AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EMERGENTE EN EL CONTEXTO DEL PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Luis Fernando Mariño

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2020

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EMERGENTE EN EL CONTEXTO DEL PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctor en Educación Matemática

Luis Fernando Mariño

DIRECTORA DE TESIS

Doctora: Mary Falk de Losada

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2020

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, noviembre 20 de 2020

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme permitido culminar un sueño personal y familiar.

A la Doctora Mary Falk de Losada por creer en mí, por su apoyo, sugerencias, recomendaciones y orientaciones permanentes y sobre todo por ser un gran ser humano.

Al Doctor Gerardo Chacón y al grupo de profesores del Doctorado en Educación Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño por su permanente y valioso apoyo.

A la Universidad Francisco de Paula Santander en la ciudad de Cúcuta, a ella le debo toda mi formación profesional y académica.

DEDICATORIA

A mi querida y adorada madre María Trinidad Mariño por el amor incondicional a todos sus hijos sin exigir nada a cambio.

A mi querida esposa Rosa Virginia, por su comprensión y apoyo.

A mis hijos David Fernando, Sarha Elizabeth y Brenda Jazmín por su apoyo.

A Bernardo y a todos mis hermanos por su apoyo permanente, es un logro para la familia.

SÍNTESIS

El pensamiento variacional ha sido caracterizado desde diferentes contextos y perspectivas. Para algunos investigadores el razonamiento es una forma de pensar y se refieren al pensamiento variacional como razonamiento variacional, covariacional, cuantitativo y paramétrico. Para otros autores el pensamiento es funcional y representacional. El objetivo de la investigación fue aportar en la caracterización del pensamiento variacional emergente del planteo y resolución de problemas en un grupo 24 de profesores de matemáticas en formación siguiendo un enfoque cualitativo desde la teoría fundamentada. Se implementó un proceso de tres intervenciones compuesto por diez actividades didácticas, una entrevista retrospectiva, tres ciclos de codificación y análisis de datos centrado en el método de comparación constante que condujo al muestreo y saturación teórica. Se construyó una teoría desde los datos, que caracteriza al pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas y como proceso al entender y pensar sobre problemas. Entre los hallazgos se destaca la forma de pensar variacional de los participantes acerca de cómo los valores de la variable x cambian siguiendo un patrón, mientras los de la variable y cambian siguiendo otro patrón, pero ambos cambian al mismo tiempo en las infinitas soluciones a problemas que involucran ecuaciones diofánticas de la forma $ax + by = c$. Junto a la evolución en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, los resultados implican que es posible seguir avanzando en caracterizar el pensamiento variacional desde estos contextos.

ABSTRACT

Variational thinking has been categorized from different contexts and perspectives; to some researchers, reasoning is a way of thinking and they refer to variational thinking in terms of variational, co-variational, quantitative and parametric reasoning. To other authors, thinking is functional and representational. The aim of this research was to contribute to the characterization of variational thinking arising from the formulation and resolution of problems in a group of 24 trainee mathematics professors following a qualitative perspective from a grounded theory approach. Three processes of intervention were implemented composed of ten didactic activities, one retrospective interview, three codification cycles and data analysis focused on the constant comparison method which leads up to the sampling and theory saturation. A theory was built based on the data which characterizes variational thinking as a process of formulation and problem resolution as well as a process used to understand and think about problems. Among the findings, the participants' variational thinking is highlighted when it addresses how the values of the variable x change following a pattern while the values of the variable y change following another pattern but both values change at the same time among infinite solutions to problems that involve Diophantic equations of the form $ax + by = c$. Along with the evolution of students' thinking, the results suggest that it is possible to keep moving forward in the characterization of variational thinking from the contexts studied.

INDICE

Anexos ... xiii

INTRODUCCIÓN ... 1

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE ... 9

1.1. Introducción ... 9

1.2. Investigaciones relacionadas con la caracterización del razonamiento variacional y covariacional ... 9

1.2.1. A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic ... 9

1.2.2. Quantitative reasoning and mathematical modeling ... 13

1.2.3. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically ... 16

1.2.4. Continuous quantitative reasoning ... 18

1.2.5. Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions ... 22

1.2.6. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study ... 26

1.2.7. The parametric nature of two students' covariational reasoning ... 28

1.3. Investigaciones relacionadas con la caracterización del pensamiento variacional ... 30

1.3.1. Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional ... 30

1.4. Investigaciones relacionadas con el pensamiento variacional, razonamiento variacional, planteo y resolución de problemas y profesores de matemáticas en formación......33

1.4.1. Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions 33

1.4.2. Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base......35

1.4.3. Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers......36

1.4.4. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research 38

Conclusiones del capítulo......39

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO......43

2.1. Introducción......43

2.2.1. Pensamiento matemático según Leone Burton 44

2.2.2. Pensamiento matemático según Guershon Harel......47

2.3. El cuasi empirismo de Imre Lakatos......49

2.4. Planteo y resolución de problemas......51

2.4.1. La resolución de problemas......51

2.4.2. El planteo (invención, formulación) de problemas 52

2.5. Las actividades de enseñanza de la matemática 54

2.5.1 Ciclo de enseñanza de la matemática 54

2.6. La Teoría fundamentada 56

2.6.1. Elementos esenciales de la Teoría Fundamentada 58

2.7. La teoría de números en la formación de profesores de matemáticas en la Universidad Francisco de Paula Santander...61

2.8. La obra de Diofanto de Alejandría 62

2.8.1. Diofanto y los métodos de resolución de ecuaciones 62

Conclusiones 64

CAPITULO 3. METODOLOGÍA..65

3.1. Introducción 65

3.2. La naturaleza del pensamiento variacional desde el enfoque cualitativo y la teoría fundamentada 66

3.3. Diseño de la investigación desde la teoría fundamentada..........................67

3.4. Los participantes y el contexto 68

3.5. Las fuentes de datos y las estrategias para su recolección en tiempos de la pandemia del covid 19..71

3.6. Actividades, fechas y formas de implementación 79

3.7. El muestreo teórico..80

3.7.1. El muestreo teórico como vía hacia la construcción de la teoría 81

3.8. Gestión y análisis de datos..84

3.8.1. El proceso de codificación 85

3.8.2. El proceso de análisis de datos 87

3.9. De las teorías locales a las teorías formales; niveles y alcances de la teoría 90

Conclusiones 91

CAPITULO 4. ANALISIS DE DATOS Y RESULTADOS 93

4.1. Introducción 93

4.2. Ciclos de codificación, muestreo teórico y análisis de datos 93

4.2.1. Primer ciclo de codificación y análisis de datos; hacia la construcción de teorías sustantivas 94

4.2.2. Segundo ciclo de codificación y análisis de datos: Aprendiendo más sobre los conceptos y categorías iniciales 103

4.2.3. Integrando categorías, primero y segundo ciclo de codificación 109

4.2.4. Categorías y subcategorías de la teoría sustantiva 112

4.2.5. Tercer ciclo de codificación y análisis de datos. Codificación teórica, en la construcción de la(s) categoría(s) central(es) 114

4.3. Categorías centrales emergentes como núcleo de la teoría 119

4.4. Muestreo teórico y saturación teórica 124

Conclusiones 128

CAPITULO 5. LA TEORÍA EMERGENTE DE LOS DATOS 130

5.1. Introducción 130

5.2. Las categorías centrales como procesos 130

5.2.1. El pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas 131
5.2.2. El pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas 133
5.3. Los conceptos y/o categorías finales y su funcionamiento 134
5.4. Elementos que fundamentan la metodología y a la teoría 136
5.4.1. Consistencia metodológica 137
5.4.2. Fundamentos y criterios de la teoría desarrollada y construida 140
Conclusiones 142
CAPITULO 6. HALLAZGOS Y DISCUSIÓN 143
6.1. Acciones variacionales cuando el pensamiento opera sobre la resolución de problemas 143
6.2. Las maneras como los estudiantes interpretan, entienden y piensan cuando su pensamiento variacional opera sobre la resolución de problemas 145
CONCLUSIONES 148
REFERENCIAS 157
ANEXOS 165

Anexos

Anexo 1. A2 EDL I 165

Anexo 2. A3 EDL II 169

Anexo 3. A4 FC I 171

Anexo 4. A7 ARI 175

Anexo 5. A8 ARII 176

Anexo 6. A9 ARIII 177

Anexo 7. A10 ARIV 178

Anexo 8. Entrevista retrospectiva semi estructurada 181

Anexo 9. Guion entrevista 182

Anexo 10. Actividad 4 para el profesor 184

INTRODUCCIÓN

El pensamiento variacional siempre ha estado presente en la mente de matemáticos, investigadores y profesores de matemáticas, pero no había sido definido. En términos generales estas caracterizaciones se han hecho desde diferentes miradas, contextos y autores. Sólo a partir de la década de los años 80 del siglo anterior empieza a surgir este constructo con los trabajos de Jere Confrey y Patrick W. Thompson quienes caracterizaron la covariación en términos de razonamiento Jere Confrey y sus colegas y Patrick W. Thompson y sus colegas han escrito y escriben acerca del constructo de covariación. Confrey (1991) caracteriza la covariación en términos de la coordinación de los valores de dos variables a medida que ellas cambian. En sus trabajos Confrey y Smith (1994, 1995) manifiestan que desde un enfoque de covariación el concepto de función se puede entender como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales se genera independientemente mediante un patrón de valores de datos. El enfoque de Confrey surge como resultado de su trabajo acerca de las proporciones y el crecimiento exponencial como apoyo a sus colegas y estudiantes.

Para Confrey y Smith (1994) un enfoque de covariación implica ser capaz de moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinado con el movimiento de x_m a x_{m+1}. Cuando se usan tablas implica la coordinación de la variación de dos o más columnas mientras uno se mueve hacia abajo.

Por su parte, Thompson, P., W. (citado por Thompson y Carlson, 2017) centra su interés en entender las formas en que los estudiantes conciben las situaciones compuestas por cantidades y las relaciones entre ellas, cuyos valores varían y la forma como los estudiantes conciben la tasa de cambio. Sin embargo, para Thompson la cantidad no es igual a un número; define cantidad como la conceptualización de un objeto por parte de alguien, con un atributo que puede ser medido (Thompson y Thompson, 1992, Abril)

Saldanha y Thompson (1998) en sus trabajos utilizan tablas para presentar los estados sucesivos de variación. En este sentido la noción de covariación es la de alguien que tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades (magnitudes) simultáneamente. Implica acoplar las dos cantidades, de modo que, se forma un objeto multiplicador de los dos. En la teoría del razonamiento cuantitativo de Thompson una persona razona covariacionalmente cuando prevé que los valores de dos cantidades varíen y que lo hagan simultáneamente (Thompson y Carlson, 2017).

Thompson y Carlson (2017) expanden el marco que fundamenta el razonamiento estableciendo cinco niveles de razonamiento variacional y covariacional. Carlson (1998) y Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2002) describen cinco acciones mentales y sus comportamientos cuando los estudiantes responden tareas que involucran interpretación y representación de funciones en situaciones dinámicas. Establecen también cinco niveles para clasificar el desarrollo de imágenes de covariación de los estudiantes y su descripción.

Para Carlson et al. (2002) fueron Harel, G. y Thompson, P.W. quienes llamaron al razonamiento como una forma de pensar. Esto lo reafirma Thompson P. W., Carlson, Byerley, y Hatfield (2014).

Castillo-Garsow (2010, 2012) y sus colegas Castillo-Garsow, Johnson, y Moore, (2013) desarrollan el constructo de razonamiento covariacional centrandos en la idea de variación misma. Para estos autores los estudiantes pueden concebir el valor de una cantidad como algo que varíe continuamente (de manera robusta o suave) o discretamente (el estudiante puede tener en mente el desplazamiento de un coche de un punto a otro, pero no considera los puntos intermedios). Castillo-Garsow describen la variación continua como robusta muy semejante a la variación discreta, pero en este caso el estudiante tiene una imagen tácita entre dos valores.

En contraste a todo lo anterior Smith (2008) hace referencia al pensamiento funcional como pensamiento representacional que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables. Mientras que Blanton y Kaput (2011), en esta misma línea, establecen seis categorías para caracterizar el pensamiento funcional: a) representar los datos como entrada-salida, b) representar gráficamente los datos, c) representar los datos como pares ordenados, d) encontrar relaciones funcionales, e) predecir estados desconocidos utilizando los datos conocidos, f) identificar y describir patrones geométricos y numéricos.

Finalmente, mientras que para el Ministerio de Educación Nacional (MEN) el pensamiento variacional tiene que ver con reconocer, percibir, identificar, describir, modelar, representar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos (MEN, 2006) para Vasco (2003) es una forma de pensar dinámica que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables. Entre tanto Caballero y Cantoral (2013) considera que, para caracterizar el pensamiento variacional, se deben articular las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos; por tanto, hacen referencia a pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar).

En lo referente a las prácticas en el aula que promueven el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante parecen ser más estáticas que dinámicas. Orientadas más a procedimientos algorítmicos, aprendizaje y reconocimiento de fórmulas en contraste, con los procesos de resolución de problemas que involucran la variación y cambio.

Para Harel (2010) los maestros en todos los niveles educativos, tienden a ver las matemáticas en términos de materia, como definiciones, teoremas, pruebas, problemas y sus soluciones. Presentan los temas como un saber acabado y pulido, como un producto conocido e irrefutable, plenamente aceptado y reconocido por la comunidad matemática, pero ajeno al estudiante (Dreyfus, 2002), no en términos de herramientas conceptuales necesarias para construir tales objetos matemáticos.

Además, mientras que la resolución de problemas ha hecho grandes aportes tanto en la investigación como en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; al planteo de problemas no se la ha dado la importancia requerida. Lo que sí parece compartirse entre profesores e investigadores en educación matemática es que los buenos problemas provienen de libros de texto o de profesores con gran experiencia y la tarea del estudiante es resolverlos.

Todo lo relacionado en párrafos anteriores parece evidenciar que, en la comunidad de educación matemática aún no existe consenso en lo que hace referencia a los constructos que describen la naturaleza del pensamiento variacional. La mayoría de los problemas utilizados como fuente en estas investigaciones, generalmente provienen del álgebra o del cálculo, concretamente relacionados con el tema de funciones, límites y continuidad, entre otros. Se hace más énfasis en los resultados, en contraste con los procesos de resolución y los procesos de pensamiento donde se privilegia en la mayoría de los casos la perspectiva del investigador y no la del estudiante. Aunque Thompson P. W., (citado por Thompson y Carlson, 2017) sí hace énfasis en el razonamiento covariacional como proceso.

A pesar de que la mayoría de los problemas sobre los cuales se caracteriza el pensamiento variacional versan en dominios continuos, no existe una clara distinción si la caracterización del pensamiento es discreto o continuo. Muy pocos investigadores, entre ellos Castillo-Garsow (2010, 2012, 2013) y sus colegas, caracterizaron el razonamiento variacional desde la propia variación y lo describen en términos de variación continua suave o robusta y variación discreta.

Como lo afirman Cai, Hwang, Jiang y Silber (2015) aunque el planteo de problemas no es nuevo, en muy pocos países se ha incorporado al currículo. A pesar de que los estudiantes son una buena fuente para plantear y resolver problemas, el planteo es inseparable de la solución (Kilpatrick, 1987; Silver, 2013).

Por otro lado, la investigación en educación matemática debe responder a dos propósitos fundamentales: uno puro, comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje, y otro práctico, usar esa comprensión para mejorar la enseñanza de la matemática Schoenfeld (2000). Entre sus contribuciones deben estar, el aportar nuevas perspectivas teóricas para comprender el pensamiento, el aprendizaje y la enseñanza Schoenfeld (2000).

Ante esto, e intentando hacer aportes desde el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$ que exigen solución en el dominio de los números enteros, surge el problema científico: ¿Cómo avanzar en la caracterización del pensamiento variacional emergente desde el contexto del planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas en profesores de matemáticas en formación?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas en profesores de matemáticas en formación.

Para intentar responder al problema científico se plantea el siguiente **objetivo general:** Avanzar en la caracterización del pensamiento variacional emergente en el contexto del planteo y resolución de problemas en profesores de matemáticas en formación.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas en un curso de Teoría de Números en profesores de matemáticas en formación de la Universidad Francisco de Paula Santander en la ciudad de Cúcuta.

Con el propósito de dar viabilidad al objetivo general, se plantean los siguientes específicos:

Analizar y comparar constantemente las formas de entender y las formas de pensar en el planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas de los profesores de matemáticas en formación, que conduzcan de teorías sustantivas del pensamiento variacional a teorías formales.

Caracterizar la teoría emergente de los datos generando categorías y relaciones entre ellos, que posibiliten el muestreo y saturación teórica para avanzar en la determinación de propiedades y dimensiones del pensamiento variacional en el contexto del planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas de los profesores de matemáticas en formación.

Interpretar, dar sentido y significado a los datos emergentes durante el proceso, que permitan describir y explicar la naturaleza del pensamiento variacional desde el contexto del planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas en profesores de matemáticas en formación.

Para intentar responder al problema científico, así como el objetivo general y los objetivos específicos se plantean las siguientes subpreguntas asociadas a cada uno de los objetivos específicos, que a su vez orientan la investigación:

- ¿Cómo es el proceso emergente de las formas de entender y formas de pensar variacional cuando los estudiantes plantean y resuelven problemas en el contexto propuesto?
- ¿Cómo es el proceso cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en el contexto propuesto?
- ¿Cómo interpretar y dar sentido a los datos para describir y explicar la naturaleza del proceso del pensamiento variacional desde el contexto propuesto?

Siguiendo a Burton (1984)[1] y Falk de Losada (1994), *"El pensamiento es el medio utilizado por los humanos para mejorar su comprensión de, y ejercer algún control sobre, el medio que los rodea"*[2]. El pensamiento matemático es un objetivo importante de la escuela, es importante como una forma de aprender matemáticas, es importante para la enseñanza de las matemáticas (Stacey, 2006).

El estudio forma parte y contribuye a la línea de investigación del desarrollo del pensamiento matemático y avances en su caracterización, en el Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño en la ciudad de Bogotá D.C.

---

[1] Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35-49. doi:10.2307/748986, p. 36.

[2] Falk de Losada, M. (1994) Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas*; *Vol. 1, núm. 1 (*1994); 39-59, p. 40.

La investigación se centra en describir y dar sentido a la naturaleza del pensamiento variacional que emerge de los datos. Emergente en el sentido de caracterizar las manifestaciones verbales o escritas (datos) como producto o resultado, de los procesos de pensamiento desde la variación y el cambio cuando un grupo de profesores de matemáticas en formación plantea y resuelve problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$. Esto posibilitó construir conceptos (categorías), sus propiedades y dimensiones para describir la naturaleza del pensamiento variacional desde los participantes, el contexto propuesto y la teoría fundamentada.

Se considera que la caracterización realizada del pensamiento variacional desde el proceso de resolución de problemas y la teoría fundamentada amplía el rango y dominio de caracterización de este tipo de pensamiento, así como su aplicabilidad. Además, el sistema de actividades didácticas diseñadas e implementadas pueden ser utilizadas y adaptadas a otros contextos y participantes con el propósito de favorecer el desarrollo de su pensamiento variacional, contribuyendo en disminuir y estrechar vínculos entre la investigación y lo que realmente ocurre en el aula de clase.

El documento está compuesto por la introducción, seis capítulos, las conclusiones y anexos. El primer capítulo hace referencia al estado del arte, el segundo al marco teórico, el tercer capítulo a las estrategias planeadas y puestas en marcha con un diseño desde la teoría fundamentada para responder la pregunta científica, en el cuarto capítulo se muestra al detalle el análisis de datos y resultados, el quinto la teoría formal emergente de los datos como resultado de los ciclos de intervención, codificación y análisis de datos, mientras que el capítulo seis muestra los hallazgos, para finalizar con las conclusiones e implicaciones de la investigación y los anexos.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

1.1. Introducción

En este capítulo se pretende indagar y dar respuesta a las preguntas: ¿qué es el pensamiento variacional?, ¿qué constructos definen su naturaleza?, ¿cómo ha sido su caracterización?, ¿qué caracteriza a las investigaciones relacionadas con el planteo y resolución de problemas en profesores de matemática en formación?

Las fuentes consultadas evidencian claramente dos vertientes. Una, el razonamiento como forma de pensar que tiene como precursores a Jere Confrey y Guershon Harel y la otra desde el pensamiento funcional y lenguaje variacional. A esto se debe el orden y organización del capítulo.

1.2. Investigaciones relacionadas con la caracterización del razonamiento variacional y covariacional

1.2.1. A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic[3]

Patrick W. Thompson en 1990 presenta una teoría de razonamiento cuantitativo que propone significados para la cantidad, la estructura cuantitativa y el razonamiento cuantitativo con el propósito de proporcionar una base para las teorías de cómo promover y apoyar el razonamiento algebraico. A continuación se muestran y definen los conceptos que caracterizan el razonamiento cuantitativo de (Thompson P. , 1990).

Cantidad. La cantidad es una cualidad de algo que se ha concebido para algún proceso de medición. Para concebir una cualidad como cantidad es necesario concebir explícita o implícitamente una unidad apropiada.

[3] Thompson, P. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. *Center for Research in Mathematics & Science Education*

Cuantificación. La cuantificación es un proceso por el cual se asignan valores numéricos a las cualidades. Es decir, La cuantificación es un proceso de medición directa o indirecta.

Valor. El valor de una cantidad es el resultado numérico de un proceso de cuantificación aplicado a ella.

Cantidad extensa ("Número de cosas"). Una cantidad extensa es una cantidad que puede medirse directamente o es una combinación de cantidades directamente medibles. Dicho de otra manera, las cantidades extensas son cantidades cuyas medidas admiten la aritmética normal.

Cantidad intensiva. Las cantidades intensivas son las cantidades cuyas medidas no son aditivas como en el caso normal de la aritmética. Las velocidades no son aditivas en general, aunque las velocidades son aditivas como vectores. Las temperaturas, densidades y frecuencias no son aditivas en general.

Diferencia. Una diferencia de dos cantidades es la cantidad en que una cantidad excede o no alcanza a otra.

Proporción. Una proporción es una comparación multiplicativa entre dos cantidades.

Razón. Una razón o tasa es una cantidad que puede ser analizada en una comparación multiplicativa entre otras dos cantidades, donde el valor de una cantidad se concibe como variable en proporción constante con variaciones en el otro valor.

Operación cuantitativa. Una operación cuantitativa es la concepción de dos cantidades que se toman para producir una nueva cantidad.

Algunas operaciones cuantitativas. Combinación aditiva de cantidades, comparación aditiva de cantidades, combinación de cantidades multiplicativas, comparación de cantidades multiplicativas, generalizar una proporción, razón instantánea, composición de proporciones, y composición de razones.

Relación cuantitativa. Una relación cuantitativa es la concepción de tres cantidades, dos de las cuales determinan la tercera mediante una operación cuantitativa.

Estructura cuantitativa. Una estructura cuantitativa es una red de relaciones cuantitativas.

Razonamiento cuantitativo. El razonamiento cuantitativo es el análisis de una situación en una estructura cuantitativa, una red de cantidades y relaciones cuantitativas.

Fórmula. Una fórmula es una expresión que describe un método numérico para calcular el valor de una cantidad.

Aritmética basada en cantidad. Se caracteriza por: a) razonamiento cuantitativo, b) determinación de las operaciones adecuadas para calcular los valores de las cantidades, y c) la propagación de cálculos.

Algebra basada en cantidad. Caracterizada por: a) las representaciones de las situaciones están insuficientemente limitadas en cuanto a los valores de las cantidades (no hay suficiente información numérica para propagar los cálculos) y b) algún valor o valores se representan simbólicamente.

Ecuación. Una ecuación es: a) una fórmula para el valor de una cantidad junto con el valor que la fórmula debe producir, o b) dos fórmulas para el valor de una sola cantidad.

Como lo afirma Thompson P. (2011) este trabajo es más un reto personal que no publicó. Trabajo que ha servido como fuente y base para otras investigaciones tanto para Thompson como para otros investigadores. Las definiciones anteriores muestran un modelo de aritmética y algebra basado en la cantidad que llegó a sistematizarse en programa de computador denominada WPA.

La definición de todos estos términos se realiza en el marco de la resolución de problemas que involucran pensamiento aritmético y algebraico. Los problemas que presenta como ejemplos los propone y resuelve desde su propia perspectiva donde analiza, especifica y ejemplifica claramente cada uno de los elementos de su teoría presentes en el problema.

En general el modelo propuesto tiene como fuente la inspiración de Thompson como producto de sus investigaciones y la de sus colegas. La información recolectada con diferentes técnicas proviene de profesores, estudiantes de diferentes niveles e investigadores.

Las definiciones tienen por objeto apoyar la puesta en práctica de las nociones de razonamiento cuantitativo y algebraico. Es decir, deben ser examinados como construcciones en un sistema (Thompson P. , 1990). Aunque no está explícito en el documento de Thompson se evidencian claramente los conceptos, sus propiedades y dimensiones. Además de enunciar los problemas, los resuelve evidenciando y especificando cómo opera cada una de las definiciones.

1.2.2. Quantitative reasoning and mathematical modeling[4]

Thompson, P. (2011) y sus colegas junto a otras investigaciones en años anteriores contribuyen con la fundamentación, ampliación y aplicación de la teoría del razonamiento cuantitativo de P. W. Thompson. En este trabajo añaden lo que ellos llaman principios centrales o principales de la teoría del razonamiento. A continuación, se describen brevemente.

Una cantidad no está en el mundo, está en la mente de la persona. Las cantidades son construcciones mentales, son puntos centrales en educación matemática, pero son difíciles de construir para el estudiante. Regularmente cantidades, como área y volumen, se toman como obvias, y por lo tanto no se presta atención a la construcción de la cantidad por parte del estudiante.

La cuantificación es muy importante. Puede verse como, un proceso por el cual se asignan valores numéricos a las cualidades. Es decir, la cuantificación es un proceso de medición directa o indirecta. No es necesario llevar a cabo un proceso de cuantificación de una cantidad para concebirla. Más bien, el único requisito previo para concebir una cantidad es tener un proceso en mente.

En cuanto a la cuantificación como proceso afirma que: la cuantificación es el proceso de conceptualizar un objeto y un atributo de la misma manera que el atributo tenga una unidad de medida, y la medida del atributo conlleva una relación proporcional (lineal, bilíneal o multilíneal) con su unidad. Para Thompson la cuantificación puede tardar, días e incluso generaciones.

---

[4] Thompson, P. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Edits.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, págs. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming

Las operaciones cuantitativas no son lo mismo que las operaciones numéricas. Las operaciones mentales que generan cantidad y las operaciones mentales que generan números están estrechamente relacionadas.

La disposición del estudiante permite crear álgebra a partir del razonamiento cuantitativo. Ellis (2007) un colega de Thompson da una explicación convincente del importante papel que desempeña el razonamiento cuantitativo en las operaciones de generalización de los estudiantes, y del papel que la generalización desempeña en el desarrollo del razonamiento algebraico de los estudiantes.

Thompson, P. (1990) en su trabajo identifica un número de disposiciones y procesos de abstracción que los estudiantes pueden construir en el razonamiento algebraico desde el razonamiento cuantitativo. Disposición: a) para representar cálculos, b) para difundir información, c) a pensar con unidades abstractas, y d) a razonar con magnitudes.

La matemática de la variación implica imaginar una cantidad cuyo valor varía. Es fácil decir que es la variación, pero no es fácil para un estudiante desarrollar operaciones conceptuales que les permita ver la variación de cantidades en situaciones cuantitativas. Thompson, P. (2011) describe así el concepto de variación: supóngase que x representa una cantidad. Que uno anticipa el valor de la cantidad, es decir teniendo diferentes valores en diferentes momentos de tiempo. Así el valor de una cantidad variable puede representarse como $x = x(t)$, donde t representa conceptualmente al tiempo.

Sin embargo, Thompson prefiere que se capte la idea que la variación ocurre dentro de un intervalo. Sea $D = dominio(t)$ los valores conceptuales del tiempo t. Sea D_ε el dominio de t pero en intervalos de tamaño ε, lo que significa que $D = \bigcup_t (t, t+\varepsilon)$

donde t puede tomar cualquier valor conceptual del tiempo. En otras palabras D no está particionado en intervalos de tamaño ε, en cambio se anticipa que se cubrirá con intervalos de tamaño ε.

Esta formulación de la variación trata de capturar las operaciones conceptuales detrás de una imagen de una magnitud creciente, como un segmento de línea cada vez más largo. Una magnitud particular, estática, tiene un valor de $x(t)$, Pero al pensar en la variación de la magnitud, el sujeto imagina que varía en bits microscópicos, cada bit en sí mismo implica una variación al examinarlo de cerca.

Thompson, P. (2011) cita trabajos e investigaciones de sus colegas que dan fundamento a nuevos aportes a su teoría del razonamiento cuantitativo. Los resultados provienen siempre del razonamiento cuantitativo que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven problemas.

El razonamiento cuantitativo es un proceso que puede ser instantáneo, e incluso puede ser a lo largo de toda la vida (Thompson P., 2011). Para Thompson P. este aspecto es una ampliación y extensión del razonamiento cuantitativo al proporcionar vínculos entre las ciencias de la educación y la educación matemática.

Algunos de los problemas utilizados como tareas para los participantes se relacionan con geometría; áreas, volúmenes, alturas, distancias. Modelación que involucra razones de cambio, funciones, medidas de ángulos, y velocidad, entre otros. En general, todos estos problemas se caracterizan desde la variación y medida de cantidades. En ningún momento se hace referencia a la resolución de problemas como proceso.

Entre los participantes se encuentran estudiantes de diferentes niveles educativos, profesores en pre servicio. Se resalta también la definición y aclaración de Thompson de lo que para él es la variación en matemáticas.

1.2.3. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically[5]

Thompson y Carlson (2017) argumentan en su trabajo que las ideas de variación continua y covariación continua son epistemológicamente necesarias para que los estudiantes y los profesores desarrollen concepciones útiles y robustas de las funciones. Presentan un recorrido histórico acerca de la evolución y desarrollo del concepto de función. En algunos pasajes siguen a Kleiner quien habla de las cuatro eras en el desarrollo del concepto de función. Siempre se hace énfasis en la variación de cantidades.

Afirman que la idea de la variación continua estaba en el corazón de las matemáticas de Newton. Así como para Euler y Leibniz quienes hablaron de que los cambios en una variable producen cambios en otra variable, asumiendo tácitamente que toda variación es continua. Resaltan también el papel y significado que juega el concepto de variable en el pensamiento variacional y la matemática moderna.

La mayoría de investigaciones relacionadas que tienen como fundamento el razonamiento covariacional citan a Confrey, Thompson y Carlson (2017). Pero ellos no contribuyeron directamente en la definición de este constructo (Thompson y

[5] Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. (J. Cai , Ed.). In *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Carlson, 2017). Manifiestan que muchas investigaciones señalan que fue Castillo-Garsow quien desarrolló el constructo razonamiento variacional centrándose en la idea misma de variación. Para Castillo-Garsow (2010, 2012) los estudiantes pueden concebir que el valor de una cantidad varíe discretamente. Este autor y sus colegas caracterizan la variación continua como suave o leve y robusta.

Siguiendo los trabajos de Castillo-Garsow (2010, 2012) y sus colegas en sus investigaciones con estudiantes, las concepciones del tiempo como cantidad y los objetos multiplicativos como escenciales para razonar covariacionalmente Thompson y Carlson (2017) hacen una revisión en los marcos que fundamentan el razonamiento covariacional de dos maneras: a) a traves del razonamiento variacional de los estudiantes por separado de su razonamiento covariacional, y b) atendiendo a la forma en que los estudiantes coordinan sus imágenes de las variaciones de los valores de las cantidades, teniendo en cuenta su forma de razonar de forma variable y teniendo en cuenta las formas en que construyen objetos multiplicadores de los valores de las cantidades.

Como resultado de este análisis y revisión, Thompson, P. y Carlson (2017) presentan un marco para el constructo de razonamiento variacional que combina la distinción entre imágenes de variación suave y robusta de Castillo-Garsow (2010, 2012) y la construcción de una imagen recursiva de cambio continuo de Thompson, P. (2011), útil para futuras investigaciones que involucren el razonamiento variacional.

En este marco conceptual se diferencian claramente dos aspectos: principales niveles de razonamiento variacional (variación suave y continua, variación robusta y continua, variación bruta, variación discreta, no variación, variable como símbolo) y principales niveles de razonamiento covariacional (covaración continua suave, covariación continua robusta, coordinación de valores, coordinación bruta de valores, pre coordinación de valores, no coordinación). También presentan una serie de problemas y ejemplos de éste marco.

En cuanto a los problemas como tareas para los participantes y que posibilitaron hacer estas caracterizaciones involucran siempre el concepto de función. Se destaca tambíen los niveles para clasificar el razonamiento variacional y covariacional pero en ningun momento se vislumbra como proceso. Lo mismo ocurre con la resolución de problemas. En cuanto a los participantes la gran mayoría son estudiantes, en algunos casos son profesores.

1.2.4. Continuous quantitative reasoning[6]

Castillo-Garsow, C. (2012), inicia su documento argumentando que la covarianza entendida como la imaginación de dos cantidades que cambian juntas, ha aumentado significativamente en la literatura de educación matemática como una forma de pensar sobre las funciones. Fundamentan su trabajo siguiendo a Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, (2002), Confrey y Smith (1994, 1995), Moore (2010), Moore y Bolos (2008), Rizzuti (1991), Saldanha y Thompson, P. (1998), Strom (2008) y Thompson, P. (2008a, 2011).

Castillo-Garsow, C. (2012) afirma que: la mecánica de la covariación (imaginar cantidades e imaginar cambios), no está bien estudiada. Manifiesta que los autores que estudian la covariación tienen diferentes imágenes de lo que implica la construcción de una comprensión de una función continua a través del

[6] Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. En R. Mayes, R. Bonilla, L. Hatfield, & S. Belbase (Edits.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding,* (Vol. 2, págs. 55-73). Laramie: University of Wyoming.

razonamiento covariacional. Rizzuti y Saldanha y Thompson, P. describen inicialmente imágenes continuas de covarianza. Confrey, Smith y Strom describen una imagen de covarianza que comienza discretamente y se vuelve densa.

Carlson y sus colegas describen una imagen de covarianza que comienza con una simple conciencia del cambio, luego se vuelve discreto, y solo después de eso se vuelve continuo. Estas diferencias teóricas en los diferentes marcos dejan preguntas abiertas sobre cómo los propios estudiantes llegan a comprender las ideas de continuidad y las funciones continuas.

Castillo-Garsow, C. (2012), manifiesta que al razonar covariacionalmente sobre una función continua, los estudiantes deben razonar sobre la cantidad, sobre continuidad y sobre cambio. En su documento comenta los resultados de dos experiencias.

El primer experimento, realizado por Bassock y Olseth (1995), fue un estudio estadístico en la transferencia de métodos continuos y discretos a diferentes situaciones problemáticas (principalmente problemas de física lineal y problemas de economía aritmética). El segundo, realizado por Castillo-Garsow (2010) fue un experimento de enseñanza con dos estudiantes de Algebra II. Estos estudiantes construyeron diferentes soluciones para una ecuación diferencial según sus diferentes interpretaciones (discretas o continuas) del cambio.

Se debe hacer una distinción necesaria entre una situación problemática, el método utilizado para resolverlo y el razonamiento que se deriva o desprende de ese método para poder identificar lo que significa razonar continuamente (Castillo-Garsow C., 2012). Castillo-Garsow, C. (2012) utilizó el siguiente problema como tarea para tres estudiantes de Algebra I:

“Estoy tratando de ahorrar para un televisor de pantalla grande. Tomo la decisión de tomar $ 55 de mi recibo de sueldo mensual para el fondo de ahorro de TV (anteriormente mi fondo de día lluvioso). Después de 4 cheques, tengo un total de $ 540. Dibuja un gráfico que muestre cuánto dinero he ahorrado en cada momento durante los primeros 8 meses después de hacer el cambio. Asegúrese de pensar cuánto dinero he ahorrado entre cheques de pago”[7].

Castillo-Garsow (2012) afirma que si sigue a Bassock y Olseth (1995) en la clasificación de problemas, el problema es discreto puesto que el reloj trabaja o es impulsado por eventos discretos. El análisis lo realiza a partir de las gráficas. El proceso de solución del estudiante A, fue discreto y consistió en ir agregando $55. Mientras, que la solución del estudiante B, es continua y su gráfica era una línea continua, lo que significa que es una solución continua. El estudiante C lo resolvió igual que el primer estudiante. Sin embargo, los tres estudiantes resolvieron el problema agregando $55.

Ahora desde el punto de vista de los estudiantes, para los estudiantes A y B era un problema discreto puesto que pensaban en cada momento como un reloj durante un período de 8 meses. Mientras que para el estudiante C el problema era continuo puesto que el tiempo transcurre continuamente.

En resumen, para Castillo-Garsow (2012), el estudiante A razonó sobre el problema discretamente y presentó solución discreta. El estudiante B razonó discretamente y generó una solución continua. Mientras, que el estudiante C razonó de forma continua y suave; una solución discontinua para un método discreto.

[7] Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. En R. Mayes, R. Bonilla, L. Hatfield, & S. Belbase (Edits.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding,* (Vol. 2, págs. 55-73). Laramie: University of Wyoming., p. 56.

Luego de haber identificado el razonamiento continuo como diferente de una solución continua y un método continuo, Castillo-Garsow (2012) analiza la naturaleza de las acciones mentales involucradas en el razonamiento. Su análisis y discusión se basa en los resultados de un experimento de enseñanza de dos estudiantes de Algebra II, en una escuela pública de secundaria, con el propósito de que los estudiantes comprendieran el crecimiento exponencial. A los estudiantes se les asignó una serie de tareas de modelado financiero, siguiendo la metodología de los experimentos de enseñanza de Steffe y Thompson (2000).

Como resultado de esta experiencia Castillo-Garsow (2012) clasifica dos formas diferentes de pensar sobre el cambio: a) pensar sobre el cambio en pedazos completos (pensamiento robusto). Por ejemplo, pensar en lo ocurre en una hora, luego en un minuto, luego en un segundo y así sucesivamente, y b) pensar en el cambio como un cambio en progreso (pensamiento suave).

Castillo-Garsow (2012) afirma que el pensamiento robusto es inherentemente discreto. Nuestra comprensión se puede construir a partir del pensamiento robusto. La comprensión prefiere enteros (número de fragmentos) y puede (aunque cortando) lograr un cambio en los números racionales, pero el cambio en los números reales (requerido para la continuidad) es más difícil. Mientras que el pensamiento suave, es inherentemente continuo. Al imaginar un cambio en progreso, el cambio está sujeto a la comprensión de la persona acerca del cambio en el universo físico.

Finalmente, Castillo-Garsow (2012) concluye que: El razonamiento cuantitativo continuo es la coordinación de dos tipos de razonamiento: razonamiento continuo y razonamiento cuantitativo. A partir del razonamiento discreto, parece que el razonamiento continuo tiene su núcleo en la imaginación de un cambio en progreso, de la experiencia física del cambio continúo basado en el movimiento del mundo real en espacio y/o tiempo (razonamiento suave).

En el análisis de este referente se presentan claramente los conceptos para caracterizar el razonamiento continuo robusto y discreto, ejemplos de problemas sobre los cuales se realiza la investigación, los participantes y las dificultades tanto para el estudiante como para el investigador cuando se trata de trabajar desde lo continuo.

1.2.5. Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions[8]

Este artículo se analiza conjuntamente con la investigación Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit[9] de los mismos autores. Para Confrey y Smith (1995) las funciones exponenciales y logarítmicas típicamente son presentadas como fórmulas y reglas de correspondencia, especialmente como fórmulas algebraicas y rutinas algorítmicas. Introducen el concepto de división a través de cuatro afirmaciones teóricas de sus trabajos empíricos. En la afirmación 1, la adición repetida es inadecuada para describir muchas situaciones multiplicativas (presentan cuatro ejemplos de situaciones inadecuadas al respecto). En la afirmación 2, existe un modelo primitivo más que la adición repetida que proporciona una base operativa para la multiplicación y la división. En la afirmación 3, la división proporciona una base para el concepto de proporción. La razón es el concepto central que subyace al desarrollo del mundo de la división. En la afirmación 4, el desarrollo de la división y su conexión con la proporción forman la

---

[8] Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions[8]. *Journal for research in mathematics education*, *26*(1), 66-86.
[9] Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics, 26(2), 135–164

base para lo que llaman el mundo de la división, cuya estructura general y trayectoria de desarrollo difieren considerablemente del mundo del conteo que se construye a través de conteos, conteos repetidos, y así sucesivamente (lo que hasta el momento dominaba el currículo, según los autores).

