



# **Optimización topológica del sistema de transmisión de potencia de una lavadora centrífuga para reducción de vibraciones**

**Nelson Stiven Barreto Reyes**

Universidad Antonio Nariño  
Facultad de Ingeniería Mecánica, Electrónica y Biomédica  
Bogotá DC, Colombia

2020



# Optimización topológica del sistema de transmisión de potencia de una lavadora centrífuga para reducción de vibraciones

**Nelson Stiven Barreto Reyes**

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al título en:

**Ingeniería Mecánica**

Director:

Ph.D. Diego Calero Arellano

Línea de Investigación:

Diseño Mecánico y análisis de vibraciones

Grupo de investigación:

Semillero de Control, Sistemas Embebidos e Instrumentación (CASEIB)

Universidad Antonio Nariño

Facultad de Ingeniería Mecánica, Electrónica y Biomédica

Bogotá DC, Colombia

2020



# AGRADECIMIENTOS

Agradecer principalmente a mis padres, los cuales me apoyan, motiva y me enseñaron a lograr las metas se plantean, sin desfallecer en camino, con dedicación y esfuerzo, de igual manera a mis hermanos que me apoyaron con el fin de culminar mis con mi carrera.

Al director del trabajo de grado Ing. Diego Calero, el cual me apoyo con el desarrollo del mismo, dedicando tiempo, conocimiento y paciencia. También a todos los docentes que hicieron parte de mi formación en la Universidad, donde aportaron criterios, valores y determinación.

Por último, al grupo de estudio, donde se obtuvo apoyo para comprender los temas de diferentes asignaturas, para pasar el tiempo y formaron una amistad.

# Resumen

Los sistemas rotatorios de máquinas, como la transmisión de potencia de la lavadora centrífugas, están expuestos a vibraciones que pueden causar fallas durante su funcionamiento debido a que poseen elementos rotatorios y cargas variables. Con el objetivo de mejorar el diseño del tren de engranes de una lavadora centrífuga, se propone realizar una optimización topológica para reducir la vibración y plantear un sistema de medición para determinar las vibraciones del tren de engranes. Se usa el software de ANSYS Student®, para realizar el estudio del comportamiento del sistema de transmisión de potencia y la optimización de topología. La optimización de topología se realiza para dos tipos de engrane (helicoidal e hipoidal), los cuales deben ser los de mayor tamaño para no afectar los factores de diseño en los engranes. El sistema de medición se plantea a través del análisis del conjunto de componentes del tren de engranes (ejes y engranes), usando el análisis de respuesta de frecuencia en las secciones del eje donde se ubican los rodamientos. A partir de la optimización se obtuvo que la maximización de la frecuencia natural y la reducción de la magnitud de las aceleraciones de la respuesta de frecuencia en el sistema de transmisión de potencia se ve reflejado al aplicar la reducción de masa en el engrane helicoidal, también que los engranes de tipos cónicos se deben plantear múltiples restricciones de respuestas dado que estos hacen parte del objetivo de la optimización, y no solo se sustente en la reducción de masa.

**Palabras claves:** Optimización Topológica, Análisis de elementos finitos (FEA), Sistema rotodinámico, Tren de engranes, frecuencia natural, Vibraciones.

# Abstract

The rotating systems of machines, such as the power transmission of the centrifugal washing machine, are exposed to vibrations that can cause failures during their operation due to their rotating elements and variable loads. With the aim of improving the design of the gear train of a centrifugal washing machine, it is proposed to perform a topological optimization to reduce the vibration and to propose a measurement system to determine the vibrations of the gear train. The ANSYS Student® software is used to study the behavior of the power transmission system and optimize the topology. Topology optimization is performed for two types of gear (helical and hypoid), which must be the largest in order not to affect the design factors in the gears. The measurement system is raised through the analysis of the set of gear train components (shafts and gears), using the frequency response analysis in the shaft sections where the bearings are located. From the optimization it was obtained that the maximization of the natural frequency and the reduction of the magnitude of the accelerations of the frequency response in the power transmission system is reflected when applying the mass reduction in the helical gear, also that the gears of bevel types must pose multiple response restrictions since these are part of the objective of optimization, and not only based on the reduction of mass.

**Keywords:** Topological Optimization, Finite Element Analysis (FEA), Rotodynamic System, Gear Train, Natural Frequency, Vibrations.

# Índice general

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento de problema . . . . .	4
1.2. Justificación . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.3.1. General . . . . .	5
1.3.2. Específicos . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Engranés . . . . .	6
2.2. Fundamentos de vibraciones mecánicas . . . . .	7
2.2.1. Modelo de un grado de libertad . . . . .	8
2.2.2. Modelo de múltiples grados de libertad . . . . .	10
2.2.3. Análisis modal . . . . .	11
2.3. Modelo de sistemas mecánicos de rotación (rotodinámica) . . . . .	12
2.3.1. Modelo de dos grados de libertad de vibración lateral del rotor . . . . .	13
2.3.2. Modelo rotacional de Jeffcott . . . . .	14
2.4. Análisis de elementos finitos (FEA) . . . . .	15
2.4.1. Elementos . . . . .	16
2.4.2. Número de elementos y convergencia . . . . .	17
2.5. Optimización . . . . .	18
2.5.1. Formulación y requisitos para la aplicación de optimización . . . . .	18
2.5.2. Modelo matemático general . . . . .	19
2.6. Optimización estructural . . . . .	19
2.6.1. Optimización topológica estructural . . . . .	20
2.6.2. Métodos de optimización topológica de estructura continua . . . . .	21
2.6.2.1. Método de homogeneización . . . . .	21
2.6.2.2. Método de Material isotrópico sólido con penalización (SIMP) . . . . .	22
2.6.2.3. Método de Optimización estructural evolutiva (ESO) . . . . .	23
2.7. Módulos de análisis en Ansys Student® . . . . .	24
2.7.1. Tipos de módulos de análisis . . . . .	24
<b>3. Metodología</b>	<b>27</b>
3.1. Caracterización del sistema de transmisión . . . . .	28

3.2.	Desarrollo del modelo de elementos finitos de la transmisión de potencia . . .	30
3.3.	Análisis de mallado . . . . .	33
3.3.1.	Etapa de engranes hipoides . . . . .	33
3.3.2.	Etapa de engranes helicoidal . . . . .	35
3.4.	Optimización de los engranes . . . . .	36
3.4.1.	Optimización en engrane Hipoidal B . . . . .	38
3.4.2.	Optimización en engrane Helicoidal C . . . . .	43
3.5.	Ajuste geométrico de los resultados de la optimización . . . . .	46
3.5.1.	Ajuste del engrane Hipoidal . . . . .	46
3.5.2.	Ajuste del engrane helicoidal . . . . .	47
3.6.	Optimización en otro tren de engranes . . . . .	47
3.7.	Diseño del sistema de medición . . . . .	48
3.7.1.	Diseño de soporte . . . . .	49
3.7.2.	Simulación del soporte . . . . .	50
3.7.3.	Ubicación de los puntos de medición . . . . .	51
<b>4.</b>	<b>Análisis de resultados</b>	<b>55</b>
4.1.	Análisis de optimización topológica . . . . .	55
4.1.1.	Análisis de optimización para la etapa hipoidal . . . . .	55
4.1.2.	Análisis de optimización para la etapa helicoidal . . . . .	57
4.1.3.	Análisis de la optimización topológica en el tren de engranes . . . . .	59
4.2.	Análisis de resultados obtenidos con otros tipos de engranes . . . . .	62
4.3.	Análisis del sistema de medición de vibración . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
5.1.	Recomendaciones para trabajos futuros . . . . .	74
	<b>Referencias</b>	<b>75</b>
	<b>Anexos</b>	<b>78</b>
<b>A.</b>	<b>Métodos matemáticos de Ansys®</b>	<b>79</b>
A.1.	Método estructural estático . . . . .	79
A.2.	Método de Análisis modal . . . . .	80
A.3.	Método de Análisis armónico . . . . .	82
A.3.0.1.	Método de optimización topológica . . . . .	82
<b>B.</b>	<b>Diseño de engranes en Inventor®, Por medio del generador de componentes</b>	<b>85</b>
B.1.	Etapa de engranes hipoides 60-15 . . . . .	85
B.1.1.	Parámetros comunes . . . . .	85
B.1.2.	Engranes . . . . .	86
B.1.3.	Cargas . . . . .	88
B.1.4.	Material . . . . .	88
B.1.5.	Calculo de Fuerza . . . . .	89
B.1.5.1.	Factores de carga adicional . . . . .	89
B.1.5.2.	Factores de contacto . . . . .	89
B.1.5.3.	Factores de flexión . . . . .	89
B.1.5.4.	Resultados . . . . .	90
B.2.	Etapa de engranes helicoidales 50-20 . . . . .	91

B.2.1.	Parámetros comunes . . . . .	91
B.2.2.	Engranés . . . . .	92
B.2.3.	Cargas . . . . .	93
B.2.4.	Material . . . . .	94
B.2.5.	Calculo de Fuerza . . . . .	94
B.2.5.1.	Factores de carga adicional . . . . .	94
B.2.5.2.	Factores de contacto . . . . .	95
B.2.5.3.	Factores de flexión . . . . .	95
B.2.5.4.	Resultados . . . . .	96
B.2.5.5.	Parámetros de área seccionada para la optimización del engrane helicoidal C . . . . .	96
B.3.	Planos del sistema de transmisión de potencia . . . . .	96
<b>C.</b>	<b>Materiales</b>	<b>99</b>
C.1.	Acero AISI 1045 estirado en frío (Matweb®) . . . . .	100
C.2.	Acero AISI 4140 enfriado en aceite (Matweb®) . . . . .	101
<b>D.</b>	<b>Resultados de la optimización topológica en Ansys®</b>	<b>102</b>
D.1.	Engrane hipoidal de 60 dientes . . . . .	102
D.2.	Engrane helicoidal de 50 dientes . . . . .	111
<b>E.</b>	<b>Planos de soporte del sistema de medición</b>	<b>120</b>

# Índice de tablas

2.2.1 Las tipos de raíces posibles en base al tipo de amortiguamiento. . . . .	10
3.1.1 Propiedades de los engranes hipoidal y helicoidal. . . . .	29
3.1.2 Propiedades del motor de la caja de engranes de la lavadora whirlpool . . . .	29
3.1.3 Velocidad angular y torque ejercido en cada engrane . . . . .	29
3.4.1 Frecuencia natural de la estructura del engrane hipoidal B . . . . .	40
3.4.2 Frecuencia natural de la estructura del engrane hipoidal B usando Solidworks	41
3.4.3 Frecuencia natural de la estructura del engrane helicoidal C . . . . .	44
3.4.4 Frecuencia natural de la estructura del engrane helicoidal C usando Solidworks . . . . .	45
3.6.1 Propiedades de los engranes cónicos y rectos en base al herramienta de diseño de engranes de Inventor® . . . . .	48
3.7.1 Frecuencia natural de la estructura . . . . .	51
3.7.2 Frecuencias naturales del sistema de transmisión de potencia . . . . .	52
4.1.1 Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica generada en el engrane B. . . . .	56
4.1.2 Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica del engrane C. . . . .	58
4.1.3 Frecuencias naturales del sistema de transmisión de potencia de la lavadora antes y después de la optimización topológica generada del engrane helicoidal C. . . . .	59
4.2.1 Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica generada en el engrane B (cónico). . . . .	63
4.2.2 Comparación adaptación de la geometría caracterizada del engrane hipoide al engrane cónico. Con base en las tablas 4.1.1 y 4.2.1. . . . .	64
4.2.3 Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica generada en el engrane C (Recto). . . . .	65
4.2.4 Comparación adaptación de la geometría caracterizada del engrane helicoidal al engrane recto. . . . .	65

# Índice de figuras

1.0.1 Secciones de la estructura general del engrane. . . . .	3
2.1.1 Tipos de engranes . . . . .	7
2.1.2 El tornillo sinfín o de gusano . . . . .	7
2.2.1 Sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	8
2.2.2 Sistema masa-resorte-amortiguador de dos grados de libertad . . . . .	10
2.2.3 Forma modal de vibración de un edificio. . . . .	12
2.3.1 Sistemas mecánicos de rotación. . . . .	12
2.3.2 Modelo 2-DOF de vibración lateral del roto (LVR). . . . .	13
2.3.3 Diagrama de velocidad angular . . . . .	14
2.3.4 Modelo rotacional de Jeffcott básico. . . . .	14
2.4.1 Malla aplicada en diente de engranes. . . . .	16
2.4.2 Tipos de elementos básicos. . . . .	16
2.4.3 Gráfica de convergencia del número de elementos. . . . .	17
2.5.1 Optimización en un soporte . . . . .	18
2.6.1 Tipos de estructura. . . . .	20
2.6.2 Celda unitaria con material y dominio vacío. . . . .	21
2.7.1 Los principales sistemas de análisis Ansys Student®, destacados en este documento. . . . .	24
2.7.2 Combinación de sistemas para realizar una optimización. . . . .	26
3.1.1 Caja de engranajes de la lavadora Whirlpool. . . . .	28
3.2.1 Representación gráfica de los engranes realizada por medio de Inventor® . . . . .	31
3.2.2 Interfase Mechanical Ansys Student®, para la edición de los módulos de los sistemas de Análisis. . . . .	31
3.2.3 Interfase de malla de Ansys. . . . .	32
3.2.4 Configuración del análisis de Ansys. . . . .	32
3.3.1 Tipos de cargas aplicadas para el obtener la gráfica de convergencia. . . . .	33
3.3.2 Mallado en los engranes hipoides . . . . .	34
3.3.3 Gráfica de convergencia de engranes hipoides . . . . .	34
3.3.4 Mallado en los engranes helicoidales . . . . .	35
3.3.5 Gráfica de convergencia de engranes helicoidales en base al tamaño máximo del elemento . . . . .	35
3.3.6 Gráfica de convergencia de engranes helicoidales . . . . .	36
3.4.1 Objetivo general para realizar la optimización topológica en Ansys. . . . .	37
3.4.2 Error de convergencia usando la <i>restricción de respuesta</i> de frecuencia natural, para el segundo modo. . . . .	37

3.4.3	Setup de las condiciones de contorno. . . . .	38
3.4.4	Análisis de engrane Hipoidal . . . . .	39
3.4.5	Análisis Modal de engrane Hipoidal en base a la velocidad de giro. Obtenido en SolidWorks® . . . . .	40
3.4.6	Parámetro para realizar la optimización topológica en Ansys . . . . .	41
3.4.7	objetivo de la optimización topológica en Ansys® . . . . .	42
3.4.8	Optimización topológica para engrane hipoidal . . . . .	42
3.4.9	Análisis de engrane Helicoidal . . . . .	43
3.4.10	Análisis Modal de engrane Helicoidal en base a la velocidad de giro. Obtenido en Solidworks® . . . . .	44
3.4.11	Optimización topológica para engrane helicoidal . . . . .	45
3.5.1	Geometría dada por la optimización para el engrane Hipoidal. . . . .	46
3.5.2	Geometría dada por la optimización para el engrane Helicoidal. . . . .	47
3.6.1	Geometría de aplicada en el engrane cónico y recto. . . . .	48
3.7.1	Estructura planteada para el sistema de medición. . . . .	49
3.7.2	Análisis de estructura del “banco” . . . . .	50
3.7.3	Representación tridimensional del tren de engranes. . . . .	51
3.7.4	Análisis modal del tren de engranes para el primer y segundo modo. . . . .	52
3.7.5	Análisis modal del tren de engranes para el tercer y cuarto modo. . . . .	53
3.7.6	Análisis modal del tren de engranes para el quinto y sexto modo. . . . .	53
3.7.7	Análisis de respuesta armónica. . . . .	54
4.1.1	Etapa de engranes hipoidal, con sus respectivos ejes y nomenclatura. . . . .	56
4.1.2	Primero, tercero y quinto modo de la frecuencia natural del engrane hipoidal B. . . . .	57
4.1.3	Etapa de engranes helicoidal, con sus respectivos ejes y nomenclatura. . . . .	58
4.1.4	Modo quinto del tren de engranes helicoidales, con base en la optimización topológica del engrane C. . . . .	59
4.1.5	Área de referencia en la obtención del análisis de respuesta de frecuencia. . . . .	60
4.1.6	Gráfica de respuesta de frecuencia de aceleración para el tren de engrane con y sin optimización. . . . .	60
4.1.7	El comportamiento del sistema en base al tipo de amortiguamiento. . . . .	61
4.2.1	Análisis estático estructural para la etapa de engranes cónicos. . . . .	62
4.2.2	Análisis estático estructural para la etapa de engranes rectos. . . . .	63
4.3.1	Ubicación y denominación de los rodamientos en el tren de engranes. . . . .	66
4.3.2	Gráfica de respuesta armónica de los cinco rodamientos. . . . .	66
4.3.3	Gráfica de respuesta armónica de los primeros tres rodamientos con holgura en el segundo rodamiento. . . . .	67
4.3.4	Gráfica de respuesta armónica de los primeros tres rodamientos con holgura en el tercer rodamiento. . . . .	68
4.3.5	Gráfica de respuesta armónica de los tercero, cuarto y quinto rodamientos con holgura en el cuarto rodamiento. . . . .	69
4.3.6	Gráfica de respuesta armónica de los tercero, cuarto y quinto rodamientos con holgura en el quinto rodamiento. . . . .	69
B.1.1	Documento de engranes hipoides . . . . .	85
B.1.2	Detonación de engranes hipoides . . . . .	87
B.2.1	Documento de engranes helicoidales . . . . .	91
B.2.2	Detonación de engranes helicoidales . . . . .	93

C.1.1 Datos del Acero AISI 1045 estirado en frío . . . . . 100  
C.2.1 Datos del Acero AISI 4140 enfriado en aceite. . . . . 101

# Lista de Símbolos y abreviaturas

## Símbolos con letras latinas

Símbolo	Termino
$a_e$	Ancho vació
$b_e$	Altura de vacío
$m$	Masa
$c$	Coefficiente de amortiguamiento
$k$	Coefficiente de rigidez
$I_P$	Inercia polar
$F$	Fuerza
$\bar{V}_s$	límite de volumen superior
$[C]$	Matriz de de amortiguamiento
$[K]$	Matriz de de rigidez
$[M]$	Matriz de de masa
$\{u\}$	Vector de desplazamiento nodal

## Símbolos con letras griegas

Símbolo	Termino
$\Omega$	Velocidad angular
$\omega$	Frecuencia
$\omega_n$	Frecuencia natural
$\phi_n$	Ángulo de presión
$\psi$	Ángulo de hélice

$\tau$	Torque
$\theta$	Angulo de disco
$\Pi(p)$	Energía potencial en la estructura
$\rho$	Densidad

## Abreviaturas

Símbolo	Termino
CAD	Dibujo asistido por computador
CAE	Ingeniería asistida por computador
EF	Elementos finitos
FEA	Análisis de elementos finitos
FEM	Método de los elementos finitos
DOF	Grados de libertad
ORI	Original
RAI	Planteado
SIMP	Material isotrópico sólido con penalización

# Capítulo 1

## Introducción

Los engranajes son mecanismos de transmisión de potencia, implementados en diferentes máquinas de uso cotidiano, por ejemplo, la caja de transmisión que tienen la mayoría de lavadoras, la caja de cambios o de marchas de los automóviles, entre otros. En uso industrial se encuentran en bombas de aguas, troqueladora, las prensas mecánicas etc. Son elementos compactos que pueden llegar a utilizar poco espacio, poseen un menor mantenimiento a diferencia de otros sistemas de transmisión de potencia, la pérdida de potencia por deslizamiento baja o nula y son usados frecuentemente para modificar el torque o la velocidad [1]. Entre las desventajas se encuentra principalmente, el peso de estos mecanismos, la pérdida de energía por fricción, la necesidad de lubricación constante, ruido y vibraciones generadas.

Por lo tanto se ha investigado sobre mejorar el diseño los trenes de engranes, utilizando diferentes criterios determinados o bajo algunos parámetros establecidos para la maximización o minimización de propiedades mecánicas [2] y [3], beneficiando el desarrollo de diseño de engranes e implementaciones técnicas de tratamientos metalúrgicos para dar mayores propiedades mecánicas a los engranes y disminuir sus fallas.

Los sistemas de caja de engranajes tienen un alto nivel de vibraciones por diferentes aspectos como lo son la precisión de los engranajes, la lubricación, el material, la variación de carga, desgaste, la precisión del montaje, el acabado superficial, entre otros. Estos aspectos se agrupan en cuatro factores: el diseño (35%), la fabricación (30%), uso (20%) y ensamble (15%) [4], cada uno de estos porcentaje representa la el aporte en la generación

de vibraciones. En cuanto al factor de diseño las fallas más comunes son error del perfil del diente, mal contacto entre dientes y los rodamientos seleccionados [1]. A través de la reducción de vibraciones relacionadas a los engranes se puede reducir el ruido generado [5], ya que parte de esta energía mecánica se transforma en energía acústica.

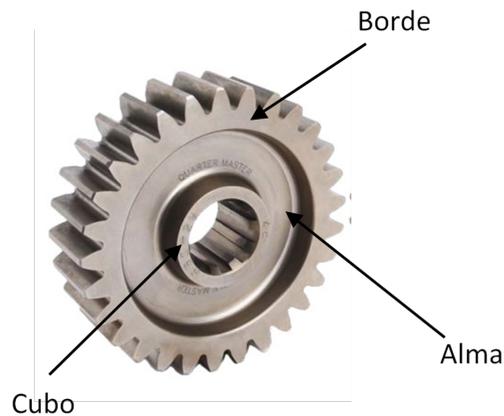
Algunas de las investigaciones realizadas para la optimización del engrane se han concentrado en la geometría del diente. Por ejemplo, Shekhtman y Kapelevich [6], realizaron optimización del perfil de filete de diente de engranaje por medio software de análisis de elementos finitos (o FEA por sus siglas en inglés *Finite Element Analysis*), generando diferentes radios de curvatura del filete para la reducción del esfuerzo de flexión. Esta reducción permite distribuir la fuerza de contacto sobre todo el perfil del diente. El estudio también concluyó, que al reducir módulo y optimizar el filete del diente se puede distribuir mejor la fuerza de contacto a todo el engrane. Se ha trabajado en el acabado superficial de los dientes del engrane, como el artículo dado por Amini, et al. [7], en el cual se estudia la reducción del ruido generado por los acabados superficiales de los engranajes helicoidales, por medio de la optimización del proceso de rectificado RZP, rectificado Fässler y afeitado verde Hurth.

Se han realizado investigaciones de optimización multi-objetivo, en el cual se desarrolla un equilibrio entre los objetivos ha tener en cuenta una mayor cantidad de variables en el proceso de optimización sin afectar la transmisión de potencia. En el trabajo de Kim, et al. [8], se implementó algoritmos genéticos usando el software NSGA II, enfocado en la macro-estructura del engrane y obteniendo como resultados: 1) al compensar los tres parámetros, genera una disminución del deterioro de los engranes y 2) la relación entre masa y eficiencia, son directamente proporcionales.

En lo relacionado a la industria automotriz, Mehmet Bozca, et al [9] se determinó: Los errores de transmisión pueden aumentar con mayor número de dientes, los errores de transmisión generan vibración torsional que es una fuente de ruido de traqueo y la optimización de los parámetros de diseño geométrico reduce el ruido del engranaje.

Las principales acciones de optimización aplicadas en el diseño de engranes son el algoritmo genético y optimización topológica. Los algoritmos genéticos tienen en cuenta la memoria histórica y toma en cuenta los antecedentes de evolución de ciertos parámetros geométricos o de diseño (valores de las horquillas paramétricas, criterio diana, datos históricos, restricciones, etc.) [10], por otro lado la optimización topológica consiste en buscar una

distribución óptima de material en un dominio de diseño que satisfaga las solicitaciones y las condiciones de borde definidas, enfocando en el sistema actual que se desea optimizar [11]. La mayoría de las optimizaciones topológicas que se han realizado en engranes, están dadas en el alma como se ve en la figura 1, mientras que la optimización de algoritmo genético ha sido realizada en el borde o corona del engrane [9].



**Figura 1.0.1:** Secciones de la estructura general del engrane.[12]

En lo relacionado a las aplicaciones de optimización topológica, Ramadani, et al.[13] realizaron un estudio de diseño basado en cuerpos de engranajes ligeros y de baja vibración, usando una estructura de celosía celular generada por optimización de la topología para eliminar las concentraciones de esfuerzo. De esta manera se evidencia, que un cuerpo de engranaje con estructura reticular o celosía es una opción que podría reducir notablemente las vibraciones, además del beneficio de la reducción de peso. En esta misma línea Casa et al. [14] emplearon el software de ANSYS para modelar la disminución del peso manteniendo el máximo esfuerzo admisibles que puede soportar los engranajes rectos, reduciendo la cantidad de material en el alma variando su geometría interna, reduciendo su peso alrededor del 40 %. Estas modificaciones geométricas evidencian la importancia el uso de herramientas CAD para estos análisis de optimización topológica.

## 1.1. Planteamiento de problema

El principal mecanismo en transmisión de potencia se da a través del uso de los engranajes. Como cualquier sistema dinámico, genera vibraciones naturales o forzadas [15]. Debido a la implementación de diferentes máquinas se busca mejorar la eficiencia de transmisión de potencia y disminuir el peso. La vibración es un medio de disipación de la energía de las máquinas, el cual puede ser amplificado por diversas causas, como son el montaje deficiente de rodamientos, el desgaste, sistemas de transmisión potencia y entre otros. Esta amplificación de vibración implica desgaste prematuro de estos elementos y generación de ruido.[16]

Los estudios generados hasta el momento se han enfocado en el diseño y aplicación de optimización topológica en los engranes rectos y helicoidales, por lo que el análisis de otros tipos de transmisión (hipoides, cónicos, etc.) todavía es motivo de estudio [14], también que los engranes cónicos y hipoides son considerados de nivel de vibración alta después de los rectos.[17]

## 1.2. Justificación

Los engranajes son mecanismos que generan vibraciones, lo cual produce pérdidas de energías o pérdidas de potencia en la transmisión de la misma. Por lo tanto, se puede mejorar la eficiencia del sistema, por medio de diferentes estudios o diseños, como son el cambio de perfil del diente, el cavado superficial del mismo, la optimización por algoritmo genético, entre otros.

Por medio del avance tecnológico se ha desarrollado la técnica de optimización topológica, en la cual por medio de la reducción de peso y la generación de estructuras celosías o reticuladas pueden mejorar las propiedades mecánicas y disminuir las vibraciones del cuerpo. Este tipo de estructuras se puede representar a través de un modelo de elementos finitos por medio de software CAE (*computer aided engineering*), los cuales poseen sistemas de análisis de optimización topológica, definiendo como función la reducción de masa y la modificación de la frecuencia natural de vibración, entre otras herramientas para simular los comportamientos de las propiedades del diseño.

La optimización topológica busca modificar variables como la masa de un elemento sin

afectar su resistencia mecánica. De esta manera, se puede afectar su comportamiento dinámico reduciendo la vibración [18]. La reducción de vibración aporta mayor vida útil de los rodamientos como del eje y disminuye la probabilidad de falla cuando existen concentraciones de esfuerzo.

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. General**

Diseñar por medio de la optimización topológica un tren de engranes de dos etapas (helicoidal y cónicos), con el fin de reducir vibraciones.

#### **1.3.2. Específicos**

1. Realizar un modelamiento numérico para simular y analizar su comportamiento dinámico del sistema rotatorio bajo diferentes condiciones de carga.
2. Realizar la optimización topológica del engrane definiendo como función objetivo las frecuencias naturales de vibración de acuerdo al funcionamiento.
3. Analizar el comportamiento dinámico con diferente tipo de engrane, usando la geometría obtenida por la optimización topológica.
4. Comparar la respuesta dinámica de los diferentes modelos numéricos obtenidos, con el fin de reducir el costo computacional y evaluar la optimización.
5. Proponer un sistema de medición para analizar las respuestas dinámicas del tren de engranes.

# Capítulo 2

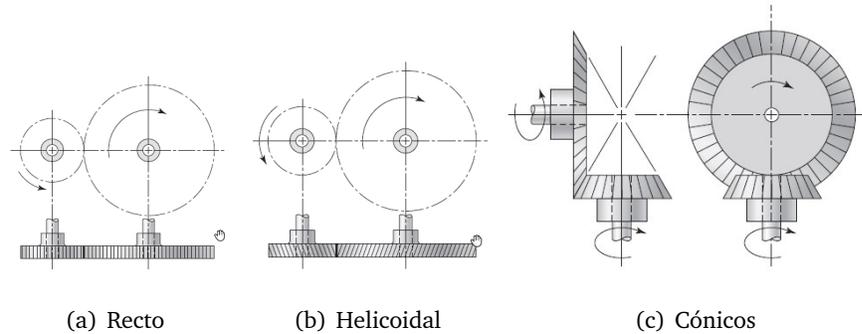
## Marco Teórico

### 2.1. Engranés

Los engranes son sistemas de transmisión de potencia, donde varía el torque ( $\tau$ ) y la velocidad angular ( $\Omega$ ) entre un eje a otro. Esta transmisión de movimiento se realiza por medio de los dientes de los engranes, siendo que existen un engrane impulsor y uno impulsado. Hay una variedad de tipos de engranes en los cuales se encuentran los de tipo recto, helicoidal, cónico y sinfín-corona los cuales se describirán brevemente en esta sección. En la figura 1.0.1 se observan las partes generales de la estructura de engrane a grandes rasgos como lo es el alma, borde o corona y cubo; dentro del borde o corona se encuentran elementos importantes en la geometría en el cual puede variar dependiendo el tipo de engrane a usar. [19] [20] [21] [22][23]

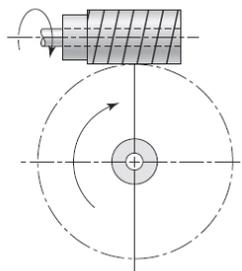
**Los engranes recto** poseen los dientes de forma paralela al eje de rotación, se emplea para la transmisión del movimiento entre ejes paralelos como se puede visualizar en la figura 2.1.1(a). **Los engranes helicoidal** poseen los dientes inclinados en base al eje de rotación formando un *ángulo de hélice*, se puede visualizar en la figura 2.1.1(b) y se emplean igual a los engranes rectos, pero no son tan ruidosos debido al acople gradual entre los dientes, su desventaja frente a los engranes rectos es una fuerza de axial o también llamada fuerza de empuje. **Los engranes cónicos** se encuentran los dientes ubicados en la superficie cónica, como se puede ver en la figura 2.1.1(c), se emplea para transmitir movimiento entre ejes interseca. Dentro de los engranes cónicos se generan subtipos o clasificación debido a la dirección de los dientes, a los dientes helicoidales se conocen como cónico espiral mientras

los rectos se consideran solamente como cónicos y también se los engranes hipoides tiene una semejanza a los cónicos espiral con la diferencia que los ejes están desplazados y no se interseca. [23][19]



**Figura 2.1.1:** Tipos de engranes.[22]

El **tonillo sinfín** o de gusano tiene una forma similar a un tornillo, este transmite el movimiento entre ejes cruzado simple como se puede ver en la figura 2.1.2 entre el tornillo y la corona, funcionan unidireccional transmitiendo de el sinfín a la corona y no inversamente.



**Figura 2.1.2:** El tornillo sinfín o de gusano.[22]

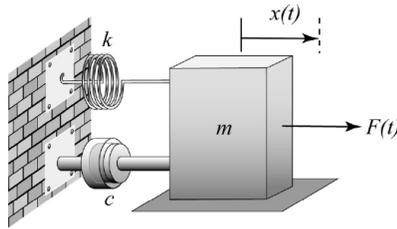
Cada tipo de engranes genera un nivel de vibración diferente. De forma general el nivel de vibración según el tipo de engrane se presenta ( de manera descendente ) en engranes rectos, cónicos, hipoides, helicoidales, doble helicoides, y otra variedad de configuraciones[17].

## 2.2. Fundamentos de vibraciones mecánicas

El estudio de vibraciones es importante en diseño de maquinas debido a la energía disipada (y no aprovechada) por las vibraciones, además del ruido, desgates y fallas de los elementos,

transmite fuerzas y movimientos indeseables a los objetos cercanos [24]. Conceptualmente se puede definir la vibraciones como cualquier movimiento que se repiten después de un intervalo de tiempo [18] [17].

Para analizar la vibración de un sistema mecánico se puede explicar de manera simplificada con un sistema masa - resorte - amortiguador, el cual depende de la cantidad de grados de libertad (GDL). Los GDL son el número mínimo de coordenadas independientes requeridas para determinar todas las partes del sistema en cualquier instante de tiempo [18][25].



**Figura 2.2.1:** Sistema masa-resorte-amortiguador.[25]

### 2.2.1. Modelo de un grado de libertad

Se considera un sistema de un solo grado de libertad cuando se tiene únicamente un movimiento independiente, generado en una sola dirección, como se puede observar en la figura 2.2.1. Este sistema esta representado por la ecuación diferencial del movimiento basada en la segunda ley de Newton, donde ( $k$ ) es la constante del resorte, ( $c$ ) es la constante de amortiguamiento, ( $m$ ) es el valor de la masa y ( $x$ ) es la posición, en un tiempo ( $t$ ).

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2.2.1)$$

Al considerar que el sistema no posee un amortiguamiento, se describe que el sistema es masa- resorte y que retorna siempre a su punto de equilibrio de describe por la ecuación 2.2.2.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

El cual se puede solucionar suponiendo  $x(t) = Ce^{st}$ , donde  $C$  y  $s$  son constantes que se deben determinar, por lo cual la generada la ecuación 2.2.3,

$$C(ms^2 + k) = 0 \quad (2.2.3)$$

Puesto que  $C$  no puede ser cero tenemos  $ms^2 + k = 0$  y por tanto:

$$s = \pm \left( -\frac{k}{m} \right)^{1/2} = \pm i\omega_n \quad (2.2.4)$$

Donde  $i = (-1)^{1/2}$ .

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2.5)$$

Dado que la solución cumple con las condiciones de la ecuación diferencial se puede describir como:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} \quad (2.2.6)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Al utilizando as identidades se escribe, como la ecuación 2.2.7, donde  $A$  es la amplitud de la señal. También conocida como la ecuación del movimiento armónico simple.

$$x(t) = A_1 \text{sen}(\omega_n t) + A_2 \text{cos}(\omega_n t) \quad (2.2.7)$$

En el análisis de vibraciones de un sistema es necesario identificar la diferencia entre la frecuencia de excitación del sistema ( $\omega$ ) y la frecuencia natural ( $\omega_n$ ) la cual no es generada. es una característica propia de los sistemas mecánicos y depende de la rigidez y amortiguamiento. La resonancia que ocurre cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural del sistema, explicada en la ecuación 2.2.5. [26][27]

Para sistemas **amortiguados libres** se soluciona la ecuación 2.2.1, donde se considera en estado de equilibrio, por lo tanto  $F(t) = 0$  y sustituir  $x(t) = Ce^{\lambda t}$  donde  $\lambda$  y  $C$  son constante pre-exponencial y del coeficiente dependiente de la frecuencia (constantes), la ecuación obtenida es de la siguiente forma:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2.2.8)$$

Y se obtiene las raíces

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.2.9)$$

Se generan tres posibles soluciones con diferentes condiciones iniciales basado al tipo de amortiguamiento (i) sub-amortiguadas, (ii) críticamente amortiguadas y (iii) sobre-amortiguadas, esto se basa por medio *coeficiente de amortiguamiento critico*  $c_c$ , es cuando

el valor de  $c$  hace que el radical en la ecuación 2.2.9 se iguale a cero. [28]

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \longrightarrow c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (2.2.10)$$

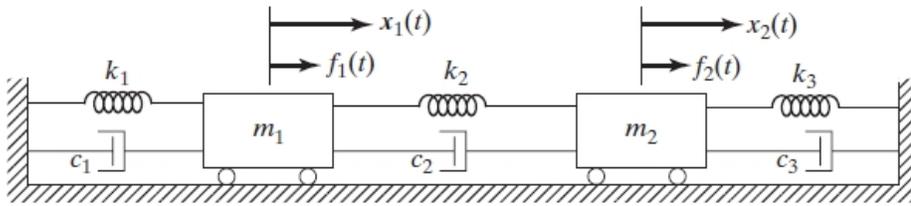
Con base en esto podemos caracterizar el tipo de amortiguamiento vinculado, sus condiciones y la raíces como se puede observar en la tabla 2.2.1, donde la constante  $\omega_d$  se llama frecuencia natural amortiguada del sistema.[27]

Tipo de amortiguamiento	Condición	Raíces
sub-amortiguadas	$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \leq \frac{k}{m}$	Complejos conjugados ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega_d$ )
críticamente-amortiguadas	$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$	Reales iguales ( $\lambda_{1,2} = \alpha$ )
sobre-amortiguadas	$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \geq \frac{k}{m}$	Reales ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ )

**Tabla 2.2.1:** Las tipos de raíces posibles en base al tipo de amortiguamiento.[28]

### 2.2.2. Modelo de múltiples grados de libertad

Para comprender como podemos modelar un sistemas de múltiples grados de libertad, se tomara como referencia la figura 2.2.2, el cual es un sistema masa-resorte-amortiguador común de dos grados de libertad (2 DOF, por sus siglas en ingles de *degrees of freedom*).



