REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA A LAS NO EUCLIDIANAS, EN PARTICULAR LA HIPERBÓLICA, EN EDUCACIÓN SECUNDARIA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctorado en

Educación Matemática

Autor: Oscar Favián Lugo López

Bogotá D.C.

2020

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA A LAS NO EUCLIDIANAS EN PARTICULAR LA HIPERBÓLICA, EN EDUCACIÓN SECUNDARIA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctorado en

Educación Matemática

Autor: Oscar Favian Lugo López

Director de tesis: Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Bogotá D.C.

2020

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. diciembre de 2020

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por otorgarme a mis padres, esposa e hija

Quienes me han brindado su apoyo para alcanzar

este logro académico, al doctor Osvaldo de Jesús

por su dedicación y a la universidad Antonio

Nariño por su formación académica.

SÍNTESIS

La escuela actual requiere de una enseñanza y de un aprendizaje sobre la geometría euclidiana y no euclidiana desde los primeros niveles educativos. La investigación se realiza con el propósito de efectuar una transición desde de la geometría euclidiana a la no euclidiana, a través de construcciones con regla y compás, con su posterior comparación en el ordenador por medio del software GeoGebra, contribuyendo a la caracterización del pensamiento geométrico involucrado, en estudiantes de grado séptimo del colegio Rodrigo Lara Bonilla.

En la investigación se diseñan 10 actividades sustentadas en el desarrollo de construcciones con regla - compás y su posterior comparación con instrumentos tradicionales o de geometría dinámicas, además de resolución de problemas fundamentadas en la visualización matemática y la motivación hacia el estudio de las matemáticas.

A través del desarrollo de las actividades, los estudiantes comienzan a construir sus propios conceptos sobre estas nuevas geometrías, utilizando su pensamiento geométrico sobre nociones sobre geometría plana. La implementación de estas actividades y los resultados que se logran obtener, permite mejorar su proceso de aprendizaje, así mismo favorece su interés por el aprendizaje de la geometría, a partir de entrevistas personales con los grupos de trabajo se logra constatar los elementos que caracterizan el pensamiento geométrico utilizado e involucrado por los estudiantes.

ABSTRACT

Today's school requires teaching and learning about Euclidean and non-Euclidean geometry from the earliest educational levels. The research reported here is carried out with the purpose of making a transition from Euclidean to non-Euclidean geometry, through constructions with ruler and compass, with their subsequent comparison on the computer using the GeoGebra software, contributing to the characterization of geometric thinking involved, in seventh grade students from the Rodrigo Lara Bonilla School.

In the research, ten activities were designed based on the development of constructions with ruler and compass and their subsequent comparison with traditional instruments or dynamic geometry, in addition to solving problems based on mathematical visualization and motivation towards the study of mathematics.

Through the development of the activities, the students begin to build their own concepts about these new geometries, using their geometric thinking on notions about plane geometry. The implementation of these activities and the results that are achieve allow them to improve their learning process, and likewise favor their interest in learning geometry. From personal interviews with the working groups it is possible to verify the elements that characterize the geometric thinking involved and used by students.

TABLA DE CONTENIDO PÁG.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación básica y media ha sido un problema estudiado y expuesto por investigadores en diferentes congresos y reuniones. La geometría es una de las ramas de la matemática que posee mayores aplicaciones intra y extramatemática, sin embargo, su enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles educativos muestra limitaciones. Estas dificultades se evidencian en los resultados alcanzados por los estudiantes en pruebas internacionales (PISA) y pruebas nacionales (Pruebas Saber).

Las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en los diferentes niveles buscan soluciones que provoquen un cambio en respuesta a la problemática de la escuela. En este sentido, es importante resaltar los diferentes cambios que ha tenido la enseñanza de la geometría a través de la historia. Entre tanto, otras investigaciones se han realizado, cuyo objetivo es explicar las razones por las cuales en la escuela los temas de geometría no son estudiados con profundidad y temáticas como las geometrías no euclidianas no son tratadas (Jones, 2002; Keith, 2001; Christi, 2011; Ribeiro, 2013; Henderson, 2000; Rosenfeld, 1988).

El uso de la tecnología en las aulas de clase potencia la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de las matemáticas en las instituciones educativas. En este sentido, toma un papel significativo la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana desde los primeros niveles educativos en la escuela (Ribeiro, 2013; Marcondes, 2014; Lénárt, 2010; entre otros). Este proceso se realiza con ayuda del software de geometría dinámica (SGD), en particular GeoGebra.

La enseñanza y aprendizaje de la geometría apoyada en materiales didácticos y en GeoGebra propicia una construcción robusta del contenido geométrico en los estudiantes. Este proceso aporta a la comprensión de otras geometrías, ya que se hace necesario, "… c*onocer la Geometría euclidiana* *axiomática, pues fue a partir de las cuestiones planteadas sobre el modelo axiomático de Euclides, que fue posible construir otras geometrías"[1].*

El enfocarse en el desarrollo del pensamiento geométrico, sin precisar o caracterizar dicho pensamiento, ha conllevado a diferentes investigaciones tanto nacionales como internacionales a presentar sus resultados en congresos y reuniones. Entre los que se destacan las series de estudios de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME).

A nivel nacional se resalta los Congresos Colombianos de Matemáticas (CCM), el Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (EGA), y el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME), entre otros. En las memorias o actas de estos congresos se puede precisar modelos, metodologías, secuencias didácticas y actividades, que se proponen para contribuir a la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela.

Mammana y Villani (1998), en el documento de discusión para un estudio ICMI, centran su estudio en las "Perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI". En este documento se reconocen los desafíos más relevantes y las tendencias emergentes para el futuro, resaltando el uso de materiales tanto manipulables como visuales, para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela.

En un estudio ICMI (2001) se plantea que la geometría es propicia para comprender y mejorar la parte intuitiva de las matemáticas que se relaciona con su contexto. Por otra parte, la enseñanza y aprendizaje

[1]Santos, T. A. (2009). *Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática – PCM – Maringá.

de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD) se debate en el ICME 2008. En este congreso se plantea que el manipular figuras geométricas y que los estudiantes aprendan de esas vivencias, son potencialidades que poseen el uso los SGD en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En el ICME 13 (2016) el grupo temático de estudio (TSG 13) aborda la enseñanza de la geometría en el nivel secundario. En el TSG 9 se debate alrededor de esta temática, pero también sobre diversos programas de estudio de la geometría en la secundaria. En el ICME 14 a realizarse en 2021, en el TSG 9, se aborda la Enseñanza y aprendizaje de geometría en secundaria. En estos TSG de los ICME 13 y 14 se discute sobre la argumentación, la prueba, la visualización, la figuración e instrumentación, aspectos estos que son determinantes en el logro de un robusto proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Por otra parte, en el CERME (2013) se afronta el pensamiento espacial aplicado a la enseñanza de la geometría, y en este mismo congreso se discute sobre diferentes estrategias en base a distintos materiales didácticos que permitan potenciar la percepción espacial.

La enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela a partir de la geometría no euclidiana ha sido estudiada por Olive, (2000); Jones, (2002); González y Vílchez, (2002); Komarnicki (2013); Marcondes (2014), entre otros. Estas investigaciones tienen como punto de relación establecer que la mayoría de los estudiantes desconocen la geometría euclidiana axiomática, por ende, desconocen la existencia de geometrías no euclidianas. Una de las causas es la formación de los docentes la cual no es apropiada frente a la geometría, lo cual motiva a tener un bajo interés por impartir conceptos geométricos en las aulas de clase (Rojas 2009).

Por otra parte, Jones (2002) plantea que el estudio de la geometría contribuye al desarrollo de habilidades del pensamiento crítico, la visualización, la intuición, la perspectiva, la resolución de problemas, la conjetura, el pensamiento sintético, el razonamiento deductivo y la demostración en los estudiantes. Para

Pavanello (1989) en ocasiones las clases de geometría en la escuela no se imparten con profundidad, se limitan a fórmulas y a cálculos desconociendo el desarrollo del pensamiento geométrico y la argumentación deductiva como parte fundamental en la construcción de sus conocimientos.

Así mismo, la inclusión de las geometrías no euclidianas en secundaria posibilita mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría, además resulta importante la utilización de geometrías dinámicas, ya que esto resulta de interés para los estudiantes (Ribeiro 2013).

Por otra parte, los docentes se sienten inseguros con el tratamiento del contenido geométrico y es así como se privilegian los conceptos aritméticos o algebraicos. Al respecto, Gravina (2001) plantea que la baja formación académica en geometría de los estudiantes en los colegios es demostrada en sus desempeños cuando llegan a la universidad y cursan la asignatura de Geometría I. Según Gravina (2001) *"… esos estudiantes llegan a la universidad desprovistos de las habilidades intelectuales necesarias para la construcción del conocimiento geométrico. Abstraer, generalizar, establecer relaciones, errar, hacer conjeturas, demostrar… acciones que caracterizan el proceso de creación en matemáticas"*[2].

Para constatar el conocimiento geométrico en los estudiantes se hace necesario conocer el recorrido curricular por los diferentes grados escolares en la educación media. Por otra parte, los currículos de la escuela en Colombia no contemplan el estudio de la geometría no euclidiana, quizás por la poca importancia que se le ha dado a la geometría o por la forma de enseñanza de la misma.

Esta investigación enfatiza en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación secundaria a partir del estudio de las geometrías no euclidianas, lo cual conlleva a reflexionar sobre sus propias prácticas pedagógicas, y también en aspectos históricos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la matemática. En este proceso se realizan construcciones geométricas con regla y

[2] Gravina, M. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.IN: *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, p. 5. Belo Horizonte.

compás donde los estudiantes utilizan conceptos geométricos de la geometría plana con el objetivo de lograr que se sientan identificados, motivados e interesados.

En los últimos años el avance de la tecnología se ha visto reflejado en las aulas de clase, creciendo exponencialmente el auge de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), como un mecanismo de enseñanza y aprendizaje lo que conlleva a su uso como una herramienta educativa. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) desarrolla diversas estrategias para integrar estas tecnologías en el ámbito educativo; es aquí donde se encuentra una oportunidad para incorporar la enseñanza y aprendizaje de la geometría no euclidiana en la institución educativa, a través del programa GeoGebra, por medio del modelo de Poincaré (disco de Poincaré).

La introducción de nuevos conceptos geométricos en el aula a través del uso de GeoGebra lleva al estudiante a descubrir, conjeturar, experimentar y establecer relaciones entre las diferentes geometrías y entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento (Celina, 2013).