Para los autores estos significados conceptuales tienen sus raíces en la resolución de problemas de números racionales con sus estudiantes, quienes experimentan el obstáculo conceptual en identificar el todo cuando se multiplican fracciones.

En su trabajo precisan o definen los siguientes términos: *Unidad multiplicativa,* Confrey (1991) argumenta que unidad es la invariante por la relación entre un antecesor y un predecesor en una sucesión formada por una acción repetida. En un mundo de *n-divisiones,* la unidad es una división por *n. Reiniciación, e*n la estructura de una división, la reiniciación a uno es un término utilizado para referirse a cómo un estudiante explica cómo y cuándo una acción repetida es preservada. Por ejemplo, en un diagrama de árbol de dos hojas o dos divisiones, después de la primera división existen dos opciones: se puede reiniciar formando una nueva unidad (la acción repetida es preservada) y luego dividirla (volver al caso anterior) en cada división.

Partes multiplicativas. En el mundo de la división se requiere considerar cómo insertar un valor entre dos valores de tal manera que se preserven las relaciones multiplicativas. Esta idea no es nueva (según los autores), aparecía en la matemática griega. En efecto esto hace referencia a la media geométrica, presente en la teoría de las medias desarrollada por la escuela pitagórica. Arquitas de Tarento (400 – 350, A.C.), la define como: si las magnitudes a, x y b están en progresión geométrica: cuando, de los tres términos, el primero es al segundo como el segundo es al tercero (expresado algebraicamente como se hace actualmente

$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$) se denomina media geométrica de a y b. Por su parte Euclides en el libro *VII* sobre teoría de números, define *m-partes de un número n* como ese número que cuando se suman *m veces produce n.*

Razón, los autores señalan que en su trabajo previo (Confrey & Smith, 1994), reconocieron una ambigüedad generalizada del término razón. Los investigadores afirman que percibieron dos conceptos de tasa en confrontación directa mientras los estudiantes trabajaban con la función exponencial. Por ejemplo, un tipo de interés compuesto del 5% anual durante un período de 10 años es considerado por los estudiantes como constante. Sin embargo, cuando los estudiantes analizaron los datos, los estudiantes concluyeron que la función estaba cambiando a un ritmo variable que era más rápido a medida que el saldo crecía.

Confrey y Smith (1995), llegaron a la conclusión de la *tasa multiplicativa* como una constante en la función exponencial (unidad por unidad de tiempo), se obtiene calculando los cocientes entre los valores sucesivos de la variable dependiente por unidad de cambio en los valores de la variable independiente, y *rata aditiva* como un incremento unidad por unidad (unidad aditiva por unidad de tiempo). Por ejemplo encontrando las diferencias en los valores sucesivos para cambios constantes de unidades en los valores t a partir de los cuales se puede hallar una sucesión.

En cuanto a la covariación como alternativa para crear y conceptualizar relaciones funcionales, los autores consideraron dos enfoques: un enfoque de correspondencia y un enfoque de covariación. Ellos afirman que en el currículo prevalece el enfoque de correspondencia con la notación funcional $y = f(x)$, al determinar un único valor de y para algún valor de x dado. Mientras que en enfoque covariacional implica moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinando con los movimientos de x_m a x_{m+1}.

Los autores manifiestan que en sus investigaciones encontraron que el enfoque covariacional es más fácil e intuitivo. Consideran que el enfoque covariacional de función, hace que el concepto de rata o tasa de cambio sea al mismo tiempo más visual y crítico. Ellos afirman también que en sus investigaciones epistemológicas del concepto de razón los llevó a argumentar que el predominio del cálculo en el currículo de matemáticas alienta a los profesores a enfatizar una visión aditiva de la tasa o razón mientras descuidan la legitimidad del enfoque multiplicativo. Muestran ejemplos claros acerca de las vías o caminos recorridos para construir los conceptos de unidad, unidad aditiva, unidad multiplicativa y otros conceptos.

En sus conclusiones argumentan que la descripción de unidad multiplicativa se basa en el lenguaje y las acciones que observaron en sus trabajos con estudiantes y científicos. Creen que esta descripción tiene el potencial de incorporar un rico conjunto de conceptos y lenguaje a sus discusiones matemáticas que no encajan en modelos aditivos y cuantitativos estándar. Argumentan además que una comprensión de las diferentes tasas de cambio debe acompañar al desarrollo homogéneo del concepto de tasa. Según los autores el enfoque multi-conceptual propuesto tiene futuro particular en la preparación de los estudiantes para el cálculo.

Estas dos investigaciones de Confrey y Smith (1994, 1995) añaden nuevos conceptos y enriquecen la fundamentación del pensamiento variacional, una vez más desde el punto de vista covariacional de funciones.

1.2.6. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study[10]

Para Thompson y Carlson (2017), Marilyn Carlson también contribuyó en la construcción teórica de concepto de covariación, como parte de su interés por estudiar las habilidades de los estudiantes en la concepción del concepto de función. Lo hizo diferente a la forma de Confrey y Thompson.

Carlson y sus colegas (2002) siguen la línea de sus trabajos de los años 1998 y 2001. Allí definen el razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se tiene en mente las formas la relación en que cambian con cada una de ellas. También siguen las ideas de Piaget (1970) en cuanto a que utilizan la palabra desarrollo para significar que las imágenes de covariación pueden ser definidas por nivel y los niveles emergen en un orden de sucesión.

En su investigación utilizan el trabajo de Thompson (1994) quien manifiesta que la construcción de la imagen es dinámica y tiene su origen en las acciones corporales y movimientos de la atención, además de ser fuente y portadora de operaciones mentales. Manifiestan que este constructo de Thompson no es comparable con el de Vinner y Dreyfus (1998) para quienes, las imágenes mentales, las representaciones visuales, las experiencias, las propiedades y las impresiones asociadas al nombre de un concepto dado por un individuo se da en un contexto determinado.

[10] Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,*, 352-378. doi:10.2307/4149958

Para Carlson (2002) estos trabajos se centran en las operaciones mentales dinámicas. Por tanto, usan la palabra tasa para hacer referencia a la tasa media de cambio en el caso de imaginar un subintervalo, o a la tasa instantánea de cambio en el caso de imaginar una función en todo su dominio.

Utilizan los resultados de sus trabajos anteriores. Concretamente el marco que describe cinco acciones mentales y su comportamiento. Además de cinco niveles de desarrollo y las acciones asociadas a su comportamiento del razonamiento covariacional cuando los estudiantes responden a tareas de funciones dinámicas.

Acciones mentales: 1) coordinación de los cambios de una variable con los cambios en la otra, 2) coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable, 3) coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra, 4) coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada y 5) coordinación de la razón de cambio instantáneo de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Niveles de desarrollo: 1) coordinación, 2) dirección, 3) coordinación cuantitativa, 4) razón promedio, y 5) razón de cambio instantánea.

Como tarea para el estudiante proponen problemas típicos en este tipo de situaciones consistente en imaginar que una botella se está llenando con agua y pedir al participante que haga un gráfico de la altura en función de la cantidad de agua y el de una escalera en posición vertical que se desliza en una pared. Los participantes fueron cinco estudiantes de alto rendimiento. Para recolectar los datos realizaron seis entrevistas durante dos días.

En las conclusiones Carlson et al. (2002) afirman que los estudiantes mejoraron su habilidad para aplicar el razonamiento covariacional al analizar eventos dinámicos. Afirman también que las tendencias observadas sugieren que este grupo de estudiantes de cálculo tuvo dificultades para construir imágenes de razones de cambio continuas, a pesar de ser estudiantes de alto rendimiento.

Manifiestan su preocupación puesto que en trabajos anteriores se evidencia que la idea de covariación es accesible a estudiantes de escuelas de secundaria y parecía razonable que en estudiantes universitarios también lo fuera.

1.2.7. The parametric nature of two students' covariational reasoning[11]

Paoletti y Moore (2017) están de acuerdo con otros investigadores en que el razonamiento covariacional es fundamental para el aprendizaje de una variedad de tópicos matemáticos. Los autores analizaron el razonamiento covariacional de dos estudiantes, hasta el punto en que los estudiantes se dieran cuenta conscientemente de la naturaleza paramétrica de su razonamiento, haciendo referencia al razonamiento paramétrico y el entendimiento de funciones paramétricas.

Paoletti, T. y Moore, K. C. (2017), citan a Trigueros (2001, 2004) quien describe tres etapas en la comprensión de funciones paramétricas. En la etapa intra-paramética, los estudiantes interpretan los componentes de la representación paramétrica en términos de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ y el parámetro t. En la etapa inter-paramétrica interpretan la representación gráfica; según los autores allí la variable parámetro no es evidente. En la etapa trans-paramétrica los estudiantes

[11] Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. The Journal of Mathematical Behavior, 48, 137-151.

pueden describir la función y sus diferentes representaciones en términos del parámetro involucrado.

Los investigadores en el marco teórico citan a: Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002); Carlson, Larsen y Lesh (2003); Castillo-Garsow (2012); Confrey y Smith (1995); Ellis (2007); Ellis, Ozgur, Kulow, Williams y Amidon (2015); Johnson (2012); Thompson (1994a, 1994b) quienes han hecho aportes en el razonamiento covariacional cuantitativo. Acerca de la caracterización del razonamiento covariacional en estudiantes citan tres fuentes: a) Confrey y Smith (1991, 1994, 1995) quienes lo definieron como la covariación entre cantidades.

Los participantes en el estudio fueron Arya y Katlyn, dos estudiantes voluntarios de secundaria en el sur de Estados Unidos. Arya y Katlyn fueron elegidos por sus habilidades de expresar el pensamiento en voz alta. Los profesores elegidos eran de pre-servicio. El material del curso mantuvo un enfoque explícito en el desarrollo de formas de pensamiento de los estudiantes, compatibles con Carlson, Thompson y sus colegas sobre el razonamiento covariable. Debido a que el interés estuvo centrado en analizar a los estudiantes a medida que progresaban a lo largo del proceso, las tareas que daban incitaban a Arya y Katlyn a representar relaciones entre cantidades variables. Utilizaron una variante del problema de la botella, tarea diseñada inicialmente por el Centro Shell (Swan y Shell Center Team, 1985) y utilizada por varios autores para investigar el razonamiento covariacional en estudiantes.

Los resultados manifiestan que Arya y Katlyn mostraron una actividad consistente con las acciones mentales descritas por Carlson et al. (2002) y el razonamiento sobre magnitudes covariables de acuerdo a lo descrito por Thompson y sus colegas. Es decir, razonar sobre gráficos como trazas emergentes que representan un objeto multiplicativo que combina dos cantidades covariables que constituyen una situación.

Finalmente, Paoletti, T. y Moore, K. C., consideran que las actividades de los dos estudiantes indicaron que se habían dado cuenta explícitamente de la naturaleza paramétrica de su razonamiento al construir y representar relaciones entre cantidades covariables.

1.3. Investigaciones relacionadas con la caracterización del pensamiento variacional

1.3.1. Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional[12]

Caballero y Cantoral (2013) presentan una caracterización de lo que ellos denominan pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar) y la forma en que se desarrolla. El trabajo se realiza intentando buscar las causas que originan dificultades de profesores de bachillerato para desarrollar pensamiento variacional en los estudiantes. El trabajo se realizó en tres fases.

En la primera y segunda fase realizaron un análisis a trabajos en educación matemática donde se incorpora el Pylvar. Tomaron como referencia las estrategias variacionales de Salinas (2003); a) comparación*, a*sociada a la acción de establecer diferencias entre estados, b) seriación*,* análisis de estados sucesivos estableciendo relaciones entre ellos, c) estimación*,* conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo, y d) predicción, asociada a la acción de poder anticipar un

[12] Caballero, Mario; Cantoral, Ricardo (2013). *Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1197-1205). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de estados previos. Los autores afirman que resultados de la primera fase mostraron que las preguntas utilizadas dependían del tipo de contexto donde se desarrolla la situación (gráfico, numérico, analítico).

Para los autores los resultados de la segunda fase, les permitió hacer una caracterización del Pylvar, con los siguientes elementos: a) situación variacional, conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales, precisando establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio, b) argumentos variacionales, argumentos que recurren al cambio y a la cuantificación, c) códigos variacionales, expresión oral o escrita de la variación y el cambio, d) estructura variacional específica, como herramientas, procesos y procedimientos del ámbito matemático o científico que permiten abordar y explicar el cambio y la variación, e) estrategia variacional, actuar y razonar en una situación variacional, f) Comparación, establecer diferencias entre estados de cambio, g) seriación, comparación entre estados sucesivos estableciendo relaciones entre ellos, h) predicción, anticipación de un comportamiento, estado o valor, i) estimación, conociendo el comportamiento en estados previos se proponen nuevos estados, j) tareas variacionales, actividades o acciones a realizar ante una situación variacional, k) tabulación como variación numérica, observar y analizar comportamientos luego de tabular datos, l) análisis de datos en tablas numéricas, búsqueda de patrones y relaciones en datos presentados tubularmente, m) construcción de gráficas con la variación como punto de referencia, apoyadas en el análisis de variaciones, y n) análisis gráfico con la variación como punto de referencia, búsqueda de patrones, relaciones, tendencias y valores específicos sobre una situación gráfica, haciendo uso o no de la tecnología. Como resultado de la tercera fase presentan todos estos elementados relacionados en un esquema gráfico, que se muestra en la Figura 1.

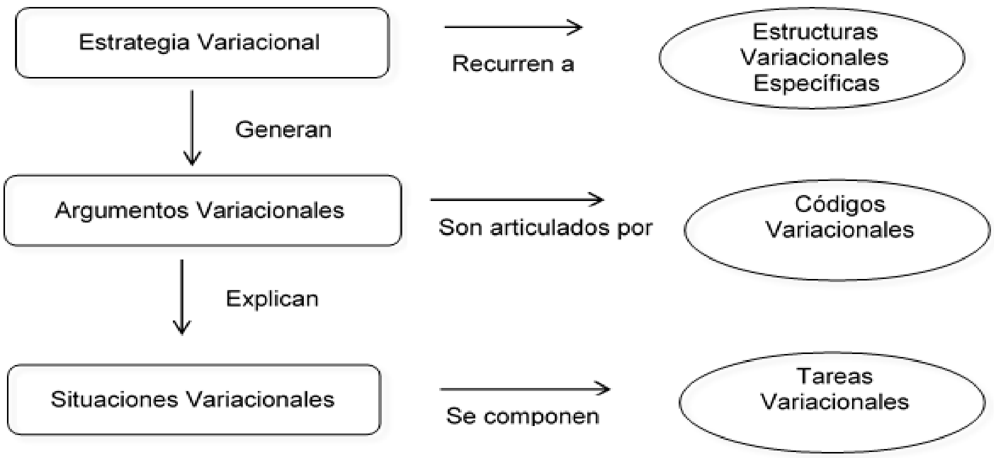


Figura 1. Modelo de interacción de los elementos del Pylvar. Adaptada de Caballero, M. y Cantoral, R. (2013).

Esta investigación y las de otros autores que los siguen están estrechamente relacionadas con las teorías socio-epistemológicas con la necesidad de ligar la matemática con las prácticas sociales y culturales. Para los autores la gráfica esquematiza la forma en que se desarrolla el pensamiento variacional que involucra varios aspectos que relacionan el uso sistemático e interactivo del Pylvar. De modo que para desarrollar el pensamiento variacional se requiere el uso de todos sus elementos de manera conjunta y no aislada.

1.4. Investigaciones relacionadas con el pensamiento variacional, razonamiento variacional, planteo y resolución de problemas y profesores de matemáticas en formación

1.4.1. Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions[13]

El trabajo de Yemen-Karpuzcu, Ulusoy, y Işıksal-Bostan (2017) en Turquía, estuvo centrado en investigar las habilidades de razonamiento covariable de los futuros profesores de matemáticas de escuela media. La tarea estuvo centrada sobre eventos funcionales dinámicos que involucran dos cantidades que cambian simultáneamente en un proceso individual y también en un proceso entre parejas.

Fundamentan teóricamente su investigación en los trabajos de Thompson, P. (1994), Carlson (1998), Confrey y Smith (1991, 1995) como referentes de situaciones dinámicas funcionales. Se basan también en trabajos de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, (2002); Carlson, Oehrtman y Engelke (2010), Saldanha y Thompson, P. (1998), Confrey y Smith (1994), Johnson (2012), Strom (2006), entre otros.

Las preguntas científicas para orientar su estudio fueron: ¿Cómo razonan individualmente los futuros profesores de matemáticas de la escuela media sobre la coordinación de variables en situaciones funcionales dinámicas que implican dos cantidades que cambian simultáneamente?, ¿en qué medida los futuros profesores de matemáticas de secundaria razonan sobre el papel de las variables en

[13] (Yemen-Karpuzcu, Ulusoy, & Işıksal-Bostan, 2017)*Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(1), 89–108.*doi:10.1007/s10763-015-9668-8

situaciones funcionales dinámicas que involucran a dos personas simultáneamente, cambiando las cantidades durante el proceso de interacción entre compañeros?, ¿cómo influye ese proceso de interacción entre compañeros en el razonamiento covariacional de los maestros?

Utilizaron un enfoque cualitativo con un diseño de estudio de caso. La población estuvo conformada por futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria matriculados en el tercer año de su programa de formación. El diseño fue un estudio de caso. El caso se refería principalmente a la prospectiva de las habilidades de razonamiento covariable de los profesores en un proceso de interacción con sus compañeros. Las tareas se basaron en el problema de las botellas. El material consistía en seis botellas (diferentes formas) y los gráficos que representan el cambio de la altura en función del volumen. Se les pedía a los participantes que relacionaran las botellas con sus graficas justificando el porqué. Se añadieron dos botellas más y se pedio que realizaran su gráfica.

El análisis de información se hizo utilizando las cinco acciones mentales propuestas por Carlson et al. (2002). Los resultados individuales mostraron que el futuro maestro usaba implícitamente la cantidad de tiempo como una variable independiente en lugar del volumen, mientras coordinaba la altura y el volumen en los gráficos. Entre tanto otros interpretaron mal los gráficos de altura y volumen cambiando el papel de las variables dependientes e independientes. Al trabajar en parejas se beneficiaron del proceso en términos de desarrollar una conciencia propia y también la mejora en la comprensión de las cantidades variables por parte de las parejas. Tuvieron también la oportunidad de desarrollar sus conocimientos sobre la conexión entre las variables, la tasa de cambio y la pendiente. El trabajo en parejas proporcionó explicaciones destacadas para su razonamiento sobre la tarea superiores a sus respuestas individuales.

1.4.2. Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base[14]

Tallman & Frank, (2020) reportan hallazgos de un estudio sobre las formas matemáticas de pensar según Harel (2008) como un componente de la base de conocimientos profesional del docente. Específicamente, analizaron el papel del razonamiento cuantitativo siguiendo un modelo teórico de cantidad basado en el razonamiento de aritmética y algebra, propuesto por Smith y Thompson, en profesores de matemáticas. El objetivo estuvo centrado en explorar hasta qué punto la forma de pensar de los profesores en matemáticas constituye un componente esencial de su base de conocimientos profesionales.

El marco teórico en que se fundamenta el trabajo es el razonamiento cuantitativo de Thompson, P. (1990, 1991, 2011) donde se conceptualizan situaciones en términos de cantidades y cantidades relacionadas. Para realizar su trabajo examinaron y analizaron 37 videos en cuanto a la calidad de la instrucción y coherencia de un profesor de matemáticas (David, con 15 años de experiencia, profesor de álgebra en una gran escuela secundaria suburbana en el suroeste de los EE.UU) cuando razona cuantitativamente en la medición de ángulos.

[14] Tallman, M., & Frank, K. (2020). Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*(1), 69-95.

David usó el currículo de Pathways Algebra II (Carlson et al. 2013), curso diseñado para apoyar a los estudiantes en el desarrollo de la confianza, la capacidad y el significado de sus ideas de razonar cuantitativa y covariacionalmente.

El análisis reveló que los significados inconsistentes que el maestro transmitió fueron ocasionados por su falta de conciencia de las posibilidades conceptuales del razonamiento cuantitativo de los estudiantes, concretamente sobre su capacidad para construir entendimientos coherentes y significativos de la medición de ángulos. Por lo tanto, los hallazgos apoyan la noción de Harel de que las formas de pensar matemáticas de los profesores constituyen un componente esencial de su conocimiento especializado de los contenidos.

1.4.3. Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers[15]

Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua, y Byerley (2017), investigaron el razonamiento variacional en 487 profesores de Estados Unidos y Corea del Sur. Citan a Copur-Gencturk (2015), Zaslavsky (1994), y Thompson (2013) quienes afirman que la forma en que los profesores entienden una idea matemática es un factor importante en la comprensión matemática que los estudiantes se forman o construyen realmente. Cuanto más coherentemente entiendan los maestros una idea que enseñan, mayores serán las oportunidades de los estudiantes de aprender esa idea de manera coherente. Por el contrario, cuanto menos coherentemente entienden los profesores una idea que enseñan, menos oportunidades tienen los estudiantes de aprender esa idea coherentemente.

---

[15] Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 95–111. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2017.08.001

Reconocen la importancia del razonamiento covariacional fundamental para la comprensión en los estudiantes de ideas como proporción, razón de cambio y linealidad, trigonometría, crecimiento exponencial, funciones en una y dos variables. El marco teórico se basa en las operaciones mentales de la teoría de Thompson (1993, 1994c, 2011). Citan también definiciones de Saldanha y Thompson, P. (1998, 2003), Stalvey y Vidakovic (2015), Thompson y Carlson (2017).

Las preguntas que orientaron la investigación fueron: a) ¿Hasta qué punto los profesores de matemáticas de secundaria de las muestras razonan covariacionalmente sobre fenómenos dinámicos que presencian?, b) ¿Existen diferencias entre los profesores de la muestra de Estados Unidos y la de Corea del Sur en cuanto a la prevalencia del razonamiento covariable?, y c) ¿Hasta qué punto es necesario crear un objeto multiplicador de atributos de dos cantidades para razonar covariacionalmente?

La muestra estuvo conformada por 366 profesores de matemáticas de Korea del Sur y 121 de Estados Unidos. La investigación tuvo un enfoque cuantitativo. La tarea se les presentó mediante una animación que muestra los valores de dos magnitudes variables u, v sobre ejes en un plano cartesiano junto con una petición de que dibujen un gráfico del valor de u en relación con el valor de v. Clasificaron los bocetos de los profesores sobre dos criterios independientes: (1) donde colocaron su punto inicial, y (2) la forma general de su gráfico independientemente del punto inicial. Los hallazgos muestran que existen claras diferencias en ambos criterios entre los profesores de EE.UU. y Corea del Sur, lo que sugiere que el razonamiento covariable es más prominente entre los profesores de secundaria de Corea del Sur que entre los profesores de secundaria de EE.UU. Los resultados también sugieren fuertemente que para expresar gráficamente la covariación es necesario formar un objeto multiplicativo que una los valores de las cantidades.

1.4.4. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research[16]

Cai y Hwang (2019) afirman que los profesores son los directos responsables y principales artífices de cualquier innovación o mejora educativa. Los autores consideran también una necesidad crítica el investigar cómo los maestros aprenden a usar el planteo de problemas en aula de clase.

Argumentan también que utilizan los términos problema y tarea de una manera amplia en un marco de definición que les permita incluir cualquier pregunta matemática y cualquier tarea matemática que se pueda realizar en función de la situación del problema.

Manifiestan la importancia y el poder que puede tener el incluir el uso del planteo de problemas en el aula. El desarrollo en los estudiantes de la capacidad para plantear problemas revela ideas útiles sobre el pensamiento de los estudiantes. Para Cai y Hwang (2019), el conocimiento que tenga el profesor sobre el pensamiento matemático de los estudiantes debe tener un impacto sustancial en el aula.

Consideran que no sólo es necesario definir precisamente un problema matemático que vale la pena. Que su importancia varía dependiendo del propósito y del contexto. Citan a Silver et al. (1996) y Leung y Silver (1997) quienes encontraron

[16] Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing:Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research

que un número considerable de problemas que planteaban los profesores no eran matemáticos, y muchos no eran problemas de ningún tipo, a pesar de las orientaciones específicas suministradas cuando se les pidió que plantearan problemas. Afirman que esto se puede mejorar ayudando a los profesores a explorar el planteo de problemas desafiantes relacionándolos con la resolución en contextos retadores. Otro aspecto fundamental en esta tarea es el conocimiento base que tienen los profesores.

Comparten también diversas estrategias acerca de cómo investigadores del tema las han utilizado para ayudar a los profesores a plantear problemas en el aula de clase con sus estudiantes.

Finalmente consideran que, aunque hay dificultades para que la integración del planteo de problemas sea efectiva, hay una necesidad crítica de investigar cómo los maestros aprenden a usar el planteo de problemas para enseñar matemáticas en el aula. Afirman que hay hallazgos suficientes en que el planteo de problemas ayuda a: a) comprender el pensamiento de los alumnos, b) desarrollar competencias matemáticas de los profesores, y c) desarrollar habilidades en los profesores para que plantean mejores problemas. Las diversas perspectivas internacionales ofrecen una visión amplia de las formas de integrar la Mathematical Problema Posing (MPP) en las aulas en general y utilizar el planteo de problemas para el desempeño profesional de los profesores de matemáticas.

Conclusiones del capítulo

Hasta el momento de la escritura del presente informe y la literatura consultada (no sólo la que aparece en este capítulo) y analizada, se puede precisar que: para algunos investigadores como Jere Confrey, Guershon Harel, Patrick W. Thompson y quienes siguen sus trabajos el pensamiento variacional es una forma de razonar variacional y covariacionalmente. Mientras que para Erick Smith y James Kaput es pensamiento funcional y representacional. Entre tanto para Cantoral y sus colegas debe ser lenguaje y pensamiento variacional.

El constructo o concepto que describe la naturaleza del pensamiento variacional ha sido caracterizado desde varias vertientes y contextos. De allí se evidencian dos raíces, una desde el pensamiento y otra desde el razonamiento como forma de pensar.

Quienes investigan y trabajan en la línea del razonamiento variacional y covariacional se orientan por los trabajos de Jere Confrey, Patrick W. Thompson, Guershon Harel, Marilyn Carlson, Luis A. Saldanha, Castillo-Garsow, Erick Smith, Sally Jacobs, Edward Coe. Los investigadores que siguen estas líneas consideran que estos autores han hecho aportes significativos en el desarrollo y construcción de la teoría relacionada con el razonamiento variacional y covariacional.

Entre las propiedades de los conceptos que definen la naturaleza del razonamiento como forma de pensar. Confrey (1991, 1994, 1995) caracteriza la covariación en términos de la coordinación de los valores de dos variables a medida que ellas cambian. Mientras que Thompson (1990, 1994, 2011, 2017) caracteriza la covariación en términos de conceptualizar los valores de las cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como variables que cambian simultáneamente.

Se destaca también el trabajo de Castillo-Garsow (2012) quien concluye en sus trabajos que el razonamiento cuantitativo continuo es la coordinación de dos tipos de razonamiento: razonamiento continuo (robusto, suave) y razonamiento cuantitativo.

Por su parte para Cantoral y sus seguidores el pensamiento variacional está estrechamente relacionado con las teorías socio-epistemológicas con la necesidad de ligar la matemática con las prácticas sociales y culturales. Para James Kaput el pensamiento es funcional y para Erick Smith es representacional.

En lo que respecta a las formas, tareas y vías para describir la naturaleza del pensamiento variacional son variadas. Las tareas para los participantes siempre son problemas relacionados con la aritmética, álgebra, funciones, límites y continuidad en algunos casos. Los participantes en la gran mayoría son estudiantes, en casos escasos son profesores en servicio o en pre servicio. Las técnicas para recolectar la información son escritas acompañadas de entrevistas, de allí se infiere que todas las investigaciones tienen un enfoque cualitativo.

Se destacan varios aspectos interesantes. Thompson P. W. manifiesta la importancia de la variación en educación matemática y la define desde su perspectiva. Castillo-Garsow (2012) es de los pocos investigadores que caracteriza el razonamiento como continuo (robusto y suave) y discreto. Castillo-Garsow (2012) manifiesta también su preocupación por la dificultad de caracterizar el razonamiento desde la continuidad; por ejemplo, en los números reales.

No se precisa la caracterización de resolución de problemas como un proceso. Aunque, sin embargo, Thompson afirma que el razonamiento covariacional sí es un proceso que puede durar un lapso de tiempo corto e incluso a lo largo de toda la vida. Tampoco se evidencia caracterizaciones del pensamiento variacional desde problemas y contextos que involucren lo discreto.

En lo referente a investigaciones que involucren y relacionen el razonamiento, el pensamiento variacional, el planteo de problemas y la teoría fundamentada, sin ser contundente el autor de este trabajo manifiesta que son escasas. Ocurre lo mismo con la caracterización del pensamiento variacional desde la teoría fundamentada. La caracterización de la naturaleza siempre se ha hecho desde los investigadores y no desde los datos que emergen de los participantes.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

Como la investigación se centra en caracterizar los procesos del pensamiento variacional cuando los participantes resuelven y plantean problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas, parece no tener sentido empezar con definiciones a *priori* de lo que es pensamiento matemático.

Glaser y Strauss (1967, 1978, 2017), afirman que el primer paso para obtener la sensibilidad teórica es entrar con el menor número posible de ideas predeterminadas. Sensibilidad teórica se toma en el sentido de la capacidad y visión teórica del investigador en un área determinada haciendo uso significativo de sus ideas, para ir de lo sustantivo a lo formal.

Siguiendo este marco, se enuncian apartes de algunas teorías que propician una mirada más amplia relacionada con el pensamiento matemático donde está inmerso el pensamiento variacional, la filosofía de la matemática, el planteo y resolución de problemas, aspectos que se convirtieron en fuente de inspiración de la propuesta y desarrollo de la investigación.

Se exponen, además, otros elementos como el ciclo de enseñanza de la matemática y los experimentos de enseñanza, que dan soporte a la estructura de las actividades didácticas. Así como, el papel que juega la Teoría de Números y la formación de profesores de matemáticas a nivel de escuela de la Universidad Francisco de Paula Santander y por su puesto algunas las definiciones de algunos elementos propios de la Teoría Fundamentada.

2.2. Pensamiento matemático

Siguiendo a Ginsburg (1981) en el área de educación matemática no tiene sentido definir pensamiento matemático. Por el contrario, debe inducirse al estudiante en procesos de descubrimiento y a partir de allí determinar características del desarrollo del pensamiento y sus propiedades. Sin embargo, se introducen dos definiciones y propiedades que caracterizan el pensamiento matemático con la intención de dar una mirada más amplia al trabajo de investigación.

2.2.1. Pensamiento matemático según Leone Burton

Siguiendo a Leone Burton (1984) y Falk de Losada (1994), *"El pensamiento es el medio utilizado por los humanos para mejorar su comprensión de, y ejercer algún control sobre, el medio que los rodea"*[17].

Burton (1984) hace una clara distinción entre pensamiento matemático y el cuerpo del conocimiento, tanto en contenido como en métodos conocido como matemáticas. Afirma que el pensamiento matemático es pertinente para cualquier contenido, pero no necesariamente su dominio está en problemas de naturaleza matemática, pero es allí donde se develan mejor sus características.

Para Falk (1994) el modelo de Burton identifica los medios particulares con los cuales la matemática mejora la comprensión y extiende el control del ser humano sobre el medio que lo rodea, lo que da origen a un modelo basado en las operaciones, los procesos y la dinámica del pensamiento matemático. El pensar requiere que estos elementos actúen por alguna vía y los métodos o formas en que se actúa se llaman operaciones del pensamiento matemático.

[17] Falk de Losada, M. (1994) Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas*; *Vol. 1, núm. 1 (*1994); 39-59, p. 40.

Las operaciones del pensamiento matemático. Para Burton (1984) las personas piensan acerca de algo. Una idea, una observación, un acontecimiento son estímulos para empezar a pensar. Estos eventos proporcionan los elementos sobre los cuales opera el pensamiento. Una de las tareas en que se centra el modelo es separar el comportamiento que se deriva del pensamiento matemático de aquél que es producto de la aplicación del conocimiento o destrezas matemáticas Falk (1994).

Para Burton (1984) el estudio de las relaciones es fundamental cuando se hace matemáticas. Además, los elementos pueden relacionarse de muchas maneras entre ellos mismos o con otros elementos, por ejemplo, ordenando, haciendo correspondencias o formando clases de equivalencia. Por otro lado, combinar elementos o reemplazarlos unos por otros puede llevar de un estado a un nuevo estado.

Los procesos de pensamiento matemático*. El modelo devela cuatro procesos fundamentales en toda actividad matemática: a) especializar, b) conjeturar, c) generalizar y d) convencer.* A continuación, se describe cada uno de ellos. Traducción tomada de Falk (1994):

"Especializando: Frente a un problema o interrogante un medio poderoso de explorar su significado es el de examinar casos particulares. Esto es la clave para una aproximación inductiva de aprendizaje y aparece naturalmente desde edades tempranas. Cada caso particular proporciona la oportunidad de manipular objetos que son concretos para el que piensa, sean físicos o ideales.

Conjeturar: después de examinar suficientes ejemplos, surge casi automáticamente una conjetura acerca de los nexos que los relacionan. Por medio de la conjetura, el *sentido de una regularidad subyacente se explora. La conjetura dirige y orienta el pensamiento hacia ciertos aspectos de la experiencia que se adelanta.*

Generalizar: el reconocimiento de patrones o regularidades desemboca en una generalización. Los enunciados generalizados son los elementos básicos que utilizan los aprendices para crear orden y significado entre una cantidad abrumadora de datos sensoriales, y el comportamiento se basa en tales generalizaciones.

Convencer: Convencer es mucho más que verificar, es cuestionar hipótesis o supuestos, dudar y sondear la generalización hasta llegar a producir una demostración. Una demostración es vista, así como un intento por producir un argumento convincente. Para el pensamiento matemático más desarrollado, sin embargo, el argumento es deducido con ayuda de la lógica de un conjunto de axiomas e independiente de pruebas empíricas. La demostración es la principal diferencia entre la actividad matemática y la de otras ciencias"[18].

La dinámica del pensamiento matemático. Se inicia el proceso de pensamiento matemático cuando se encuentra un elemento que produce suficiente sorpresa o curiosidad para impulsar su exploración por medio de la manipulación. El elemento puede ser un objeto físico, un diagrama, una idea o un símbolo, pero ha de encontrarse en un nivel que es concreto para el pensador, que inspira confianza y que es interpretable.

[18] Falk de Losada, M. (1994) Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas*; *Vol. 1, núm. 1 (*1994); 39-59, p. 41.

2.2.2. Pensamiento matemático según Guershon Harel

El trabajo de Harel, G. y L. Sowder (2005) se fundamenta en la premisa: las acciones mentales de los seres humanos, observables o inferidas, son inducidas y gobernadas por sus visiones generales del mundo y viceversa. Las visiones generales de los seres humanos sobre el mundo están formadas por estas acciones.

Esta visión los lleva a distinguir entre dos categorías de conocimiento: formas de entender y formas de pensar, que surgen a partir de tres actividades matemáticas interrelacionadas: 1) la comprensión de contenidos matemáticos, como cuando se leen textos o se escuchan a otros, 2) Al realizar una investigación, como cuando se resuelve un problema y 3) al establecer la verdad, como cuando se justifica o se refuta.

Para Harel y Sowder (2005) la expresión forma de entender transmite el razonamiento que se aplica en una situación matemática local. La expresión forma de pensar, se refiere a lo que gobierna las formas de entender de la persona, y así expresa el razonamiento que no es específico de una situación particular sino de una multitud de situaciones. Las formas de pensar de una persona incluyen al menos tres categorías interrelacionadas: creencias, enfoques de resolución de problemas y esquemas de pruebas.

El DNR de Harel (2008a, 2008b, 2010) se fundamenta en tres categorías: 1) premisas, suposiciones explícitas subyacentes a los conceptos y afirmaciones del DNR, 2) conceptos, referidos como determinantes de DNR y 3) principios de enseñanza, que afirman el efecto potencial de las acciones de enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes. La Figura 2 muestra un esquema del DNR.

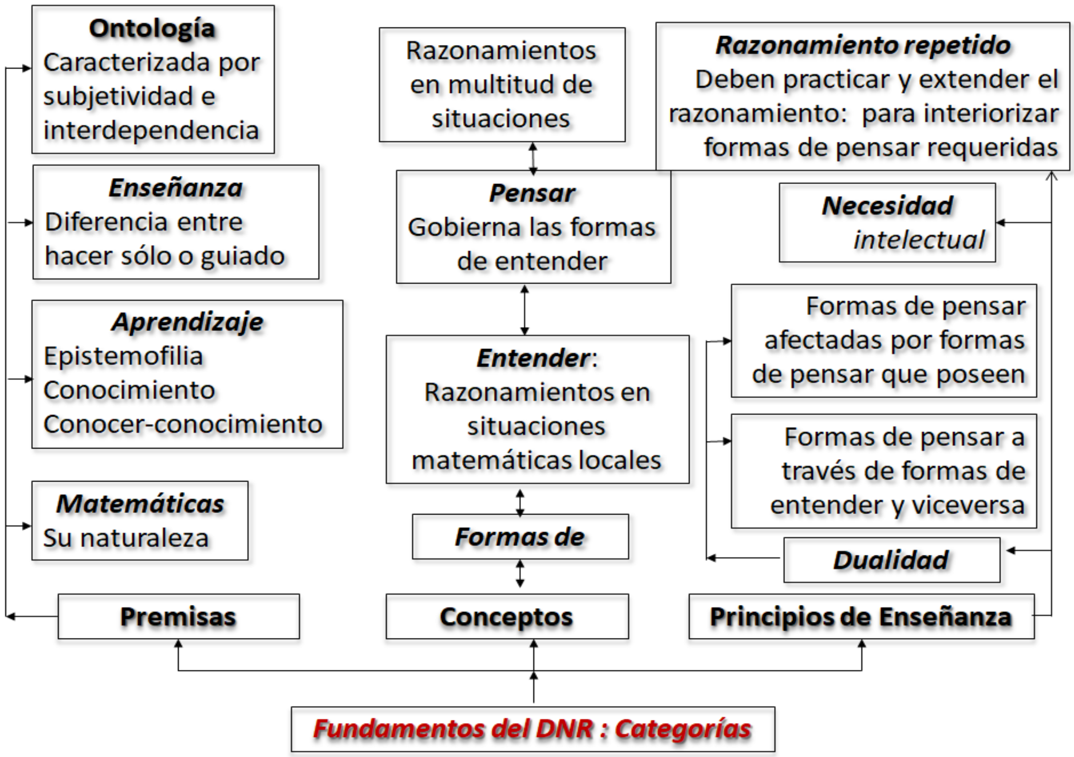


Figura 2. Modelo DNR Harel, G.

Los actos mentales pueden estudiarse observando las declaraciones y acciones de las personas. Las declaraciones y acciones de una persona pueden significar productos cognitivos de un acto mental llevado a cabo por la persona. Tal producto es la forma de entender de la persona asociada con ese acto mental. Las observaciones repetidas de las formas de entender asociadas con un acto mental dado pueden revelar ciertas características cognitivas del acto. Tal característica se conoce como una forma de pensar asociada con ese acto.

Una forma de entender es un producto cognitivo particular de un acto mental realizado por un individuo. Por ejemplo, al ver el símbolo 3/4, se puede llevar a cabo el acto de interpretación para producir un significado para este símbolo. La interpretación que la persona produce es su forma de entender el símbolo. Una forma de pensar, por otro lado, es una característica cognitiva de un acto mental.

La resolución de problemas. En cuanto al acto mental de la resolución de problemas, la solución real, correcta o errónea, que se proporciona a un problema es una forma de entender porque es un producto cognitivo particular del acto de resolución de problemas de la persona. Para Harel el enfoque de resolución de problemas es una forma de pensar. Los actos de interpretación, generalización y prueba, por ejemplo, son esencialmente actos de resolución de problemas.

