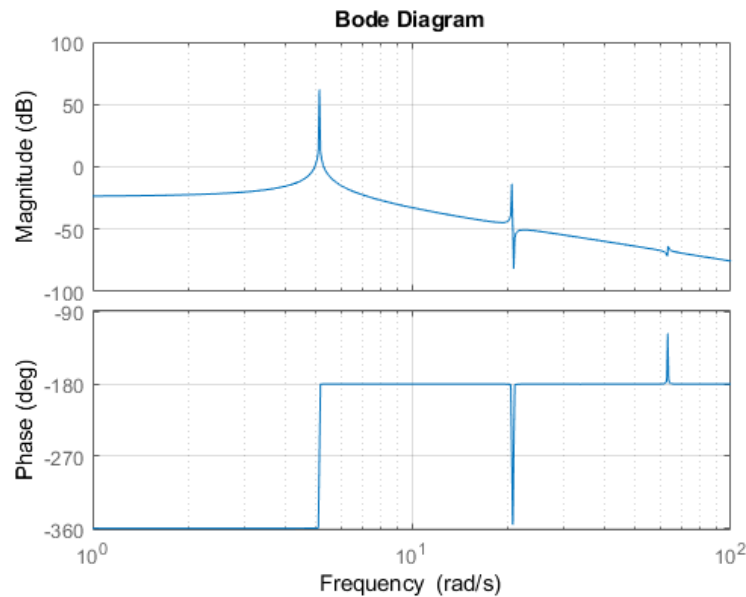


Figura 4-21: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{8,8}$ )

acoplado los sistemas y se van relacionando los diferentes grados de libertad entre ellos. Las frecuencias naturales van variando. Por ejemplo, la figura 4-20 se diferencia de la figura 4-21, ya que el disco 2 se encuentra acoplado en un eje con más grados de libertad que el disco 5, aunque hacen parte del engrane helicoidal, están relacionado con sistemas diferentes, y como se había explicado previamente, genera fuerzas en varias direcciones debido a la forma

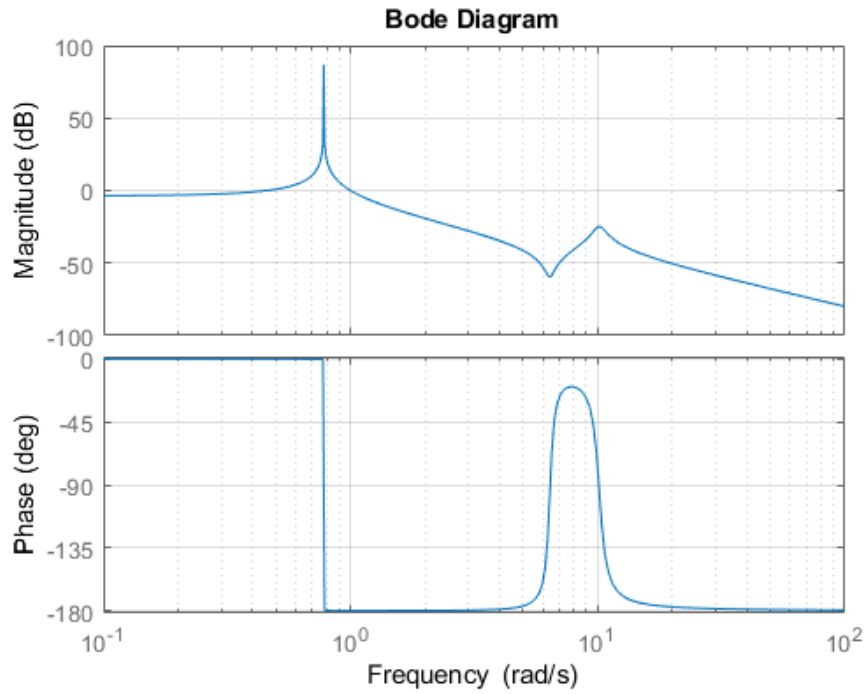


Figura 4-22: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{38,38}$ )

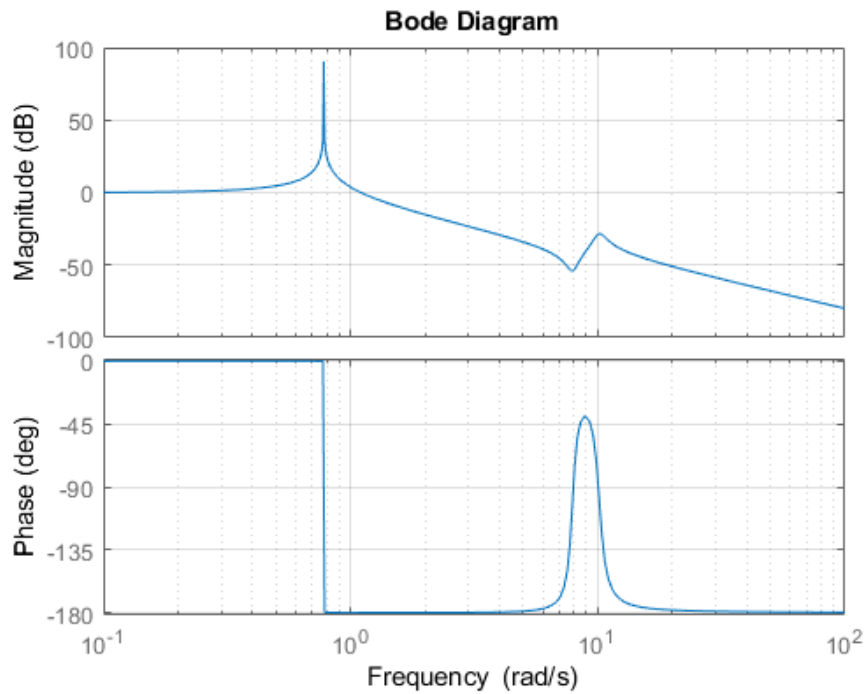


Figura 4-23: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{39,39}$ )

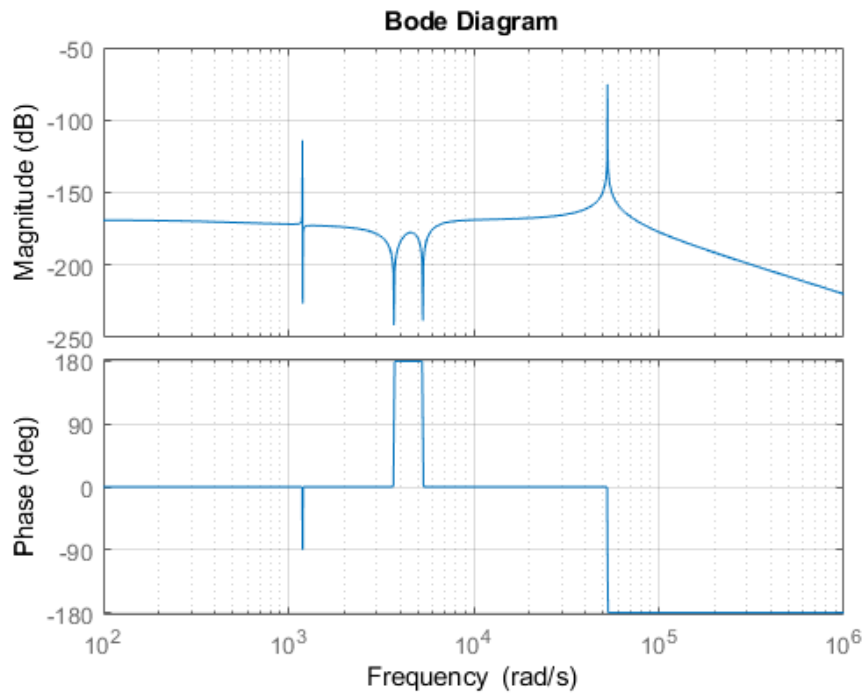


Figura 4-24: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{9,9}$ )

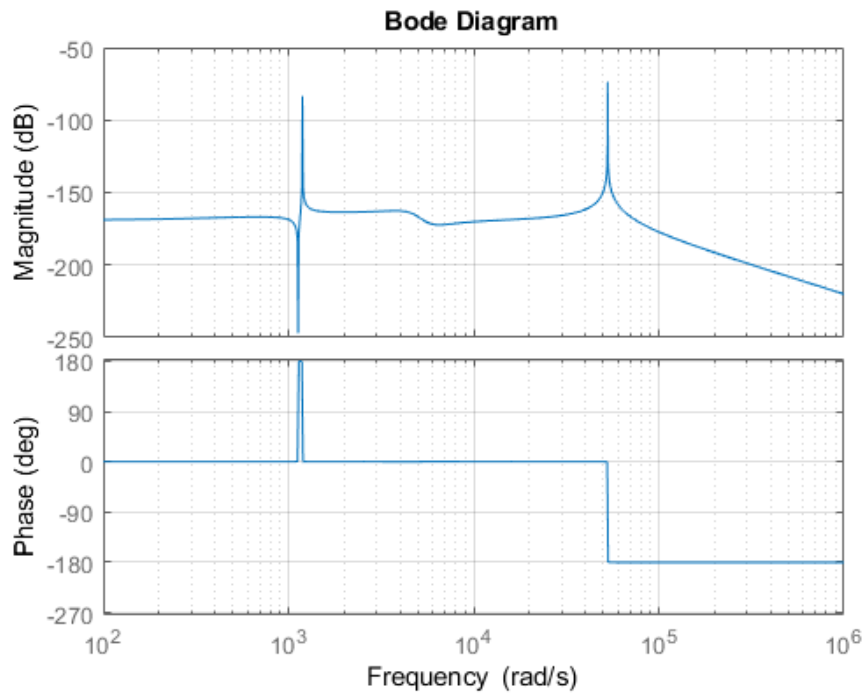


Figura 4-25: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{10,10}$ )