**Figura 2.2.2:** Sistema masa-resorte-amortiguador de dos grados de libertad. [18].

Se realizar una sumatoria de fuerzas sistema por medio de los diagramas de cuerpo libre y la segunda ley de Newton, en base a esto se genera dos ecuaciones 2.2.11 y 2.2.12:

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2)\dot{x}_1(t) - c_2\dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = F_1(t) \quad (2.2.11)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - (c_2)\dot{x}_1(t) - (c_2 + c_3)\dot{x}_2(t) - (k_2)x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = F_2(t) \quad (2.2.12)$$

Para sistemas de múltiples grados de libertad se puede escribir las ecuaciones de forma matricial, por medio de la matriz  $[M]$  de masa,  $[C]$  de amortiguamiento y  $[K]$  de rigidez.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (2.2.13)$$

Al escribir las ecuaciones 2.2.11 y 2.2.12 de forma matricial de la ecuación 2.2.13 queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2.2.14)$$

Con el fin de obtener la frecuencia natural y los modos de vibraciones se debe resolver este sistema, existen diferentes modelos y métodos, por ejemplo la transformada de Laplace, fórmula de Dunkerley, método de Rayleigh, método de Holzer entre otros. Cada uno de estos métodos tienen diferentes aplicaciones y uso en el análisis de vibraciones. [28] [25][18][29]

### 2.2.3. Análisis modal

El análisis modal es un proceso mediante el cual se describe el comportamiento dinámico de una estructura a través de los parámetros modales que son las frecuencias y modos de vibración. Cada modo de vibración está asociado a una frecuencia natural y una forma del modo de vibración. [30][31]

La forma modal de vibración generalmente representa el desplazamiento de los DOF con los que se define el sistema, resultante de la obtención del autovector. Por ejemplo, un edificio de tres niveles mostrado en la figura 2.2.3, esta siendo sometido por un sismo. Durante este suceso, se identifica diversos desplazamientos, en tres momentos diferentes, donde en el primer momento (modo 1), se observa un traslación en la parte superior del edificio, en el segundo momento (modo 2), se desplazan los niveles intermedio del edificio en la misma dirección y por último el tercer momento (modo 3), cada nivel del edificio tiene un desplazamiento en diferentes dirección. Para este ejemplo se identificaron tres modos de vibración. Pero dependiendo de los DOF de la estructura pueden haber más.

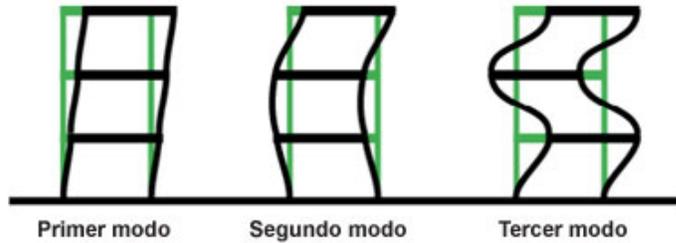


Figura 2.2.3: Forma modal de vibración de un edificio.[30]

### 2.3. Modelo de sistemas mecánicos de rotación (rotodinámica)

El sistema mecánico rotatorio es aquel dispositivo que posee partes que pueden girar sobre su mismo eje con un movimiento angular significativo, generalmente es definido como rotor. Con el objetivo de suspender al rotor y a la vez dejar que gire libremente se utilizan soportes como cojinetes o bisagras.[32]

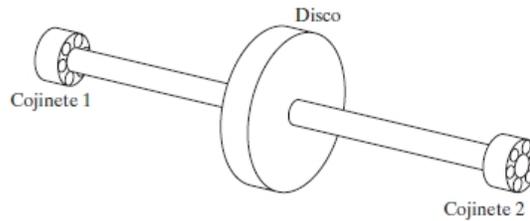


Figura 2.3.1: Sistemas mecánicos de rotación.[18].

La ecuación que describe el movimiento de los sistemas rotodinámica es la ecuación 2.3.1, la cual tiene una relación con la ecuación 2.2.13, de múltiples grados de libertad. Donde se tiene igualmente la matriz  $[M]$  de masa, la matriz  $[C]$  de coeficiente de amortiguamiento y la matriz  $[K]$  de rigidez, se incluye ahora  $[G]$  la matriz giroscópica y  $[H]$  es la matriz circulatoria y  $q(t)$  es un vector que contiene las coordenadas generalizadas, referidas a un marco inercial.[32]

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C + G]\{\dot{q}(t)\} + [K + H]\{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.3.1)$$

### 2.3.1. Modelo de dos grados de libertad de vibración lateral del rotor

Este modelo esta basado en el movimiento del rotor orbital en un plano radial  $x$  y  $y$  como se puede visualizar en la figura 2.3.2. En este modelo, se permite que la masa del punto del rotor ( $m$ ) se traslade en un plano radial  $x$  y  $y$ . El soporte del eje esta representado por componentes de rigidez y amortiguamiento, además que puede ser excitado por fuerza radial o tangencial.

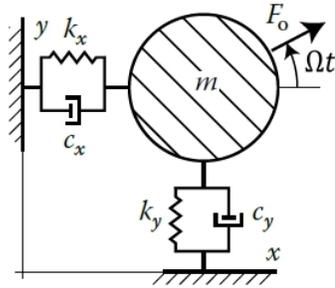


Figura 2.3.2: Modelo 2-DOF de vibración lateral del roto (LVR).[28].

El modelo matemático generado en base a la ecuación 2.2.1 y sus grados de libertad como se observa continuación en la ecuación 2.3.2.

$$\begin{aligned} m\{\ddot{x}\} + c_x\{\dot{x}\} + k_x\{x\} &= \{f_0 \cos \Omega t\} \\ m\{\ddot{y}\} + c_y\{\dot{y}\} + k_y\{y\} &= \{f_0 \sin \Omega t\} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

La flexibilidad y amortiguamiento de los rodamientos son obtenidos de las características dinámicas de los rodamientos. La ecuación 2.3.2 puede escribirse como: [28][33]

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & c_y \\ c_y & c_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & k_y \\ k_y & k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Es importante aclarar que la velocidad angular  $\Omega$  y la frecuencia  $\omega$  poseen la misma definición como *el número de ciclos completados por unidad de tiempo*, pero principalmente sus diferencia son las unidades de medida, la velocidad angular esta dada principalmente RPM ( por sus siglas en ingles *revolutions per minute*) o en radianes por segundos, mientras la frecuencia esta dada en HZ y físicamente se pueden usar en diferentes aplicaciones, por ejemplo, la velocidad angular se usa para determinar la velocidad lineal de un punto dentro de

elemento que gira sobre su mismo eje y depende del radio o distancia hasta el punto como se muestra en la figura 2.3.3 y la frecuencia  $\omega$  es mayormente usado para el estudio de vibraciones.[27][34]

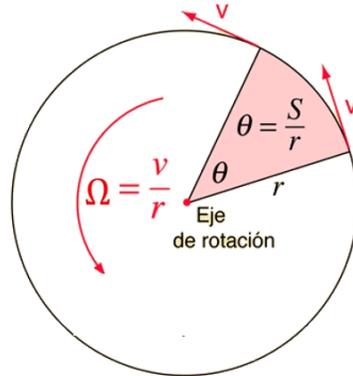


Figura 2.3.3: Diagrama de velocidad angular.[34]

### 2.3.2. Modelo rotacional de Jeffcott

Este modelo considera el comportamiento de flexión de los rotores y consiste en una masa puntual unida a un eje sin masa. Aunque el modelo de rotor Jeffcott es una simplificación, conserva algunas características que permiten obtener una visión cualitativa de los fenómenos rotordinámica [32].

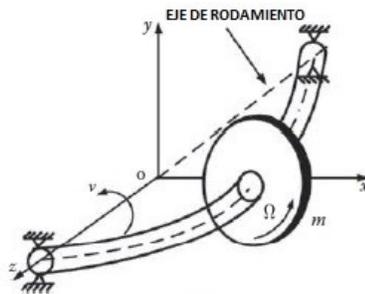


Figura 2.3.4: Modelo rotacional de Jeffcott básico.[33]

El esquema de la figura 2.3.4, está dado por un sistema con 4 GDL. En este modelo se permiten los desplazamientos angulares del disco ( $\theta_x$  y  $\theta_y$ ) y se incluyen los momentos de inercia polar y transversal del disco ( $I_P$  y  $I_T$ ) alrededor de su centro. Con base en esto se puede describir el comportamiento del sistema de forma matriz como se muestra

a continuación.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega L_P \\ 0 & 0 & -\Omega L_P & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ M_x(t) \\ M_y(t) \end{Bmatrix} \tag{2.3.4}
 \end{aligned}$$

Donde  $I_T$  es la inercia transversal,  $I_P$  es la inercia polar,  $M_y$  es el momento aplicado del eje  $x$ ,  $M_x$  es el momento aplicado del eje  $y$ ,  $\Omega$  es la velocidad angular o de giro del rotor,  $k_x$  es el coeficiente de rigidez respecto a eje  $x$ ,  $k_y$  es el coeficiente rigidez respecto a eje  $y$ ,  $F_x$  es la fuerza resultante del eje  $x$  y  $F_y$  es la fuerza resultante del eje  $y$  [28][33].

Existen modelos de hasta 8 DOF pero que no consideran la flexibilidad de sus componentes. La solución de estos modelos no es simple ya que se trata de ecuaciones diferenciales, por lo que se proponen soluciones numéricas. Entre estas soluciones está el FEM (*Finite element method*).

## 2.4. Análisis de elementos finitos (FEA)

El análisis de elementos finitos tiene como objetivo obtener la solución de problemas de sistemas discretos, por medio de la aproximación del comportamiento de un sistema continuo cuyo comportamiento está definido por ecuaciones diferenciales lineales [35]. En este método se realiza la discretización del cuerpo a estudiar, dividiendo su geometría (llamada dominio) en un número definido de elementos, cuya distribución se denomina malla. Los elementos están conectados entre sí a través de puntos llamados nodos, lo cuales definen los grados de libertad correspondientes al dominio [36]. La solución obtenida no es exacta, pero se puede aproximar al realizar una refinación de la malla [37]. El método de elementos finitos plantea la solución de las ecuaciones diferenciales correspondientes al dominio, transformándolas a través de polinomios (funciones de forma) en un número definido de ecuaciones algebraicas lineales correspondientes a cada nodo. De esta manera es obtenido un sistema de ecuaciones lineales que son resueltas con la ayuda de un software. En

resumen, el software puede realizar el mallado, la definición de las matrices de las ecuaciones diferenciales, su conversión a un sistema de ecuaciones lineales y su resolución.

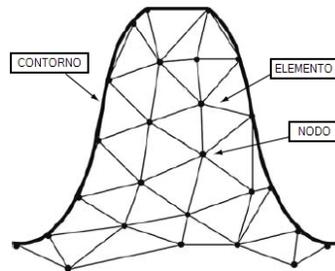


Figura 2.4.1: Malla aplicada en diente de engranes.[36]

### 2.4.1. Elementos

La discretización realiza una división en elementos dentro del dominio del cuerpo a estudiar, esto es la base para realizar el análisis de elementos finitos, por lo cual es importante conocer las diferentes características de los elementos como la forma, tamaño, números y configuración, para obtener el mayor aproximación al valor real y disminuir el esfuerzo computacional. [36][37]

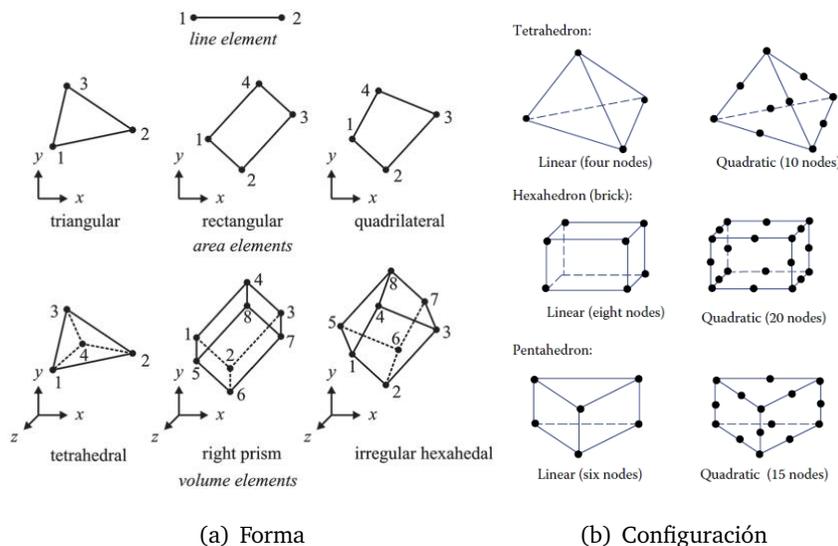


Figura 2.4.2: Tipos de elementos básicos.[38][39]

En la figura 2.4.2(a) podemos visualizar los tres tipos de formas básicas (línea, área y volumen), cada una tiene un uso específico de aplicación. Los elementos de línea se utilizan para modelar armaduras hechas de resortes, eslabones o vigas. Los elementos de área que

pueden ser rectángulos o triángulos se utilizan para modelar áreas sólidas bidimensionales, como por ejemplo la tensión de una placa fina. Los elementos de volumen se utilizan para dividir cuerpos tridimensionales. Un elemento que no se considera de área y tampoco de volumen que son los de tipo “Shell” que se usan para elementos de volumen con bajo espesor como lo son chapas metálicas.[36]

En la figura 2.4.2(a) y (b) se puede visualizar el número de nodos en cada forma y configuración, el más usado para los análisis es el tetraédrico y el triangular, para esto se puede usar elementos rectangulares o cuadriláteros y ortoedro o hexaédrico, en el caso de que los cuerpos sean simétricos. También se puede aumentar el orden de las funciones de forma con el fin de obtener más nodos, como se puede ver en la figura 2.4.2(b) donde se encuentra el orden lineal y el cuadrático, el cuadrático se utiliza principalmente para cuerpos que poseen gran propiedad elástica y una alta deformación.[37][39]

#### 2.4.2. Número de elementos y convergencia

El número de elementos a elegir para la discretización está relacionado con la precisión deseada, el tamaño de los elementos y el número de grados de libertad involucrados. Aunque un aumento en el número de elementos generalmente significa resultados más precisos, para cualquier problema dado, habrá un cierto número de elementos más allá de los cuales la precisión no se puede mejorar significativamente [37]. En la figura 2.4.3 se puede ver una gráfica de convergencia donde se puede visualizar el punto  $N_0$  donde la solución del análisis de elementos finitos no varía significativamente, esta gráfica nos ayuda a disminuir el número de elementos para reducir el costo computacional [39].

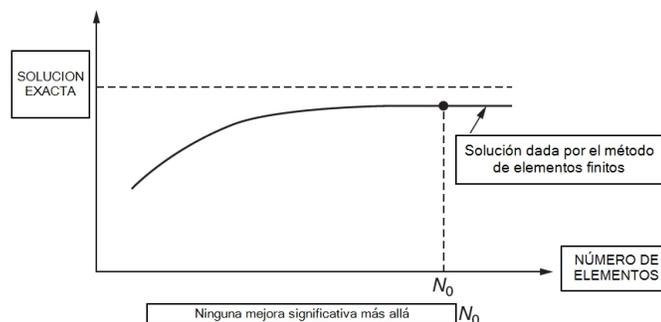


Figura 2.4.3: Gráfica de convergencia del número de elementos.[37]

## 2.5. Optimización

El proceso de optimización está en la raíz de la ingeniería, ya que la función clásica del ingeniero es diseñar sistemas nuevos, mejores, más eficientes y menos costosos, así como diseñar planes y procedimientos para el mejor funcionamiento de los sistemas existentes[40]. La optimización se puede definir como el proceso de encontrar las condiciones que dan el valor máximo o mínimo de una función [30]. Para realizar cualquier proceso de optimización se basa en los siguientes pasos:

1. Construcción de un modelo matemático adecuado para un problema concreto.
2. Se requiere la especificación de un criterio objetivo cuantitativo y restricciones.
3. El modelo se resuelve mediante algoritmos numéricos adecuados.

Un diseño óptimo es aquel que brinda el mejor valor objetivo posible, al tiempo que satisface todas las restricciones del problema [41].

Los algoritmos de optimización son cada vez más populares en las actividades de diseño de ingeniería múltiple, principalmente debido a la disponibilidad y asequibilidad de las computadoras de alta velocidad. Se utilizan ampliamente en aquellos problemas de diseño de ingeniería donde el énfasis está en maximizar o minimizar un objetivo determinado [42]. Por ejemplo, los algoritmos de optimización se utilizan habitualmente en las actividades de diseño aeroespacial para la disminución de peso en los componentes de las aeronaves.



Figura 2.5.1: Optimización en un soporte.[13]

### 2.5.1. Formulación y requisitos para la aplicación de optimización

La formulación y requisitos para la optimización es un proceso general, el cual no se basa en un modelo específico de optimización, por lo cual se describe por un medio jerárquico global con base en diferentes autores. La **variable de diseño** es la formulación de un problema

de optimización comienza con la identificación de las variables de diseño subyacentes, que se varían principalmente durante el proceso de optimización. Las variables de diseño comúnmente es la masa, volumen, rigidez, transferencia de calor, geometría entre otros [42]. Las **Restricciones o límites del sistema** representan algunas relaciones funcionales entre las variables de diseño y otros parámetros de diseño que satisfacen ciertos fenómenos físicos y ciertas limitaciones de recursos. Algunas de estas consideraciones requieren que el diseño permanezca en equilibrio estático o dinámico [40]. Y la **Función objetivo o criterio desempeño** se debe seleccionar un criterio sobre cuya base se pueda evaluar el rendimiento o el diseño del sistema de modo que se pueda identificar el mejor diseño o conjunto de condiciones de funcionamiento [30].

### 2.5.2. Modelo matemático general

Con base en lo anterior se puede plantear una modelo o función generalizada para la optimización [43].

$$\begin{aligned}
 P^* &= \min_x f_0(x) \\
 \text{suje}to &: f_i(x) \leq 0 \\
 \text{Dominio} &: i = 1, \dots, m
 \end{aligned}
 \tag{2.5.1}$$

Donde  $x \in R^n$  variable de diseño,  $f_0 : R^n \rightarrow R$  es la función objetivo,  $f_i : R^n \rightarrow R$ ,  $i = 1, \dots, m$ , representan las restricciones y  $P^*$  es el valor óptimo.

## 2.6. Optimización estructural

La optimización estructural busca lograr el mejor rendimiento para una estructura para satisfacer varias restricciones, como una determinada cantidad de material. El diseño estructural es cada vez más importante debido a los recursos materiales limitados, el impacto ambiental y la competencia tecnológica, todo lo cual exige estructuras livianas, de bajo costo y de alto rendimiento [43]. Se pueden mencionar objetivos como aumentar la rigidez, reducir la tensión, reducir el desplazamiento, alterar su frecuencia natural, aumentar la carga de pandeo, fabricar con métodos convencionales o avanzados [44].

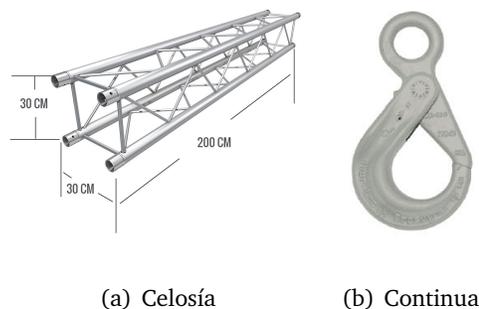
Los métodos para optimizar estructuras generalmente se pueden clasificar de acuerdo con tres variables de diseño: optimización de tamaño, forma y topología [45]. La optimización del

tamaño, las variables de diseño consideradas se relacionan con los parámetros geométricos de la estructura. La optimización de la forma, la variable de diseño está relacionada con la geometría de la estructura. La optimización de la topología se ocupa de buscar la distribución óptima de material en un dominio de diseño dado que minimiza una función .

En este proyecto nos enfocaremos en la optimización de tipo topología, dado que no deseamos cambiar la forma ni geometría de los engranes sino obtener una estructura que disminuya la vibraciones y el peso en las dos etapas, por lo cual solo abarcaremos el tema de la optimización topológica en estructuras.

### 2.6.1. Optimización topológica estructural

La optimización topológica tiene aplicación a dos tipos de estructura, la “truss” (Armadura o Celosía) y continua. La estructura celosía esta compuesta por vigas y columnas, como la estructura de los puentes metálicos, torres grúas, entre otros, un ejemplo es la figura 2.6.1(a). Mientras en la figura 2.6.1(b) es una estructura continua, la cual solo posee un elemento de igual manera de un material y su fuerza se distribuye por todo el cuerpo, como los engranes. Las dos principales características distintivas de la optimización topológica son que: (1) la propiedad elástica del material, en función de su densidad, puede variar en todo el dominio del diseño; y (2) el material puede eliminarse permanentemente del dominio del diseño [43] [44]. Existen varios modelos usados para realizar la optimización, en la que permita la selección de regiones geométricas de manera más definida. La mayoría de estos métodos se basan en el análisis de elementos finitos (FEA), donde el dominio del diseño se discretización en una fina malla de elementos.



**Figura 2.6.1:** Tipos de estructura. (a) Estructura en aluminio donde se soporta el sonido y luces para eventos y (b) Gancho industrial de acero

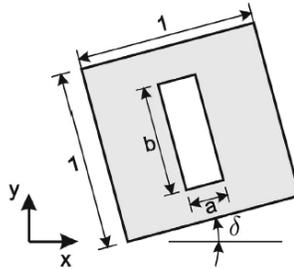
Los engranes son tiene una estructura solida por lo tanto nos concentraremos en las estructura de tipo continua y en sus métodos.

## 2.6.2. Métodos de optimización topológica de estructura continua

Los métodos desarrollado son los mas comunes debido a que existe muchos métodos diferentes y adaptaciones de estos, principalmente se hablaron de tres: (1)Método de homogéneo, (2)Método de Material isotrópico sólido con penalización (SIMP) y (3)Método de Optimización estructural evolutiva (ESO).

### 2.6.2.1. Método de homogeneización

Este enfoque convierte problemas complejos de optimización de topología estructural en problemas de optimización de tamaño al introducir una función de densidad de material en cada elemento que se compone de un número finito de agujeros distribuidos periódicamente [44].



**Figura 2.6.2:** Celda unitaria con material y dominio vacío de tamaño  $axb$  en la orientación  $\theta$ . [44]

El problema de optimización consiste en encontrar la estructura con la máxima rigidez global, lo que equivale a encontrar la máxima energía potencial. El problema de optimización esta dado por la ecuación 2.6.1, donde  $\bar{V}_s$  es el límite de volumen superior;  $N$  es el número de elementos finitos (EF);  $\Pi(p)$  es la energía potencial en la estructura;  $a_e$  es el ancho y  $b_e$  es la altura del vacío,  $\delta_e$  es la orientación y  $v_e$  es el volumen  $e^{th}$  de EF [45][44], con base en la figura 2.6.2.

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar : } \prod(p) \\
& \text{sujeto a : } \sum_{e=1}^N (1 - a_e b_e) v_e - \bar{V}_s \leq 0 \\
& \text{Donde : } a_e - 1 \leq 0 \quad : \quad -a_e \leq 0 \quad : \quad -b_e \leq 0 \\
& \quad \quad a_e, b_e, \delta_e : e = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

### 2.6.2.2. Método de Material isotrópico sólido con penalización (SIMP)

El método SIMP (por sus siglas en ingles *Solid Isotropic Material with Penalization*) ha sido convertido en el método más usado y ha alcanzado la etapa de aplicación en software industrial debido a su eficiencia computacional y simplicidad conceptual. El método SIMP toma la densidad  $\rho$  de un elemento como variable de diseño para controlar si debe estar compuesto de material vacío o sólido [45], Esta variable de diseño es una densidad de elemento artificial ( $\rho_e$ ) con cualquier valor en el rango de  $0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$ . Esto significa que el volumen de un elemento se multiplica por esta densidad artificial para producir su volumen real, de modo que el volumen del dominio de diseño [44], viene dado por la ecuación 2.6.2.

$$V = \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \tag{2.6.2}$$

Donde  $N$  es el número total de EF utilizados para representar el dominio de diseño,  $V$  es el volumen resultante del dominio de diseño. Se aplica una penalización (p) a la densidad cuando se multiplica por el módulo elástico del elemento y se obtiene la ecuación 2.6.3. A medida que la penalización aumenta de uno a valores más altos, la solución óptima produce un problema de valor discreto (0-1).

$$E_e = \rho_e^p E_e^0 \tag{2.6.3}$$

Donde  $E_e^0$  es el módulo de elasticidad del material original y  $E_e$  es el nuevo módulo de elasticidad artificial del elemento  $e^{th}$ ; p es el factor de penalización. Con base en esto se puede plantear la formula general para el modelo SIMP en la ecuación 2.6.4. Donde  $K_e$  la

rigidez del elemento,  $\{u\}$  vector de desplazamiento y  $v_e$  es el volumen del elemento[46].

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar : } c(\rho) = \{F\}^T(u) \\
 & \text{sujeto a : } \left[ \sum_{e=1}^N \rho_e^p K_e \right] \{u\} = \{F\} \\
 & \qquad \qquad \qquad \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq \bar{V}_s \\
 & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 : e = 1, 2, \dots, N \\
 & p = 1, 2, \dots, p_{max}; p_{max} > 3
 \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Este método tiene adaptaciones para problemas dinámicos en la área de vibraciones mecánicas libres como forzadas.

### 2.6.2.3. Método de Optimización estructural evolutiva (ESO)

Se basa en la idea de retirar gradualmente material excedente de una estructura para obtener la estructura óptima. Este método se relaciona esencialmente con el diseño clásico totalmente con esfuerzo. En una estructura ideal, la tensión en todos los puntos está cerca del mismo nivel de seguridad, lo que conduce a un criterio de rechazo basado en el nivel de tensión local. Se supone que cualquier material sometido a una tensión baja es ineficaz y, por tanto, puede eliminarse. El dominio del diseño se divide en primer lugar en muchos elementos, tal como lo indica el FEM. De esta manera, se pueden eliminar los elementos sometidos a un nivel de esfuerzo menor. El criterio más común usado es el esfuerzo de Von mises de la ecuación 2.6.5. [44]

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \tag{2.6.5}$$

Donde  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son los esfuerzos normales en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente, y  $\tau_{xy}$  es el esfuerzo cortante. Para completar el proceso de optimización, se deben identificar las condiciones bajo las cuales se debe eliminar un elemento. Esto se hace comparando la tensión de Von Mises del elemento  $\sigma_v^e$  con la tensión máxima de Von Mises de toda la estructura  $\sigma_v^M$  [45]. Después de cada análisis de elementos finitos estructurales, se eliminan todos los elementos que cumplen la siguiente condición:

$$\frac{\sigma_v^e}{\sigma_v^M} \leq R \tag{2.6.6}$$

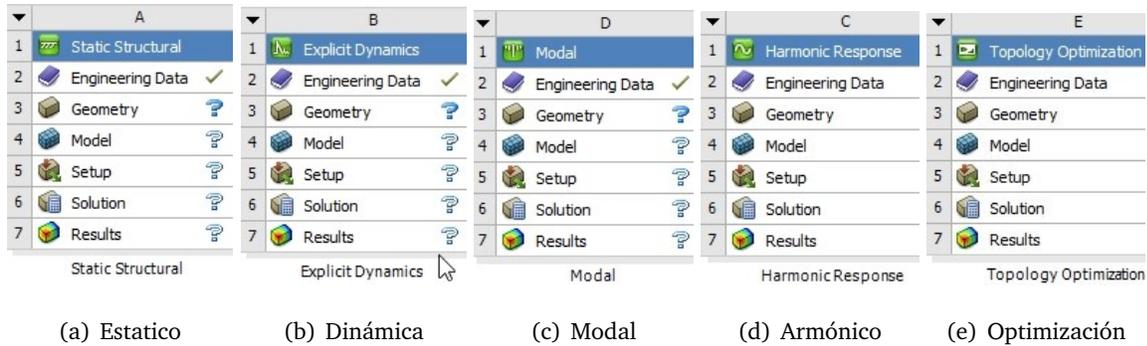
Donde  $R R_i$  es el índice de rechazo para la iteración  $i$ . En cada iteración  $i$ , el ciclo de análisis de elementos finitos y eliminación de elementos se repite utilizando la misma proporción de rechazo  $R R_i$  hasta que se alcanza un estado estable. Después de eso, se agrega una tasa de evolución  $ER$  al índice de rechazo para obtener un nuevo índice de rechazo  $RR_{i+1}$  para la iteración  $i + 1$ . [45]

$$R R_{i+1} = E R + R R_i \quad (2.6.7)$$

Luego, el ciclo de análisis de elementos finitos y eliminación de elementos comienza de nuevo, y se usa la nueva tasa de rechazo hasta que se alcanza un nuevo estado estable. [44]

## 2.7. Módulos de análisis en Ansys Student®

El software de Ansys®, tiene una gran variedad de sistemas de análisis para realizar estudio de ingeniería CAE (*Computer Aided Engineering*), con diferentes aplicaciones. En la figura 2.7.1 se visualiza los principales sistemas de análisis usados para este proyecto, los cuales poseen los mismos módulos de procesos para realizar los estudios.

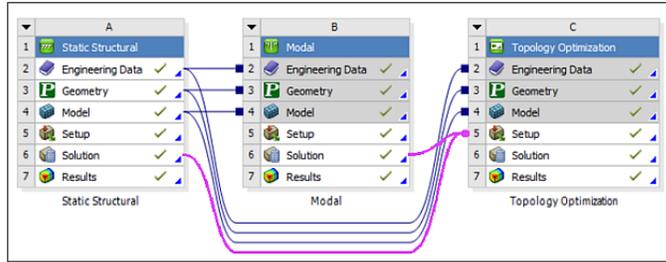


**Figura 2.7.1:** Los principales sistemas de análisis Ansys Student®, destacados en este documento.

### 2.7.1. Tipos de módulos de análisis

Los **módulos de análisis** incluyen todas las celdas de componentes necesarias ya definidas y listas para ser pobladas, hay aproximadamente 29 sistemas de análisis en la versión 2020 R1, donde se encuentran dinámica explícita, dinámica rígida, estructura estática, estructural transitorio, modal, optimización topológica, respuesta armónica, vibraciones aleatorias entre otras [47].

- **Dinámica explícita** puede representar el comportamiento dinámico no lineal de sólidos, fluidos, gases y su interacción.
- **Dinámica Rígida** determina la respuesta dinámica de un conjunto de cuerpos rígidos unidos por juntas y elástica. En las piezas rígidas, no se produce deformación, por lo que se analizan parámetros dinámicos como desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas y momentos.
- **Estructural estático** determina los desplazamientos, tensiones, deformaciones y fuerzas provocadas por cargas que no inducen efectos de inercia y amortiguamiento significativos en estructuras o sólidos. Se asumen condiciones de respuesta y carga estables, así como cargas y respuestas que varían lentamente con respecto al tiempo.
- **Estructural transitorio** determina la respuesta dinámica de una estructura bajo la acción de cualquier carga general dependiente del tiempo. Puede usarlo para determinar los desplazamientos, deformaciones, tensiones y fuerzas que varían en el tiempo en una estructura como respuesta a cualquier carga transitoria.
- **Modal** determina las características de vibración (frecuencias naturales y formas de modales correspondientes) de una estructura o componente. El análisis modal, al ser la solución de vibración libre, puede ser punto de partida para análisis armónicos o de respuesta transitoria. Para esto usa la solución del problema de autovalores o autovectores (eigensolver).
- **Optimización de topología** calcula un diseño estructural óptimo de geometría para una región seleccionada del modelo con objetivos de optimización y restricciones de diseño especificados. La optimización de topología es una herramienta basada en un conjunto de cargas y condiciones de contorno proporcionadas por un sistema estructural previo que puede ser estático, sistema modal o una combinación de y modal, como se puede ver en el ejemplo de la figura [2.7.2](#).



**Figura 2.7.2:** Combinación de módulos para realizar la optimización topológica en Ansys®. [47]

- **Respuesta armónica** determina la respuesta en estado estable de una estructura lineal a cargas y excitaciones que varían (armónicamente). Este sistema se utiliza para verificar, si los diseños superan con éxito la resonancia, la fatiga y otros efectos dañinos de las vibraciones forzadas. Esta técnica de análisis calcula solo las vibraciones forzadas en estado estable de una estructura, típicamente en varios puntos discretos dentro de un rango de frecuencias.
  
- **Vibración aleatoria** determina la respuesta de las estructuras a las cargas de vibración que son de naturaleza aleatoria.

## Capítulo 3

# Metodología

Este proyecto se realizará por medio de una estructura de etapas:

Etapa 1 (Caracterización del sistema de transmisión): Definir una transmisión de dos etapas (engrane helicoidal y cónico) con el fin de definir sus dimensiones, relaciones de transmisión y parámetros de funcionamiento.

Etapa 2 (Modelamiento): Realizar el modelo matemático del sistema roto-dinámico por medio de un modelo de elementos finitos, usando el software Ansys Student®.

Etapa 3 (Análisis de mallado): Realizar un estudio de la respuesta computacional debido al control de mallado por medio del tamaño, número de elementos y geometría del mismo.

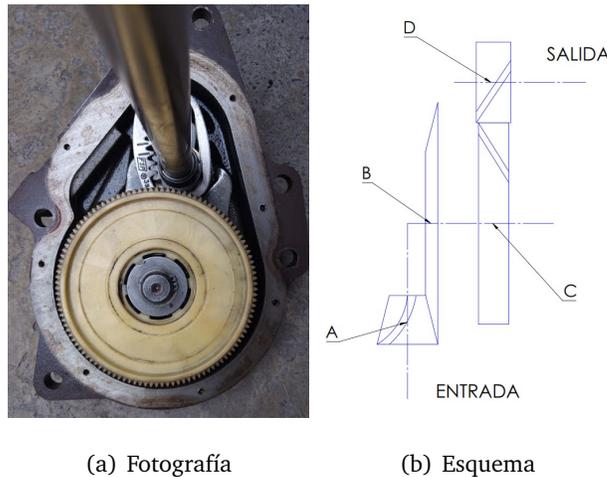
Etapa 4 (Optimización topológica): Obtener la función objetivo para la minimización de vibraciones e implementarlo en el diseño base, modificando el diseño de los engranes.

Etapa 5 (Caracterización de la Geometría) Realizar el análisis con la geometría obtenida por la optimización en otro tipo de engrane que posee características similares a los engranes base.

Etapa 6 (Diseño del sistema de medición): se genera un soporte para la caja de engranes y motor donde se montarán los elementos de medición para el análisis de vibración, para el diseño se debe tener en cuenta la menor transferencia de vibraciones al soporte.

### 3.1. Caracterización del sistema de transmisión

El sistema de transmisión de potencia que se plantea esta compuesto de dos etapas, la primera por engranes cónicos hipoidal y la segunda por engranes helicoidales, la cual se basa en la caja de engranes de la lavadora whirlpool que se visualiza en la figura 3.1.1. La primera etapa de caja de engranes de la lavadora esta compuesto por un engranaje espiroide (*spiroid*), este tipo de engrane es la combinación en engrane sinfín con un hipoidal [48], por cual se sustituyo la primera etapa por engranes de tipo cónico hipoidal.



**Figura 3.1.1:** Caja de engranes de la lavadora. Donde (a) es la fotografía tomada de un caja de transmisión de potencia de una lavadora centrifuga Whirlpool modelo 1CLSQ9549PW1 y (b) es el esquema general con la denominación de referencia de cada uno de los engranes.

Las propiedades geométricas de los dientes y material de los engranes se encuentran en la tabla 3.1.1, donde el número de dientes del tren de engranes original es representado como (*ORI Original*) y el planteado es representado como (*RIA Raised*) y la denominación se referencia en la figura 3.1.1(b). El número de dientes de los engranes no corresponde con la caja de engranes de la lavadora Whirlpool, debido a limites para realizar análisis con las licencias para estudiantes de Ansys Student®, y el cambio de engranaje generado en la primera etapa. Por lo tanto se escogieron para la etapa de engrane de tipo helicoidal un menor número de dientes y diámetros semejantes y para el engrane hipoidal se considero la mayor relación de transmisión posible e igual manera un diámetro similar, se selecciona por medio del catalogo de KHK Gears [12].