Como resultados de la observación participante, encuesta aplicada a estudiantes y el análisis de sus resultados (ver Anexos 1 y 2), la revisión del estado del arte y la experiencia como docente de aula en la escuela secundaria del autor de la investigación, se pudo constatar las siguientes insuficiencias:

- Es mínima la importancia de la geometría en las instituciones educativas (Gutiérrez, 2005; Rojas, 2009; Pérez, 2016).
- Son limitados los conocimientos geométricos conceptuales que poseen los estudiantes.
- La enseñanza de la geometría se basa en proporcionar fórmulas de áreas y perímetros, y practicar sustituyendo valores numéricos en las fórmulas dadas (Gravina 2001).
- No se introduce el nuevo contenido geométrico a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida relacionada con la temática.

- Son limitadas las actividades de aula que proponen la experimentación, búsqueda, exploración y conjuración en el conocimiento geométrico por el estudiante, experiencias que a la vez estimulen y propicien el desarrollo del pensamiento geométrico (Rojas 2009).
- En la literatura científica revisada de los congresos, reuniones y otras publicaciones del estado del arte se carece de investigaciones que aborden el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana, para aportar a la caracterización del pensamiento geométrico.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo aportar a la caracterización del pensamiento geométrico en el proceso de hacer construcciones contrastando la forma en que se enfrenta la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana, en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Rodrigo Lara Bonilla?

En la investigación se establece como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación secundaria en el colegio. El **objetivo de la investigación** se enmarca en caracterizar el pensamiento geométrico involucrado en el proceso de hacer construcciones en las cuales se contraste la forma en que relacionan la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana, a través de un sistema de actividades, en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Rodrigo Lara Bonilla.

Conforme al objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana en particular la hiperbólica, a través de construcciones geométricas, resolución de problemas, materiales didácticos y el uso de la geometría dinámica.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Cuáles investigaciones sustentan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana

y no euclidiana, en particular del modelo hiperbólico, en los estudiantes de grado séptimo?

2. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el pensamiento geométrico en el proceso de hacer construcciones contrastando la forma en que enfrenta la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana, en los estudiantes de grado séptimo?

3. ¿Cómo caracterizar el pensamiento geométrico en el proceso de hacer construcciones donde se contraste la forma en que enfrenta la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana, en los estudiantes de grado séptimo?

4. ¿Cómo analizar la validez del proceso de caracterización del pensamiento geométrico involucrado?

Con el ánimo de cumplir con el objetivo propuesto y a su vez resolver el problema planteado, así como para orientar el curso de la tesis, son propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar el estado el arte sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana.
2. Determinar los presupuestos teóricos que sustenten la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana en la escuela.
3. Elaborar y estructurar un sistema de actividades para estudiantes de grado séptimo que conlleve a la caracterización del pensamiento geométrico en la enseñanza de la geometría euclidiana y no euclidiana en la escuela.
4. Valorar la eficacia y el impacto de las actividades diseñadas para caracterizar el pensamiento geométrico en la enseñanza de la geometría euclidiana y no euclidiana en los estudiantes de grado séptimo de la institución educativa.
5. Proponer una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado para el concepto de la geometría euclidiana y no euclidiana en los estudiantes de grado séptimo.

El **aporte práctico** radica en un sistema de actividades para la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela a partir de la geometría euclidiana en comparación con las no euclidianas. También se aporta un conjunto de materiales didácticos que propician mejorar la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela. Este estudio permite ofrecer sugerencias metodológicas para el proceso de enseñanza aprendizaje de las geometría euclidiana y no euclidiana en la escuela, para mejorar la interiorización de conceptos geométricos en estudiantes de grado séptimo de la institución educativa.

El **aporte teórico** contribuye a mostrar avances en la caracterización del pensamiento geométrico en el proceso de hacer construcciones, donde se contraste la forma en que enfrenta la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana, en los estudiantes de grado séptimo del colegio Rodrigo Lara Bonilla. Además, se ofrecen nuevas relaciones entre las categorías: motivación, uso de las tecnologías, visualización matemática, manipulación geométrica, en el proceso de resolución de problemas sobre construcciones geométricas, lo cual permite una robusta enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela a partir de la geometría no euclidiana.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y tres anexos. En el primer capítulo se realiza una recopilación de las diferentes investigaciones acerca de la enseñanza de la geometría euclidiana y no euclidiana en educación secundaria. En el segundo capítulo se desarrolla el marco teórico que sustenta el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana en la escuela. El Capítulo 3 presenta la metodología de la investigación. En el Capítulo 4 se presenta el diseño de las actividades que permiten reconocer conceptos de la geometría no euclidiana, en particular la hiperbólica. En el Capítulo 5 se muestra el análisis de los resultados de la implementación de las actividades, y se concluye con el avance en la construcción de la caracterización del pensamiento geométrico.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se ofrece respuesta a las siguientes preguntas: ¿cuál es la realidad de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en las institución educativas en nivel de primaria, secundaria y media vocacional?, ¿el uso de las construcciones geométricas como material didáctico desarrolla el pensamiento geométrico y mejora la enseñanza y aprendizaje de la geometría?, ¿qué es el pensamiento geométrico y que interrelación muestra con la visualización?, ¿cómo influye la implementación de tecnologías de la información y la comunicación en el pensamiento geométrico para enseñanza y aprendizaje de la geometría?, ¿a través de la utilización de herramientas tecnológicas, se puede mejorar la motivación de los estudiantes por el aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana?, ¿el reconocimiento de nuevas geometrías por parte de los estudiantes y su estudio a través de nuevas tecnologías favorecen su proceso de enseñanza y aprendizaje?

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza de la geometría en educación secundaria

En la literatura revisada se pudo constatar que son varios los autores que han abordado esta temática. A continuación, se presentan algunas investigaciones pertinentes al problema que se está estudiando.

1.1.1. Issues in the teaching and learning of geometry[3]

Jones (2002) presenta una definición de la geometría, su naturaleza y razones para ser incluida en el currículo, citando la importancia de esta rama de las matemáticas en la escuela. Además, plantea que en la geometría florece la creatividad y la emoción de los estudiantes. Sin embargo, la escuela enfatiza la enseñanza de la aritmética y el álgebra, donde el éxito se alcanza al superar exámenes memorísticos, y

[3] Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry In, Haggarty, Linda (eds.) Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice. London, GB, Routledge, pp. 121-139

es por esto que debe reestructurarse el currículo de tal manera que tome mayor importancia la geometría en la escuela.

Jones (2002) sostiene que todas las instituciones educativas deben mejorar la enseñanza de la geometría, ya que ella aparece en los currículos escolares. Sin embargo, no se le atribuye la importancia que merece y el tiempo de enseñanza de la geometría es mucho menor al que se dedica en comparación a la aritmética.

El estudio de la geometría contribuye al desarrollo de habilidades del pensamiento crítico, la visualización, la intuición, la perspectiva, la resolución de problemas, la conjetura, el pensamiento sintético, el razonamiento deductivo y la demostración en los estudiantes. Además, propicia la representación geométrica, pues permite una mejor comprensión de los conceptos.

Jones (2002) destaca la importancia de la manipulación en geometría, a través de la geometría dinámica por medio del software GeoGebra, pues les permite a los estudiantes observar y conjeturar. Con el uso del ordenador se puede desarrollar nuevos conceptos en la matemática con base geométrica, por ejemplo, los fractales.

En la investigación se plantea ¿Qué geometría debe ser incluida en el currículo de las matemáticas? Antes de 1970 la geometría que se presentaba en los currículos era geometría euclidiana y el manual de enseñanza eran los elementos de Euclides. Sin embargo, en el siglo XX esta geometría pierde su estatus e interés de enseñanza, ya que otras geometrías se convierten en el objeto de estudio de diferentes investigaciones.

Esta investigación de Jones (2002) se basa específicamente en la resolución de problemas mejorando la enseñanza y aprendizaje de la geometría plana con apoyo del ordenador. El autor de esta tesis comparte estos criterios para lograr un aprendizaje significativo en las clases, también serán tenidos en cuenta en las actividades propuestas.

1.1.2. Enseñanza de la geometría con utilización de recursos Multimedia[4]

Los autores proponen generar herramientas para docentes que se plantean iniciar la enseñanza de la geometría a través de la utilización de nuevos recursos tecnológicos. Se trabaja con el software “MsPaint”, “Clic 3.0” y “Poly 1.6”, con el propósito de introducir en la enseñanza de la geometría el uso del ordenador para motivar a los docentes en su práctica educativa.

Este estudio tiene sus orígenes en la escasa planificación en el trabajo de aula y laboratorio, en la limitada preparación del docente tanto en nuevas tecnologías como en geometría y en los limitados recursos para la enseñanza de conceptos geométricos en el laboratorio, para la primera etapa de educación básica. En la investigación se diseñan varias actividades en las cuales los estudiantes logran identificar, dibujar, comparar y construir figuras planas. Los profesores desarrollan actividades complementarias a su formación basadas en el software Clic 3.0 y la Teoría de Van-Hiele (Van-Hiele,1958). En la Figura 1 se puede observar el análisis que se presenta de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

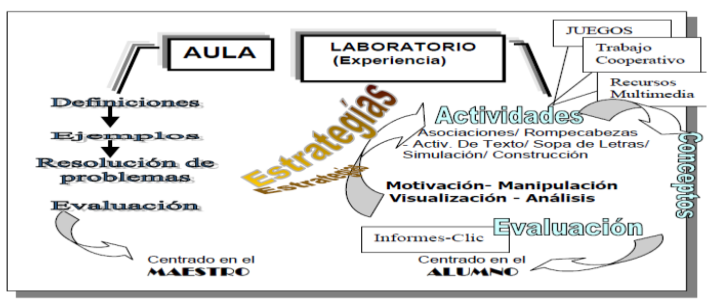


Figura 1. Gráfico Enseñanza vs Aprendizaje de la Geometría [5].

González y Vílchez (2002) precisan la resolución de problemas como parte de mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ideas que son tenidas en cuenta en el desarrollo de esta

[4] González, Á. y Vílchez, N. (2002). Enseñanza de la geometría con utilización de recursos Multimedia. Aplicación a la primera etapa de Educación Básica. Sector San Jacinto. Trujillo. Venezuela. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/14318/1/vilchez_nieves2.pdf
[5] González, Á. y Vílchez N. (2002). Enseñanza de la Geometría, con utilización de recursos multimedia. Aplicación a la primera etapa de educación básica. sector San Jacinto. Trujillo. Venezuela.

investigación, al compartir esta teoría como pilar fundamental para conseguir este objetivo. Como segundo, el artículo fomenta el uso de la multimedia para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría, es así como se propone para ello el siguiente modelo (ver Figura 2).