2.3. El cuasi empirismo de Imre Lakatos

Para Lakatos (1978), durante mucho tiempo conocimiento significó conocimiento probado; probado ya sea por el poder del intelecto o por la evidencia de los sentidos. Según Lakatos, Kuhn también rechazó la idea de que la ciencia crezca mediante acumulación de verdades eternas. Cuando Lakatos habla de una metodología de los programas de investigación científica analiza el problema de la evaluación objetiva del crecimiento científico en términos de cambios progresivos y regresivos de problemáticas para series de teorías científicas.

Para este autor el crecimiento de la ciencia se caracteriza por cierta continuidad que relaciona a sus miembros. Esta continuidad se origina en un programa de investigación genuino concebido en el comienzo. El programa consiste en reglas metodológicas: algunas rutas de investigación deben ser evitadas (heurística negativa), mientras que caminos que deben seguirse (heurística positiva). Lakatos estaba interesado en programas de investigación científica particular no en la ciencia como un todo.

La heurística negativa como el núcleo firme del programa. Todos los programas de investigación científica pueden ser caracterizados por su núcleo firme. Para Lakatos (1978), *"La heurística negativa impide que se aplique el modus tollens en este* *núcleo firme. Por el contrario, debemos utilizar nuestra inteligencia para incorporar e incluso inventar hipótesis auxiliares que formen un cinturón protector en torno a ese centro, y contra ellas debemos dirigir el modus tollens. El cinturón protector de hipótesis auxiliares debe recibir los impactos de las contrastaciones y para defender al núcleo firme, será ajustado y reajustado e incluso completamente sustituido. Un programa de investigación tiene éxito si ello conduce a un cambio progresivo de problemática; fracasa, si conduce a un cambio regresivo"*[19].

La heurística positiva. La construcción del cinturón protector y la autonomía relativa de la ciencia teórica. Según Lakatos (1978), la heurística positiva consiste en "un conjunto, parcialmente estructurado, de sugerencias o pistas sobre cómo cambiar y desarrollar las versiones refutables del programa de investigación, sobre cómo modificar y complicar el cinturón protector refutable" (p. 69) e impide que el científico se pierda en el mar de las anomalías. Por tanto, y en general, la heurística positiva es más flexible que la heurística negativa. Más aún, sucede en *ocasiones "que cuando un programa de investigación entra en una fase regresiva, una pequeña revolución o un cambio creativo de su heurística positiva puede impulsarlo de nuevo hacia adelante*"[20].

Lakatos afirma que se pueden evaluar los programas de investigación incluso después de haber sido eliminados, en razón de su poder heurístico: ¿cuántos hechos produjeron?, ¿cuán grande era su capacidad para explicar sus propias refutaciones en el curso de su crecimiento?

---

[19] Lakatos, I. (1978). *The Metodology of Scientif Reaseerch programmes-Philosophical Papers* (Vol. 1). (J. Worrall, & G. Currie, Edits.) New York, USA: Cambridge University Press., p. 66

[20] Lakatos, I. (1978). *The Metodology of Scientif Reaseerch programmes-Philosophical Papers* (Vol. 1). (J. Worrall, & G. Currie, Edits.) New York, USA: Cambridge University Press., p. 71.

Lakatos, I., & Alcañiz, J. M. (1982) proponen el programa empirista; su idea se basa en plantear un conocimiento conjetural siempre dinámico.

"Un sistema deductivo si las proposiciones de la base (enunciados básicos) constan de términos perfectamente bien conocidos (términos empíricos) y existe una posibilidad de inyección de valores de verdad infalibles en esa base, tal que, si el valor de verdad es falso, fluye hacia arriba por los canales deductivos (explicaciones) e inunda todo el sistema (si el valor de verdad es verdadero, no existe ninguna corriente de valor de verdad en el sistema)"[21].

2.4. Planteo y resolución de problemas

2.4.1. La resolución de problemas

Diversos autores han trabajado y proponen estrategias, etapas, ciclos, etc. para la resolución de problemas. Desde la heurística el más importante ha sido George Polya con su reconocida obra How to Solve it, Polya (1945) sugirió cuatro fases como marco para la resolución de problemas: entender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás en el trabajo.

Por su parte Schoenfeld, (2016) sugiere cinco dimensiones que intervienen directa, dinámica e inter-relacionadamente: 1) Dimensión cognitiva, base de conocimientos, 2) Heurísticas, estrategias en la resolución de problemas, 3) Dimensión meta cognitiva, monitoreo y control (auto-regulación), 4) Dimensión afectiva, creencias y afectos y 5) Práctica matemática. De la misma manera propone acciones de enseñanza: antes, durante y después en la resolución de problemas.

---

[21] Lakatos, I., & Alcañiz, J. (1982). La crítica y la metodología de programas científicos de investigación. *Instituto de Lógica y Metodología, Facultad de Filosofía. Universidad de Valencia*. P. 18.

Mason, Burton y Stacey (2010) caracterizan la resolución de problemas desde dos criterios. Primero, por dos procesos de pensamiento, la especificación y la generalización. Segundo por tres fases: entrada, ataque y revisión.

En la fase de entrada, el potencial solucionador de problemas se familiariza con el contexto del problema. Conociendo el problema y jugando con las ideas, por ejemplo, a través de la particularización, especificando claramente lo que sabe, lo que desea, y considerando cuidadosamente lo que puede hacer.

Esta fase puede ser exitosa, pero a menudo puede conducir a un callejón sin salida aparente en el que el individuo debe revisar lo que ha hecho hasta el momento y volver a la fase de entrada para considerar un nuevo ataque. Mason, Burton y Stacey (2010) afirman que una vez que algún tipo de solución se logra, el estado de ánimo cambia nuevamente a una revisión más elaborada (comprobar los resultados para asegurarse de que no se ha cometido ningún error). Comprende aprender de estrategias que fueron útiles en otras ocasiones y luego estar preparado para ampliar o llevar el problema a otros niveles de sofisticación, volver a iniciar el ciclo de entrada a un nivel más sofisticado.

2.4.2. El planteo (invención, formulación) de problemas

En los últimos años, el interés por incorporar el planteo de problemas en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos ha aumentado considerablemente en investigadores y profesores de matemáticas.

Esto se debe a un creciente reconocimiento de que las actividades inmersas en el planteo de problemas pueden: promover el desarrollo conceptual de los estudiantes, mejorar su capacidad de comprensión, fomentar su capacidad de razonar y de comunicarse matemáticamente, además de despertar su interés y curiosidad (Cai, Hwang, & Silber (2015).

Según Cai y Hwang (2019), Mathematical Problema Posing (MPP), *"es el proceso de formular y expresar un problema dentro del dominio de las matemáticas"*[22]. Entre tanto Cai, Hwang, Jiang y Silver (2015), afirman que: *"Por planteo de problemas en la educación matemática, nos referimos a varios tipos de actividades relacionadas que implican o apoyan a los profesores y estudiantes que formulan (o reformulan) y expresan un problema o tarea basado en un contexto particular (al que nos referimos como el contexto del problema o situación del problema)"*[23].

Cai y Hwang (2019) y Cai et al. (2015) caracterizan el planteo de problemas como un conjunto de tres actividades intelectuales específicas: a) los propios profesores plantean problemas matemáticos sobre la base de situaciones determinadas o de expresiones o diagramas matemáticos, b) los profesores predicen los tipos de problemas que pueden plantear los estudiantes sobre la base de situaciones determinadas o de expresiones o diagramas matemáticos, y c) los profesores diseñan tareas de planteo de problemas matemáticos para que los estudiantes planteen problemas.

Brown y Walter (2005) por su parte proponen el esquema WIN, "que pasa si no", que se basa en los cambios en los datos, generando espacios para hacer conjeturas y producir nuevas ideas, ideas sobre los resultados de los problemas.

---

[22] Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing:Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research, p. 2.

[23] Cai J., Hwang S., Jiang C., Silber S. (2015) Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: Singer F., F. Ellerton N., Cai J. (eds) Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education. Springer, New York, NY, p. 2.

2.5. Las actividades de enseñanza de la matemática

2.5.1 Ciclo de enseñanza de la matemática

En el contexto internacional varios autores hacen referencia a experimentos de enseñanza para referirse a actividades de enseñanza. Estos experimentos de enseñanza comparten varios elementos con lo que Simon (1995) denomina ciclo de enseñanza de la matemática, caracterizado por: los conocimientos del profesor, la trayectoria hipotética de aprendizaje y la valoración del conocimiento del estudiante.

Para Simon (1995), Simon y Tzur (2004) un experimento de enseñanza está conformado por una serie de tareas cuidadosamente diseñadas con el objetivo de fomentar una actividad en el estudiante cuyo resultado debe ser la construcción de significado de uno o varios conceptos nuevos. El análisis de las actividades en los contextos o entornos en que se implementan las tareas muestran evidencias del proceso de desarrollo del aprendizaje del estudiante.

Simon (1995) afirma que los objetivos, las actividades de aprendizaje y el aprendizaje de los estudiantes conforman las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como un componente fundamental del ciclo del aprendizaje de la matemática. Además, los conocimientos de las matemáticas del profesor, sus teorías sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y las hipótesis que él genera acerca del aprendizaje de los estudiantes en los entornos implementados son cruciales en el ciclo. La Figura 3 muestra el ciclo completo de enseñanza de la matemática.

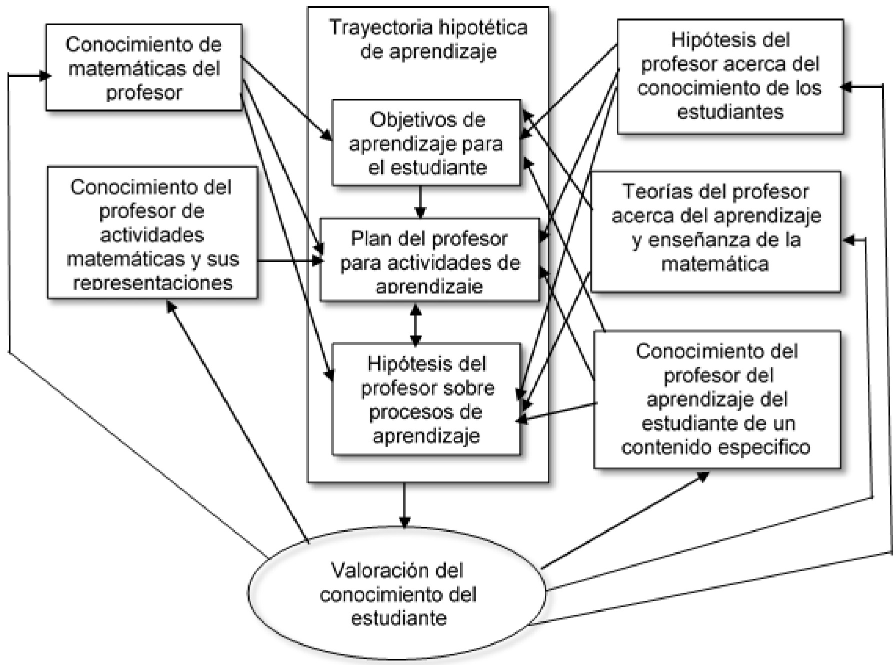


Figura 3. Ciclo de enseñanza de la matemática. Simon (1995)

La visión constructivista de Simon (1995) requiere que en la enseñanza de las matemáticas el modelo deba tenerse en cuenta y adaptarse a las actuaciones de los estudiantes. Por tanto, las actividades de enseñanza deben guiarse por unos objetivos de aprendizaje para el estudiante mediante diversas actividades y tareas cuidadosamente elaboradas.

2.5.2 El trabajo en el diseño de un experimento en educación

Siguiendo Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble (2003), Gravemeijer (2004) y Steffe y Thompson, P. (2000), un experimento de enseñanza está compuesto por un ciclo de investigación en tres fases:

Fase 1. Diseño y planificación de las actividades (diseño preliminar). Formado por tres componentes: a) definir los objetivos de aprendizaje para los estudiantes, b) planear las actividades, tareas de enseñanza y las herramientas o materiales que pueden ser usadas, y c) conjeturar o hipotetizar acerca de cómo evolucionarían los procesos de pensamiento del estudiante cuando desarrolla las actividades de enseñanza.

Fase 2. Experimentando en el aula o entorno virtual sí es el caso. En esta fase los estudiantes efectúan las tareas propuestas en las actividades de acuerdo a la forma como se planearon (individuales, grupales, etc.), con o sin tecnología y se recogen los datos para su análisis posterior de acuerdo con el modelo o las conjeturas hechas en la fase anterior acerca de cómo evolucionaría el proceso de pensamiento del estudiante. En otras palabras, analizar los datos y comparar los resultados del análisis con la trayectoria hipotética de aprendizaje

Fase 3. Análisis retrospectivo. El objetivo primordial en esta fase es analizar si la actividad cognitiva y social llevada a cabo con los estudiantes en el aula de clase es consecuente o no con lo planificado en la primera fase. Es decir, aquí se analiza la experiencia o actividad desde el punto de vista teórico o con los supuestos teóricos que fundamentan la trayectoria hipotética de aprendizaje.

El investigador puede variar, modificar o cambiar, según el caso las tareas propuestas, las actividades e incluso modificar la trayectoria hipotética de aprendizaje. Como resultado de esta fase, se tiene: a) una secuencia de actividades, formas de implementarlas y corregirlas y b) un nuevo conocimiento sobre la efectividad o como parece funcionar el aprendizaje y la enseñanza.

2.6. La Teoría fundamentada

Los métodos de la teoría fundamentada surgieron de los sociólogos Barney G. Glaser y Anselm L. Strauss en los años 1965 y 1967, como resultado de su exitosa colaboración en estudios de muerte en hospitales (Charmaz, 2014). Corbin y Strauss (2008) afirman que la teoría fundamentada es una metodología específica desarrollada por Glaser y Strauss (1967) con el propósito de construir teoría a partir de datos.

Según (Charmaz, 2006), para Glaser y Strauss los componentes que identifican y diferencian la práctica de la teoría fundamentada incluyen: a) trabajo simultaneo en la reunión y el análisis de datos, b) construcción de códigos y categorías analíticas a partir de datos, no de hipótesis preconcebidas deducidas lógicamente, c) utilizar el método de comparación constante, que implica hacer comparaciones durante cada etapa del análisis, d) avanzar en el desarrollo de la teoría durante cada paso de la recopilación y análisis de datos, e) redacción de memos para elaborar categorías, especificar sus propiedades, definir relaciones entre las categorías, e identificar las lagunas o vacíos, f) el muestreo se dirige a la construcción de la teoría, no a la representatividad de una población, y g) realizando la revisión de la literatura después de desarrollar un análisis independiente.

La Teorización. Teorizar es un trabajo que implica no sólo concebir o intuir ideas (conceptos), sino también formularlos en un esquema lógico, sistemático y explicativo. En el fondo de la teorización subyace la interacción entre hacer inducciones: derivar conceptos, sus propiedades y dimensiones a partir de los datos; y deducciones: cuando se plantean hipótesis sobre las relaciones entre los conceptos, las relaciones también se derivan de datos, pero de datos que han sido abstraídos por el analista a partir de los datos brutos.

La teoría denota un conjunto de categorías bien construidas, por ejemplo, temas y conceptos, interrelacionadas de manera sistemática por medio de oraciones que indican relaciones, para formar un marco teórico que explica algún fenómeno social, psicológico, educativo, de enfermería o de otra clase. Las oraciones que indican relación explican quién, qué, cuándo, dónde, por qué, cómo y con qué consecuencias ocurren los acontecimientos. Una vez que los conceptos se relacionan por medio de ciertas oraciones para formar un marco teórico explicativo, los hallazgos de la investigación pasan de ser un ordenamiento conceptual a convertirse en teoría.

Para Glaser y Strauss (2017) el objetivo de la codificación abierta es desarrollar una gran cantidad de códigos para describir los datos. La codificación axial es necesaria para investigar las relaciones entre conceptos y categorías que se han desarrollado en el proceso de código abierto. Mientras que el objetivo de la codificación selectiva es integrar en una teoría cohesiva las diferentes categorías que se han desarrollado, elaborado y relacionado mutuamente durante la codificación axial.

Glaser y Strauss (1967) distinguen entre dos grandes categorías de códigos que se desarrollan en el análisis: los sustantivos y los teóricos. Los códigos sustantivos que conducen a teorías sustantivas son códigos que utilizan las palabras e ideas de los participantes. Mientras que los códigos teóricos son códigos que el investigador asigna y considera relevantes para la teoría.

2.6.1. Elementos esenciales de la Teoría Fundamentada

A continuación, se muestran unos términos propios de esta teoría y su definición, tomados de Corbin y Strauss (2017).

Teoría fundamentada. Una metodología específica desarrollada por Glaser y Strauss (1967) con el propósito de construir una teoría a partir de datos. Los autores manifiestan que utilizan la teoría fundamentada en un sentido más genérico para denotar construcciones teóricas derivadas del análisis cualitativo de los datos.

Metodología. Una forma de pensar y estudiar los fenómenos sociales.

Métodos. Técnicas y procedimientos para la recolección y análisis de datos.

Análisis cualitativo. Un proceso de examinar e interpretar los datos para obtener significado, comprender y desarrollar conocimiento empírico.

Pregunta de investigación. La pregunta específica que se abordará en esta investigación. La(s) pregunta(s) establece(n) los perímetros del proyecto y sugiere(n) los métodos que se utilizarán para la recopilación y el análisis de datos.

Sensibilidad. La capacidad de captar sutiles matices y señales en los datos que infieren o apuntan a un significado.

Análisis. El análisis implica examinar una sustancia y sus componentes para determinar sus propiedades y funciones. Luego usar el conocimiento adquirido para hacer inferencias sobre el todo y sus componentes para determinar sus propiedades y funciones, y luego utilizar los conocimientos adquiridos para hacer inferencias sobre el conjunto.

Microanálisis. Codificación detallada en torno a un concepto. Una forma de codificación abierta utilizada para separar los datos y buscar significados variados de una palabra o frase.

Categorías. Conceptos de nivel superior bajo los cuales los analistas agrupan los conceptos de nivel inferior según propiedades compartidas. A veces se hace referencia a las categorías como temas. Representan fenómenos relevantes y permiten al analista reducir y combinar datos.

Codificación. Extracción de conceptos a partir de datos brutos y desarrollo de los mismos en términos de sus propiedades y dimensiones.

Conceptos. Palabras que representan grupos o clases de objetos, eventos y acciones que comparten algunas propiedades comunes importantes, aunque las propiedades pueden variar dimensionalmente.

Propiedades. Características o componentes de un objeto, evento o acción. Las características dan especificidad y definen un objeto, evento y/o acción.

Dimensiones. Variaciones dentro de las propiedades que dan especificidad y rango a los conceptos.

Comparaciones constantes. El proceso analítico de comparar diferentes piezas de datos por similitudes y diferencias.

Códigos In-Vivo. Conceptos que utilizan las palabras reales de los participantes de la investigación en lugar de ser nombrados por el analista.

Comparaciones teóricas. Una herramienta analítica utilizada para estimular el pensamiento sobre las propiedades y dimensiones de las categorías.

Contexto. Condiciones estructurales que dan forma a la naturaleza de las situaciones, circunstancias o problemas a los que los individuos responden por medio de la acción/interacción/emociones. Las condiciones contextuales van de lo más macro a lo más micro.

Integración. Vinculación de categorías en torno a una categoría central o núcleo y perfeccionamiento de la formulación teórica resultante.

Proceso. El flujo de acción/interacción/emociones que ocurre en respuesta a eventos, situaciones o problemas. Un cambio en las condiciones estructurales puede requerir ajustes en las actividades, interacciones y respuestas emocionales. Las acciones/interacciones/emociones pueden ser estratégicas, rutinarias, aleatorias, novedosas, automáticas y/o reflexivas.

Saturación. La saturación suele explicarse en términos de cuando no surgen nuevos datos. Pero la saturación es más que una cuestión de no tener nuevos datos. También denota el desarrollo de categorías en términos de sus propiedades y dimensiones, incluyendo la variación, y si se trata de la construcción de teorías, el delineamiento de relaciones entre conceptos.

Muestreo teórico. Un método de recolección de datos basado en conceptos o temas derivados de los datos. El propósito del muestreo teórico es recolectar datos de lugares, personas y eventos que maximicen las oportunidades para desarrollar conceptos en términos de sus propiedades y dimensiones, descubrir variaciones e identificar relaciones entre conceptos.

2.7. La teoría de números en la formación de profesores de matemáticas en la Universidad Francisco de Paula Santander

El programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Francisco de Paula Santander la Teoría de Números, una de las ramas más antiguas de la matemática es un proceso cuyo propósito está centrado en la construcción y estudio de las propiedades de los números naturales, en particular los números enteros.

Se destaca temas como: divisibilidad, algoritmo de Euclides, números primos, congruencias y sus aplicaciones (código RSA, calendario perpetuo y códigos de barras). Aparecen también el pequeño Teorema de Fermat, el Teorema de Euler y el Teorema Chino del residuo. No se pueden dejar a un lado la conjetura de Goldbach, la conjetura de los primos gemelos y último teorema de Fermat, entre otros que han contribuido no sólo en el desarrollo de la matemática sino también de otras ciencias.

Lo anterior muestra la importancia que tiene la teoría de números en la formación del profesor de matemáticas puesto que en su desempeño profesional ya sea en los niveles de educación primaria, básica o media tiene que poner en juego estos conocimientos junto a estrategias didácticas para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático en los niños teniendo como eje fundamental la resolución de problemas.

2.8. La obra de Diofanto de Alejandría

El estudio de cualquier aporte matemático histórico y en especial la obra de Diofanto de Alejandría es fundamental tanto en la formación como en el desempeño del profesor de matemáticas del presente y del futuro. Las obras sobre las cuales se asienta la fama de Diofanto son tres: La Aritmética, Un Tratado sobre Números Poligonales y Una Colección de Proposiciones bajo el título de Porisms (Heath, T. L., 1910). Para algunos investigadores La Aritmética, lo posesionó como el padre del álgebra. Esta obra no fue (Heath, 1910) escrita como los Elementos de Euclides con definiciones y axiomas utilizados para hacer demostraciones. Fue escrita como un conjunto de problemas.

La obra de Diofanto ha sido trabajada y traducida por muchos investigadores. Para algunos los enunciados están escritos casi todos de forma general. Otros autores consideran que, aunque los enunciados son generales y abstractos, en las demostraciones se encuentran cálculos con números concretos.

2.8.1. Diofanto y los métodos de resolución de ecuaciones

En cuanto al tratamiento o métodos para resolver ecuaciones, para Heath, (1910) el tema se divide en dos partes: a) Determinar ecuaciones de diferentes grados y b) ecuaciones indeterminadas, clasificadas de acuerdo a su tipo. El capítulo 8 del libro: Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek algebra, titulado “Diophantus' treatment of equations”, está dedicado al tratamiento de éstas por parte de Diofanto. Mientras que en el capítulo nueve, titulado: “Diophantus' methods of solution”, clasifica estos métodos como: 1) La suposición hábil de las incógnitas,

2) Métodos para calcular hacia atrás y preguntas auxiliares, 3) Uso de símbolos para lo desconocido con diferentes significados, 4) Método de límites, 5) Solución por mera reflexión, 6) Solución de expresiones generales, 7) Determinaciones y suposiciones arbitrarias y 8) Uso de triangulo rectángulo.

El autor afirma que Diofanto fue capaz de resolver ecuaciones de primero y segundo grado. En lo que respecta a la ecuación cúbica afirma que encontraron un solo ejemplo y es un caso especial. Heath (1910) muestra ejemplos claros de los métodos de Diofanto para resolver ecuaciones puras y ecuaciones cuadráticas. El autor hace referencia a ecuaciones puras como aquellas “ecuaciones que contienen el poder de lo desconocido, cualquiera sea el grado” (Heath, 1910, p. 58). Diofanto resuelve las ecuaciones de la misma manera sin importar el exponente del término desconocido. Diofanto trata las ecuaciones de cualquier grado como si fueran ecuaciones simples de primer grado.

Según Heath (1910), Diofanto da una regla general para este caso sin tener en cuenta el grado: Si un problema conduce a una ecuación en la que cualquier término es igual a los mismos términos, pero tiene coeficientes diferentes, debemos tomar como de igual a igual en ambos lados, hasta que obtengamos un término igual a un término. Pero, si hay términos negativos en un lado o en ambos lados, los términos deficientes deben agregarse en ambos lados hasta que todos los términos de ambos lados sean positivos. Entonces debemos tomar como de igual a igual hasta que quede un término a cada lado.

Esta idea original de Diofanto es equivalente a lo que actualmente es una práctica tradicional conocida como transposición de términos en una ecuación. Es decir, pasar de izquierda a derecha o viceversa términos en la ecuación y luego buscar términos semejantes y reducirlos.

Conclusiones

Para Burton (1984) en primer lugar debe hacerse una clara distinción entre el pensamiento matemático como operaciones sobre elementos y los resultdos de estas operaciones. El modelo de Burton (1984) se caracteriza por los proceso del pensamiento y la dinámica del pensamiento matemático.

Entre tanto, para Harel (2008ª, 2008b, 2010) el razonamiento es la vía hacia las formas de entender y formas de pensar matemáticamente, camino que siguieron Confrey y Thompson en sus trabajos para caracterizar el razonamiento covariacional. Esto junto a la filosofía de Lakatos evidencian la relatividad del conocimiento matemático.

Desde otro ángulo, se destaca también las generalidades de la teoría fundamentada que la identifica y diferencia de otros enfoques. La definición de algunos términos desde su práctica como estrategia para la investigación cualitativa.

Además, de los componentes del ciclo de enseñanza la matemática y las fases en el diseño de experimentos de enseñanza que se tomaron como base para el diseño de las actividades didáticas de aprendizaje para el estudiante. Finalmente, la teoría de números y la obra de Diofánto como elementos sobre los cuales se desarrolla la investigación.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En esta sección se especifican y concretan las estrategias que hicieron posible avanzar en la caracterización del pensamiento variacional cuando un grupo de profesores de matemáticas en formación plantea y resuelve problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$, siguiendo un enfoque cualitativo desde la teoría fundamentada.

Teniendo en mente lo anterior, a continuación, se describen las estrategias, métodos, técnicas y procedimientos planificados, diseñados e implementados teniendo como marco la teoría fundamentada, para intentar dar respuestas a la pregunta científica: ¿Cómo avanzar en la caracterización del pensamiento variacional emergente desde el contexto del planteo y resolución de problemas de ecuaciones diofánticas en profesores de matemáticas en formación?,

Ante este cuestionamiento, la primera acción consiste en hacer claridad entre lo que son las operaciones del pensamiento matemático y el producto o resultado de estas operaciones (Burton, 1984). Con este propósito se especifican dos elementos fundamentales que dan vida la investigación.

a) El pensamiento variacional como operaciones sobre elementos, y

b) Los resultados o productos de las operaciones del pensamiento variacional.

Los elementos para el caso son los problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$ con solución en los números enteros.

Teniendo como referente lo expresado en el párrafo anterior, en este apartado se describe de forma general el porqué del enfoque cualitativo desde la teoría fundamentada, el diseño de investigación y los elementos que lo constituyen como el contexto, los participantes, las fuentes y formas para recolectar los datos, el muestreo teórico y las estrategias para el análisis de los datos conducen de la teoría sustantiva a la teoría formal.

3.2. La naturaleza del pensamiento variacional desde el enfoque cualitativo y la teoría fundamentada

La investigación se guía y orienta por la pregunta científica, que a la vez generó la subpregunta: ¿cómo son los procesos y conceptos (sus propiedades y dimensiones) que identifican y describen la naturaleza del pensamiento variacional emergente desde el contexto propuesto?

Estos cuestionamientos a su vez llevan a otras preguntas desde lo ontológico y epistemológico (Denzin & Lincoln, 2018). ¿Qué es el pensamiento variacional? ¿Qué conceptos, propiedades y dimensiones describen su naturaleza desde el contexto propuesto? (ontológico). ¿Cómo conocer el pensamiento variacional y cómo obtenerlo desde el contexto propuesto? (epistemológico).

Las preguntas anteriores conducen al propósito central de la investigación consistente en explicar, el ¿qué es?, el ¿cómo?, y ¿por qué funciona?, es decir construir una teoría a partir de los datos que posibilite dar respuesta a estos interrogantes. Por tanto, el enfoque que más ajusta es cualitativo en cuanto se hace una comprensión más profunda, se interpretan los fenómenos en términos de dar sentido y significado al pensamiento variacional manifestado por los estudiantes (Denzin y Lincoln, 2018; Glaser y Strauss, 2017).

Es decir, se construye el núcleo de la teoría (Lakatos, 1978) desde la codificación abierta, axial y selectiva, el método de comparación constante, el muestreo y saturación teórica a partir de los datos en el contexto propuesto y una de las estrategias óptimas es seguir la Teoría Fundamentada.

Como lo afirma Charmaz (2014) una característica singular de la teoría fundamentada es que la reunión y el análisis de los datos se realizan simultáneamente utilizando un método de comparación constante, además de ser un enfoque para generar y descubrir teoría a partir de datos que han sido sistemáticamente recogidos y analizados (Johnson & Christensen, 2013).

Aunque no está explícito en los objetivos de investigación, se pretende avanzar en la caracterización del pensamiento variacional como proceso y desde el proceso de planteo y resolución de problemas. Como lo afirma Morse, et. al. (2009) la teoría fundamentada es un método para estudiar procesos y a la vez es en sí un proceso.

3.3. Diseño de la investigación desde la teoría fundamentada

La teoría fundamentada es un proceso no lineal muy singular. Se requiere que el profesor investigador circule permanentemente entre la recolección de datos, el análisis de datos y el desarrollo de la teoría hasta alcanzar la saturación teórica. Además, el proceso se enriquece, caracteriza y diferencia de otros en que el enfoque del diseño de la investigación evoluciona a medida que el estudio avanza. Su principal objetivo es desarrollar y construir teoría desde los datos.

En el esquema de la Figura 4 se observa el ciclo correspondiente al diseño de investigación que muestra la estrategia propuesta y adoptada desde la teoría fundamentada con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación, donde se integran y complementan el diseño y rediseño de actividades didácticas, su implementación y los ciclos de codificación y análisis de datos.

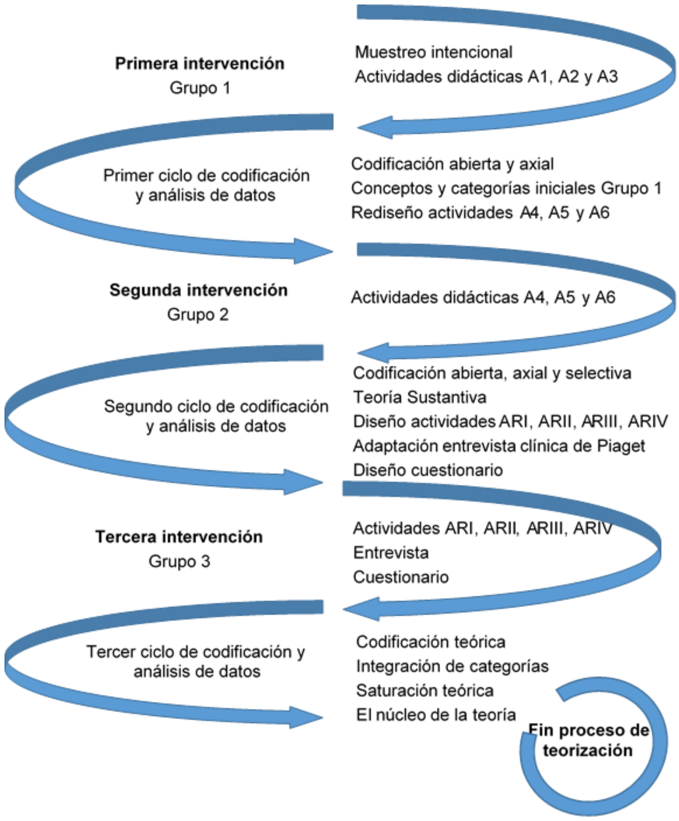


Figura 4. Ciclo diseño de investigación

En los siguientes párrafos se describen los elementos y la forma en que se articulan para dar vida y poner en marcha el diseño de la investigación en la búsqueda de la teoría formal desde los datos. En este esquema un grupo se entiende como la resolución de problemas por un método determinado, que más adelante se explicita con más detalles.

3.4. Los participantes y el contexto

Un grupo de 24 estudiantes que tomaron un curso de Teoría de Números, en el programa de Licenciatura en Matemáticas que forma profesores para la escuela, en la Universidad Francisco de Paula Santander en la ciudad de Cúcuta durante el I semestre académico del año 2020 fueron los participantes. El 36% de ellos son mujeres, mientras que el 64% restante son hombres. El 88% de las edades de los participantes oscilan entre 18 años y 23 años. Uno de los estudiantes tiene edad de 31 años, mientras que hay uno con 24 años y otro con 25 años. El 100% de ellos finalizaron su educación secundaria en colegios públicos de la región.

El acceso a los participantes se da de forma natural, puesto que el profesor investigador es quien orienta la materia de Teorías de Números en el programa. Al inicio del curso se comentó de manera general que el desarrollo del curso no se realizaría de forma tradicional, donde el profesor presenta las temáticas como un saber importante, valioso y reconocido por la comunidad en educación matemática, orientado a presentar definiciones y teoremas y hacer demostraciones.

Se comentó acerca de filmaciones de video que se harían en el aula de clase y la realización de entrevistas a algunos estudiantes, actividades que se avisarían a los participantes con previa anticipación y la información recolectada sería confidencial y sólo se utilizaría con fines académicos e investigativos, a lo cual los estudiantes manifestaron estar de acuerdo. Se acordó también que la forma de valoración del curso no era la de evaluaciones escritas. Por el contrario, la manera de evaluar el curso tenía como propósito valorar los procesos y desempeño en el desarrollo de las actividades académicas durante el semestre.

El inicio de clases se dio el día 17 de febrero de 2020, cuando el mundo entero estaba siendo sometido por la pandemia originada por el virus Covid 19, llamado así por la Organización Mundial de la Salud el 11/02/2020 o como se llamó inicialmente coronavirus 2019. En ese entonces, los países más afectados por esta enfermedad eran los países asiáticos y europeos. Para esta fecha en los países americanos se estaba iniciando aún la fase de contagios, en contraste a la fecha de escritura del presente informe donde los países americanos superan en contagios y muertes a los países europeos.

En Colombia el aislamiento preventivo social obligatorio o cuarentena como se le conoce, lo declararon las autoridades nacionales a partir del 25/03/2020 por un espacio por 19 días, pero se ha ido prolongando tal que a la fecha de elaboración del este informe aún se está en cuarentena, aunque de forma parcial.

La Universidad Francisco de Paula Santander de la ciudad de Cúcuta ordenó el cierre de sus instalaciones desde el día 16/03/2020 prohibiendo el ingreso total, y a la vez se tomaban medidas preventivas y se generaban directrices para que las clases se realizaran de forma virtual o en línea. De esta manera desde esa fecha y hasta la finalización del I semestre académico 2020 las actividades académicas se realizaron virtualmente. Por tanto, sólo entre 17/02/2020 y el 13/03/2020 se realizaron actividades presenciales en el aula.

Para el desarrollo de la temática relacionada con el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en dos variables como fuente para desarrollar el curso y recolectar los datos se diseñaron e implementaron 11 actividades didácticas. Sólo tres de estas actividades se realizaron de manera presencial con los estudiantes.

A partir del 13/03/2020 las actividades virtuales se realizaron utilizando la plataforma académica PLAD de la Universidad Francisco de Paula Santander diseñada y soportada por Moodle, además de trabajo en línea utilizando meet.google.com. Para el desarrollo de las actividades en línea el profesor investigador colocó a disposición de los participantes las actividades didácticas en la plataforma PLAD, los estudiantes las descargaban y las trabajaban individualmente.

Posteriormente en los horarios correspondientes a clases normales se estableció conexión sincrónica vía meet.google.com dos veces a la semana; allí solamente se despejaban dudas y se daban algunas orientaciones. Las sesiones en línea se grabaron y se colocó el link o dirección electrónica de la grabación a disposición de los participantes en la plataforma PLAD de la universidad.

Los participantes desarrollaron las actividades en hojas de papel cuadriculado a lapicero o lápiz, las escanearon en formato .pdf y las subieron a carpetas previamente creadas y compartidas por el profesor en drive.google.com. Como resultado de este trabajo se produjeron 197 archivos en formato .pdf y varias grabaciones de las sesiones en línea.

3.5. Las fuentes de datos y las estrategias para su recolección en tiempos de la pandemia del covid 19

Entre las fuentes de datos utilizadas, están 11 actividades didácticas para los participantes y para el profesor, 197 documentos digitales realizados por los participantes, 1 video grabación en clase, 7 entrevistas de tipo retrospectivo no estructuradas (Bryant & Charmaz, 2019) y un cuestionario para valorar la actitud del participante en el desarrollo del curso.

El diseño y planeación de actividades didácticas. Se diseñaron las actividades siguiendo el ciclo de tres fases: a) diseño y planeación, b) experimento en el aula o entorno, y c) análisis retrospectivo, siguiendo a Cobb et. al (2003), Gravemeijer (2004), Steffe y Thompson, P. W. (2000). Como resultado de este diseño surgieron dos tipos de actividades, una para los estudiantes y otra para el profesor.

Las actividades para el profesor. Cada actividad tiene cinco momentos: a) momento 0, o momento de presentación de la actividad, b) momento 1, se propone un problema para que los estudiantes lo resuelvan con los conocimientos que ellos tengan, c) momento 2, intervención guiada por el profesor, d) momento 3, cierre y propuesta de actividades para realizar fuera del aula sí es el caso, y e) momento 4, relacionado con la valoración y la efectividad de la actividad.

Estructura y componentes en la actividad del profesor. A continuación, se presentan sus elementos y la intención o finalidad de cada uno de ellos.

Encabezamiento: Identificación de la institución educativa, del programa, la materia, número de la actividad, título de la actividad, tema y tiempo estimado de duración.

Recursos para implementar la actividad: Talleres, guías, agenda, cuaderno de apuntes, etc.

Descripción: caracterizar la actividad describiendo brevemente las intenciones propuestas y la forma de trabajo, entre otras.

Justificación: especificar y argumentar por qué esta actividad aporta en la consecución de los objetivos de investigación.

Objetivos de aprendizaje para el estudiante: finalidad o metas de aprendizaje para el estudiante.

Objetivos para el profesor: Intensiones o metas del profesor que contribuyan en avanzar en la caracterización del pensamiento variacional en el contexto propuesto.

Tareas para el estudiante (Problemas). Especificar los problemas con la intención de despertar en el estudiante necesidad intelectual.

Trayectoria Hipotética del Profesor en el Proceso de Planteo y Resolución de Problemas del estudiante (THPPPRPE): anticipar las posibles acciones, formas de entender y formas de pensar del estudiante. Ver cada una de las actividades.

Metodología: (Momentos, secuencia de acciones y formas de trabajo)

Actividades para valorar el conocimiento del estudiante: plantear (reformular, modificar) y resolver problemas que permitan, además de extender conceptos a otros dominios y contextos, generar estrategias de solución intentando inducir al estudiante formas de entender y formas de pensar desde la variación y el cambio.

Evaluación de la actividad: Valorar la actividad de lo ocurrido en el aula y los datos recolectados, teniendo como referente los supuestos teóricos que fundamentan la (THPPPRPE), además de tiempos, formas de trabajo, etc. Como resultado de la valoración se puede reformular y/o modificar la actividad y analizar acerca del cómo puede funcionar la actividad.

La Trayectoria Hipotética del Profesor en el Proceso de Resolución de Problemas del estudiante (THPPPRPE). Para Simon (1995) los objetivos de aprendizaje para el estudiante, las actividades de aprendizaje y el aprendizaje de los estudiantes conforman las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como un componente fundamental del ciclo de la enseñanza de la matemática. En las actividades para el profesor se especifica cada THPPPRPE de acuerdo a la temática y objetivo de aprendizaje para el estudiante.