Engrane	Denominación	Número Dientes		Modulo (mm)	Ángulo presión ( $\phi_n$ )	Ángulo hélice ( $\psi$ )	Material
		ORI	RAI				
Hipoidal	A	5	15	2	20°	20°	S45C
	B	49	60	2	20°	20°	(AISI 1045)
Helicoidal	C	112	50	2	20°	21°30'	SCM440
	D	31	20	2	20°	21°30'	(AISI 4140)

**Tabla 3.1.1:** Propiedades de los engranes hipoidal y helicoidal. Obtenido del catalogo de KHK Gears [12]

La relación de transmisión es de 8:5, para el tren de engranes planteado. Los datos del motor se encuentran en la tabla 3.1.2, el cual es usado en caja de engranes de la lavadora whirlpool.

Potencia	1/2 HP ó 372.85 W
Velocidad Angular	1450 RPM (Diseño)
Torque	2.455 N m ó 2455 N mm
Voltaje	120 Volts
Frecuencia	60 HZ

**Tabla 3.1.2:** Propiedades del motor de la caja de engranes de la lavadora whirlpool

Se definen también la velocidad angular y torque que actúan en los engranes, como se muestra en la tabla 3.1.3. Estos datos se obtiene por medio de la relación de transmisión, la velocidad angular y el torque entre engranes montados sobre el mismo eje poseen la conserva la misma magnitud.

Engrane	Velocidad angular ( $\Omega$ )	Torque ( $\tau$ )
A	1450 RPM	2455 N mm
B	362.5 RPM	9820 N mm
C	362.5 RPM	9820 N mm
D	906.25 RPM	3928 N mm

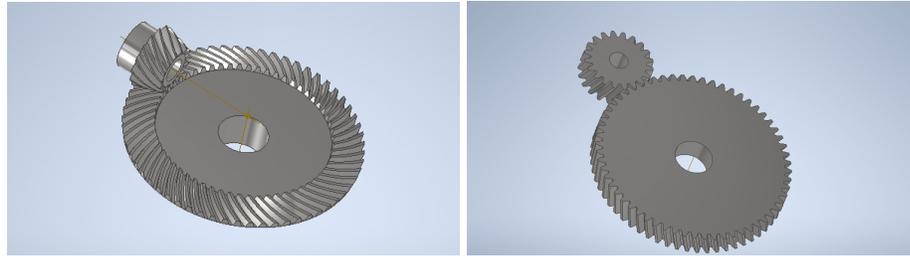
**Tabla 3.1.3:** Velocidad angular y torque ejercido en cada engrane

Para obtener más datos sobre los engranes pueden consultar el Anexo B y sobre los materiales en el Anexo C.

### 3.2. Desarrollo del modelo de elementos finitos de la transmisión de potencia

Para realizar la modelo de elementos finitos en el software de Ansys Student®, se debe realizar una serie de pasos para poder describir el comportamiento de la pieza o ensamble que se desea analizar, con el fin de obtener la mayor precisión posible del modelo. En Ansys se encuentra *Workbench* un programa que posee la interfase para realizar diferentes tipos de estudios dependiendo del módulo, por lo tanto se desarrollara los paso para este programa y un ejemplo a gran rasgo.

1. Selecciona un módulo para realizar el análisis deseados, este se escoge de acuerdo a la descripción dadas en la sección 2.7, para este trabajo se utilizara el módulo estático estructural, modal, respuesta armónica y optimización de topología, para este ejemplo se utilizara el estructural estático. Al seleccionar el módulo se despliega una serie de casillas que hacen parte de los requisitos para realizar el análisis como se muestra en la figura 2.7.1, estos hacen parte de los pasos siguientes.
2. En *Engineering Data* se ingresa los datos de los materiales, en este caso se ingresan las propiedades mecánicas y físicas de los materiales usados en el catálogo [12], estos datos son obtenidos del sitio web de MATWEB [49], para el ejemplo se utilizara el acero AISI 4140.
3. En *Geometry* se crea, edita y se importa la de geometría a usar. principalmente el formato es de tipo **STEP**, este es el formato predeterminado por preferencia, por lo tanto importa la figura 3.2.1(b) para el ejemplo.

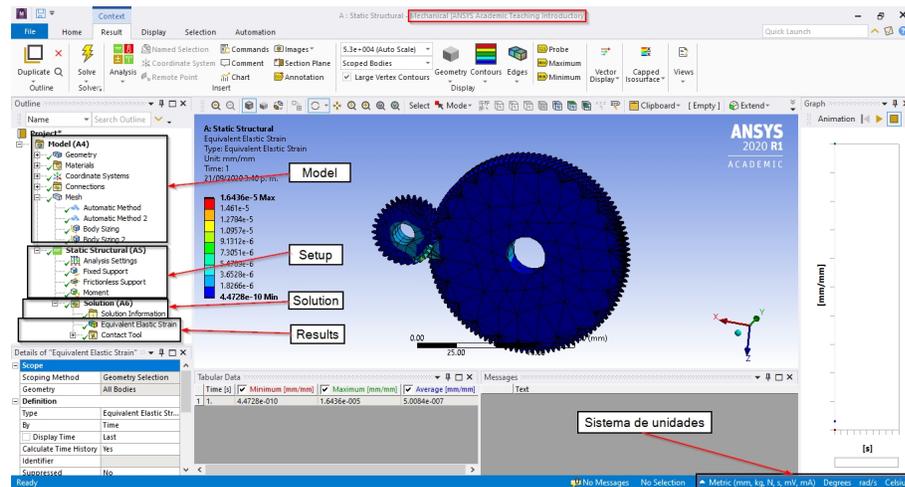


(a) Hipoidal

(b) Helicoidal

**Figura 3.2.1:** Representación gráfica de los engranes realizada por medio de Inventor®

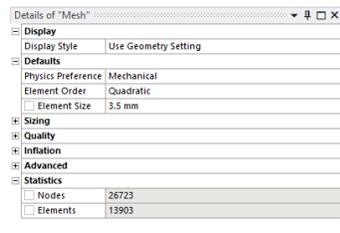
4. *Model* tiene como objetivo generar y crear la malla del modelo, con base en los parámetros deseados. Dentro de esta casilla se abre la extensión del programa *Mechanical* (figura 3.2.2) que hace también parte de Ansys Student®. Adicional de realizar la discretización del cuerpo se puede modificar el sistema de coordenadas, la conexiones o contactos entre las piezas de los ensambles y desarrollar los requisitos necesarios del módulo.



**Figura 3.2.2:** Interfase Mechanical Ansys Student®, para la edición de los módulos de los sistemas de Análisis.

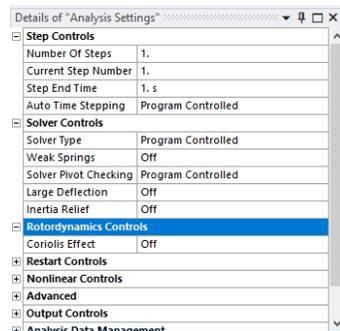
Después de realizar el mallado podemos consultar el número de elementos y nodos que posee el pieza o ensamble como se observa en la figura 3.2.3. Para este ejemplo se usará con control de tipo de malla de cada uno de los engranes y de igual manera, el control del máximo tamaño de los elementos de la malla y se dejan por defecto el sistema de coordenadas y el contacto *Bonded* dado que es lineal y no genera inconvenientes

en la solución del modelo matemático [50]. Para conocer información mas precisa del mallado generado



**Figura 3.2.3:** Interfase de malla de Ansys.

- En *Setup* se ingresan las condiciones y descripción del sistema físico por ejemplo la fuerzas actuantes (momentos, fuerza, presión, etc.), punto de fricción, límites de movimiento, entre otros, en este caso solo se aplicarán la carga de tipo momento torsional en el engrane y se pondrá un soporte fijo en agujero del eje del piñón y soporte de fricción en agujero del eje del engrane. También se puede configurar el análisis en el cual se modifican las variables a modelo matemáticos, como activar la variable de sistema rotodinámica que se encuentra en el módulo estático estructural, modal y de respuesta armónica como se detalla en la figura 3.2.4, para conocer más sobre los modelos matemático de Ansys®, se hallan en el apéndice A.



**Figura 3.2.4:** Configuración del análisis de Ansys.

- En *Solution* se encuentran parámetros de tipo de solución ejecutado en el estudio y el tiempo de análisis del sistema, en el cual no se modificara. Para este ejemplo no se modifica.
- En *Results* se encuentran los resultados de la solución del estudio como gráficas, tablas, animaciones entre otros. En este caso se extraerá el resultado de deformación elástica

total por presión, el cual determina que la máxima deformación es de  $1,6436e^{-5}$  mm/mm, como se observa en la figura 3.2.2.

### 3.3. Análisis de mallado

El análisis de convergencia tiene como fin obtener la solución aproximada con el menor número de elementos, por medio del refinamiento de la malla. Programas de elementos finitos como Ansys®, Solidworks®, Inventor®, entre otros, posee la herramienta de convergencia, pero en este caso no se utilizará debido a la limitación del número de elementos <sup>1</sup>. El análisis de convergencia se puede realizar con base en los datos obtenidos de esfuerzo equivalente, deformación total, densidad de flujo total, entre otros. Para este trabajo, el análisis de convergencia se realizará usando el módulo estructuras estática, con las condiciones que se visualizan en la figura 3.3.1 y la cargas se aplican en el engrane entrada de cada etapa (Etapa Hipoidal engrane A y Etapa Helicoidal engranes C), estos datos se encuentran en la tabla 3.1.3, de tipo *Bonded* dado que se va a utilizar para el análisis de tipo modal y respuesta armónica.

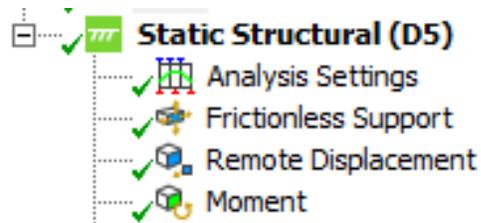


Figura 3.3.1: Tipos de cargas aplicadas para el obtener la gráfica de convergencia.

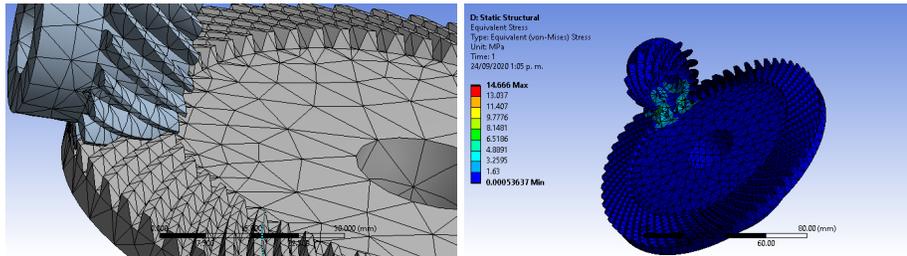
#### 3.3.1. Etapa de engranes hipoides

Al realizar el mallado por defecto, este se concentra principalmente los dientes lo cual ayuda significativamente en los resultados obtenidos debido a que el mayor esfuerzo se concentra en esta zona. En la figura 3.3.2(a), podemos visualizar el mallado obtenido por defecto del software, por lo cual la iteración se realizará en el tamaño del mallado hasta el mínimo disponible, que es aproximadamente de 3.5 mm. Se obtuvo el mallado de la figura 3.3.2(b), donde se puede visualizar la escala de esfuerzo de Von Mises<sup>2</sup> y la máxima magnitud ubicada

<sup>1</sup>Los limites de tamaño del problema en Ansys student®, es para estructuras físicas de 32K nodos/elementos y físicas de fluidos 512K células / nodos[50]

<sup>2</sup>La esfuerzo de Von Mises es una magnitud física proporcional a la energía de distorsión. En ingeniería estructural se usa en el contexto de las teorías de fallo como indicador de un buen diseño.[19][20]

en el área de contacto.

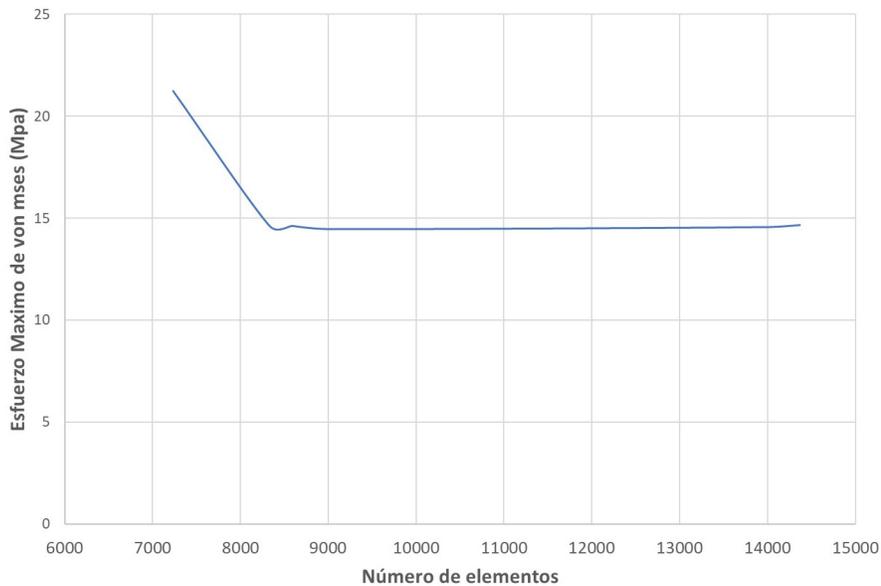


(a) Mallado por defecto

(b) Esfuerzos de von mises

**Figura 3.3.2:** Mallado en los engranes hipoides

Con base en lo anterior se tabula los datos de número de elementos, número de nodos, tamaño del elemento, orden del elemento, tipo de elementos y la solución del esfuerzo de Von Mises por estrés. Dado esto datos se realiza la gráfica entre esfuerzo vs número de elementos de la figura 3.3.3. Cabe indicar que las funciones de forma usadas son cuadráticas, con elementos de tipo tetraedros, de 10 a 3.5 milímetros.

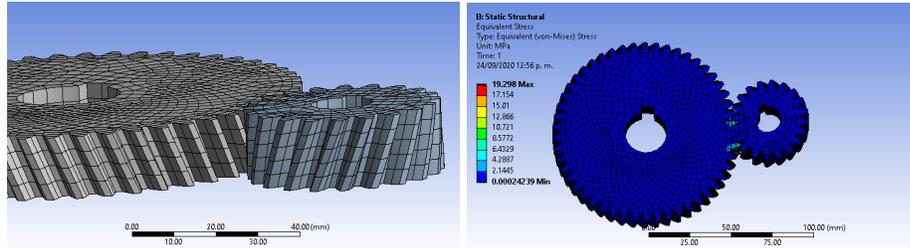


**Figura 3.3.3:** Gráfica de convergencia de engranes hipoides

Se evidencia la convergencia se da a partir un tamaño de elemento de 7 mm como máximo, con 8500 elementos y se obtiene un esfuerzo de Von Mises de 15 MPa.

### 3.3.2. Etapa de engranes helicoidal

En la figura 3.3.4(a) se visualiza una malla generada con elementos hexaedro de primer orden, donde la malla generada no se concentra en la superficie del diente.

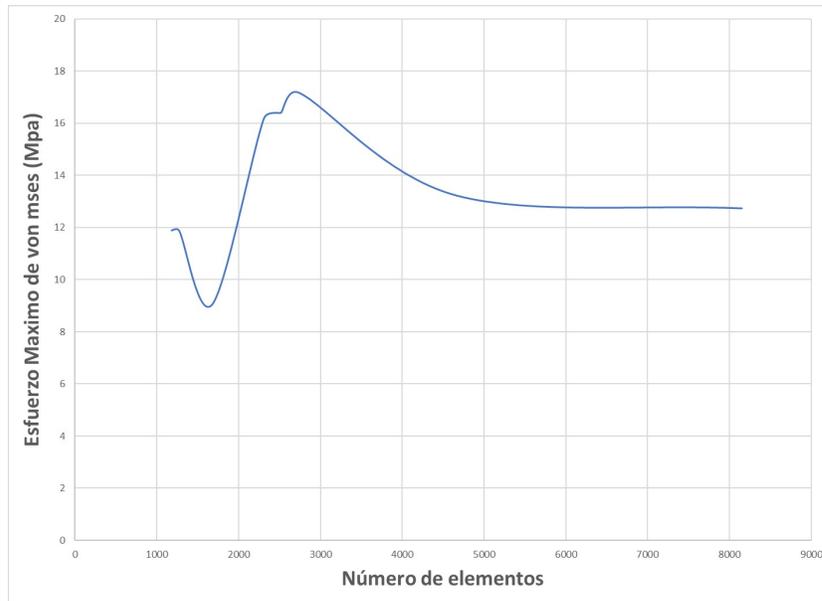


(a) Mallado por defecto

(b) Esfuerzos de von mises

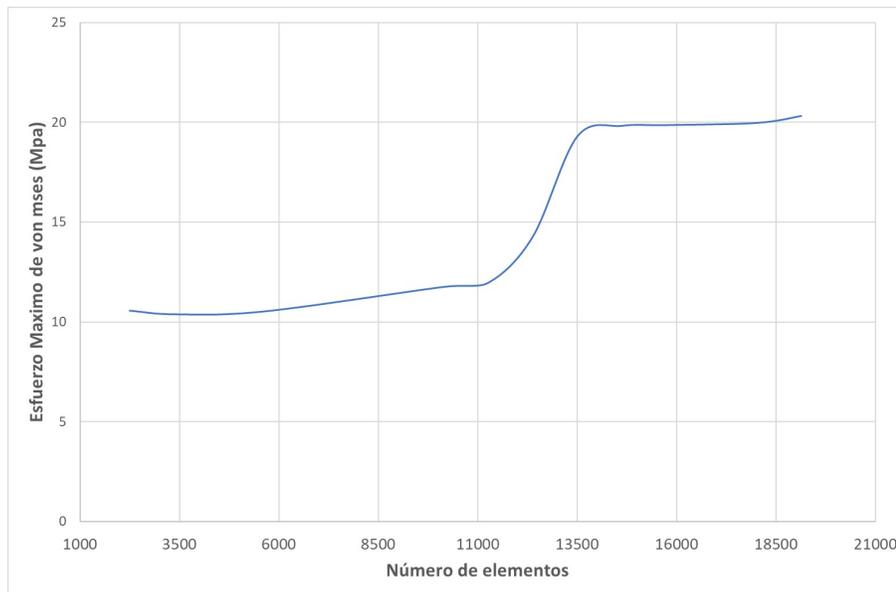
**Figura 3.3.4:** Mallado en los engranes helicoidales

Al realizar el análisis de convergencia modificando el tamaño de mallado como se observa en la figura 3.3.5, no se identifica una zona donde se mantenga constante el valor de esfuerzo máximo, pero si se identifica una zona de baja pendiente, el cual da inicio desde 4674 elementos equivalente a un tamaño de malla de 4 mm, debido ha esto se pude denotar que la discretización del cuerpo se esta concentrando en puntos concretos, por esta razón se debe realizar el mallado a partir de la superficie de los dientes.



**Figura 3.3.5:** Gráfica de convergencia de engranes helicoidales en base al tamaño máximo del elemento

Por lo tanto, se genera un mallado no convencional, dividiendo la superficie del diente. En la figura 3.3.4(b) se encuentra el máximo esfuerzo de Von Mises generado, está ubicado la superficie de los dientes. De igual forma que los engranes hipoides se genera la tabla en base al número de divisiones generadas en la superficie. se toma de 2 hasta 17 secciones o divisiones en la superficie externa del diente obteniendo la gráfica de convergencia con base en el número de elementos versus el esfuerzo máximo de Von Mises como observada en la figura 3.3.6.



**Figura 3.3.6:** Gráfica de convergencia de engranes helicoidales

Se evidencia la convergencia usando 12 divisiones, con lo cual se genera un mínimo de 13512 elementos y se obtiene un esfuerzo de Von Mises de 19.83 MPa.

### 3.4. Optimización de los engranes

Para realizar la optimización topológica en los engranes, se escogen los de mayor tamaño, debido a que poseen áreas permitidas para retirar material sin perjudicar los factores de diseño [19], los cuales están denominados como “engrane B” para el tipo hipoidal y “engrane C” para el tipo helicoidal y se le realiza el estudio de análisis estático y modal individualmente.

En la optimización topológica en Ansys®, se puede usar múltiples *objetivos* y posee parámetros de *restricción de respuesta*, estos hacen parte del objetivo generar de la

optimización.

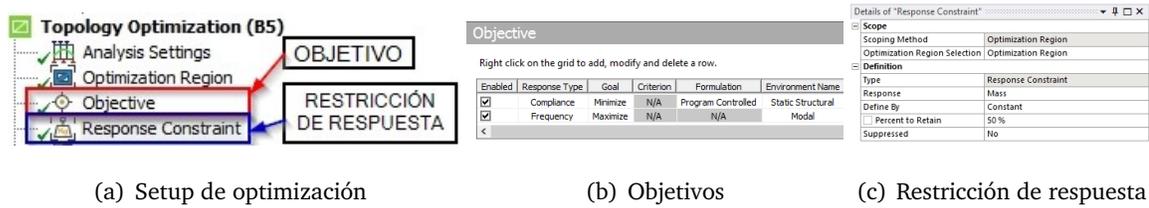


Figura 3.4.1: Objetivo general para realizar la optimización topológica en Ansys.

La *restricción de respuesta* tiene la opción de restringir la frecuencia natural, pero esta no se aplica en este trabajo, debido a que se concentra en un solo modo de vibración, el cual genera una mayor dificultad en la solución del análisis tendiendo a no converger los resultados, como se muestra en la figura 3.4.2. Por esta razón se aplica como principal objetivo de maximizar la frecuencia natural y minimizar el volumen o masa, con el criterio restricción de respuesta la reducción de masa, dado que la frecuencia natural está relacionada con la masa de acuerdo con la ecuación 2.2.5.

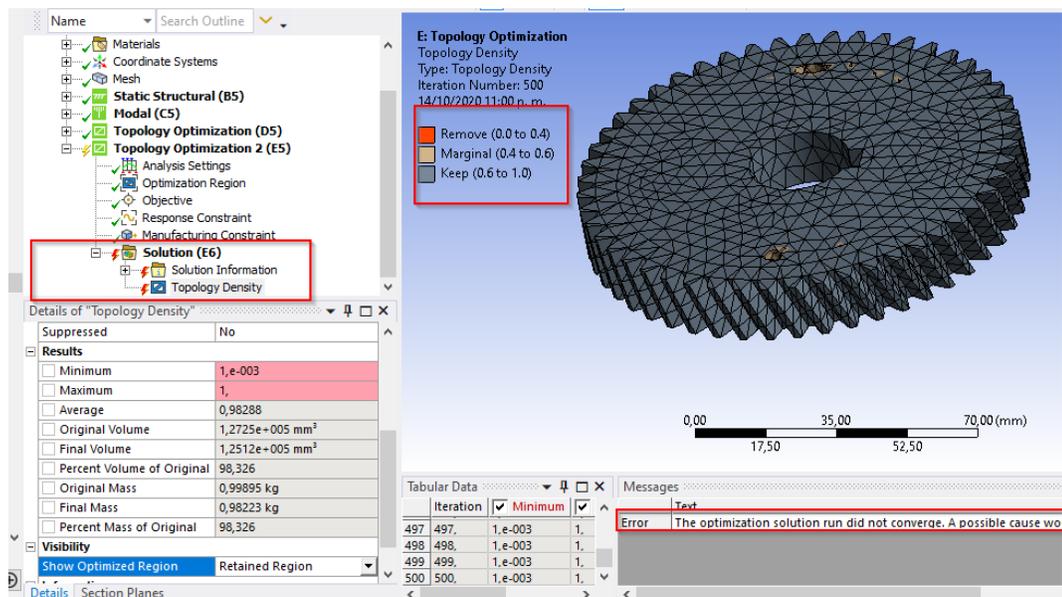


Figura 3.4.2: Error de convergencia usando la *restricción de respuesta* de frecuencia natural, para el segundo modo.

Se realiza el análisis estático y modal en cada uno de los engranes, debido ha que se requiere asociar los resultados de estos módulos para determinar los objetivos de la optimización.

### 3.4.1. Optimización en engrane Hipoidal B

Se realiza un análisis estático, con las condiciones de contorno de soporte de tipo *fijo* en el orificio donde estaría ubicado el eje y un momento sobre todos los dientes en base al centro del engrane, con una magnitud de 98230 N mm el cual es obtenido del análisis de transmisión de potencia de cada engrane dado en la tabla 3.1.3 y se obtiene un esfuerzo máximo de 0.82 MPa, como se evidencia en la figura 3.4.4(a).

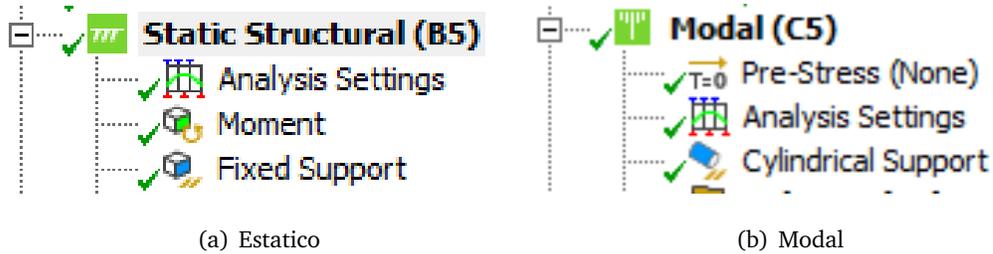
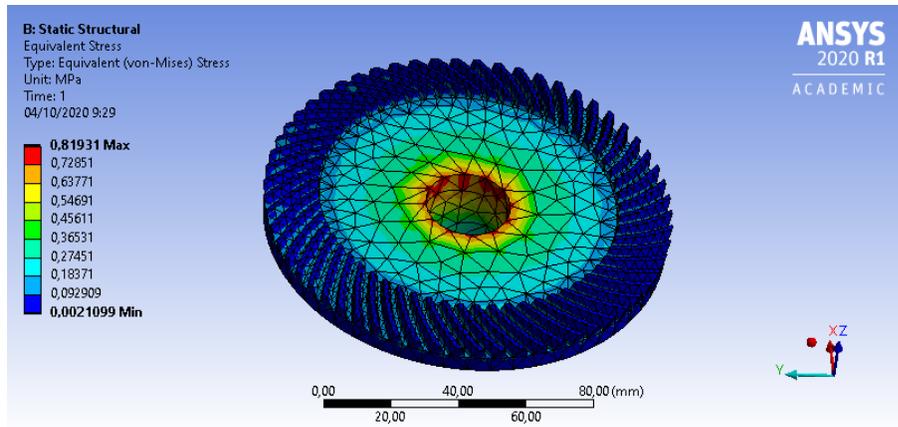
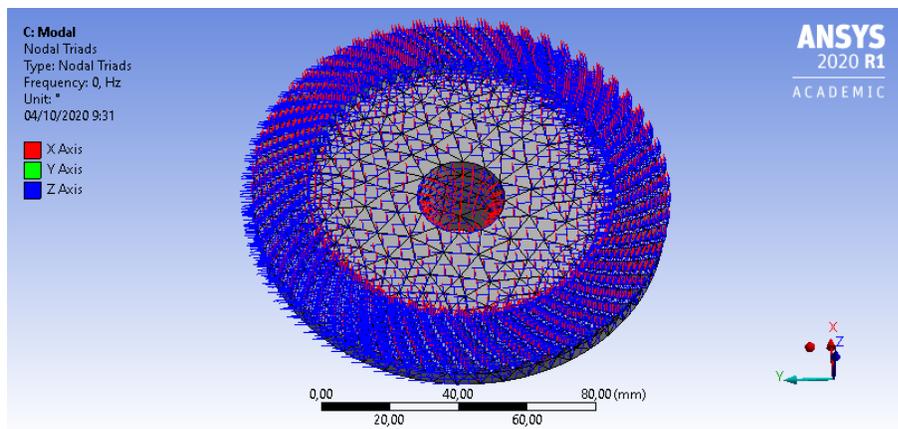


Figura 3.4.3: Setup de las condiciones de contorno.

El análisis modal se genera con una sola condición de contorno de soporte cilíndrico con movimiento libre tangencial, esta condición puede ser configurada sin y con velocidad de giro, siendo esta última de 362.5 RPM obtenida de igual manera del análisis de transmisión de potencia de la tabla 3.1.3, este análisis se pueden visualizar en la figura 3.4.4(b), donde se visualiza la primera forma modal.



(a) Estatico



(b) Modal

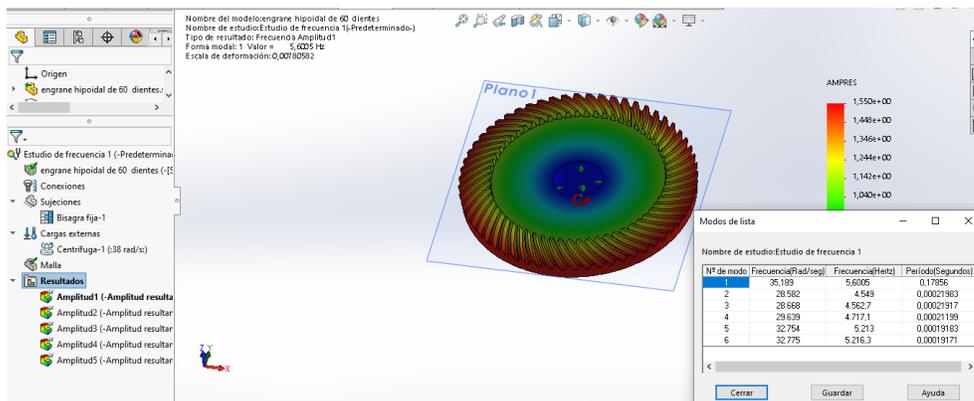
**Figura 3.4.4:** Análisis de engrane Hipoidal

En la tabla 3.4.1 se comparan las frecuencias naturales obtenidas del resultado del análisis modal dado anteriormente, considerando la velocidad de giro y sin considerar esta velocidad de giro, estas frecuencia naturales son determinada para los primeros seis modos de vibración. No se encuentran la diferencia significativas entre el análisis sin velocidad de giro y el análisis de tipo rotodinámico (con RPM), siendo que no se afectarían los datos de referencia para la optimización.

Modo	Frecuencia (Hz)	
	sin RPM	con RPM
1	0	0
2	4628.8	4627
3	4646.2	4648
4	4793.3	4793.3
5	5289.3	5281.1
6	5296.8	5305.1

**Tabla 3.4.1:** Frecuencia natural de la estructura del engrane hipoidal B

Con el fin de comprender el funcionamiento de análisis modal con base en la limitación de mallado, se realiza de igual manera el análisis modal por medio del software Solidworks® con un mallado medio-fino, como se muestra en la figura 3.4.5.



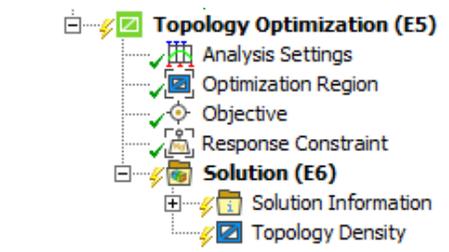
**Figura 3.4.5:** Análisis Modal de engrane Hipoidal en base a la velocidad de giro. Obtenido en SolidWorks®

En la tabla 3.4.2 se pueden visualizar las frecuencias modales obtenidas en el análisis modal realizado con SolidWorks. A diferencia del análisis modal obtenido con Ansys, el cambio de primer modo de vibración aparece en la frecuencia de 5.6 Hz, que equivale a la velocidad de giro de 362.5 RPM. Esto indica que este análisis considera el modo de vibración de cuerpo rígido del engrane. También se puede observar que los otros modos sus frecuencias naturales no cambian significativamente a comparación del análisis de Ansys.

Nº de Modo	Frecuencia		Periodo
	(rad/s)	(Hz)	(segundos)
1	35.189	5.6005	0.17856
2	28582	4549	0.00021983
3	28668	45627	0.00021917
4	29639	4717.1	0.00021917
5	32754	5213	0.00019183
6	32775	5216.3	0.00019171

**Tabla 3.4.2:** Frecuencia natural de la estructura del engrane hipoidal B usando Solidworks

Para realizar la optimización topológica relacionaremos los resultados de análisis estático y modal sin velocidad giro, al módulo de *optimization topology* como se visualiza en la figura 2.7.2. Donde se vincula el análisis estático y el modal sin considerar la velocidad angular. La interfase del sistema de análisis de optimización de topología (figura 3.4.6) se compone por los parámetros de análisis, la región de optimización, el objetivo y la restricción de la respuesta.



**Figura 3.4.6:** Parámetro para realizar la optimización topológica en Ansys

El objetivo de la optimización tiene relación con los análisis estático y modal realizados anteriormente, el principal objetivo es maximizar la frecuencia natural del sistema como se muestra en la figura 3.4.7.

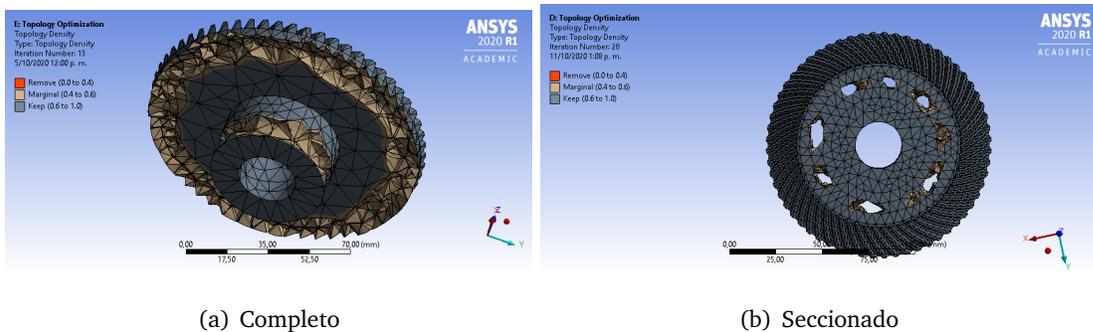
## Objective

Right click on the grid to add, modify and delete a row.

Enabled	Response Type	Goal	Criterion	Formulation	Environment Name
<input checked="" type="checkbox"/>	Compliance	Minimize	N/A	Program Controlled	Static Structural
<input checked="" type="checkbox"/>	Frequency	Maximize	N/A	N/A	Modal
<					

**Figura 3.4.7:** objetivo de la optimización topológica en Ansys®

Las región de optimización por defecto se ubica en todo el dominio con excepción de las regiones donde se definen las condiciones de contorno. Esta configuración se puede variar si se implementa una proyección de geometrías sobre las caras del cuerpo. Estas proyecciones se pueden realizar usando un programa CAD. La restricción de respuesta aplicada en el dominio buscan es conservar el 78 % de la masa. La optimización tiene el fin de retirar la masa desde las caras hacia el centro de la geometría. La malla cambia debido al uso del seccionamiento de las caras, por lo cual se modifican los parámetros de mallados. El tipo de solución dada debido a la licencia de software disponible es por densidad, donde se asigna la densidad en las diferentes regiones, con valor entre 0 y 1, el cual esta dado por el criterio del objetivo. Para los elementos que se pueden retirar deben obtener una densidad entre 0.6 a 1.