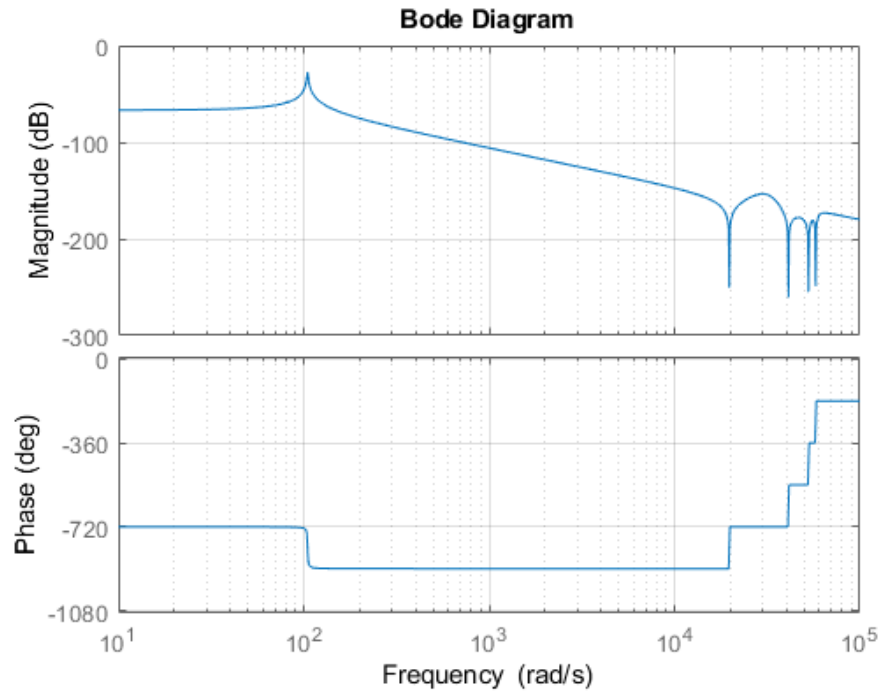


Figura 4-26: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{19,19}$ )

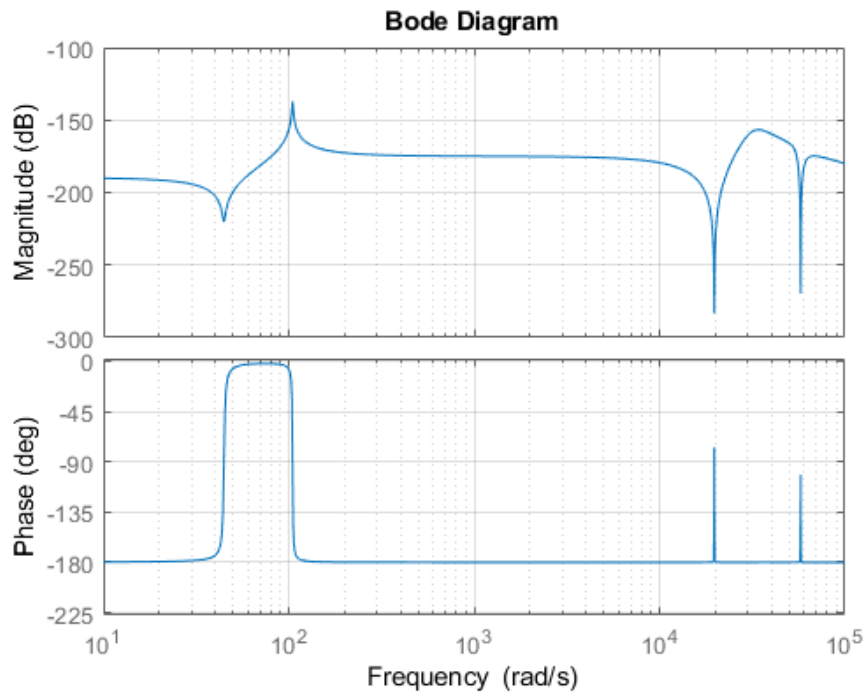


Figura 4-27: Diagrama de Bode GDL de la función de transferencia ( $G_{20,20}$ )



de los dientes.

Para el engrane hipoide, es decir, los discos 3 y 4, se encuentran relacionados solamente por medio del contacto entre los dientes. Por tanto, solamente se muestran los dos picos de las frecuencias naturales como se aprecia en las figuras 4-23 y 4-24.

## 4.2. Respuesta del sistema de transmisión con fallas

Se realizará la simulación de las fallas por 2 métodos diferentes.

Posteriormente, se realizará la comparación de ambos métodos y el respectivo análisis de cada uno.

### 4.2.1. Añadiendo una señal de falla a la entrada

Por medio del comando *lsim* de MATLAB, se puede proporcionar al sistema una señal de entrada con determinada frecuencia para evaluar su comportamiento en el dominio del tiempo, y posteriormente, como se muestra en la parte final del Anexo 6.4.1, obtener la transformada de Fourier para evaluar los picos originales del sistema y las fallas que se evidencia luego de inducirlos.

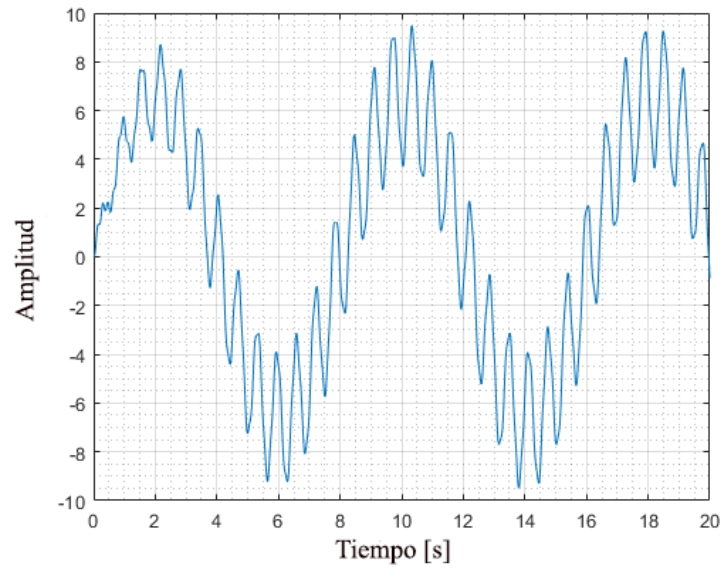
Se introduce una señal de entrada que representa tanto el giro del piñón, como el giro del engrane. Estas frecuencias son 10 rad/s y 37 rad/s aproximadamente, que se tomaron como ejemplo en la sección 3.4.3. El resultado en el dominio del tiempo es el siguiente para los discos del engrane:  $m_3$  y  $m_4$ .

Como se muestra en la figura 4-29, se aprecian los picos de las frecuencias de giro de los discos, así como la frecuencia natural del grado de libertad correspondiente.

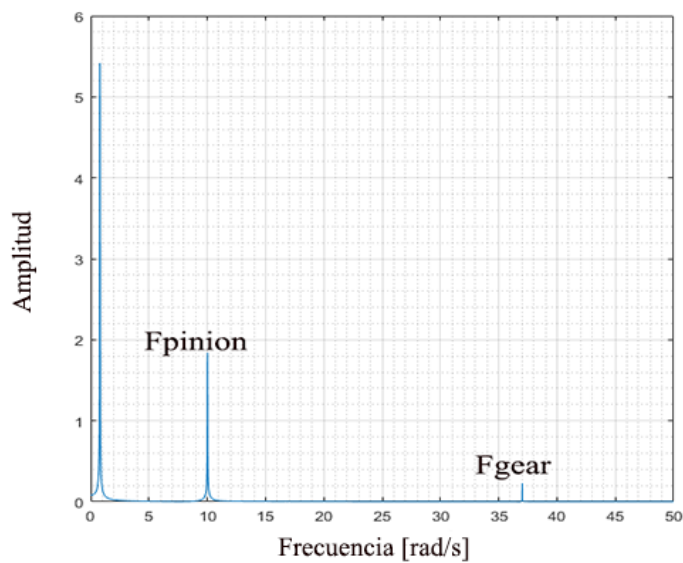
El espectro en frecuencia del sistema en buenas condiciones, se aprecia en la figura 4-30, se muestran las frecuencias de giro, así como la frecuencia de engrane (GMF) sin excitación excesiva.

Para incluir la falla, ya se tienen en cuenta los dientes de los engranes; además, se le adiciona a la entrada una señal que la representa. Y de acuerdo al comportamiento visto previamente en el marco teórico, se simularán dos fallas específicas esperando tener un espectro en frecuencia similar al visto previamente. Para representar la primera falla, sobrecarga del diente, se presenta una excitación de la frecuencia de engrane (GMF), es decir, su amplitud aumenta considerablemente. Las bandas laterales permanecen con las mismas características, como se muestra en la figura 4-31

Para la falla, ruptura o desgaste del diente del engranaje se tiene el resultado de la figura 4-32, donde se aprecia la frecuencia GMF excitada, junto con las bandas laterales correspondientes a las frecuencias de giro del piñón y engrane. Adicionalmente, otras bandas de resonancia producto del contacto con la superficie dañada.