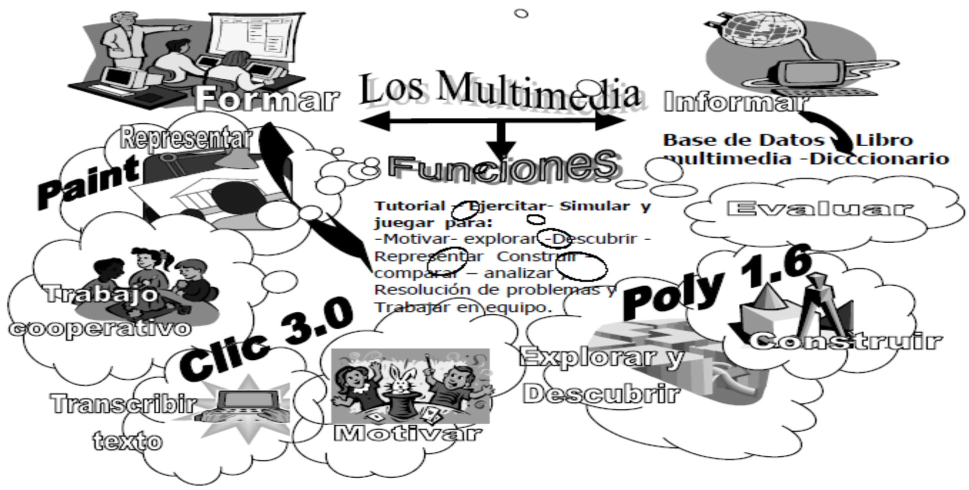


Figura 2. La multimedia en el proceso de mejoramiento de la enseñanza aprendizaje de la geometría.

Fuente: González y Vílchez (2002, p. 2)

La introducción de este modelo resultó interesante y motivante para los estudiantes, al igual que a los docentes, aportando comentarios positivos. En tanto la valoración de los resultados, se realiza mediante una comparación entre el antes y después de la aplicación de las actividades. Como resultado de la experiencia se tiene: influencia sobre el contexto educativo y la forma de aproximarse a la realidad del alumno (transversalidad), cambios en el entorno del proceso enseñanza y aprendizaje.

Este estudio resulta pertinente para la presente investigación, ya que uno de los objetivos es motivar a los estudiantes ofreciéndoles herramientas necesarias en la adquisición de un nuevo conocimiento a través de sus acciones. El docente debe proponer el planear cada actividad para que estas sean atractivas y pertinentes, resultando interesantes y así motivadoras en su aprendizaje.

1.1.3. 100 construcciones geométricas con herramientas manuales e informáticas[6]

Este libro da una mirada a una enseñanza olvidada en la geometría en los currículos contemporáneos, pues a través de las construcciones geométricas se propicia una reflexión personal sobre las prácticas de enseñanza en las aulas de clase. Estas prácticas enfatizan en la enseñanza de la aritmética y el álgebra, dejando de lado la geometría.

Se plantea que *"… los textos modernos usuales sustituyen en gran parte la geometría sintética por la geometría analítica… "Abajo Euclides" y "fuera Euclides" parecen ser las consignas de las nuevas matemáticas. Tal paso sería trágico. La geometría sintética es una parte esencial de las matemáticas cuya base es la geometría euclídea, … la geometría proporciona la interpretación gráfica de la mayor parte del trabajo analítico. Los matemáticos piensan habitualmente en términos de imágenes, y la geometría no sólo proporciona imágenes, sino que sugiere nuevos teoremas analíticos"*[7].

Este libro es producto de la necesidad presentada en estudiantes de secundaria, el cual es motivado por la búsqueda de conceptos geométricos. En el libro se precisa ¿qué tan útil resulta el desarrollar construcciones geométricas con los estudiantes de secundaria?, pues expresa que estas construcciones han sido abandonadas en la escuela de hoy.

Además, plantea ¿qué tan importante es la enseñanza de la geometría en la escuela? En este aspecto ofrece posibles conclusiones que están en un punto donde es necesario pensar que los conceptos matemáticos son fruto de la imaginación que parte de la realidad. Además, plantea que las construcciones geométricas están en un espacio intermedio entre la realidad y la abstracción matemática, sirviendo de puente entre los dos mundos, criterios estos que asume el autor de esta tesis.

---

[6] Komarnicki, N. et al. (2013). *Colaboradores 100 Construcciones Geométricas con Herramientas Manuales e Informáticas*. Ed Duken, Buenos Aires.
[7] Komarnicki, N. et al. (2013). *Colaboradores 100 Construcciones Geométricas con Herramientas Manuales e Informáticas*. Ed Duken, Buenos Aires. pp. 189-190.

El libro muestra avances a partir de la utilización de las construcciones geométricas, dando relevancia a estos conceptos en la escuela, y critica fuertemente su abandono en el aprendizaje de los estudiantes. A modo de conclusión, el libro se desarrolla a partir de ciertas preguntas: ¿por qué enseñar geometría?, ¿cuáles son los desafíos actuales en la enseñanza de la geometría?, las respuestas a estas preguntas son importantes para la presente investigación.

1.1.4. Implications of Using Dynamic Geometry Technology for Teaching and Learning[8]

Olive (2000) explora las implicaciones del uso de la tecnología de geometría dinámica para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en diferentes niveles de la educación, provocando preguntas acerca de cómo los niños pueden aprender geometría con una herramienta de este tipo, y sus implicaciones para la enseñanza de la geometría. Concluye a partir de sus propias experiencias y las de otros docentes e investigadores, que utilizan software de geometría dinámica con niños pequeños, adolescentes y estudiantes universitarios, que es práctica y útil para el aula.

Por otra parte, una de las limitaciones que los educadores han encontrado al utilizar software de geometría dinámica con niños pequeños, es el nivel de conocimientos geométricos necesarios para construir las figuras geométricas más comunes, tales como triángulos equiláteros, cuadrados, rectángulos y paralelogramos. Los niños pequeños pueden dibujar fácilmente tales figuras utilizando la herramienta de segmentación, pero sus figuras no mantienen su configuración específica bajo la manipulación directa.

La presente investigación brinda la oportunidad y la responsabilidad a los docentes interesados en superar sus falencias frente a las nuevas tecnologías relacionadas con la enseñanza aprendizaje de la geometría y la matemática en general.

[8] Olive, J. (2000). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. *Ensino e Aprendizagem de Geometria*. Lisboa: SPCE, 7.

1.1.5. Dynamic Mathematics with GeoGebra[9]

Hohenwarter y Preiner (2007) realizan un análisis del software GeoGebra en la enseñanza de la geometría en el cual se amplían los conceptos de geometría dinámica a los campos de álgebra y cálculo. GeoGebra es diseñado específicamente para fines educativos, pues ayuda a fomentar el aprendizaje experimental, orientado a problemas y al descubrimiento de las matemáticas.

Hohenwarter y Preiner (2007) presentan un estudio de las investigaciones realizadas entre los años 2009 y 2011 en la educación matemática a través del uso del software GeoGebra. Este estudio muestra los resultados alcanzados al sustentar que el uso del GeoGebra ayuda a la superación de las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El artículo se divide en 4 epígrafes, es de destacar que los dos últimos se refieren a la ampliación de la información y las referencias, justificando la relevancia del uso del GeoGebra en la educación matemática.

Las actividades son realizadas por profesores de escuela básica y universitarios, en pleno ejercicio de su práctica. En este proceso se pudo constatar que a través de esta práctica se puede ayudar a mejorar la enseñanza y aprendizaje propiciando una optimización de su instrucción, pues no queda restringida a los estantes de las bibliotecas.

Finalmente, su objetivo es analizar cuál es el papel del GeoGebra en la enseñanza de la geometría *"El software que trabaja sólo con construcciones geométricas como puntos, líneas y todas las secciones cónicas, son clasificados por Hohenwarter y Preiner (2007) como Software de Geometría Dinámica (DGS). Los autores puntúan que GeoGebra, además del trabajo con geometría, posee características típicas de un Sistema de Álgebra Computacional (Computer Algebra System - CAS). Por el hecho de que GeoGebra sirve para el trabajo de geometría, álgebra y cálculo, los autores lo clasifican como un Software*

[9] Hohenwarter, Markus & Preiner, Judith. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and Its Applications RECUPERABLE, https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

de Matemática Dinámica (Dynamic Mathematics Software - DMS), para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas y para cualquier nivel escolar"[10]. Estos aspectos son tenidos en consideración en la presente investigación, para el desarrollo de algunas actividades.

1.2. Investigaciones sobre el pensamiento geométrico y su relación con la visualización

A continuación, se estudia investigaciones y aportes de autores que hayan trabajado el pensamiento visual del estudiante y el pensamiento geométrico con relación a la visualización.

1.2.1. Spatial thinking and visualisation[11]

Esta investigación hace referencia a la relación entre el pensamiento espacial y la visualización. El autor plantea que la visualización es la capacidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual. El proceso de visualización constituye una herramienta fundamental en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ya que esta organiza los datos disponibles en estructuras significativas, y es un factor importante que guía el desarrollo analítico de una solución.

Keith (2001) plantea que la visualización para los estudiantes se convierte en esencial para la resolución de problemas y el razonamiento espacial, ya que les permite utilizar medios concretos para lidiar con imágenes abstractas. La visualización implica el proceso de formación y manipulación de imágenes, ya sea con papel y lápiz, con tecnología o mentalmente, para investigar, descubrir y comprender un objeto matemático.

En este trabajo se menciona la influencia de la visualización en las matemáticas, trayendo a colación la obra Anschauliche Geometrie de Hilbert & Cohn-Vossen (1996). La visualización es una piedra angular del proceso de razonamiento matemático desde los tiempos de los antiguos geómetras. Por otra parte, el

[10] Hohenwarter, Markus & Preiner, Judith. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and Its Applications Recuperable, https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html
[11] Keith, J. (2001). Teaching and learning geometry 11-19, Recuperable https://pdfs.semanticscholar.org/9205/1fc5874bd732a3a1ecbecae5f9f221f2c040.pdf

advenimiento de los sistemas de gráficos de computadora interactivos de alto rendimiento ha abierto una nueva era que aún está evolucionando.

La visualización matemática debe ser entendida como algo más que gráficos "bonitos"; pues se ha convertido en una herramienta matemática, que propicia crear experiencias tangibles de objetos matemáticos. En el proceso de visualización se favorece la construcción de conceptos matemáticos con implicaciones y aplicaciones crecientes en una amplia gama de disciplinas.