Estructura y componentes en la actividad para el estudiante, articulada con la actividad respectiva del profesor, compuesta por:

Encabezamiento: Identificación de la institución educativa, del programa, la materia, número de la actividad, título de la actividad, tema y tiempo estimado de duración.

Presentación: basada en temas específicos relacionados con la historia de la matemática y algunos matemáticos que trabajaron y dieron origen o aportaron en la fundamentación teórica de las temáticas respectivas.

Desarrollo de la actividad: se inicia siempre con el planteamiento al grupo de un problema para que los estudiantes de manera individual lo resuelvan o intenten resolverlo con los conocimientos matemáticos a su disposición.

Las demás tareas en cada actividad se orientan siempre por una serie de cuestiones o preguntas con la intención de conducir al muestreo y saturación teórica desde la variación y el cambio. A continuación, se muestran algunos elementos de la teoría fundamentada que orientan las acciones y cuestiones al estudiante. Ver Anexo 1.

La adaptación de la entrevista clínica de Piaget. Las entrevistas son esencialmente una conversación dirigida en la investigación cualitativa (Charmaz, 2014). Los participantes pueden hablar más libremente acerca del tema. Da más control al entrevistado sobre el curso, el tema y profundidad de la entrevista, además de dar al investigador la oportunidad de hacer seguimiento al participante (Corbin & Strauss, 2014). Suelen ser una técnica importante que permite conocer más a profundidad un tema particular facilitando la interpretación y la experiencia desde los participantes.

Hay básicamente tres tipos de entrevistas: no estructuradas, semiestructuradas y estructuradas. Todas se utilizan en la investigación cualitativa, aunque algunas son mejores que otras para fines de teoría fundamentada (Corbin & Strauss, 2014). Las entrevistas no estructurados son una fuente más rica para construir la base de una teoría (Corbin & Strauss, 2014).

Se diseñó e implementó una entrevista retrospectiva semi estructurada (Bryant y Charmaz, 2019), semi estructurada en el sentido que la componen preguntas abiertas que guían al investigador, y retrospectiva puesto que básicamente se identifica a los participantes que ya han pasado por la experiencia y se les invita a contar su historia, razón por la cual se aplicó casi al finalizar el curso.

Según Ernest (1993) el método de entrevista clínica es una valiosa contribución en la metodología de investigación psicológica en educación matemática, sobre todo, cuando se trata de investigar en el pensamiento y los procesos cognitivos. Piaget inicialmente creó la entrevista clínica en el año 1920 como instrumento de investigación en psicología (Ginsburg, 1981). En el área de educación matemática no tiene sentido definir pensamiento matemático, por el contrario, debe inducirse al estudiante en procesos de descubrimiento y a partir de allí determinar características del desarrollo del pensamiento y sus propiedades (Ginsburg, 1981).

Para Ginsburg (1981) la entrevista clínica debe orientarse por tres objetivos: facilitar la verbalización que arroje luz sobre los procesos, intentar comprobar la información verbal especificamente en las declaraciones ambiguas, y finalmente utilizar procedimientos para probar hipótesis alternativas a lo que muestra el entrevistado.

La técnica de la entrevista clínica se caracteriza por los siguientos elementos que constituyen su estructura: a) el uso de tareas que canalicen la actividad del sujeto, b) las tareas o preguntas exijan reflexión al participante, c) las preguntas del entrevistador dependen de la respuesta del estudiante, d) el entrevistador debe emplear del método experimental y e) puede ser posible cierto grado de normalización (Ginsburg, 1981).

Hunting (1997), en su trabajo hace un análisis muy intereserante acerca de las característica de la entrevista clínica como técnica en la investigación en educación matemática. Propone y sugiere ciertas estrategias a seguir cuando se elaboran guiones o se diseña la entrevista clínica de Piaget para intentar conocer y describir el pensamiento matemático del estudiante. De la propuesta de (Hunting, 1997) se destaca lo referente a las preguntas que hace el investigador y sugiere algunos tipos de preguntas a utilizar según el rumbo de la entrevista.

Entre ellas se encuentran los siguientes tipos de preguntas (algunas ya fueron adaptadas): ¿Puede decirme en qué está pensando?, ¿Puedes decir en voz alta lo que estás haciendo?, ¿Puedes decirme cómo lo has averiguado? ¿Cómo lo supiste? ¿Cómo lo decidiste?, ¿Fue una suposición al azar o al tanteo?, ¿Si a otro estudiante se le ocurre esto?, o lo resolvió de esta manera? (importante involucrar lo que hace un tercero), ¿Qué significa esto para usted?, ¿Cómo lo entiende?, ¿De qué manera prueba que usted tiene razón?

Estrategias como la siguiente: ¿Cómo convences a un compañero (de menor nivel educativo o edad) de que lo que usted hizo está bien?, ¿Por qué crees que esto funciona?, Finge que eres maestro, ¿cómo explicaría esto a un niño pequeño? Para (Hunting, 1997) el objetivo debe centrarse en conocer cómo los participantes obtienen las respuestas.

Siguiendo a Ginsburg (1981) a continuación se muestra la forma en que los elementos que proponen este autor dieron fundamento a la entrevista clínica primero como técnica para recolectar información y segundo como estrategia para triangular datos desde diferentes fuentes.

a) El uso de tareas. Las tareas estan constituidas por problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en dos variables, b) Que las tareas o preguntas exijan reflexión al participante. Aquí entran en juego problemas como los propuestos en las últimas actividades, dónde hubo más reto para el estudiante, c) Las preguntas del entrevistador dependen de la respuesta del estudiante. Se tuvo en cuenta y se orientaron por las sugerencias de Hunting (1997), d) El entrevistador debe emplear del método experimental. El estudiante experimenta y manipula de manera abstracta conceptos, condiciones, relaciones, pruebas y procesos cuando se le plantean problemas y luego se cambian condiciones o se hacen restricciones, y e) Puede ser posible cierto grado de normalización. Esto hace referencia a seguir en cierta medida algunas preguntas con el propósito de intentar responder a los objetivos de investigación.

Los objetivos de la entrevista**.** Se orientaron las entrevistas con dos propósitos fundamentales para intentar conocer y describir: a) las formas de entender y las formas de pensar cuando resuelven problemas, y b) los procesos desde la variación y el cambio que emergen cuando el estudiante plantea y resuelve problemas.

En cuanto a la forma de realizar la entrevista*.* Por la situación que atravieza el mundo en términos de salud pública la forma de aplicación fue en línea a través de meet.google.com. Este medio permite que la entrevista sea de manera sincrónica y además permite su grabación.

La entrevista de mayor duración se acercó a los 50 minutos. Los entrevistados fueron estudiantes que han manifestado de forma más avanzada la evolución de su pensamiento variacional.

La estrategia para entrevistar. Se diseñó una actividad (ver Anexo 7) compuesta por una serie de problemas que fueron enviados a cada participante un día antes de la entrevista. El estudiante resuelve, escribe, escanea, envía en formato .pdf seguidamente sin que pase un lapso de tiempo demasiado extenso. Se fijaron hora y fecha para la conexión via meet.google.com.

En tiempo de conexión sincrónica en linea, se inicia el proceso de preguntas siguiendo el guión general tentativo que se creó y adaptó especificamente para este propósito, además de preguntas específicas para cada estudiante que surgieron del trabajo enviado y revisado previamente por el investigador. (Ver Anexo 8.)

En algunos casos se utilizó trabajos resueltos con anterioridad por los participantes que fueron considerados como incidentes. La razón de esta opción es que hay trabajos muy buenos y poner al estudiante a resolver lo mismo es agotador para él y se deja fuera lo que realmente se persigue, esto junto con que no se cuenta con los recursos tecnológicos necesarios como por ejemplo como sí lo hacen los medios de comunicación, como la televisión.

El cuestionario sobre actitudes. La encuesta se basó en un modelo tridimensional. Este modelo la actitud tiene tres componentes: a) el cognitivo; b) el afectivo; y, c) el conativo-conductual.

El componente cognitivo se refiere a la forma como es percibido el objeto actitudinal, es decir, al conjunto de creencias y opiniones que el sujeto posee sobre el objeto de actitud y a la información que se tiene sobre el mismo (McGuire, 1989)[24].

El componente afectivo podría definirse como los sentimientos de agrado o desagrado hacia el objeto (McGuire, 1989).

El componente conativo hace referencia a las tendencias, disposiciones o intenciones conductuales ante el objeto de actitud (Rosenberg, 1960; Breckler, 1984).

Las dimensiones a medir. Para intentar describir algunos aspectos relacionados con la actitud de los estudiantes, se optó por cuatro dimensiones o subvariables: planteo y resolución de problemas, metodología, actividades, y evaluación. En cuanto a la escala se optó por la escala tipo Likert (Likert, 1932), como se muestra en el Anexo 9.

3.6. Actividades, fechas y formas de implementación

La Tabla 1 muestra las actividades, su contenido, las formas como fueron implementadas y la fecha de realización.

[24] McGuire, W. (1989). The structure of individual attitudes and attitude systems. *Attitude structure and function*, 37-69

Tabla 1. Actividades, fechas y formas de implementación

No. actividad	Tema	Forma implementación	Fecha
A1 MCD	Máximo común divisor	Presencial	02/03/2020
A2 EDL I	Ecuaciones diofánticas lineales I	Presencial	09/03/2020
A3 EDL II	Ecuaciones diofánticas lineales II	En casa	13/03/2020
A4 FC I	Fracciones continuas I	En casa	13/04/2020
A5 FC II	Fracciones continuas II	En casa	17/04/2020
A6 AEVM	Evaluación varios métodos	En casa	08/05/2020
A7 ARI	Actividad Retadora I	En casa	22/05/2020
A8 ARII	Actividad Retadora II	En casa	29/05/2020
A9 ARIII	Actividad Retadora III	En casa	06/06/2020
A10 ARIV	Actividad Retadora IV	En casa	13/06/2020
	Entrevista	En línea	09/06/2020

3.7. El muestreo teórico

Glasser y Strauss (1967, 2006, 2017) hacen énfasis en que maximizar o minimizar la diferencia entre grupos hace posible controlar la relevancia téorica en la recolección de datos. Esto se relaciona directamente con las categorías. Por ejemplo, si en un grupo se recogen muchos más casos de una categoría, podrían detectarse diferencias que no se habían observado en la anterior recopilación de datos.

Este control sobre las similitudes y diferencias es vital para descubrir las categorías y para desarrollar y relacionar sus propiedades teóricas; todo esto es necesario para la desarrollo posterior de una teoría emergente. A medida que se amplía el alcance de una teoría sustantiva hacia una teoría formal, los nombres de categorías o constructos se vuelven necesariamente más sencillos y abstractos, porque ese constructo tiene que aplicarse a un gran número de casos sustantivos (Bryant y Charmaz, 2019).

Además el propósito del muestreo teórico es reunir datos que maximicen las oportunidades para desarrollar conceptos en términos de sus propiedades y dimensiones, descubrir variaciones e identificar las relaciones entre los conceptos (Glaser y Strauss, 2017).

Glasser y Strauss (1967, 2006, 2017) establecen consecuencias cuando se minimizan y maximizan diferencias entre grupos para la generación de teorías. Por tando, entre categorías hay similaridad y diversidad.

Se está minimizando diferencias entre categorías cuando se maximizan similitudes entre los datos. Esto conduce a verificar la utilidad de la categoría, a generar propiedades básicas y establecer un conjunto de condiciones para un grado de categoría que puede ser utilizada para la predicción (similaridad). Existe diversidad y esto permite identificar y/o desarrollar diferencias fundamentales bajo las cuales la categoría y la hipótesis varían.

Por otro lado se está maximizando cuando se identifican y/o desarrollan uniformidades fundamentales de mayor alcance (similaridad). La máxima diversidad de datos obliga rápidamente al desarrollo denso de las propiedades de las categorías y a la integración de categorías y propiedades, delimitando el alcance de la teoría.

3.7.1. El muestreo teórico como vía hacia la construcción de la teoría

Para operacionalizar y poner en práctica las sugerencias de Glaser y Strauss (1978) sobre el muestreo teórico, y la forma en que ayuda al desarrollo de la teoría, se propuso una estrategia basada en cuatro fases.

A continuación, se describen las fases y las acciones en cada una de ellas con ejemplos relacionados con esta investigación, teniendo siempre en mente que lo que se quiere es entender y dar sentido a las operaciones del pensamiento variacional como procesos, a saber, las formas de entender y las formas de pensar variacional en el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas para generar y construir teoría a partir de los datos.

Fase 1. En la búsqueda de conceptos y categorías iniciales. A partir de las primeras actividades con el propósito de resolver problemas que involucran contenidos relacionados con el máximo común divisor, el Algoritmo de Euclides y la solución de ecuaciones diofánticas en dos variables utilizando el concepto de la pendiente (se denomina grupo a los diferentes problemas que se resuelven por este método), se seleccionaron ocho estudiantes (incidentes) dando inicio al proceso de codificación abierta y axial.

Como resultado de esta primera fase surgieron conceptos y categorías iniciales como combinación variacional, sustitución variacional, y categorías como la denominada inicialmente transformación variacional, etc., además de condiciones y relaciones iniciales que empiezan a surgir de los datos.

En esta fase los conceptos y categorías que emergieron aún están incompletos en cuanto a sus propiedades y dimensiones. En otras palabras aún no se ha alcanzdo la saturación teórica

Fase 2. Aprender más sobre los conceptos y categorías iniciales. Luego de implementar, y analizar las primeras dos actividades didácticas siguiendo las fases y criterios para el diseño de actividades (Steffe, Thompson, y Von Glasersfeld, 2000) se rediseñan las actividades tres y cuatro, antes de ser implementadas. Las actividades se centran en el planteo y resolución de problemas por el método de la pendiente en diferentes contextos.

El propósito de esta fase es minimizar diferencias al interior de cada uno de los grupos. Como resultado de esta fase surgen nuevas categorías. Unas desaparecen y otras son absorbidas por una o varias categorías de orden superior.

Fase 3. Aumento de la teoría en profundidad. Esta fase se centra en maximizar diferencias entre grupos y a la vez entre categorías y subcategorías. El propósito en esta fase es ir saturando la teoría. Siguiendo el análisis a las actividades anteriores, se hacen correcciones a las actividades que implementan el método de solución de ecuaciones lineales diofánticas por el método de fracciones continuas. Como resultados parciales en esta fase surgen categorías y otras se fortalecen en el sentido de confirmar sus propiedades y dimensiones.

Fase 4. Nuevas vías de muestreo. Tomar datos desde otras fuentes con la finalidad de completar datos no saturados en las fases anteriores. Esto conduce a nuevas fuentes de datos que posibiliten maximizar diferencias y hallar la densidad y alcance para el propósito de la investigación.

Se diseñaron actividades con problemas retadores, en cuanto exigen al participante análisis, creatividad, búsqueda y explicación de relaciones, nuevas formas de prueba. Por ejemplo, dada la ecuación lineal diofántica en dos variables $ax + by = c$ ¿qué condiciones deben imponerse o exigirse sobre los números enteros a, b y c y las variables x e y para que la ecuación tenga sólo cuatro soluciones en los números enteros positivos?

Finalmente, otra acción importante finalizando el curso fue la realización de la entrevista retrospectiva semi estructurada a siete estudiantes vía meet.google.com con el procedimiento que se describió en párrafos anteriores de este mismo capítulo. La Figura 2 muestra un esquema del proceso de muestreo teórico que se describió en párrafos anteriores. Parece lineal, pero no lo es. Es un proceso permanente de ida y vuelta sobre los datos.

Figura 5. Fases muestreo teórico

El muestreo de la teoría fundamentada continúa a lo largo de todas las etapas del estudio. Pero el tipo de muestreo cambia a medida que se describe el proceso y se desarrolla la teoría (Bryant y Charmaz, 2019).

3.8. Gestión y análisis de datos

El muestreo teórico, el proceso de codificación y el análisis de datos en la teoría fundamentada son inseparables, aunque los textos los presentan normalmente en capítulos individuales. Como lo afirman Glaser y Strauss (2017), el análisis se refiere tanto al concepto como a los procesos de pensamiento que hay detrás de la asignación de significado a los datos.

Por tanto, estos elementos consituyen la base para construir un conjunto de categorías (temas, conceptos) desarrollados sistemáticamente en términos de sus propiedades y dimensiones y que se interrelacionen a través de declaraciones de relación para formar un marco teórico que explique ¿qué es pensamiento variacional?, ¿qué conceptos describen su naturaleza?, ¿cómo conocerlo? y ¿cómo impulsar su desarrollo?, desde el contexto propuesto.

3.8.1. El proceso de codificación

A partir de lo expresado en los dos párrafos anteriores, y siguiendo la lógica del análisis en la teoría fundamentada se traza el camino para ir desde la teoría sustantiva a la teoría formal (Glaser y Strauss, 2017). Para transitar a través de los procesos de planteo y resolución de problemas en situaciones locales a los procesos de planteo y resolución de problemas utilizando diversos métodos en una variedad de situaciones.

La codificación es un acto de interpretación. Este proceso no lineal, ni rígido, de ida y vuelta sobre los datos implica moverse de códigos o conceptos iniciales a conceptos abstractos. La vía explícita para esto son los subprocesos de codificación abierta donde surgen conceptos iniciales o tentativos, transitando por la codificación axial donde el investigador se aleja un poco de los datos en la búsqueda de diferencias y similitudes para construir categorías iniciales y la codificación selectiva que conduzca al núcleo de la teoría.

En el proceso de codificación abierta se identifican los conceptos iniciales mediante un análisis detallado de palabras, frases, símbolos, signos, fórmulas matemáticas representaciones gráficas, etc. El análisis continuo en búsqueda de diferencias y similitudes entre conceptos es lo que origina las categorías iniciales. Allí algunos conceptos iniciales pueden desaparecer o ser absorbidos por otros de mayor jerarquía. Sigue la búsqueda de relaciones entre categorías; esto conduce al núcleo de la categoría con la mayor densidad posible (vínculos y relaciones) que describen y explican la naturaleza del pensamiento variacional. Se trata de un proceso de ida y vuelta que se esquematiza en la Figura 3.

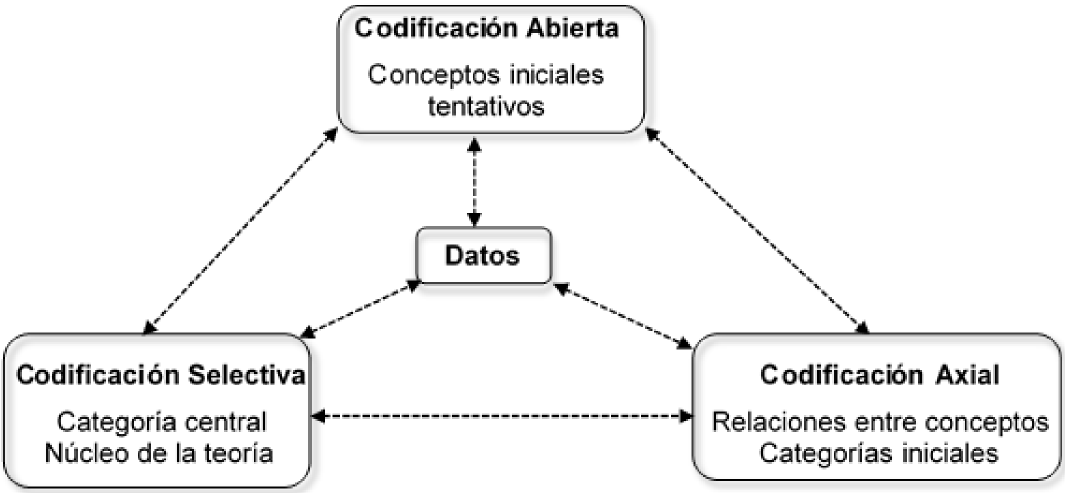


Figura 6. El proceso de codificación

La razón del ciclo visto de esta forma se debe a que en el proceso de análisis siempre hay necesidad de volver sobre los conceptos iniciales debido a que las actividades didácticas se modifican continuamente. Uno de los argumentos de las modificaciones es que se diseñaban y presentaban al estudiante nuevos problemas retadores. Además, la entrevista semi estructurada retrospectiva se aplicó finalizando el curso.

Uso de software. Debido a la gran cantidad de datos recolectados provenientes de diferentes fuentes en el proceso de codificación se utiliza como herramienta el software Nvivo (QSR, International, 2002). Este software ofrece la posibilidad de organizar las etiquetas (códigos) en un sistema de árbol jerárquico, y también es posible tener más de una lista de etiquetas, además, de ofrecer gran cantidad de herramientas que facilitan la codificación y presentación de informes.

3.8.2. El proceso de análisis de datos

El análisis de datos es una búsqueda sistemática de significados, donde los conceptos iniciales constituyen una base para la teoría formal. El análisis se compone esencialmente de dos fases: descontextualización y recontextualización (Bryant y Charmaz, 2019). En la primera fase se separan los datos de su contexto original y asignan códigos, mientras que en la segunda fase a los datos se les interpreta, se les da sentido y significado.

Para poder avanzar en los propósitos de la investigación se requiere precisar y aclarar lo que en investigación cuantitativa se denomina operacionalización de variables. Es decir, los elementos a nivel marco que engloban las estrategias, métodos, técnicas y procedimientos sobre los cuales se hace el análisis, para hallar conceptos y categorías, sus propiedades y dimensiones para caracterizar la naturaleza del pensamiento variacional.

En párrafos anteriores se hizo claridad acerca de las operaciones del pensamiento variacional cuando opera sobre el planteo y resolución de problemas y los resultados o productos de estas operaciones. Siguiendo esta caracterización, frente a la pregunta científica y los objetivos se hacen explícitos otros elementos claves para el análisis de los datos, los cuales se relacionan a continuación.

Grupos. Cada grupo hace referencia a los procesos involucrados en el planteo y resolución de problemas en contextos locales utilizando un método para la resolución. Por ejemplo, resolver problemas por la expansión de fracciones continuas simples.

Contextos. Procesos en el planteo y resolución de una diversidad de problemas en una variedad de contextos utilizando diferentes métodos para el planteo y resolución de los problemas.

Procesos. Un proceso representa el ritmo, así como las formas cambiantes y repetitivas de acción-interacción, más las pausas e interrupciones que se producen cuando las personas actúan e interactúan con el propósito de alcanzar una meta o resolver un problema (Corbin y Strauss, 2017).

El proceso tiene ciertas propiedades puesto que a) es de naturaleza variable, b) hay diferentes formas de conceptualizar el proceso, c) tiene una rutina acción-interacción, y d) el proceso puede desglosarse en subprocesos (Corbin y Strauss, 2017).

Naturaleza variable del proceso. Acción-interacción, secuencia de actos o acciones relacionadas y coordinadas, alineadas con algún propósito.

Formas de conceptualizar el proceso. El proceso suele describirse en términos de desarrollo, como fases o etapas, lo que implica un proceso lineal o progresivo de acuerdo a su naturaleza. El proceso no necesariamente procede en una y de forma lineal o no. El proceso puede ser una serie de actos relacionados con alguna finalidad. La acción e interacción en el proceso puede detenerse por un tiempo y avanzar o retroceder o subir y bajar, pero siempre ajustándose.

Rutina acción-interacción. El estudio del proceso es importante para comprender tanto las situaciones rutinarias como las no rutinarias o problemáticas. El estudio de la acción-interacción de rutina se refiere a los actos realizados con regularidad. El hecho de que la acción-interacción sea rutinaria no significa que no se estén haciendo ajustes.

Subprocesos. El proceso se puede descomponer en subprocesos. Los subprocesos también son conceptos; explican con más detalle cómo se expresa el proceso en el cual están inmersos.

De allí, visto el pensamiento variacional como operaciones sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en dos variables, los resultados de estas operaciones mentales, los grupos, los contextos y los procesos son los elementos que dan vida al análisis de datos en la búsqueda de hacer tangible la caracterización de la naturaleza del pensamiento variacional.

La Figura 4 muestra un esquema que sirve como orientación en el proceso de codificación, muestreo y análisis de datos.

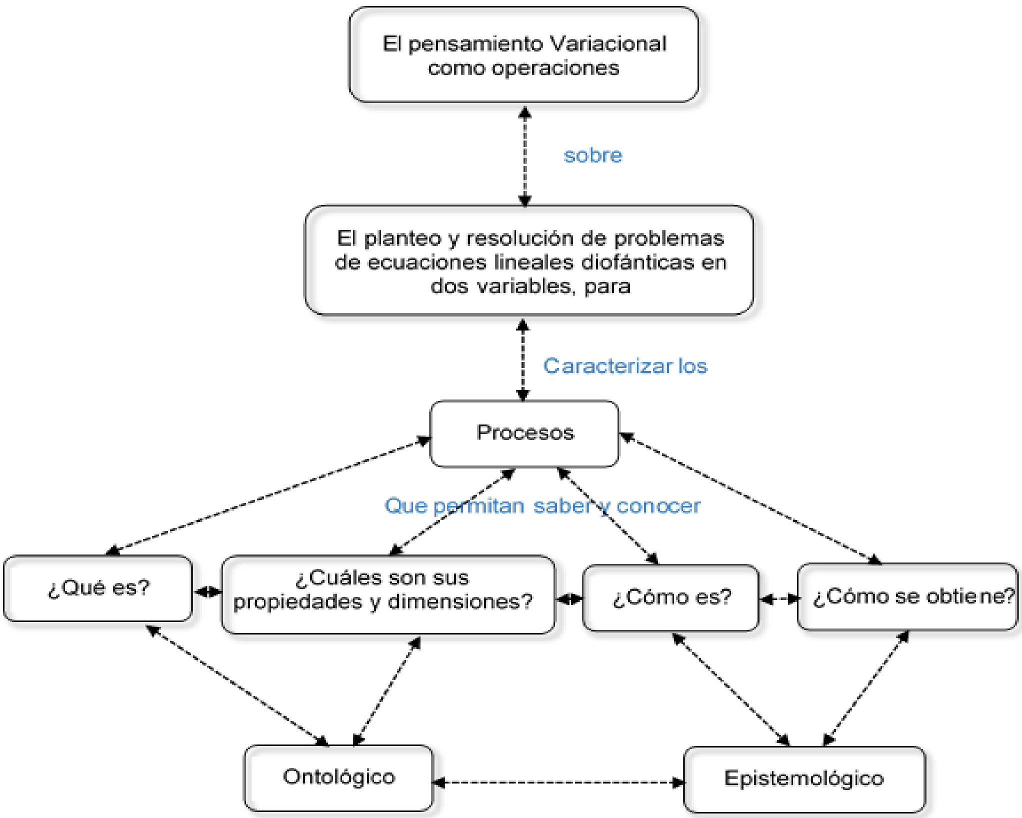


Figura 7. El análisis de datos

3.9. De las teorías locales a las teorías formales; niveles y alcances de la teoría

Glaser (1978) afirma que los niveles de teoría se mezclan entre sí a medida que una teoría se abstrae cada vez más desde lo sustantivo hasta lo formal. Por tanto, se debe prestar especial atención a los conceptos o códigos iniciales para dar solidez y mayor flexibilidad a los conceptos de nivel superior, mostrando evidencia en los procesos de unidades de análisis de nivel inferior a unidades de análisis de nivel superior.

Por otro lado, las teorías sustantivas tienen un alcance local fundamentado en los datos, pero los conceptos generados allí son independientes de los datos, dando origen a entidades conceptuales que representan las teorías formales. Por tanto, el alcance de la teoría se amplía y a la vez está limitado y condicionado por sus códigos y categorías teóricas (Bryant y Charmaz, 2019). Las teorías formales son menos específicas de un grupo o lugar, son más amplias, más densas y pueden ser utilizadas para comprender una gama más amplia de preocupaciones, finalidades y problemas sociales (Glaser y Strauss, 2017).

Los niveles conceptuales de la teoría y el alcance de la teoría vistos de esta manera sirven como punto de referencia y estrategia para ir de la teoría sustantiva a la teoría formal, en otras palabras para ir de conceptos iniciales a categorias iniciales y luego a conceptos formales, o para dar el paso de lo descriptivo a lo teórico.

En la Figura 5 se representa en el plano los niveles conceptuales (eje x) y el alcance de la teoría.

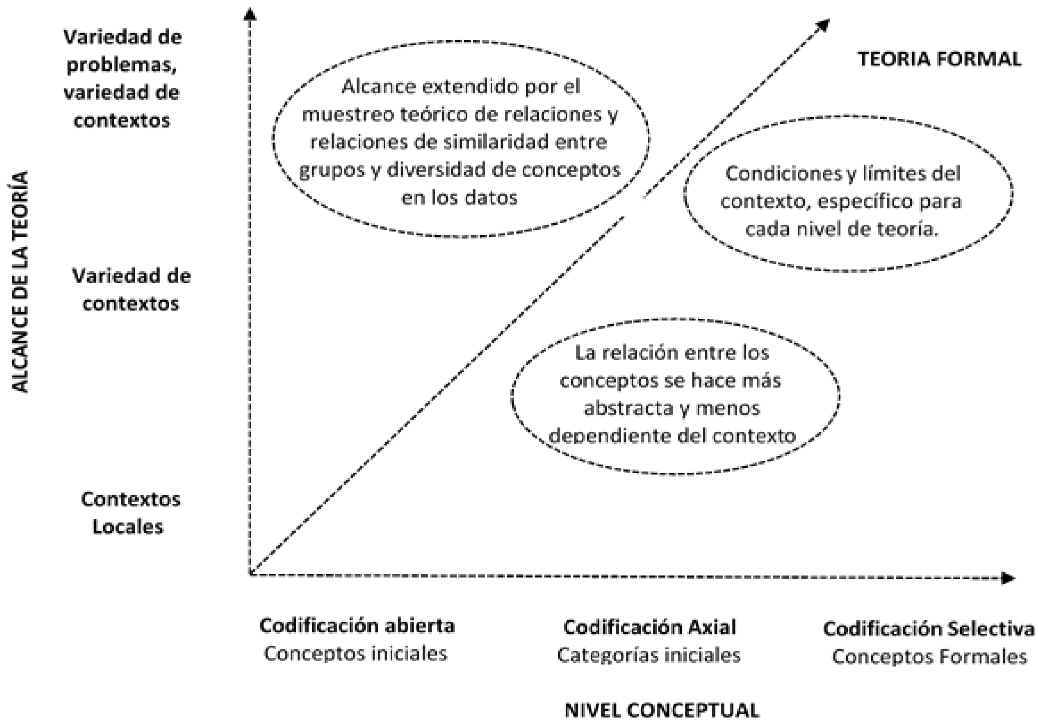


Figura 8.Niveles y alcances de la teoría. Adaptado de Bryant y Charmaz (2019)

Conclusiones

En este capítulo se describió, especificó y justificó con claridad el por qué un enfoque cualitativo desde la teoría fundamentada es una de las mejores vías para avanzar en la caracterización del pensamiento variacional desde el contexto propuesto. Se especifica además el diseño de investigación propuesto desde la teoría fundamentada.

Se destaca el vuelco y adaptación dado al diseño e implementación de actividades (didácticas para el estudiante, de orientación para el profesor), debido a que cerca del 70% de las ellas se desarrollan en plenos tiempos de la pandemia que afecta al mundo por el virus del Covid-19 y la manera como se recolectan los datos. Se destaca el diseño, fundamentación y adaptación de la entrevista clínica de Piaget a una entrevista retrospectiva semi estructurada como fuente para recolectar datos y del cuestionario para intentar valorar las actitudes de los participantes.

Se describe y explica con precisión la forma como interactúan el muestreo teórico, la saturación teórica y el análisis de datos como elementos que dan vida a la investigación desde la teoría fundamentada. Finalmente se muestra cómo a partir del desarrollo de los niveles conceptuales, crece a la par el alcance de la teoría, que conduce de teorías en contextos locales a la teoría formal con una variedad de problemas en una variedad de situaciones.

CAPITULO 4. ANALISIS DE DATOS Y RESULTADOS

4.1. Introducción

Para determinar avances en la caracterización del pensamiento variacional se requiere dar respuesta a la pregunta científica que orienta la investigación acerca del ¿cómo avanzar?, lo que a su vez conduce a las subpreguntas:

¿Cómo es el proceso cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas?, y ¿cómo es el proceso emergente de las formas de entender y formas de pensar variacional cuando los estudiantes plantean y resuelven problemas? en el contexto propuesto.

Estos cuestionamientos dirigen la atención en la búsqueda de estrategias, métodos y técnicas para interpretar y dar sentido a los datos que permitan construir conceptos y relaciones que identifiquen y describan este tipo de pensamiento. Las vías explícitas desde la teoría fundamentada son el análisis cualitativo de datos a partir de la codificación abierta, axial y selectiva, el muestreo y la saturación teórica que conduzcan de una teoría sustantiva a una teoría formal.

4.2. Ciclos de codificación, muestreo teórico y análisis de datos

Los procesos de codificación, el muestreo y saturación teórica y el análisis de datos son procesos no lineales inseparables que se traslapan. Son procesos de ida y vuelta permanente sobre los datos. De allí que, aunque en el capítulo anterior se muestran separados, no lo son.

La estrategia para el análisis de datos utilizando el método de comparación constante y la forma y orden como se redefinen e implementan las actividades didácticas, permiten organizarla en tres ciclos, compuestos a su vez por grupos que se interrelacionan entre sí.

Un grupo es entendido como el planteo y resolución de problemas por un método determinado. Luego el planteo y resolución se dan en varios grupos, finalizando con una variedad de problemas retadores en una variedad de contextos. Esta forma de trabajo es coherente con las fases del muestreo y saturación teórica, así como los niveles y alcances de la teoría que se pretenden abordar.

4.2.1. Primer ciclo de codificación y análisis de datos; hacia la construcción de teorías sustantivas

En el análisis siempre se tiene en mente la distinción acerca de, tanto el pensamiento variacional como operaciones sobre elementos (problemas) como los resultados de estas operaciones. Por tanto, allí hay algo que varía (variable) y esa variación produce un nuevo estado (cambio).

Se empieza el trabajo y el proceso de codificación abierta con la selección de formas y estrategias de solución a las cuestiones propuestas cuando se utiliza el método de la pendiente. Esto corresponde a las actividades A1 MCD, A2 EDL I y A3 EDL II, y el trabajo de los participantes E1, E6, E7, E10, E15, y E19 considerados inicialmente como incidentes.

Siguiendo el esquema propuesto en las actividades didácticas para el estudiante y la actividad que orienta al profesor, se presenta en forma detallada un ejemplo que aporta al segundo objetivo específico, así como las estrategias de análisis y los resultados iniciales.

Cada actividad inicia con un problema para que cada participante lo resuelva a su manera con los conocimientos que tiene a su disposición. En la actividad A2 EDL I, se propone de entrada que los estudiantes resuelvan la ecuación lineal diofántica

$6x + 21y = 102$ en números enteros. Se da un espacio de tiempo cercano a los cinco minutos para que resuelvan esta tarea.

Como se esperaba, la mayoría de participantes empezaron a resolver la ecuación en el contexto de los números reales. Lo primero que hicieron fue despejar la variable y. Pero, de ahí no pasaron. Por tanto, el profesor sugiere que trabajen sobre las Cuestiones 1, 2 y 3. La Figura 9 muestra la respuesta del participante codificado como E10 A2 EDL I. La codificación significa: E10, estudiante 10. A2, actividad didáctica número 2 y EDL I, el tema ecuaciones lineales diofánticas I.

Cuestión 1. **Dada la ecuación $6x + 21y = 102$ con coeficientes enteros. Encuentre varias parejas de números enteros que se les puedan asignar a las variables x e y, de tal manera que la igualdad se cumpla. Escriba los posibles valores para estas variables en la siguiente tabla. La tercera columna es para que verifique la veracidad de la igualdad.**

x	y	$6x + 21y =$ ¿...?
10	2	$6(10)+21(2)=102$
24	-2	$6(24)+21(-2)=102$
-4	6	$6(-4)+21(6)=102$
38	-6	$6(38)+21(-6)=102$
52	-10	$6(52)+21(-10)=102$
66	-14	$6(66)+21(-10)=102$

Cuestión 2. **Analice la columna de los valores para la x. ¿Encuentra algún patrón o relación entre estos valores? Escríbalo. Haga lo mismo con la columna de los valores de la variable y.**

Según la columna "x" el patrón que tiene es que a cualquier valor encontrado de "x" que cumpla la igualdad se le adiciona o disminuye "7" y al valor de "y" si a "x" se le adiciona, "y" se le disminuye (2) y si a "x" se le disminuye (-7) a "y" se le adiciona (2).

Cuestión 3. **¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad? Explique.**

→ El valor que se encuentre de "x" y "y" debe adicionarle a uno y disminuirle al otro. Pero, no a ambos valores disminuirles o adicionarles al mismo tiempo.

Figura 9. Inicio de codificación abierta

Cuestión 2. Analice la columna de los valores para la x. ¿Encuentra algún patrón o relación entre estos valores? Escríbalo. Haga lo mismo con la columna de los valores de la variable y.

Pues mirando la pendiente de la ecuación podemos ver que la diferencia entre cada valor de x es de 7 y entre cada valor de "y" la diferencia es de 2.

Cuestión 3. ¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad? Explique.

1. Que los valores de x y y aumenten o disminuyan proporcionalmente en base a un valor que depende de la pendiente.

Figura 10. Origen concepto combinación variacional

La Figura 10, por su parte muestra el trabajo realizado por el participante E15 A2 EDL I. Las Figuras 9 y 10 muestran una descripción verbal de los estudiantes acerca de los patrones en cada una de las variables x e y y los nexos entre ellas que deben cumplirse para ser solución de la ecuación. Es una manera inicial de cómo los estudiantes interpretan estos nexos. En términos de la teoría fundamentada para el análisis es lo que se denomina concepto indicador. Es decir, son conceptos que se derivan de los datos reales y son indicadores empíricos del concepto inicial.

Junto a estos dos incidentes también se analizaron y contribuyeron los trabajos de E2 A2 EDL I, E6 A2 EDL I, E8 A2 EDL I y E14 A2 EDL I quienes aportaron con los dos primeros conceptos: sustitución variacional y combinación variacional, que a su vez dieron origen a una categoría de orden superior, al cual más adelante se le asignó el concepto de transformación variacional. La Tabla 2 y la Tabla 3, muestran las propiedades y dimensiones de los primeros conceptos.

Tabla 2. Sustitución variacional sus propiedades y dimensiones

Código	**Descripción**	**Propiedad**	**Dimensión**
Sustitución variacional	Reemplazar las variables x e y por números enteros positivos o negativos	Asignar números enteros a las variables x e y que hagan verdadera la ecuación.	Tipos de números asignados
Variable: Números enteros positivos o negativos signados			
Cambio: Nueva solución particular a la ecuación			

Tabla 3. Combinación variacional, propiedades y dimensiones

Código	Descripción	Propiedad	Dimensión
Combinación Variacional	Relaciones entre los números asignados a las variables x e y para que se cumpla la ecuación.	Condiciones sobre los números enteros que se asignan a las variables x e y para que se cumpla la ecuación.	Parejas (x, y) de números enteros como solución.
Variable: Números enteros positivos o negativos asignados variables x e y que cumplan la condición de la relación.			

Cambio: Las parejas (x, y) de números enteros como soluciones particulares a la ecuación dada.

Se inicia aquí el proceso de codificación axial, donde el investigador se aleja un poco de los códigos in-vivo o datos originales para empezar a buscar diferencias o similitudes de los códigos iniciales. Empiezan a surgir categorías de orden superior que absorben o engloban conceptos. Para el caso surge la categoría transformación variacional como se muestra en la Tabla 4.

Las tablas que muestran codificación axial presentan cambios sustanciales respecto a las tablas de codificación abierta puesto que, para trabajar las relaciones entre las categorías, Strauss y Corbin (1990) sugieren examinar los datos y los códigos basados en un paradigma de codificación que se centra y relaciona las condiciones causales, el contexto, las condiciones de intervención, las estrategias de acción/interacción y las consecuencias.