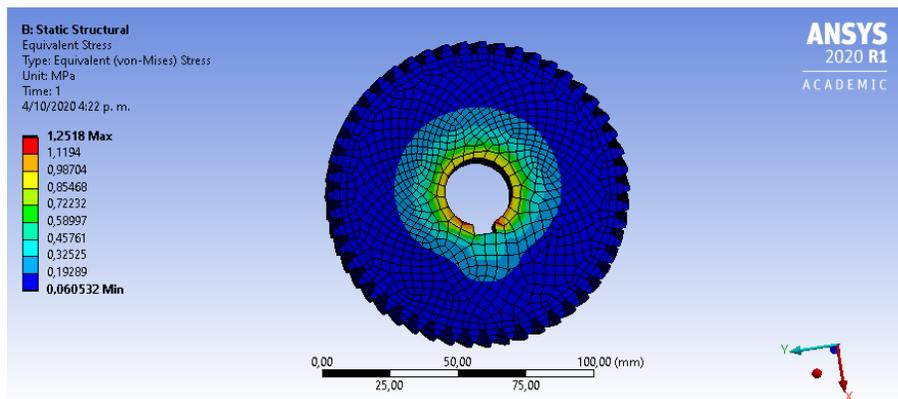
**Figura 3.4.8:** Optimización topológica para engrane hipoidal

Al realizar la optimización seccionando la cara se puede determinar la región donde realice la reducción de masa, como se observa en la figura 3.4.8(b). Sin embargo, es evidente la limitación de mallado, la cual no permite la generar una forma estable. Por esta razón es necesario realizar una caracterización de la geometría asemejando al resultado de la

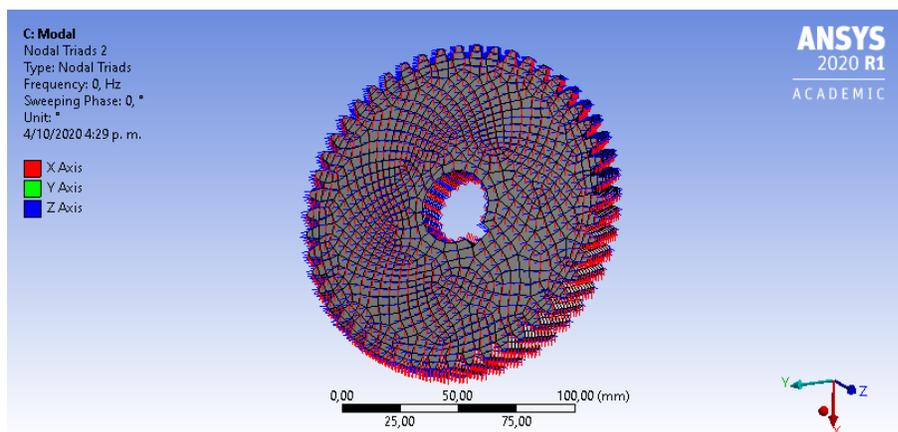
optimización. Mayor información sobre la optimización se encuentra en el anexo D.1.

### 3.4.2. Optimización en engrane Helicoidal C

De igual forma que el engrane Hipoidal se genera un estudio de análisis estático y modal. En análisis estático se utiliza un soporte de tipo *fijo* y se aplica un momento torsor sobre todos los dientes de 9820N mm el cual es obtenido del análisis de transmisión de potencia de cada engrane dado en la tabla 3.1.3 y se obtiene un esfuerzo máximo de 1.25 MPa, como se evidencia en la figura 3.4.9(a). Para el análisis modal se configura un soporte cilíndrico en el orificio del eje y se considera una velocidad de giro de 362.5 Nmm obtenida de igual manera del análisis de transmisión de potencia de la tabla 3.1.3 este análisis se pueden visualizar en la figura 3.4.9(b), donde se visualiza la primera forma modal.



(a) Estático



(b) Modal

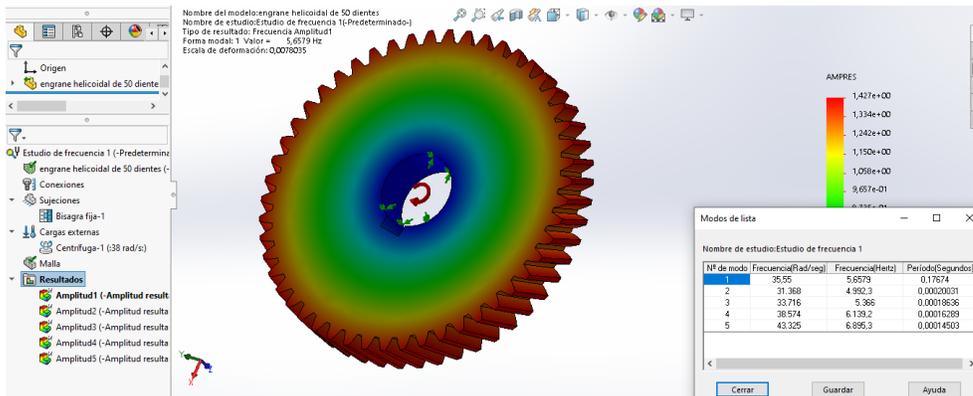
Figura 3.4.9: Análisis de engrane Helicoidal

En la tabla 3.4.3 se encuentran los resultados del análisis modal.

Modo	Frecuencia (Hz)	
	sin RPM	con RPM
1	0	0
2	5027.3	5027.2
3	5382.9	5383
4	6168.8	6168.8
5	6913.5	6912.5
6	7009.1	7010.2

**Tabla 3.4.3:** Frecuencia natural de la estructura del engrane helicoidal C

De igual manera se realiza la comprobación en Solidworks de los datos obtenidos en Ansys y conocer el primer modo de vibración como se muestra en la figura 3.4.10.



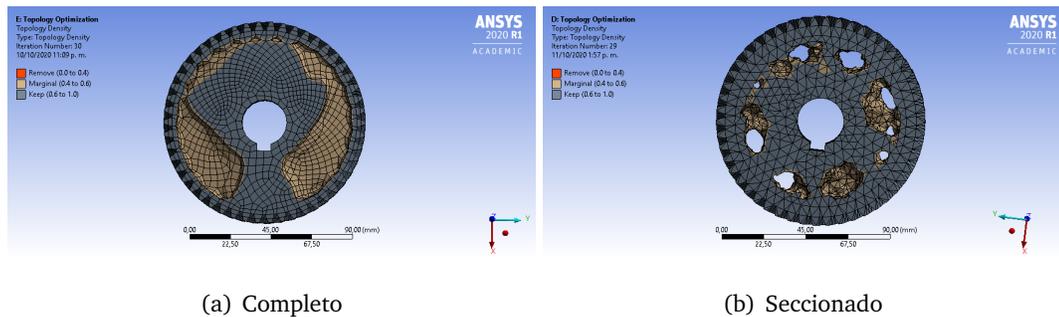
**Figura 3.4.10:** Análisis Modal de engrane Helicoidal en base a la velocidad de giro. Obtenido en Solidworks®

En la tabla 3.4.4 se observa las frecuencia naturales las cuales se compra con la tabla 3.4.3, de igual que con el engrane hipoide, la primera modo en 5.6 Hz, el cual hace referencia de a la frecuencia natural del cuerpo rígido este no excede la velocidad angular del sistema de 6.041 Hz. En esta comparación también se puede observar una reducción entre las magnitudes de las frecuencias naturales de los modos, por ejemplo se escoge el tercer modo donde en Ansys posee 5382.9 Hz a diferencia del obtenido en SolidWorks de 5366, equivalente a un reducción de los resultados de 0.3 %, el cual es considerado in-significativo.

N <sup>o</sup> de Modo	Frecuencia		Periodo
	(rad/s)	(Hz)	(segundos)
1	35.55	5.6579	0.17674
2	31369	4992.3	0.0002003
3	33716	5366	0.00018636
4	38574	6139.2	0.00016289
5	43325	6895.3	0.00014503
6	32775	6988.8	0.00014309

**Tabla 3.4.4:** Frecuencia natural de la estructura del engrane helicoidal C usando Solidworks

Se realiza el mismo proceso de optimización del engrane hipoide. Al generar la secciones en la cara del engranes, se toma en cuenta ciertos parámetros [19], donde se calcula el diámetro de orilla y de cubo, con el fin de no obtener esfuerzos adicionales. Las dimensiones se detallan en el anexo B.2.5.5.



**Figura 3.4.11:** Optimización topológica para engrane helicoidal

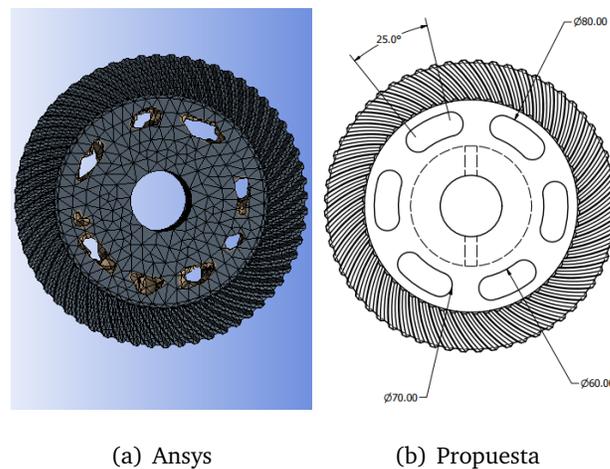
Debido a la geometría por la optimización topológica por densidad dada en la figura 3.4.11(a), esta geometría aumenta el factor de espesor de orilla[19]. Se implementa una proyección de geometrías sobre las caras del cuerpo con base en los parámetros dados anteriormente. Los objetivos usados en los engranes hipoidales se implementan de igual manera, con un porcentaje de conservación de masa del 65%. Se introduce una condición de manufactura para la dirección del material a retirar, de forma que se hacia el centro del cuerpo por ambos lados de las caras. La geometría dada por la optimización es la mostrada en la figura 3.4.11(b). Los resultados de la optimización se detallan en el Anexo D.2.

### 3.5. Ajuste geométrico de los resultados de la optimización

Debido a la limitación de número de elementos (limitación de la licencia para estudiantes de Ansys) se tiene una mallado robusto, lo que implica una necesidad de ajustar las geometrías obtenidas de la optimización. Entre los parámetros que se buscan el ajuste geométrico, se encuentra la simetría sobre el cuerpo debido a que se busca disminuir el tiempo y costo de los procesos de manufactura de las piezas o elementos a fabricar. Por lo cual generaremos un caracterización para cada uno de los dos engranes optimizados.

#### 3.5.1. Ajuste del engrane Hipoidal

Observando la geometría obtenida en la optimización se pueden distinguir agujeros ligeramente simétricos radialmente. De esta forma se ajusta la geometría optimizada de manera que se obtengan seis ranuras en forma de arco con diámetro externo de 80 mm, interno de 60 y ángulo de arco de  $25^\circ$  distribuidas de forma radial, como se muestra en la figura 3.5.1.

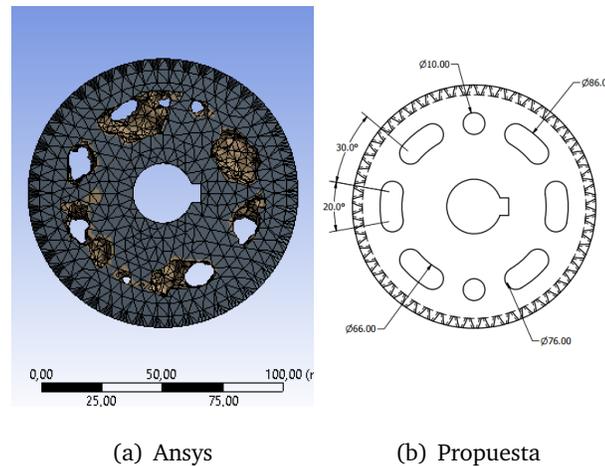


**Figura 3.5.1:** Geometría dada por la optimización para el engrane Hipoidal.

La masa original del engrane es 1.06 Kg y después de realizar la ajuste geométrico se obtuvo una masa de 0.955 Kg, equivalente a una reducción de material de 10 %.

### 3.5.2. Ajuste del engrane helicoidal

Es un proceso similar al realizado con el engrane hipoide, se generan ranuras de arco con un de 20 grados de arco, con diámetro exterior de 86 mm, interior de 66 mm y de referencia a 76 mm. Además se incluyen dos orificios de 10 mm ubicados a 180 grados paralelos al centro del cuña, como se muestra en la figura 3.5.2.



**Figura 3.5.2:** Geometría dada por la optimización para el engrane Helicoidal.

La masa original del engrane es 1.134 Kg y después de realizar la ajuste geométrico se obtuvo una masa de 0.831 Kg, equivalente a una reducción de material de 26.7%.

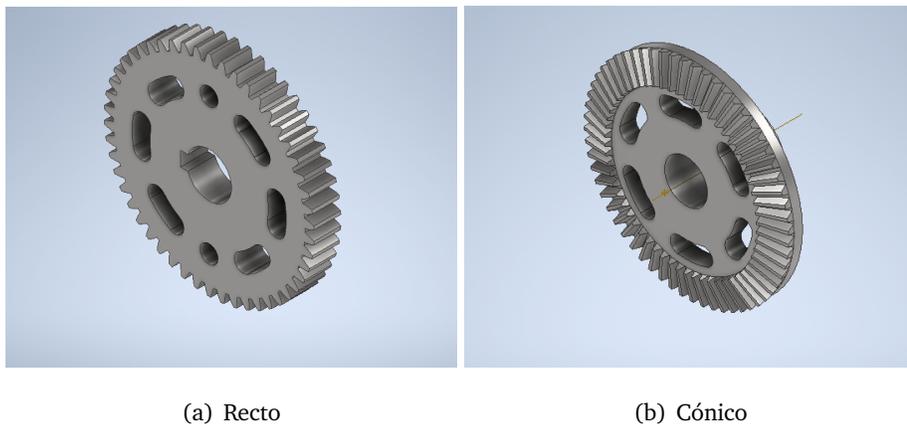
### 3.6. Optimización en otro tren de engranes

Las geometría obtenida por la optimización topológica se puede implementar en diferentes tipos de engranes, por lo cual analiza el comportamiento de un tren de engranes compuesto un etapa de engranes rectos en lugar del engrane helicoidal y otra con engranes cónicos rectos en lugar hipoidal. De igual manera se implementa la herramienta de diseño de engranes de Inventor, obteniendo las propiedades mostradas en la tabla 3.6.1.

Engrane	Denotación	Dientes (N)	Número Modulo (mm)	Ángulo presión ( $\phi_n$ )	Material
Cónico	<i>A</i>	15	2	20°	S45C
	<i>B</i>	60	2	20°	(AISI 1045)
Recto	<i>C</i>	50	2.250	20°	SCM440
	<i>D</i>	20	2.250	20°	(AISI 4140)

**Tabla 3.6.1:** Propiedades de los engranes cónicos y rectos en base al herramienta de diseño de engranes de Inventor®

Se conserva la misma denotación que el tren de engranes original, de igual manera, se mantienen los materiales del tren de engranes original, así como sus cargas descritas en la tabla 3.1.3.



**Figura 3.6.1:** Geometría de aplicada en el engrane cónico y recto.

En la figura 3.6.1, se observa la implementación de la geometría optimizada para el engrane cónico B y el engrane recto C, reduciendo la cantidad de material en 9.73% y 15.23%, respectivamente.

### 3.7. Diseño del sistema de medición

Esta sección propone el estudio de la validación experimental de la optimización topológica en el sistema de transmisión de potencia por engranes de una lavadora centrifuga.

### 3.7.1. Diseño de soporte

Con el fin de brindar un soporte a la transmisión analizada, se plantea el diseño mostrado en la figura 3.7.1, para facilitar la adaptación de los elementos que componen el sistema de transmisión de potencia e igual manera el sistema de control y sensores. Esta estructura debe soportar el peso total y no amplificar las vibraciones del sistema.

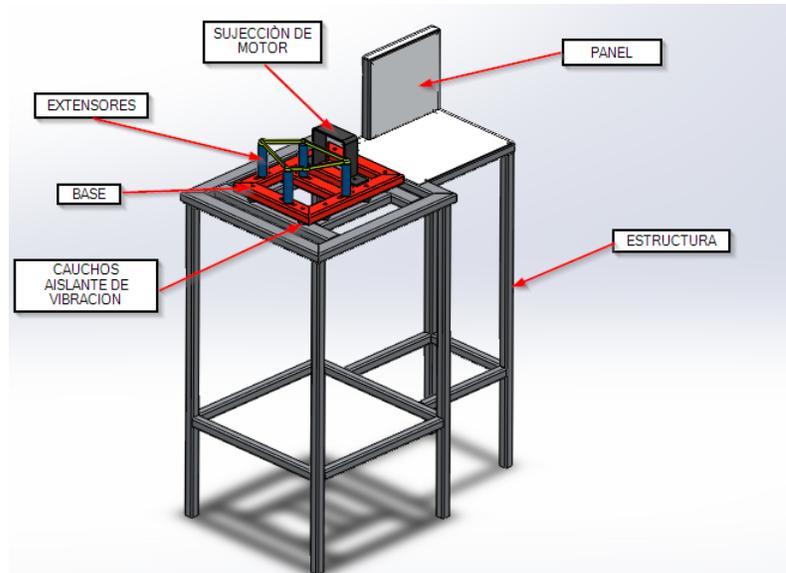


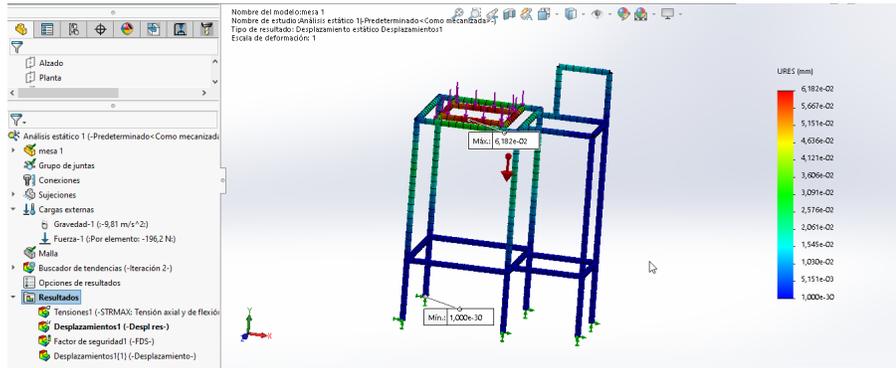
Figura 3.7.1: Estructura planteada para el sistema de medición.

Por lo tanto se plante la estructura de la figura 3.7.1, la cual esta compuesta por tubo de perfil cuadrado (30 x 30) y rectangular (50 x 30) con un espesor de 2.5 mm, estos se seleccionaron debido a su a la resistencia de tracción de 310 MPa[51][52], por lo tanto si consideramos el esfuerzo 10 MPa, generado por el tren de engranes de la lavadora que posee un peso de 20 Kg y se encuentra ubicado en una área de 0.12 m<sup>2</sup>, por lo tanto se genera un factor de seguridad teórico de 31, el cual supera al factor de seguridad de sistemas dinámicos de 5 [19]. La superficie que soporta la caja de engranes se coloca en el centro de la estructura con el fin de obtener mayor estabilidad. En la estructura también se incluye un sitio panel para instalar el sistema de control y monitoreo.

Se plantea consigo una base que se soporta por cauchos con el fin de disminuir las vibraciones entre el sistema de transmisión de potencia y la estructura, usado en varios estudios [53] [54] [55].

### 3.7.2. Simulación del soporte

Se realiza un análisis estático y modal en el software de SolidWorks®, el material usado es acero estructural.



(a) Estático



(b) Modal

**Figura 3.7.2:** Análisis de estructura del “banco”

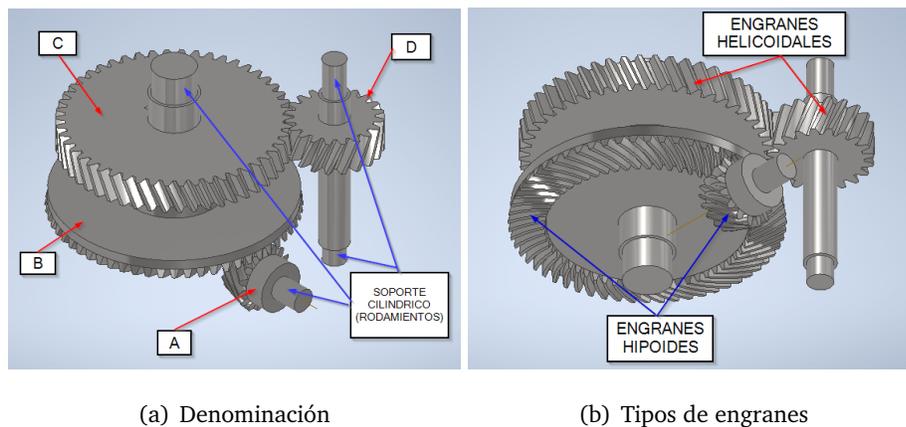
En la figura 3.7.2 (a) se visualiza el análisis estático de la estructura de soporte donde se implementa una carga de 196.2 N equivalente a una masa de 20 Kg de caja de engranes, y se consideró la el peso de la estructura. En el estudio se pudo observar que el esfuerzo máximo de la estructura es de 5.6 MPa, con una máxima deformación de 0.0618mm y un factor de seguridad mínimo del 109. Mientras en la figura 3.7.2(b) encontramos el análisis modal, con el cual se obtuvieron las frecuencias naturales de los primero seis modos mostrados en la Tabla 3.7.1. Es posible observar que la primera frecuencia natural de la estructura es mayor a la frecuencia de entrada del sistema rotacional, que sería 15 Hz.

N <sup>a</sup> de Modo	Frecuencia		Periodo
	(rad/s)	(Hz)	(segundos)
1	206.32	32.827	0.030454
2	209.57	33.354	0.029981
3	295.58	47.043	0.021257
4	1078	171.57	0.058285
5	1101.6	175.32	0.0057038
6	1153.5	183.58	0.0054472

**Tabla 3.7.1:** Frecuencia natural de la estructura

### 3.7.3. Ubicación de los puntos de medición

Para determinar los puntos donde sería posible colocar los sensores para la medición (el análisis lo hace el investigador o el software) de vibraciones, se plantea realizar el modelo en el software CAD (Inventor®), con todos los engranes y ejes del sistema, donde se distingan los apoyos (rodamientos). Luego se importa la geometría CAD a formato STEP para realizar el análisis en Ansys®.



**Figura 3.7.3:** Representación tridimensional del tren de engranes.

Los materiales de los engranes se especificaron en la tabla 3.1.1, y para los ejes se aplica el material de los engranes helicoidales AISI 4140. las condiciones de contorno aplicadas corresponde a soporte cilíndrico en los apoyos correspondientes a los cinco puntos especificados en la figura 3.7.3. La carga solo se aplica en el engrane hipoidal A, siendo esta

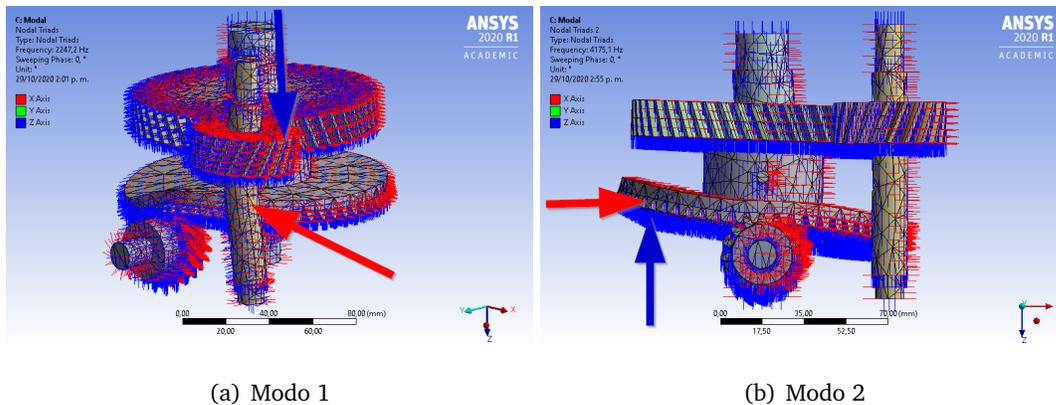
un momento torsor 2455 N mm y la velocidad de giro 1450 RPM, dados por las características del motor de la lavadora en la tabla 3.1.2.

Con base en lo anterior se realiza el análisis estático y modal. Con el fin de observar los puntos de mayor vibración se enfocará el análisis en los resultados modales. Las frecuencias naturales obtenidas se pueden ver en la tabla 3.7.2.

Modo	Frecuencia Hz
1	2247.2
2	4175.1
3	4314.4
4	4883.8
5	5064.8
6	5106.1

**Tabla 3.7.2:** Frecuencias naturales del sistema de transmisión de potencia

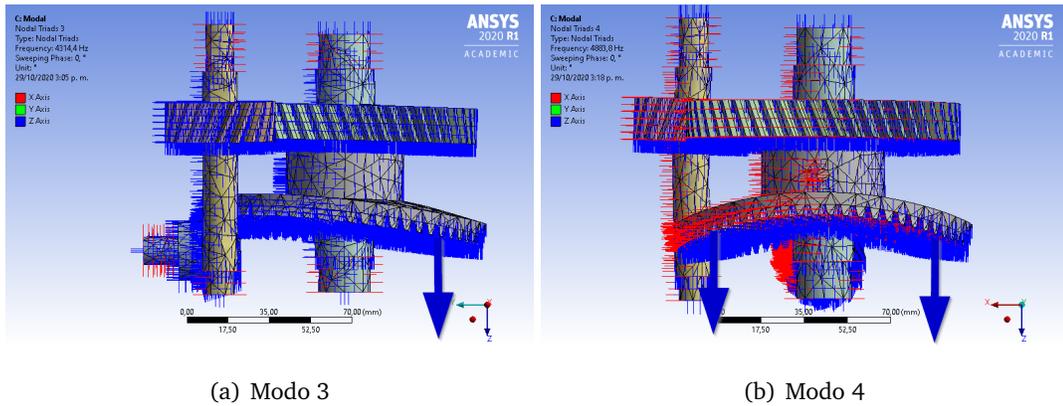
Se analizan los seis modos de vibración con base en la figuras 3.7.4, 3.7.5 y 3.7.6:



**Figura 3.7.4:** Análisis modal del tren de engranes para el primer y segundo modo.

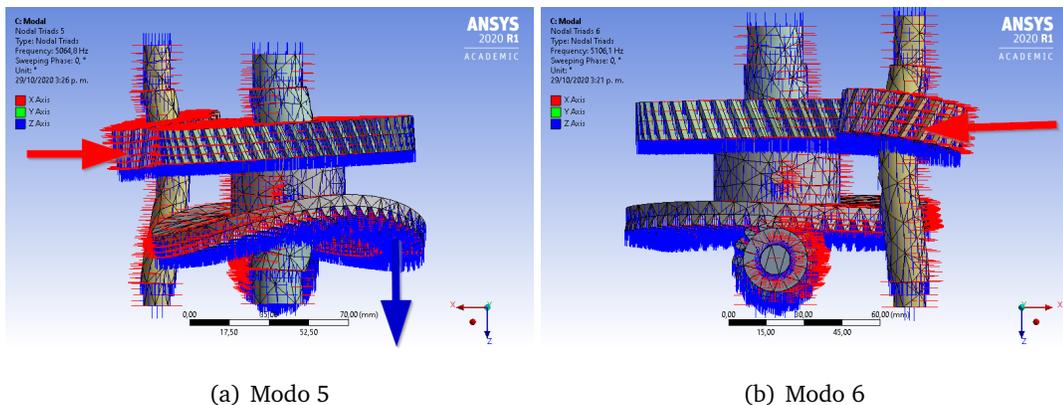
- En la figura 3.7.4(a) se observa que el primer modo concentra su desplazamiento en el contacto entre los engrane hipoides y sobre en el engrane helicoidal de salida D, debido al movimiento que el primer modo tiene una desplazamiento giratorio.
- En la figura 3.7.4(b) se observa el segundo modo donde se concentra el desplazamiento del extremo opuesto eje del engrane D la cual es ejercida en el engrane hipoidal B, esto debido que el movimiento es de forma axial en el eje X y dado que se encuentra a

mayor distancia de los puntos de contacto se concentra su deformación.



**Figura 3.7.5:** Análisis modal del tren de engranes para el tercer y cuarto modo.

- En la figura 3.7.5(a) se observa el tercer modo donde de igual forma que el modos segundo, se concentra en el extremo opuesto eje del engrane D la cual es ejercida en el engrane hipoidal B, esto debido que el desplazamiento se genera axialmente en el Z y al tener un menor espesor el engrane y su dimensión tiene un mayor deformación.
- En la figura 3.7.5(b) se observa el cuarto modo, donde el desplazamiento concentra en el engrane hipoidal B próximo al punto de contacto, esto debido a su deformación de forma axial al eje Z sobre toda la superficie.

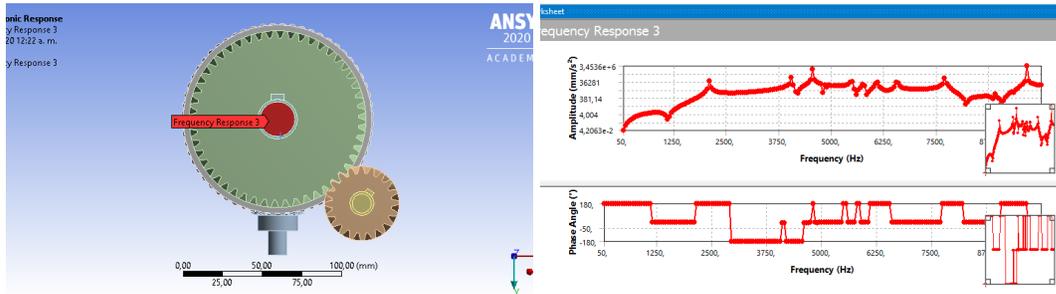


**Figura 3.7.6:** Análisis modal del tren de engranes para el quinto y sexto modo.

- En la figura 3.7.6(a) se observa el quinto modo, donde el desplazamiento se concentra entre el engrane hipoidal B y la salida de engrane helicoidal D.
- En la figura 3.7.6(b) se observa el sexto modo, se observa la deformación de forma

torsional del eje del engrane helicoidal D debido a su diámetro menor con respecto a los demás ejes.

Debido a que los sensores de vibración en las maquinas rotodinámicas se sitúan en los rodamientos o chumaceras [17], es necesario realizar el análisis de *respuesta armónica* para identificar los puntos mínimos necesarios para situar los sensores. Para el análisis en la sección de los rodamientos se introducirá un soporte de tipo *desplazamiento remoto*, donde se tiene libre movimiento de rotación y se introduce la carga en el engrane hipoidal A de 2422 Nmm y en cada área transversal de los rodamientos se tomara como referencia para el análisis de *Respuesta de frecuencia* con base en la aceleración en dirección del eje x, tomando los puntos de referencia el área transversal de los ejes en los puntos de los rodamientos, como lo muestra la figura 3.7.7(a).



(a) Geometría

(b) Gráfica

**Figura 3.7.7:** Análisis de respuesta armónica.

## Capítulo 4

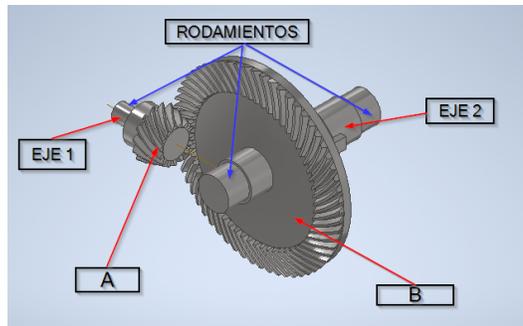
# Análisis de resultados

### 4.1. Análisis de optimización topológica

Para determinar los resultados de la optimización topológica se realiza el análisis de tipo estático estructural y modal en cada etapa con sus respectivos ejes. Los análisis se realiza con base al sistema rotodinámico, con una amortiguación de cero por defecto. Se compara los resultados dados antes y después de la optimización topológica.

#### 4.1.1. Análisis de optimización para la etapa hipoidal

Las restricciones de contorno se realiza con base en soportes de tipo cilíndricos con libre movimiento tangencia, con el fin que puedan girar libremente en los puntos donde se encuentran los rodamientos o chumaceras, con excepción del estático que es un soporte de tipo fijo en el eje del engrane B (eje 2) y cilíndrico con movimiento libre en eje del engrane A (eje 1). Las cargas aplicada en el engranes A es de 2455 N mm y una velocidad de giro de 1450 RPM.



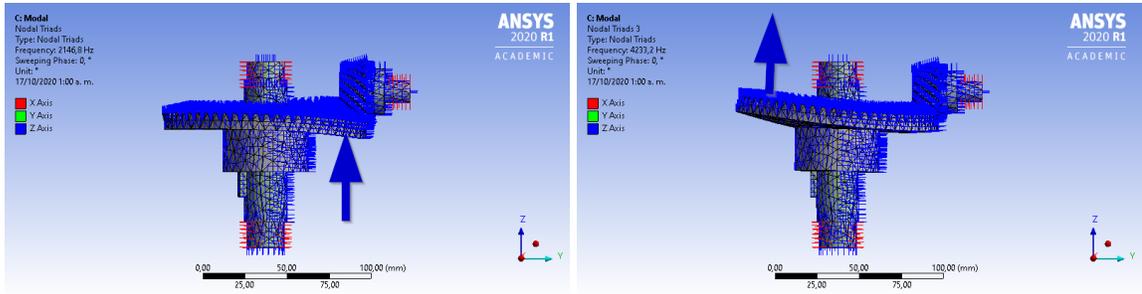
**Figura 4.1.1:** Etapa de engranes hipoidal, con sus respectivos ejes y nomenclatura.

El análisis estático estructural no mostró ningún cambio significativo del esfuerzo máximo de los engranes, que fue de 13.738 Mpa sin optimizar y de 13.248 Mpa optimizado. Con base en el análisis modal se determinaron las frecuencias naturales del sistema, observando una disminución de las frecuencias después de aplicar la optimización topológica, dependiendo del modo, como se muestra en la tabla 4.1.1.

N <sup>a</sup> de Modo	Frecuencia (Hz)		Variación
	(Sin Opt.)	(Opt.)	(%)
1	2146.8	1997.1	-6.97
2	3987.4	3266.1	-18.09
3	4233.2	3334.7	-21.23
4	4830.8	3826.6	-20.79
5	5403.5	4558.9	-15.63
6	5949.2	5831.5	-1.98

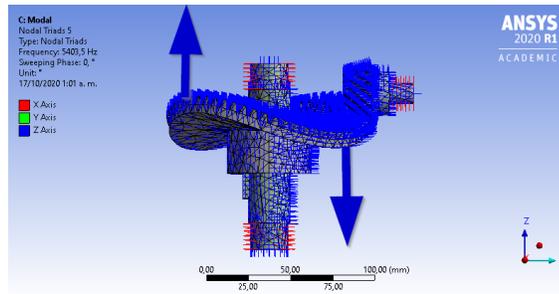
**Tabla 4.1.1:** Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica generada en el engrane B.

Es posible observar que para el engrane hipoidal B, no se cumple con el objetivo de la optimización topológica del aumento de frecuencia natural. Para comprender la causa de este error, es necesario revisar tres modos del engrane, los cuales son el primero, tercero y quinto. En la figura 4.1.2, observamos la forma de estos tres modos, donde los modos tercero y quinto son los de mayor desplazamiento axial al eje Z.



(a) Modo 1

(b) Modo 3



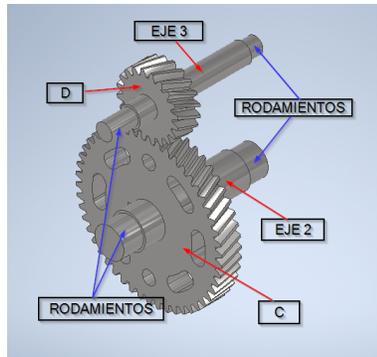
(c) Modo 5

**Figura 4.1.2:** Primero, tercero y quinto modo de la frecuencia natural del engrane hipoidal B.

Estas formas modales indican que al retirar materia del alma del engrane, se redujo la rigidez estructural, afectando directamente las frecuencias naturales obtenidas. Cabe indicar que la rigidez no estaba considerada en los parámetros de optimización.

#### 4.1.2. Análisis de optimización para la etapa helicoidal

En la etapa de engranes helicoidales posee la entrada de potencia en el eje del engrane C (eje 2), las condiciones de contorno están dadas por soporte cilíndricos en los rodamientos, con libre movimiento tangencial, con excepción del análisis estático donde el eje 3 no tiene libre movimiento tangencial. Se introduce un momento de 9820 N mm, con una velocidad de giro de 362.5 RPM en el eje 2.



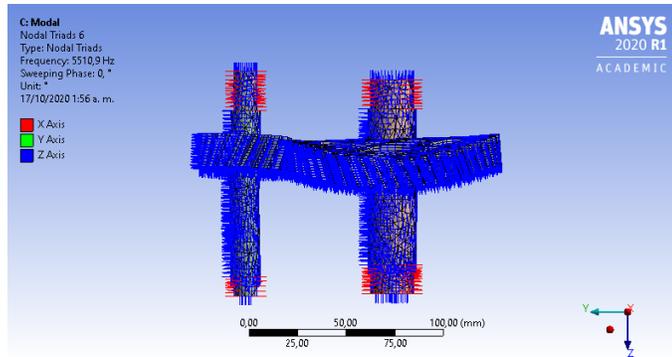
**Figura 4.1.3:** Etapa de engranes helicoidal, con sus respectivos ejes y nomenclatura.

El máximo esfuerzo generado en el análisis estático para el engrane sin optimizar es de 10.537 MPa y optimizado es de 10.293 MPa. Para el análisis modal se obtuvo las frecuencias naturales del sistema, como lo muestra la tabla 4.1.2.