Los problemas geométricos típicos de interés para las aplicaciones de visualización matemática involucran tanto estructuras estáticas y cambiantes que requieren animación. El énfasis de la visualización está dado en una relación de múltiples dimensiones, sin embargo, los espacios tridimensionales están limitados debido a las restricciones prácticas de la percepción espacial holística humana. En el presente trabajo de investigación se asumen los criterios sobre visualización abordados por Keith (2001) en este artículo.

1.2.2. Visualisation in teaching-learning mathematics: the role of the computer[12]

Este escrito se centraliza en el estudio del papel que puede tener la visualización de la información en el aprendizaje de las matemáticas. Chiappini, & Bottino (1999) elaboran un análisis teórico para dar cuenta de los fenómenos complejos que tienen lugar en el aula, permitiendo que los estudiantes construyan una imagen mental del objeto matemático involucrado en la actividad.

Para establecer el primer postulado el estudiante debe realizar un mapeo que puede estar sujeto al análisis matemático. Mientras que el segundo es mucho más difícil de analizar, ya que está sujeto al acceso directo de imágenes mentales, lo que implica que está sobre la base de interpretaciones de cómo

[12] Chiappini, G., & Bottino, R. M. (1999). Visualisation in teaching-learning mathematics: the role of the computer. *Computer graphics and visualization education'99*.

las representaciones externas (gráficos, signos, tablas, dibujos, ...) se producen y utilizan en el contexto comunicativo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

El documento se divide en tres capítulos, el primero en objetos matemáticos, representación visual, imagen mental. El segundo hace referencia a la visualización de información y al aprendizaje matemático, y finalmente el tercero se relaciona con la visualización de la información y aprendizaje de la geometría euclidiana.

Realizar una construcción geométrica por medio de Cabri no implica aspectos de la medida, sino que está estrictamente conectado con la estructura profunda de la geometría euclidiana. Cabri pone a disposición una nueva oportunidad de manipulación visual directa: arrastrar los elementos variables de la construcción geométrica en la pantalla. De esta manera, los estudiantes pueden observar qué propiedades se conservan cuando la construcción se modifica con la acción de arrastrar, el movimiento producido por la acción de arrastre es una forma de externalizar el conjunto de las relaciones que definen una figura.

Este trabajo es de suma importancia para la presente investigación, ya que se realiza un análisis de la aplicación de la visualización geométrica a través de la geometría dinámica, la relación entre la construcción geométrica y la representación visual disponible con Cabri. Chiappini, & Bottino (1999) establece que a través del software Cabri es posible realizar todo tipo de construcciones geométricas, dentro de la geometría euclidiana.

1.2.3. Visualization of the Geometry Problems in Primary Math Education - Needs and Challenges[13]

En este documento se analiza las percepciones y actitudes sobre el uso de las herramientas de TIC para la visualización como un enfoque "moderno", para resolver problemas de geometría en las escuelas primarias de Macedonia. Se discuten las observaciones y se dan conclusiones y recomendaciones.

La visualización en matemáticas es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con alguna tecnología), la implementación y el uso efectivos de estas imágenes para el descubrimiento matemático y la comprensión de algún problema matemático (Atanasova, Gunova, Lazarova, & Pacemska, 2016). Los investigadores generalmente discuten la visualización matemática en un sentido figurado como "ver lo invisible".

La justificación visual en matemáticas se refiere a la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos, utilizando representaciones y procesos visuales basados en diagramas, programas de gráficos de computadora y modelos físicos. La visualización no solo se limita a la representación de dibujos para ilustrar ciertos objetos o conceptos, sino que también se usa en cada paso para resolver cualquier problema matemático.

Atanasova, Gunova, Lazarova y Pacemska (2016) plantean como objetivo principal determinar los puntos de vista y la opinión de los maestros en educación primaria en términos de visualización en matemáticas, especialmente en geometría, obteniendo información acerca de si los maestros fomentan el uso de este método y cómo sus estudiantes pueden resolver los problemas de geometría. La investigación se realiza entre abril y junio del 2015 en tres escuelas primarias de Valandovo, Kavadarci y Stip, de Macedonia.

[13] Atanasova-Pacemska, T., Gunova, V., Lazarova, L., & Pacemska, S. (2016). Visualization of the Geometry Problems in Primary Math Education-Needs and Challenges. IMO-Istrazivanje matematickog obrazovanja, 8(15), 33-37.

La investigación concluye que los profesores tienen una actitud positiva hacia la visualización en los problemas de geometría, son conscientes de las ventajas de la aplicación TIC en la enseñanza matemática, especialmente para la visualización en la geometría. Además, señalan que la aplicación de las TIC en la resolución de problemas es importante, por lo tanto, se establece que el uso de la aplicación de la visualización y su implementación en el proceso de resolución de problemas de geometría produce cambios significativamente positivos. El autor de la presente investigación concurre con dicha conclusión.

1.3 Investigaciones sobre el proceso de enseñanza de la geometría no euclidiana, en particular la hiperbólica, en educación secundaria

1.3.1. Hyperbolic geometry in the high school geometry classroom[14]

Christi (2011) inicia con las siguientes preguntas ¿Qué es la geometría hiperbólica? ¿Por qué los estudiantes de secundaria deben estudiar geometría hiperbólica? ¿Qué papel juega la tecnología en el estudio de la geometría hiperbólica?, a medida que se avanza en la lectura, este autor aporta una definición a cada una de ellas.

El objetivo de esta investigación es dar un ejemplo de una geometría no euclidiana, en este caso la hiperbólica, tomando esta por su similitud y diferencias con la geometría euclidiana. Se realiza un esbozo de los axiomas en la geometría euclidiana y se resalta la similitud en los cuatro primeros postulados, además destaca la diferencia con el quinto postulado o más conocido postulado de las paralelas.

Christi (2011) desarrolla diferentes demostraciones de los teoremas neutrales en la geometría euclidiana, cuyas demostraciones son idénticas a las pruebas de los resultados análogos en la geometría hiperbólica. Las demostraciones son idénticas, porque las pruebas no utilizan el postulado paralelo. Estos teoremas

[14]Christi, D. (2011). Hyperbolic geometry in the high school geometry classroom (Doctoral dissertation, Tesis de grado). Iowa State University, Iowa, EUA. Recuperado de http://www. math. iastate. edu/thesisarchive/MSM/Donald_C_MSM_F05. pdf).

y sus pruebas pueden o no verse afectados por el postulado paralelo hiperbólico. Por lo general, los estudiantes sólo estudian geometría euclidiana en su clase de geometría en la escuela secundaria.

Este artículo discute lo que sucede cuando los estudiantes de secundaria estudian la geometría hiperbólica. El estudio se realiza con 51 estudiantes del grado noveno, el cual es realizado después de que ellos reciben fundamentos sobre geometría euclidiana. Los resultados obtenidos aportan a los fundamentos de la presente investigación.

1.3.2. Geometrías hiperbólicas com uso do GeoGebra[15]

Este trabajo se plantea como objetivo dar otro enfoque a la enseñanza de la geometría, que cotidianamente se basa en la geometría euclidiana. Se brinda una introducción a las geometrías no-euclidianas que, a pesar de estar contempladas en las Directrices Curriculares de la Educación Básica, todavía se dejan de lado por la mayoría de los profesores.

Se presentan dos enfoques, en el primero se propone un enfoque histórico con el ánimo de desarrollar en los estudiantes la motivación por el estudio de las geometrías no euclidianas. El segundo es un enfoque utilizando GeoGebra para estudiar conceptos básicos de la geometría hiperbólica, tales como recta, segmento, ángulo y polígonos. En el trabajo se concluye que, a pesar de la complejidad de la temática, es posible presentar conceptos básicos con la utilización de recursos tecnológicos.

Según Marcondes (2014) no se pretende desarrollar una demostración completa, al contrario, busca ser una herramienta introductoria y de motivación para el estudiantado. Esta motivación puede ser complementada con los aspectos históricos que culminan en el surgimiento de estas geometrías, así

[15] Marcondes, T. (2014). Geometrías hiperbólicas com uso do GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

como su aplicación en diversas ramas del conocimiento, como la física. Los resultados son considerados para la elaboración de las actividades de la presente investigación.

1.3.3. Geometria Euclidiana é Geometria Hiperbólica em um ambiente de geometria dinámica[16]

Rocha (2009) plantea como objetivo indagar los conocimientos sobre geometría euclidiana e hiperbólica a un conjunto de profesores de Matemáticas, a su vez analizar si el software de geometría dinámica GeoGebra aporta a la enseñanza y aprendizaje de esos contenidos.

El origen y la enseñanza de la geometría euclidiana e hiperbólica, y las posibilidades educativas del software de geometría dinámica, constituyen los referentes teóricos de la presente investigación. El trabajo se desarrolla con un enfoque cualitativo, observando las prácticas de un grupo de 41 docentes; la temática seleccionada fue el modelo de Poincaré y GeoGebra.

Los resultados muestran ciertas dificultades en los docentes en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en muchas ocasiones sostienen que estas dificultades se presentan por currículos extensos en las instituciones educativas. Además, se observa poca preparación por parte de los docentes en cuanto a conocimientos de geometría euclidiana y no euclidiana. La aplicación de nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje de la geometría fue otro obstáculo por el desconocimiento de estas en los docentes.

Debido al panorama actual de la enseñanza y aprendizaje de geometría euclidiana en algunos cursos de formación, y del abandono de la geometría en las escuelas, se percibe que los profesores presentan dificultades con los contenidos de geometría euclidiana. Los profesores no tienen los conocimientos de

[16] Rocha, M. (2009). Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica. 2009. 264 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

geometría muy claros y esto ha dificultado la justificación de las respuestas, los docentes construyen las figuras geométricas con el auxilio de los monitores, pero no pueden justificar el porqué de ellas.

Este estudio concluye que mini cursos de esta naturaleza contribuyen a que los profesores recuerden algunos conceptos de la geometría euclidiana y ayuden en la construcción de la geometría hiperbólica. Esta conclusión se considera necesaria para la elaboración de la presente investigación.

1.3.4. El quinto postulado de Euclides: Propuesta de clase para el último año de la escuela secundaria[17]

Es una propuesta que se implementa en Grecia a los estudiantes de último año escolar de una institución elegida, dando a conocer diferentes aspectos surgidos en dicha experiencia. Se elige desarrollar diálogos entre los estudiantes y docentes en un sentido platónico de la palabra, se puede analizar la forma como ellos responden a diferentes preguntas cuando estas se alejan de la cotidianidad, colocando en duda sus conocimientos previos, durante el proceso de aprendizaje matemático.