Tabla 4. Iniciando la codificación axial

Codificación abierta	***Codificación axial***		
Nombre código	*Nombre categoría*	*Propiedades*	*Dimensiones*
Sustitución variacional Combinación variacional	Transformación variacional	Sustituir, combinar parejas de números enteros.	Tipos de solución particular
Descripción: Tipos de soluciones como resultado de las operaciones del pensamiento de sustituir y combinar variacionalmente.			
Variable: Sustituir y combinar números enteros que cumplan las condiciones para las variables x e y.			
Cambio: Los diferentes soluciones a la ecuación diofántica lineal.			
Contexto y condiciones de intervención: Actividad inicial presencial en el salón de clase y en línea después del inicio de cuarentena debido al Covid-19. Trabajo grupal e individual.			
Estrategia: Actividad didáctica A2. Tema: Ecuaciones Lineales Diofánticas I			
Objetivo de aprendizaje: Construir procedimientos para hallar soluciones en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.			
Estrategias de acción/interacción: Los estudiantes se proponen resolver problemas que involucran EDL utilizando diversas estrategias inductivas desde la variación y el cambio.			
Consecuencias: cada estudiante puede generar diferentes estrategias para solucionar los problemas, así como diferentes formas de entender y de pensar el proceso.			
Evidencia: Material impreso y digital.			

El proceso de codificación abierta y axial continúa permanentemente. La Tabla 5 muestra nuevos códigos y categorías.

Tabla 5. Evolución de códigos y categorías

Codificación abierta	***Codificación axial***		
Nombre código	*Nombre categoría*	*Propiedades*	*Dimensiones*
Asignar	Formalización variacional	Hacer corresponder letras o símbolos	Tipos de asignaciones
Formular		Simbolizar	Tipos de signos, símbolos, letras
Fijar condiciones		Expresiones algebraicas.	Tipos de fórmulas
Acciones del proceso		Relaciones	Tipos de relaciones
Descripción: Niveles de formalizar el conocimiento para organizar y reorganizar las acciones/interacciones en la solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.			
Variable: Expresiones de asignación, formulación, condiciones y acciones del proceso.			
Cambio: Tipos de asignación, formulación, condiciones y acciones del proceso			
Contexto y condiciones de intervención: Actividad inicial presencial en el salón de clase y en línea después del inicio de cuarentena debido al Covid-19. Trabajo grupal e individual.			
Estrategia: Actividad didáctica No. 2. Tema: Ecuaciones Lineales Diofánticas I			
Objetivo de aprendizaje: Construir procedimientos para hallar soluciones en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.			
Estrategias de acción/interacción: Los estudiantes se proponen resolver problemas que involucran EDL utilizando diversas estrategias inductivas desde la variación y el cambio.			
Consecuencias: cada estudiante puede generar diferentes estrategias para solucionar los problemas, así como diferentes formas de entender y de pensar el proceso.			
Evidencia: Material impreso y digital.			

Como es de esperarse el proceso de codificación y análisis sigue evolucionado. En este punto, entra en juego parcialmente la codificación selectiva y a partir de allí surgen conceptos primarios a nivel abstracto de la integración de categorías, pero todavía a nivel de codificación sustantiva.

A continuación, se muestran los resultados parciales del primer ciclo de codificación. Aunque hay resultados intermedios, estos no se presentan por cuestiones de espacio. Es de esperase también que estas categorías aun no son definitivas, pero sí conforman un primer avance de la teoría sustantiva.

Con el propósito de aportar a la subpregunta asociada al segundo objetivo específico, ¿cómo es el proceso cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en el contexto propuesto?, a continuación, se muestran las categorías iniciales, sus propiedades y dimensiones.

La Tabla 6 muestra las propiedades y dimensiones de la categoría estrategias variacionales en la resolución de problemas como respuesta parcial al segundo objetivo específico.

Tabla 6. Estrategias variacionales en la resolución de problemas grupo 1

Categoría: Estrategias variacionales en la de solución de problemas

Descripción: Criterios y acciones variacionales a seguir para solucionar una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$

Propiedades	Dimensiones	Descripción
Transformación variacional		Tipos de soluciones como resultado de las operaciones del pensamiento de sustituir y combinar variacionalmente.
	Sustitución variacional	Tipos de números enteros asignados a las variables x e y que hagan verdadera la ecuación.
	Combinación variacional	Tipos de condiciones sobre los números enteros que se asignan a las variables x e y para que se cumpla la ecuación.
Formalización Variacional		Niveles de formalizar el conocimiento para organizar y reorganizar las acciones/interacciones en la solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.
	Asignar	Tipos de letras y símbolos asignados a las variables y constantes del problema dado.
	Condiciones del proceso	Niveles de condiciones necesarias y/o suficientes para que la ecuación $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros.
	Formular	Tipos de fórmulas (expresiones algebraicas) asignadas para representar el conocimiento mediante letras, símbolos y signos.
	Representar	Tipos de gráficos o tablas para mostrar la variación y cambio en las soluciones a la EDL
	Secuencia de acciones	Niveles de acciones/interacciones a seguir para hallar solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.
Prueba Variacional		Tipos de razonamientos inductivos como argumentos de prueba.

	Prueba inductiva	Niveles de argumentos y/o secuencias de ejemplos particulares como esquema de prueba.
Verificación variacional		Formas de comprobar que las soluciones halladas cumplan con la ecuación y el contexto del problema.
	Describir	Niveles de expresión mediante lenguaje natural para el comportamiento variacional de las soluciones al problema.

En la Tabla 6, se evidencia que las subcategorías se vuelven propiedades de una categoría superior, mientras que las dimensiones corresponden a las variaciones que se presentan entre las propiedades (subcategorías). Por ejemplo, la subcategoría, formalización variacional tiene como propiedades: asignar, condiciones del proceso, formular, representar, y secuencia de acciones. A la vez cada una de ellas varía en su interior.

En cuanto al proceso de planteo de problemas como aporte a la pregunta anterior, en la Tabla 7 se observan la categoría estrategia para el planteo de EDL junto a las subcategorías.

Tabla 7. Estrategia para el planteo de EDL de la forma $ax + by = c$

Categoría	Propiedades	Dimensión
Estrategia para el planteo de EDL de la forma $ax + by = c$		Formas de organizar y reorganizar el conocimiento para plantear nuevas EDL de la forma $ax + by = c$
	Criterios para el planteo de EDL	Tipo de criterios necesarios y/o suficientes para el planteo de ecuaciones $ax + by = c$ con coeficientes enteros tenga solución en los números enteros
	Acciones/interacciones	Tipos de secuencia a seguir para plantear una EDL que garantice solución en los números enteros.
	Verificación	Tipos de prueba para que la EDL $ax + by = c$ planteada tenga solución en los números enteros.

Con la finalidad de aportar a la sub pregunta de investigación, ¿Cómo es el proceso emergente de las formas de entender y formas de pensar variacional cuando los estudiantes plantean y resuelven problemas en el contexto propuesto?, relacionada con el primer objetivo, al volver a las Figuras 8 y 9 y analizarlas surgen los primeros conceptos de la codificación abierta, que se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Formas de entender soluciones

Código	**Propiedad**	**Dimensión**
Formas de entender soluciones	Si (x_0, y_0) es una solución particular se debe adicionar a x_0 y disminuir a y_0, pero no disminuirle o adicionarle a ambas al mismo tiempo.	Formas de interpretar relación entre soluciones.
	Los valores de x e y aumentan o disminuyen proporcionalmente en base a un valor que depende de la pendiente.	
Variable: Formas de interpretar la relación entre soluciones		
Cambio: Formas de entender las relaciones entre soluciones.		
Descripción: Todas las soluciones se obtienen a partir de una solución conocida y que los números para x e y varían proporcionalmente.		

La Tabla 9 por su parte muestra la categoría formas de entender en contexto local, grupo 1, como respuesta al primer objetivo.

Tabla 9. Formas de entender en contextos local, grupo 1

Propiedades (Formas de entender)	**Descripción** (Código in-vivo) (Formas de interpretar)	**Dimensión**
El $mcd(a, b)$	Representa la mayor cantidad de grupos con los elementos de los conjuntos que representan a a y b como conjuntos	Tipos de interpretación al $mcd(a, b)$
	Es un proceso de divisiones sucesivas	
	El entero más grande que divide exactamente a a y b	
	$mcd(a, b) = as + bt$ es un proceso de ingeniería inversa al Algoritmo de Euclides	
	$mcd(a, b) = as + bt$ es una función y la pendiente de la recta permite hallar los valores de s y t.	
	Es condición para que la ecuación $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros	
Las soluciones $x = -102 + 7t$, $y = 34 - 2t$	El valor de x es igual a ciento dos negativo más siete veces un valor de (t) perteneciente a los números enteros.	Tipos de soluciones a partir de un numero entero como constante más o menos una cantidad de veces t
	El valor de y es igual a treinta y cuatro menos dos veces el valor de (t) perteneciente a los números enteros	

	Estas dos fórmulas están en función de una misma variable t que al pertenecer a los números enteros va a hacer que los valores de x e y también sean enteros	Tipos de fórmulas como funciones que dependen de una misma variable t
	Son combinaciones lineales que dan solución a la ecuación, siendo t cualquier valor constante en cambiar las soluciones obtenidas.	Tipos de combinaciones lineales donde t determina las soluciones
La letra t en $x=-102+7t$, $y=34-2t$	El valor independiente perteneciente a los números enteros donde con este valor se obtienen todas las soluciones particulares (x) e (y)	Permite hallar todas las soluciones
	Permite hallar todas las soluciones a la ecuación y permitirá que haya esa proporcionalidad en cada una de las soluciones respectivas.	Permite que haya proporcionalidad en cada una de las soluciones.
	Representa la variable independiente que permite hallar todas las soluciones particulares de (x) y (y) que permiten dar solución a la ecuación diofántica.	Tipos de números asignados a la variable t
Formas de entender la ecuación $6x+21y=102$	Seis veces la cantidad de (x) más veintiún veces el valor de (y) es igual a un valor numérico de ciento dos.	Ecuación como relación de variación entre las variables x e y
Infinitas soluciones	Nuevas soluciones a partir de diferencias entre valores de x y valores de y siguiendo la pendiente de la recta	Tipos de soluciones a partir de diferencias enteras
	Los valores de las variables x e y forman sucesiones de números enteros que crecen o decrecen en forma proporcional	Tipos de sucesiones de números enteros

La Tabla 10, muestra la categoría formas de pensar en contexto local 1 como respuesta al primer objetivo.

Tabla 10. Formas de pensar en contexto local 1

Propiedades (Formas de pensar)	**Dimensión (Formas de entender)**	**Descripción**
Estrategias variacionales en la solución de ecuaciones $ax+by=c$	Tipo de transformación	Acciones/interacciones que tienen como propósito resolver un problema que involucra una EDL de la forma $ax+by=c$
	Tipo de formalización	
	Tipo de prueba	
	Formas de verificar	
	Secuencia de acciones	
Estrategia para el planteo de EDL de la forma $ax+by=c$	Criterios para el planteo de EDL	Acciones/interacciones que tienen como propósito plantear una ecuación de la forma $ax+by=c$ donde a y b son números enteros, que tenga solución en los números enteros.
	Acciones	
	Verificación	

Finalmente, como resultado de este primer ciclo de codificación fundamentado en el método de comparación constante y los procesos de codificación abierta, axial y selectiva surgen las categorías: a) estrategias variacionales en la resolución de problemas grupo 1, b) estrategias para el planteo de EDL de la forma $ax + by = c$, c) formas de entender en contextos local 1, y d) formas de pensar en contexto local 1.

Las categorías a) y b) surgen como respuesta parcial al segundo objetivo. Mientras que la segunda y tercera son respuesta parcial al primer objetivo. En cuanto al tercer objetivo se aborda en los siguientes ciclos, puesto que allí las relaciones entre conceptos se hacen cada vez más abstractas y menos dependientes del contexto.

4.2.2. Segundo ciclo de codificación y análisis de datos: Aprendiendo más sobre los conceptos y categorías iniciales

El trabajo de implementación y análisis continúa con las actividades A4 FCI, A5 FCII y A6 AEVM, correspondiente al grupo de solución de ecuaciones diofánticas por fracciones continuas, complementando las categorías del grupo anterior. Los siguientes párrafos muestran los resultados de los procesos de codificación abierta, axial y selectiva de una forma más condensada y menos detallada respecto a la forma como se presentaron procesos de codificación en el primer ciclo.

La Tabla 11 y la Tabla 12, muestran las categorías estrategias variacionales en la resolución y planteo de problemas emergentes del grupo 2, como aporte al segundo objetivo de investigación y complemento a las categorías emergentes en el primer ciclo.

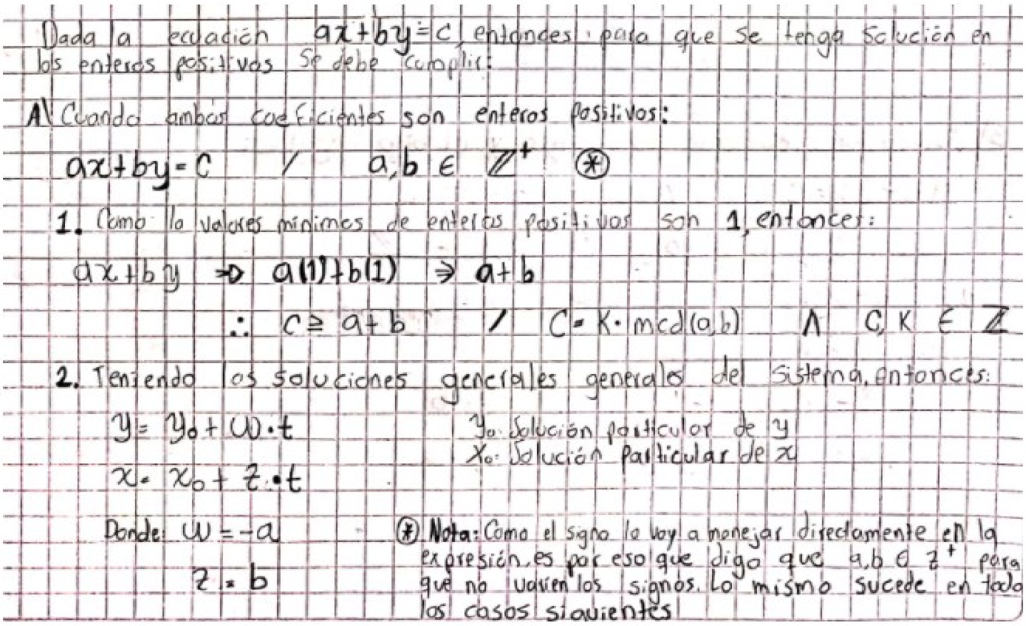
Tabla 11. Estrategias variacionales en la de resolución de problemas grupo 2

Categoría: Estrategias variacionales en la de resolución de problemas

Descripción: Criterios y acciones variacionales a seguir para solucionar problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$

Propiedades	Dimensiones	Descripción
Transformación variacional		Tipos de soluciones como resultado de las operaciones del pensamiento de sustituir y combinar variacionalmente.
	Relación variacional	Tipos de patrones o regularidades como sumas y diferencias enteras entre los valores de p y q en la expansión de fracciones racionales como fracciones continuas
Formalización Variacional		Niveles de formalizar el conocimiento para organizar y reorganizar las acciones/interacciones en la solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.
	Solución particular	Tipo de procedimientos para hallar soluciones particulares a la ecuación $ax + by = c$
	Secuencia de acciones	Niveles de acciones/interacciones a seguir para hallar solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$ utilizando el método de la pendiente y el método de fracciones continuas.
Generalización variacional	Expresiones algebraicas como fórmulas	La fórmula: $C_n = \frac{a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}}$, con $p_{n-1} = q_{n-1} = 1$ y $p_{n-2} = q_{n-2} = 0$ sirve para hallar el enésimo convergente.
		La fórmula $p_n.q_{n+1} + q_n.p_{n+1} = \pm 1$ es una solución particular de la ecuación $ax + by = 1$
	Tipos de soluciones enteras	Cuando $c \geq a + b$ o $c \leq -a - b$, donde $c = k \cdot mcd(a, b)$ con $c, k \in \mathbb{Z}$, se determinan inmediatamente condiciones sobre el parámetro t para que la solución general $x = x_0 + zt$, $y = y_0 - wt$ tenga solución en los enteros positivos, con (x_0, y_0) como solución particular. La Figura 10 y la 11 muestran lo realizado por un participante. Un análisis similar permite hallar soluciones en los números enteros negativos.
Prueba Variacional	Prueba empírica	Niveles de argumentos y/o secuencias de ejemplos particulares como esquema de prueba.
	Prueba inductiva	Tipos de argumentos, ejemplos y explicaciones a partir de los cuales se convence acerca de la verdad de las propiedades de la expansión en fracciones continuas de fracciones racionales y las fórmulas para generalizar tipos de soluciones.

La Figura 10, muestra el análisis que hace a la ecuación $ax + by = c$ cuando se exigen solución en los números enteros positivos, realizado por el participante E15 A6 AEVM.


Dada la ecuación $ax+by=c$ entonces para que se tenga solución en los enteros positivos se debe cumplir:

A\ Cuando ambos coeficientes son enteros positivos:

$ax+by=c$ / $a,b \in \mathbb{Z}^+$ (*)

1. Como lo valores mínimos de enteros positivos son 1, entonces:

$ax+by \Rightarrow a(1)+b(1) \Rightarrow a+b$

$\therefore c \geq a+b$ / $c = k \cdot mcd(a,b)$ $\wedge$ $c, k \in \mathbb{Z}$

2. Teniendo los soluciones generales generales del sistema, entonces:

$y = y_0 + w \cdot t$ — y_0: Solución particular de y

$x = x_0 + z \cdot t$ — x_0: Solución particular de x

Donde: $w = -a$

$z = b$

(*) Nota: Como el signo lo voy a manejar directamente en la expresión, es por eso que digo que $a,b \in \mathbb{Z}^+$ para que no varíen los signos. Lo mismo sucede en todo los casos siguientes

Figura 11. Generalización tipos de solución

En la Figura 11 se observa la forma en que el estudiante E15 sustituye los valores de las variables x e y por el número 1, puesto que el problema exige únicamente soluciones en los enteros positivos. Esto lo conduce a establecer condiciones del número c respecto a los números a y b. Se evidencia también la manera en que hace uso de fórmulas construidas con anterioridad.

El investigador por su parte interpreta y da significado a los resultados de las formas como el estudiante trabaja desde la variación y cambio, como una estrategia variacional para la resolución del problema de acuerdo a las condiciones exigidas en la solución, además de pensar hacia atrás y utilizar fórmulas que había construido con anterioridad.

Por su parte la Figura 11, muestra las acciones realizadas por el participante E15 A6 AEVM como continuación para hallar las condiciones sobre t que garantice solución general en los enteros positivos.

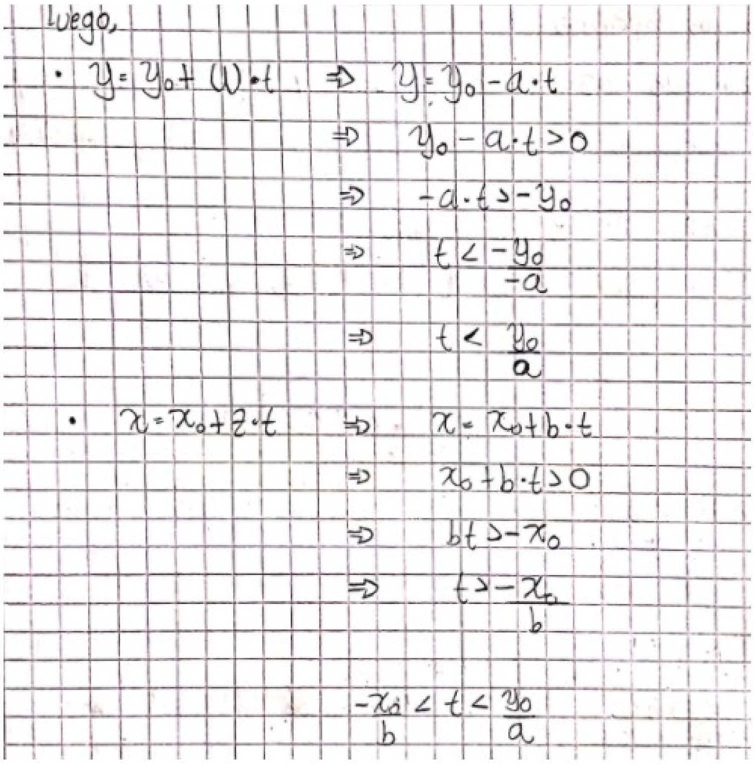


Figura 12. Condiciones sobre t

La Figura 12 evidencia las acciones del estudiante E15 para manipular las expresiones algebraicas que representan las infinitas soluciones a la ecuación $ax + by = c$ estableciendo relaciones y condiciones sobre la variable t de tal manera que cumpla con las exigencias del problema. Para la codificación y análisis de datos es una muestra de la manera en que el estudiante generaliza y llega a la condición de los numeros enteros que se pueden asignar al parámetro t.

La Tabla 12, muestra la nueva categoría estrategias para el planteo de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$.

Tabla 12.Estrategias para el planteo de problemas

Categoría	Propiedades	Dimensión
Estrategia para el planteo de problemas que involucra ecuaciones lineales diofánticas $ax + by = c$		Formas de organizar y reorganizar el conocimiento para plantear problemas que involucran ecuaciones diofánticas de forma $ax + by = c$
	Criterios para el planteo de problemas que involucran EDL	Tipo de criterios necesarios y/o suficientes para que la ecuación $ax + by = c$ involucrada tenga solución en los números enteros.
	Acciones	Tipos acciones/interacciones y secuencias a seguir para plantear problemas de la vida real que garanticen solución en los números enteros.
	Verificación	Formas de comprobar que la solución al problema se ajuste a su contexto

La Tabla 13, muestra nuevas categorías asociadas a las formas de interpretar como formas de entender, como aporte a las respuestas que se buscan al primer objetivo.

Tabla 13. Formas de entender en contexto local, grupo 2

Propiedades (Formas de entender)	**Descripción** (Código in-vivo)	**Dimensión (Formas de interpretar)**
La expansión en fracciones continuas de una fracción racional $\frac{p}{q}$	Es un proceso de divisiones sucesivas similar al Algoritmo de Euclides.	Tipos de interpretación
	El proceso de expansión termina cuando el valor del producto de la parte entera y el valor de q es igual al de p, es decir cuando $a_n.q_n = p_n$.	
Los números p_i y q_i en el proceso de expansión de la fracción racional $\frac{p}{q}$	Si se toma p_1 y se resta con p_2 se obtiene como resultado p_3. Esto sucede si se toman dos p_n consecutivos va a dar el que sigue a estos. Esto se aplica sin tener en cuenta el p_0. Se puede expresar como $p_n - p_{n+1} = p_{n+2}$ $/$ $n \neq 0$ Si tomamos dos valores de q consecutivos y se suman, va a dar un resultado que va a ser igual al q que está detrás del primero. Se puede expresar $q_{n-1} + q_n = q_{n-2}$	Tipos de secuencias de números enteros para los p_i y q_i
	El primer valor de q pasa a ser el segundo valor de p, y de la misma forma el segundo valor de la columna de q pasa a ser el tercer valor de p y así sucesivamente.	Tipos de relación

	El enésimo convergente se encuentra con la fórmula: $C_n = \frac{a_n . p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n . q_{n-1} + q_{n-2}}$, donde $p_{n-1} = q_{n-1} = 1 \ y \ p_{n-2} = q_{n-2} = 0$	Tipos de fórmulas
Los números $p_n \ y \ q_n$ en el convergente C_n	Si se fija en cuanto varía un C_n se puede ver que siempre va a ser 1 o menor que uno. En el caso que sea 1 puede ocurrir sólo entre el C_0 y C_1 de ahí en adelante siempre será menor que 1 y mayor a 0	Tipo de sucesión de números con valores entre 0 y 1
	La fórmula $p_n . q_{n+1} + q_n . p_{n+1} = \pm 1$ es una solución particular de la ecuación $ax + by = 1$	Tipos de solución particular
	La fórmula : $C_n = \frac{a_n . p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n . q_{n-1} + q_{n-2}}$, donde $p_{n-1} = q_{n-1} = 1 \ y \ p_{n-2} = q_{n-2} = 0$, funciona porque a partir de ejemplos particulares se generaliza.	Tipo de argumento
Prueba	Se conoce precisamente que para todos los casos los valores $q_{-1} = 0$ y $q_{-2} = 1$, luego si se quiere hallar el q_n pues se sabe que a_n tiene un valor, q_{n-1} tiene un valor y q_{n-2} tiene otro valor. Sólo es identificarlos y reemplazarlos en la fórmula. Además, $n \geq 0$, los a_n son las partes enteras que resultan del algoritmo de la división	Tipo de explicación
Las condiciones y variaciones impongan sobre a, b y c en la ecuación $ax + by = c$	Las variaciones en las constantes a, b y c determinan condiciones sobre t según el tipo de solución que se exija a la ecuación.	Tipos de condiciones sobre t

La Tabla 14, muestra nuevas categorías asociadas a las formas de entender como formas de pensar, como aporte a las respuestas que se buscan al primer objetivo

Tabla 14. Formas de pensar en contexto local, grupo 2

Propiedades (Formas de pensar)	**Dimensión (Forma de entender)**	**Descripción**
Estrategias variacionales en la resolución de problemas que involucran ecuaciones $ax + by = c$	Tipo de transformación	Variedad de acciones/interacciones que tienen como propósito resolver un problema que involucra una EDL de la forma $ax + by = c$
	Tipo de formalización	
	Tipo esquema de prueba	
	Generalización variacional	
	Formas de verificar	
	Secuencia de acciones	
Estrategias de generalización	Generalización por inducción	Tipos de condiciones impuestas sobre los coeficientes de la ecuación determinan los tipos de solución.

Estrategias de prueba	Prueba empírica	Tipos de argumentos, ejemplos y explicaciones a partir de los cuales se convence acerca de la verdad de las propiedades de la expansión en fracciones continuas de fracciones racionales
		Variedad de argumentos y ejemplos para convencer acerca las variaciones en los coeficientes de la ecuación $ax + by = c$ que determinan el tipo de solución.
Estrategia para el planteo de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$	Criterios para el planteo de EDL	Acciones/interacciones que tienen como propósito plantear una ecuación de la forma $ax + by = c$ donde a y b son números enteros, que tenga solución en los números enteros.
	Acciones	
	Verificación	

En este segundo ciclo de codificación, se aprende, profundiza y amplia acerca de las propiedades y dimensiones de las categorías. De la misma forma surgen nuevas subcategorías, algunas completando las del ciclo 1, puesto que el segundo grupo implica resolver problemas utilizando otro método.

4.2.3. Integrando categorías, primero y segundo ciclo de codificación

En el primer y segundo ciclos de codificación se integran la codificación abierta, axial y selectiva. Sin embargo, el análisis se centra más en la codificación abierta y axial; la codificación abierta puesto que, los conceptos y/o categorías iniciales surgen directamente de los datos, mientras que en la codificación axial el investigador se aleja un poco de los datos en la búsqueda de diferencias y similitudes para generar categorías y subcategorías.

La codificación abierta y selectiva realizada al interior y entre las categorías emergentes hasta el momento se utiliza como estrategia para integrar las categorías y así dar respuesta tentativa y parcial a la subpregunta de investigación: ¿Cómo interpretar y dar sentido a los datos para describir y explicar la naturaleza del proceso del pensamiento variacional desde el contexto propuesto?, que a la vez aporta al tercer objetivo y complementa los dos primeros.

Lo que se presenta a continuación es un proceso de codificación selectiva a un nivel más abstracto, trabajo que conduce a la integración de categorías y su densidad de relaciones. La integración al interior de las categorías y sus subcategorías se presenta mediante figuras como diagramas que esquematizan estas relaciones.

Los diagramas integradores son una forma visual de mostrar la integración acumulada de categorías, sus propiedades y relaciones. Muestran como las categorías y subcategorías se relacionan con la categoría central. Densidad en el sentido de conectarse no el sentido matemático de relaciones de inclusión, orden, dependencia, etc.

La Figura 13 muestra una red de la densidad de relaciones en la categoría estrategias variacionales cuando se integran las estrategias en la resolución de

Problemas grupo 1 y grupo 2 y las subcategorías de la misma.

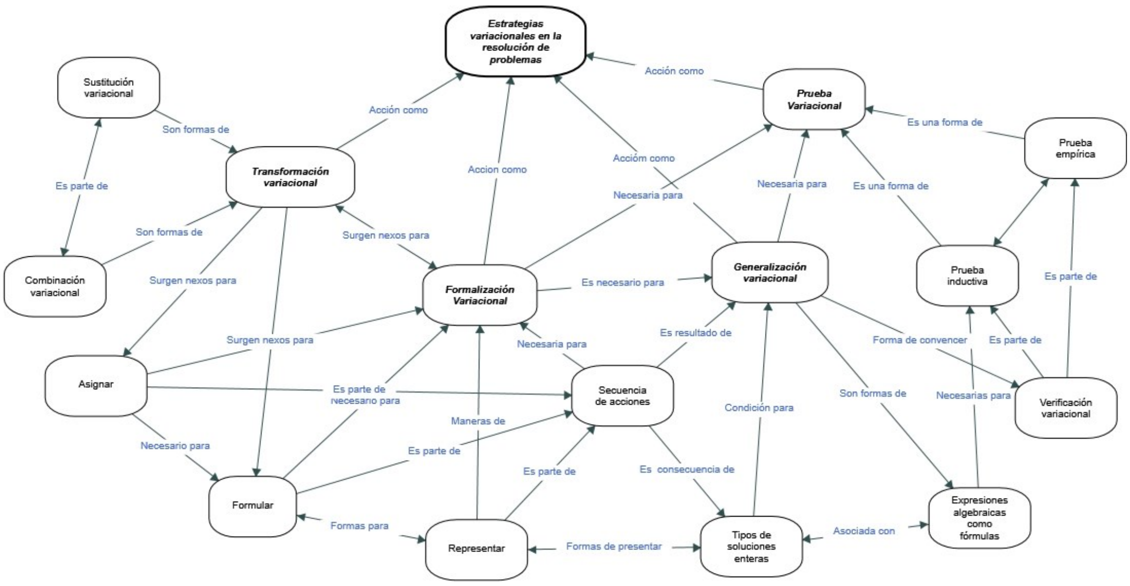


Figura 13. Densidad estrategias variacionales en la resolución de problemas

El diagrama de la Figura 14, muestra la densidad de relaciones en la categoría estrategias variacionales para el planteo de problemas y sus subcategorías.

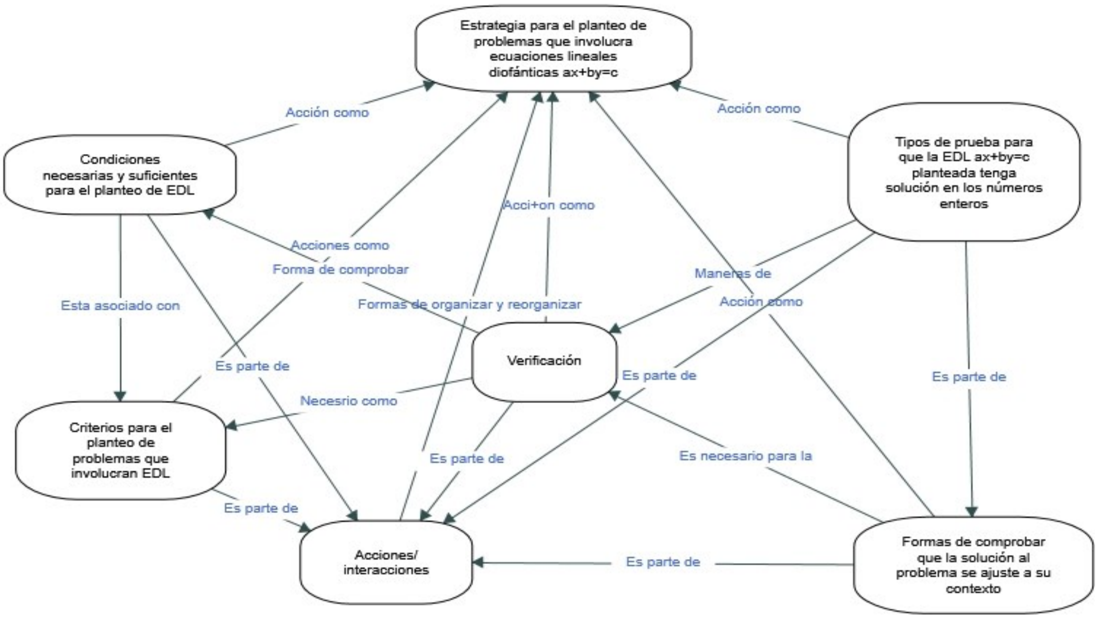


Figura 14. Densidad de relaciones estrategias para el planteo de problemas

La Figura 15 entre tanto, muestra una red de relaciones en la categoría formas de interpretar como formas de entender en contextos locales.

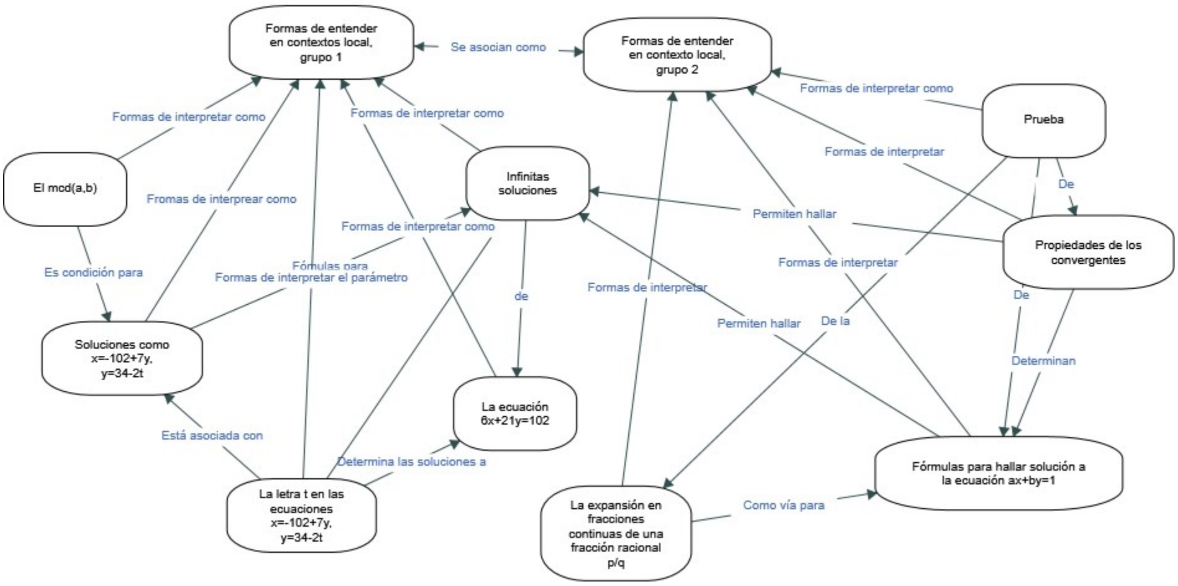


Figura 15. Formas de interpretar como formas de entender en contextos locales.

Mientras que la Figura 16, muestra una densidad de relaciones en la categoría formas de entender como formas de pensar en contextos locales.

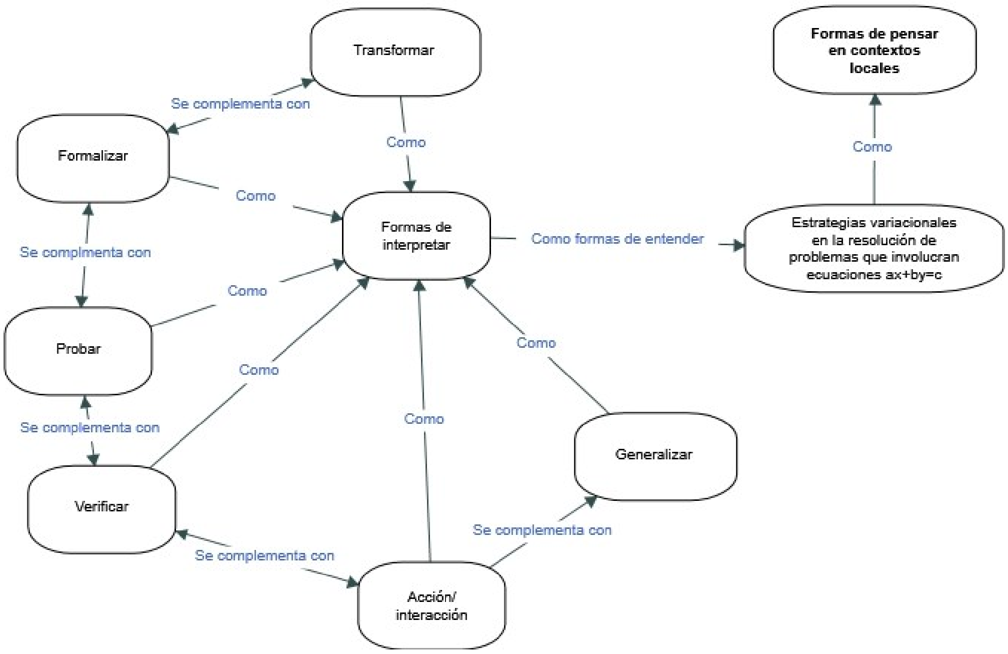


Figura 16. Formas de entender como formas de pensar en contextos locales

4.2.4. Categorías y subcategorías de la teoría sustantiva

La Tabla 15 muestra las categorías y subcategorías de la teoría sustantiva que surgen del proceso de codificación y análisis acerca de los resultados del proceso del pensamiento variacional cuando los participantes resuelven y plantean problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$.

Tabla 15. Operaciones del pensamiento variacional sobre la resolución y planteo de problemas

Categoría: Operaciones del pensamiento variacional sobre la resolución y planteo de problemas **Descripción**: Operaciones del pensamiento variacional sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofántica de la forma $ax + by = c$		
Propiedades	Dimensiones	Descripción
Transformar		Sustituir y combinar números enteros que hagan verdadera la ecuación $ax + by = c$
	Sustituir	Tipos de números enteros asignados a las variables x e y que hagan verdadera la ecuación.
	Combinar	Tipos de condiciones sobre los números enteros a y b y las variables x e y para que la ecuación sea verdadera.

Formalizar		Niveles de formalizar el conocimiento para organizar y reorganizar las acciones/interacciones en la solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.
	Asignar	Tipos de letras y símbolos asignados a las variables y constantes del problema dado.
	Formular	Tipos de fórmulas (expresiones algebraicas) asignadas para representar el conocimiento mediante letras, símbolos y signos.
	Verificar	Formas de comprobar que las soluciones halladas cumplan con la ecuación y el contexto del problema.
	Representar	Tipos de gráficos, tablas o descripciones verbales para mostrar la variación y cambio en las soluciones a la EDL
	Organizar-reorganizar	Niveles de acciones/interacciones a seguir para hallar solución a problemas que involucran EDL de la forma $ax + by = c$.
Generalizar	Representar	Tipos de expresiones algebraicas para representar nexos y relaciones derivadas de casos particulares
	Tipos de soluciones enteras	Tipos de condiciones sobre los números enteros a, b y c que permiten hallar fórmulas para determinar soluciones en un dominio especifico.
Probar		Niveles de argumentos, razonamientos y explicación para convencer de la verdad del tipo de generalización
	Prueba empírica	Niveles de argumentos y/o secuencias de ejemplos particulares como esquema de prueba.
	Prueba causal	Tipos de argumentos, ejemplos y explicaciones a partir de los cuales se convence acerca de la verdad de las propiedades de la expansión en fracciones continuas de fracciones racionales y las fórmulas para generalizar tipos de soluciones.
Extender	Reformular condiciones	Tipos de variaciones sobre los números enteros a, b y c y las variables x e y para que la ecuación tenga soluciones en dominio especifico de los números enteros
	Plantear problemas	Tipos de problemas del mundo real que involucren ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$

Entre tanto, el diagrama de la Figura 17 muestra el proceso de las formas de interpretar como formas de entender lo que conduce a la búsqueda de estrategias, métodos y acciones como formas de pensar cuando el pensamiento variacional opera sobre la resolución y planteo de problemas como un componente de la teoría sustantiva.