Nº de Modo	Frecuencia (Hz)		Variación
	(Sin Opt.)	(Opt.)	(%)
1	2629.2	2738.9	+4.17
2	3271.2	3583.9	+9.56
3	4143.3	4258.1	+2.77
4	5371.6	5501.8	+2.42
5	5567.3	5510.9	-1.01
6	5593.9	5865.5	+4.86

**Tabla 4.1.2:** Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica del engrane C.

Es posible observar que la optimización topológica cumple con el objetivo de maximizar la frecuencia natural en la mayoría de modos de vibración, con excepción del quinto modo donde se genera una forma modal de deflexión sobre la cara de los engranes, como se observa en la figura 4.1.4.



**Figura 4.1.4:** Modo quinto del tren de engranes helicoidales, con base en la optimización topológica del engrane C.

### 4.1.3. Análisis de la optimización topológica en el tren de engranes

Una vez analizada cada etapa de transmisión, se analizan las dos etapas de manera conjunta, buscando revisar si la optimización consigue modificar las frecuencias naturales del sistema completo mostradas en la tabla 4.1.3. Esta modificación tiene como objetivo evitar la resonancia del sistema en dichas frecuencias. Cabe señalar que únicamente se usó la optimización del engrane helicoidal C que fue el único que contribuyó al aumento de las frecuencias naturales. Para obtener la respuesta en frecuencia del sistema se toman estas características modales.

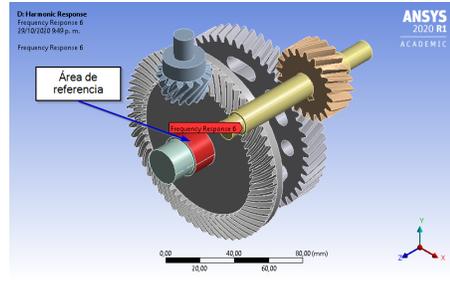
N <sup>a</sup> de Modo	Frecuencia (Hz)		Variación
	(Sin Opt.)	(Opt.)	(%)
1	2247.2	2480.8	+10.4
2	4175.1	4206.8	+0.8
3	4314.4	4337.4	+0.5
4	4883.8	4888.1	+0.1
5	5064.8	5131.2	+1.3
6	5106.1	5282.5	+3.5

**Tabla 4.1.3:** Frecuencias naturales del sistema de transmisión de potencia de la lavadora antes y después de la optimización topológica generada del engrane helicoidal C.

Para efectuar el análisis de respuesta armónica primero se debe realizar el análisis modal del sistema. Las condiciones de frontera son de soporte cilíndricos con libre movimiento

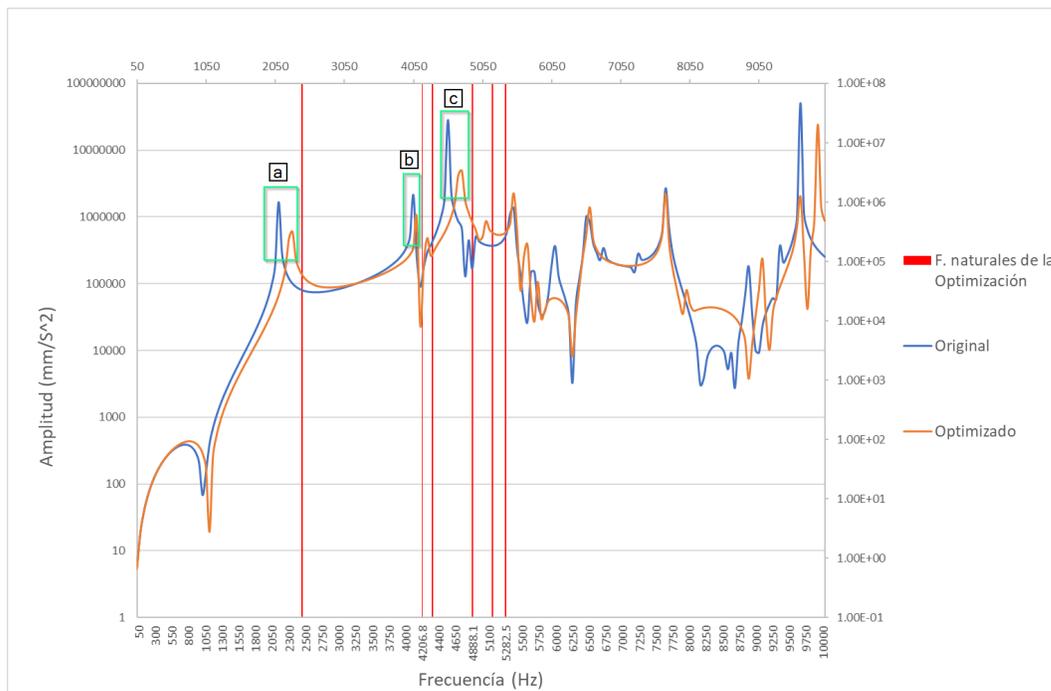
tangencia, con una carga en el engrane A de 2455 N mm y un velocidad angular de 1450 RPM bajo condición de sistema rotodinámico. Se puede observar el aumento en las frecuencias naturales después de realizar la reducción de material, donde los modos que obtuvieron mayor incremento fueron el primero y sexto.

El análisis de respuesta armónica se busca obtener la respuesta en frecuencia de aceleración del sistema. El análisis se realiza sobre el segundo eje como se muestra en la figura 4.1.5.



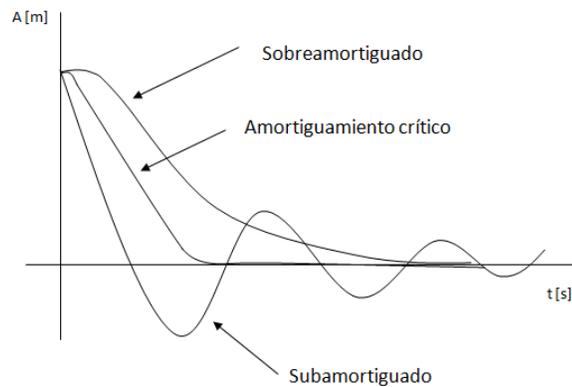
**Figura 4.1.5:** Área de referencia en la obtención del análisis de respuesta de frecuencia.

Para esto, se analiza la respuesta en el rango de frecuencia de 0 a 10 kHz, divididos en 1000 intervalos. La figura 4.1.6 muestra la respuesta del sistema de engranes original y optimizado.



**Figura 4.1.6:** Gráfica de respuesta de frecuencia de aceleración para el tren de engrane con y sin optimización.

Con base en la gráfica de la repuesta de frecuencia de la aceleración del sistema antes y después de realizar la implementación del engrane C optimizado donde se observa las frecuencias naturales de sistema en color *rojo*, se puede señalar la reducción de la amplitud de la aceleración en algunos picos después al realizar la implementar del engrane C optimizado. Donde en el primer pico (a) el cual está próximo a la primera frecuencia natural, varia de  $1.01 \times 10^6 \text{ mm/s}^2$  (2100 Hz) a  $3.20 \times 10^5 \text{ mm/s}^2$  (2300 Hz). El segundo pico (b) el cual se encuentra ubicado entre la primera y segunda frecuencia natural se encuentra una variación entre  $1.33 \times 10^6 \text{ mm/s}^2$  (4050 Hz) a  $5.56 \times 10^5 \text{ mm/s}^2$  (4100 Hz). Y entre la tercera y cuarta frecuencia natural, donde la magnitud del pico (c) se reduce de  $2.45 \times 10^7 \text{ mm/s}^2$  (4550 Hz) a  $9.90 \times 10^5 \text{ mm/s}^2$  (4650 Hz). La optimización topológica al implementarse en el engrane helicoidal disminuya la magnitud de la aceleración en algunos picos, esto ayuda a disminuir la vibraciones del sistema y la deformación del eje, dado que sí esta aceleración aumenta significativamente próximo a la frecuencia natural genera resonancia en el sistema.



**Figura 4.1.7:** El comportamiento del sistema en base al tipo de amortiguamiento.[31]

También se compara el amortiguamiento en el sistema, dado que este determina la recuperación al punto de equilibrio de la aceleración, esto puede generar menos vibraciones. Al tomar en cuenta la figura 4.1.7 donde se representan el comportamiento de las señales emitidas por el tipo de amortiguamiento, el *sub-amortiguado* es el que mayor presenta vibraciones, el *amortiguamiento critico* es el posee menores vibraciones posibles con un mínimo tiempo y el *sobre- amortiguado* tiende a tener mayor tiempo de recuperación lento pero a baja vibraciones [28], podemos comparar con la respuesta de frecuencia del tren de

engranes.

Al realizar la comparación se determina que el sistema se encuentra sobre amortiguado después de hacer la optimización en el engrané helicoidal, en la gran mayoría, con excepción del en el pico (b) y después de la sexta frecuencia natural, donde se genera un *sub-amortiguamiento*, pero en general se pude determinar la reducción de las vibraciones en el sistema dado que antes de la optimización la mayoría del sistema se comportaba como *sub-amortiguado*.

## 4.2. Análisis de resultados obtenidos con otros tipos de engranes

Se realizan los mismos análisis, estático y modal, que para el tren de engranes original. Se establecen las mismas condiciones de la sección 4.1.1 para los engranes cónicos rectos (Momento 2455 N mm y Velocidad Angular 1450 RPM en engrane B) y para la segunda etapa se implementa la mismas condiciones de contorno dados en la sección 4.1.2 para los engranes rectos (Momento 3621.5 N mm y Velocidad Angular 362.5 RPM en C). Obteniendo los resultados mostrados en las figuras 4.2.1 y 4.2.2.

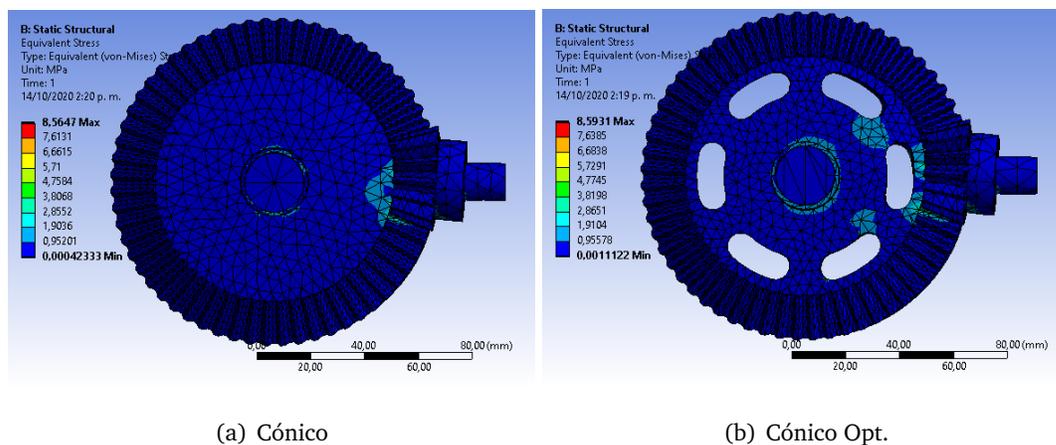
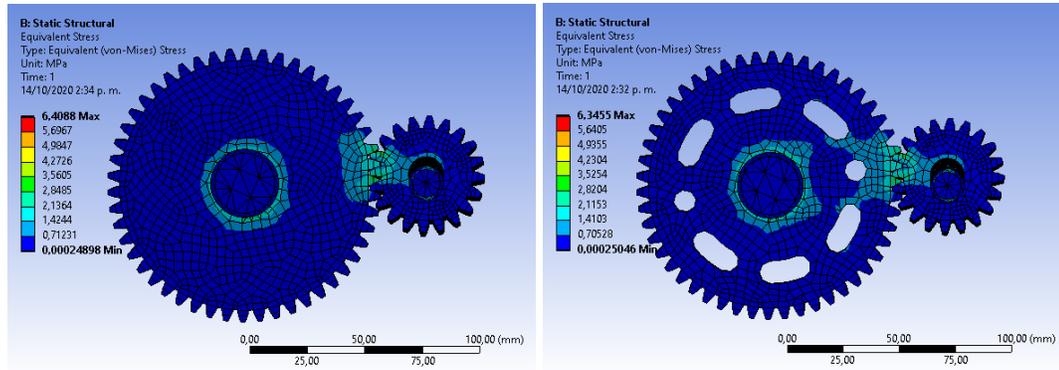


Figura 4.2.1: Análisis estático estructural para la etapa de engranes cónicos.

Se puede observar que la etapa de engranes cónicos, tiene un máximo esfuerzo de 8.565 MPa y después de implementar reducción de material es de 8.593 MPa, esto genera un aumento del 0.3 %, el cual no genera una mayor diferencia.



(a) Recto

(b) Recto Opt.

**Figura 4.2.2:** Análisis estático estructural para la etapa de engranes rectos.

El engrane recto tiene un máximo esfuerzo de 6.41 MPa y después de la reducción de material obtenemos un esfuerzo máximo de 6.346 MPa, esto genera una reducción 1%, de igual manera del engrane cónico recto es mínimo la variación, pero este mínimo cambio se puede relacionar al cambio del orden generado dentro del mallado, dado que se debe adaptar a una nueva geometría con mayor número de vértices y redondeos.

Los resultados del análisis modal de la etapa engrane cónico es mostrado en las tablas 4.2.1, donde se encuentran la frecuencias naturales en cada una de las etapas antes y después de implementar la reducción de masa. El análisis de la etapa de engranes cónicos se comporta similar a la etapa hipoidal del tren de engranes original, donde disminuye su frecuencia natural en el sistema después de implementar reducción de material.

N <sup>a</sup> de Modo	Frecuencia (Hz)		Variación
	(Sin Opt.)	(Opt.)	(%)
1	1917.9	1929.1	0.584
2	3958.6	3236.1	-18.251
3	4134.7	3277	-20.744
4	4735.8	3747.1	-20.877
5	5315.5	4454.5	-16.198
6	5837	5723.3	-1.948

**Tabla 4.2.1:** Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica generada en el engrane B (cónico).

Al compara la variación de la frecuencia obtenida después de la optimización topológica en la etapa de engrane cónico contra la etapa original de engrane hipoide, como se observa en la tabla 4.2.2. La diferencia de la variación obtenida entre estas, son cercanas ha cero, con excepción en el primer modo de vibración, donde la etapa de engrane cónico muestra una mejor adaptación a esta geometría, pero de igual manera no satisface a la maximización de la mayoría de modos de vibración.

N <sup>a</sup> de Modo	Valor de variación de la primera etapa		Diferencia
	Hipoides	Cónicos	
1	-6.97	0.584	-7.554
2	-18.09	-18.251	0.161
3	-21.23	-20.744	-0.486
4	-20.79	-20.877	0.087
5	-15.63	-16.198	0.568
6	-1.98	-1.948	-0.032

**Tabla 4.2.2:** Comparación adaptación de la geometría caracterizada del engrane hipoide al engrane cónico. Con base en las tablas 4.1.1 y 4.2.1.

De igual manera en la figura 4.2.3 se encuentra los resultados obtenidos de la etapa de engrane recto, donde se puede que después de la optimización hay un incremento de la frecuencia natural en los modos 1, 2 y 6. La mayor variación de la magnitud de la frecuencia es en el modo 5, donde se encuentra una reducción del 5.3 %.

N <sup>a</sup> de Modo	Frecuencia (Hz)		Variación
	(Sin Opt.)	(Opt.)	(%)
1	2082.2	2161.2	3.655
2	3075.6	3162.9	2.760
3	3831.1	3791.3	-1.050
4	4709.6	4674.7	-0.747
5	5153	4895.5	-5.260
6	5277.4	5407.2	2.401

**Tabla 4.2.3:** Frecuencia natural antes y después de la optimización topológica generada en el engrane C (Recto).

Al comparar la variación de la frecuencia después de la optimización de la segunda etapa de engrane recta contra la etapa original de engrane helicoidal, mostrada en la tabla 4.2.4, se puede observar que el primer modo tiene la mayor semejanza a la etapa de engrane helicoidal a diferencia de resto de modos, donde hay una disminución variación obtenida por la etapa de engrane recto.

N <sup>a</sup> de Modo	Valor de variación de la segunda etapa		Diferencia
	Helicoidal	Recto	
1	4.17	3.655	0.515
2	9.56	2.760	6.800
3	2.77	-1.050	3.820
4	2.42	-0.747	3.167
5	-1.01	-5.260	4.250
6	4.86	2.401	2.459

**Tabla 4.2.4:** Comparación adaptación de la geometría caracterizada del engrane helicoidal al engrane recto.

Esto nos permite identificar que el comportamiento de la geometría no necesariamente se aplica para otros tipo de engranes, por lo cual la optimización se debe realizar dependiendo

del tipo engrane.

### 4.3. Análisis del sistema de medición de vibración

En la figura 4.3.2 se observa la gráfica de la respuesta en frecuencia de aceleración en dirección eje x, obtenida en los puntos de apoyo, donde en la práctica se ubican los rodamientos o chumaceras de los ejes (figura 4.3.1). Al comparar el comportamiento de los rodamientos, se puede identificar que los rodamientos montados sobre un mismo eje se comporta similar.

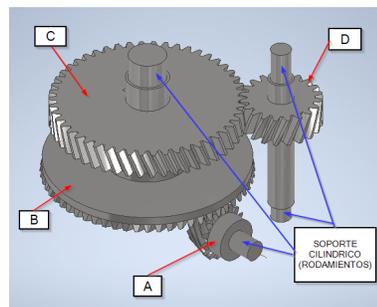


Figura 4.3.1: Ubicación y denominación de los rodamientos en el tren de engranes.

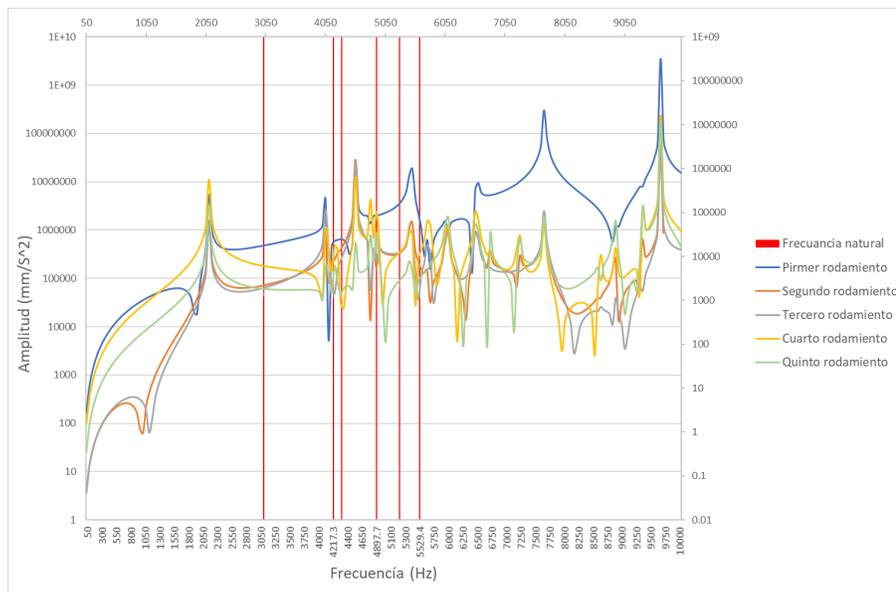
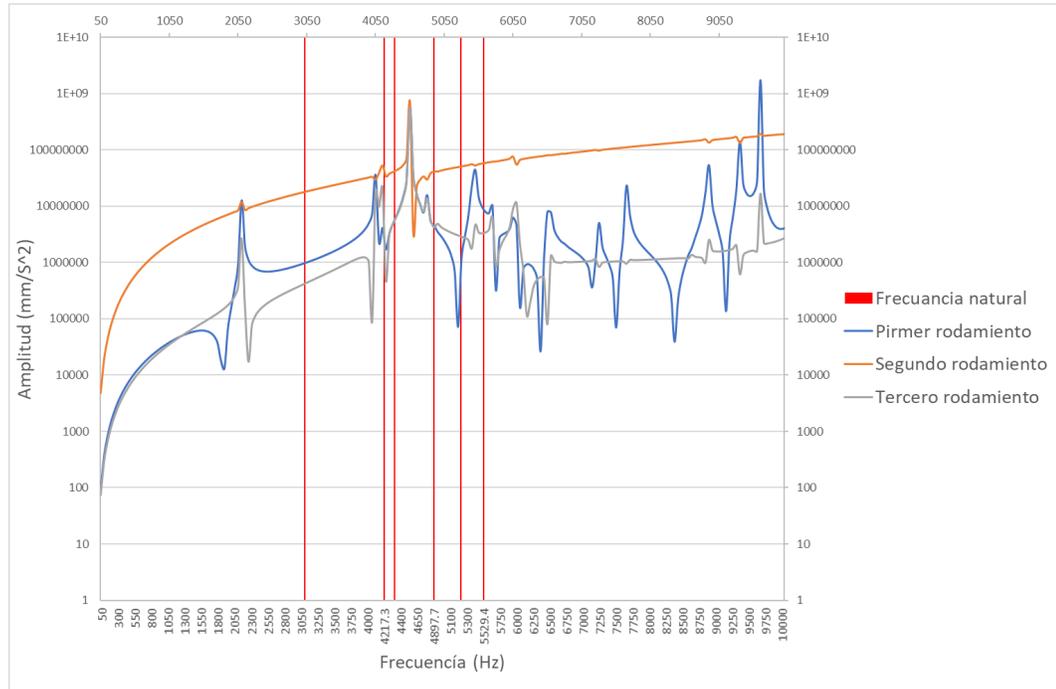


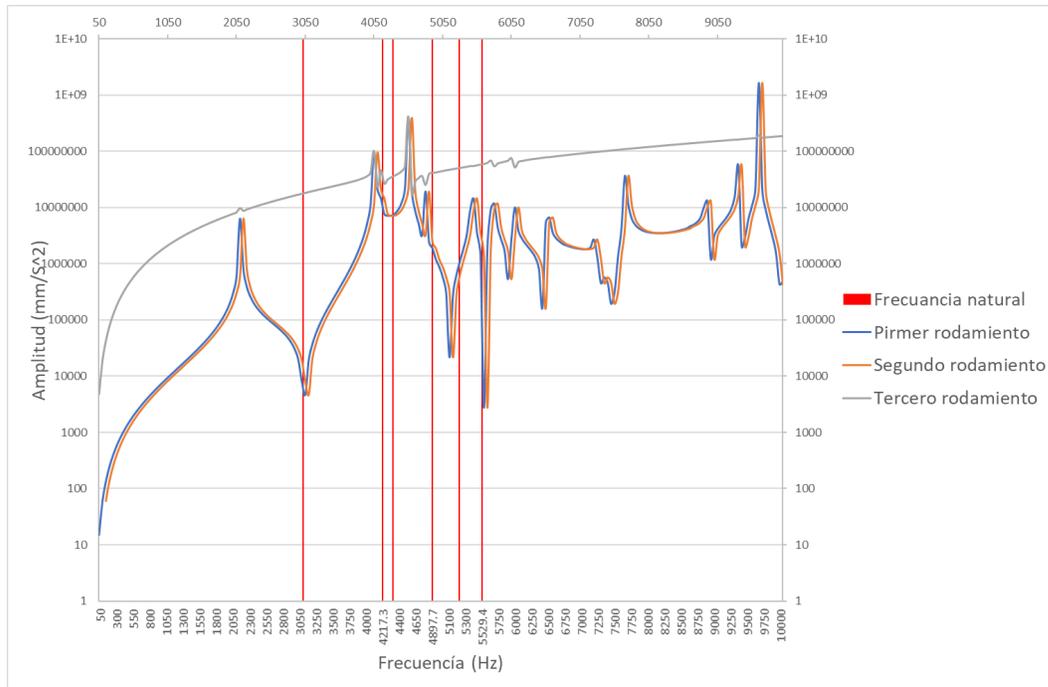
Figura 4.3.2: Gráfica de respuesta armónica de los cinco rodamientos.

Por lo tanto se puede considerar que son necesarios tres puntos de medición de vibraciones, pero para determinar estos los puntos estratégicos para la ubicación de los sensores se

realizara el análisis de respuesta armónica con una holgura en el eje x, de 0.05mm. Se realiza el análisis de frecuencia del segundo y tercer rodamientos ubicados en el eje 2, donde se aplica individualmente en cada uno de los rodamientos la holgura anteriormente mencionada, con el fin de analizar la reacción entre ellos y primer rodamiento. Los resultados se observa en las figuras 4.3.3 y 4.3.4 respectivamente de la holgura de cada rodamiento.



**Figura 4.3.3:** Gráfica de respuesta armónica de los primeros tres rodamientos con holgura en el segundo rodamiento.



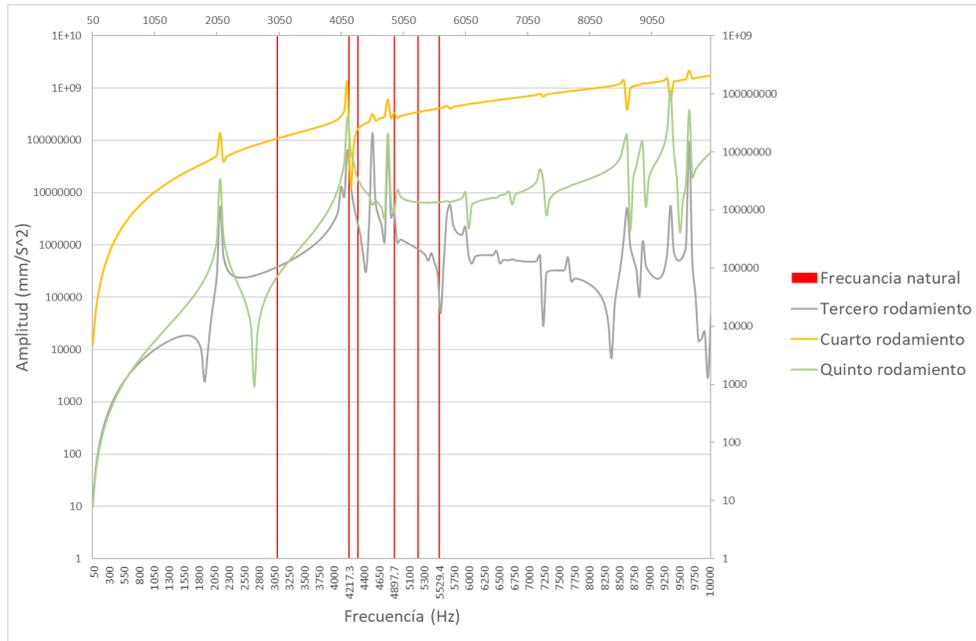
**Figura 4.3.4:** Gráfica de respuesta armónica de los primeros tres rodamientos con holgura en el tercer rodamiento.

En la figura 4.3.3 se observa como en primer pico se mantiene constante la magnitud de la frecuencia con base a la obtenida en la obtenida en el análisis general sin holguras (figura 4.3.2). En la segunda frecuencia natural el tercer rodamiento realiza un incremento de la magnitud su magnitud generando una resonancia en el sistema. Entre tercera y cuarta frecuencia natural se determina un incremento a la magnitud del pico a comparación de la respuesta de frecuencia sin holgura, esto es importa dado que genera resonancia en el sistema y deformación sobre el eje, esto puede causar fallas dentro sistema de transmisión de potencia. Después de la sexta frecuencia natural se estabiliza la magnitud del segundo tercer rodamiento a diferencia del comportamiento del primero rodamiento.

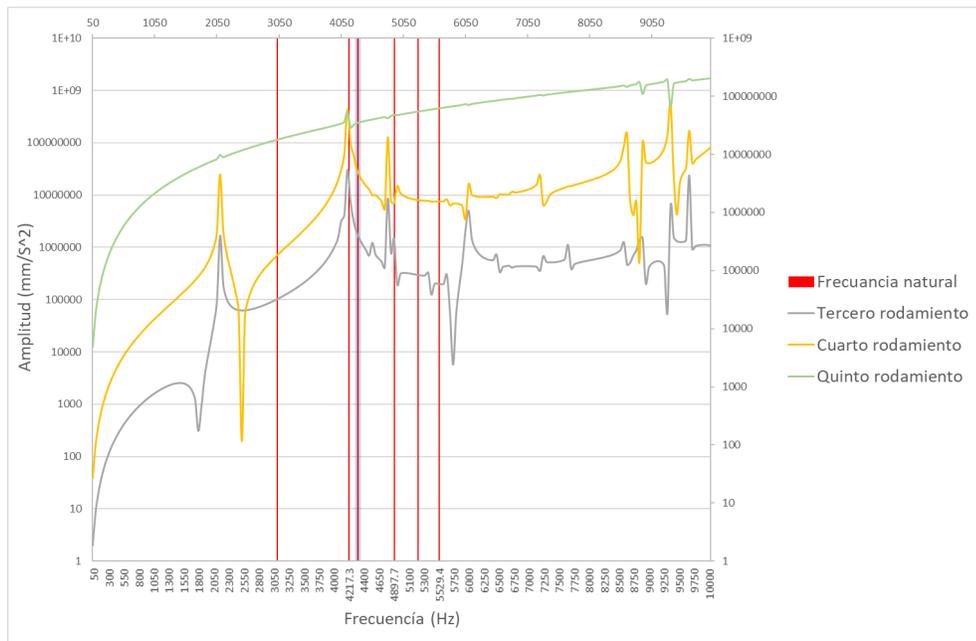
En la figura 4.3.4 se observa un comportamiento simétrico entre el primer y segundo rodamiento, de igual manera que el análisis anterior se puede determinar un aumento de la magnitud de los picos, en este caso principalmente entre la primera y segunda frecuencia natural donde el sistema puede sufrir de resonancia, de igual manera entre la tercera y cuarta frecuencia natural se observa un incremento de la magnitud. También se determina que los sistema puede sufren de resonancia en caso de una falla en los rodamiento.

Se realiza el mismo proceso para el cuarto y quinto rodamiento, y se introduce

adicionalmente en la gráficas el tercer rodamiento debido a su proximidad al eje 3 y su interacción. Los resultados se observa en las figuras 4.3.5 y 4.3.6.



**Figura 4.3.5:** Gráfica de respuesta armónica de los tercero, cuarto y quinto rodamientos con holgura en el cuarto rodamiento.



**Figura 4.3.6:** Gráfica de respuesta armónica de los tercero, cuarto y quinto rodamientos con holgura en el quinto rodamiento.

En la figura 4.3.5, se observa que en la segunda frecuencia natural se genera resonancia en el caso de holgura del cuarto rodamiento, adicional ha esto se genera una resonancia en la cuarta frecuencia natural. También se encuentra un incremento en la magnitud de todos los picos. Entre el tercer y quinto rodamiento se genera una mayor magnitudes en quinto rodamiento, como se observa después de la 7.5 KHz.

En la figura 4.3.6, de igual manera que los análisis anterior se genera una resonancia en el segunda frecuencia natural, de igual manera al análisis anterior de la holgura en el cuarto rodamiento se incruenta un pico sobre la cuarta frecuencia natural, por lo cual genera resonancia. Después del sexta frecuencia natural entre 6.6 KHz a 8.5 KHz, se realiza un incremento de la frecuencia progresivamente, sin picos de gran diferencia.

Con base en esto se propone la ubicación del sistema de medición en el prime, tercer y cuarto rodamiento debido a su discrepancia entre las diferentes señale emitidas por lo cual pueden determinarse mejor la respuesta de vibraciones. Y se determina que el sistema puede presentan diversas resonancias en el sistema por causas de las holguras de los rodamientos, principalmente en la segunda frecuencia natural. Las fallas que se presenten en el eje 3, genera la resonancia en el cuarta frecuencia natural, realizando una característica.

Por último se debe implementar un conjunto de acelerómetros que puedan trabajar a altas frecuencias debido que las perturbaciones en el sistema se pueden visualizar después de los 2 KHz. Siendo así se pueden proponer acelerómetros piezoeléctrico, por ejemplo el modelo: 639A91 de la marca PCB piezotronics®, el cual funciona entre 1.5 Hz hasta 5500HZ [56].

## Capítulo 5

# Conclusiones

Con base en lo desarrollado en el trabajo y los resultados obtenidos se puede determinar diferentes aspectos relevantes para el análisis, modelamiento y optimización topológica para un sistema de transmisión de potencia de una lavadora centrífuga y la propuesta de un sistema para medición de vibración usando el software de Ansys®.

El uso de software de análisis de elementos finitos es una herramienta de gran utilidad, el cual permite realizar diversos análisis de comportamientos en los sistemas rotodinámicos, por ejemplo en el sistema de transmisión de potencia de una lavadora centrífuga. En este tipo de sistemas se pueden realizar diferentes tipos de análisis: estático, dinámico, transitorio, modal, vibratorio, térmico, entre otros. El análisis de elementos finitos requiere una correcta discretización del dominio analizado, para esto se seleccionan el tipo, orden y tamaño máximo de elementos fundamentado en la geometría del pieza, para definir el número de elementos necesarios. Para este caso se seleccionaron hexaedros para los engranes helicoidales con un número mínimo de 14000 elementos y para tetraedros para los engranes hipoidal con numero mínimo 9000 elementos.

Las condiciones de fronteras se deben definir en base a los criterios del modelo de software, esto genera limitaciones en realizar con mayor presión el análisis o aumento de costo computacional, dado que hay información adicional que no influye un cambio significativo en los resultados obtenidos. Como el análisis modal del engrane hipoide B y helicoidal C, en el cual no se obtuvo una diferencia significativa, al aplicar la velocidad de giro de 362.5 RPM y sin aplicar, con el software de Ansys, a diferencia del SolidWorks el cual realizo tipo

de análisis donde se obtuvo valores aproximados, pero con la diferencia del primer modo , considerado modo cuerpo rígido, el cual se halla en base a la velocidad de giro, para este trabajo es de 5.6 Hz.

Se puede realizar la verificación de la optimización topológica analizando cada una de las etapas del tren de engranes, esto permite identificar con menor costo computacional y con un número de malla más refinada el comportamiento del conjunto completo del tren de engranes. Dado que el análisis modal realizado para el engrane hipoidal nos permitió determinar que el ajuste geométrico de la optimización genero un disminución en las frecuencia naturales entre 2 a 21 %, de igual manera nos permitió identificar el incremento de la frecuencia natural del optimización para el engrane helicoidal entre 2.5 a 9.6%. Por lo cual se selecciona que el engrane helicoidal cumplió con el objetivo de optimización y se realizo el analista del todo el tren de engranes, donde se observo un incremento de la frecuencia natural del sistema entre 0.1 % a 10.5 %, pero no se perdura el mismo incremento, esto es debido a diferentes parámetros.

Al realizar el análisis de respuesta de frecuencia del tren de engranes optimizado nos permite determinar la disminución de la magnitud aceleración después de realizar la optimización, en el primer pico se redujo un 68 % su magnitud, el segundo pico se redujo un 58 % y el tercero obtuvo una reducción de 98 %, esto nos permite determinar que la optimización topológica disminuye en el sistema las vibraciones.

Como se demostró en 3l engrane hipoide y cónico donde no se puede retirar material del alma, ya que sirve de soporte para cargas radiales. Mientras para los engranes helicoidales una estructura con arreglos radiales cumple con los requerimientos de carga.

Debido a las limitaciones de mallado, la optimización topológica no genera una estructura regular o simétrica en todo su cuerpo dispuesto para el retiro de material, esto implica una dependencia del criterio del diseñador para retirar material en las regiones apropiadas. El criterio de reducción de masa para engrane hipoidal fue del 12 % y se obtuvo con el ajuste de geometría de la optimización una extracción de masa del 10 %, de igual manera el engrane helicoidal su criterio fue del 35 % de reducción de masa y se obtuvo después de la ajuste de geometría de la optimización 26.7 % de reducción. Esto debido a que no se puede retirar en las misma región planteada para los diferentes tipos de engranes.

La reducción de masa en los engranes hipoides no cumplió los objetivos de optimización debido a que se disminuyó la rigidez del engrane. Esto sucedió ya que el engrane tiene

un diámetro grande con relación a su espesor. Por lo tanto, se pueden implementar optimizaciones multiobjetivo donde se considere la rigidez o aumentar el espesor del engrane con el fin de obtener un cuerpo más rígido.

Para determinar la selección de los rodamientos o chumacera donde se ubicará el sistema de medición de vibraciones para el tren de engranes, se puede realizar por medio del análisis respuesta de frecuencia, el cual determino necesario instalar los sensores sobre tres rodamientos, esto dado por la discrepancia que se presentaron en tres rodamientos con base a la respuesta de frecuencia de los otros rodamientos. El primer rodamiento, el cual se ubica en el eje del engrane helicoidal A, el cual obtiene datos del engrane segundo y tercer rodamiento, de igual manera en el tercer rodamiento debido a que puede obtener información del todos el sistema debido a su interacción con todos los ejes y cuarto rodamiento, debido a la señal obtenida del eje y la interacción que tiene con el eje 2.