En la investigación se concluye con la importancia de anexar el aspecto histórico epistemológico a la construcción del conocimiento matemático en referente al geométrico, lo cual resulta en una posición crítico reflexiva del estudiante para nuevos conocimientos. Esta propuesta se enfatiza en geometrías no euclidianas las cuales dan como resultado el cambio del pensamiento por parte de los alumnos, construyendo nuevos conceptos matemáticos. En este sentido, se considera que la historia de la geometría debe ocupar un espacio en las clases de la escuela secundaria porque así se les está mostrando, y sobre todo permitiendo experimentar, a los alumnos una imagen de ciencia viva (Zapico, 2006).

[17] Petakos, K., & Sgreccia, N. (s.f). El quinto postulado de Euclides: Propuesta de clase para el último año de la escuela secundaria. *Revista de Educación Matemática*, 25(2).

1.3.5. Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica[18]

El propósito de esta investigación es la incorporación de nuevos conceptos en las matemáticas dentro de la escuela, a través de la indagación y exploración de geometrías no euclidianas, lo cual se realiza por medio de dos software o geometrías dinámicas el "Spherical Easel" y el "Disco de Poincaré".

Las actividades son diseñadas de tal manera que traten conceptos no euclidianos para ser comparados con aquellos que pertenecen a la geometría euclidiana, y al finalizar cada actividad se encuentra un comentario de la intensión final de aprendizaje. A partir de estos resultados, se consideran conceptos teóricos sobre la naturaleza de la geometría, su desarrollo histórico y su proceso de aprendizaje.

Los conceptos se establecen de forma progresiva en el diseño de las actividades, realizando la transición de la geometría euclidiana a las no euclidianas. En la geometría esférica a cada actividad se le plantea un comentario como apoyo para los docentes, y se da inicio con conceptos de punto, recta, ángulo, triángulo y construcciones, entre otros. Además, se desarrollan a través del software "Spherical Easel".

A continuación, Ribeiro (2013) introduce el concepto de geometría hiperbólica a través del disco de Poincaré, para lo cual primero explica las herramientas a utilizar en el software GeoGebra. Da comienzo con la actividad de rectas y paralelismo, continúa con segmentos, semirrecta, ángulos y rectas perpendiculares, la siguiente es distancia y círculos, y prosigue con construcciones de triángulos.

Ribeiro (2013) establece en cada actividad una serie de preguntas que ponen en cuestionamiento lo aprendido en la geometría euclidiana, para llevar a los estudiantes a la transición hacia nuevos conceptos en estas nuevas geometrías. En este proceso, al igual que en las actividades anteriores se ofrece un comentario al final de cada actividad para los docentes.

[18] Ribeiro, R. (2013). Geometrias não-euckidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica

Ribeiro (2013) concluye que la inclusión de estas geometrías en secundaria posibilita mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría, además resulta de gran importancia la utilización de geometrías dinámicas, ya que esto es de interés para los estudiantes. Este trabajo es de gran importancia para esta investigación.

1.3.6. O Ensino das Geometrias Não-Euclidianas: uma prática metodológica investigativa e reflexiva no Ensino Médio[19]

Se realiza un estudio a un curso de educación media de Brasil; el autor presenta este artículo con el ánimo de contribuir a mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en particular de las no euclidianas. El objetivo del estudio es indagar en la propia práctica pedagógica y descubrir los sentidos y significados que los alumnos producen en el estudio de las geometrías no euclidianas.

Según Leoni y Reinaldo (2013) *"El aporte teórico se sustenta en la perspectiva del profesor como investigador de su propia práctica y del profesor reflexivo. Desde el punto de vista metodológico, la investigación se inserta en la modalidad de investigación cualitativa, específicamente en investigación-acción. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: diario de a bordo, grabaciones en audio de las clases, informes y observaciones en el aula. El proceso dialógico establecido en el aula llevó al alumno a descubrir, conjeturar, experimentar y establecer relaciones entre las diferentes geometrías, entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento"*[20]. Estos elementos se consideran en la presente investigación.

[19] O Ensino das Geometrias Não-Euckidianas: uma prática metodológica investigativa e reflexiva no Ensino Médio. (2013). 1st ed. [ebook] Brasil: PDF, pp.1-32. Available at: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/698-4 [Accessed 26 Jul. 2017].

[20] Leoni, M. & Reinaldo, F. (2013) O Ensino das Geometrias Não-Euckidianas: uma prática metodológica investigativa e reflexiva no Ensino Médio. book Brasil: PDF, pp.15. Available at: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/698-4

El desarrollo de las actividades es implementado a partir de una situación problémica. El objetivo es incentivar el interés por estos nuevos conceptos, a los que el menciona *"… constato que la clase estaba ansiosa por la respuesta del problema y varios alumnos solicitaron a la profesora, la solución inmediata de la cuestión. Sin embargo, para agudizar aún más la curiosidad, se dijo en la clase que se trata de una situación que involucra el estudio de una geometría aún desconocida para ellos y que estarían estudiando en las clases siguientes y descubriendo, por lo tanto, la respuesta de la cuestión"*[21].

Este trabajo centra el desarrollo de las actividades propuestas en la resolución de problemas, lo cual resulta pertinente para la presente investigación. Se plantea que este tipo de enseñanza genera discusiones entre los estudiantes que favorecen su proceso de enseñanza y aprendizaje, desencadenando un mayor significado para los estudiantes.

1.3.7. Crocheting the Hyperbolic Plane[22]

Henderson (2001) comparte cómo construir un crochet de un plano hiperbólico (y hacer versiones en papel relacionadas) y su forma de utilización para aumentar la propia comprensión de la geometría hiperbólica. En este proceso se responden preguntas como ¿dónde encaja la fórmula πr^2 en la geometría hiperbólica?, ¿… es imposible incrustar isométricamente el plano hiperbólico como un subconjunto cerrado del espacio 3 - euclidiano?

Para una mayor discusión de estas ideas se muestra que las superficies descritas pueden extenderse indefinidamente y que la geometría intrínseca de estas superficies es la geometría hiperbólica. Henderson (2001) describe tres construcciones isométricas diferentes del plano hiperbólico (o aproximaciones al

[21] Leoni, M. & Reinaldo, F. (2013) O Ensino das Geometrias Não-Euckidianas: uma prática metodológica investigativa e reflexiva no Ensino Médio. book Brasil: PDF, pp.15. Available at: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/698-4

[22] Henderson D. (2001). Crocheting the Hyperbolic Plane. *Mathematical Intelligencer*, *Vol.* 23, No. 2, pp. 17-28.

plano hiperbólico) como superficies en el espacio de dimensión 3. Luego los conecta con el modelo de semiplano superior estándar que es un modelo (no isométrico) del plano hiperbólico.

1. *El plano hiperbólico de Paper Annuli.* A partir de tiras anulares idénticas (ver Figura 3), se procede uniendo las tiras del círculo interno con el círculo externo o los extremos rectos juntos. La superficie resultante es, por supuesto, solo una aproximación de la superficie deseada. El plano real hiperbólico se obtiene al dejar $\delta \rightarrow 0$ mientras se mantiene *r* fijo. Tenga en cuenta que dado que la superficie se construye igual en todas partes (como $\delta \rightarrow 0$), es homogénea (es decir, intrínseca y geométricamente, cada punto tiene un vecindario que es isométrico para un vecindario de cualquier otro punto). Se llama a estos resultados plano hiperbólico anular.

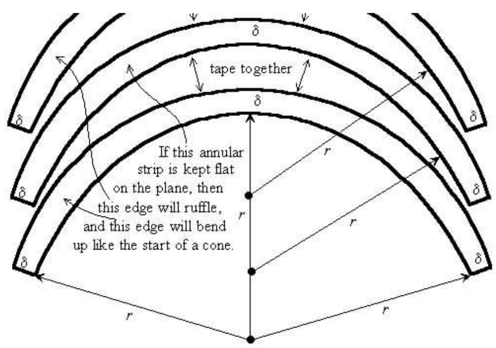


Figura 3.Plano hiperbólico[23].

2. *¿Cómo enhebrar el plano hiperbólico?* Para construir el plano hiperbólico de ganchillo necesitas tan solo unas habilidades de crochet muy básicas. Todo lo que necesita saber es cómo hacer una cadena y cómo hacer un solo ganchillo (ver Figura 4).

[23] Tomado, HendersonD, W. (2001), Mathematical Intelligencer, Vol. 23, No. 2, pp. 17-28, recuperable http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/crochet/crochet.html.

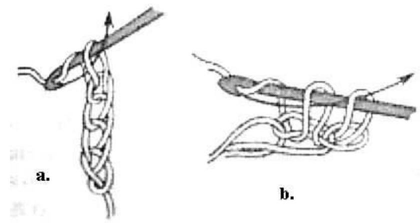


Figura 4. Crochet[24].

A continuación, se muestra el procedimiento del crochet:

- Haga sus 20 puntadas iniciales de la cadena (Figura 4a), para el comienzo.
- Para la primera puntada en cada fila, inserte el gancho en su segunda cadena. Tome el hilo y tire de la cadena, dejando 2 bucles en el gancho. Tome hilo y tire de ambos bucles. Se ha completado una única puntada de ganchillo. (ver Figura 4b.)
- Para las siguientes *N* puntadas proceda exactamente como la primera puntada, excepto que inserte el gancho en la siguiente cadena (en lugar de la segunda).
- Para la puntada de punto ($N + 1$) proceda como antes, excepto que inserte el gancho en el mismo bucle que la puntada *N*-ésima.
- Cuando tenga el modelo tan grande como desee, puede detenerse simplemente tirando del hilo a través del último bucle.

Asegurarse de tejer bien ajustado y uniforme. Eso es todo lo que necesita de los conceptos básicos de crochet. Ahora puede seguir y hacer tu propio plano hiperbólico.

3. *Construcciones poliédricas*. Se puede construir un modelo poliédrico a partir de siete triángulos equiláteros en cada vértice, llamándose modelo poliédrico {3,7}. Este modelo tiene la ventaja de ser

[24] Tomado, Henderson D, W. (2001), Mathematical Intelligencer, Vol. 23, No. 2, pp. 17-28, recuperable http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/crochet/crochet.html.

más fácil de construir que los modelos anteriores; sin embargo, uno no puede hacer mejores aproximaciones al disminuir el tamaño de los triángulos.

Este artículo tiene una visión diferente de ver la introducción de las geometrías no euclidianas, cuyo pilar es captar la motivación de los estudiantes, aspectos que se tienen en el diseño de las actividades de esta tesis.