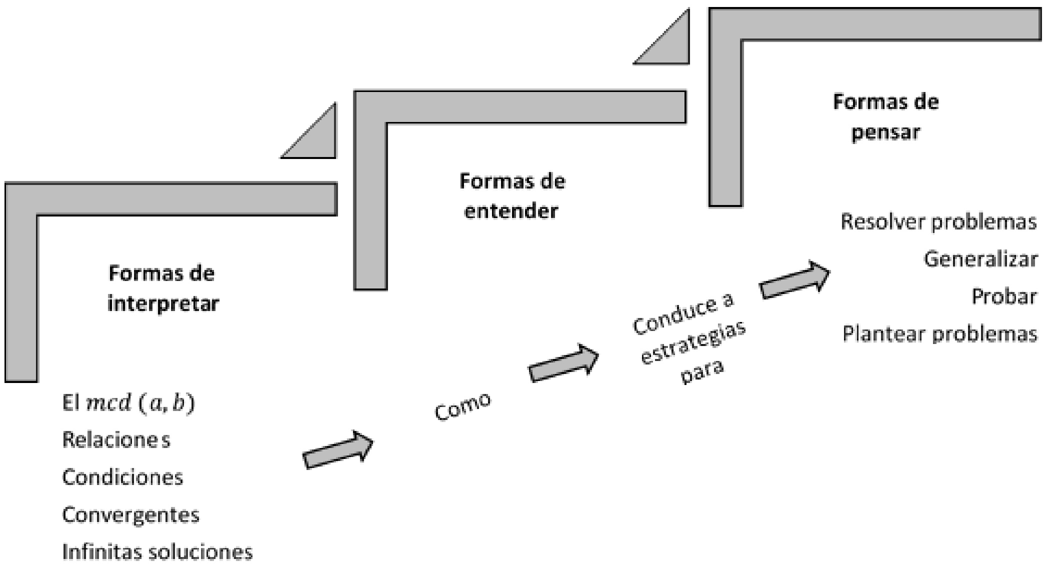


Figura 17. Formas de interpretar, entender y pensar en contextos locales

Como resultado parcial y tentativo hasta el momento, se evidencian dos procesos que fundamentan la teoría sustantiva. El primer proceso lo conforman las operaciones de pensamiento, interpretar-entender y pensar variacionalmente. El segundo proceso lo componen las operaciones de pensamiento, transformar-formalizar-generalizar-probar y extender sobre la resolución de problemas. Aunque se describen de esta manera el orden no necesariamente es éste, debido a que en cada participante se evidencia de forma diferente.

4.2.5. Tercer ciclo de codificación y análisis de datos. Codificación teórica, en la construcción de la(s) categoría(s) central(es)

Además de la teoría sustantiva como resultado del ciclo anterior se diseñaron, rediseñaron e implementaron las actividades A7 ARI, A8 ARII, A9 ARIII y A10 ARIV Ver Anexos 3, 4, 5, y 6 que involucran problemas retadores. Un problema es retador para los participantes en el sentido que, además de poner en juego el conocimiento construido hasta el momento, se requiere de intuición, creatividad, nuevas formas de pensar y probar desde la variación y el cambio para resolver los problemas.

Los datos analizados en este ciclo provienen de las cuatro actividades resueltas por los estudiantes como producto o resultado de la resolución y planteo de problemas retadores y la entrevista retrospectiva semiestructurada a la que accedieron de forma voluntaria seis estudiantes.

Como es de esperarse, en este ciclo de codificación y análisis se requiere volver de nuevo sobre los datos de las actividades anteriores. Entra en juego de nuevo la codificación abierta, axial y selectiva con el propósito de conocer más sobre las categorías que describen la teoría sustantiva, ampliando su alcance y explicación.

Además, el profesor investigador centra más su atención en los procesos de la generalización y la prueba en la búsqueda y construcción de la categoría central y su densidad de relaciones, razón que se justifica por el tipo de problemas involucrados, el guion y resultados de la entrevista.

Los resultados de este tercer ciclo se presentan de la siguiente manera: primero se presentan las Tablas 16 y 17 como complemento a las categorías y subcategorías como respuesta a la sub pregunta de investigación asociada al segundo objetivo de investigación. La Tabla 18 amplía y complementa categorías y subcategorías que responden al primer objetivo.

La Tabla 16 muestra la operación de pensamiento generalizar como una ampliación a la caracterizada realizada en la teoría sustantiva.

Tabla 16. Categoría generalizar

Categoría: Generalizar **Descripción**: Formas de ampliar relaciones, patrones, condiciones y estrategias de resolución y planteo de problemas en un dominio de validez a dominios más amplios.		
Propiedades	Dimensiones	Descripción
Relacionar		Tipos de nexos o conexiones entre dos o más problemas y sus estrategias de resolución en contextos locales y una variedad de contextos

	Relacionando problemas	Tipos de conexiones entre problemas actuales y problemas anteriores y/o el planteo de problemas similares a uno(s) ya conocido(s).
	Relacionando soluciones y condiciones	Formas de relaciones entre el tipo de soluciones exigidas a la ecuación $ax + by = c$ y las restricciones que deben imponerse a las contantes a, b y c y las variables x e y
	Relacionando estrategias	Tipos de nexos entre estrategias para resolver problemas en contextos locales y una variedad de contextos
Investigar		Acciones/interacciones repetidas en la búsqueda relaciones, condiciones, estrategias y patrones en la resolución de problemas en contextos locales y una variedad de contextos
	Investigando relaciones	Las formas de transformación y formalización variacional repetidas para detectar relaciones entre dos o más problemas y sus estrategias de resolución
	Investigando soluciones	La repetición de diferentes estrategias de resolución para determinar si la solución a un problema es la misma
	Investigando estrategias	La repetición de acciones/interacciones para resolver problemas y comprobar que son válidas en contextos locales y en una variedad de contextos
	Investigando condiciones	La repetición de una o varias acciones para comprobar si los patrones de relación y/o condiciones en contextos locales permanecen en una variedad de contextos.
Extender		Nuevos dominios de validez de relaciones y estrategias para el planteo y resolución de problemas
	Restringiendo tipos de solución	La exigencia de ciertos tipos de solución a la ecuación $ax + by = c$ para desarrollar casos generales
	Ampliando el rango de aplicación	Los tipos de solución y las estrategias de resolución se aplican a sistemas de ecuaciones lineales diofánticas en dos y tres variables
	Planteo de problemas	Las estrategias para plantear problemas en contextos locales a plantear problemas en una variedad de contextos

La Tabla 17 por su parte muestra la ampliación y mejoras a la operación de pensamiento probar, en la misma línea de la tabla anterior.

Tabla 17. Categoría probar

Categoría	Dimensiones	Descripción
Probar		Niveles de argumentos, razonamientos y explicación para convencer de la verdad de los patrones, condiciones y propiedades y relaciones cuando se plantea y resuelven problemas.

	Prueba empírica local	Niveles de argumentos y/o secuencias de ejemplos y contraejemplos para convencerse a sí mismo y convencer a los demás acerca de las generalizaciones como resultado de la resolución de problemas en contextos locales
	Prueba empírica global	Tipos de argumentos, ejemplos, contraejemplos y explicaciones a partir de los cuales se convence de la verdad y convence a los demás acerca de las generalizaciones como resultado del planteo y resolución de problemas en una variedad de contextos

Tradicionalmente los matemáticos y profesores expertos esperan que los estudiantes representen las generalizaciones mediante fórmulas, patrones, relaciones, etc. Una mirada desde el contexto de esta investigación evidencia que cuando un participante identifica una generalización se refiere a un patrón general, una propiedad, una regla, una estrategia, pruebas y formas de extender en una variedad de contextos.

Estas generalizaciones se manifiestan de formas verbales o escritas como descripciones o proposiciones matemáticas. La Tabla 18 muestra las formas como los participantes entienden estas generalizaciones. Esta categoría y subcategoría aportan en la respuesta al primer objetivo relacionado con las formas de entender y pensar las generalizaciones y las pruebas.

Tabla 18. Formas de entender como formas de pensar la generalización

Categoría: Formas de entender como formas de pensar la generalización

Descripción: Formas de entender estrategias, reglas y patrones como formas de generalizar en el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$

Formas de entender	Subcategorías	Descripción
Estrategias o procedimientos		Formas de entender estrategias y/o procedimientos locales y globales en el planteo y resolución de problemas
	Locales	Tipos de estrategias y/o procedimientos para el planteo de ecuaciones lineales diofánticas y problemas que involucren este tipo de ecuaciones en contextos locales.
		Tipos de estrategias y/o procedimientos para resolver ecuaciones lineales diofánticas por el método de la pendiente y fracciones continuas

	Globales	Tipos de estrategias y/o procedimientos para el planteo de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en una variedad de contextos
		Tipos de estrategias y/o procedimientos para resolver problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas en una variedad de contextos.
Reglas o condiciones		Formas de entender condiciones locales y/o globales para resolver problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$ en una variedad de contextos
	Locales	$El\ mcd(a, b)\|c$ para que la ecuación lineal diofántica tenga solución en los números enteros
		Es necesaria una solución particular para hallar la solución general a la ecuación $ax + by = c$
		(q_{n+1}, p_{n+1}) es una solución particular de la ecuación $p_n. q_{n+1} + q_n. p_{n+1} = \pm 1$
	Globales	La pendiente determina las infinitas soluciones
		Si (x_0, y_0) es una solución particular a la ecuación $ax + by = 1$, la formula (cx_0, cy_0) determina una solución particular a la ecuación general $ax + by = c$.
		El valor de t determina las infinitas soluciones y el dominio de las soluciones en los números enteros
		Los tipos de solución requerida imponen condiciones sobre los números a, b y c y las variables x e y
Patrones		Maneras de repetir acciones/interacciones para determinar si un patrón detectado permanece estable en una variedad de problemas y contextos
	El $mcd(a, b)\|c$ como condición necesaria y suficiente para que la ecuación tenga solución en los números enteros	
	La ecuación $ax + by = c$ tiene infinitas soluciones en los números enteros	
	Las soluciones para x e y cambian de manera independiente, pero en forma simultánea	
	Si (x, y) es una solución particular, a cada valor de x se le suma la diferencia entre dos valores consecutivos de x, mientras a los valores de y se resta la diferencia entre dos valores consecutivos de y	
	Tanto los valores de x como los de y forman secuencias de números enteros que cambian independientemente una de otra, pero ocurren al mismo tiempo	
Pruebas		Formas de entender la prueba para convencerse a sí mismo y convencer a los demás
	Empírica	Verificación mediante ejemplos que cumplen determinada propiedad en casos locales
	Inductiva	La variedad de ejemplos cumple y explica la prueba a nivel local y una variedad de contextos
Extensión	Formas de entender como una o más propiedades dinámicas se extienden de contextos locales a una variedad de contextos.	

4.3. Categorías centrales emergentes como núcleo de la teoría

Como resultado de los procesos de codificación y análisis en la vía que conduce al muestreo y saturación teórica, surgen dos procesos como categorías centrales que conforman el núcleo de la teoría para dar respuesta al primer y segundo objetivo específicos.

La Figuras 18 muestra un esquema del proceso cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas, como respuesta al segundo objetivo.

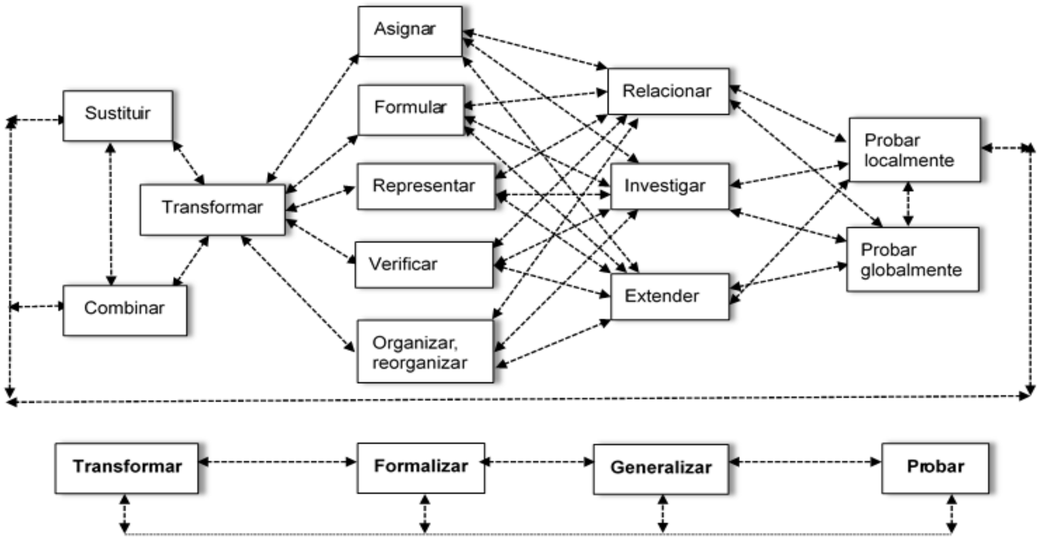


Figura 18. El pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas

La Figura 19 por su parte, esquematiza un proceso acerca de las formas de interpretar como formas de entender y las formas de entender como formas de pensar cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas; como respuesta al primer objetivo.

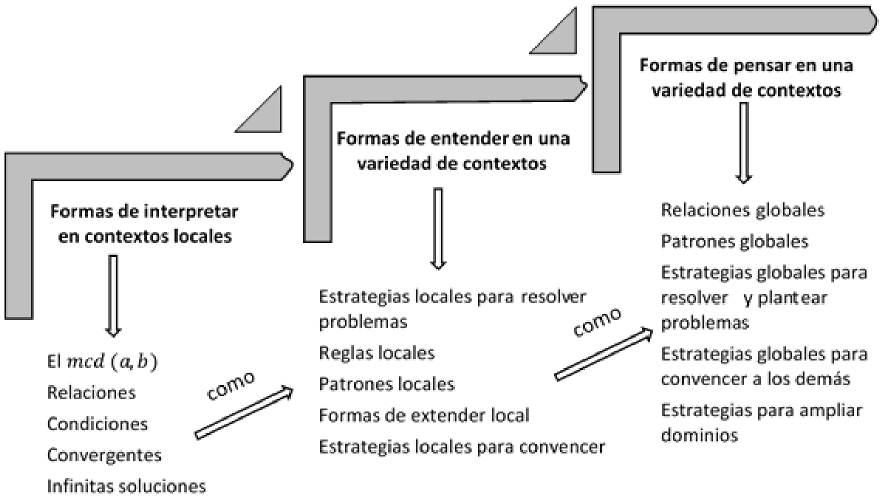


Figura 19. El pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas

A continuación, se muestran fundamentos, evidencias, análisis y explicación acerca de cómo algunas categorías emergen de los datos, con el propósito de dar respuesta parcial a la sub pregunta de investigación: ¿cómo interpretar y dar sentido a los datos para describir y explicar la naturaleza del proceso del pensamiento variacional desde el contexto propuesto?, asociada al tercer objetivo de investigación.

Un aspecto importante a resaltar es la forma en que se analizan y construyen las categorías a partir de los datos. Lo es por dos razones: primero, los conceptos y/o categorías forman parte de procesos, de allí que es casi imposible separarlos, y segundo, el análisis se realiza actividad por actividad como incidente, con la tarea en mente de entender y dar sentido a los datos desde los participantes y no desde el investigador.

Además, por cuestiones de espacio no se abarcan todas las categorías sino algunas de ellas. Lo ideal sería mostrar el origen y evolución de todas a lo largo del proceso. La forma en que se presentan surge a partir de los resultados cuando el pensamiento variacional del participante opera sobre el planteo y resolución de problemas.

Por ejemplo, ante el problema: Dada la ecuación lineal diofántica $ax + by = c$, ¿qué condiciones deben cumplir los números a, b y c y las variables x e y para la ecuación tenga exactamente cuatro soluciones en los números enteros positivos?, seguidamente se muestra la manera como el profesor investigador interpreta, entiende y da sentido a los datos de forma integral. Es decir, cada frase, fórmula, etc., contribuye simultáneamente en la densidad de una o varias categorías.

La Figura 20, muestra la forma como el estudiante E10 A7 ARI sustituye valores en

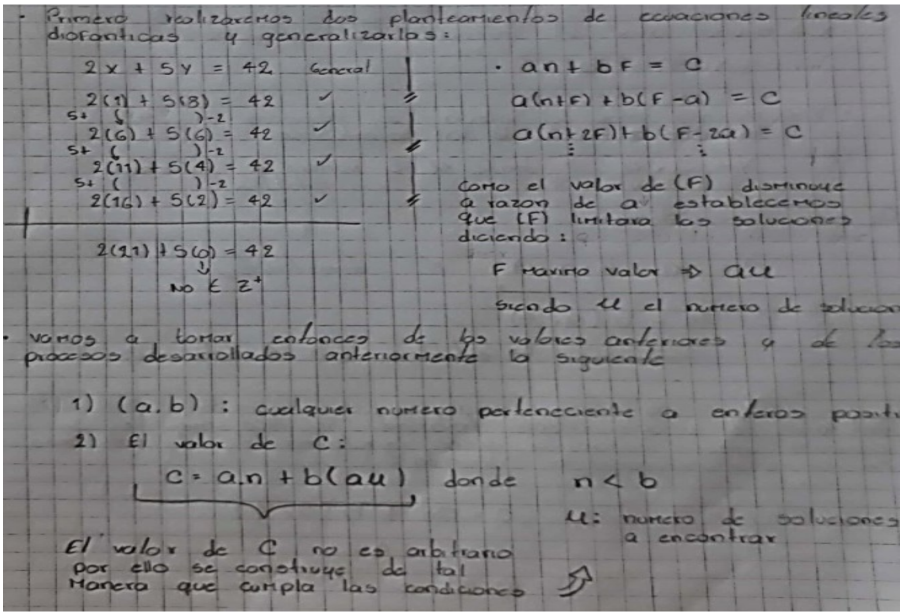
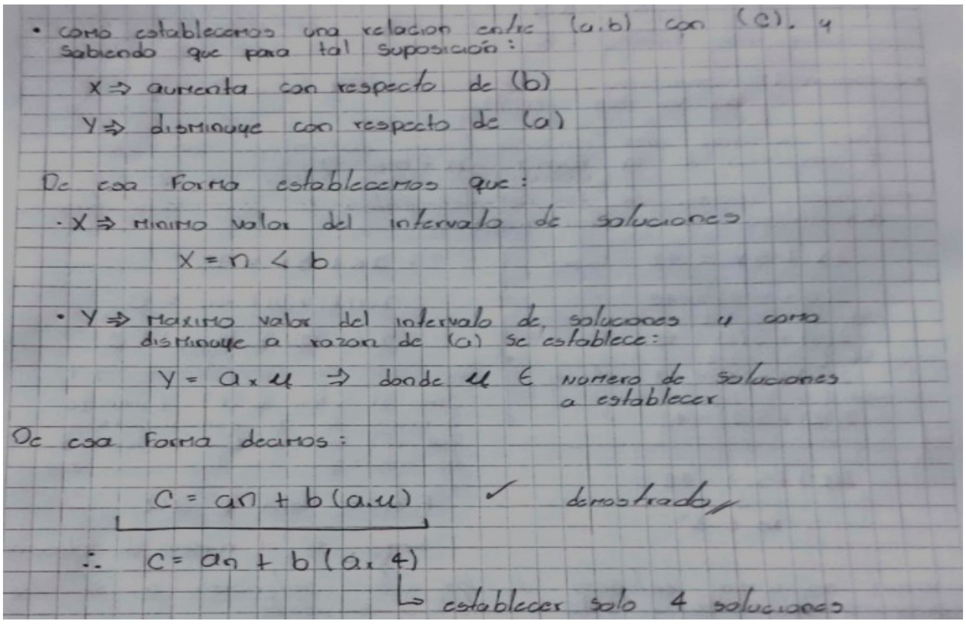


Figura 20. Resultado operaciones del pensamiento variacional 1

la ecuación $2x + 5y = 42$ que él mismo planteó. Luego investiga y encuentra patrones acerca de la manera cómo cambian los valores de la variable x y la variable y determinando la forma de relacionar y combinar estos valores para hallar una nueva solución particular a la ecuación. Como interpretación de significado constituye el proceso de pensamiento de variación y cambio del estudiante. Lo que varía son los números enteros que utiliza para sustituir las variables x e y. Lo que cambia es la nueva pareja (x, y) de números enteros que cumplen con la relación hallada y son solución a la ecuación.

Simultáneamente en la columna de la derecha de la misma Figura 21 se observa cómo el participante formaliza sus ideas asignando letras y formulando una expresión algebraica para generalizar luego de haber investigado relaciones y patrones, así como la secuencia de acciones/interacciones que contribuyeron en la construcción de las operaciones del pensamiento variacional que se denominaron transformación, formalización y generalización.

La Figura 21 correspondiente al trabajo del mismo participante evidencia el resultado de las operaciones del pensamiento variacional formalizar, representar y generar acciones/interacciones como estrategias para hallar un determinado número de soluciones en un dominio exigido.


• como establecemos una relacion entre (a.b) con (c). y sabiendo que para tal suposición:

$X \Rightarrow$ aumenta con respecto de (b)

$Y \Rightarrow$ disminuye con respecto de (a)

De esa forma establecemos que:

• $X \Rightarrow$ minimo valor del intervalo de soluciones

$X = n < b$

• $Y \Rightarrow$ maximo valor del intervalo de soluciones y como disminuye a razon de (a) se establece:

$Y = a \times u \Rightarrow$ donde $u \in$ numero de soluciones a establecer

De esa forma decimos:

$C = an + b(a.u)$ ✓ demostrado

$\therefore C = an + b(a.4)$

↳ establecer solo 4 soluciones

Figura 21. Resultado operaciones del pensamiento 2

Las Figuras 22, 23, y 24 por su parte, evidencian la forma de interpretar, entender y pensar la prueba para convencerse a sí mismo y convencer a los demás acerca de los resultados de las operaciones de investigar y relacionar como subcategorías de la operación generalizar, además de generalizar estrategias de prueba como formas de pensar.

La Figura 23, muestra las acciones/interacciones como estrategias para probar en contextos globales, a partir de formalizaciones y generalizaciones que el mismo participante construyó.

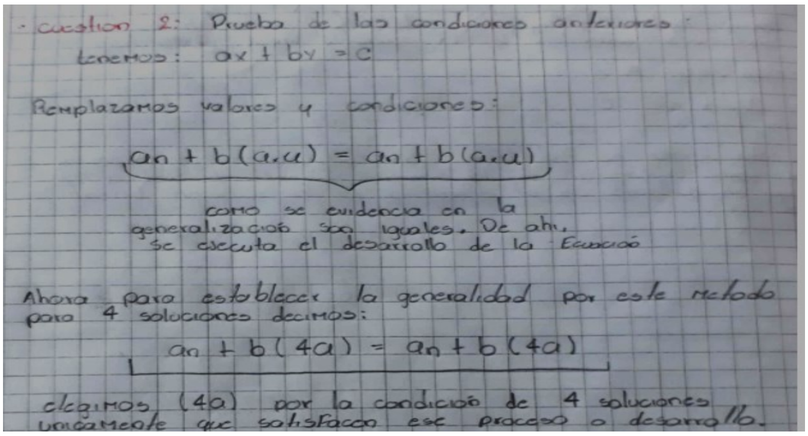


Figura 22. Formas de interpretar y pensar la prueba

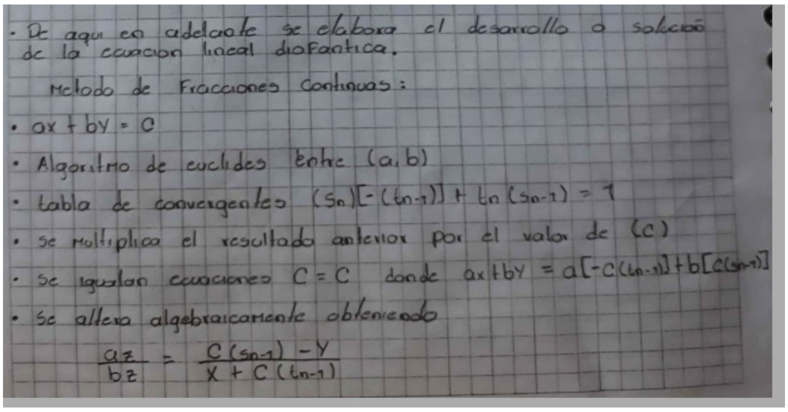
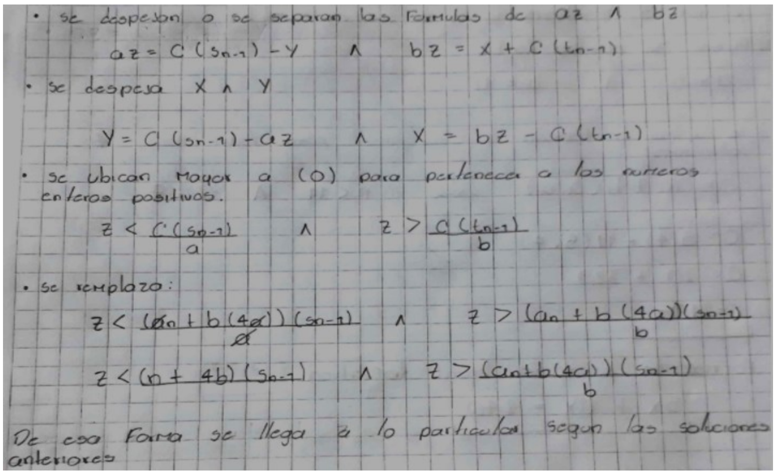


Figura 23. Estrategias de prueba


• se despejan o se separan las formulas de az ∧ bz

$az = C(s_{n-1}) - y \quad \wedge \quad bz = x + C(t_{n-1})$

• se despeja x ∧ y

$y = C(s_{n-1}) - az \quad \wedge \quad x = bz - C(t_{n-1})$

• se ubican mayor a (0) para pertenecer a los numeros enteros positivos.

$z < \frac{C(s_{n-1})}{a} \quad \wedge \quad z > \frac{C(t_{n-1})}{b}$

• se remplazo:

$z < \frac{(\cancel{a}n + b(4\cancel{a}))(s_{n-1})}{\cancel{a}} \quad \wedge \quad z > \frac{(an + b(4a))(s_{n-1})}{b}$

$z < (n + 4b)(s_{n-1}) \quad \wedge \quad z > \frac{(an+b(4a))(s_{n-1})}{b}$

De esa forma se llega a lo particular segun las soluciones anteriores

Figura 24. Formas de entender y pensar la prueba

Durante todo el proceso de codificación, análisis de datos, muestreo y saturación teórica se interpretó y dio sentido a los datos como respuesta al tercer objetivo específico y paralelamente a los dos primeros.

4.4. Muestreo teórico y saturación teórica

Un proceso en evolución permanente. Primero se utiliza un muestreo por conveniencia para acceder a los participantes. Como resultado de la primera intervención, el primer ciclo de codificación y análisis de datos se utiliza el muestreo intencional. Se selecciona un grupo conformado por ocho resultados como formas de solución a los problemas propuestos en las primeras actividades.

Surgen de allí los primeros conceptos indicadores. Por ejemplo, el concepto transformación variacional. Además, se rediseñan las actividades. El proceso continúa con la segunda intervención y el segundo ciclo de análisis de datos. Se inicia el muestreo teórico, se aprende más sobre los datos dando profundidad a la teoría. Se obtienen las primeras categorías y subcategorías que conforman la teoría sustantiva.

Se procede a la tercera intervención con nuevas vías de muestreo; el análisis se desarrolla a un nivel más abstracto. En la entrevista los participantes responden preguntas relacionadas con las categorías que conforman la teoría sustantiva. La intención es que hagan vínculos entre ellas, expliquen nexos, generalicen procesos y estrategias. Esto permite saturar las categorías o conceptos. Saturar en el sentido que los nuevos datos no aportan nuevas propiedades o dimensiones a las categorías desarrolladas y construidas.

Finalmente se logra la teoría formal con un alcance caracterizado por el muestreo teórico de relaciones, además de relaciones de similitud entre grupos y la diversidad de conceptos de los datos como resultado del proceso de codificación y análisis siguiendo las condiciones y límites en el contexto propuesto.

A continuación, se muestra cómo se alcanzó la saturación teórica de la subcategoría transformación variacional. Para las demás categorías se trabajó similarmente.

Las Figuras 9 y 10, correspondientes a los participantes E10 A2 EDL I y E15 A2 EDL I respectivamente y las Tablas 2, 3 y 4 evidencian la forma cómo se analizaron los primeros códigos de sustitución y combinación variacional como propiedades de esta categoría en la primera intervención.

Por su parte la Figura 11 corresponde a los resultados del estudiante E15 A6 AEVM en la primera actividad retadora. Se evidencia un trabajo más elaborado y generalizado de estos conceptos. Mientras que la Tabla 11 muestra una forma de codificar esta categoría al analizar el grupo 2. Esta forma de análisis se presenta de manera similar en otros participantes. Por supuesto cada estudiante formaliza y explica de forma diferente.

De la transcripción, codificación y análisis de la entrevista se muestra el aporte de dos participantes en la saturación de este concepto. PI significa profesor investigador y E10 el estudiante. La entrevista fue realizada el 09/06/2020 a las 9:30 am. La transcripción se hizo utilizando las mismas palabras del participante. La Cuestión 1, consistía, decía:

Plantee (invente) una ecuación dando valores a los números enteros $a, b\ y\ c$ de tal forma que tenga solución en los numeros enteros.

El estudiante propuso la ecuación lineal diofántica $7x + 15y = 343$

PI: ¿Cómo hizo o qué estrategia utilizó para construir la ecuación?

E10: Pues, la estrategia primeramente yo ya había hecho un progreso, entonces yo tengo ya planteada una fórmula en cual ya comprobé y es de manera significativa ya que por ella puedo establecer cualquier ecuación sin ningún inconveniente. Teniendo en cuenta de que el valor de a y b, es decir 7 siendo a y 15 siendo b tienen un máximo común divisor y de esa forma pues con la fórmula que yo plantee no tengo que calcular el máximo común divisor, porque ya haciendo o encontrando el valor de c ellos están relacionado con los valores numéricos de a y b y de esa forma ya queda establecida no tengo inconveniente con la primera condición necesaria para las ecuaciones diofánticas.

PI: ¿Y cuál es esa condición?

E10: La condición es que a y b sean cualquier número arbitrario que pertenezca a los enteros positvos y el valor de c es un producto en relación a ellos dos, donde yo aplico una fórmula que se menciona que es c es igual a por n mas b que multiplica a por u, siendo u el número de soluciones que yo quiera colocar en la solución a plantear.

Comentarios y análisis. El participante habla de un progreso que ya había hecho, este progreso hace referencia al trabajo realizado en actividades anteriores. En la actividad codificada como E10 A8 ARI que aparece en la Figura 20 se muestra el progreso al que se refiere el estudiante.

Se evidencia allí la estrategia y habilidad del estudiante para sustituir y combinar números enteros y encontrar relaciones entre las diversas sustituciones y combinaciones que producen diferentes soluciones. Cada nueva sustitución y combinación transforma una solución en otra. En esta misma figura se observa la fórmula que el estudiante expresa en palabras y había construido con anterioridad, es decir $c = an + b(au)$ donde, $n < b$ y $u = numero\ de\ soluciones\ requeridas$.

A otra pregunta en la entrevista el participante a quien se le asignó el código E15, respondió en la entrevista el día 11/06/2020 a las 3:00 pm:

PI: Si nosotros tenemos la ecuación lineal diofántica $ax + by = c$ y queremos o exigimos que tenga un número determinado soluciones por ejemplo en los enteros positivos. ¿Explíquenos cómo se haría eso, o cómo respondió esta cuestión?

E15: Eso es para hallar un numero de n soluciones al sistema, entonces lo primero que procedemos hacer es hallar las soluciones generales del sistema trabajando de forma general para primero avanzar y luego retroceder. Entonces tenemos una ecuación $ax + by = c$ entonces por el método de pendiente y solución particular hallamos lo que son las soluciones generales, entonces x es igual a la solución particular en x más delta de x, y a la solución particular en y menos delta de y. Entonces como necesitamos hallar soluciones particulares en los positivos, entonces hacemos tanto a x como a y mayor a cero.

Comentario y análisis. Aunque no se evidencia de forma explícita el participante explica como a partir de una solución particular de la ecuación y a partir de la pendiente de la función surgen nuevas soluciones a partir de $(x + \Delta x, y - \Delta y)$. Es decir, muestra una forma de sustituir y combinar utilizando la pendiente para transformar una solución conocida en una nueva solución a la ecuación.

El estudiante utiliza el término sistema para referirse a la ecuación $ax + by = c$, hizo falta indagar en el participante el por qué el uso de este término.

Una mirada y análisis desde otro punto de vista, muestra que cada participante utiliza y combina estrategias que lo llevan de un estado a otro en los procesos para resolver las preguntas y problemas que se le plantearon.

Este proceso de muestreo por conveniencia, intencional y teórico junto a los procesos de codificación y el análisis de datos condujeron a una forma de saturar teóricamente la subcategoría de transformación variacional, desde diferentes fuentes de información.

Conclusiones

Los ciclos de codificación y análisis de datos cualitativos evidencian como se puso en marcha las estrategias propuestas en el diseño de investigación desde la teoría fundamentada. Este proceso cíclico de ida y vuelta permanente sobre los datos utilizando el método de comparación constante, la codificación abierta, axial y selectiva condujo al muestreo y saturación teórica con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación.

Este trabajo conduce a la teoría sustantiva caracterizada por dos categorías centrales como procesos en contextos locales. Estas categorías dan respuesta parcial y tentativa al primer y segundo objetivos específicos y además conducen a la búsqueda de la teoría formal.

El primer proceso lo conforman las categorías y subcategorías que describen las operaciones del pensamiento variacional cuando opera sobre la resolución de problemas. El segundo proceso versa sobre cómo las formas de interpretar conducen a formas de entender y formas de pensar en contextos locales, como lo esquematizan las Figuras 18 y 19 respectivamente.

Estos dos procesos emergentes de los datos se consolidan en el tercer ciclo de codificación donde el investigador centra su trabajo en la búsqueda de conceptos más abstractos. Por esta razón en este ciclo centra su trabajo en las categorías de generalización y la prueba cuando resuelven una variedad de problemas en una variedad de contextos como resultado del muestreo y saturación teórica.

CAPITULO 5. LA TEORÍA EMERGENTE DE LOS DATOS

5.1. Introducción

El utilizar la teoría fundamentada en el diseño de la investigación tuvo como propósito desarrollar y construir una teoría que caracteriza el pensamiento variacional cuando un grupo de profesores de matemáticas en formación plantea y resuelve problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$, en la Universidad Francisco de Paula Santander en la ciudad de Cúcuta.

En este capítulo primero se describen y caracterizan las dos categorías centrales como procesos que constituyen el núcleo de la teoría. Luego se definen las categorías y subcategorías que conforman el núcleo de la teoría. Finalmente siguiendo a Corbin y Strauss (2017) y Schoenfeld (2000), se presentan y analizan algunos criterios que fundamentan, valoran y dan soporte tanto la metodología desarrollada como la teoría construida a partir de los datos.

5.2. Las categorías centrales como procesos

Como resultado del proceso de codificación, el método de comparación constante, el muestreo y saturación teórica surgen dos categorías como procesos que conforman el núcleo de la teoría. A continuación, se muestran los fundamentos de estas categorías como procesos siguiendo criterios de la teoría fundamentada.

Para Corbin y Strauss (2017) un proceso representa el ritmo, así como las formas cambiantes y repetitivas de acción-interacción, más las pausas e interrupciones que se producen cuando las personas actúan e interactúan con el propósito de alcanzar una meta o resolver un problema.

El proceso tiene ciertas propiedades: a) es de naturaleza variable, b) hay diferentes formas de conceptualizar el proceso, c) tiene una rutina acción-interacción, y d) el proceso puede desglosarse en subprocesos.

5.2.1. El pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas

Naturaleza variable del proceso*.* El proceso es caracterizado por las acciones e interacciones entre las subcategorías transformar, formalizar, generalizar y probar variacionalmente. Es variable en el sentido de que cada categoría es el producto de operaciones del pensamiento variacional cuando opera sobre problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$, y a la vez el resultado de una operación es el insumo para la(s) siguiente(s) categoría(s).

Además, cada subcategoría la conforman operaciones del pensamiento. Por ejemplo, la subcategoría transformar se caracteriza por las propiedades sustituir y combinar que, a su vez surgen como resultado de reemplazar y combinar números enteros que hagan verdadera la ecuación.

Allí lo que varía son las operaciones del pensamiento sustituir y combinar. Cada vez que se hace una sustitución y combinación apropiada, se obtiene una nueva solución de la ecuación. Cada pareja (x, y) de números enteros representa el cambio como resultado de la variación. Lo que varía son las operaciones de sustituir y combinar que a su vez transforma la dupla (x, y) en una nueva solución, como insumo o entrada para las siguientes operaciones del pensamiento.

Formas de conceptualizar el proceso. La categoría se esquematizó en términos de la evolución y desarrollo del pensamiento variacional en los participantes. Las actividades didácticas se diseñan y organizan con problemas que van desde contextos locales a problemas retadores en una variedad de contextos.

Al inicio de la investigación cerca del 80% de la totalidad de las actividades didácticas estaban diseñadas. Sin embargo, a medida que se implementa, cada actividad es evaluada. Como resultado de esa valoración cada una de las siguientes actividades se rediseñan teniendo como referente el nivel de desempeño de los participantes, el proceso de codificación y el propósito de la investigación.

Aunque las operaciones de pensamiento variacional muestran la secuencia: transformar – formalizar – generalizar – probar, este esquema no es único. Esto se debe posiblemente a las formas en que cada participante interpreta, entiende y piensa los problemas y su forma de resolución.

Rutina acción-interacción. El proceso no es lineal, al contrario, cada estudiante al enfrentarse a un nuevo problema se ve obligado, por expresarlo así, a volver permanentemente sobre las acciones y estrategias de resolución anteriores. Esto se evidencia en los resultados de cada participante en cada una de las actividades.

Los resultados de resolución y planteo de problemas tomados como incidentes muestran formas de pensar aventajada sobre los demás participantes, de allí que la acción-interacción transformar-formalizar-generalizar-probar es independiente para cada uno de los participantes. Lo que sí es evidente es una estrategia rutinaria que los estudiantes adquirieron y desarrollaron; es pensar y trabajar primero casos particulares desde la variación y el cambio.

El proceso y los subprocesos. Cada subcategoría componente del proceso es en sí un proceso. Por ejemplo, la subcategoría formalizar es un proceso de asignar, formular, representar, verificar, organizar y reorganizar. Cada uno de ellos desde la variación y el cambio. Ocurre lo mismo con las demás subcategorías. Lo mismo se puede afirmar acerca de los conceptos que conforman las subcategorías.

5.2.2. El pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas

Naturaleza variable del proceso. Cada resultado de las operaciones cuando el pensamiento variacional opera sobre problemas es una forma de interpretar del estudiante. Estas formas de interpretar lo conducen a formas de entender.

Por ejemplo, en las primeras actividades donde los participantes resuelven problemas del grupo 1, interpretan que representar el $mcd(a,b) = as + bt$ es una vía para hallar una solución particular a la ecuación $ax + by = c$. Cuando resuelven problemas utilizando convergentes (grupo 2), los participantes formulan una expresión para hallar una solución particular a la ecuación $ax + by = \pm 1$. Es decir, entienden esto como constitutivas de estrategias locales.

Cuando resuelven problemas retadores en una variedad de contextos (grupo 3), se dan cuenta que una estrategia para resolver problemas que involucran este tipo de ecuaciones es hallar una solución particular a la ecuación $ax + by = 1$ y luego proceder en la búsqueda de todas las soluciones a la ecuación. Se evidencia allí el cómo la forma de interpretar en cada contexto local conduce a formas de entender en los dos contextos y posteriormente pensar una estrategia en una variedad de contextos.

Formas de conceptualizar el proceso. Los resultados o el producto de las operaciones del pensamiento variacional que evidencian los participantes tanto en las actividades escritas como en las verbales que abordan en la entrevista, evidencian el proceso formas de interpretar – formas de entender – formas de pensar como evolutivo y en desarrollo. Vale la pena aclarar que los participantes eran estudiantes normales, no había participantes superdotados o genios como se les conoce normalmente.