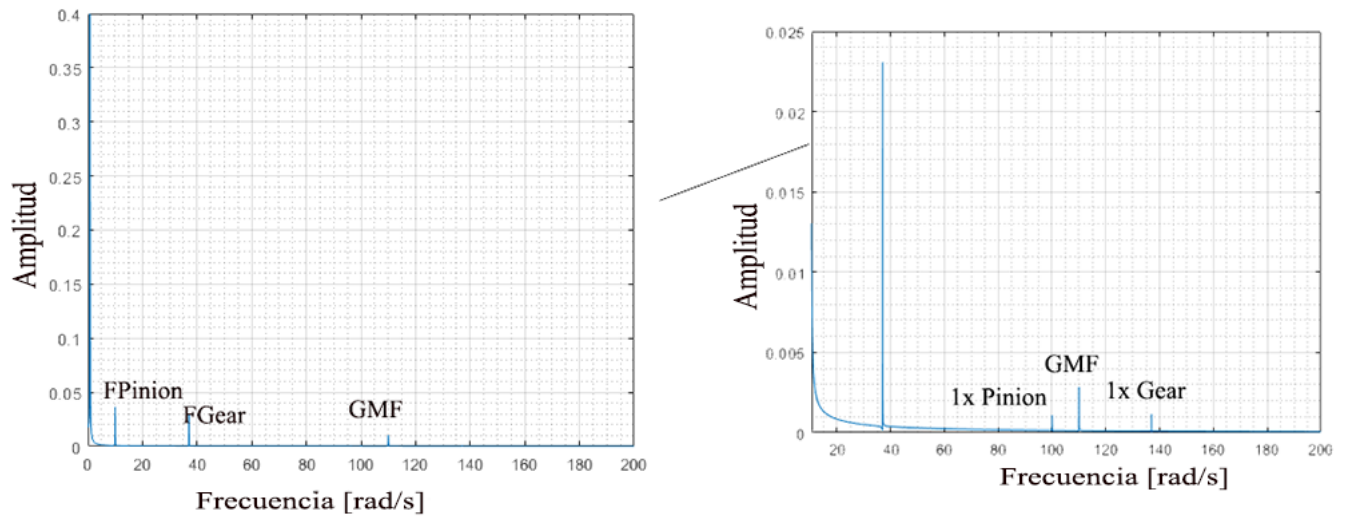


**Figura 4-28:** Respuesta en tiempo de los discos (hipoide) ante una entrada senoidal GDL ( $\theta_{z3}$ )

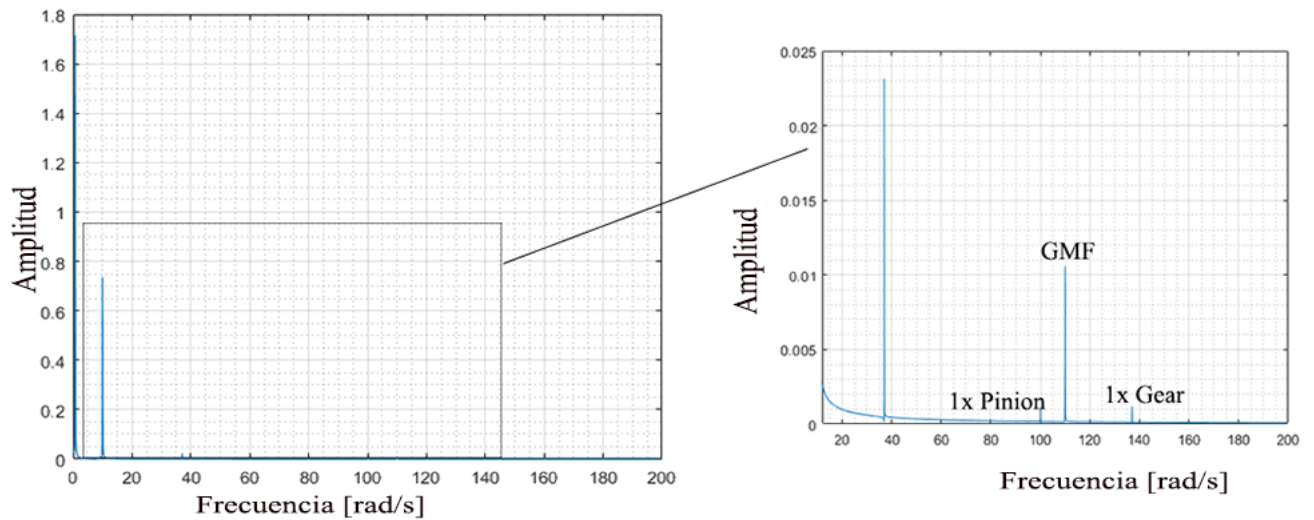


**Figura 4-29:** Respuesta en frecuencia de los discos (hipoide) ante una entrada senoidal GDL ( $\theta_{z3}$ )

Para la simulación de las fallas en los rodamientos, como se evidencia en la metodología, se tendrán en cuenta el deterioro en la pista exterior y también fallas en los elementos rodantes. Se seleccionarán las frecuencias vistas como ejemplo previamente, y que se muestran a



**Figura 4-30:** Respuesta en frecuencia del sistema en buen estado (Engrane hipoide)

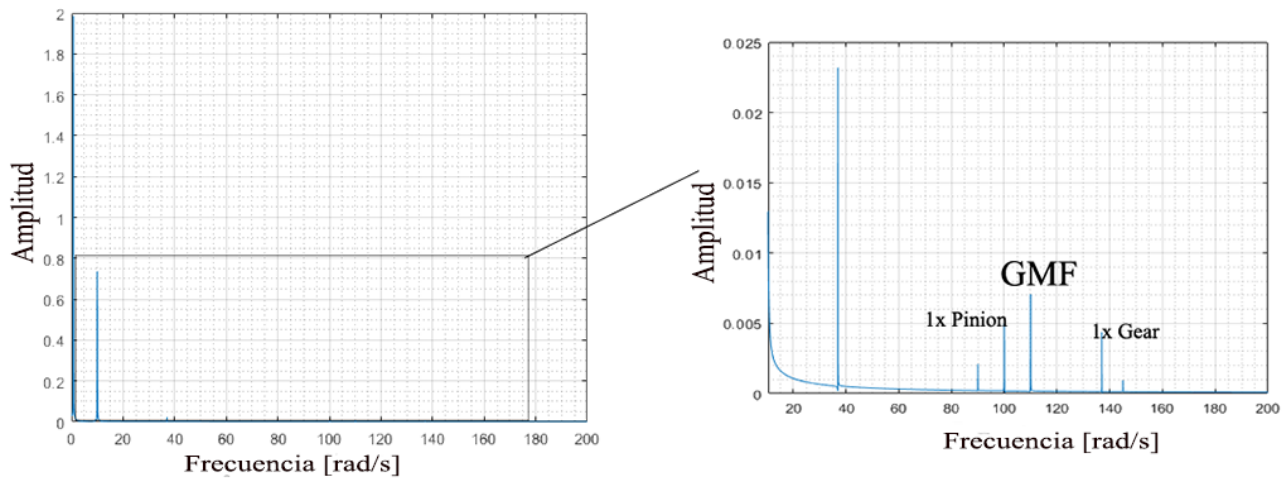


**Figura 4-31:** Respuesta en frecuencia del sistema con sobrecarga en los dientes (Engrane hipoide)

continuación:

$$\begin{aligned}
 F_{giro} &= 37.7 \text{ rad/s} \\
 BPFO &= 120.6 \text{ rad/s} \\
 BPF1 &= 180.9 \text{ rad/s} \\
 FTF &= 15.08 \text{ rad/s} \\
 BSF &= 80 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Estas frecuencias, similar a lo que ocurre con los engranajes, determinan el comportamiento



**Figura 4-32:** Respuesta en frecuencia del sistema con la rotura/desgaste del diente (Engrane hipoide)

que tienen los rodamientos, ya que tienen en cuenta el número de esferas y las velocidades independientes que tienen, dependiendo del diámetro de las pistas y la cantidad de veces que giran a medida que el rodamiento como tal se va moviendo con todo el eje del mecanismo. Por tanto, si es posible identificar de manera independiente donde está la falla siempre y cuando se realice un correcto análisis de la señal en el dominio de la frecuencia.

Para la simulación de la primera falla, se realiza el mismo procedimiento empleado para los engranajes. Se evalúa el sistema con una entrada tipo seno, y se le adicionan señales que representan las fallas. La respuesta en frecuencia del sistema se muestra en la figura **4-33**.

Para la falla de los elementos rodantes, se realiza el mismo procedimiento. La respuesta en frecuencia de este tipo de falla, se aprecia en la figura **4-34**.

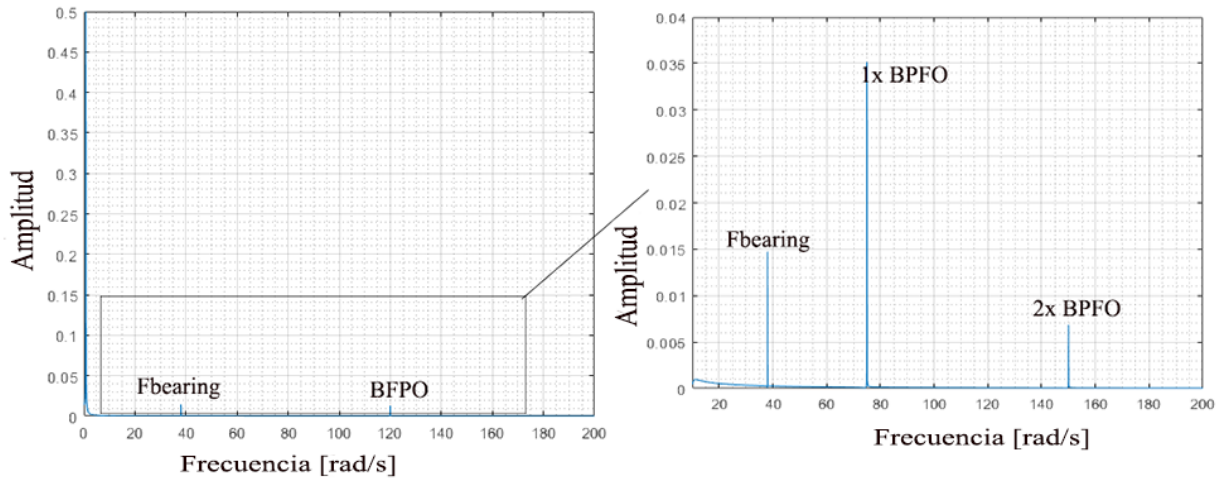


Figura 4-33: Espectro en frecuencia de la falla en el rodamiento por deterioro en la pista exterior GDL del Soporte ( $x_1$ )