1.3.8. How to Use History to Clarify Common Confusions in Geometry[25]

Henderson (2000) utiliza la historia de la geometría para su enseñanza y aprendizaje. En este proceso realiza una indagación a estudiantes de posgrado sobre las dificultades que tienen en cursos de geometría, ya que todos tienen pocos antecedentes en esta rama de la matemática.

Henderson (2000) plantea que, desde la dirección de muchos talleres para profesores sobre la enseñanza de la geometría, se descubre que incluso los matemáticos a menudo se sienten confundidos acerca de la historia de la geometría. Además, muchas descripciones expositivas de la geometría (especialmente la geometría no euclidiana) contienen declaraciones confusas y algunas veces incorrectas, lo cual es cierto incluso en exposiciones escritas por matemáticos en varias investigaciones.

Por lo tanto, Henderson (2000) considera que es importante dar una perspectiva histórica del desarrollo de la geometría, aclarar conceptos erróneos comunes y aumentar el interés de las personas tanto en geometría como en la historia de las matemáticas. Henderson (2000) plantea el desarrollo de temas que introduzcan la historia de la geometría a través del tiempo, desarrollando importantes ideas en la matemática. Hablando con los estudiantes, se nota que la mayoría de las confusiones relacionadas provienen de no reconocer ciertos caminos en el desarrollo de la historia de la geometría.

[25] Henderson, D. (2000). Experiencing Geometry in Euclidean, Spherical, and Hyperbolic Spaces, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Por lo tanto, a pesar de que el tema de este artículo es el uso de la historia más reciente de las matemáticas en los cursos, se comienza (como se hace con los estudiantes) con una mirada rápida a varios aspectos históricos que pueden ayudar a comprender los problemas que rodean estas preguntas. La historia más reciente vendrá después.

Se resalta la importancia de hablar con los estudiantes sobre las raíces profundas de las experiencias humanas de las matemáticas y cómo se conectan con las teorías modernas. Las respuestas de los estudiantes demuestran cómo el aprendizaje está motivado por la historia. Este artículo es de gran importancia para la presente investigación y es tomado en cuenta para la elaboración de las actividades.

1.3.9. A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space[26]

Rosenfeld (1988) realiza un recorrido histórico de la geometría, sin embargo, se realiza referencia al Capítulo 2 el cual trata sobre la teoría de los paralelos. El Capítulo 6 trata sobre la obra de Janos Bolyai, Gauss, Schweikart y Lobachevski, donde se realiza una descripción de sus trabajos, de sus ideas, y de sus aportes e implicaciones. Finalmente presenta un análisis de Rosenfeld y su distinción al desarrollo de la geometría no euclidiana de Lobachevski. Al final del capítulo se encuentra el desarrollo de los modelos Beltrami, Klein y el modelo de Poincaré.

El libro es de utilidad en estos dos capítulos, específicamente donde se hace referencia al modelo de Poincaré. Este modelo tiene vital importancia para la presente investigación, ya que proporciona un aporte importante para el marco teórico del presente trabajo.

[26] Rosenfeld. B. A., (1988), History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space. With the editorial assistance of Hardy Grant. New York (Springer-Verlag). 1988. xi + 471 pp.

1.3.10. Utilizando O Geogebra Para Construção De Modelo Plano Para A Geometria Elíptica[27]

Valdeni y Luana (2012) tratan el trabajo desarrollado por Felix Klein para el estudio de la geometría elíptica, donde Klein construye un modelo plano para tal geometría. Se presenta la construcción de herramientas que posibilitan construir este modelo y explorar varios resultados que son pertinentes a la geometría elíptica.

El artículo describe los resultados que involucran la geometría esférica y principalmente la geometría elíptica, dado que esta última es su objeto de estudio. Para lograrlo inicialmente se da una descripción del desarrollo de la geometría esférica.

Como elemento central se presenta el estudio del modelo plano sugerido por Félix Klein para la geometría elíptica. Además, se presenta la construcción de ese modelo plano, a través del software libre GeoGebra. Se propone que después del trabajo desarrollado es posible verificar la validez de diversos axiomas de la geometría elíptica en tal modelo, además de observar algunos de los principales resultados válidos en esa geometría.

Según Valdeni y Luana (2012) la propuesta es aceptada por los profesores, pues consideran el escenario disponible y adecuado para el entendimiento inicial de la geometría elíptica. *"… el desconocimiento de las posibilidades de GeoGebra y de su utilización pueden interferir en el logro de los objetivos propuestos y, también, que es necesario un tiempo más adecuado para el desarrollo de las actividades. Sin embargo, consideraron la posibilidad del uso futuro de GeoGebra con sus alumnos. Los testimonios a continuación ponen de manifiesto estas observaciones: He enfrentado muchas dificultades, primero porque no conocía GeoGebra…"*[28].

[27] Valdeni Franco, & Luana P. Goulart de Menezes, (2012) Utilizando O Geogebra Para Construção De Modelo Plano Para A Geometria Elíptica, Recuperable http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/11.pdf
[28] Valdeni Franco, & Luana P. Goulart de Menezes, (2012) Utilizando O Geogebra Para Construção De Modelo Plano Para A Geometria Elíptica, Recuperable http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/11.pdf

"Mi sugerencia es que las actividades sean todas desarrolladas en el taller, probablemente será necesario disminuir el número de ítems [...] En casa, no conseguí seguir las orientaciones y responder a las preguntas que quedaron abiertas. Primero necesito algunas clases de cómo utilizar GeoGebra, después podría utilizarlo en el aula con mis alumnos"[29]. Al analizar los resultados obtenidos se observa un cambio de actitudes y valores en los docentes resaltando la importancia de la metodología. Este trabajo se toma en cuenta en el planteamiento y desarrollo de las actividades propuestas en la presente investigación.

1.3.11. Gauss, Bolyai, Lobachevsky – in General Education? Hyperbolic Geometry as Part of the Mathematics Curriculum[30]

Lénárt, (2010) describe un método educativo para enseñar geometría hiperbólica en el nivel superior de primaria y secundaria, principalmente con frutas y materiales de construcción. Además, realiza algunas observaciones sobre la conexión de la geometría hiperbólica y el trabajo con la poesía, para explicar la importancia de dicho método en la educación matemática.

Resalta la importancia y la necesidad para los estudiantes del comprender los fundamentos de otras geometrías más allá de la euclidiana, si quieren tener alguna idea acerca de la ciencia moderna. Sin embargo, esta idea es difícil de aceptar, por ejemplo, Freudenthal era reacio a incluir los axiomas de la geometría en el plan de estudios de los niños de doce años, no porque el tema no fuera lo suficientemente importante, sino porque los axiomas son establecidos por el docente, no por los estudiantes.

---

[29] Valdeni Franco, & Luana P. Goulart de Menezes, (2012) Utilizando O Geogebra Para Construção De Modelo Plano Para A Geometria Elíptica, Recuperable http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/11.pdf

[30] Lénárt, I. (2010). Gauss, Bolyai, Lobachevsky–in General Education? (Hyperbolic Geometry as Part of the Mathematics Curriculum). In Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture (pp. 223-230). Tessellations Publishing.

En otras palabras, el interés y la actividad independiente de los estudiantes son tan importantes en el proceso de aprendizaje como la importancia científica de la teoría dada. Esto conlleva a enfrentar un problema mayúsculo de las escuelas, el cambio de paradigma en la enseñanza de la geometría.

Figura 5. Trabajo de Lénárt.

La autora muestra la imagen (ver Figura 5) de su compañera trabajando con los estudiantes geometría no euclidiana, lo que más resalta esta imagen es la cita literal que ella menciona, probablemente sea la primera vez en su vida que estudia la geometría esférica en una naranja, con mondadientes y bandas elásticas.

"Puede recordar vagamente algunas ecuaciones trigonométricas largas con muchos senos y cosenos, pero no tiene otra ventaja aprendida sobre los de trece años que la rodean. Aun así, ella no se avergüenza ni finge saber todo, pero con valentía asume el papel de la compañera de sus alumnos en su investigación[31]". Esto conlleva a pensar que el estudio de las geometrías no euclidianas en la escuela a pesar de ser considerado difícil y por muchos no tratable en estos cursos, no se descarta la importancia de crear en los estudiantes una idea mostrando la grandeza del espíritu humano. En este proceso se es capaz de crear conceptos y teorías inimaginables que en el transcurso del tiempo se demuestra ser completo y fructífero.

[31] Lénárt, I. (2010). Gauss, Bolyai, Lobachevsky–in General Education? (Hyperbolic Geometry as Part of the Mathematics Curriculum). In Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture (pp. 223-230). Tessellations Publishing.

Las autoras realizan un trabajo comparativo entre las geometrías plana, esférica e hiperbólica. El objetivo es enseñar simultáneamente geometría euclidiana a través del modelo de una hoja de papel. Geometría esférica en la superficie de una fruta o una esfera de plástico, las formas esféricas resultan mucho más familiar para los estudiantes, dado que son mucho más frecuentes en la naturaleza. La geometría hiperbólica se puede estudiar en la superficie de un hemisferio plástico o media manzana o cebolla.

Para el estudio de la geometría hiperbólica las autoras resaltan la importancia del modelo de Poincaré, mencionan la dificultad de la comprensión y la enseñanza de esta geometría incluso para los propios docentes, y cómo este modelo resulta ser un mecanismo viable para facilitar el aprendizaje de la geometría hiperbólica. Además, con el uso de geometría dinámica (programas como de Szilassi o el Geometer's Sketchpad, sobre geometría hiperbólica, o cinderella), da como resultado un excelente complemento en la enseñanza y aprendizaje de la geometría hiperbólica.

Tanto en el plano como en la esfera las unidades de distancia parecen ser iguales, pero este no es el caso en la superficie hiperbólica. El ecuador no pertenece a nuestro modelo (se puede imaginarlo como el horizonte que está infinitamente lejos del individuo), por lo que nunca se pueden alcanzar sus puntos. Por lo tanto, cuando camina a lo largo de una línea hiperbólica hacia el ecuador con unidades iguales de medición de la distancia hiperbólica, sus pasos aparecen cada vez más cortos para el observador externo. Este trabajo es de gran interés, sus resultados son tomados en cuenta para la elaboración y aplicación de las actividades de la presente investigación.

1.3.12. Spherical and hyperbolic geometry in the high school curriculum[32]

Los conocimientos y habilidades esenciales de Texas (TEKS) delinean el plan de estudios de la escuela secundaria para las matemáticas (TAC, 2009). Para la geometría, los TEKS cubren seis áreas amplias:

[32] Cowley, C. S. (2009). *Spherical and hyperbolic geometry in the high school curriculum* (Doctoral dissertation, University of Texas).

entendimientos básicos, estructura geométrica, patrones geométricos, dimensionalidad, congruencia y similitud. Cada una de estas seis áreas incluye de dos a seis temas que se deben enseñar, para un total de 22 temas entre todas las áreas. Además, ocho de estos temas describen 26 expectativas de rendimiento estudiantil.