Adicional de la obtención de los puntos donde se ubican los sensores nos permitió determinar que puede generarse resonancia en el sistema en la segunda y cuarta frecuencia natural con una magnitud de  $6 \times 10^8 \text{ mm/s}^2$  y  $1 \times 10^8 \text{ mm/s}^2$  respectivamente, debido a su gran magnitud de la aceleración en dichos puntos en cuando se generan fallas los rodamientos. Esto permitió identificar que el causante de la resonancia de la cuarta frecuencia natural es principalmente fallas generadas sobre el eje 3.

## 5.1. Recomendaciones para trabajos futuros

Durante el desarrollo del proyecto se determinaron aspectos importantes que pueden mejorar las simulaciones y proyectos realizados.

Para dar continuidad el estudio se debe realizar una validación experimental de la optimización topológica, por lo cual se sugiere realizar la construcción del banco de pruebas y la generar la reducción de material en el engrane helicoidal e implementar un análisis multiobjetivo para realizar la optimización.

Se recomienda realizar el mismo estudio, pero con una licencia de Ansys® o con otro software de elementos finitos con el fin de que se pueda obtener una malla más fina.

De igual manera puede realizar un trabajo de simulaciones de fallas en las cajas de engranes, con el fin de caracterizar posibles fallas futura y como por medio del software se pueden simular desbalanceo, desalineamiento, fatiga, eje con pandeo, entre otros.

Y por último realizar una optimización topológica donde se deberían considerar aspectos como temperatura y lubricación.

# Bibliografía

- [1] Kohara Gear Industry. Gear noise, 2018. acceso: 06/marzo/2020.
- [2] Jairo Chaur Bernal. Optimización aplicada. *Universidad Distrital de Colombia*, 2014.
- [3] Jorge Dominguez. Optimización simultánea para la mejora continua y reducción de costos en procesos. *Ingeniería y Ciencia*, 2006.
- [4] chamarty vsr Subrahmanyam. Noise in gear systems. *researchgate.net*, 2009.
- [5] J Derek Smith. Gear noise and vibration. 2003.
- [6] Yuriy Shekhtman and Alexander Kapelevich. Gear tooth fillet profile optimization. *Gear solutions*, 2009.
- [7] Naser Amini, BG Rosén, and H Westberg. Optimization of gear tooth surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 38(5-6):425–435, 1998.
- [8] Su-chul Kim, Sang-gon Moon, Jong-hyeon Sohn, Young-jun Park, Chan-ho Choi, and Geun-ho Lee. Macro geometry optimization of a helical gear pair for mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*, 144:103634, 2020.
- [9] Mehmet Bozca. Transmission error model-based optimisation of the geometric design parameters of an automotive transmission gearbox to reduce gear-rattle noise. *Applied Acoustics*, 130:247–259, 2018.
- [10] Andrés A. García. Métodos de optimización: Algoritmos genéticos. *TradingSys.org*, 2012.
- [11] C Millán Páramo and O Begambre Carrillo. Solving topology optimization problems using the modified simulated annealing algorithm. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria*, 32(2), 2016.
- [12] Gears QTC. Helical gears, 2019.
- [13] R Ramadani, A Belsak, M Kegl, J Predan, and S Pehan. Topology optimization based design of lightweight and low vibration gear bodies. *International Journal of Simulation Modelling*, 17(1):92–104, 2018.
- [14] Nicolas Casas Rey and Gonzalo Castro Ramirez. Optimización paramétrica y topológica de engranajes. *Universidad Libre de Colombia.*, 2014.
- [15] A. Arranz Gutiérrez. Análisis vibratorio. *Universidad de Valladolid*, 2017.

- [16] FLUKE. La temperatura y las vibraciones envían señales de mantenimiento. *Fluke Corporation.*, 2014.
- [17] Glen White. *Introducción al análisis de vibraciones.* 2010.
- [18] Singiresu S. Rao. *Vibraciones máquinas.* Person Educacion, 2012.
- [19] Robert L Mott. *Diseño de elementos de máquinas.* 2006.
- [20] Roberto Norton. *Diseño de máquinas: un enfoque integrado.* Pearson Educación de México, SA de CV, 2011.
- [21] Robert C Juvinall. *Fundamentals of machine component design.* 2007.
- [22] Richard G Nisbett. *Diseño en ingeniería mecánica de shigley. México. Editorial McGraw-Hill Interamericana,* 2008.
- [23] Stephen P Radzevich. *Dudley's handbook of practical gear design and manufacture.* CRC Press, 2016.
- [24] W Seto WILLIAM. *Vibraciones mecánicas.* Mc Graw-Hill, 1970.
- [25] William J Bottega. *Engineering vibrations.* CRC Press, 2014.
- [26] Russell C Hibbeler. *Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica.* Pearson Educación, 2010.
- [27] Ferdinand Pierre Beer, E Russell Johnston, Elliot R Eisenberg, and Robert G Sarubbi. *Mecánica vectorial para ingenieros.* McGraw-Hill, 2010.
- [28] Maurice L Adams. *Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting.* CRC Press, 2009.
- [29] Vila R Roca. *Vibraciones mecánicas.* Limusa, 1981.
- [30] Singiresu S Rao. *Engineering optimization: theory and practice.* John Wiley & Sons, 2009.
- [31] Alok Sinha. *Vibration of mechanical systems.* Cambridge University Press, 2010.
- [32] Giancarlo Genta. *Dynamics of rotating systems.* Springer Science & Business Media, 2007.
- [33] Rajiv Tiwari. *Rotor systems: analysis and identification.* CRC press, 2017.
- [34] Uanl. *Movimiento circular.* Universidad Autonoma de Nuevo Leon, 2010.
- [35] OC ZIENKIEWICZ-RL Taylor and OC Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos. Las bases,* 1, 1994.
- [36] Esam M Alawadhi. *Finite element simulations using ANSYS.* CRC Press, 2015.
- [37] Singiresu S Rao. *The Finite Element Method in Engineering.* Elsevier Inc., 2010.
- [38] Erdogan Madenci and Ibrahim Guven. *The finite element method and applications in engineering using ANSYS®.* Springer, 2015.
- [39] Xiaolin Chen and Yijun Liu. *Finite element modeling and simulation with ANSYS Workbench.* CRC press, 2014.

- [40] Arunachalam Ravindran, Gintaras Victor Reklaitis, and Kenneth Martin Ragsdell. *Engineering optimization: methods and applications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [41] Giuseppe C Calafiore and Laurent El Ghaoui. *Optimization models*. Cambridge university press, 2014.
- [42] Kalyanmoy Deb. *Optimization for engineering design: Algorithms and examples*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2012.
- [43] Xiaodong Huang and Mike Xie. *Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications*. John Wiley & Sons, 2010.
- [44] Osvaldo M Querin, Mariano Victoria, Cristina Alonso Gordo, Rubén Ansola, and Pascual Martí. *Topology design methods for structural optimization*. Butterworth-Heinemann, 2017.
- [45] Xianmin Zhang and Benliang Zhu. *Topology optimization of compliant mechanisms*. Springer, 2018.
- [46] Martin Philip Bendsoe and Ole Sigmund. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [47] ANSYS Workbench et al. Ansys workbench user's guide. url <https://ansyshelp.ansys.com/>, 2020.
- [48] Stephen P Radzevich and Darle W Dudley. *Handbook of practical gear design*. CRC press, 2012.
- [49] Silicon Carbide Matweb. Matweb. com, 2010. url <http://www.matweb.com/index.aspx>, 2020.
- [50] Canonsburg ANSYS. Theory reference 2019, 2019.
- [51] Manni Sipre Spa. *CATALOGO TÉCNICO TUBOS ESTRUCTURALES*. Gruppo Manni, 2013.
- [52] Tubos Argentinos. *TUBOS ESTRUCTURALES*. Tubos Argentinos, 2016.
- [53] Fabio Andrés Bernal Calderón, Diego Fabián Cortés Navarrete, et al. Simulación de un banco de pruebas para análisis de vibraciones. 2017.
- [54] José Armando Jara Jimbo and Juan Gabriel Sinchi Vivar. Diseño y construcción de un banco didáctico para la medición de vibraciones mecánicas en los laboratorios de instrumentación de la universidad politécnica salesiana sede cuenca. B.S. thesis, 2012.
- [55] PIERO ESPINO ROMÁN, YASSER ALBERTO DAVIZON, EUGENIA OLAGUEZ TORRES, Alejandro Lizárraga Lizárraga, JOSE VICTOR NUÑEZ NALDA, and ISRAEL BENITEZ GARCIA. Prototipo didáctico para la enseñanza de vibraciones mecánicas mediante el diseño de un banco de pruebas de desequilibrio y velocidad crítica. *DYNA*, 92(4):395–398, 2017.
- [56] PCB Piezotronics. Catálogo de sensores para pruebas y medición. <https://www.pcb.com/>, October 2020.
- [57] Mechanical APDL ANSYS. *Theory reference 2013*. Canonsburg, 2013.

# **Anexos**

## Anexo A

# Métodos matemáticos de Ansys®

Se describirán a grande rasgos los modelos de estructural estático, modal, respuesta armónica y optimización topológica.

### A.1. Método estructural estático

Las ecuaciones de equilibrio general para el análisis estático estructural lineal son:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (\text{A.1.1})$$

$$[K]\{u\} = \{F^a\} + \{F^r\} \quad (\text{A.1.2})$$

Donde:  $[k] = \sum_{m=1}^N [K_e]$  es la matriz de rigidez total,  $[K_e]$  es la matriz de rigidez del elemento (puede incluir la matriz de rigidez de tensión del elemento),  $\{u\}$  es el vector de desplazamiento nodal,  $N$  es el número de elementos,  $\{F^r\}$  es el vector de carga de reacción y  $\{F^a\}$  es el vector de carga total aplicada, se define en la ecuación A.1.3. El orden de la matriz de rigidez  $[k]$  es ensamblada dependiendo del número de grados de libertad y tomando en cuenta las propiedades elásticas del material. EL vector de cargas esta definido dependiendo del nodo donde son aplicadas las fuerzas<sup>1</sup>.

$$\{F^a\} = \{F^{nd}\} + \{F^{ac}\} + \sum_{m=1}^N (\{F_e^{th}\} + \{F_e^{pr}\}) \quad (\text{A.1.3})$$

---

<sup>1</sup>Nota: Estos datos fueron obtenidos de *Teoría de referencia* de Ansys®[57]

Donde  $\{F^{nd}\}$  es el vector de carga nodal aplicado,  $\{F^{ac}\} = -[M]\{a_{ac}\}$  es el vector de carga de aceleración y  $[M] = \sum_{m=1}^N [M_e]$  es la matriz de masa total.  $[M_e]$  es la matriz de masa del elemento (descrita en Derivación de matrices estructurales),  $\{a_c\}$  es el vector de aceleración total (definido en efecto de aceleración),  $\{F_e^{th}\}$  es el vector de carga térmica del elemento (descrito en derivación de matrices estructurales) y  $\{F_e^{pr}\}$  Vector de carga de presión del elemento (descrito en derivación de matrices estructural).

## A.2. Método de Análisis modal

Es importante describir algunas simplificaciones para usar este sistema de análisis: a) La estructura tiene rigidez constante y efectos de masa, b) No hay amortiguamiento, a menos que se seleccione el la configuración adecuada y c) La estructura no tiene fuerzas, desplazamientos, presiones o temperaturas que varíen en el tiempo (vibración libre).

Este tipo de análisis se utiliza para determinar las frecuencias naturales y formas modales. La ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado, expresada en notación matricial:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

Donde  $[K]$  la matriz de rigidez de la estructura puede incluir efectos de pretensado. Para un sistema lineal, la solución del sistema se puede expresar como:

$$\{u\} = \{\Phi_i\} \cos \Omega_i t \quad (\text{A.2.2})$$

Dónde  $\{\Phi_i\}$  es el vector propio que representa la forma modal de la  $i$ -ésima frecuencia natural,  $\Omega_i =$  es la frecuencia circular natural para  $i$ -ésima (radianes por unidad de tiempo) y  $t$  tiempo. Por tanto, la ecuación A.2.1 se convierte en:

$$(-\Omega_i^2[M] + [K])\{\Phi_i\} = \{0\} \quad (\text{A.2.3})$$

Esta igualdad se satisface si  $\{\Phi_i\} = \{0\}$  o si el determinante de  $(-\Omega_i^2[M] + [K])$  es cero. La primera opción es la trivial. La segunda opción se manifiesta como:

$$|[K] - \Omega_i^2[M]| = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

Este es un problema de valores propios que puede resolverse para  $n$  valores de  $\omega^2$  y  $N$  vectores propios  $\{\Phi_i\}$  que satisfacen la Ecuación A.2.3, donde  $N$  es el número de grados de libertad. Las técnicas de extracción de autovalores y auto vectores. la relación entre la frecuencias ( $\omega$ ) y las frecuencias angulares  $\{\Omega\}$  es:

$$\omega_i = \frac{\Omega_i}{2\pi} \quad (\text{A.2.5})$$

### Método amortiguado

El *eigensolver* amortiguado es aplicable solo cuando la matriz de amortiguamiento del sistema, donde el problema propio se convierte en un problema de valor propio cuadrático dado por :

$$[K]\{\Phi_i\} + \bar{\lambda}_i[C]\{\Phi_i\} = -\bar{\lambda}_i^2[M]\{\Phi_i\} \quad (\text{A.2.6})$$

Dónde  $\bar{\lambda}_i = j\sqrt{\lambda_i}$  y  $[C]$  es la matriz de amortiguamiento.

Las matrices pueden ser simétricas o asimétricas debido a la interacción entre los cuerpos, dado si son rígidos, rígidos-amortiguado y amortiguado- amortiguado<sup>2</sup>.

### Método QR amortiguado

El método QR amortiguado es un procedimiento para determinar los valores propios complejos y los correspondientes vectores propios de los sistemas lineales amortiguados.

Las ecuaciones que siguen se aplican a Rayleigh y a la amortiguación basada en elementos en un análisis modal QR amortiguamiento. Las ecuaciones de los sistemas estructurales elásticos sin excitación externa se pueden escribir de la misma forma que la ecuación general de movimiento 2.2.13.

La ecuación de Rayleigh se basa en determinar la frecuencia de vibración de un sistema conservador vibratorio respecto a una posición de equilibrio tiene en valor estacionario un modo natural, donde la energía potencial y cinética son iguales. Este valor estacionario, es un valor mínimo en la proximidad del modo natural de fundamental[30].

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T [K] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}} \quad (\text{A.2.7})$$

Donde  $\vec{X}$  es el vector de amplitudes del forma modal.

<sup>2</sup>Nota: Estos datos fueron obtenidos de *Teoría de referencia* de Ansys®[57]

### A.3. Método de Análisis armónico

Considere la ecuación general de movimiento para un sistema estructural.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]u = F^a \quad (\text{A.3.1})$$

Dónde  $[M]$  es la matriz de masa estructural,  $[C]$  es la matriz de amortiguamiento estructural,  $[K]$  matriz de rigidez estructural,  $\{\ddot{u}\}$  es el vector de aceleración nodal,  $\{\dot{u}\}$  es el vector de velocidad nodal,  $\{u\}$  es el vector de desplazamiento nodal y  $F^a$  es el vector de carga aplicada.

Como se indicó anteriormente, todos los puntos de la estructura se mueven a la misma frecuencia conocida, sin embargo, no necesariamente en fase, dado que se mueven en la frecuencia de excitación y existe la característica dinámica del sistema. Además, se sabe que la presencia de amortiguamiento provoca cambios de fase. Por tanto, los desplazamientos pueden definirse como:

$$\{u\} = \{u_{max}e^{i\Phi}\}e^{i\Omega t} \quad (\text{A.3.2})$$

Dónde  $u_{max}$  es el desplazamiento máximo.

$i = \sqrt{-1}$  es el numero imaginario,  $\Omega =$  frecuencia circular impuesta (radianes / tiempo) dado por  $2\pi\omega$  y  $\omega$  es la frecuencia impuesta (ciclos / tiempo),  $t$  el tiempo y por ultimo  $\phi =$  desplazamiento de fase de desplazamiento (radianes).

Esto genera la ecuación general del sistemas y genera diversas soluciones:

$$([K] - \Omega^2[M] + i\Omega[C])(\{u_1\} + i\{u_2\}) = \{F_1\} + i\{F_2\} \quad (\text{A.3.3})$$

#### A.3.0.1. Método de optimización topológica

El modelo relevante para el desarrollo del proyecto es la **Optimización basada en densidad**, el cual se sustenta en el modelo de material isotrópico sólido con penalización (*SIMP*), visto en la sección 2.6.2.2, donde la la densidad se ve obligada a acercarse a 0 o 1 en lugar de variar continuamente y descrito en la ecuación 2.6.4. En base ha este modelo se realiza adaptación para diferentes objetivo, algunos de estos se describirán continuación [57] [50].

#### Diseño de máxima rigidez dinámica

Este modelo principal esta sujeto a restricción de volumen, se busca maximizar la  $i$ ésima frecuencia natural  $\bar{\omega}_i > 0$  determinada a partir de un análisis de frecuencia de modo sujeto a una reducción de volumen dada. En este caso, el problema de optimización se formula como:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximizar : } \bar{\omega}_i \\
 & \text{sujeto a : } 0 < \rho \leq 1 \\
 & i = 1, 2, 3, \dots, N \\
 & V \leq V_0 - V^*
 \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

Dónde  $\omega_i = i^{th}$  es la frecuencia natural calculada,  $V$  es el volumen calculado,  $V_0$  es el volumen original y  $V^*$  es la cantidad de material a eliminar.

Maximizar una frecuencia natural específica es un problema para una optimización topológica de frecuencia propia. Sin embargo, durante el proceso de optimización los modos propios pueden cambiar de el orden modal<sup>3</sup>.

#### Formulación ponderada

Dadas  $M$  número de frecuencias naturales  $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_M)$ , se define la siguiente función de media ponderada  $(\bar{\Omega}_w)$ :

$$\Omega_w = \sum_{i=1}^m W_i \bar{\omega}_i \tag{A.3.5}$$

Dónde  $\Omega_w$  es la función objetivo a maximizar,  $\omega_i = i^{th}$  es la frecuencia natural y  $W_i =$  Peso para  $i$  con frecuencia natural.

#### Formulación recíproca

Dadas  $m$  frecuencias naturales  $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m)$ , un parámetro de desplazamiento  $\bar{\omega}_0$ , se define la siguiente función media recíproca  $(\bar{\Omega}_R)$ :

$$\Omega_R = \bar{\omega}_0 + \left( \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_0} \right) \tag{A.3.6}$$

#### Formulación de la norma euclidiana

Dados  $m$  frecuencias naturales  $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m)$ ,  $m$  valores objetivo de frecuencia  $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m)$ , se

<sup>3</sup>Nota: Estos datos fueron obtenidos de *Teoría de referencia* de Ansys®[57]

define la siguiente función de norma euclidiana ( $\overline{\Omega_E}$ ) se define:

$$\Omega_E = \left( \sum_{i=1}^m (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3.7})$$

La función objetivo es  $\Omega_E$  a maximizar. <sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Nota: Estos datos fueron obtenidos de *Teoría de referencia* de Ansys® [57] [50]

## Anexo B

# Diseño de engranes en Inventor®, Por medio del generador de componentes

### B.1. Etapa de engranes hipoides 60-15

Bevel Gears Component Generator (Version: 2020 (Build 240168000, 168))

22/05/2020

**Project Info**

**Guide**

User: Component Generator - User  
 Type of Load Calculation: Torque calculation for the specified power and speed  
 Type of Strength Calculation: Check Calculation  
 Method of Strength Calculation: ISO 6336:1996

**Common Parameters**

Gear Ratio	$i$	0.2500 ul
Tangential Module	$m_t$	2.000 mm
Helix Angle	$\beta$	35.000 deg
Tangential Pressure Angle	$\alpha_t$	20.0000 deg
Shaft Angle	$\Sigma$	90.00 deg
Normal Pressure Angle at End	$\alpha_n$	17.0000 deg
Normal Pressure Angle in Middle Plane	$\alpha_{nm}$	16.6018 deg
Base Helix Angle	$\beta_b$	33.3491 deg
Helix Angle at End	$\beta_e$	29.9592 deg
Module	$m$	1.250 mm
Contact Ratio	$c$	3.4477 ul
Transmission Contact Ratio	$c_t$	1.7500 ul
Overrun Ratio	$h_g$	1.7400 ul
Limit Deviation of Axis Parallelity	$f_p$	0.050 mm
Limit Deviation of Axis Parallelity	$f_r$	0.055 mm
Virtual Gear Ratio	$i_v$	16.600 ul
Equivalent Center Distance	$a_e$	128.846 mm
Virtual Center Distance	$a_v$	141.000 mm
Pitch Circle Radius	$r_p$	61.847 mm
Pitch Circle Radius in Middle Plane	$r_{pm}$	53.949 mm

**Gears**

	Gear 1	Gear 2
Type of module	Component	Component
Number of Teeth	$z$	60.000 ul
Unit: CornerStar	$\alpha$	0.0000 ul
Tangential Development	$\delta_n$	0.0000 ul
Pitch Diameter at End	$d_e$	126.000 mm
Pitch Diameter in Middle Plane	$d_{pm}$	106.476 mm
Outside Diameter at End	$d_{oe}$	128.979 mm
Outside Diameter at Small End	$d_{os}$	89.979 mm
Root Diameter at End	$d_r$	118.836 mm
Vertex Distance	$A$	13.000 mm
Vertex Distance at Small End	$A_s$	9.681 mm

Figura B.1.1: Documento de engranes hipoides

#### B.1.1. Parámetros comunes

Relación de transmisión	$i$	0.250 ul
Módulo tangencial	$m_{et}$	2.000 mm
Ángulo de hélice	$\beta$	35.0000 grados
Ángulo de presión tangencial	$\alpha_t$	20.0000 grados

Ángulo del eje	$\Sigma$	90.0000 grados
Ángulo de presión normal al final	$\alpha_{ne}$	17.5020 grados
Ángulo de presión normal en el plano medio	$\alpha_{nm}$	16.6018 grados
Ángulo de hélice base	$\beta_b$	33.3441 grados
Ángulo de hélice base	$\beta_e$	29.9592 grados
Módulo	m	1.733 milímetros
Proporción de contacto	$\varepsilon$	3.4477 ul
Relación de contacto transversal	$\varepsilon_\alpha$	1.7069 ul
Relación de superposición	$\varepsilon_\beta$	1.7408 ul
Desviación límite de la paralelidad del eje	$f_x$	0.0110 mm
Desviación límite de la paralelidad del eje	$f_y$	0.0055 mm
Relación de transmisión virtual	$i_v$	16.0000 ul
Distancia al centro equivalente	$a_v$	228.848 mm
Distancia del centro virtual	$a_n$	341.050 mm
Radio del cono de paso	$R_e$	61.847 mm
Radio del cono de paso en el plano medio	$R_m$	53.847 mm

### B.1.2. Engranés

		Engrane 1	Engrane 2
Tipo de modelo		Componente	Componente
Numero de dientes	$z$	60.000 ul	15.000 ul
Corrección unitaria	$x$	0.000 ul	-0.000 ul
Desplazamiento Tangencial	$x_t$	0.000 ul	-0.000 ul
Diámetro de paso al final	$d_e$	120.000 mm	30.000 milímetros
Diámetro de paso en el plano medio	$d_m$	104.478 mm	26.119 mm
Diámetro exterior al final	$d_{ae}$	120.970 mm	33.881 mm
Diámetro exterior en el extremo pequeño	$d_{ai}$	89.675 mm	25.116 mm
Diámetro de la raíz al final	$d_{fe}$	118.836 mm	25.343 mm
Distancia del vértice	$A_e$	13.060 mm	59.515 mm
Distancia del vértice en el extremo pequeño	$A_i$	9.681 mm	44.118 mm

Ángulo del cono de paso	$\delta$	75.9638 grados	14.0362 grados
Ángulo de cono exterior	$\delta_a$	77.8159 grados	15.8884 grados
Ángulo de cono raíz	$\delta_f$	73.7415 grados	11.8140 grados
Ancho de cara	segundo	16.000 mm	
Relación de ancho de cara	$b_r$	0.2587 ul	
Apéndice	$a^*$	1.0000 ul	1.0000 ul
Despeje	$c^*$	0.2000 ul	0.2000 ul
Filete de raíz	$r_f^*$	0.3000 ul	0.3000 ul
Toda la profundidad del diente	$h_{correo}^*$	4.400 milímetros	4.400 milímetros
Espesor del diente al final	$s_e$	3.142 mm	3.142 ul
Espesor de cuerdas	$t_c$	2.774 mm	2.774 mm
Apéndice de acordes	$a_c$	1.495 mm	1.495 mm
Límite de desviación del ángulo de la hélice	$F_\beta$	0.0110 mm	0.0110 mm
Limitar el descentramiento circunferencial	$F_r$	0.0210 mm	0.0160 mm
Límite de desviación del paso axial	$f_{pt}$	0.0075 mm	0.0070 mm
Límite de desviación del tono básico	$f_{pb}$	0.0070 mm	0.0067 mm
Número equivalente de dientes	$z_v$	247.386 ul	15.462 ul
Diámetro de paso virtual	$d_n$	641.976 mm	40.124 mm
Diámetro exterior virtual	$d_{an}$	645.459 mm	43.606 mm
Diámetro del círculo base virtual	$d_{bn}$	603.261 mm	37.704 mm
Corrección de unidad sin ahusamiento	$x_z$	-5.2764 ul	0.6642 ul
Corrección unitaria sin socavación	$x_p$	-17.3682 ul	-0.1456 ul
Corrección unitaria Socavado permitido	$x_d$	-17.5353 ul	-0.3127 ul
Truncamiento del apéndice	$k$	0.0000 ul	0.0000 ul
Unidad de espesor exterior del diente	$s_a$	0.9556 ul	0.7627 ul

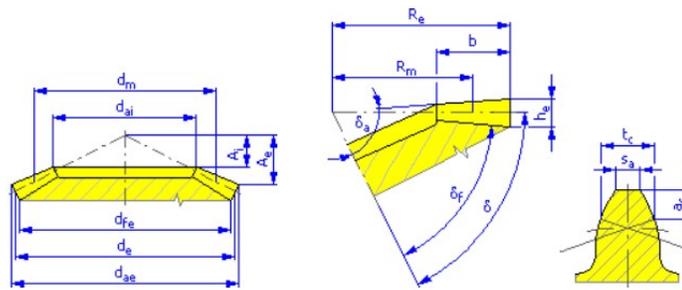


Figura B.1.2: Detonación de engranes hipoides

### B.1.3. Cargas

		Engrane 1	Engrane 2
Poder	P	1.000 kW	0.980 kW
Velocidad	n	1000.00 rpm	4000.00 rpm
Esfuerzo de torsión	T	9.549 N m	2.340 N · m
Eficiencia	$\eta$	0.980 ul	
Fuerza tangencial	$F_t$	182.801 N	
Fuerza normal	$F_n$	232.866 N	
Fuerza radial (dirección 1)	$F_{r1}$	-108.040 N	95.592 N
Fuerza radial (dirección 2)	$F_{r2}$	140.314 N	33.503 N
Fuerza Axial (dirección 1)	$F_{a1}$	95.592 N	-108.040 N
Fuerza Axial (dirección 2)	$F_{a2}$	33.503 N	140.314 N
Velocidad circunferencial	v	5.470 mps	
Velocidad de resonancia	$n_{E1}$	15540,097 rpm	

### B.1.4. Material

		Engrane 1	Engrane 2
		Material de usuario	Material de usuario
Resistencia a la tracción	$S_u$	700 MPa	700 MPa
Fuerza de producción	$S_y$	340 MPa	340 MPa
Módulo de elasticidad	mi	206000 MPa	206000 MPa
El coeficiente de Poisson	$\mu$	0.300 ul	0.300 ul
Límite de fatiga por flexión	$\sigma_{Flim}$	352.0 MPa	352.0 MPa
Límite de fatiga de contacto	$\sigma_{Hlim}$	1140.0 MPa	1140.0 MPa
Dureza en el núcleo del diente	JHV	210 ul	210 ul
Dureza en el lado del diente	VHV	600 ul	600 ul
Número base de ciclos de carga en flexión	$N_{Flim}$	3000000 ul	3000000 ul
Número base de ciclos de carga en contacto	$N_{Hlim}$	100000000 ul	100000000 ul
Exponente de curva de Wohler para flexión	$q_F$	6.0 ul	6.0 ul
Exponente de curva de Wohler para contacto	$q_H$	10.0 ul	10.0 ul
Tipo de tratamiento	tipo	2 ul	2 ul

### B.1.5. Cálculo de Fuerza

#### B.1.5.1. Factores de carga adicional

Factor de aplicación	$K_A$	1.200 ul	
Factor dinámico	$K_{HV}$	1.112 ul	1.112 ul
Factor de carga frontal	$K_{H\beta}$	2.388 ul	2.053 ul
Factor de carga transversal	$K_{H\alpha}$	1.811 ul	1.811 ul
Factor de sobrecarga único	$K_{AS}$	1.000 ul	

#### B.1.5.2. Factores de contacto

Factor de elasticidad	$Z_E$	189.812 ul	
Factor de zona	$Z_H$	2.280 ul	
Factor de relación de contacto	$Z_\epsilon$	0.639 ul	
Factor de engrane cónico	$Z_k$	0.850 ul	
Factor de contacto de un solo par de dientes	$Z_B$	1.000 ul	1.012 ul
Factor de vida	$Z_N$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de lubricante	$Z_L$	0.962 ul	
Factor de rugosidad	$Z_R$	1.000 ul	
Factor de velocidad	$Z_V$	0.981 ul	
Factor de ángulo de hélice	$Z_\beta$	0.905 ul	
Factor de tamaño	$Z_X$	1.000 ul	1.000 ul

#### B.1.5.3. Factores de flexión

Factor de forma	$Y_{Fa}$	8.096 ul	4.734 ul
Factor de corrección de estrés	$Y_{Sa}$	1.436 ul	1.439 ul

Factor de dientes con muescas rechinantes	$Y_{Sag}$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de ángulo de hélice	$Y_{\beta}$	0.750 ul	
Factor de relación de contacto	$Y_{\epsilon}$	0.625 ul	
Factor de engrane cónico	$Y_K$	1.000 ul	
Factor de carga alterna	$Y_A$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de tecnología de producción	$Y_T$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de vida	$Y_N$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de sensibilidad de muesca	$Y_{\delta}$	1.323 ul	1.257 ul
Factor de tamaño	$Y_X$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de superficie de la raíz del diente	$Y_R$	1.000 ul	

#### B.1.5.4. Resultados

Factor de seguridad contra picaduras	$S_H$	3.085 ul	3.085 ul
Factor de seguridad por rotura de dientes	$S_F$	2.149 ul	3.483 ul
Seguridad estática en contacto	$S_{Hst}$	2.730 ul	2.730 ul
Seguridad estática en flexión	$S_{Fst}$	4.060 ul	6.929 ul
Comprobar cálculo	Positivo		

## B.2. Etapa de engranes helicoidales 50-20

Spur Gears Component Generator (Version: 2020 (Build 240168000, 168))

23/09/2020

**Project Info**

**Guide**  
 Design Guide - Center Distance  
 Unit Correction Guide - Usage  
 Type of Load Calculation - Torque calculation for the specified power and speed  
 Type of Strength Calculation - Check Calculation  
 Method of Strength Calculation - ISO 6336:1998

**Common Parameters**

Gear Ratio	i	0.4000 ul
Desired Gear Ratio	i <sub>d</sub>	0.4000 ul
Module	m	2.000 mm
Helix Angle	β	21.3000 deg
Pressure Angle	α	20.0000 deg
Center Distance	a <sub>w</sub>	75.132 mm
Product Center Distance	a	75.132 mm
Total Unit Correction	Σx	0.0000 ul
Circular Pitch	p	6.283 mm
Base Circular Pitch	p <sub>b</sub>	6.282 mm
Operating Pressure Angle	α <sub>w</sub>	20.0000 deg
Tangential Pressure Angle	α <sub>t</sub>	21.3384 deg
Tangential Operating Pressure Angle	α <sub>tw</sub>	21.3384 deg
Base Helix Angle	β <sub>b</sub>	19.9588 deg
Tangential Module	m <sub>t</sub>	2.147 mm
Tangential Circular Pitch	p <sub>t</sub>	6.744 mm
Contact Ratio	E	2.3699 ul
Transverse Contact Ratio	E <sub>t</sub>	1.9202 ul
Overlap Ratio	σ <sub>H</sub>	0.8672 ul
Limit Deviation of Axis Parallelity	V <sub>a</sub>	0.0016 mm
Limit Deviation of Axis Parallelity	V <sub>v</sub>	0.0055 mm

**Gears**

Type of module	Gear 1	Gear 2
Number of Teeth	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>
Unit Correction	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
Pitch Diameter	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>
Outside Diameter	d <sub>a1</sub>	d <sub>a2</sub>
Root Diameter	d <sub>f1</sub>	d <sub>f2</sub>
Base Circle Diameter	d <sub>b1</sub>	d <sub>b2</sub>
Work Pitch Diameter	d <sub>w1</sub>	d <sub>w2</sub>
Facewidth	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>
Facewidth Ratio	β <sub>s</sub>	β <sub>s</sub>
Addendum	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>

Figura B.2.1: Documento de engranes helicoidales

### B.2.1. Parámetros comunes

Relación de transmisión	i	0.4000 ul
Relación de engranajes deseada	i <sub>en</sub>	0.4000 ul
Módulo	m	2.000 milímetros
Ángulo de hélice	β	21.3000 grados
Angulo de PRESION	α	20.0000 grados
Distancia central	a <sub>w</sub>	75.132 mm
Distancia al centro del producto	a	75.132 mm
Corrección de unidad total	Σx	0.0000 ul
Paso circular	p	6.283 mm
Paso circular base	p <sub>tb</sub>	6.282 mm
Ángulo de presión de funcionamiento	α <sub>w</sub>	20.0000 grados
Ángulo de presión tangencial	α <sub>t</sub>	21.3384 grados
Ángulo de presión de funcionamiento tangencial	α <sub>tw</sub>	21.3384 grados
Ángulo de hélice base	β <sub>b</sub>	19.9588 grados
Módulo tangencial	m <sub>t</sub>	2.147 mm
Paso circular tangencial	Pt	6.744 mm
Proporción de contacto	E	2.3699 ul

Relación de contacto transversal	$E_\alpha$	1.5027 ul
Relación de superposición	$E_\beta$	0.8672 ul
Desviación límite de la paralelidad del eje	$f_x$	0.0110 mm
Desviación límite de la paralelidad del eje	$f_y$	0.0055 mm

### B.2.2. Engranés

		Engrane 1	Engrane 2
Tipo de modelo		Componente	Componente
Numero de dientes	$z$	50 ul	20 ul
Corrección unitaria	$x$	0.000 ul	0.000 ul
Diámetro de paso	$d$	107.332 mm	42.933 mm
Diámetro exterior	$d_a$	111.332 mm	46.933 mm
Diámetro de la raíz	$d_f$	102.332 mm	37.933 mm
Diámetro del círculo base	$d_b$	99.974 mm	39.990 mm
Diámetro de paso de trabajo	$d_w$	107.332 mm	42.933 mm
Ancho de cara	$b$	15.000 mm	17.000 mm
Relación de ancho de cara	$br$	0.1398 ul	0.3494 ul
Apéndice	$a^*$	1.0000 ul	1.0000 ul
Despeje	$c^*$	0.2500 ul	0.2500 ul
Filete de raíz	$r_f^*$	0.3500 ul	0.3500 ul
Espesor del diente	$s$	3.142 mm	3.142 ul
Espesor tangencial del diente	$s_t$	3.372 mm	3.372 mm
Espesor de cuerdas	$t_c$	2.774 mm	2.774 mm
Apéndice de acordes	$a_c$	1.495 mm	1.495 mm
Dimensión cordal	$W$	45.995 mm	15.446 mm
Dientes de dimensión cordal	$z_w$	8.000 ul	3.000 ul
Dimensión sobre (entre) cables	$M$	112.365 mm	47.888 mm
Diámetro del cable	$d_M$	3.500 mm	3.500 mm

Límite de desviación del ángulo de la hélice	$F_\beta$	0.0110 mm	0.0110 mm
Limitar el descentramiento circunferencial	$F_r$	0.0210 mm	0.0160 mm
Límite de desviación del paso axial	$f_{pt}$	0.0075 mm	0.0070 mm
Límite de desviación del tono básico	$f_{pb}$	0.0070 mm	0.0066 mm
Numero virtual de dientes	$z_v$	60.743 ul	24.297 ul
Diámetro de paso virtual	$d_n$	121.487 mm	48.595 mm
Diámetro exterior virtual	$d_{an}$	125.487 mm	52.595 mm
Diámetro del círculo base virtual	$d_{bn}$	114.160 mm	45.664 mm
Corrección de unidad sin ahusamiento	$x_z$	-0.5714 ul	0.4166 ul
Corrección unitaria sin socavación	$x_p$	-2.5331 ul	-0.4014 ul
Corrección unitaria Socavado permitido	$x_d$	-2.7031 ul	-0.5714 ul
Truncamiento del apéndice	k	0.0000 ul	0.0000 ul
Unidad de espesor exterior del diente	$s_a$	0.7796 ul	0.7032 ul
Ángulo de presión de la punta	$\alpha_a$	25.0511 grados	30.7278 grados