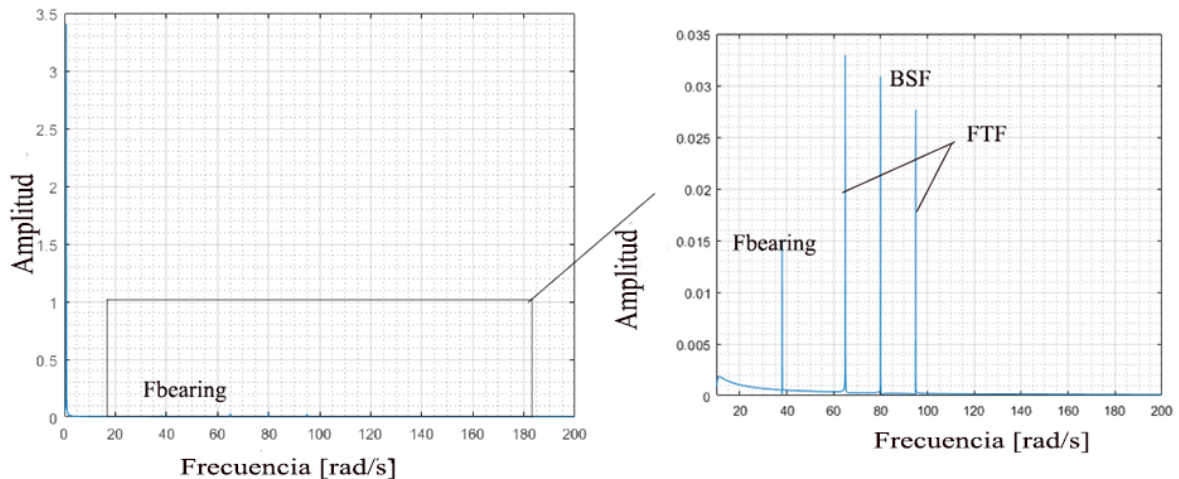


Figura 4-34: Espectro en frecuencia de la falla los elementos rodantes GDL del Soporte ( $x_1$ )

#### 4.2.2. Variación de los parámetros de rigidez y amortiguamiento

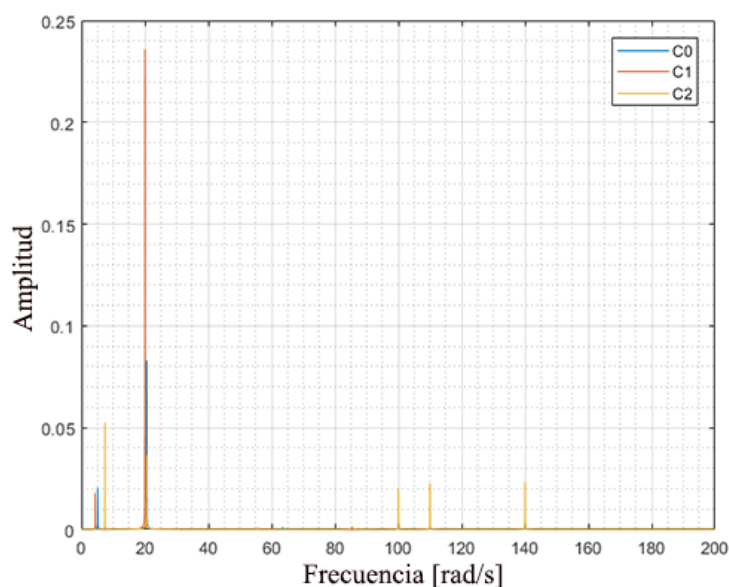
Las fallas en los engranes, especialmente, en el engrane hipoide del sistema, se pueden emular variando los parámetros que se indican en la tabla 4-1. Para iniciar, se tomará la combinación 0 como base, es decir, representando el estado óptimo del engranaje. Al realizar las diferentes combinaciones mostradas en la tabla, se pueden apreciar las diferencias al obtener la respuesta en frecuencia de las mismas.

El experimento inicial consiste en variar el valor de la rigidez del parámetro  $k_{d1}$  y mantener

el amortiguamiento  $b_{d1}$  con su valor original. La figura 4-35 muestra la comparación del espectro en frecuencia de cada una de las señales obtenidas para cada combinación.

Combinación	$k_{d2}$	$b_{d2}$
$c_0$	1000	0.1
$c_1$	800	0.1
$c_2$	2000	0.1
$c_3$	1000	0.08
$c_4$	1000	0.15

**Tabla 4-1:** Variación de rigidez y amortiguamiento para simular fallas en el engrane hipoide



**Figura 4-35:** Espectro en frecuencia de la falla en el engranaje variando el parámetro de rigidez  $k_{d1}$

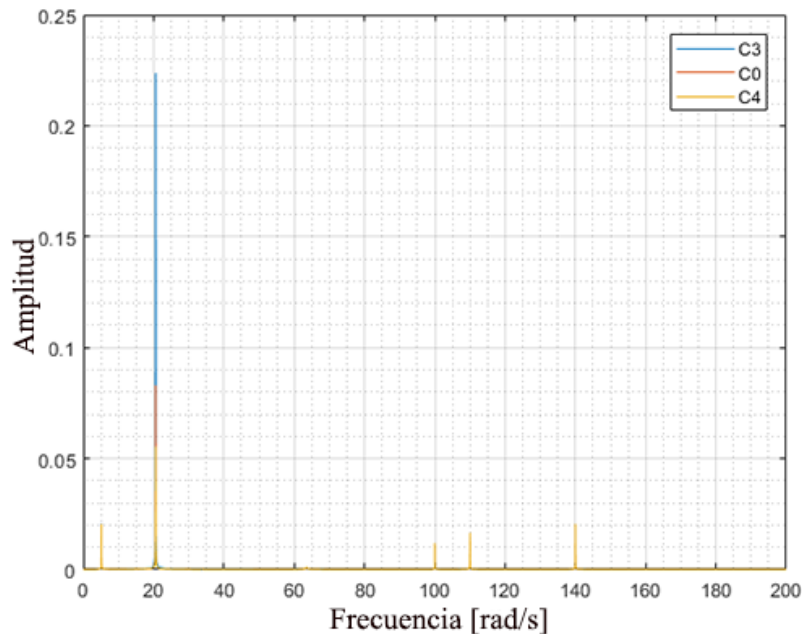
Para simular las fallas en el engrane helicoidal, se realiza el mismo procedimiento variando los parámetros y comparando las respuestas en el dominio de la frecuencia.

Posteriormente, se realiza el mismo procedimiento pero variando el amortiguamiento, es decir, el parámetro  $b_{d1}$  y manteniendo la rigidez constante. El resultado se muestra en la figura 4-36.

La variación de los parámetros  $k_d$  y  $b_d$ , modifica tanto la amplitud como el valor final de las frecuencias naturales del sistema, ya que se están modificando aquellas variables que representan la rigidez de los elementos, así como el amortiguamiento de los mismos. Entre

Combinación	$k_{d1}$	$b_{d1}$
$c_0$	1000	0.1
$c_1$	800	0.1
$c_2$	2000	0.1
$c_3$	1000	0.08
$c_4$	1000	0.15

**Tabla 4-2:** Variación de rigidez y amortiguamiento para simular fallas en el engrane helicoidal



**Figura 4-36:** Espectro en frecuencia de la falla en el engranaje variando el parámetro de amortiguamiento  $b_{d1}$

más bajo sea el amortiguamiento, más pronunciado será el pico de la frecuencia natural, lo mismo sucede al aumentar el valor de la rigidez. Para este caso, el parámetro que varía es el contacto entre los discos. Esto permite identificar si el sistema está trabajando dentro de los parámetros normales, o si se han afectado por sobrecarga o malos manejos por parte de los operarios, los engranes, y particularmente, los dientes de los mismos.

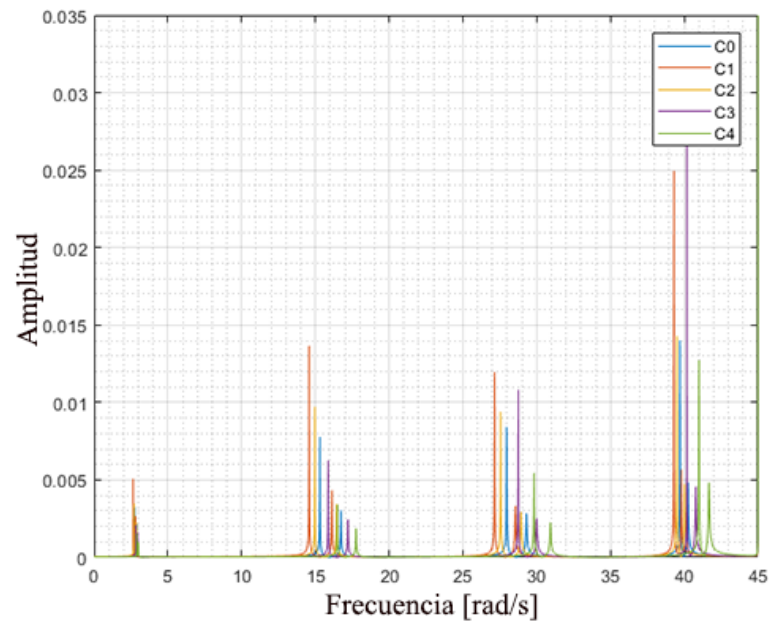
Al igual que en los engranes, para las fallas en los rodamientos, se realiza la variación de parámetros. Se toma la combinación 01 como las condiciones originales del sistema. Se simula el modelo Jeffcott variando las condiciones como se muestran en la tabla 4-3, desde la combinación 5 hasta la 8, un sistema con dos soportes, un disco y un eje.