La geometría euclidiana es un sistema axiomático basado en los axiomas de Euclides, mientras que cualquier otro sistema axiomático de geometría es una geometría no euclidiana. Ambas geometrías estudian los mismos objetos y hacen las mismas preguntas. Sin embargo, en la escuela en un curso de geometría de secundaria típica, solo se gasta una pequeña cantidad de tiempo en la enseñanza de geometría, dejando a un lado la enseñanza sobre geometrías no euclidianas debido al limitado tiempo dedicado en el currículo y a su vez por el conocimiento limitado del maestro.

Se realiza una comparación y una contrastación de la estructura de las diferentes geometrías. Definiendo la estructura de la geometría euclidiana en el sistema de axiomas, postulados y términos básicos. Los cinco postulados de Euclides son la base de la geometría del espacio que se enseña en la escuela primaria, intermedia y la mayoría de la escuela secundaria.

Se realiza un recorrido histórico sobre los esfuerzos para probar o refutar la verdad del postulado paralelo de Euclides concluyendo que estos esfuerzos no tienen éxito. Los cambios en este postulado, sin embargo, son compatibles con los cuatro postulados restantes.

En la escuela primaria hasta la secundaria se toma como modelo visual del plano euclidiano el tablero o una hoja de papel, donde se dibujan las líneas, ya que resultan muy familiares y adecuadas en este plano con curvatura cero. Para la geometría esférica, el modelo visual para el plano es la superficie de una esfera, esta resulta accesible e intuitiva, la superficie exterior de la esfera tiene una curvatura positiva constante. Un modelo visual para el plano hiperbólico son el hiperboloide, el disco de Poincaré y el semiplano superior.

La geometría esférica e hiperbólica como sistemas axiomáticos implican un cambio en el postulado paralelo de Euclides, que refleja un cambio en la forma del modelo plano al modelo curvo, este trabajo se toma para el desarrollo del marco teórico de la presente investigación.

1.3.13. Non-euclidean geometry and its possible role in the secondary school mathematics syllabus[33]

Existen numerosos problemas asociados con la enseñanza de la geometría euclidiana en las escuelas secundarias de hoy. Los estudiantes no ven la necesidad de probar los resultados que se han obtenido de manera intuitiva. No comprenden que la validez de una deducción es independiente de la "verdad" de los supuestos iniciales. No se dan cuenta de que no pueden razonar a partir de diagramas, ya que pueden ser engañosos o inexactos.

Lo más importante es que no entienden que la geometría euclidiana corresponde a una interpretación particular del espacio físico y que existen interpretaciones alternativas igualmente válidas. Un posible medio para abordar los problemas anteriores es la introducción de la geometría no euclidiana en el nivel escolar. Es imperativo identificar a aquellos estudiantes que tienen los conocimientos y habilidades necesarios. Se pueden utilizar varias estrategias interesantes de enseñanza, como debates, discusiones, investigaciones, presentaciones orales y escritas, para desarrollar el contenido.

Hay una serie de cosas que los estudiantes pueden aprender de la historia de la geometría no euclidiana. En primer lugar, es necesario estar familiarizado con las circunstancias históricas que prevalecen en el momento de un descubrimiento para poder comprender y apreciar su magnitud: el trabajo de Gauss, Bolyai y Lobachevsky se destaca porque los matemáticos estaban atrapados en el espíritu de los tiempos.

[33] Fish, W. (1996). *Non-Euclidean geometry and its possible role in the secondary school mathematics syllabus* (Doctoral dissertation).

En segundo lugar, los juicios y preferencias personales han desempeñado un papel crucial en el desarrollo de las matemáticas; por ejemplo, Euclides selecciona ciertas definiciones, nociones y postulados comunes para constituir la base de su sistema y muestra ingenio en su formulación particular del postulado paralelo.

En tercer lugar, la actividad matemática implica algo más que encontrar la solución correcta a un problema: la reformulación de un problema, su puesta en contexto y su reflexión crítica son actividades importantes en matemáticas, como se desprende de la investigación sobre el postulado de las paralelas. De hecho, es posible que los problemas no siempre tengan soluciones exactas y predecibles, como lo demuestra la consistencia de la geometría hiperbólica en relación con la geometría euclidiana. Este proceso implica que el postulado paralelo no es comprobable de las otras definiciones, nociones comunes y postulados.

En cuarto lugar, el pensamiento independiente, el coraje y la perseverancia son cualidades humanas admirables que darán frutos a largo plazo. Por ejemplo, aunque Lobachevsky publica extensamente sobre geometría no euclidiana (dictó su último trabajo después de haberse quedado ciego), no recibe ninguna aclamación por ello durante su vida. Sin embargo, en el presente, la geometría hiperbólica también se denomina geometría "lobachevskiana" en su honor.

En quinto lugar, las ideas no pueden rechazarse simplemente porque son contrarias a las creencias y experiencias populares, sino que deben ponerse a prueba mediante un razonamiento lógico. Por último, y lo más importante, la geometría euclidiana no es más que una de las muchas interpretaciones válidas del espacio físico que se vuelven inapropiadas cuando se consideran las distancias astronómicas. Este trabajo aporta al desarrollo y justificación del marco teórico y construcción de las actividades de la presente investigación.

1.4. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría y de la geometría no euclidiana en Colombia

1.4.1. Las geometrías no euclidianas en Colombia[34]

Arboleda y Anacona (1994) presenta un análisis a la introducción de las geometrías no euclidianas en Colombia y la posición del matemático más ilustre de Colombia a comienzos de siglo XX, el profesor Julio Garavito (1865-1920). En este trabajo se brinda una visión de las razones que le llevan a tener una posición conservadora respecto a las geometrías no euclidianas. En palabras de los autores *"Julio Garavito es considerado como facilitador de la modernización educativa en el país, de la adopción de una cultura matemática basada en paradigmas de rigor de pensamiento, y quien promovió de manera irrestricta condiciones para organizar profesionalmente las actividades de investigación en el campo de las matemáticas"*[35].

Arboleda y Anacona (1994) muestran que esta posición conservadora frente a estos nuevos conceptos por parte de Garavito es una posición general por parte de muchos matemáticos. Además, precisan que no fue causa personal o producto del atraso intelectual del medio, de su aislamiento con respecto a los centros de mayor desarrollo, del capricho de un sujeto tradicionalista o de las ambigüedades características de la modernidad en las sociedades periféricas.

En general este artículo da una visión de la posición, conservadora o no, frente a las geometrías no euclidianas en diferentes contextos sociales, culturales o históricos, así mismo muestra la visión de Garavito, en palabras del autor *"… era partidario de la concepción a priori del espacio kantiano, un espacio*

[34] Arboleda, L. C. & Anacona, M. P. (1994). *Las Geometrías no euclidianas en Colombia, profesor Julio Garavito (1865-1920)*. *Quipu*, *11*(1), 7-24.
[35] Arboleda, L. C. & Anacona, M. P. (1994). *Las Geometrías no euclidianas en Colombia, profesor Julio Garavito (1865-1920)*. *Quipu*, *11*(1), p13.

inherente a nuestro ser que no tiene otra posibilidad de existencia y que, al corresponder perfectamente con la realidad, constituyó el objeto natural de la "legítima" geometría"[36].

Textos como la *Ciencia e Hipótesis* de Poincaré, conllevó a diversos matemáticos entre ellos Garavito a admitir la existencia de otros espacios, sin embargo, debido a su influencia kantiana admiten esta existencia como un mundo imaginario, lo cual no puede explicar la realidad. A lo que Garavito menciona *"tanto por razones epistemológicas (su pertinencia conceptual), como por razones pedagógicas (su comodidad y su carácter intuitivo), la geometría viable en los ambientes intelectuales y escolares era la geometría euclidiana*[37]*"*. Esto puede ser uno de los causales que se presenta en el país en las diferentes instituciones educativas frente a las geometrías no euclidianas.

Este artículo muestra los diferentes obstáculos a principio de siglo XX que presentan las geometrías no euclidianas. Entre estas dificultades se puede abstraer la formación en matemáticas de aquellos que la estudiaban en ese siglo lo que obstaculizaba la asimilación de nuevas ideas en geometría. En la literatura revisada en Colombia se carece de investigaciones sobre el estudio de geometrías no euclidianas en la escuela o universidad.

Conclusiones del Capítulo 1

Se hace un análisis sobre el estado del arte, donde se destacan: Christi (2011), Marcondes (2014), Rocha (2009), Ribeiro (2013), Henderson (2001), entre otros. Estas investigaciones y trabajos realizados por estos autores hacen referencia a la innovación en la enseñanza de la geometría en la escuela, llevando al aula esta temática que hasta ahora era desconocida por los estudiantes, e incluso en algunos casos por los mismos docentes, como lo son las geometrías no euclidianas.

---

[36] Arboleda, L. C. & Anacona, M. P. (1994). Las Geometrías no euclidianas en Colombia, profesor Julio Garavito (1865-1920). *Quipu*, *11*(1), p14.
[37] Arboleda, L. C. & Anacona, M. P. (1994). Las Geometrías no euclidianas en Colombia, profesor Julio Garavito (1865-1920). *Quipu*, *11*(1), p14.

Es claro que el desarrollo de geometrías no euclidianas en el aula genera cambios dentro de los currículos tradicionales de las instituciones educativas, llevando mejoras en el aprendizaje por parte de los estudiantes frente a la geometría. La incorporación de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, fomenta motivación en el estudiantado por el área de las matemáticas.

A su vez presentar la enseñanza de la geometría a través de construcciones con regla y compás, desarrolla en los alumnos situaciones en contextos diferentes a los tradicionales. Además, presentarles situaciones con problemas no rutinarios, mejora su aprendizaje; también, la utilización de herramientas tecnológicas y/o ambientes de aprendizaje diferentes al tradicional producen el mismo efecto.

Se concluye que en las actividades los estudiantes participan de mesas de trabajo, pues encuentran en ellas actividades retadoras, donde se tiene la oportunidad de utilizar su creatividad e ingenio para el desarrollo de éstas. Además, en este proceso se genera la discusión entre pares con las mismas expectativas y todo esto de forma natural y autónoma. Por otro lado, constituye un factor determinante la motivación y gusto por el aprendizaje de la geometría y permite reforzar las diferentes competencias cognitivas, meta-cognitivas y sociales.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

La presente investigación propone revisar el desarrollo histórico de las geometrías Euclidiana y no euclidianas respectivamente, identificando las distintas metodologías en la enseñanza de estas últimas, haciendo énfasis particularmente en la hiperbólica en educación secundaria. A continuación, se analiza la influencia de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, para motivar el aprendizaje de los estudiantes.