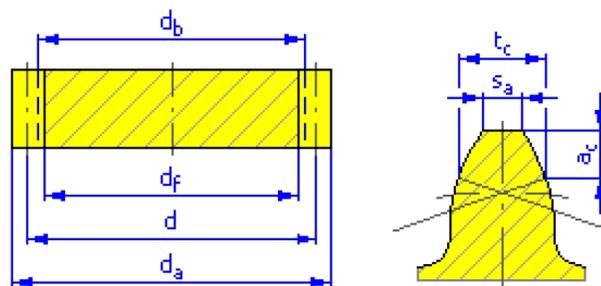


Figura B.2.2: Detonación de engranes helicoidales

### B.2.3. Cargas

		Engrane 1	Engrane 2
Poder	P	1.000 kW	0.980 kW
Velocidad	n	1000.00 rpm	2500.00 rpm
Esfuerzo de torsión	T	9.549 N m	3.743 N m
Eficiencia	$\eta$	0.980 ul	

Fuerza radial	$F_r$	69.513 N
Fuerza tangencial	$F_t$	177.940 N
Fuerza Axial	$F_a$	69.376 N
Fuerza normal	$F_n$	203.243 N
Velocidad circunferencial	$v$	5.620 mps
Velocidad de resonancia	$n_{E1}$	11245.407 rpm

#### B.2.4. Material

		Engrane 1	Engrane 2
		Material de usuario	Material de usuario
Resistencia a la tracción	$S_u$	700 MPa	700 MPa
Fuerza de producción	$S_y$	340 MPa	340 MPa
Módulo de elasticidad	E	206000 MPa	206000 MPa
El coeficiente de Poisson	$\mu$	206000 MPa	206000 MPa
Límite de fatiga por flexión	$\sigma_{Flim}$	352.0 MPa	352.0 MPa
Límite de fatiga de contacto	$\sigma_{Hlim}$	1140.0 MPa	1140.0 MPa
Dureza en el núcleo del diente	JHV	210 ul	210 ul
Dureza en el lado del diente	VHV	600 ul	600 ul
Número base de ciclos de carga en flexión	$N_{Flim}$	3000000 ul	3000000 ul
Número base de ciclos de carga en contacto	$N_{Hlim}$	100000000 ul	100000000 ul
Exponente de curva de Wohler para flexión	$q_F$	6.0 ul	6.0 ul
Exponente de curva de Wohler para contacto	$q_H$	10.0 ul	10.0 ul
Tipo de tratamiento	tipo	2 ul	2 ul

#### B.2.5. Calculo de Fuerza

##### B.2.5.1. Factores de carga adicional

Factor de aplicación	$K_A$	1.200 ul	
Factor dinámico	$K_{HV}$	1.151 ul	1.151 ul

Factor de carga frontal	$K_{H\beta}$	2.218 ul	1.736 ul
Factor de carga transversal	$K_{H\alpha}$	1.680 ul	1.680 ul
Factor de sobrecarga único	$K_{AS}$	1.000 ul	

### B.2.5.2. Factores de contacto

Factor de elasticidad	$Z_E$	189.812 ul	
Factor de zona	$Z_H$	2.355 ul	
Factor de relación de contacto	$Z_\epsilon$	0.829 ul	
Factor de contacto de un solo par de dientes	$Z_B$	1.000 ul	1.012 ul
Factor de vida	$Z_N$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de lubricante	$Z_L$	0.962 ul	
Factor de rugosidad	$Z_R$	1.000 ul	
Factor de velocidad	$Z_V$	0.982 ul	
Factor de ángulo de hélice	$Z_\beta$	0.965 ul	
Factor de tamaño	$Z_X$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de endurecimiento del trabajo	$Z_W$	1.000 ul	

### B.2.5.3. Factores de flexión

Factor de forma	$Y_{Fa}$	2.290 ul	2.671 ul
Factor de corrección de estrés	$Y_{Sa}$	1.754 ul	1.601 ul
Factor de dientes con muescas rechinantes	$Y_{Sag}$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de ángulo de hélice	$Y_\beta$	0.846 ul	
Factor de relación de contacto	$Y_\epsilon$	0.691 ul	
Factor de carga alterna	$Y_A$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de tecnología de producción	$Y_T$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de vida	$Y_N$	1.000 ul	1.000 ul

Factor de sensibilidad de muesca	$Y_{\delta}$	1.225 ul	1.209 ul
Factor de tamaño	$Y_X$	1.000 ul	1.000 ul
Factor de superficie de la raíz del diente	$Y_R$	1.000 ul	

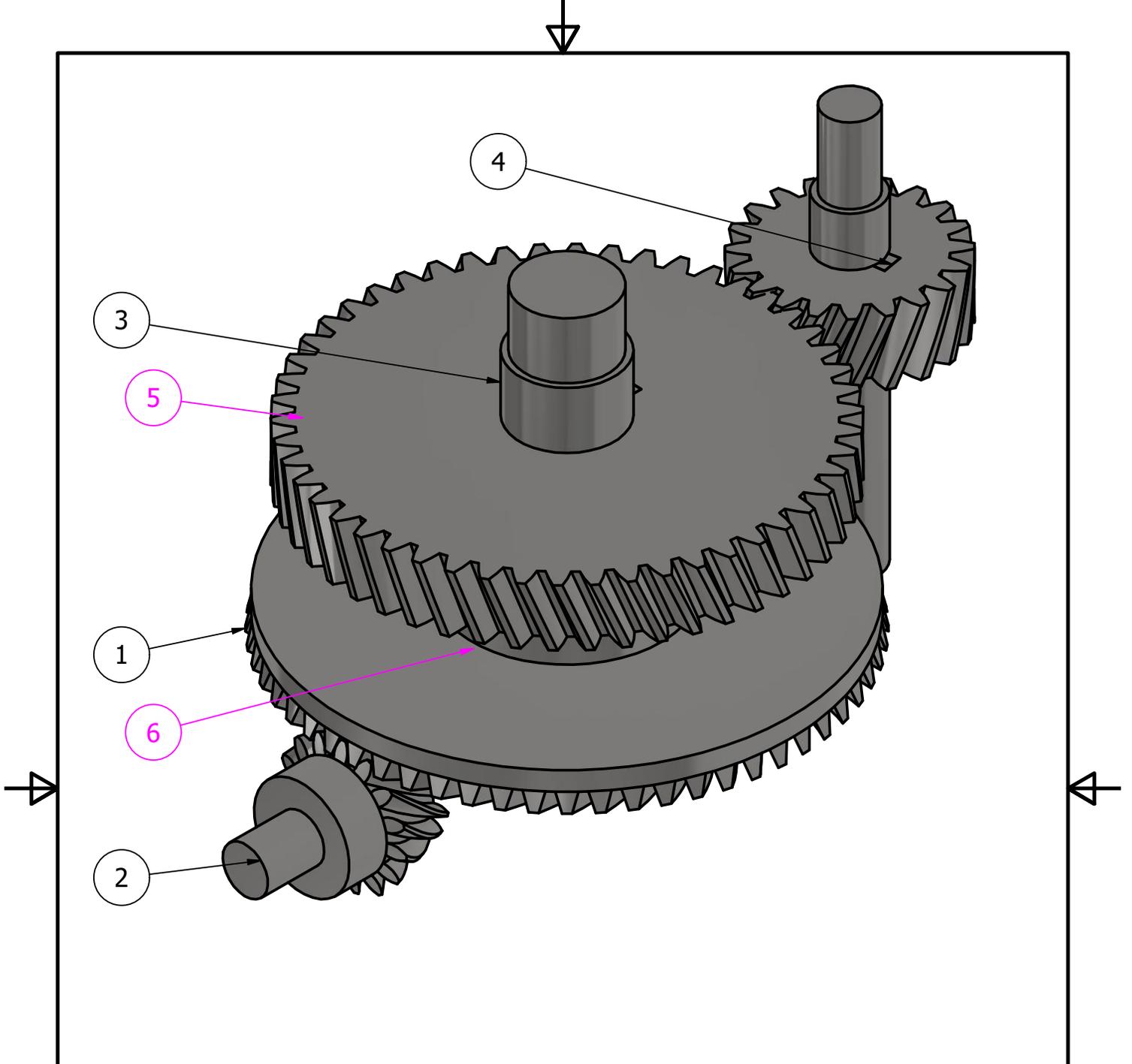
#### B.2.5.4. Resultados

Factor de seguridad contra picaduras	$S_H$	2.133 ul	2.107 ul
Factor de seguridad por rotura de dientes	$S_F$	7.683 ul	8.078 ul
Seguridad estática en contacto	$S_{Hst}$	1.820 ul	1.798 ul
Seguridad estática en flexión	$S_{Fst}$	15.686 ul	16.702 ul
Comprobar cálculo	Positivo		

#### B.2.5.5. Parámetros de área seccionada para la optimización del engrane helicoidal C

Descripción	Operación	Magnitud
Cubo	$1.5D_{eje}$	37.5 mm
Relación de respaldo	$m_B > 1.2$	1.2
Profundidad de trabajo	$h_t$	4.5 mm
Espesor de la orilla	$h_t \times 1.2$	5.4 mm
Diámetro de orilla		91.53mm

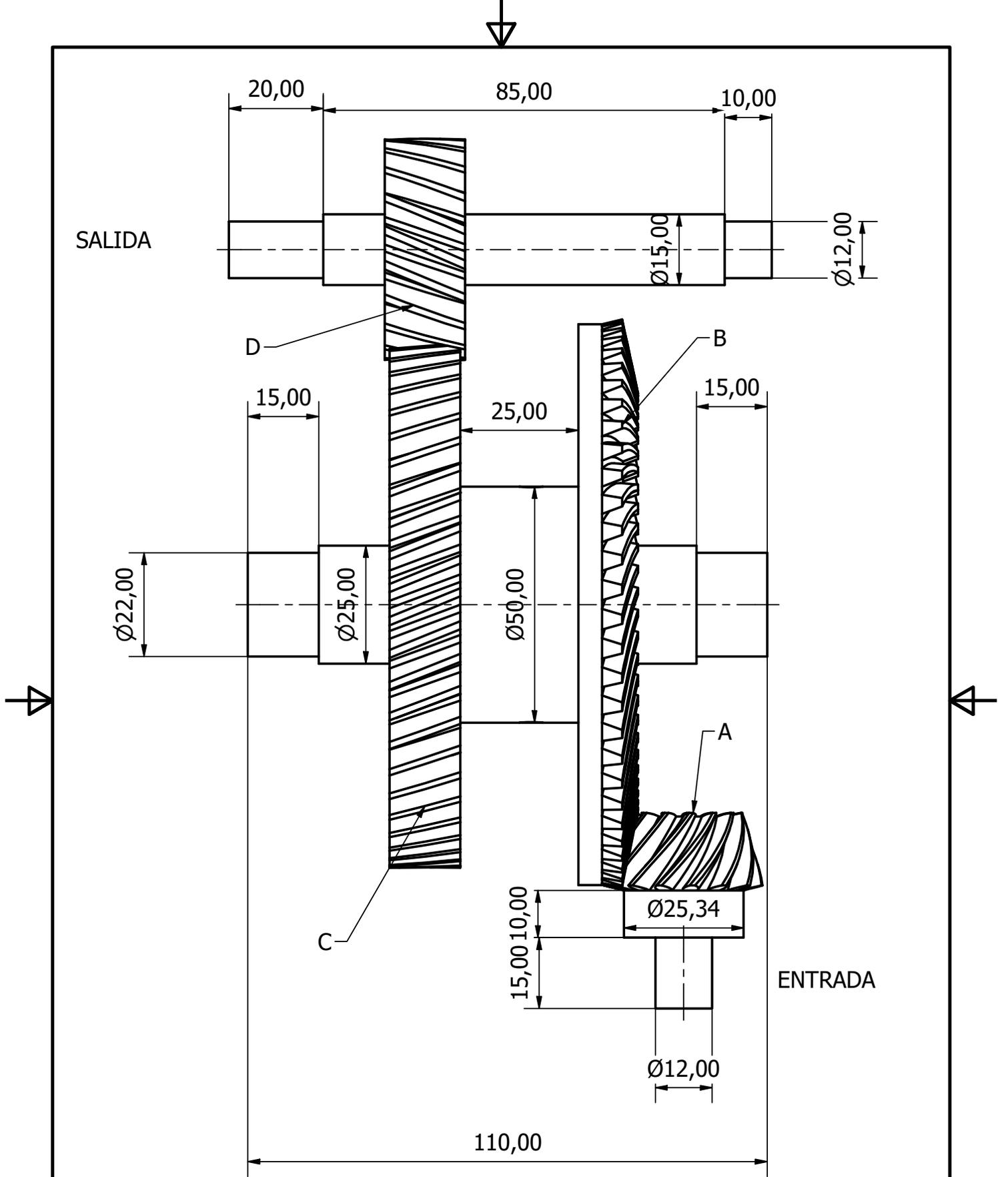
### B.3. Planos del sistema de transmisión de potencia



### LISTA DE PARTES

ITEM	NOMBRE DE PARTES	MATERIAL	DENOTACIÓN
1	Hipoide 60	AISI 1045	Engrane A
2	Hipoide 15	AISI 1045	Engrane B
3	Eje 2	AISI 4140	
4	Eje 3	AISI 4140	
5	Helicoidal 20	AISI 4140	Engrane C
6	Helicoidal 50	AISI 4140	Engrane D

DISEÑO POR <b>Nelson Barreto</b>	REVISADO POR: Diego Calero	ESCALA 1 : 1	Date 18/10/2020
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO		Caja de engranes	
		Ensamble	TAMAÑO A4
		Sheet 1 / 2	



DISEÑO POR <b>Nelson Barreto</b>	REVISADO POR: Diego Calero	ESCALA 1 : 1	Date 18/10/2020
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO		Caja de engranes	
		Dimensiones	TAMAÑO A4
		Sheet 2 / 2	

## **Anexo C**

# **Materiales**

## C.1. Acero AISI 1045 estirado en frío (Matweb®)

### AISI 1045 Steel, cold drawn, high temperature stress relieved, 50-75 mm (2-3 in) round

Categories: [Metal](#); [Ferrous Metal](#); [Carbon Steel](#); [AISI 1000 Series Steel](#); [Medium Carbon Steel](#)

**Material Notes:** Respond to heat treatment, and flame and induction hardening, but not recommended for carburizing or cyaniding. Die forging and hot upsetting are good to excellent. Typical uses include gears, shafts, axles, bolts, studs, and machine parts. AISI cross reference for JIS S45C and KS SM45C.

**Key Words:** AFNOR NF A35-553 XC45, AFNOR NF A35-554 XC48, DIN 1654 1.1192, DIN 1654 Cq45, DIN 17200 1.0503, AFNOR XC42, AFNOR XC42TS, AFNOR XC48TS, AFNOR NF A33-101 AF65C45, AFNOR NF A35-552 XC48H1, UNS G10450, ASTM A29, ASTM A108, ASTM A266 Class 3, ASTM A304, ASTM A311, ASTM A510, ASTM A519, AS 1442 K1045 (Australia), AS 1442 S1045, AS 1443 K1045, AS 1443 S1045, AS 1446 K1045, AS 1446 S1045, ASTM A568, ASTM A576, ASTM A682, ASTM A827, ASTM A830, FED QQ-S-635, FED QQ-S-700, FED QQ-W-461, MIL S-24093, MIL S-3039, BDS 6354 45G2A, BDS 6354 45G2K2, BDS 6354 45G2K3, GB 3078 45 (China), GB 3088 45, GB 699 45, YB 6 45B, DIN 17200 1.1191, DIN 17200 1.1201, DIN 17200 C45, DIN 17200 CK45, DIN 17200 Cm45, DIN 17200 GS-CK45, DIN 17212 1.1193, FED QQ-S-635 (C1045), FED QQ-S-700 (C1045), SAE J403, SAE J412, SAE J414, DIN 1.1191, JIS S 48 C, SS14 1672 (Sweden), MIL S-46070, SAE J1397, SAE J403, SAE J412, BS 970 Part 1 O60A47 (U.K), BS 970 Part 1 O80A47, BS 970 Part 1 O80M46, NBN 253-02 C45-3, NBN 253-06 C46, BDS 3492 45LI (Bulgaria), BDS 3492 45LII, BDS 3492 45LIII, BDS 5785 45, BDS 6354 45G2, ONORM M3108 C45SW (Austria), ONORM M3110 RC45, ONORM M3161 C45, NBN 253-02 C45-1 (Belgium), NBN 253-02 C45-2

**Vendors:** No vendors are listed for this material. Please [click here](#) if you are a supplier and would like information on how to add your listing to this material.

Physical Properties	Metric	English	Comments
Density	7.87 g/cc	0.284 lb/in <sup>3</sup>	Typical for steel.
Mechanical Properties	Metric	English	Comments
Hardness, Brinell	163	163	
Hardness, Knoop	184	184	Converted from Brinell
Hardness, Rockwell B	84	84	Converted from Brinell
Hardness, Vickers	170	170	Converted from Brinell
Tensile Strength, Ultimate	585 MPa	84800 psi	
Tensile Strength, Yield	450 MPa	65300 psi	
Elongation at Break	12 %	12 %	in 50 mm
Reduction of Area	35 %	35 %	
Modulus of Elasticity	206 GPa	29900 ksi	
Bulk Modulus	163 GPa	23600 ksi	Estimated from elastic modulus
Poissons Ratio	0.29	0.29	Typical for steel
Shear Modulus	80.0 GPa	11600 ksi	Estimated from elastic modulus
Electrical Properties	Metric	English	Comments
Electrical Resistivity 	0.0000162 ohm-cm @Temperature 0.000 °C	0.0000162 ohm-cm @Temperature 32.0 °F	annealed specimen
	0.0000223 ohm-cm @Temperature 100 °C	0.0000223 ohm-cm @Temperature 212 °F	annealed specimen
Thermal Properties	Metric	English	Comments
CTE, linear 	11.5 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 100 °C	6.39 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 212 °F	
	12.2 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 200 °C	6.78 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 392 °F	
	13.0 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 300 °C	7.22 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 572 °F	
	13.7 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 400 °C	7.61 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 752 °F	
	14.0 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 500 °C	7.78 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 932 °F	
	14.6 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 600 °C	8.11 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 1110 °F	
	15.1 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 700 °C	8.39 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 1290 °F	
Specific Heat Capacity	0.486 J/g-°C @Temperature >=100 °C	0.116 BTU/lb-°F @Temperature >=212 °F	annealed
Thermal Conductivity	51.9 W/m-K	360 BTU-in/hr-ft <sup>2</sup> -°F	Typical steel
Component Elements Properties	Metric	English	Comments
Carbon, C	0.42 - 0.50 %	0.42 - 0.50 %	
Iron, Fe	98.51 - 98.98 %	98.51 - 98.98 %	As remainder
Manganese, Mn	0.60 - 0.90 %	0.60 - 0.90 %	
Phosphorus, P	<= 0.040 %	<= 0.040 %	
Sulfur, S	<= 0.050 %	<= 0.050 %	

[References](#) for this datasheet.

Some of the values displayed above may have been converted from their original units and/or rounded in order to display the information in a consistent format. Users requiring more precise data for scientific or

Figura C.1.1: Datos del Acero AISI 1045 estirado en frío. Obtenido de Matweb®, [38].

## C.2. Acero AISI 4140 enfriado en aceite (Matweb®)

### AISI 4140 Steel, oil quenched, 13 mm (0.5 in.) round (845°C (1550°F) quench, 595°C (1100°F) temper)

Categories: [Metal](#); [Ferrous Metal](#); [Alloy Steel](#); [AISI 4000 Series Steel](#); [Low Alloy Steel](#); [Carbon Steel](#); [Medium Carbon Steel](#)

**Material Notes:** As quenched hardness after oil quenching: Surface - 57 HRC, 1/2 radius - 56 HRC; Center - 55 HRC

**Key Words:** ASTM A322, ASTM A331, ASTM A505, ASTM A519, ASTM A646, B.S. 708 A 42 (UK), B.S. 708 M 40 (UK), B.S. 709 M 40 (UK), JIS SCM 4 H, JIS SCM 4, JIS SCM440, SS14 2244 (Sweden), MIL SPEC MIL-S-16974, SAE J404, SAE J412, SAE J770, DIN 1.7225, UNS G41400, AMS 6381, AMS 6382, AMS 6390, AMS 6395, IS 1570 40Cr1Mo28, IS 4367 40Cr1Mo28, IS 5517 40Cr1Mo28

**Vendors:** No vendors are listed for this material. Please [click here](#) if you are a supplier and would like information on how to add your listing to this material.

Physical Properties	Metric	English	Comments
Density	7.85 g/cc	0.284 lb/in <sup>3</sup>	
Mechanical Properties	Metric	English	Comments
Hardness, Brinell	321	321	
Hardness, Knoop	348	348	Converted from Brinell
Hardness, Rockwell B	99	99	Converted from Brinell
Hardness, Rockwell C	35	35	Converted from Brinell
Hardness, Vickers	339	339	Converted from Brinell
Tensile Strength, Ultimate	1090 MPa	158000 psi	
Tensile Strength, Yield	1025 MPa	148700 psi	
Elongation at Break	18.1 %	18.1 %	in 50 mm
Reduction of Area	59.4 %	59.4 %	
Modulus of Elasticity	205 GPa	29700 ksi	Typical for steel
Bulk Modulus	160 GPa	23200 ksi	Typical for steel
Poissons Ratio	0.29	0.29	Calculated
Machinability	65 %	65 %	Based on AISI 1212 as 100% machinability.
Shear Modulus	80.0 GPa	11600 ksi	Typical for steel.
Electrical Properties	Metric	English	Comments
Electrical Resistivity <a href="#">[i]</a>	0.0000220 ohm-cm @Temperature 20.0 °C	0.0000220 ohm-cm @Temperature 68.0 °F	specimen hardened and tempered
	0.0000263 ohm-cm @Temperature 100 °C	0.0000263 ohm-cm @Temperature 212 °F	specimen hardened and tempered
	0.0000326 ohm-cm @Temperature 200 °C	0.0000326 ohm-cm @Temperature 392 °F	specimen hardened and tempered
	0.0000475 ohm-cm @Temperature 400 °C	0.0000475 ohm-cm @Temperature 752 °F	specimen hardened and tempered
	0.0000646 ohm-cm @Temperature 600 °C	0.0000646 ohm-cm @Temperature 1110 °F	specimen hardened and tempered
Thermal Properties	Metric	English	Comments
CTE, linear <a href="#">[i]</a>	12.2 µm/m-°C @Temperature 0.000 - 100 °C	6.78 µin/in-°F @Temperature 32.0 - 212 °F	
	13.7 µm/m-°C @Temperature 20.0 - 400 °C	7.61 µin/in-°F @Temperature 68.0 - 752 °F	
	14.6 µm/m-°C @Temperature 20.0 - 600 °C	8.11 µin/in-°F @Temperature 68.0 - 1110 °F	
Specific Heat Capacity <a href="#">[i]</a>	0.473 J/g-°C @Temperature 150 - 200 °C	0.113 BTU/lb-°F @Temperature 302 - 392 °F	
	0.519 J/g-°C @Temperature 350 - 400 °C	0.124 BTU/lb-°F @Temperature 662 - 752 °F	
	0.561 J/g-°C @Temperature 550 - 600 °C	0.134 BTU/lb-°F @Temperature 1020 - 1110 °F	
Thermal Conductivity <a href="#">[i]</a>	33.0 W/m-K @Temperature 600 °C	229 BTU-in/hr-ft <sup>2</sup> -°F @Temperature 1110 °F	
	37.7 W/m-K @Temperature 400 °C	262 BTU-in/hr-ft <sup>2</sup> -°F @Temperature 752 °F	
	42.2 W/m-K @Temperature 200 °C	293 BTU-in/hr-ft <sup>2</sup> -°F @Temperature 392 °F	
	42.6 W/m-K @Temperature 100 °C	296 BTU-in/hr-ft <sup>2</sup> -°F @Temperature 212 °F	
Component Elements Properties	Metric	English	Comments
Carbon, C	0.38 - 0.43 %	0.38 - 0.43 %	
Chromium, Cr	0.80 - 1.1 %	0.80 - 1.1 %	
Iron, Fe	96.785 - 97.77 %	96.785 - 97.77 %	As remainder
Manganese, Mn	0.75 - 1.0 %	0.75 - 1.0 %	
Molybdenum, Mo	0.15 - 0.25 %	0.15 - 0.25 %	

Figura C.2.1: Datos del Acero AISI 4140 enfriado en aceite. Obtenido de Matweb®, [38].

## **Anexo D**

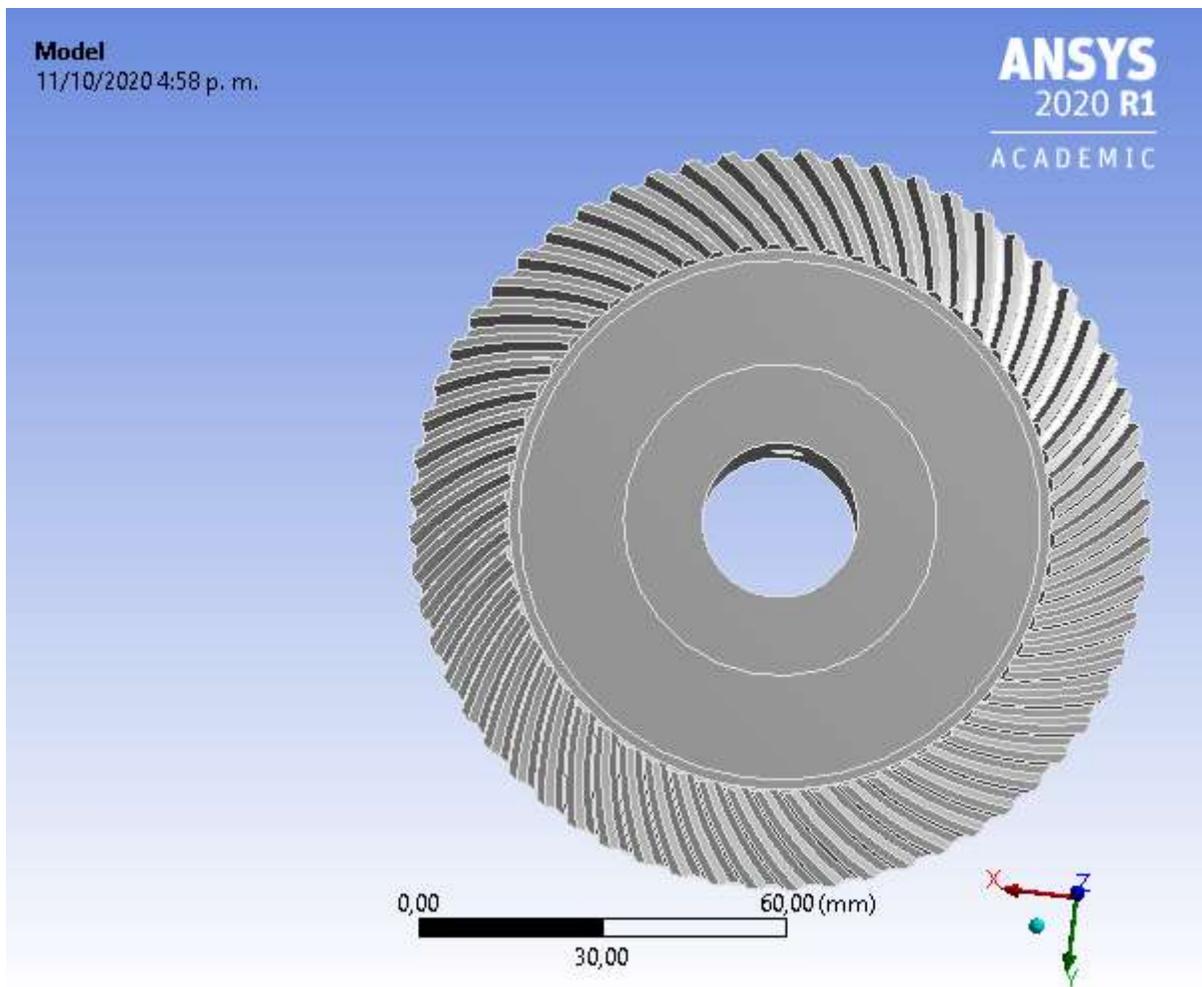
# **Resultados de la optimización topológica en Ansys®**

### **D.1. Engrane hipoidal de 60 dientes**



# Project

First Saved	Friday, October 9, 2020
Last Saved	Sunday, October 11, 2020
Product Version	2020 R1
Save Project Before Solution	No
Save Project After Solution	No



# Topology Optimization (D5)

**TABLE 23**  
**Model (B4, C4, D4) > Analysis**

Object Name	<i>Topology Optimization (D5)</i>
State	Solved
<b>Definition</b>	
Physics Type	Structural
Analysis Type	Topology Optimization
Solver Target	Mechanical APDL
<b>Options</b>	
Generate Input Only	No

**TABLE 24**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Analysis Settings**

Object Name	<i>Analysis Settings</i>
State	Fully Defined
<b>Reload Volume Analysis</b>	
Reload Volume Fraction	Off
<b>Definition</b>	
Maximum Number Of Iterations	500,
Minimum Normalized Density	1,e-003
Convergence Accuracy	0,1 %
Penalty Factor (Stiffness)	3,
Region of Manufacturing Constraint	Include Exclusions
Region of Min Member Size	Exclude Exclusions
Region of AM Overhang Constraint	Exclude Exclusions
<b>Solver Controls</b>	
Solver Type	Program Controlled
<b>Output Controls</b>	
Store Results At	All Iterations
<b>Analysis Data Management</b>	
Solver Files Directory	D:\Biblioteca\Documentos\PRO-GRA NELSON\Simulacion\Analisis de topografia de engrene hipoidal seccionado2_files\dp0\SYS-2\MECH\
Future Analysis	None
Scratch Solver Files Directory	
Save MAPDL db	No
Delete Unneeded Files	Yes
Solver Units	Active System

Solver Unit System	nmm
Max Num Of Intermediate Files	All Iterations

**TABLE 25**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Optimization Region**

Object Name	<i>Optimization Region</i>
State	Fully Defined
<b>Design Region</b>	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	All Bodies
<b>Exclusion Region</b>	
Define By	Geometry Selection
Geometry	370 Faces
<b>Optimization Option</b>	
Optimization Type	Topology Optimization - Density Based

**TABLE 26**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Objective**

Object Name	<i>Objective</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Suppressed	No

**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Objective**

Response Type	Goal	Criterion	Formulation	Environment Name	Weight	Multiple Sets	Start Step	End Step	Step	Start Mode	End Mode	Mode
Compliance	Minimize	N/A	Program Controlled	Static Structural	1	Enabled	1	1	1	N/A	N/A	N/A
Frequency	Maximize		N/A	Modal		Disabled	N/A	N/A	N/A			1

**TABLE 27**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Response Constraint**

Object Name	<i>Response Constraint</i>	<i>Manufacturing Constraint</i>
State	Fully Defined	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Optimization Region	
Optimization Region Selection	Optimization Region	
<b>Definition</b>		
Type	Response Constraint	Manufacturing Constraint
Response	Mass	
Define By	Constant	
Percent to Retain	78 %	
Suppressed	No	
Subtype		Pull Out Direction
<b>Location and Orientation</b>		
Coordinate System		Coordinate System 2
Axis		Z Axis
Direction		Both Directions

## Solution (D6)

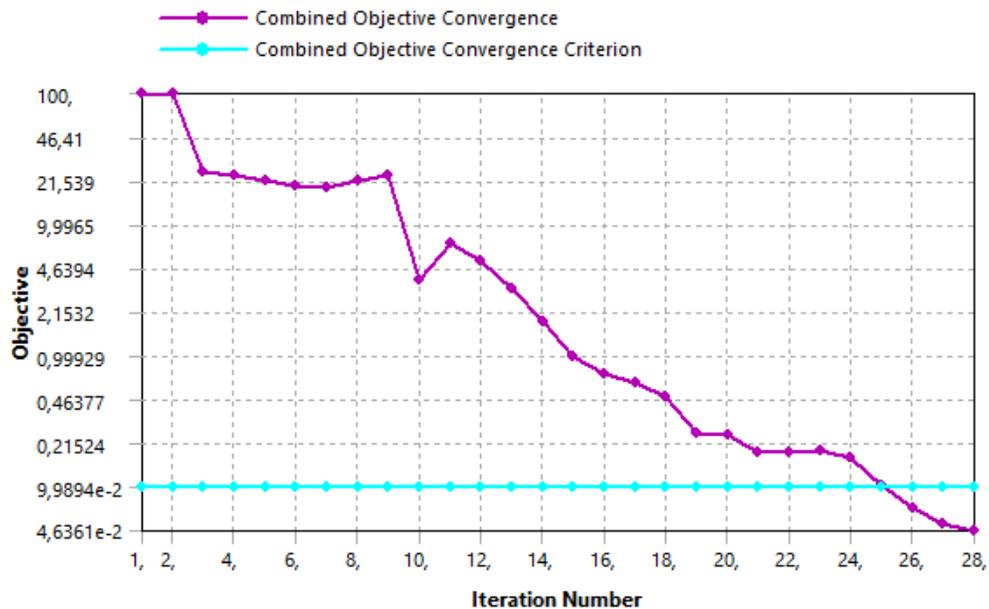
**TABLE 28**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution

Object Name	<i>Solution (D6)</i>
State	Solved
<b>Information</b>	
Status	Done
MAPDL Elapsed Time	3 m 40 s
MAPDL Memory Used	793, MB
MAPDL Result File Size	405,45 KB
<b>Post Processing</b>	
Export Topology (STL file)	Yes
-- Topology Result	Topology Density
<b>Definition</b>	
Environment Selection List	B5, C5

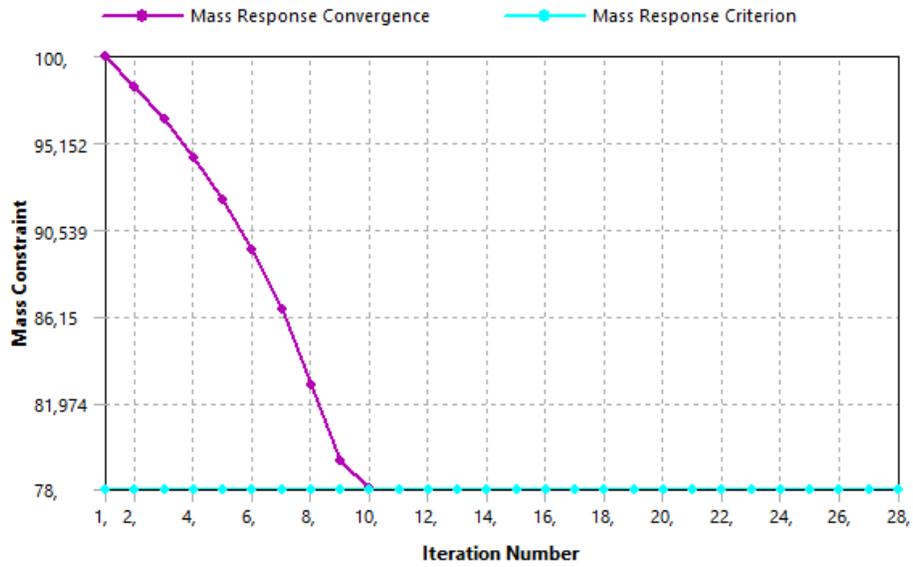
**TABLE 29**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information

Object Name	<i>Solution Information</i>
State	Solved
<b>Solution Information</b>	
Solution Output	Objective & Mass Response Convergence
Update Interval	2,5 s
Display Points	All