Combinación	$k_{xx}$	$b_{xx}$	$k_{xy}$	$b_{xy}$	$k_{yx}$	$b_{yx}$	$k_{yy}$	$b_{yy}$
$c_{01}$	1000	0.1	100	0.08	100	0.08	1000	0.1
$c_5$	700	0.06	100	0.08	100	0.08	700	0.06
$c_6$	900	0.075	100	0.08	100	0.08	900	0.075
$c_7$	1200	0.12	100	0.08	100	0.08	1200	0.12
$c_8$	1500	0.15	100	0.08	100	0.08	1500	0.15
$c_9$	1000	0.1	50	0.05	50	0.05	1000	0.1
$c_{10}$	1000	0.1	75	0.065	75	0.065	1000	0.1
$c_{11}$	1000	0.1	125	0.12	125	0.12	1000	0.1
$c_{12}$	1000	0.1	150	0.15	150	0.15	1000	0.1

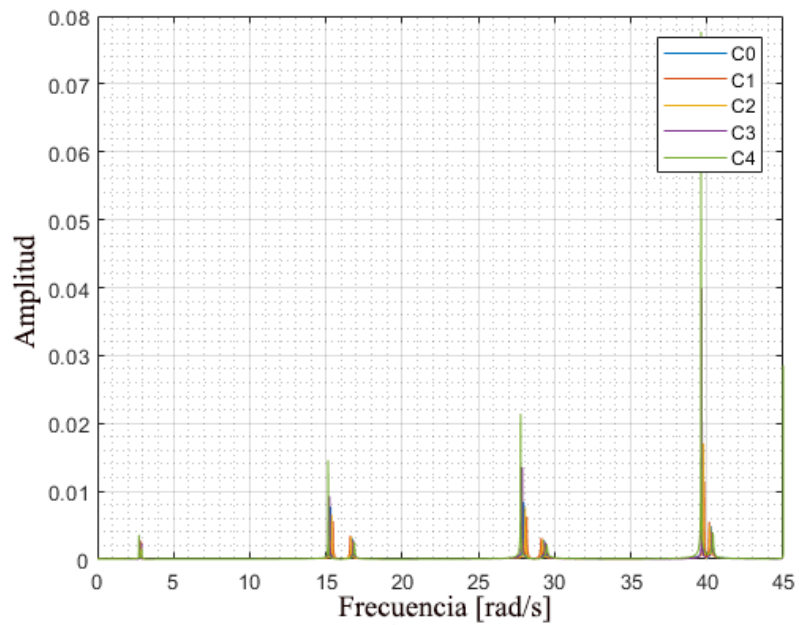
**Tabla 4-3:** Variación de rigidez y amortiguamiento para simular fallas en los soportes-rodamientos

Cabe resaltar que los parámetros que se van a variar en este caso, ya no representan contacto si no reacciones a las fuerzas ejercidas por el sistema en cada soporte. Las variables  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $b_{xx}$  y  $b_{yy}$ , son mayores que  $k_{xy}$ ,  $k_{yx}$ ,  $b_{xy}$  y  $b_{yx}$ , ya que representan las reacciones a las fuerzas ejercidas en cada uno de los ejes coordenados. Es decir, la fuerza ejercida sobre el eje X no causará la misma reacción en el mismo eje, que en el eje Y, por lo que deben ser mayores, y por tal motivo, se consideran como se muestra en la tabla **4-3**.





**Figura 4-37:** Comparación del espectro en frecuencia de la falla en el soporte con las primeras 4 combinaciones



**Figura 4-38:** Comparación del espectro en frecuencia de la falla en el soporte con las últimas cuatro combinaciones

Si se comparan las respuestas en frecuencia, encontradas en la sección anterior, se pueden

encontrar varias características representativas de cada sistema y las variaciones que se presentan en las mismas.

Por el primer método, incluyendo las fallas como entradas adicionales al sistema, se obtienen respuestas similares a las vistas previamente en la teoría.

Al introducir estas entradas, se observa como se modifican las frecuencias naturales del mismo en amplitud. Además, de que aparecen los picos de las frecuencias características de los engranes o de los rodamientos.

Por el segundo método, donde se varían los parámetros directamente del modelo, ya sean los valores de rigidez y amortiguamiento del contacto entre los dientes del engrane, o los mismos parámetros pero del soporte o rodamiento. También se observan alteraciones mínimas en el valor de la frecuencia, y al mismo tiempo en magnitud.

Las respuestas de los dos métodos son muy similares. Pueden describir el comportamiento de un sistema mecánico de una manera muy cercana a la realidad, aunque esto depende de múltiples factores o condiciones de funcionamiento del mismo.

Entre más altos sean los picos de frecuencia, ya sea por la amplitud de la señal de entrada, o por las características mecánicas de los componentes, que se modelan por medio de la rigidez y el amortiguamiento, se podrán captar de manera más eficaz las señales provenientes del sistema mecánico, y posiblemente detectar las fallas mencionadas en el desarrollo de la metodología.

### 4.3. Análisis de elementos del sistema

Los componentes de los sistemas mecánicos y las características especiales de cada uno son fundamentales a la hora del diseño e implementación de los mismos.

Se deben tener en cuenta muchas propiedades mecánicas de los materiales con los cuales se elaboran las partes de las máquinas, así como el correcto ensamblaje, condiciones de trabajo, buen manejo por parte de los operarios, entre muchos otros factores.

Los componentes que se evaluaron durante el desarrollo metodológico del proyecto fueron los engranajes y los rodamientos, ya que son los más importantes para la transmisión de movimiento de manera más eficiente. Estos son elementos delicados, que requieren un correcto balanceo, una adecuada lubricación, etc.

Los engranajes son los encargados de transmitir el movimiento entre ejes, con ayuda de bandas o cadenas. Son vitales para la transmisión de potencia en los sistemas mecánicos, por tanto, están propensos a sufrir daños con mayor frecuencia. Pueden ocurrir en cualquier momento ya que un ligero cambio en las condiciones de la máquina pueden sobrecargar los dientes del engrane, lo que los puede desgastar más de lo normal, o también, forzarlos hasta tal punto que se agrieta y se presenta la fisura.

Así mismo, los rodamientos facilitan el giro de los ejes a los cuales se va transmitiendo el movimiento en el sistema. Se deben asegurar de manera adecuada y alinearlos para que no se desajuste la máquina, ya que se pueden presentar vibraciones perjudiciales, que van alterando el movimiento normal de los componentes, desgastándolos hasta dañarlos o dejarlos completamente inservibles.

Teniendo en cuenta el sistema de medición propuesto, luego de una serie de pasos de acondicionamiento de señales, se podrían captar dichas fallas con las pruebas que se lleguen a realizar. Pero así mismo, hay muchos factores inherentes al funcionamiento de las máquinas que no se están considerando ya que pueden ser desconocidos o es muy complejo de implementar en simulaciones para obtener respuestas similares a lo que sucede en la práctica. Igualmente, el sensor propuesto no es el más sofisticado, por lo que pueden usarse otros instrumentos y métodos que harán mucho más eficaz la toma y el registro de los datos que se necesitan.

Además, existen muchas fallas que no se tomaron en cuenta durante el desarrollo del proyecto, ya que se enfocó el mismo, solamente algunos componentes del mecanismo. En el momento de realizar las mediciones, podrían estar implícitas aquellas que no se tuvieron en cuenta, por lo que es importante, saber identificar los síntomas y las posibles causas de las mismas, en cada uno de los componentes, ya que una falla en el engrane puede tener una frecuencia similar a la de un rodamiento, y llegar a confundirse si no se tiene claro como identificarlas.



## 5 Conclusiones

Con el desarrollo del trabajo se pueden evaluar varios aspectos importantes a la hora de analizar los sistemas de transmisión de potencia, para este caso, un sistema rotatorio.

A partir de la fundamentación teórica realizada, se evaluaron un conjunto de fallas que se pueden llegar a presentar en este tipo de maquinaria. Posteriormente, se realizó una evaluación de cuales de estas, podrían ser las más propensas a ocurrir, teniendo en cuenta el tipo de mecanismo que se seleccionó. Como se indicó en el transcurso del documento, las vibraciones en los sistemas mecánicos son fundamentales para lograr un diagnóstico acertado en las máquinas. A partir de múltiples catálogos y manuales de análisis de dichas vibraciones, es posible determinar las causas de los fallos o problemas en las máquinas. Las fallas escogidas muestran claramente, que este tipo de sistemas requieren de un mantenimiento preventivo para evitar que estos daños sean más graves. Los engranes y los rodamientos son claves para la transmisión de movimiento, por lo que están más propensos a sufrir desgaste o deterioro, que por ejemplo, los ejes rotatorios.

En el momento en que se tenían definidas las fallas a evaluar, se procedió a evaluar posibles sistemas de transmisión, y se seleccionó un motor de lavadora convencional, el cual contaba con dos etapas, y que, al tener varios años de uso, existía la posibilidad de que presentara algunas de los problemas encontrados en la teoría. A simple vista se podía identificar el desgaste en el mismo, y en su composición tenía algunos de los elementos consultados y mencionados previamente. También, cabe resaltar que debido a que no era tan complejo o sofisticado, permitía realizar un análisis matemático completo, a partir de diferentes bibliografías que estudiaban por separado los componentes del sistema en general.