Rutina acción-interacción. El proceso es de ida y vuelta permanente interpretar – entender – pensar - interpretar. Esto conduce a los participantes de interpretar estrategias para resolver problemas, reglas, patrones, estrategias para convencer como formas de entender en contextos locales a pensar en relaciones, patrones, estrategias de resolución y planteo de problemas, formas de convencer a los demás en una variedad de contextos.

Subprocesos. Es natural que el proceso lo conforman subprocesos. Las formas como los estudiantes interpretan y entienden en contextos locales son producto de las operaciones del pensamiento cuando resuelven problemas. Estos procesos de ida y vuelta los llevan de contextos locales a una variedad de contextos y los conducen a formas de pensar en estrategias y/o esquemas globales.

5.3. Los conceptos y/o categorías finales y su funcionamiento

Como resultado de la puesta en marcha de las acciones de intervención, los ciclos de codificación y análisis de datos cualitativos como estrategias desde el diseño de la teoría fundamentada, surgen dos categorías y/o conceptos finales como procesos que conforman la teoría formal. Seguidamente, se definen estos procesos y subprocesos desde la variación y el cambio para cada categoría.

La categoría denominada el pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas, conformada por los subprocesos transformar, formalizar, generalizar y probar variacionalmente.

Transformación variacional: Formas de sustituir y combinar números enteros que cumplan una relación apropiada y hagan verdadera la ecuación diofántica $ax + by = c$, como proceso.

Formalización variacional: Formas de asignar, formular, representar, verificar, organizar y reorganizar como manera de externalizar las operaciones del pensamiento variacional cuando opera sobre la resolución de problemas.

Generalización variacional: Formas de relacionar, investigar (patrones, reglas), extender condiciones y estrategias en la resolución de problemas en una variedad de contextos.

Prueba variacional: Formas de argumentos, razonamientos, ejemplos, contraejemplos y explicación para convencer de la verdad acerca de los patrones, condiciones, propiedades, relaciones y estrategias en el planteo y resolución de problemas.

Acciones variacionales: formas y estrategias verbales o escritas para externalizar y representar el pensamiento variacional cuando opera sobre la resolución de problemas.

La Figura 25 esquematiza la forma en que opera y funciona el proceso cuando el pensamiento variacional actúa sobre la resolución de problemas que involucran ecuaciones diofánticas de la forma $ax + by = c$.

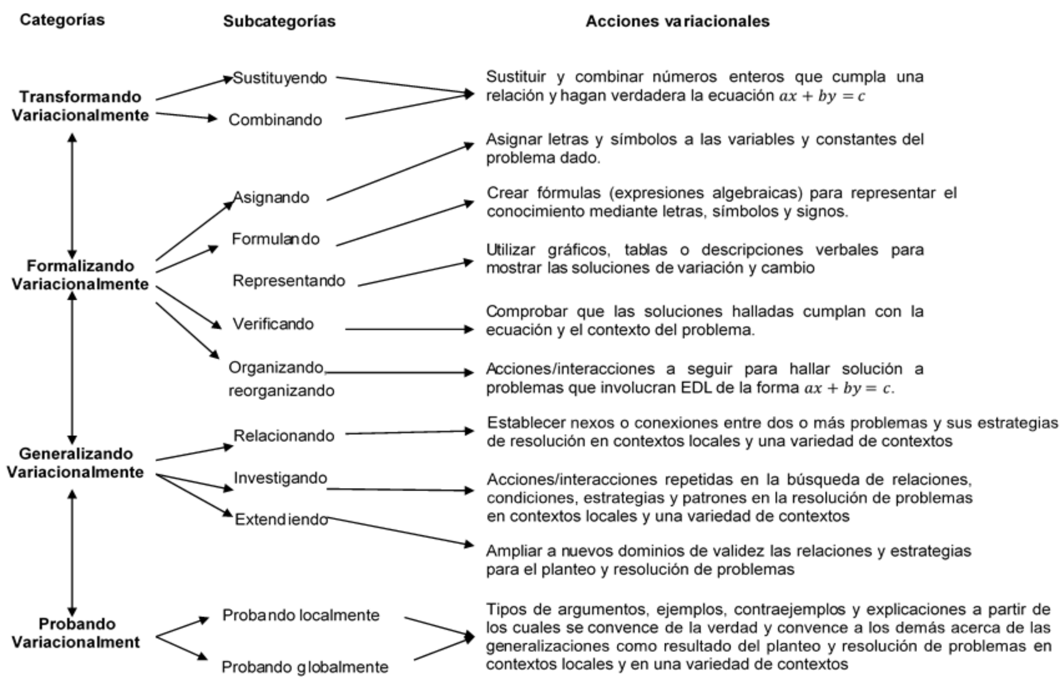


Figura 25. Forma en que opera el pensamiento variacional en la resolución de problemas

La categoría pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas

Formas de interpretar como formas de entender. Formas interpretar relaciones, reglas, patrones, estrategias para resolver y para convencer en contextos locales cuando se plantean y resuelven problemas en contextos locales.

Formas de entender como formas de pensar. Formas de entender relaciones, reglas, patrones, estrategias para resolver y convencer a los demás en una variedad de contextos como formas de pensar cuando se plantean y resuelven problemas. Entre tanto, la Figura 19, en el capítulo anterior muestra un esquema de este proceso.

5.4. Elementos que fundamentan la metodología y a la teoría

Cuando se construye una teoría, es natural que deba evaluarse tanto la metodología utilizada para su desarrollo y construcción, como la teoría en sí. Por tanto, a continuación, y como se especificó en párrafos anteriores se presentan algunos elementos que dan soporte tanto a la teoría fundamentada en los datos como a la consistencia de la metodología utilizada, siguiendo algunos criterios de Corbin y Strauss (2017) y Schoenfeld (2000).

5.4.1. Consistencia metodológica

Al asumir la teoría fundamentada en el diseño de la investigación se piensa en un plan y se generan estrategias para poner en marcha el plan y cumplir con el propósito de la investigación. Seguir el plan diseñado y las estrategias sin mezclarse con otros tipos de diseño da consistencia metodológica. En el tercer capítulo se diseñó el plan estructurado como se esquematizó en la Figura 4. En los párrafos siguientes se muestra de forma global como se siguió el diseño propuesto.

La población objetivo y la muestra inicial. La población la conforman estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas de la Univerisdad Frauncisco de Paula Santader en la ciudad de Cúcuta, que se forman para ser profesores en matemáticas a nivel de la escuela secudaria.

La universidad, por su parte, es una institución pública que donde la mayoría de estudiantes pertenecen a la región del nororiente del pais. El grupo participante como muestra lo integran 24 estudiantes que toman el curso de Teoría de Numeros ubicado en el quinto semestre del programa, curso que orienta el profesor investigador.

Los datos, sus fuentes y sus tipos. Los datos se recolectan y emergen de las formas de expresión escritas y verbal cuando los participantes plantean y resuelven problemas. Las técnicas para recolectar la información la conforman diez actividades didácticas, una entrevista retrospectiva no estructurada y un cuestionario para conocer las actitudes de los participantes en el desarrollo del curso. Hay cerca de 205 documentos en formato .pdf, y seis entrevistas grabadas vía meet.google.com.

Alternancia entre el análisis y recolección de datos. Cerca del 85% de las actividades didácticas se diseñaron y revisaron antes del inicio del curso. Luego de implentar las dos primeras activades se empezaron a rediseñar e implementar cada una de las actividades como consecuencia del análisis y método de comparación constante.

Esta forma de alternar el análisis y recolección de datos se llevó a cabo hasta el final del curso con la aplicación de la entrevista clínica de Piaget y el cuestionario para caracterizar actitudes. El diseño y rediseño de actividades siempre estuvieron centrados en llevar al participante a resolver problemas retadores que evidenciaran su forma de pensar variacional.

Es importante aclarar que cerca del 70% del desarrollo e implementación de las actividades didácticas como fuentes para recolectar datos se realizaron en casa de cada participante con asesoría en línea via meet.google.com. La entrevista se realizó en línea por esta misma vía. El cuestionario de actitud lo respondieron los participantes mediante un documento compartido a través de drive.google.com.

Consideraciones éticas en la reunión y análisis de datos. Al inicio del curso se explicó la metodología para su desarrollo, así como las video grabaciones en el aula de clase y la entrevista que se haría a varios de los participantes quienes accedieran voluntariamente. La totalidad de los participantes estuvo de acuerdo expresando verbalmente su consentimiento.

Para las entrevistas accedieron voluntariamente seis estudiantes. Aunque no se hizo por escrito esta autorización en las grabaciones, cada uno de ellos expresó su voluntad de participar. Incluso uno de ellos expresó su autorización para diferentes fines incluso utilizando su nombre. Sin embargo, en todos los documentos y entrevistas fueron codificados por cuestiones éticas.

Los conceptos que promueven la recopilación de datos. Algunas de las categorías y subcategorías desarrolladas y construidas como generalizaciión y prueba entre otras, se derivan de los datos; sin embargo, son elementos que caracterizan el pensamiento matemático. Las propiedades y dimensiones que describe cada categoría y/o concepto se caracterizan desde la variación y el cambio, como elementos que dan vida al pensamiento variacional.

El muestreo y saturación teórica. El análisis permanente de los datos y el método de comparación constante, las tres intervenciones y los tres ciclos de codificación dan vida a este proceso. La saturación teórica se logra cuando los participantes plantean y resuelven problemas en una variedad de contextos y en la entrevista. Los problemas retadores que los estudiantes resuelven son evidencia de esto, como se describe en la parte final del capitulo anterior.

Casos negativos. En la teoría fundamentada se consideran casos negativos a los participantes que no responden de la manera prevista, o que tienen reacciones opuestas a la mayoría ante un fenómeno particular. Con la evolución del trabajo el profesor investigador considera que no hubo casos negativos. Lo que sí hubo fue participantes que no mostraron evidencias contundentes del desarrollo del pensamiento en contraste con los que participaron en la entrevista, por ejemplo.

Interpretación y sensiblidad teórica de los datos y los participantes. A lo largo de todo el capitulo de análisis de datos y resultados el investigador evidencia y da ejemplos de la manera cómo interpreta, da sentido a los datos para construir el núcleo de la teoría formal que se deriva de la teoría sustantiva y da respuesta al tercer objetivo específico.

5.4.2. Fundamentos y criterios de la teoría desarrollada y construida

El núcleo de la teoría, su descripción, densidad, explicación y alcance. La descripción detallada acerca de la manera cómo se interpreta, da sentido, explica, se relacionan y construyen las categorías desde los datos y la manera como se desarrollan y construyen los procesos que conforman la teoría, sus subcategorías caracterizadas en términos de sus propiedades y dimensiones desde la variación y el cambio constituyen el núcleo de la teoría.

Además, las subcategorías transformar, formalizar, generalizar, probar, y las formas de interpretar como formas de entender, las formas entender como formas de pensar explícitas en el análisis de datos y resultados evidencian, describen, explican y muestran el alcance de la teoría acerca de cómo opera el pensamiento variacional de los participantes cuando plantean y resuelven problemas de ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$.

Replicabilidad, y poder predictivo. Es prácticamente imposible afirmar que los procesos que conforman el núcleo de la teoría funcionen y se generalicen en diferentes contextos y circunstancias. Lo que sí es posible inferir es que, si un profesor opta por tomar las actividades didácticas, las rediseña y adapta en otros contextos e incluso otros niveles educativos, puede contribuir al desarrollo del pensamiento variacional de sus estudiantes.

Por otro lado, las categorías construidas representan, describen y explican una forma de caracterizar las operaciones del pensamiento variacional desde el contexto de los números enteros. Además, el comportamiento humano y en este caso el pensamiento matemático es difícil de predecir. En otras circunstancias y contextos es posible que las categorías no sean similares totalmente, pero sí parcialmente.

Rigor y especificidad. El plan y estrategias puestos en marcha del diseño metodológico desde la teoría fundamentada evidencian y ejemplifican la manera y el rigor para construir los dos procesos como conceptos abstractos, así como su densidad de relaciones que emergen de los datos.

Por tanto, estos dos procesos son una forma de representar teóricamente las operaciones del pensamiento variacional y las formas de interpretar, entender y pensar del grupo de participantes cuando plantea y resuelve problemas en el contexto propuesto, desarrollados y construidos de la teoría sustantiva a la teoría formal.

Múltiples fuentes de evidencia (triangulación). Los datos fueron recolectados de una variedad de fuentes, de condiciones y de circunstancias. Las primeras tres actividades didácticas se llevaron a cabo en el aula de clase donde los participantes trabajaron primero de forma individual y luego en forma grupal en presencia del profesor investigador y un colega suyo que se encargó de la video grabación.

Luego del 16 de marzo de 2020 y por razones de la pandemia del Covid-19, las actividades se realizaron individualmente en casa de cada uno de los participantes, con asesorías en línea muy cortas dos veces por semana vía meet.google.com.

Las actividades involucran diferentes tipos de problemas con niveles de dificultad desde lo simple a lo retador, a resolver problemas por dos métodos en contextos locales y en una variedad de contextos. La entrevista se hizo también y se grabó en línea y el cuestionario de la misma forma.

Lo anterior evidencia la variedad de fuentes, problemas, contextos y circunstancias que posibilitan caracterizar el pensamiento variacional del estudiante cuando se enfrenta a este tipo de problemas. Los registros verbales y escritos dan muestra de los resultados de este proceso.

Desde el punto de vista del profesor investigador es posible que la circunstancia cuando el estudiante trabajaba sólo, en casa y de forma autónoma e independiente con un tiempo más amplio, con asesorías en línea y sin la presencia del profesor haya contribuido en que se apropiaran de las actividades y, por tanto, el desarrollo de su pensamiento variacional haya evolucionado como lo muestran los resultados al resolver los problemas.

Conclusiones

Tanto en el capítulo que contiene el análisis de datos y resultados como en este capítulo se evidencia como las dos categorías que conforman el núcleo de la teoría se caracterizan como procesos. Esto se debe a sus propiedades de ser variable, poder conceptualizarse de formas diferentes, presentar rutinas acción-interacción, y además cada proceso puede desglosarse en subprocesos.

Finalmente se muestra como tanto la metodología como la teoría misma cumplen con unos criterios como indicadores de la consistencia metodológica y exigencias de la teoría desarrollada y construida desde el contexto propuesto siguiendo un diseño propuesto y llevado a cabo desde la teoría fundamentada.

CAPITULO 6. HALLAZGOS Y DISCUSIÓN

6.1. Acciones variacionales cuando el pensamiento opera sobre la resolución de problemas

Tradicionalmente los profesores de matemáticas esperan que los estudiantes descubran relaciones, generalicen el conocimiento y resuelvan problemas, tal y como lo haría un matemático o un profesor experto. Si de la demostración se trata, el asunto es aún más exigente.

A continuación, se interpretan, describen y dan sentido a algunas acciones que emergen de los datos manifestadas de forma escrita o verbal en el transcurso del proceso cuando el pensamiento variacional de los estudiantes opera sobre la resolución y planteo de problemas.

Se destacan las acciones de los estudiantes cuando utilizan números enteros para reemplazar y combinar las constantes $a \text{ y } b$, y/o las variables $x \text{ e } y$, analizan y encuentran reglas, patrones y fórmulas para determinar un número entero c en función de los números $a \text{ y } b$ de acuerdo al tipo de soluciones exigidas a la ecuación.

Son notables las formas de representar en el plano cartesiano una solución particular y utilizar el valor de la $pendiente = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-a}{b}$ para determinar y construir de manera geométrica sus propias fórmulas ($x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 - \Delta x$) , como soluciones generales a la ecuación $ax + by = c$ cuando (x_0, y_0) es una solución particular a esta ecuación.

Sobresale también la manera de utilizar letras, signos y símbolos para asignar y formular expresiones algebraicas para representar relaciones, condiciones y patrones como resultado de sustituir y combinar números enteros en la ecuación $ax + by = c$ de acuerdo a las condiciones del problema.

Las anteriores acciones coinciden y están inmersas en las fases de entrada y ataque propuestas por Mason, Burton y Stacey (2010) quienes afirman que notar ciertas características subyacentes en ejemplos particulares, e ignorar otras, son formas de generalizar. Esto conduce a buscar, si esta generalización es verdadera (conjetura), por qué y dónde es verdadera. Mientras que para Harel (2005, 2008a, 2008b, 2010) estas acciones son formas de interpretar que conducen a formas de entender en contextos locales.

Es notable la manera en que elaboran nexos y construyen relaciones entre problemas actuales y problemas anteriores y sus estrategias de resolución para plantear y resolver problemas similares en contextos locales y una variedad de contextos.

Se señalan también las formas de ampliar relaciones, patrones, condiciones, estrategias de resolución y planteo de problemas en un dominio de validez a dominios más amplios.

La manera de organizar y reorganizar acciones e interacciones para investigar relaciones, patrones, condiciones y representarlas mediante fórmulas o expresiones algebraicas se relaciona con generalizar estrategias desde contextos locales a una variedad de contextos.

Estas formas de investigar relaciones, organizarlas y reorganizarlas en acciones e interacciones ampliando dominios de validez coincide con las fases de ataque y revisión en los procesos de particularización y generalización de Mason, Burton y Stacey (2010). Entre tanto, para Harel (2005, 2008a, 2008b, 2010) son formas de entender en contextos locales que conducen a formas de pensar en contextos globales.

Se hace notar además la manera cómo utilizan ejemplos, contraejemplos y explicaciones como argumentos para convencerse a sí mismo y convencer a los demás, como forma de probar en contextos locales y una variedad de contextos, coincidiendo con Mason, Burton y Stacey (2010) y Harel (2005, 2008a, 2008b, 2010) como forma de prueba para convencer, aunque ella no goza de reconocimiento aún por la comunidad de educación matemática.

En lo referente al planteo de problemas las acciones de los estudiantes evidencian que primero se debe plantear la ecuación lineal diofántica y a partir de ahí buscar los contextos acerca de los cuales se puede inventar el problema teniendo en cuenta que los valores de x e y no pueden ser ambos positivos o negativos al mismo tiempo.

6.2. Las maneras como los estudiantes interpretan, entienden y piensan cuando su pensamiento variacional opera sobre la resolución de problemas

Siguiendo a Harel (2008a, 2008b, 2010) los resultados cuando el pensamiento variacional opera sobre la resolución de problemas dan evidencia de la forma como los estudiantes interpretan. Esta variedad de interpretaciones los conduce a formas de entender y a la vez estas formas de entender los conduce a formas de pensar.

Por ejemplo, el resultado cuando el estudiante resuelve problemas que involucran este tipo de ecuaciones es una forma de entender, mientras que las estrategias como sustituir, combinar, establecer condiciones, formalizar, generalizar y probar la solución, son estrategias de resolución como formas de pensar. Siguiendo esta manera de interpretar y dar sentido a los datos a continuación, se muestran los hallazgos más importantes.

Las formas de interpretar variacional de los resultados de las operaciones de sustituir y combinar los condujeron a entender inicialmente que la pendiente de la recta es la que determina una manera de hallar las infinitas soluciones a la ecuación, relación que fue confirmada a lo largo de su trabajo.

Los participantes interpretan la ecuación como función y las infinitas soluciones como pares de números enteros (x, y) que hacen verdadera la ecuación.

Es fundamental la forma como los estudiantes interpretan y entienden el papel que juega la letra $t \in \mathbb{Z}$ en las fórmulas que permiten hallar las soluciones generales a la ecuación $ax + by = c$ cuando se conoce una solución particular.

Se subraya la manera de entender las infinitas soluciones a una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ como dos sucesiones que se van formando a partir de la pendiente. A partir de una solución particular a cada nuevo valor de x se le suma Δx, mientras que a cada valor de y se le resta Δy.

Se hacen notar las formas como los participantes entienden las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros ya sea cuando se plantean o resuelven este tipo de ecuaciones.

Se identifica la manera como los estudiantes interpretan y entienden las infinitas soluciones desde lo discreto como secuencias o sucesiones de números que pertenecen a una recta pero que no se unen en la gráfica de las mismas.

Se señala también la manera como los estudiantes interpretan y entienden patrones, reglas, condiciones y relaciones en contextos locales y los llevan a formas de pensar estas relaciones, reglas y condiciones en una variedad de contextos.

Es de notar la forma como los participantes, interpretan y entienden estrategias para plantear problemas en contextos locales, como formas de pensar en estrategias para resolver problemas en contextos globales.

Se identifica además la manera como los estudiantes interpretan y entienden los ejemplos, contraejemplos y explicación como formas de convencerse a sí mismo y convencer a los demás de la verdad ya sea de las fórmulas o generalizaciones, como formas de pensar la prueba.

Se destaca la forma como los estudiantes entienden estrategias para plantear y resolver problemas y amplían esas estrategias a sistemas de dos y tres ecuaciones diofánticas con dos y tres incógnitas respectivamente, como formas de pensar.

El autor de este trabajo considera que, las acciones variacionales de sustituir, combinar, asignar, formular, representar, relacionar, investigar y extender llevan y conducen a los participantes de formas de interpretar a formas de entender y generar estrategias para resolver problemas de contextos locales a una variedad de contextos. Estas acciones son cruciales y coinciden con las actividades de chequear, reflexionar y extender de la fase de ataque y revisión en los procesos de particularizar y generalizar propuestos por Mason, Burton y Stacey (2010), en la resolución de problemas.

.

CONCLUSIONES

El propósito del estudio estuvo centrado en hacer aportes teóricos en la caracterización del pensamiento variacional. Además, se propuso hacer aportes prácticos mediante actividades didácticas que tienen como eje central el planteo y resolución de problemas como una vía hacia el desarrollo de pensamiento variacional en el estudiante.

Quienes han aportado en la caracterización del pensamiento variacional lo han hecho desde una variedad de contextos, con diferentes fines, modalidades y estrategias. Existen una variedad y pluralidad en estos aportes y en la comunidad matemática parece no haber aún consenso y claridad en cuanto a la naturaleza de este tipo de pensamiento.

En estas caracterizaciones se destacan dos líneas desde las cuales se han hecho los aportes. La primera lo hace desde el razonamiento. Autores como Confrey (1991), Confrey y Smith (1994,1995), Harel y Sowder (2005), Harel (2008a, 2008b, 2010), Saldanha y Thompson (1998), Thompson (1990, 2011) y Castillo-Garsow C. (2010), entre otros, hacen referencia a razonamiento variacional, covariacional, cuantitativo, paramétrico.

En la segunda línea, desde otra mirada Smith (2008, 2017) y Blanton y Kaput (2011) caracterizan el pensamiento funcional como pensamiento representacional. Entre tanto, Caballero y Cantoral (2013) y sus colegas se refieren a pensamiento y lenguaje variacional, mientras que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006) presenta una definición amplia en la que afirma que el pensamiento variacional tiene que ver con reconocer, percibir, identificar, describir, modelar, representar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos.

Gran parte de los trabajos que aportan en la caracterización de este tipo de pensamiento matemático se ha realizado desde el contexto de solución de problemas en situaciones que involucran números reales, generalmente utilizando temas relacionados con funciones, límites y derivadas.

Estas caracterizaciones se realizan desde la mirada del investigador y/o profesor experto y no desde los estudiantes, y sin tener en cuenta los procesos y estrategias a las que recurren los estudiantes para resolver los problemas, las maneras como ellos interpretan, entienden y piensan los problemas.

Para responder la pregunta científica de ¿cómo avanzar? se plantea un objetivo general y tres objetivos específicos. Para desarrollar y construir una teoría a partir de datos emergentes del contexto propuesto, se opta por un enfoque cualitativo y un diseño de investigación desde la teoría fundamentada.

Se diseña un plan que tiene como estrategia tres momentos de intervención con los participantes y tres ciclos de codificación y análisis de datos. Los tiempos de intervención y ciclos de codificación, aunque parecen lineales, no lo son. Se interrelacionan y traslapan entre sí de manera permanente. El método de comparación constante propio de la teoría fundamentada permite estas interacciones.

Cómo la finalidad del trabajo se centra en caracterizar el pensamiento variacional, la primera acción es hacer una distinción clara cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$ y los resultados o productos de estas operaciones de pensamiento.

La forma de ir comparando y analizando constantemente los datos permite ir de códigos o conceptos iniciales a categorías tentativas desde los datos. El método de comparación constante, los procesos de codificación abierta, axial y selectiva condujeron primero a una teoría sustantiva desde los códigos in vivo a la teoría formal como resultado del muestreo y saturación teórica.

Además de los hallazgos relacionados en capitulo anterior, se destaca la teoría sustantiva desarrollada y construida a partir de códigos in vivo y la categoría central o núcleo de la teoría elaborado como resultado del proceso de codificación, análisis de datos y los ciclos de codificación que condujeron al muestreo y saturación teórica.

Tanto el núcleo de la teoría sustantiva como el de la teoría formal lo constituyen dos categorías centrales: el pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas y el pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas. Los procesos de la teoría sustantiva se desarrollan y surgen directamente de los datos que evidencian los participantes y los tres ciclos de codificación.

Se continúa con las actividades de intervención y el tercer ciclo de codificación y análisis donde se evidencia la evolución, desarrollo e integración y consolidación de estos procesos y su densidad de relaciones para conformar la teoría formal como producto de la codificación axial y selectiva. Como respuesta a los dos primeros objetivos específicos. El tercer objetivo por su parte se convirtió en el camino explícito a seguir para responder los dos primeros.

El pensamiento variacional como proceso en el planteo y resolución de problemas lo constituyen a su vez los subprocesos de transformación, formalización, generalización y prueba variacional. Además, el proceso el pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas, también lo constituyen los subprocesos formas de interpretar como formas de entender y formas de entender como formas de pensar sobre problemas.

Finalmente, y como resultado de la investigación, el pensamiento variacional desde contexto se puede caracterizar como: un flujo permanente de acciones e interacciones interrelacionadas entre procesos y subprocesos de ida y vuelta cuando el pensamiento variacional opera sobre el planteo y resolución de problemas y las formas de interpretar los resultados de estas operaciones como formas entender que conducen a formas de pensar sobre problemas.

Analizando esta definición desde las exigencias de la teoría fundamentada, se tiene que las propiedades las conforman los dos procesos junto a sus subprocesos y las dimensiones corresponden al rango de variabilidad de cada una estas categorías centrales como procesos.

Otro hallazgo no menos importante es la manera en que se puede caracterizar el pensamiento variacional cuando los participantes interpretan, entienden y piensan sobre las infinitas soluciones. Los valores de la variable x cambian siguiendo un patrón determinando mientras los de la variable y cambian siguiendo otro patrón, pero ambos cambian al mismo tiempo.

Haciendo analogía de esta definición con la de Confrey y Smith (1994) del razonamiento variacional se tiene que, cuando se representan las infinitas soluciones en tablas, implica moverse de la dupla de números enteros (x_i, y_i) como solución a la dupla (x_{i+1}, y_{i+1}) de manera simultánea cuando el parámetro $t \in \mathbb{Z}$ cambia a $t \pm 1$.

De igual manera si las infinitas soluciones a la ecuación $ax + by = c$ se representan en el plano cartesiano, implica desplazarse de forma discreta sobre una recta del punto (x_i, y_i) como solución al punto (x_{i+1}, y_{i+1}) simultáneamente cuando $(x_{i+1} = x_i + \Delta x, y_{i+1} = y_i - \Delta y)$ donde $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es igual a la pendiente de la recta $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$.

Una limitante, que a su vez se convierte en fortaleza de esta caracterización radica en que los problemas en las actividades didácticas son problemas que involucran ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$. Por tanto, el resultado de la caracterización del pensamiento variacional se hace cuando el participante plantea y resuelve problemas en contextos discretos, entiende y piensa las soluciones en contextos discretos.

Desde el punto de vista del autor, la categoría pensamiento variacional, como proceso en el planteo y resolución de problemas junto a sus subprocesos, coincide y está inmersa en los procesos y fases propuestos por Mason, Burton y Stacey (2010). La razón es que la propuesta de estos autores es para describir el pensamiento matemático en general, mientras que el proceso construido en este trabajo se realiza en un dominio específico: el planteo y resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas de la forma $ax + by = c$, desde los datos.

Por su parte, la categoría central pensamiento variacional como proceso de entender y pensar sobre problemas, sí se construyó teniendo como referente las formas de entender y pensar propuestas por Harel (2005, 2008a, 2008b, 2010), con la diferencia que se hizo sobre las manifestaciones escritas y verbales de los participantes cuando resuelven este tipo de problemas.

En lo que respecta al planteo de problemas todos los participantes consideran que se debe primero plantear la ecuación con las condiciones que se quieran imponer y luego sí buscar contextos de la vida real que se adapten a la ecuación planteada; es decir el contexto debe ajustarse a la ecuación propuesta.

Los hallazgos y aportes son importantes en varios sentidos. Para la comunidad de educación matemática se hace un aporte en caracterizar la naturaleza del pensamiento variacional desde un contexto diferente, donde el eje central son los procesos en el planteo y resolución de problemas.

Las actividades didácticas diseñadas y rediseñadas permanentemente y el profesor como investigador contribuyen a disminuir la brecha entre la investigación y lo que realmente se hace en el aula de clase. Aunque el propósito del estudio no era caracterizar el desarrollo del pensamiento variacional, hay evidencias escritas y verbales por describir y analizar la forma como evoluciona el pensamiento variacional del estudiante a lo largo del curso.

Un ejemplo claro de ello es la manera como varios de los participantes desarrollaron sus propias estrategias desde la variación y el cambio construyendo sus propias fórmulas. Por ejemplo, el estudiante E10 como se muestra en la Figura 20 crea la expresión algebraica $c = a \cdot n + b(a \cdot u)$ donde $n < b$ y u es el número de soluciones a encontrar a la ecuación, obviando el procedimiento de calcular el $mcd(a, b)$. Este ejemplo no es único; además, muestra y coincide con (Burton, 1984) y (Falk de Losada, 1994) en lo que respecta a la importancia de las relaciones cuando se piensa matemáticamente así como las diferentes formas de establecer y construir las relaciones.

Esto es reiterado por la mayoría de participantes al responder la pregunta del cuestionario y en la entrevista: ¿Tuvo usted oportunidades para pensar matemáticamente?, ¿para indagar?, ¿para hacer matemáticas? Explique por qué.

Una respuesta a esta pregunta fue: “Claro que sí, en el momento de pensar las condiciones que tenía que cumplir un número o una variable, entonces se tenía que explicar el proceso matemático y justificarlo con ejemplos particulares y de manera general, o sea había que generalizar con expresiones algebraicas”.

Estos resultados y hallazgos, son el producto del diseño y rediseño de las actividades didácticas siguiendo las fases propuestas por Cobb et. al (2003), Gravemeijer (2004), Steffe y Thompson, P. W. (2000). Aunque los hallazgos y la teoría se centran y construyen desde los participantes, se destaca el papel que jugó también la Trayectoria Hipotética del Profesor en el Proceso de Planteo y Resolución de Problemas del estudiante, como estrategia para intentar anticipar acciones o resultados del estudiante cuando plantea y resuelve problemas. Ver Anexo 10.

Las investigaciones en educación matemática para intentar construir teoría desde los datos y no desde los matemáticos o profesores expertos son escasas. De allí que utilizar la teoría fundamentada como estrategia para construir teoría aporta a la manera de investigar en educación matemática.

Además, el término credibilidad indica que los hallazgos son dignos de confianza y creíbles en el sentido de que reflejan las experiencias de los participantes, investigadores y lectores con los fenómenos, pero al mismo tiempo, la explicación que da la teoría es sólo una de las muchas interpretaciones "plausibles" posibles de los datos. Por último, el autor de la presente tesis está de acuerdo con (Rolfe, 2006) en que no cree que se puedan aplicar los mismos criterios de juicio a través de las metodologías cualitativas porque cada metodología se basa en un fundamento teórico diferente y tiene procedimientos distintos.

La importancia de los hallazgos y aportes tanto en lo teórico como en lo práctico implica que se debe seguir avanzando en la caracterización del pensamiento variacional desde diferentes contextos a partir del planteo y resolución de problemas que exijan al estudiante creatividad, intuición y nuevas formas de interpretar, entender y pensar variacionalmente sobre problemas.

Se hace necesario explorar y adaptar las actividades didácticas para el estudiante, y las actividades del profesor, junto al método de comparación constante y la teoría fundamentada en otros contextos. Esto, además de poner a prueba la teoría hallada, permite su uso y replicabilidad.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades didácticas relacionadas con el planteo y resolución de problemas desde la variación y el cambio, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Seguir trabajando en el planteo y resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento variacional en otros contextos.
- Profundizar en la teoría fundamentada como metodología para investigar en Educación Matemática.
- Explorar la caracterización del pensamiento variacional relacionado con otros tipos de pensamiento matemático, como el geométrico, entre otros.

REFERENCIAS

Blanton , M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai , & E. Knuth (Edits.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education.* Berlin,Heidelberg: Springer.

Breckler, S. (1984). Empirical validation of affect, behavior, and cognition as distinct components of attitude. *Journal of personality and social psychology, 47*(6), 1191.

Brown, S., & Walter , M. (2005). *The Art of problem posing* (3 ed.). (L. Hawver, Ed.) Londres, UK: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Bryant, A., & Charmaz, K. (2019). *The SAGE Handbook of Current Developments in Grounded Theory.* 55 City Road, London: SAGE Publications. doi:10.4135/9781526485656

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics. Education, 15*(1), 35-49. doi:10.2307/748986

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elmentos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1197-1205). México, DF: Comité Latinaoamaericano de Matemática Educativa.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421.

Cai, J., & Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research.*

Cai, J., Hwang, S., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En *Mathematical problem posing* (págs. 3-34). New York, NY: Springer.

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., & Hu, D. (2016). How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. En *Posing and solving mathematical problems* (págs. 3-22). Cham: Springer.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiate mathematics education. III. CBMS issues in mathematics education,*, 114-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,*, 352-378. doi:10.2307/4149958

Carlson, M., Larsen, S., & Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En *Education, Proceedings of the 23rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics* (Vol. 1, págs. 145-153).

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth.* Tempe, AZ: Arizona State University.

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. En R. Mayes, R. Bonilla, L. Hatfield, & S. Belbase (Edits.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding,* (Vol. 2, págs. 55-73). Laramie: University of Wyoming.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H., & Moore, K. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis.* London: Sage Publications.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2 ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cobb, P., Confrey , J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience. Recent Research in Psychology* (págs. 124-159). New York, NY: Springer.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86.

Corbin, J., & Strauss, A. (1990). *Basics of qualitative research.* Sage publications.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory.* Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications, Inc.

Corbin, J., & Strauss, A. (2014). *Conceptos básicos de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (4 ed.). Thousand Oaks, California, United States of America: SAGE Publications.

Corbin, J., & Strauss, A. (2017). *Conceptos básicos de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (4 ed.). Thousand Oaks, California, United States of America: SAGE Publications.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2018). Introduction: The discipline and practice of qualitative. En N. Denzin, & Y. Lincon (Edits.), *The Sage handbook of qualitative research* (5 ed.). Thousand Oaks, CA, USA: SAGE Publications.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11, págs. 25-41). Springer, Dordrecht.

Ellis, A. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction, 25*(4), 439-478.

Ernest, P. (1993). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. *Science & Education, 2*(1), 87-93.

Falk de Losada, M. (1994). Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas, 1*(1), 35-59.

Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (2016). *Posing and solving mathematical problems.* Springer International Publishing.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics, 1*(3), 4-11.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the learning of mathematics, 1*(3), 4-11.

Glaser, B. (1978). *Theoretical sensitivity: Advances in the methodology of grounded theory.* Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B., & Strauss, A. (2017). *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.* New York, USA: Routledge.

Glasser, B., & Strauss, A. (1967). *The development of grounded theory.* Chicago: IL: Alden.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as a means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 105-128. doi:10.1207/s15327833mtl0602_3

Harel, G. (2008a). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focuson Proving,Part I. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 47*, 487-500.

Harel, G. (2008b). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education.*

Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. En *Theories of mathematics education* (págs. 343-367). Berlin, Heidelberg: Springer.

Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. *In Theories of mathematics education*, 343-367.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *7*(1), 27-50. doi:10.1207/s15327833mtl0701_3

Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek algebra.* CUP Archive.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Johnson, B., & Christensen, L. (2013). *Educational research: Quantitative, qualitative and mixed approaches.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Joshua, S., Musgrave, S., Hatfield, N., & Thompson, P. (2015). Conceptualizing and reasoning with frames of reference. En 2015, T. Fukawa-Connelly, N. Infante, K. Keene , & M. Zandieh (Edits.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (págs. 31-44). Pittsburgh, RA: RUME.

Kilpatrick, J. (1987). Formulating the problem: Where do good problems come from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (págs. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakatos, I. (1978). *The Metodology of Scientif Reaseerch programmes-Philosophical Papers* (Vol. 1). (J. Worrall, & G. Currie, Edits.) New York, USA: Cambridge University Press.

Lakatos, I., & Alcañiz, J. (1982). La crítica y la metodología de programas científicos de investigación. *Instituto de Lógica y Metodología, Facultad de Filosofía. Universidad de Valencia*.

Leung, S. (2016). Mathematical problem posing: A case of elementary school teachers developing tasks and designing instructions in Taiwan. En *Posing and Solving Mathematical Problems* (págs. 327-344). Springer, Cham.

Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology, 22 140*, 55.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2 ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.

McGuire, W. (1989). The structure of individual attitudes and attitude systems. *Attitude structure and function*, 37-69.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Recuperado el 30 de 05 de 2020, de http://cms.mineducacion.gov.co/static/cache/binaries/articles-340021_recurso_1.pdf?binary_rand=1223

Paoletti, T., & Moore, K. (2017). The parametric nature of two studens´ covariational reasoning. *The journal of Mathematical Behavoir, 48*, 137-151.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas.* México: Editorial Trillas.

QSR, International. (2002). NVivo. *Version 12*. Análisis de datos cualitativos (QDA).

Rolfe, G. (2006). Validity, trustworthiness and rigour: quality and the idea of qualitative research. *Journal of advanced nursing, 53*(3), 304-310.

Rosenberg, M. (1960). A structural theory of attitude dynamics. *Public Opinion Quarterly, 24*(2), 319-340.

Saldanha, L., & Thompson, P. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS, 47*(6), 641-649.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1- 38.

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162.

Simon , M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Educatio, 26*(2), 114-145.

Simon , M., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Leraning, 6*(2), 91-104.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. KAPUT (Ed.), *Algebra in the Early Grades* (págs. 133-160). New York, USA: Routledge Publishers.

Smith, E. (2017). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Edits.), *Algebra in the early grades* (págs. 155-182). Routledge.

Stacey, K. (2006). WHAT IS MATHEMATICAL THINKING AND WHY IS IT IMPORTANT?

Steffe, K., Thompson, P., & Von Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research.* Sage publications.

Tallman, M., & Frank, K. (2020). Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*(1), 69-95.

Thompson, P. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. *Center for Research in Mathematics & Science Education*.

Thompson, P. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Edits.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs* (Vol. 1, págs. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. (J. Cai , Ed.) *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Thompson, P., & Thompson, A. (1992, Abril). Images of rate. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.* San Francisco. Recuperado el 17 de 06 de 2020, de http://pat-thompson.net/PDFversions/1992Images.pdf

Thompson, P., Carlson, M., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra 1, 2, 3. En L. Steffe, L. Hatfield, & K. Moore (Ed.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, *4*, págs. 1-24.

Thompson, P., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among US and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 95-111.

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática. 9*, págs. 2009-2010. Blumenau: Brasil.

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2017). Prospective middle school mathematics teachers' covariational reasoning for interpreting dynamic events during peer interactions. *International Journal of Science and Mathematics, 15*(1), 89-108.

ANEXOS

Anexo 1. A2 EDL I

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA		
Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística	
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números	
Nombre:	**Código:**	**Fecha:**
Nombre:	**Código:**	**Fecha:**
Actividad: A2 EDL I	**Título:** Ecuaciones Lineales Diofánticas	
Tema: Solución en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.		
Formas de Trabajo: Inicialmente el trabajo es de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero y procure no hacer tachones.		