**FIGURE 5**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information



**FIGURE 6**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information**



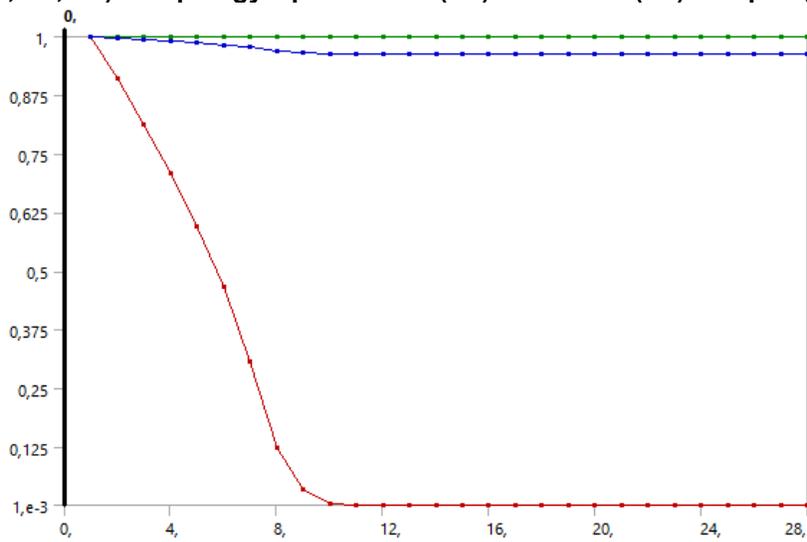
**TABLE 30**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information > Results**

Object Name	<i>Topology Density Tracker</i>
State	Solved
<b>Scope</b>	
Scoping Method	Optimization Region
Optimization Region	Optimization Region
<b>Definition</b>	
Type	Topology Density Tracker
By	Iteration
Iteration	Last
Retained Threshold	0,5
Suppressed	No
<b>Results</b>	
Minimum	1,e-003
Maximum	1,
Average	0,96205
<b>Visibility</b>	
Show Optimized Region	Retained Region
<b>Information</b>	
Iteration Number	28

**TABLE 31**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Results**

Object Name	Topology Density	Topology Elemental Density
State	Solved	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Optimization Region	
Optimization Region	Optimization Region	
<b>Definition</b>		
Type	Topology Density	Topology Elemental Density
By	Iteration	
Iteration	Last	
Retained Threshold	0,5	
Exclusions Participation	Yes	
Calculate Time History	Yes	
Suppressed	No	
<b>Results</b>		
Minimum	1,e-003	
Maximum	1,	
Average	0,96205	0,95918
Original Volume	1,3488e+005 mm <sup>3</sup>	
Final Volume	1,2616e+005 mm <sup>3</sup>	
Percent Volume of Original	93,53	
Original Mass	1,0588 kg	
Final Mass	0,99033 kg	
Percent Mass of Original	93,53	
<b>Visibility</b>		
Show Optimized Region	Retained Region	
<b>Information</b>		
Iteration Number	28	

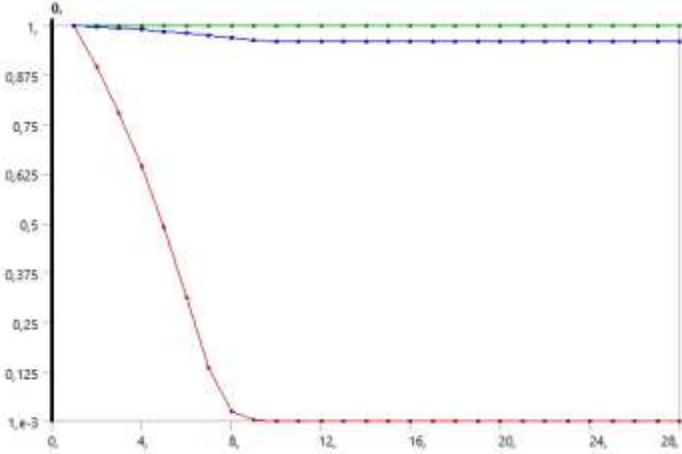
**FIGURE 7**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Density**



**TABLE 32**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Density**

Iteration	Minimum	Maximum	Average
1,	1,		1,
2,	0,91165		0,99713
3,	0,81452		0,99395
4,	0,71025		0,9905
5,	0,59557		0,98663
6,	0,46597		0,98221
7,	0,30796		0,97708
8,	0,12388		0,97085
9,	3,3851e-002		0,96489
10,	2,7696e-003		0,96263
11,			0,96239
12,			0,96227
13,			0,96224
14,			0,96221
15,		1,	0,96219
16,			0,96217
17,			0,96215
18,			0,96213
19,			0,96211
20,	1,e-003		0,9621
21,			0,96208
22,			0,96207
23,			0,96205
24,			
25,			0,96204
26,			
27,			
28,			0,96205

**FIGURE 8**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Elemental Density**



**TABLE 33**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Elemental Density**

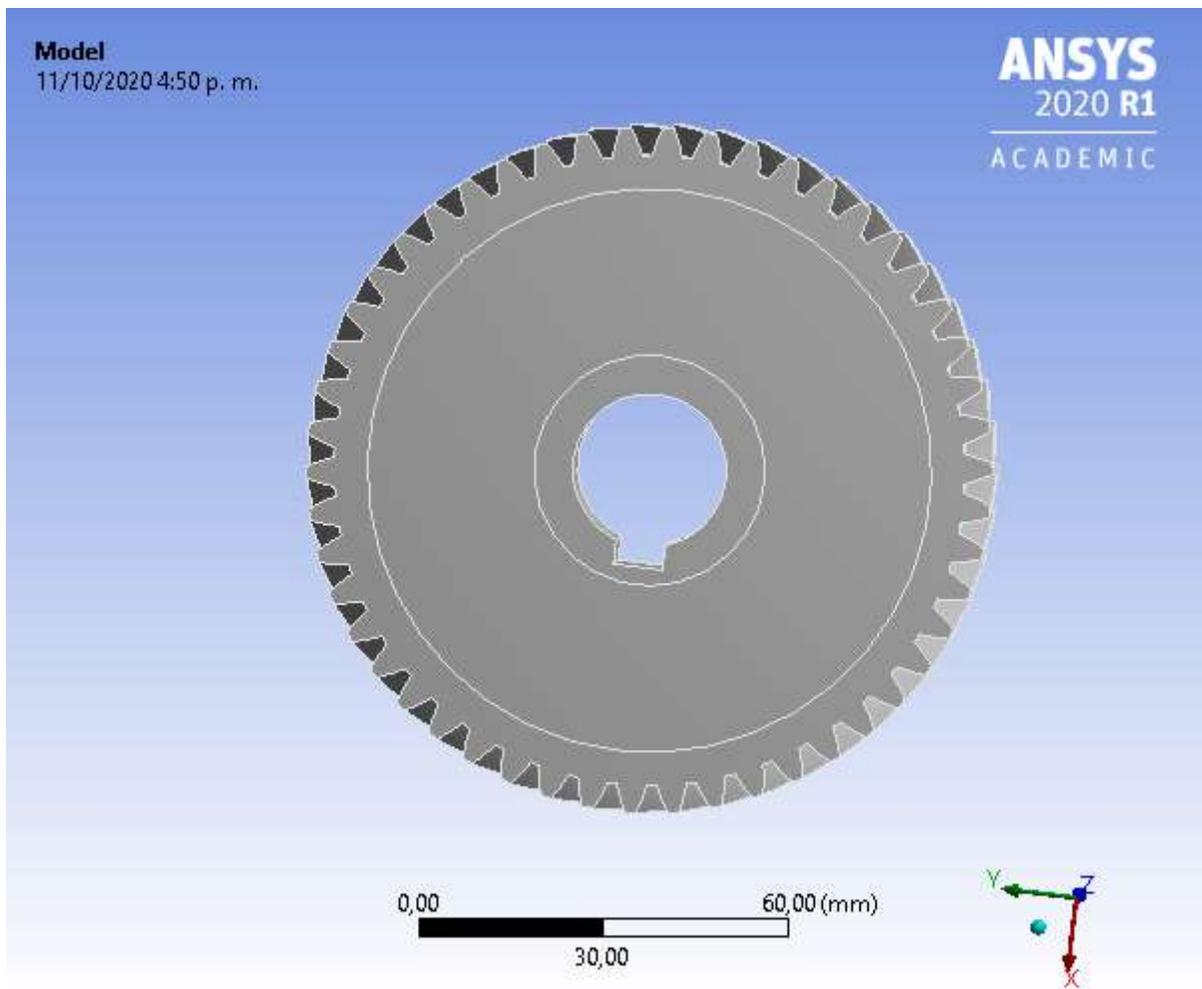
Iteration	Minimum	Maximum	Average
1,	1,		1,
2,	0,89688		0,99691
3,	0,77832		0,9935
4,	0,64523		0,98977
5,	0,49265		0,9856
6,	0,31359		0,98083
7,	0,13485		0,97529
8,	2,474e-002		0,96856
9,	3,0685e-003		0,96214
10,			0,95971
11,			0,95948
12,			0,95935
13,			0,95934
14,		1,	0,95933
15,			0,95932
16,			
17,			0,9593
18,			0,95929
19,	1,e-003		0,95927
20,			0,95925
21,			0,95924
22,			0,95922
23,			0,9592
24,			0,95919
25,			
26,			
27,			0,95918
28,			

## **D.2. Engrane helicoidal de 50 dientes**



# Project

First Saved	Saturday, October 10, 2020
Last Saved	Sunday, October 11, 2020
Product Version	2020 R1
Save Project Before Solution	No
Save Project After Solution	No



# Topology Optimization (D5)

**TABLE 23**  
**Model (B4, C4, D4) > Analysis**

Object Name	<i>Topology Optimization (D5)</i>
State	Solved
<b>Definition</b>	
Physics Type	Structural
Analysis Type	Topology Optimization
Solver Target	Mechanical APDL
<b>Options</b>	
Generate Input Only	No

**TABLE 24**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Analysis Settings**

Object Name	<i>Analysis Settings</i>
State	Fully Defined
<b>Reload Volume Analysis</b>	
Reload Volume Fraction	Off
<b>Definition</b>	
Maximum Number Of Iterations	500,
Minimum Normalized Density	1,e-003
Convergence Accuracy	0,1 %
Penalty Factor (Stiffness)	3,
Region of Manufacturing Constraint	Include Exclusions
Region of Min Member Size	Exclude Exclusions
Region of AM Overhang Constraint	Exclude Exclusions
<b>Solver Controls</b>	
Solver Type	Program Controlled
<b>Output Controls</b>	
Store Results At	All Iterations
<b>Analysis Data Management</b>	
Solver Files Directory	D:\Biblioteca\Documentos\PRO-GRA NELSON\Simulacion\Analisis de topografia de engrane helicoidal seccionado2_files\dp0\SYS-2\MECH\
Future Analysis	None
Scratch Solver Files Directory	
Save MAPDL db	No
Delete Unneeded Files	Yes
Solver Units	Active System

Solver Unit System	nmm
Max Num Of Intermediate Files	All Iterations

**TABLE 25**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Optimization Region**

Object Name	<i>Optimization Region</i>
State	Fully Defined
<b>Design Region</b>	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	All Bodies
<b>Exclusion Region</b>	
Define By	Geometry Selection
Geometry	208 Faces
<b>Optimization Option</b>	
Optimization Type	Topology Optimization - Density Based

**TABLE 26**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Objective**

Object Name	<i>Objective</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Suppressed	No

**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Objective**

Response Type	Goal	Criterion	Formulation	Environment Name	Weight	Multiple Sets	Start Step	End Step	Step	Start Mode	End Mode	Mode
Compliance	Minimize	N/A	Program Controlled	Static Structural	1	Enabled	1	1	1	N/A	N/A	N/A
Frequency	Maximize		N/A	Modal		Disabled	N/A	N/A	N/A			1

**TABLE 27**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Response Constraint**

Object Name	<i>Response Constraint</i>	<i>Manufacturing Constraint</i>
State	Fully Defined	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Optimization Region	
Optimization Region Selection	Optimization Region	
<b>Definition</b>		
Type	Response Constraint	Manufacturing Constraint
Response	Mass	
Define By	Constant	
Percent to Retain	65 %	
Suppressed	No	
Subtype		Pull Out Direction
<b>Location and Orientation</b>		
Coordinate System		Coordinate System
Axis		Z Axis
Direction		Both Directions

## Solution (D6)

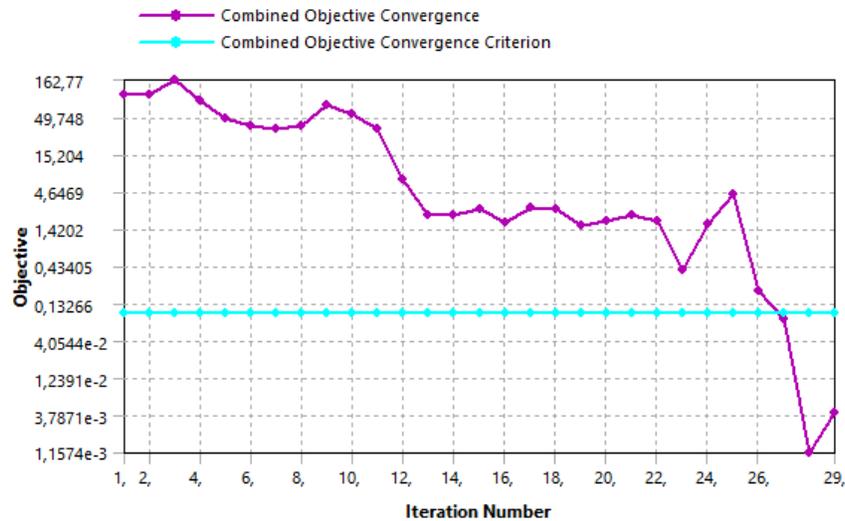
**TABLE 28**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution

Object Name	<i>Solution (D6)</i>
State	Solved
<b>Information</b>	
Status	Done
MAPDL Elapsed Time	4 m 29 s
MAPDL Memory Used	646, MB
MAPDL Result File Size	339,1 KB
<b>Post Processing</b>	
Export Topology (STL file)	Yes
-- Topology Result	Topology Density
<b>Definition</b>	
Environment Selection List	B5, C5

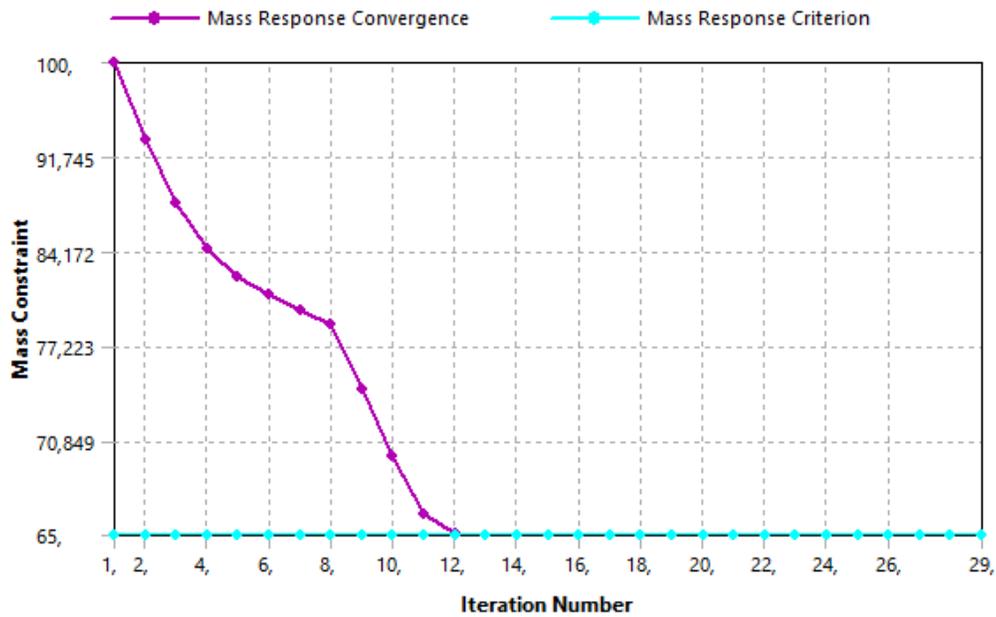
**TABLE 29**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information

Object Name	<i>Solution Information</i>
State	Solved
<b>Solution Information</b>	
Solution Output	Objective & Mass Response Convergence
Update Interval	2,5 s
Display Points	All

**FIGURE 5**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information



**FIGURE 6**  
Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information



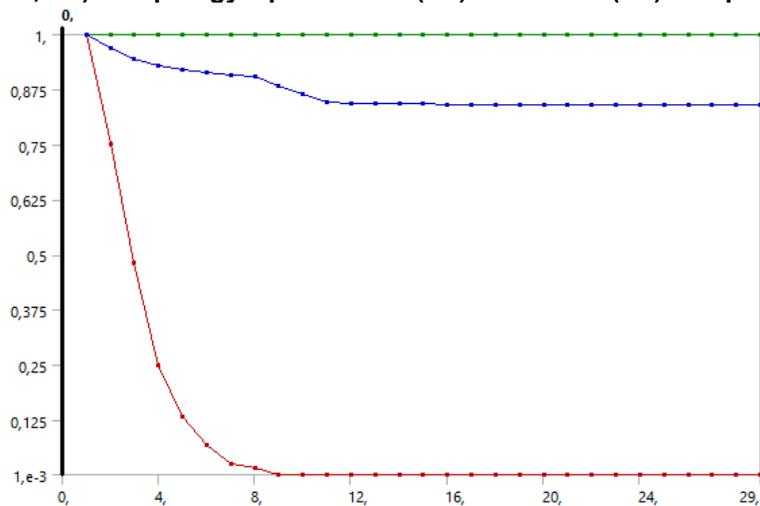
**TABLE 30**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Solution Information > Results**

Object Name	<i>Topology Density Tracker</i>
State	Solved
<b>Scope</b>	
Scoping Method	Optimization Region
Optimization Region	Optimization Region
<b>Definition</b>	
Type	Topology Density Tracker
By	Iteration
Iteration	Last
Retained Threshold	0,5
Suppressed	No
<b>Results</b>	
Minimum	1,e-003
Maximum	1,
Average	0,84093
<b>Visibility</b>	
Show Optimized Region	Retained Region
<b>Information</b>	
Iteration Number	29

**TABLE 31**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Results**

Object Name	Topology Density	Topology Elemental Density
State	Solved	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Optimization Region	
Optimization Region	Optimization Region	
<b>Definition</b>		
Type	Topology Density	Topology Elemental Density
By	Iteration	
Iteration	Last	
Retained Threshold	0,5	
Exclusions Participation	Yes	
Calculate Time History	Yes	
Suppressed	No	
<b>Results</b>		
Minimum	1,e-003	
Maximum	1,	
Average	0,84093	0,82545
Original Volume	1,2725e+005 mm <sup>3</sup>	
Final Volume	1,0293e+005 mm <sup>3</sup>	
Percent Volume of Original	80,882	
Original Mass	0,99895 kg	
Final Mass	0,80798 kg	
Percent Mass of Original	80,882	
<b>Visibility</b>		
Show Optimized Region	Retained Region	
<b>Information</b>		
Iteration Number	29	

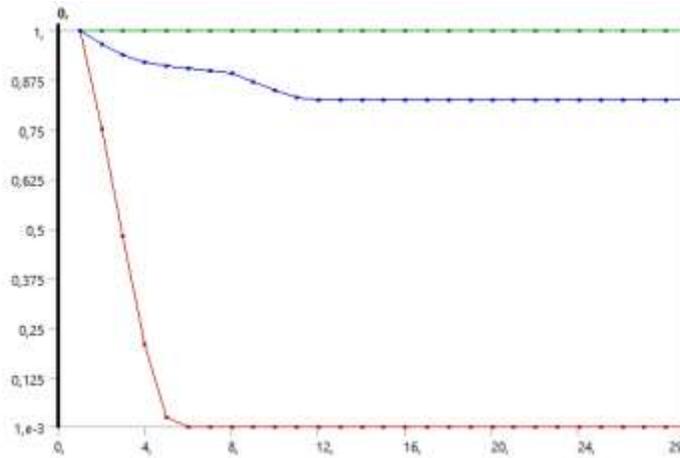
**FIGURE 7**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Density**



**TABLE 32**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Density**

Iteration	Minimum	Maximum	Average
1,	1,		1,
2,	0,75275		0,96901
3,	0,48333		0,94519
4,	0,24793		0,92879
5,	0,13223		0,91947
6,	6,9878e-002		0,91352
7,	2,5048e-002		0,90849
8,	1,5284e-002		0,90409
9,			0,88338
10,			0,86413
11,			0,84819
12,			0,84319
13,			0,84226
14,			0,84256
15,		1,	0,84221
16,			0,84214
17,			0,84209
18,			0,84181
19,	1,e-003		0,84194
20,			0,84159
21,			0,8415
22,			0,84114
23,			0,84127
24,			0,84079
25,			0,84094
26,			
27,			0,84093
28,			
29,			

**FIGURE 8**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Elemental Density**

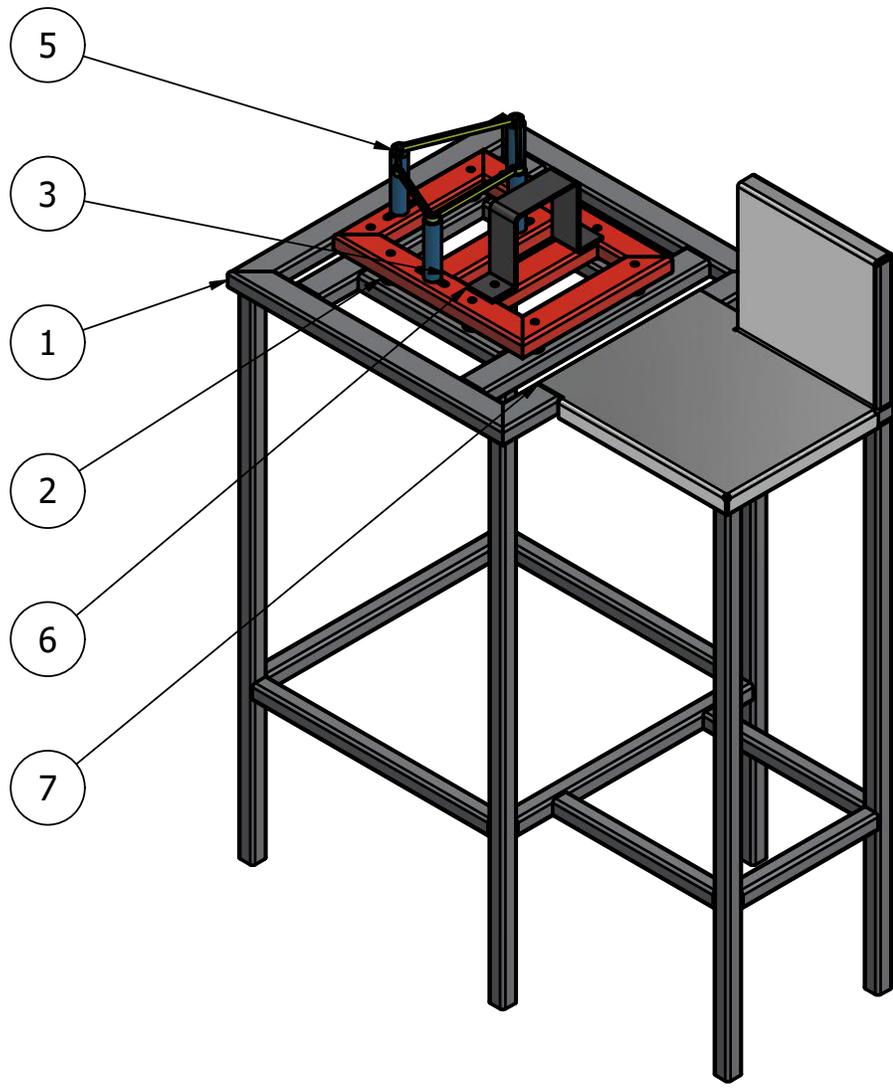


**TABLE 33**  
**Model (B4, C4, D4) > Topology Optimization (D5) > Solution (D6) > Topology Elemental Density**

Iteration	Minimum	Maximum	Average
1,	1,		1,
2,	0,75275		0,9659
3,	0,48077		0,93965
4,	0,20881		0,92151
5,	2,6307e-002		0,91112
6,			0,90448
7,			0,89887
8,			0,89398
9,			0,87088
10,			0,8495
11,			0,83174
12,			0,82627
13,			0,8252
14,			0,82572
15,		1,	0,8253
16,			0,82558
17,			0,82551
18,	1,e-003		0,82571
19,			0,8256
20,			0,82562
21,			0,82544
22,			0,82567
23,			0,82525
24,			
25,			
26,			
27,			0,82545
28,			
29,			

## **Anexo E**

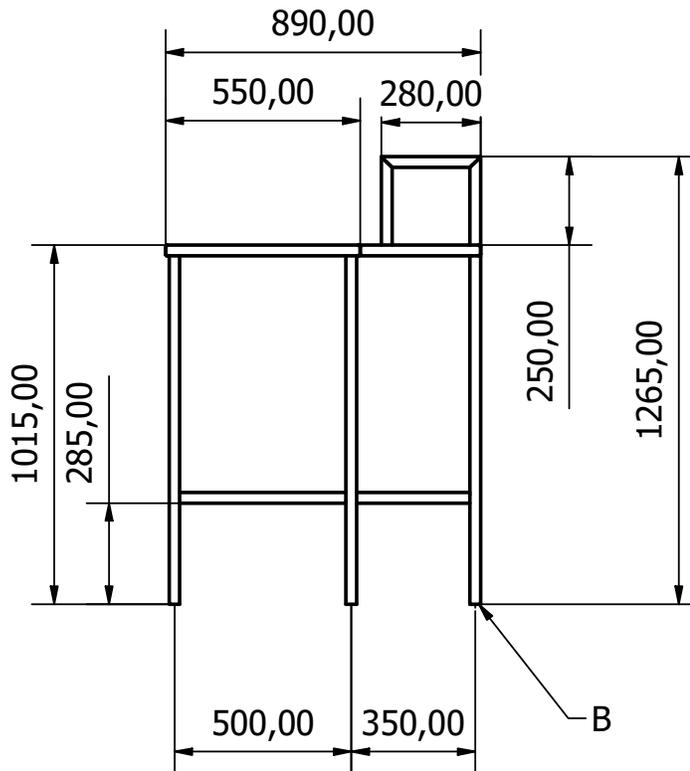
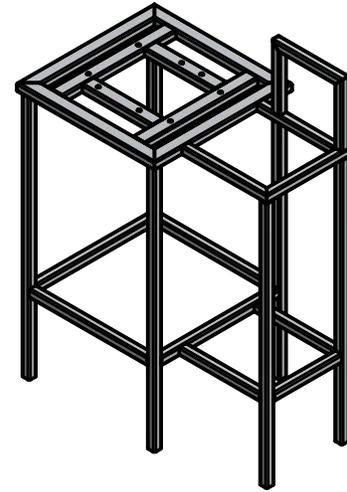
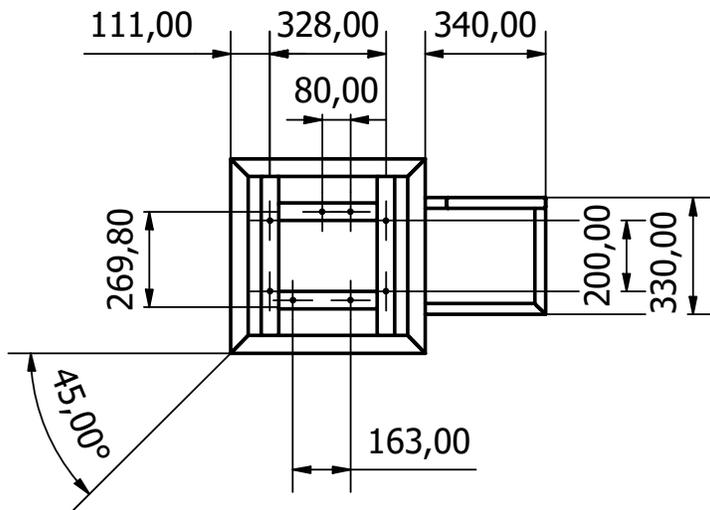
# **Planos de soporte del sistema de medición**



PARTS LIST

ITEM	CANTIDAD	NOMBRE DE PARTE
1	1	Estructura del banco
2	8	Cojinete de goma
3	1	Base
4	4	Extensor
5	1	Representación de caja de engranes
6	1	Soporte de motor
7	1	Chapa

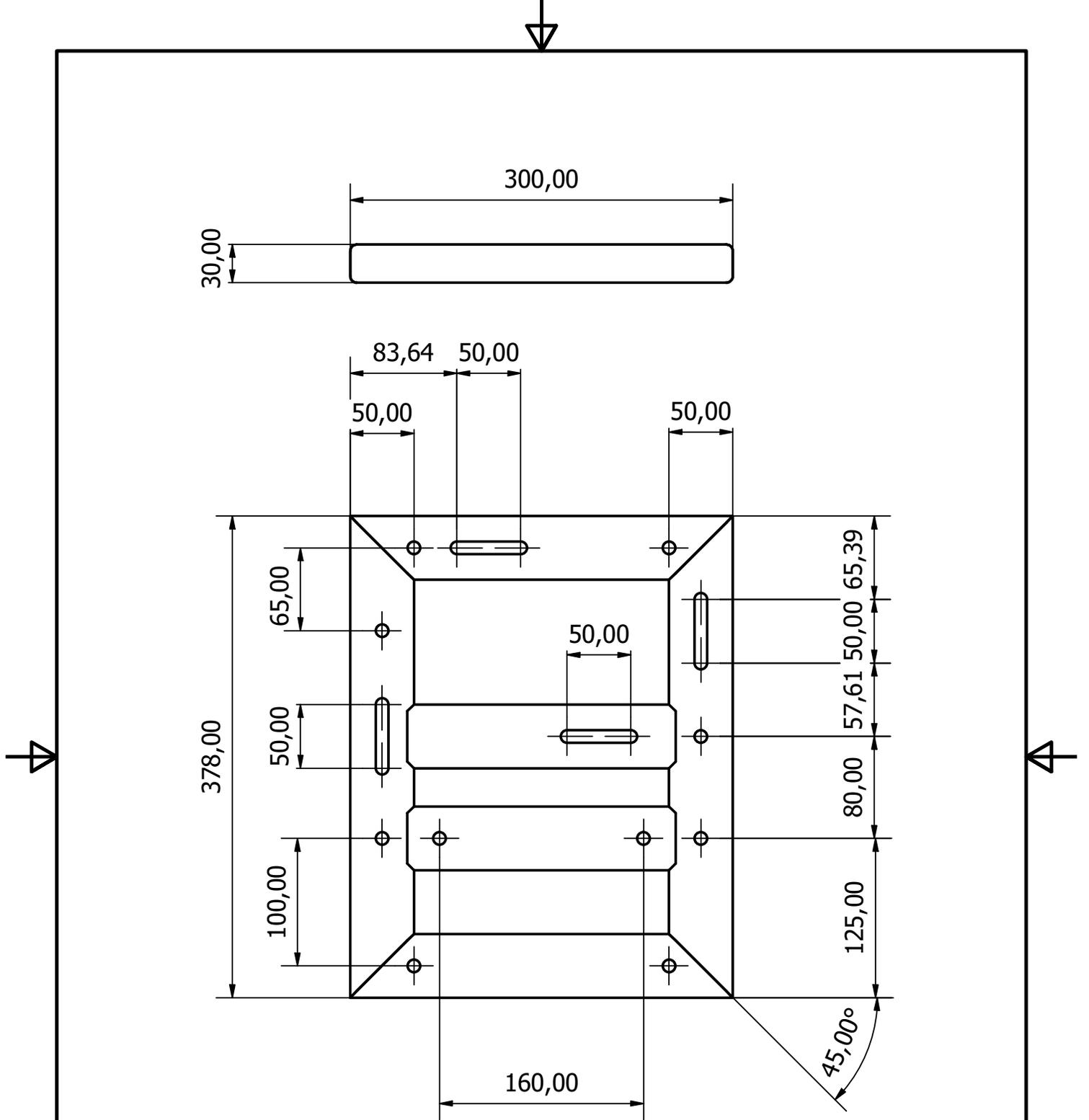
DISEÑO POR <b>Nelson Barreto</b>	REVISADO POR: Diego Calero	ESCALA 1:10	Date 18/10/2020
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO		Planos del banco	
		Ensamble	TAMAÑO A4 Sheet 1 / 4



Lista de materiales

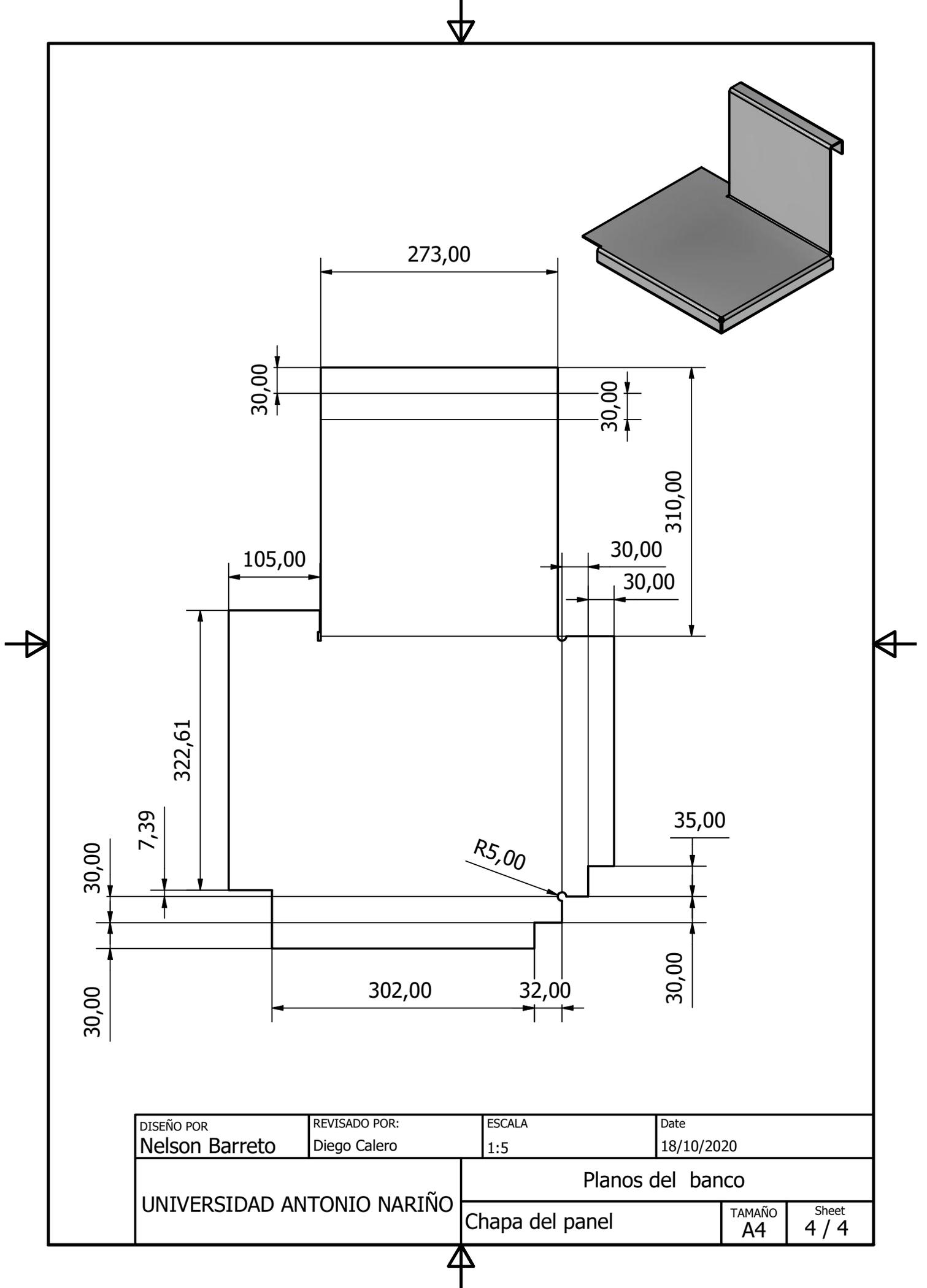
ITEM	DESCRIPCIÓN	MATERIAL
A	Tubo cuadrado 30 x 30 x 2.6	Acero Estructural
B	Tubo rectangular 50 x 30 x 2.6	Acero Estructura

DISEÑO POR <b>Nelson Barreto</b>	REVISADO POR: Diego Calero	ESCALA 1 : 20	Date 18/10/2020
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO		Planos del banco	
		Estructura del banco	TAMAÑO A4 Sheet 2 / 4



TIPO DE TUBO	
DESCRIPCIÓN	MATERIAL
Tubo rectangular 50 x 30 x 2.6	Acero Estructural

DISEÑO POR <b>Nelson Barreto</b>	REVISADO POR: Diego Calero	ESCALA 1 : 4	Date 18/10/2020
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO		Planos del banco	
		Base	TAMAÑO A4



DISEÑO POR <b>Nelson Barreto</b>	REVISADO POR: Diego Calero	ESCALA 1:5	Date 18/10/2020
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO		Planos del banco	
Chapa del panel		TAMAÑO A4	Sheet 4 / 4