Para analizar el comportamiento dinámico del sistema, y teniendo en cuenta la información consultada con respecto al modelamiento de sistemas de transmisión, se pudo completar un modelo matemático de múltiples grados de libertad, que permitía evaluar el comportamiento de la dinámica del sistema, por etapas y finalmente acoplando cada una de ellas en un sistema completo. En este punto, se debieron considerar varios factores para lograr similitudes con respecto a la realidad. Las especificaciones de algunos materiales, revisión de catálogos, entre otros; permitieron suponer valores que representaran de manera adecuada todas las partes del sistema, y de esta forma, poder simular para las siguientes etapas del desarrollo del proyecto.

El modelo desarrollado a partir del sistema seleccionado, permitió evaluar el comportamiento del mismo en diferentes puntos, en los cuales, pueden ser considerados diferentes grados de libertad. Es importante resaltar, que las posibles señales que se pueden obtener en pruebas o mediciones, se encuentran en el dominio del tiempo, y que para un análisis correcto, deben ser transformadas al dominio de la frecuencia. Fue posible evaluar las fallas en el sistema gracias a dichas señales temporales que se utilizarían como entrada del mecanismo y a la variación de los diferentes parámetros de rigidez y amortiguamiento del modelo, teniendo la posibilidad de evaluar la respuesta de algún grado de libertad determinado, ante esa entrada seleccionada. Al realizar la comparación con la teoría de falla consultada, y de las especificaciones que brindan los manuales mencionados, se tiene una similitud en la forma de onda en el dominio de la frecuencia, en el momento en que son evaluadas las mismas en el sistema. Pero se debe tener en cuenta que por más parámetros y características del sistema que se tuvieron en cuenta, no se analizaron algunos factores que en la práctica si se deben analizar como factores ambientales, condiciones de trabajo, entre otras. Esto puede variar los espectros obtenidos y no ser del todo claro como si lo puede llegar a ser en una simulación.

Se realizó una pequeña propuesta de adquisición y registro de datos, para captar las vibraciones provenientes de algún mecanismo que se desee evaluar. Particularmente, para las señales provenientes del sistema de transmisión seleccionado, pueden variar al realizar las pruebas, ya que las características del sensor propuesto no son las más sofisticadas. También es importante una adecuada implementación, ya que se pueden presentar errores al momento de captar los datos, ya sea por un mal posicionamiento, ruido excesivo, entre otras consideraciones.

Los componentes electrónicos son importantes a la hora de tomar este tipo de datos, como se mostró en el desarrollo de la última etapa de la metodología, se deben medir medias o altas frecuencias, y en ocasiones, los dispositivos que se utilizarán para la adquisición pueden estar limitados por sus características de funcionamiento.

También se debe tener en cuenta que algunas pruebas realizadas, en determinados grados de libertad del sistema, no se pueden medir con el sistema propuesto, por ejemplo, las entradas aplicadas en los soportes, no tienen como medirse ya que el sensor no puede ubicarse en el rodamiento o en un eje. A diferencia de los rotacionales, que se puede aplicar físicamente, aplicando una entrada al motor que se encargará de transmitir el movimiento al sistema completo. Para poder tomar los datos de manera correcta, debe estar fijo como se mostró en el posicionamiento explicado en el desarrollo del proyecto. Adicionalmente, se requiere conocer una parte teórica para el tratamiento o procesamiento de señales, que se puede lograr con el software MATLAB, utilizado durante el desarrollo del proyecto.

## 5.1. Recomendaciones y trabajos futuros

Durante el desarrollo del documento, se encontraron algunos aspectos que pueden analizarse más a fondo en posibles trabajos futuros.

El modelamiento de este tipo de sistemas no se ha desarrollado muy a fondo, por lo que puede centrarse en algunas características específicas de los componentes de este tipo de maquinaria, por ejemplo, otros tipos de engranes o la teoría correspondiente a las fallas en los mismos.

Para la adquisición de datos, también se puede evaluar la posibilidad de realizar pruebas a partir de la propuesta desarrollada, y de esta manera poder comprobar o validar la efectividad de la misma, luego de un procesamiento de las señales, y así mismo, corregir o mejorar la propuesta inicial, para plantear un método efectivo y de bajo costo, que permita realizar mejoras y evitar este tipo de fenómenos, y de esta manera, determinar posibles soluciones a los problemas en los sistemas rotatorios.

También se puede tener en cuenta, que al utilizar un sensor análogo, se asume el riesgo de registrar mucho más ruido que con un sensor digital. Podría adaptarse el sistema de medición a un acelerómetro ADXL345, que tiene el mismo principio de funcionamiento del sensor propuesto inicialmente, pero que no requiere de la conversión análogo/digital y tiene otras alternativas de comunicación.





## 6 Anexos

### 6.1. Anexo 1: Ecuaciones modelo Jeffcott de 8 GDL

$$\begin{aligned}M_{gyro,x} &= -I_P \omega \dot{\theta}_Y \\M_{gyro,y} &= I_P \omega \dot{\theta}_X\end{aligned}\tag{6-1}$$

$$\begin{aligned}f_x^{(n)} &= -k_{xx}^{(n)} x - k_{xy}^{(n)} y - c_{xx}^{(n)} \dot{x} - c_{xy}^{(n)} \dot{y} \\f_y^{(n)} &= -k_{yx}^{(n)} x - k_{yy}^{(n)} y - c_{yx}^{(n)} \dot{x} - c_{yy}^{(n)} \dot{y}\end{aligned}\tag{6-2}$$

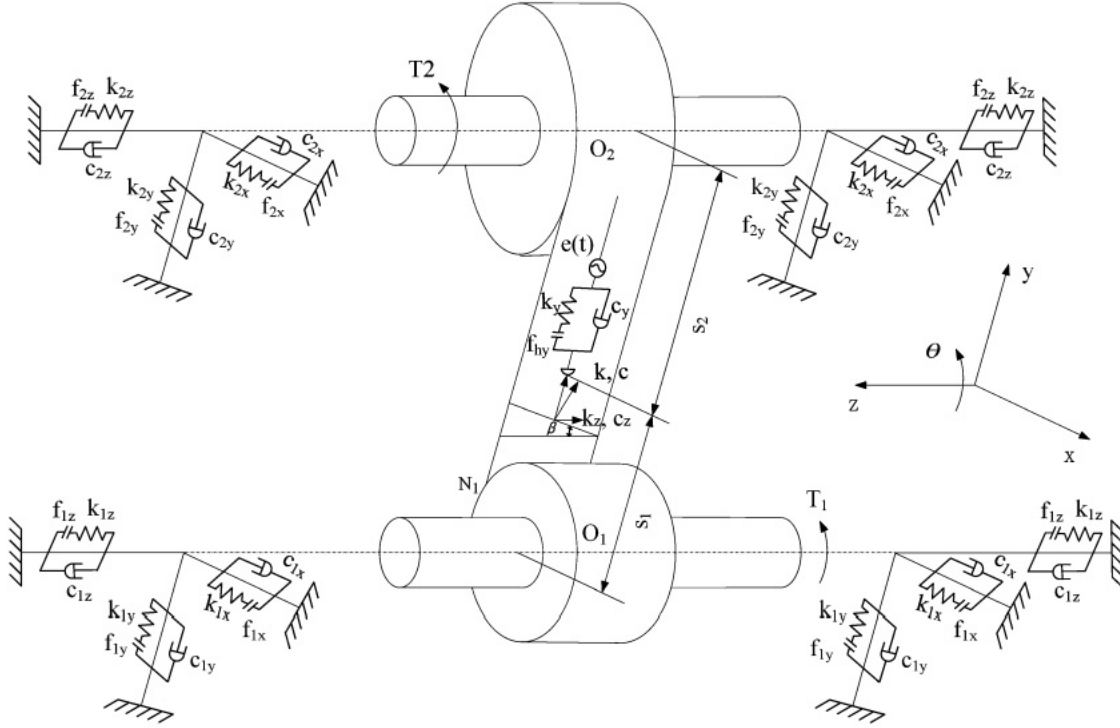
Donde  $n$  es el número de soportes

$$\begin{aligned}f_{1x} &= \frac{3EI}{L^3}(-x_1 + x_2 - \theta_y L) \\f_{1y} &= \frac{3EI}{L^3}(-y_1 + y_2 - \theta_x L) \\f_{2x} &= \frac{3EI}{L^3}(x_1 - 2x_2 + x_3) \\f_{2y} &= \frac{3EI}{L^3}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\M_{2x} &= \frac{3EI}{L^3}(y_1 L - 2\theta_x L^2 - y_3 L) \\M_{2y} &= \frac{3EI}{L^3}(-x_1 L - 2\theta_y L^2 + x_3 L) \\f_{3x} &= \frac{3EI}{L^3}(x_2 - x_3 + \theta_y L) \\f_{3y} &= \frac{3EI}{L^3}(y_2 - y_3 - \theta_x L)\end{aligned}\tag{6-3}$$

Ecuaciones para cada grado de libertad del sistema:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= f_{1x} + f_x^{(1)} \\m_1 \ddot{y}_1 &= f_{1y} + f_y^{(1)} \\I_T \ddot{\theta}_x &= M_{2x} + M_{gyro,x} \\I_T \ddot{\theta}_y &= M_{2y} + M_{gyro,y} \\m_2 \ddot{x}_2 &= f_{2x} \\m_2 \ddot{y}_2 &= f_{2y} \\m_3 \ddot{x}_3 &= f_{3x} + f_x^{(2)} \\m_3 \ddot{y}_3 &= f_{3y} + f_y^{(2)}\end{aligned}\tag{6-4}$$