Presentación

Las ecuaciones lineales en dos variables de la forma $ax + by = c$ con coeficientes en números enteros, con soluciones también en este conjunto de números, se les conoce con el nombre de Ecuaciones Lineales Diofánticas en honor al gran matemático Diofanto de Alejandría. Según Morris Klein (1972) Diofanto al resolver una ecuación de esta índole, sí las soluciones que aparecían eran raíces negativas o raíces imaginarias “afirmaba que no eran solubles”. Klein afirma también que Diofanto no mostró un método general para resolver cada uno de los 189 problemas dispuestos en *la Arithmetica* y que cado uno de ellos fue resuelto por métodos diferentes.

Entre tanto Burton M., D. (2011), en su libro The History of Mathematics: An introduction, manifiesta que fueron Aryabhata y Brahmagupta de nacionalidad india quienes contribuyeron con el estudio de las ecuaciones indeterminadas, tema favorito para Diofanto quien buscó soluciones en los racionales. Fueron estos dos matemáticos indúes quienes trabajaron estas ecuaciones con soluciones sólo en los enteros positivos. Según Burton cualquier ecuación en una o más incógnitas que deba resolverse para valores enteros se le conoce como Ecuación Diofántica. Burton afirma también que, aunque Aryabhata conocía el método para hallar una solución a la ecuación Diofántica de la forma $ax + by = c$, fue Brahmagupta quien encontró todas las soluciones en números enteros.

Desarrollo de la Actividad

Trabajo individual

Según Burton M., D. (2011), *Bhaskara* (1114-1185) fue el principal matemático indio del siglo XII. Su trabajo más celebrado es el Siddhanta Siromani (base fundamental de un sistema astronómico), escrito en 1150. En la época de Bhaskara, las matemáticas en la India habían evolucionado desde hacía mucho tiempo y los problemas se planteaban a menudo simplemente por placer. El siguiente es un problema típico tomado de la Lilavati, como lo afirma Burton (2010):

Problema 1.

> Dígame, rápidamente matemático: ¿Cuál es el número que multiplica a 221, luego se suma 65 a este producto, y si esta suma se divide en 195, deja como residuo cero?

Cuestión 1. Dada la ecuación $6x + 21y = 102$ con coeficientes enteros. Encuentre varias parejas de números enteros que se les puedan asignar a las variables x e y, de tal manera que la igualdad se cumpla. Escriba los posibles valores para estas variables en la siguiente tabla. La tercera columna es para que verifique la veracidad de la igualdad.

x	y	$6x + 21y =¿ \ldots ?$

Cuestión 2. Analice la columna de los valores para la x. Encuentra algún patrón o relación entre estos valores. Escríbalo, haga lo mismo con la columna de los valores de la variable y.

Cuestión 3. ¿Qué relación o qué condiciones considera usted que deben cumplirse para que se cumpla la igualdad?, Explique.

Actividad en parejas

Cuestión 4. Dadas las siguientes ecuaciones:

$2x + 5y = 121,$	$4x + 16y = 79$	$6x + 21y = 102$
$2x + 5y = 501,$	$4x + 16y = 160$	$6x + 21y = 114$

De estas seis ecuaciones, ¿cuáles de ellas tienen solución en los números enteros?, explique ¿por qué?

Cuestión 5. En general, ¿qué condiciones deben cumplirse para que una ecuación diofántica de la forma $ax + by = c$ tenga solución en los números enteros?

Cuestión 6. Siguiendo las respuestas a la Cuestión 4, utilice el Algoritmo de Euclides y la representación del $mcd(a, b)$ como combinación lineal de los números a y b para hallar una solución particular en números enteros a cada de las ecuaciones.

Cuestión 7. Escriba un procedimiento que permita hallar una solución particular a una ecuación diofántica de la forma $ax + by = c$ utilizando el Algoritmo de Euclides y la representación del $mcd(a, b)$ como combinación de los números a y b.

Cuestión 8. Lea y analice detenidamente el siguiente procedimiento utilizado para encontrar expresiones algebraicas que permiten hallar la solución general a la ecuación lineal diofántica $6x + 21y = 102$.

El objetivo es hallar todas las soluciones a la ecuación:

$$6x + 21y = 102, \qquad (1)$$

Como $(-102,34)$, es una solución particular para esta ecuación, solución que usted halló cuando respondió la Cuestión 6, esta solución debe satisfacer

$$6(-102) + 21(34) = 102, \qquad (2)$$

Al resolver estas dos ecuaciones: restando (2) de (1) y manipular expresiones, se sigue que:

$$6(x + 102) + 21(y - 34) = 0$$

Equivalente a:

$$6(x + 102) = 21(34 - y)$$

Al simplificar por 3, se tiene que:

$$2(x + 102) = 7(34 - y)$$

Siguiendo propiedades de la división entera, se tiene que:

$2|(34 - y)$ y $7|(x + 102)$

Por tanto, debe existir $k \in \mathbb{Z}$, tal que,

$$x + 102 = 7k \qquad y \qquad 34 - y = 2k$$

Finalmente se tiene que las fórmulas:

$$x = -102 + 7k \qquad y \qquad y = 34 - 2k$$

permiten hallar todas las soluciones en números enteros a la ecuación lineal diofántica $6x + 21y = 102$. Complete la siguiente tabla asignando valores positivos y negativos a k (recuerde que es un entero) y verifique que la solución cumple la igualdad.

$x = -102 + 7k$	$y = 34 - 2k$	(x, y)	$6x + 21y =¿\ldots?$

Cuestión 9. Analice la columna de los valores para la variable x. ¿Qué relación encuentra entre los valores de esta columna?, haga lo mismo con los valores de la variable y. Finalmente compare y contraste estas dos columnas. ¿Qué similitud o diferencia encuentra?, Escríbala.

Cuestión 10. Siguiendo el ejemplo anterior encuentre expresiones algebraicas que permitan hallar todas las soluciones en números enteros a las ecuaciones planteadas en la cuestión 4.

Cuestión 11. Haga una representación gráfica de las soluciones (x, y) halladas a cada una de las ecuaciones que resolvió en la cuestión anterior. En sus palabras describa la gráfica y su comportamiento.

EVALUACIÓN

Volviendo al ***Problema 1***,

> Dígame, rápidamente matemático: ¿Cuál es el número que multiplica a 221, luego se suma 65 a este producto, y si esta suma se divide en 195, deja como residuo cero?

Cuestión 12. La ecuación $159x - 221y = 65$, corresponde al *Problema 1*, verifique que cumple con las condiciones necesarias y suficientes para que tenga solución en los números enteros. Halle las expresiones algebraicas que permitan encontrar todas las soluciones al problema.

Cuestión 13. Siguiendo las expresiones algebraicas para la solución del *Problema 1*, responda lo siguiente: ¿Qué condiciones debe cumplir el numero entero k para que el problema tenga solución exclusivamente en los enteros positivos?

Cuestión 14. Escriba un procedimiento que le permita plantear una ecuación lineal diofántica en dos variables que tenga soluciones en los números enteros. Escriba una ecuación de éste tipo siguiendo su procedimiento.

Cuestión 15. A partir de lo trabajado en clase, escribir una serie pasos o acciones para hallar solución en números enteros a una ecuación de la forma $ax + by = c$ cuyos coeficientes son números enteros, conocidas como Ecuaciones Lineales Diofánticas.

Cuestión 16. Siguiendo el procedimiento que escribió en la cuestión anterior halle todas las soluciones en números enteros al siguiente problema: Una persona compró caballos y bueyes por un total de *1770* escudos. Pagó *31* escudos por cada caballo y *21* escudos por cada buey. ¿Cuántos caballos y cuantos bueyes compró?, ¿Cuántas y cuáles son las soluciones en números enteros positivos para este problema?

Anexo 2. A3 EDL II

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: A3 EDL II	**Título:** Ecuaciones Lineales Diofánticas
Tema: Solución en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.	
Formas de Trabajo: Inicialmente usted debe trabajar de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero y procure no hacer tachones.	

Presentación

Las ecuaciones lineales en dos variables de la forma $ax + by = c$ con coeficientes en números enteros y soluciones en números enteros se les conoce como ecuaciones lineales diofánticas. Existen diferentes métodos y procedimientos para hallar solución a este tipo de ecuaciones. Burton, D. (2011), en su libro *The History of Mathematics. An introduction* afirma que a los hindúes Aryabhata y Brahmagupta se les atribuyen los primeros trabajos en estos contextos. Aryabhata halló soluciones particulares, pero Brahmagupta fue el primero en hallar soluciones generales. Actualmente se conocen otros métodos para solucionar ecuaciones lineales diofánticas en dos variables. En esta actividad se abordan otras miradas y caminos diferentes para construir y generalizar procedimientos en la búsqueda de solución a estas ecuaciones.

Desarrollo de la Actividad

Trabajo individual

Cuestión 1. Siguiendo la representación gráfica de las soluciones a la ecuación diofántica $6x + 21y = 102$ y las expresiones algebraicas $x = -102 + 7t,\ y = 34 - 2t$, que permiten hallar las soluciones a esta ecuación. Describa en sus palabras éstas dos fórmulas.

Cuestión 2. Represente gráficamente las soluciones a la ecuación diofántica $6x + 21y = 102$. Describa la grafica en sus palabras. Compare la descripción de esta grafica con la descripción hecha en la cuestión anterior.

Cuestión 3. A partir de la solución particular conocida $(-102,34) = (a, b)$ de la ecuación $6x + 21y = 102$ y utilizando, la definición de pendiente de la recta,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{7}$$

deduzca o construya expresiones algebraicas que le permitan hallar las demás soluciones a partir de esta información

Cuestión 4. Escriba unas líneas para explicar a un compañero cómo construyó las expresiones algebraicas en la cuestión 3 y por qué está bien.

Cuestión 5. Represente gráficamente las soluciones en el plano y haga descripción desde el punto de vista geométrico de cómo hallar la solución general a partir de esta representación gráfica.

Cuestión 6. Escriba un procedimiento para solucionar una ecuación de la forma $ax + by = c$ por este método. Recuerde tener presente todos los aspectos posibles como las condiciones necesarias y suficientes etc.

EVALUACIÓN

Cuestión 6. Siguiendo las dos formas trabajadas para hallar todas las soluciones (solución general) a la ecuación $ax + by = c$. ¿Qué condiciones deben cumplirse para plantear una ecuación de este tipo que tenga solución en los exclusivamente en los números enteros positivos?

Cuestión 7. Siguiendo el análisis realizado por usted en la cuestión anterior, plantee y resuelva un problema en un contexto de la vida real que involucre una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ que tenga solución en los números enteros positivos.

Cuestión 8. Siguiendo el procedimiento para hallar solución en números enteros a la ecuación lineal diofánticas de la forma $ax + by = c$ ¿Qué paso o qué estrategia considera usted crucial para hallar la solución a este tipo de ecuaciones?, Explique ¿por qué?

Anexo 3. A4 FC I

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: A4 FC I	**Título:** Fracciones continuas
Tema: Expansión por fracciones continuas a números racionales.	
Formas de Trabajo: Inicialmente usted debe trabajar de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero procure no hacer tachones.	

Presentación

Cuando se trata de buscar o hallar el origen, precursores o quienes trabajaron y fundamentaron conceptos matemáticos existen diferentes versiones y el tema de fracciones continuas no es la excepción. Según Eves, Howard (1953), en su libro *An Introduction to the History of Mathematics* afirma que el primero en trabajar las fracciones continuas fue *Pietro Cataldi* en Bologna, en *1548 (p. 256)*. Mientras que para Fink, Karl (1910) en su libro *A Brief History of Mathematics* afirma que en el año 1613, Cataldi encontró aproximaciones para las raíces cuadradas de los números utilizando fracciones continuas, pero no hizo una investigación detallada de las fracciones continuas (p. 132).

Fink, afirma que Daniel Schwenter fue el primero en contribuir con un material (1625) para determinar la convergencia de fracciones continuas. Centró la atención en la reducción de fracciones que involucran grandes números y determinar reglas para calcular los sucesivos convergentes. Huygens y Wallis también trabajaron en el tema contribuyendo en el descubrimiento de la regla general y su demostración utilizando el termino de convergentes.

La teoría de fracciones continuas tuvo gran desarrollo en siglo XVIII con Euler quien introduce el nombre de *fracción continua.* Euler centra su trabajo en la reducción de fracciones continuas a la forma de productos y series infinitas.

Por su parte para Falk de Losada (1997) en su libro *Recorriendo el Algebra: De la solucion de ecuaciones al álgebra abstracta,* manifiesta que la entrada en escena de las fracciones continuas en el campo de la matemática se dio cuando Rafael Bombelli en el siglo XVI las usó para hallar aproximaciones de raíces irracionales de ecuaciones polinómicas. Mientras que Euler y Lagrange desarrollaron la teoría sistemática al respecto.

Desarrollo de la Actividad

Trabajo individual

Cuestión 1. Hallar la expansión como fracción continua del número racional $\frac{p}{q} = \frac{128}{37}$. Con la información anterior se construye la siguiente tabla:

p	q	a: *parte entera*	r: *resiudo*
$p_0 = 128$	$q_0 = 37$	$a_0 = 3$	$r_0 = 17$
$p_1 = 37$	$q_1 = 17$	$a_1 = 2$	$r_1 = 3$
$p_2 = 17$	$q_2 = 3$	$a_3 = 5$	$r_2 = 2$
$p_3 = 3$	$q_3 = 2$	$a_4 = 1$	$r_3 = 1$
$p_4 = 2$	$q_4 = 1$	$a_5 = 2$	$r_4 = 0$

Cuestión 2. Siguiendo el procedimiento anterior, construya tablas similares luego de haber expandido en fracciones continuas las fracciones:

$$\frac{34}{21}, \frac{88}{25} \; y \; \frac{-13}{9}$$

A partir de lo realizado en las tablas anteriores responda las ***Cuestiones 3, 4 y 5.***

Cuestión 3. Analice en cada una de las tablas las columnas referentes a los valores de p y q. ¿Qué patrón o regularidad encuentra en los valores de p?, ¿Qué patrón o regularidad encuentra en los valores de q?

Cuestión 4. ¿Qué relación, patrón o regularidad encuentra entre los valores p y q?, ¿Qué patrón o regularidad encuentra en los valores de la columna de los residuos?

Cuestión 5. Siguiendo las cuestiones anteriores. ¿Cuándo termina el proceso de expandir la fracción racional $\frac{p}{q}$ en fracciones continuas?, ¿Cuándo puede continuar?, ¿Explique por qué?

Cuestión 6. Dadas las formulas

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = c_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = c_1, \dots \dots \dots, \frac{p_n}{q_n} = c_n$$

Correspondientes a los convergentes parciales de la expansión de una fracción continua. Hallar los convergentes parciales para las fracciones: $\frac{128}{37}, \frac{34}{21}$ y $\frac{88}{25}$, construir una tabla como la siguiente para cada fracción:

a	p	q	$\frac{p_n}{q_n} = c_n$
$a_0 = 3$	$p_0 = 3$	$q_0 = 1$	$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} = 3$
$a_1 = 2$	$p_1 = (3)(2) + 1 = 7$	$q_1 = 2$	$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{7}{2}$
$a_2 = 5$	$p_2 = (5)(7) + 3 = 38$	$q_2 = (5)(2) + 1 = 11$	$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{38}{11}$

$a_3 = 1$	$p_3 = (1)(38) + 7 = 45$	$q_3 = (1)(11) + 2 = 13$	$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{45}{13}$
$a_4 = 2$	$p_4 = (2)(45) + 38 = 128$	$q_4 = (2)(13) + 11 = 37$	$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{128}{37}$

Revise y analice estas tablas y responda las ***Cuestiones 7, 8.***

Cuestión 6. ¿Cuándo termina el proceso?, ¿Explique?, ¿Cuántos c_n hay?

Cuestión 7. Revise cada una de las tablas construidas por usted. ¿Qué expresión algebraica o que fórmula le permite hallar el termino p_n o en otras palabras el enésimo término de p? ¿Explique por qué y cómo funciona?

Cuestión 8. Revise cada una de las tablas construidas por usted. ¿Qué expresión algebraica o que fórmula le permite hallar el termino q_n o en otras palabras el enésimo término de q? ¿Explique por qué y cómo funciona?

Cuestión 9. Teniendo como referente las respuestas a las cuestiones anterior, ¿Qué formula le permite hallar el enésimo c_n o lo que es lo mismo $\frac{p_n}{q_n} = c_n$?, ¿Pruebe qué esta formula funciona para hallar el c_n de una fracción racional?

Cuestión 10. Revise y analice la columna de los c_n en cada una de las tablas. ¿Encuentra algún patrón o regularidad en esta secuencia de números?, ¿Encuentra una o varias regularidades?, ¿Cómo se da la regularidad o regularidades encontradas al compararlas con la fracción $\frac{p_n}{q_n}$?. ¿Explique de por qué de su afirmación?

EVALUACIÓN

Cuestión 11. Generalice el proceso para expandir una fracción racional en fracciones continúas trabajado en la actividad previa y en la ***Cuestión 1***.

Cuestión 12. Suponga ahora que la fracción racional $x = \frac{s}{t} = \frac{128}{37}$ utilizando el Algoritmo de Euclides, se puede escribir:

$$128 = (3)(37) + 17$$
$$37 = (2)(17) + 3$$
$$\vdots$$

Siguiendo el Algoritmo de Euclides, continúe y termine el proceso. ¿Generalice este proceso y compárelo con el proceso generalizado y trabajado en la cuestión anterior?, ¿Qué relación existe entre estos dos procesos?

Cuestión 13. La siguiente tabla se obtuvo al expandir la fracción $\frac{128}{37}$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	¿ … … . . ?
$a_0 = 3$	$p_0 = 3$	$q_0 = 1$	$(3).(2) - (1).(7) = -1$
$a_1 = 2$	$p_1 = 7$	$q_1 = 2$	$(7).(11) - (2).(38) = 1$
$a_2 = 5$	$p_2 = 38$	$q_2 = 11$	$(38).(13) - (11).(45) = -1$
$a_3 = 1$	$p_3 = 45$	$q_3 = 13$	$(45).(37) - (13).(128) = 1$

Siguiendo esta la tabla construya tablas similares para las fracciones $\frac{34}{21}$ y $\frac{88}{25}$ y responda: ¿Cómo se relacionan los valores $p\ y\ q$ para obtener los valores de la tercera columna?, ¿Qué fórmula o expresión algebraica generaliza la operación de la tercera columna?

Cuestión 14. ¿Pruebe que esta fórmula funciona para toda expansión por fracciones continuas de números racionales?

Anexo 4. A7 ARI

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: A7 ARI	**Título:** Actividad retadora I
Tema: Solución en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.	
Formas de Trabajo: Inicialmente usted debe trabajar de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero y procure no hacer tachones.	

Objetivo: Construir condiciones específicas que permitan plantear ecuaciones lineales diofánticas en dos variables con algunas restricciones específicas.

Actividad

Cuestión 1. Construya y explique qué condiciones deben cumplir los números enteros $a, b\ y\ c$ y las variables $x\ e\ y$ para que la ecuación lineal diofántica en dos variables $ax + by = c$ tenga exactamente cuatro soluciones en los números enteros positivos. DEBE ELABORAR TODO EL PROCEDIMIENTO CON TODOS LOS DETALLES, DESDE EL INICIO HASTA EL FINAL.

Cuestión 2. Como prueba usted que las condiciones que usted encontró en la cuestión anterior funcionan. Escriba la prueba respectiva explicando cada paso dado.

Cuestión 3. Plantee o invéntese una ecuación de la forma $ax + by = c$ que cumpla con los requisitos que usted halló en la Cuestión 1. Resuelva esta ecuación (EL MÉTODO PARA RESOLVER PUEDE SER CUALQUIERA DE LOS VISTOS).

Cuestión 4. Represente gráficamente las soluciones a esta ecuación. Haga un análisis y descripción de la gráfica realizada. La descripción debe ser lo más explicativa posible.

Anexo 5. A8 ARII

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: A8 ARII	**Título:** Actividad retadora II
Tema: Solución en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.	
Formas de Trabajo: Inicialmente usted debe trabajar de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero y procure no hacer tachones.	

Actividad

Cuestión 1. Si en la ecuación lineal diofántica $ax + by = c$ los valores de $x\ e\ y$ son ambos enteros positivos: ¿qué condiciones deben cumplir los números enteros $a, b, y\ c$ para que la ecuación diofántica no tenga solución en los enteros positivos?

Cuestión 2. Siguiendo la respuesta de la cuestión anterior plantee (invente) y resuelva una ecuación que cumpla con estos requisitos.

Cuestión 3. Plantee (invente) y solucione un problema de la vida real que involucre una ecuación lineal diofántica $ax + by = c$, donde $x\ e\ y$ sean ambos enteros positivos y que tenga infinitas soluciones.

Cuestión 4. Plantee (invente) y solucione un problema de la vida real que involucre una ecuación lineal diofántica $ax + by = c$, que tenga varias (o infinitas) soluciones en los enteros positivos, pero usted debe seleccionar la solución que mejor se ajuste para solucionar el problema. Es decir, establecer un criterio para seleccionar cual de todas las soluciones halladas es la mejor posible o cuántas y cuáles de ellas son las mejores soluciones de todas. Explique por qué esa solución es la mejor o la óptima.

Anexo 6. A9 ARIII

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: A9 ARIII	**Título:** Actividad retadora III
Tema: Solución en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.	
Formas de Trabajo: Inicialmente usted debe trabajar de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero y procure no hacer tachones.	

Actividad

Cuestión 1. Dada la ecuación lineal diofántica $ax \pm by = c$, ¿qué diferencia o similitud encuentra usted con la ecuación lineal diofántica $ax + by = c$. Explique estas diferencias o similitudes. Enuncie criterios para la existencia de una solución.

Cuestión 2. Escriba al menos dos estrategias o formas de hallar una solución particular a la diofántica $ax \pm by = c$.

Cuestión 3. Escriba un procedimiento para hallar las infinitas soluciones en números enteros de la ecuación $ax \pm by = c$.

Cuestión 4. ¿Qué diferencias o similitudes hay entre el procedimiento que escribió en la cuestión 3 y el procedimiento que usted escribió para solucionar la lineal diofántica $ax + by = c$ en las actividades anteriores.

Cuestión 5. ¿Qué condiciones deben cumplirse para plantear (inventar) una ecuación lineal diofántica $ax \pm by = c$ que tenga solución en los números enteros?.

Cuestión 6. Siguiendo las respuestas a las cuestiones 3 y 5, plantee y resuelva una ecuación lineal diofántica $ax \pm by = c$ que tenga solución en los números enteros.

Cuestión 7. Plantee (invente) y resuelva un problema (diferentes a los que ya planteó en actividades anteriores) de la vida real que involucre una ecuación lineal diofántica de la forma $ax \pm by = c$.

Anexo 7. A10 ARIV

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: A10 ARIV	**Título:** Actividad retadora IV
Tema: Solución en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.	
Formas de Trabajo: Inicialmente usted debe trabajar de forma individual. Luego siga las orientaciones dadas por el profesor. Escriba con lapicero y procure no hacer tachones.	

Actividad

Cuestión 1. Elabore un procedimiento compuesto por una serie de etapas o fases (incluida la verificación de la solución) para que otro estudiante lo siga y pueda resolver una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$.

Cuestión 2. Haga o construya en diagrama que esquematice y muestre el proceso y las relaciones que usted escribió en la cuestión 1.

Cuestión 3. Elabore un procedimiento compuesto por una serie de etapas o fases para que otro estudiante lo siga y pueda plantear (inventar) una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ y verificar que tenga solución en los números enteros.

Cuestión 4. Haga o construya en diagrama que esquematice y muestre el proceso y las relaciones que usted escribió en la cuestión 3.

Cuestión 5. Elabore un procedimiento compuesto por una serie de etapas o fases para que otro estudiante lo siga y pueda plantear (inventar) problemas que involucren una ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ con solución en los números enteros.

Cuestión 6. Haga o construya en diagrama que esquematice y muestre el proceso y las relaciones que usted escribió en la cuestión 5.

Problemas retadores

Problema 1. Se dispone de dos garrafas una con capacidad de 5 litros y la otra con capacidad de 3 litros. Usted debe medir en una de las garrafas 4 litros vaciando o llenando cada una de las garrafas cuantas veces sea necesario. ¿Cuántas y cuáles son las soluciones a este problema?

Problema 2. Un rey quiere dividir a sus empleados en grupos de forma rectangular, de tal manera que el primer grupo pueda formar un rectángulo de cinco en línea, y el segundo grupo un rectángulo de siete en línea. Si durante nueve días no se repite el número de empleados en cada grupo, ¿cuál es el número mínimo de empleados?

***Problema 3*.** Encuentre números enteros positivos de dos cifras que sean iguales a tres veces el producto de sus cifras.

Problema 4. Encuentre soluciones a la ecuación lineal diofántica:

$$2(x+y) = xy + 9$$

Problema 5. Una persona compra doce frutas entre peras y melocotones por 99 pesos. Si una pera cuesta 3 pesos más que un melocotón, y compra más peras que melocotones, ¿Cuántas peras y cuántos melocotones compró?

Problema 6. Una mujer cobra un cheque por e euros y c céntimos (centavos) en el banco. El cajero por error le da c euros y e céntimos. La mujer no se da cuenta hasta que gasta 23 céntimos y observa que en ese momento tiene $2e$ euros y $2c$ centimos. ¿Cuál era el valor del cheque?

Problema 7. Encuentre de cuántas maneras diferentes se pueden sumar *5* euros con *100* monedas de $1, 10\ y\ 20$ céntimos (centavos), indicando el número de monedas en cada caso.

Problema 8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales diofánticas, verificando algunas de las soluciones y responda las Cuestiones 8a a 8e:

$$7x + 2y + 3z = 5$$

$$5x + 3y - 2z = 3$$

Cuestión 8a. ¿Cómo hizo o qué procedimiento utulizó para resolver el sistema de ecuaciones lineales diofánticas?

Cuestión 8b. ¿Qué condiciones debe cumplirse para porder resolver estos sistemas de ecuaciones?

Cuestión 8c. Represente gráficamente las solcuiones al sistema de ecuaciones. A partir de esta representación haga una descripción detallada de las soluciones al sistema de ecuaciones.

Cuestión 8d. ¿Las soluciones se intersectan o no?, ¿deberian o deben intersectarse?, explique.

Cuestión 8e. Supongase que usted tiene cualquier sistema de m ecuaciones diofánticas lineales con n variables. ¿Considera usted que atodo sistema de esta forma se le puede hallar solcución en los numeros enteros?, Explique, ¿por qué sí se puede o por qué no se puede?

Anexo 8. Entrevista retrospectiva semi estructurada

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADÍSTICA

Materia: Teoría de números Fecha:_________ Hora:________

Nombre: ____Código: _________

Problema inicial. Dada la ecuación lineal diofántica en dos variables de la forma $ax + by = c$ con coeficientes enteros, responda las sigueintes cuestiones:

Cuestión 1. Plantee (invente) una ecuación dando valores a los números enteros a, b y c de tal forma que tenga solución en los numeros enteros.

Cuestión 2. Resuelva la ecuación.

Cuestión 3. Construya una tabla y verifique al menos 12 de las soluciones. Represente gráficamente las soluciones.

Cuestión 4. Si se exige que las soluciones sean sólo en los enteros positivos, qué condiciones deben tenerse en cuenta al plantear una ecuación de la forma $ax + by = c$?, y ¿sí se exige un número determinado de soluciones en los enteros positivos?, ¿en los negativos? Explique ¿por qué?.

Cuestión 5. Suponga que usted es profesor y está orientando a los estudiantes en este tema. ¿Qué variaciones le haría o qué condiciones impondría a la ecuación $ax + by = c$ de tal forma que sea un verdadero reto (es decir que le exija pensar profundamente) para el estudiante que intenta resolverla?

Cuestión 6. Siguiendo la cuestión anterior, dé respuesta o solución a una de las condiciones que usted propuso.

Cuestión 7. ¿Enuncie o escriba una serie de pasos para que alguien los pueda seguir y pueda plantear o inventar problemas de la vida real (que reten verdaderamente a quien intente resolverlos) que involucren ecuaciones diofánticas en dos variables y tenga solución en los numeros enteros.

Cuestión 8. Siguiendo lo anterior plantee (invente) un problema que rete al estudiante que intente resolverlo. ¿Dónde o en qué aspecto considera usted que está el reto para quien lo resuelve?

Cuesión 9. Resuelva el aproblema planteado por usted.

Anexo 9. Guion entrevista

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADÍSTICA

Materia: Teoría de números Fecha:_________ Hora:________

Nombre: ____Código: _________

Problema inicial. Dada la siguiente ecuación lineal diofántica de la forma $ax + by = c$ con coeficientes enteros:

Cuestión 1. Plantee (invente) una ecuación dando valores a los números enteros $a, b\ y\ c$ de tal forma que tenga solución en los numeros enteros.

Cuestión 2. ¿Cómo hizo o que estrategia utilizó para construir la ecuación?

Cuestión 3. ¿Cómo o de que manera puede estar seguro que la ecuación que acaba de escribir tiene solución en los numeros enteros?

Cuestión 4. Encuentre una solución para esta ecuación.

Cuestión 5. ¿Cómo hizo para hallar la solución?, ¿De qué otra manera podrias hallar otra solución o la misma solución?.

Cuestión 6. Resuelva la ecuación. ¿Cómo hizo o que procedmiento utilizó para resolver la ecuación?, ¿De qué otra manera podría resolver la ecuación?, ¿Qué tienen de común o diferente las formas que acaba de mencionar para resolver la ecuación? Se puede pedir aquí que grafique la solución particular y a partir de esta y la pendiente obtenga las demás soluciones, preguntar acerca de la continuidad.

Cuestión 7. ¿Qué elemento o elementos considera vitales (cruciales) y permiten resolver estas ecuaciones?

Cuestión 8. Construya una tabla y verifique al menos 12 de las soluciones. Represente gráficamente las soluciones. ¿qué regularidad o patrón encunetra entre los valores de x?, ¿qué regularidad o patrón encunetra entre los valores de y?, ¿qué regularidad, patrón o relación encunetra entre los valores de $x\ e\ y$?, ¿las soluciones siguen alguna secuencia?, ¿la secuencia tiene límite o para en algún momento?, ¿las secuencias se dan en lo continuo o en lo discreto?

Cuestión 9. ¿Los valores de $x\ e\ y$ cambian de forma independiente?, ¿Los cambios en cada uno de los valores de $x\ e\ y$ se relacionan de alguna maera?, ¿cómo entiende o que papel juega el valor de la letra t en cada una de las soluciones?

Cuestión 10. Escriba un procedimiento o una serie de pasos para que alguien lo siga y pueda resolver la ecuación.

Cuestión 11. Si se exige que las soluciones sean sólo en los enteros positivos, qué condiciones deben tenerse en cuenta al plantear la ecuación?, y ¿sí se exige un número determinadog de soluciones en los enteros positivos?, ¿en los negativos?.

Cuestión 12. ¿Enuncie o escriba una serie de pasos que alguien los pueda seguir para plantear o inventar problemas de la vida real que involucren ecuaciones diofánticas en dos vriables y tenga solución en los numeros enteros.

Cuestión 13. Considera usted que las variaciones en cada uno de los valores de los numeros $a, b\ y\ c$ y varaibles $x\ e\ y$ cómo afectan las soluciones y el proceso de resolución. Esos cambios son continuos o discretos

¿Entre los valores de cada uno de las soluciones hay soluiones intermedias?

TENER EN CUENTA A7 EVUALUACIÓN PRIMER PUNTO.

FINALMENTE

¿Tuvo usted oportunidades para pensar matemáticamente? ¿Para indagar? ¿Para hacer matemáticas?

Anexo 10. Actividad 4 para el profesor

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER – CÚCUTA

Facultad: Educación Artes y Humanidades	**Departamento**: Matemáticas y Estadística
Programa: Licenciatura en Matemáticas	**Asignatura**: Teoría de Números
Actividad: 4	**Título:** Ecuaciones Lineales Diofánticas
Tema: Soluciones en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.	**Tiempo estimado**: 4 horas

Descripción: El propósito de la actividad es orientar a los estudiantes en procesos inductivos que le permitan resolver y construir procedimientos cuando se enfrenta problemas que involucran ecuaciones lineales Diofánticas en dos variables. Primero utilizando el Algoritmo de Euclides y la representación del máximo común divisor como combinación lineal para encontrar una solución particular y a partir de ésta construir las infinitas soluciones a la ecuación dada desde la variación y el cambio.

Justificación: La forma como se plantea y desarrolla la actividad debe posibilitar al estudiante desde la particularización, la variación y el cambio, el uso del Algoritmo de Euclides y la representación del máximo común divisor como combinación lineal encontrar patrones y regularidades primero para hallar una solución particular y a partir de ésta hallar infinitas soluciones a una ecuación Diofántica lineal en dos variables.

Objetivo de aprendizaje para el estudiante: Construir procedimientos para hallar soluciones en números enteros a ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros.

Objetivos para el profesor:

General: Caracterizar el procedimiento constructivo creado por los estudiantes para hallar soluciones enteras a una ecuación lineal en dos variables con coeficientes enteros.

Específicos:

✓ Orientar al estudiante en procesos inductivos, utilizando el Algoritmo de Euclides y la representación del máximo común divisor de los coeficientes como combinación lineal para hallar una solución particular en números enteros a una ecuación lineal en dos variables con coeficientes enteros

✓ Orientar al estudiante en procesos desde la variación y el cambio a encontrar patrones y relaciones entre cualquier solución particular y la solución general a una ecuación Diofántica Lineal en dos variables.

Tareas para el estudiante (*Problema 1*): Dígame, rápidamente matemático: ¿Cuál es el número que multiplica a 221, luego se suma 65 a este producto, y si esta suma se divide en 195, deja como residuo cero.

(*Problema 2):* Una persona compró caballos y bueyes por un total de *1770* escudos. Pagó *31* escudos por cada caballo y *21* escudos por cada buey. ¿Cuántos caballos y bueyes compraron la persona?

Cuestiones

	Extender	Ampliar a otros contextos: Procedimiento general para solucionar Ecuaciones Diofánticas
Formas de pensar	***Convencer***	*Probar, reflexionar*: Convencerse a sí mismo.
Formas de entender	***Generalizar***	Si $\left(\frac{c}{d}s, \frac{c}{d}t\right)$ es una solución particular entonces la solución general tiene la forma $\left(\frac{c}{d}s + \Delta xk, \frac{c}{d} + \Delta ytk\right)$ dónde Δx y Δy son las diferencias entre dos soluciones sucesivas de la ecuación y $k \in \mathbb{Z}$. Sí $as + bt = mcd(a, b) = d$, donde $s, t \in \mathbb{Z}$, entonces $\left(\frac{c}{d}s, \frac{c}{d}t\right)$es una solución particular a la ecuación $ax + by = c$
	Conjeturar	El $mcd(a, b)$ $debe\ dividir\ a\ c$ en la ecuación $ax + by = c$ para que haya solución en los números enteros. Conociendo una solución particular se pueden hallar más soluciones en los números enteros.
Formas de interpretar	***Relacionar***	Debe haber un número entero que divide exactamente a $a, b, y\ c$ La combinación lineal del máximo común divisor de $a\ y\ b$ permite hallar una solución particular a la
	Especificar	Soluciones particulares a partir del Algoritmo de Elucides y la representación del $mcd(a, b)$, como $as + bt = mcd(a, b)$, donde $s, t \in \mathbb{Z}$
En qué pensar	***El problema***	Hallar solución en números enteros a la ecuación $6x + 21y = 102$ con coeficientes enteros.

Metodología: (Secuencia de acciones y formas de trabajo).

Momento 0: Presentación

Acción 1. El profesor hace un breve recuento acerca de las ecuaciones lineales con coeficientes en números enteros, con soluciones también en números enteros, conocidas como Ecuaciones Diofánticas. Luego comenta las formas de trabajo y procede a proponer al grupo el Problema 1.

Momento 1: Actividad inicial

Actividad individual

Acción 2. Se propone al grupo en general el Problema 1, se pide que construyan ecuación en números enteros que represente el problema.

Momento 2: Actividad guiada por profesor

Acción 3. El profesor propone a los estudiantes que respondan las ***Cuestiones 1,2, y 3.*** Luego socializa con el grupo algunas soluciones y la manera como las hallaron.

Acción 4. El profesor invita a los estudiantes a socializar ante el grupo en general algunos de los procedimientos y estrategias para hallar la ecuación en números enteros y las respuestas a las *Cuestiones 1, 2 y 3*.

Trabajo en parejas.

Acción 5. El profesor escribe en el tablero las siguientes ecuaciones lineales en dos variables con coeficientes enteros e invita a los estudiantes a pensar en ellas, analizando cuáles tienen solución en los números enteros:

$2x + 5y = 121,$ $\qquad$ $4x + 16y = 79$ $\qquad$ $6x + 21y = 102$

Acción 6. Seguidamente explica a los estudiantes cómo utilizar conceptos de divisibilidad y sus propiedades con el propósito de establecer condiciones necesarias y suficientes para garantizar que este tipo de ecuaciones tenga solución en los enteros positivos.

En general para que la ecuación $ax + by = c$ con coeficientes enteros, tenga solución en números enteros es necesario que cualquier divisor de a y b divida también a c, Si $m|a$ y $m|b$, entonces por propiedades de la divisibilidad $m|(ax + by)$ para cualquier $x, y \in \mathbb{Z}$, y como $ax + by = c$, se tiene que $m|c$.

Ahora si $d = mcd(a, b)$, entonces es necesario que $d|c$. Además, como $d = mcd(a, b)$ se puede representar como combinación lineal de a y b, es decir $mcd(a, b) = sa + tb$, para cualquier $s, t \in \mathbb{Z}$, lo que se convierte en una condición suficiente para que la ecuación $ax + by = c$, tenga solución en enteros.

Acción 7. Siguiendo estos criterios propone a los estudiantes la ***Cuestión 4*** en parejas.

Acción 8. Mediante un ejemplo ilustra con cómo hallar una solución en números enteros para la ecuación:

$$6x + 21y = 102$$

Como $d = mcd(6{,}21) = 3$, y $d = 3|102$, es condición necesaria y suficiente para que esta ecuación tenga solución en números enteros.

Ahora, como d puede ser representado como combinación lineal de $6\ y\ 21$, existen enteros $s, t \in \mathbb{Z}$, tales que $6s + 21t = 3$.

Como $3|102$, existe $34 \in \mathbb{Z}$, tal que $102 = 34 * 3$, al multiplicar la ecuación $6s + 21t = 3$ por 34 se sigue:

$$6(34s) + 21(34t) = 102,$$

obteniendo así una solución particular $(34s, 34t)$ para cualquier $s, t \in \mathbb{Z}$. Los valores de $s, t \in \mathbb{Z}$, se pueden obtener mediante el Algoritmo de Euclides. Veamos:

$$21 = 3(6) + 3 \qquad ó \qquad 3 = 21 - 3(6)$$

$$6 = 2(3) + 0$$

De allí se tiene que $6(-3) + 21(1) = 3$, luego $s = -3$ y $t = 1$, al reemplazar estos valores en:

$$6(34s) + 21(34t) = 102$$

Se tiene que: $(34s, 34t) = (-102{,}34)$, es una solución particular de $6x + 21y = 102$, puesto que

$$6(-102) + 21(34) = 102$$

$$-612 + 714 = 102$$

Acción 9. Plantea a los estudiantes la ***Cuestiones 5 al 12*** para que las trabajen en parejas.

Momento 3: Actividad de cierre

Acción 10. El profesor y los estudiantes socializan las respuestas a las C***uestiones 5 al 11*** finalizando con análisis y síntesis del trabajo realizado.

Actividades para valorar el conocimiento del estudiante.

Acción 11. Proponer y orientar a los estudiantes para que las ***Cuestiones 12 al 16*** sean resueltas en la agenda de trabajo siguiendo las indicaciones. Estas cuestiones tienen como propósito extender el trabajo realizado a otros contextos.

Momento 4: Actividad después de clase

Evaluación de la actividad

Acción 12. Luego de implementada la actividad en el aula de clase se compara los supuestos teóricos que fundamentan la *(THPPRPE),* para valorar su alcance y efectividad. Como resultado de este análisis deben surgir dos elementos: Corregir, ampliar y mejorar la actividad y estimar si la actividad cumplió con los objetivos para los cuales fue planeada.