## 6.2. Anexo 2: Modelado engrane helicooidal complejo



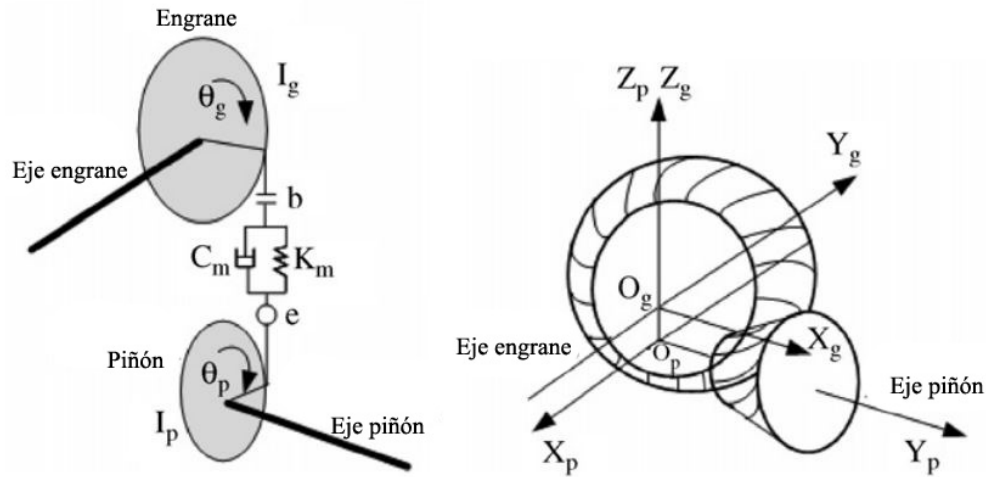
**Figura 6-1:** Representación de dos ejes acoplados con un engrane de tipo helicooidal  
Fuente: Wang-Dynamic model of a helical gear pair considering tooth surface friction

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 + c_{1x} \dot{x}_1 + k_{1x} f_{1x}(x_1) &= \mu F_{1y} \\
m_1 \ddot{y}_1 + c_{1y} \dot{y}_1 + k_{1y} f_{1y}(y_1) &= -F_{1y} \\
m_1 \ddot{z}_1 + c_{1z} \dot{z}_1 + k_{1z} f_{1z}(z_1) &= -F_z \\
I_1 \ddot{\theta}_1 + F_{1y} r_{1\delta} - s_1 \mu F_{1y} &= -T_1 \\
m_2 \ddot{x}_2 + c_{2x} \dot{x}_2 + k_{2x} f_{2x}(x_2) &= -\mu F_{1y} \\
m_2 \ddot{y}_2 + c_{2y} \dot{y}_2 + k_{2y} f_{2y}(y_2) &= F_{1y} \\
m_2 \ddot{z}_2 + c_{2z} \dot{z}_2 + k_{2z} f_{2z}(z_2) &= F_z \\
I_2 \ddot{\theta}_2 + F_{2y} r_{2\delta} - s_2 \mu F_{1y} &= -T_2
\end{aligned} \tag{6-5}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
F_{1y} &= \text{Cos}\beta [k f_{hv}(y_1 + \theta_1 r_1 - y_2 - \theta_2 r_2 - e) + c(\dot{y}_1 + \dot{\theta}_1 r_1 - \dot{y}_2 - \dot{\theta}_2 r_2 - \dot{e})] \\
F_z &= \text{sin}\beta k [z_1 - z_2 - (y_1 + \theta_1 r_1 - y_2 - \theta_2 r_2) \tan\beta - e] + c[\dot{z}_1 - \dot{z}_2 - (\dot{y}_1 + \dot{\theta}_1 r_1 - \dot{y}_2 - \dot{\theta}_2 r_2) \tan\beta - \dot{e}]
\end{aligned}$$

### 6.3. Anexo 3: Modelado engrane hipoide



**Figura 6-2:** Representación de un engrane hipoide

*Fuente: Wang-Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity*

Las ecuaciones que representan las características específicas de este tipo de engrane se muestran a continuación: [9].

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta}_p + \lambda_p c_m (\dot{\delta} - \dot{e}) + \lambda_p k_m f(\delta - e) &= T_p \\ I_g \ddot{\theta}_g - \lambda_g c_m (\dot{\delta} - \dot{e}) - \lambda_g k_m f(\delta - e) &= -T_g \end{aligned} \quad (6-6)$$

Donde:

$$\delta = \lambda_p \theta_p - \lambda_g \theta_g$$

## 6.4. Anexo 4: Códigos Matlab Modelamiento

### 6.4.1. Modelo simple: un disco y dos soportes-Transformada de Fourier

```

m6=0.1, m5=1, m7=0.1;

kz6=1000, kz7=1000, kz8=1000, kz9=1000;
bz6=0.1, bz7=0.1, bz8=0.1, bz9=0.1;

M=[m6 0 0 ;0 m5 0;0 0 m7];
C=[bz6+bz7 -bz7 0;-bz7 bz7+bz8 -bz8;0 -bz8 bz8+bz9];
K=[kz6+kz7 -kz7 0;-kz7 kz7+kz8 -kz8;0 -kz8 kz8+kz9];

s=tf('s');
G=1/(M*s^2+C*s+K);
sistema=ss(G);
[U,V]=eig(sistema.A);
lam=diag(V);
bode(G(2,2))

fs=1500;
ts=1/fs;
n=50000;
t=(0:n-1)*ts;
u1=10*sin(2*pi*t);
yy=lsim(G(2,2),u1,t);
figure, plot(t,yy)
|
w=2*pi;
f1=fs*(0:(n/2))/n;
fy=fft(yy);
fy1=abs(fy/n);
fyt=fy1(0.1:(n/2)+1)*2;
figure, plot(f1*w,fyt)
xlim([0 500])
%ylim([0 0.0001])
grid on
grid minor

```

## 6.4.2. Modelo Jeffcott 8 GDL

```

%Eje
r=0.025;
E=200e9; %Módulo de Young
I=(pi*(r^4))/4; %Momento de inercia de la sección transversal
L=0.05; %Longitud del eje

%Soporte 1
m1=2;
Kxx1=1000, Kxy1=1000, Kyx1=1000, Kyy1=1000, Cxx1=0.1, Cxy1=0.1, Cyx1=0.1, Cyy1=0.1;

%Soporte 2
m3=3;
Kxx2=1000, Kxy2=1000, Kyx2=1000, Kyy2=1000, Cxx2=0.1, Cxy2=0.1, Cyx2=0.1, Cyy2=0.1;

%Disco
m2=2;
r2=0.075;
Ip=0.5*m2*(r2^2); %Inercia polar del disco
w=5*pi; %Velocidad de giro del rotor
J=0.05; %Inercia transversal del disco

a=1/(3*E*I)/L^3;

%Matrices
M=zeros(8,8);
M(1,1)=m1; M(2,2)=m1; M(3,3)=J; M(4,4)=J; M(5,5)=m2; M(6,6)=m2; M(7,7)=m3; M(8,8)=m3;

C=zeros(8,8);
C(1,1)=Cxx1; C(1,2)=Cxy1; C(2,1)=Cyx1; C(2,2)=Cyy1; C(5,6)=Ip*w; C(6,5)=-Ip*w;
C(7,7)=Cxx2; C(7,8)=Cxy2; C(8,7)=Cyx2; C(8,8)=Cyy2;

K=zeros(8,8);
K(1,1)=a+Kxx1; K(1,2)=Kxy1; K(1,4)=a*L; K(1,5)=-a; K(2,1)=Kyx1; K(2,2)=a+Kyy1; K(2,3)=-a*L; K(2,6)=-a;
K(3,2)=-a*L; K(3,3)=(2*a*(L^2)); K(3,8)=a*L; K(4,1)=a*L; K(4,4)=(2*a*(L^2)); K(4,7)=-a*L;
K(5,1)=-a; K(5,5)=2*a; K(5,7)=-a; K(6,2)=-a; K(6,6)=2*a; K(6,8)=-a;
K(7,4)=-a*L; K(7,5)=-a; K(7,7)=a+Kxx2; K(7,8)=Kxy2; K(8,3)=a*L; K(8,6)=-a; K(8,7)=Kyx2; K(8,8)=a+Kyy2;

```

### 6.4.3. Modelo acoplamiento de los ejes

```

m1=0.1;
m2=1;
m3=1;
m9=0.1;

kz1=1000, kz2=1000, kz3=1000, kz4=1000, kz5=1000;
bz1=0.1, bz2=0.1, bz3=0.1; bz4=0.1; bz5=0.1;

m6=0.1;
m5=1;
m7=0.1;

kz6=1000, kz7=1000, kz8=1000, kz9=1000;
bz6=0.1, bz7=0.1, bz8=0.1; bz9=0.1;
kd1=100, ke1=50, ke2=50;
bd1=0.1, be1=0.05, be2=0.05;

M=[m1 0 0 0 0 0 0 0;0 m2 0 0 0 0 0 0;0 0 m3 0 0 0 0 0;0 0 0 m9 0 0 0 0;0 0 0 0 m6 0 0 0 0 ;
    0 0 0 0 0 m5 0 0 0;0 0 0 0 0 0 m7 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 m2 0;0 0 0 0 0 0 0 0 m5];
C=[bz1+bz2 -bz2 0 0 0 0 0 0;-bz2 bz2+bz3 -bz3 0 0 0 0 0;0 -bz3 bz3+bz4 -bz4 0 0 0 0;0 0 -bz4 bz4+bz5 0 0 0 0;
    0 0 0 0 bz6+bz7 -bz7 0 0 0;0 0 0 0 -bz7 bz7+bz8 -bz8 0 0;0 0 0 0 0 -bz8 bz8+bz9 0 0;
    0 0 0 0 0 0 bd1+be1 -bd1;0 0 0 0 0 0 0 -bd1 be2+bd1];
K=[kz1+kz2 -kz2 0 0 0 0 0 0;-kz2 kz2+kz3 -kz3 0 0 0 0 0;0 -kz3 kz3+kz4 -kz4 0 0 0 0;0 0 -kz4 kz4+kz5 0 0 0 0;
    0 0 0 0 kz6+kz7 -kz7 0 0 0;0 0 0 0 -kz7 kz7+kz8 -kz8 0 0;0 0 0 0 0 -kz8 kz8+kz9 0 0;
    0 0 0 0 0 0 kd1+ke1 -kd1;0 0 0 0 0 0 0 -kd1 ke2+kd1];

```

### 6.4.4. Modelo helicoidal

```

m2=1;
m5=0.75;
J2=0.05;
J5=0.6;
rd1=0.126;
rd2=0.033;
r1d=0.01; r2b=0.01;
s1=1;s2=1;
kd1=1000; cd1=0.1;
Cx1=0.1; Cy1=0.1; Cz1=0.1;
Cx2=0.08; Cy2=0.08; Cz2=0.08;
Kx1=1000; Ky1=1000; Kz1=1000;
Kx2=800; Ky2=800; Kz2=800;
Fx1=1; Fx2=1; Fy1=1; Fy2=1; Fz1=1; Fz2=1;
u=0.1;
beta=pi/4;
h=u*cos(beta);
j=sin(beta)*tan(beta);
p=cos(beta);
q=sin(beta);

M=[m2 0 0 0 0 0 0;
    0 m2 0 0 0 0 0;
    0 0 m2 0 0 0 0;
    0 0 0 J2 0 0 0;
    0 0 0 0 m5 0 0;
    0 0 0 0 0 m5 0;
    0 0 0 0 0 0 m5 0;
    0 0 0 0 0 0 0 J5];

C=[Cx1 -h*cd1 0 -h*kd1*rd1 0 h*cd1 0 h*cd1*rd2;
   0 Cy1+(p*cd1) 0 p*cd1*rd1 0 -p*cd1 0 -p*cd1*rd2;
   0 -j*cd1 Cz1+(q*cd1) -j*cd1*rd1 0 j*cd1 -q*cd1 j*cd1*rd2;
   0 (p*cd1*r1d)-(s1*h*cd1) 0 (p*cd1*rd1*r1d)-(s1*h*cd1*rd1)
0 (-p*cd1*r1d)+(s1*h*cd1) 0 (-p*cd1*rd2*r1d)+(s1*h*cd1*rd2);
   0 h*cd1 0 h*cd1*rd1 Cx2 -h*cd1 0 -h*cd1*rd2;
   0 -p*cd1 0 -p*cd1*rd1 0 Cy2+(p*cd1) 0 p*cd1*rd2;
   0 j*cd1 -q*cd1 j*cd1*rd1 0 -j*cd1 Cz2+(q*cd1) -j*cd1*rd2;
   0 (-p*cd1*r2b)+(s2*h*cd1) 0 (-p*cd1*rd2*r2b)+(s2*h*cd1*rd2)
0 (p*cd1*r2b)-(s2*h*cd1) 0 (p*cd1*rd2*r2b)-(s2*h*cd1*rd2)];

K=[Kx1*Fx1 -h*kd1 0 -h*kd1*rd1 0 h*kd1 0 h*kd1*rd2;
   0 (Ky1*Fy1)+(p*kd1) 0 p*kd1*rd1 0 -p*kd1 0 -p*kd1*rd2;
   0 -j*kd1 (Kz1*Fz1)+(q*kd1) -j*kd1*rd1 0 j*kd1 -q*kd1 j*kd1*rd2;
   0 (p*kd1)-(s1*h*kd1) 0 (p*kd1*rd1)-(s1*h*kd1*rd1)
0 (-p*kd1)+(s1*h*kd1*rd1) 0 (-p*kd1*rd2)+(s1*h*kd1*rd2);
   0 h*kd1 0 h*kd1*rd1 Kx2*Fx2 -h*kd1 0 -h*kd1*rd2;
   0 -p*kd1 0 -p*kd1*rd1 0 (Ky2*Fy2)+(p*kd1) 0 p*kd1*rd2;
   0 j*kd1 -q*kd1 j*kd1*rd1 0 -j*kd1 (Kz2*Fz2)+(q*kd1) -j*kd1*rd2;
   0 (-p*kd1)+(s2*h*kd1) 0 (-p*kd1*rd2)+(s2*h*kd1*rd2)
0 (p*kd1)-(s2*h*kd1*rd2) 0 (p*kd1*rd2)-(s2*h*kd1*rd2)];

```

### 6.4.5. Modelo hipoide

```
Ip=2;
Ig=5;
lp=0.25;
lg=0.2;
kd2=1000;
cd2=10;

M=[Ip 0;
   0 Ig];

C=[((lp^2)*cd2) -lp*lg*cd2;
   -lp*lg*cd2 (lg^2)*cd2];

K=[(lp^2)*kd2 -lp*lg*kd2;
   -lp*lg*kd2 (lg^2)*kd2+1];
```



# Bibliografía

- [1] Abdulrahman S Sait and Yahya I Sharaf-Eldeen. A review of gearbox condition monitoring based on vibration analysis techniques diagnostics and prognostics. In *Rotating Machinery, Structural Health Monitoring, Shock and Vibration, Volume 5*, pages 307–324. Springer, 2011.
- [2] Banco de prueba de vibraciones mecánico. [https://www.directindustry.es/prod/asli-china-test-equipment-co-ltd/product-115689-1422299.html#product-item\\_1404161/](https://www.directindustry.es/prod/asli-china-test-equipment-co-ltd/product-115689-1422299.html#product-item_1404161/).
- [3] Julio Cesar Ortiz; Gregorio Macias Lopez; Miguel Angel Piña; Daniel Martinez Peña. Banco de pruebas didáctico para el análisis de vibraciones. *XVII Congreso Internacional Anual de la SOMIM*, 2011.
- [4] Subimal Bikash Chaudhury, Mainak Sengupta, and Kaushik Mukherjee. Vibration monitoring of rotating machines using mems accelerometer. *International journal of scientific engineering and research*, 2(9):5–11, 2014.
- [5] Adam Hjort and Måns Holmberg. Measuring mechanical vibrations using arduino as a slave i/o to an epics control system, 2015.
- [6] Andriy Holovatyy, Vasyl Teslyuk, Marek Iwaniec, and Marta Mashevska. Development of a system for monitoring vibration accelerations based on the raspberry pi microcomputer and the adxl345 accelerometer. (6 (9)), 2017.
- [7] Marek Iwaniec, Andriy Holovatyy, Vasyl Teslyuk, Mykhaylo Lobur, Kostyantyn Kolesnyk, and Marta Mashevska. Development of vibration spectrum analyzer using the raspberry pi microcomputer and 3-axis digital mems accelerometer adxl345. In *2017 XIIIth International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH)*, pages 25–29. IEEE, 2017.
- [8] José Rangel-Magdaleno, Luis Contreras-Medina, J Romero-Troncoso, Jose Vite-Frias, and Jesus Rivera-Guillen. Sistema de monitoreo de vibraciones para la detección de fallas. 10 2007.
- [9] Jun Wang, Teik C Lim, and Mingfeng Li. Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 308(1-2):302–329, 2007.

- 
- [10] Cheng Wang. Dynamic model of a helical gear pair considering tooth surface friction. *Journal of Vibration and Control*, page 1077546319896124, 2020.
- [11] M Attia Hili, T Fakhfakh, and M Haddar. Failure analysis of a misaligned and unbalanced flexible rotor. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 6(4):73–82, 2006.
- [12] Gordana M Bakić, Miloš B Đukić, Tatjana Lazović, Radica M Prokić-Cvetković, Olivera D Popović, and Bratislav M Rajičić. New methodology for monitoring and prevention of rotating parts failures. *FME Transactions*, 35(4):195–200, 2007.
- [13] Singiresu S Rao. *Vibration of continuous systems*. Wiley Online Library, 2007.
- [14] Análisis de vibración para el mantenimiento predictivo de maquinaria. <https://www.scribd.com/document/156741581/MAQ-1-Analisis-de-Vibracion-Para-El-Mantenimiento-Predictivo-de-Maquinaria>.
- [15] Singiresu S Rao. *Vibraciones mecánicas. 5*. Pearson Educación, 2012.
- [16] Glen White. Introducción al análisis de vibraciones. *Woburn, MA, Estados Unidos: Ázima*, 551:1990–2010, 2010.
- [17] Maurice L Adams. *Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting*. CRC Press, 2009.
- [18] Giancarlo Genta. *Dynamics of rotating systems*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [19] Robert L Mott. *Diseño de elementos de máquinas*. Pearson, 2006.
- [20] Antonio Pérez González, Pablo Jesús Rodríguez Cervantes, and Joaquín Luís Sancho Brú. *Mantenimiento mecánico de máquinas*, volume 25. Publicacions de la Universitat Jaume I, 2007.
- [21] Grupo SKF 2015. Rodamientos, October 2015.
- [22] NSK. Catálogo: Tipos y características de los rodamientos.
- [23] David H. Myszka. *Máquinas y mecanismos-Cuarta Edición*. Pearson, 2012.
- [24] REALIZADO POR A-MAQ SA. Tutorial de vibraciones para mantenimiento mecánico, 2005.
- [25] Power-MI. Manual de análisis de vibraciones.
- [26] Luis Eduardo Benitez. Las fallas en los engranajes. Universidad Nacional de Colombia.

- 
- [27] George C Loveday and Antonio Rincón Corcoles. *Diseño de hardware electrónico*. Paraninfo, 1995.
- [28] Tony L Schmitz and K Scott Smith. *Mechanical Vibrations: Modelling and Measurement*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [29] Kihong Shin and Joseph Hammond. *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. John Wiley & Sons, 2008.
- [30] Analog Devices ADXL335 Accelerometer. Datasheet. *MEMSIC Inc*, 2018.
- [31] Texas Instruments. Ads1115 datasheet. *Data Sheet ADS1115*, pages 1–51, 2016.