2.1. Contenido geométrico abordado

Euclides es el primer matemático en sistematizar la matemática como ciencia deductiva, su obra *Los elementos* recopila toda la matemática de la época, obra que se divide en trece libros y capítulos, donde los primeros seis tratan de geometría plana elemental. Euclides presenta en su obra definiciones, axiomas, nociones comunes y presenta cinco postulados que son proposiciones geométricas que pretenden ser verdades con base en las cuales nuevas proposiciones pueden ser demostradas.

2.1.1. Definiciones de Euclides

A continuación, se encuentran las definiciones propuestas por Euclides tomadas del libro *Elementos*, libros I – VII (2007).

1. *"Un punto es lo que no tiene partes.*
2. *Una línea es una longitud sin anchura.*
3. *Los extremos de una línea son puntos.*
4. *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.*
5. *Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.*
6. *Los extremos de una superficie son líneas.*
7. *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.*

8. *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.*
9. *Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, se llama rectilíneo.*
10. *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.*
11. *Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.*
12. *Ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto.*
13. *Un límite es aquello que es extremo de algo.*
14. *Una figura es lo contenido por uno o varios límites.*
15. *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (que se llama circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.*
16. *Y el punto se llama centro del círculo.*
17. *Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.*
18. *Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.*
19. *Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.*
20. *De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene sólo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.*
21. *De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo es la que es rectangular pero no equilátera, rombo es equilátera pero no rectangular, romboide es la que*

tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llamase trapecios las demás figuras equiláteras.

22. *Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos"*[38].

Las siguientes observaciones respecto a las definiciones anteriores son tomadas literalmente del libro de *Elementos*, libros I – VII (2007), Biblioteca Gredos. Para la definición 1, Euclides toma la definición de un punto como aquello que es indivisible en partes. *"Sin embargo Euclides no incurre en el vicio que Aristóteles atribuye a las definiciones habituales de su tiempo, el de definir lo anterior por referencia a lo posterior: el punto como límite de la línea, la línea como límite de la superficie, la superficie como límite del cuerpo sólido"*[39].

En la definición 4, los griegos piensan tres formas básicas de línea recta, hilo tenso, rayo de luz y de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos. La tensión está asociada a la definición de la recta como una línea tendida o estirada hacia los puntos o hacia los extremos (Pappo, Def. 4). La imagen de rayo óptico está presente en la definición platónica de la recta como línea cuyo medio intercepta ambos extremos.

La tercera imagen se trasluce en la definición de Herón recogida por Proclo "*una línea que permanece fija cuando sus extremos permanecen fijos"*[40]. Se considera que la definición de Euclides es una elaboración de la platónica, pues ésta contiene implícitamente una alusión al sentido de la vista y supone, asimismo, una asimilación del rayo visual al rayo óptico, connotaciones que Euclides procura evitar. Sin embargo, la definición griega que más ha tenido fortuna es la de Arquímedes como una de las asunciones

[38]Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 3-10.
[39] Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 3.
[40] Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 4.

de *Sobre la esfera y el cilindro:* la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos.

La definición 7, está basada en la 4 *mutatis mutandis: línea recta y puntos* son reemplazadas por *superficie plana y rectas* respectivamente. No es extraño que las nociones asociadas a línea recta se quieran extender a la superficie plana.

En la definición 8, la expresión *me ep' eutheías keiménon… (y no están en línea recta)* resulta sorprendente, ya que el ángulo puede estar formado por rectas o curvas. Es como si Euclides hubiera pensado inicialmente en definir el ángulo rectilíneo y hubiera a continuación tomado en consideración los ángulos formados por una recta y una curva o por dos curvas, con lo que se ve llevado a sustituir líneas rectas por líneas.

En la definición nueve, la expresión *He kaleitai periphéreira* (que le llama circunferencia), son añadidas en las definiciones *m* y *o,* sin ninguna explicación quizás porque no existía necesidad, ya que Aristóteles las utilizaba ocasionalmente:

1. En sentido general de contorno, sin significado específico matemático.
2. Ahora en el sentido matemático, lo utilizaba para referirse a una circunferencia como un arco o un círculo.

Es por esto que Euclides utiliza esta palabra en las definiciones *m* y *o*, ya que las considera universales, y no tenía referencia matemática. "*Platón en Parménides 137e menciona: stróngylón ge poú esti toûto, hoû àn tà éschata pantacheî apò toû mêsou íson apéchei: Redondo es aquello cuyos extremos están en todas las direcciones a igual distancia del medio. En Aristóteles se encuentra: la figura plana rodeada por una línea circular, peripherógramon (De Caelo II 4, 286b 13-16), plano regular desde un centro [epípedon* *tò ek toȗ mésou ison]"*[41] enfatizando en el círculo. La palabra *kéntron,* se usaba regularmente por ejemplo Proclo: "*el centro desde el que todas las líneas tendidas hasta el borde son iguales"*[42].

En la definición 11, la palabra *diámetros* Euclides la utiliza regularmente para figuras como cuadrados y paralelogramos. "*Diagóniōs, diagonal, es una línea recta dibujada de un ángulo a otro"*[43], lo anterior es definido por Herón. Así mismo la definición de diámetro, recta que también divide al círculo en dos partes iguales, expresa las propiedades del diámetro, resulta de gran importancia para Euclides, ya que sin esto no habría podido justificar la definición de semicírculo como una porción limitada por el diámetro y la circunferencia cortada por él.

En la definición 16, Platón y Aristóteles no realizan distinción entre las figuras triláteras, cuadriláteras y multiláteras, esto se debe al propio Euclides, *tripleurum, tetráplerum, polyplerum.* Al utilizar el término *tetráplerum,* Euclides acaba con la ambigüedad del término *tetragōnon* y empieza a utilizarse restrictivamente para el cuadrado.

En la definición 17, *Isoskelés* (de piernas iguales), es utilizado por Aristóteles y Platón, "*Skalenós o su variante skalenés lo utiliza Aristóteles para referirse a un triángulo que no tiene dos lados iguales, por otro lado, Platón utiliza el término skalenós para un número impar por oposición a isoskelés para un número par"*[44].

En la definición 17, la palabra *rómbos* (rombo), parece que se deriva de *rémbo,* dar vueltas, y se utilizaba para designar la peonza (juguete en forma de trompo). Mientras tanto Arquímedes la utilizaba para

---

[41] Euclides, libros I – VII (2007), Biblioteca Gredos, *(*Retórica III 6, 1407b27). p. 5.
[42] Euclides, libros I – VII (2007), Biblioteca Gredos, p. 7
[43] Euclides, libros I – VII (2007), Biblioteca Gredos, p. 8
[44] Euclides, libros I – VII (2007), Biblioteca Gredos, p. 8

"*expresar rombo sólido, para referirse a la figura solida formada por dos conos con base circular común. Si los conos son iguales, la sección a través del eje común podía ser un rombo plano"*[45].

En la definición 22, Euclides prefiere "*la característica de no intersección o no encuentro como el criterio determinante de las rectas coplanarias paralelas"*[46]. Esta no fue la única definición griega por ejemplo el criterio equidistante resulta más natural preferido por Pdosino o Gémino, (Proclo, Com. 176,5). Por otra parte, Euclides al tomar la definición "*de no intersección y la asunción complementaria del postulado 5 con ser menos intuitivas, son más adecuadas y evitan la falacia de probar la existencia de rectas paralelas sobre la base de algún supuesto derivado de esa misma existencia"*[47].

2.2. Postulados de Euclides

A continuación, se encontrará los postulados propuestos por Euclides tomadas del libro *Elementos*, libros I – VII (2007). Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas, Biblioteca Gredos, p. 11:

1. *"Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*
2. *Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.*
3. *Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.*
4. *Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.*
5. *Y que, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos"*[48].

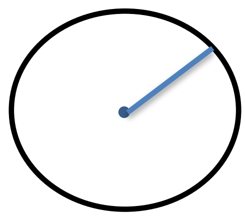
Equivalencia de los postulados anteriores:

1. Se puede trazar una línea recta que pase por dos puntos.

[45] Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 8
[46] Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 9.
[47] Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 9.
[48]Euclides, libros I – VII (2007), (Introducción general Luis Vega, traducción María Puertas). Biblioteca Gredos, p. 11.

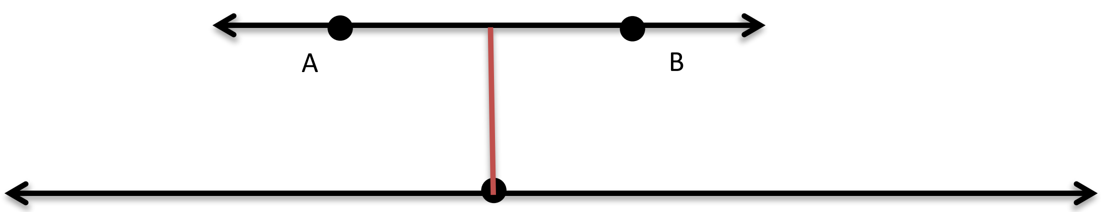
2. Se puede prolongar una línea indefinidamente a partir de un segmento.

3. Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio



4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Por un punto que no esté en una recta dada pasa una única paralela.



2.3. Referentes sobre las proposiciones del Libro I de los *Elementos* de Euclides

La estructuración del Libro I de Euclides desarrolla inicialmente una lista de veintitrés definiciones, en donde describe los objetos con los que va a trabajar, a continuación, suministra cinco postulados y cinco nociones comunes.

El Libro I consta de cuarenta y ocho proposiciones, cada una con una demostración paso a paso, usando las definiciones, los postulados y las nociones comunes. Las 48 proposiciones se dividen en tres grupos:

- De la 1 a la 26, tratan principalmente de las propiedades de los triángulos e incluyen tres teoremas de congruencia bien conocidos.
- De la 27 a la 32, establecen la teoría de las paralelas y demuestran que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- De la 33 a la 48, tratan de los paralelogramos, triángulos y cuadrados, con referencias especiales a las relaciones de área. La Proposición 47 es el Teorema de Pitágoras, y la Proposición 48 es el recíproco de este teorema.

La demostración de cada proposición muestra el rigor con el que se argumenta. En cada paso de la argumentación se proporciona la razón, es decir, se da la definición, el postulado o la noción común que lo justifica. A continuación, se realiza aleatoriamente algunas demostraciones de las 32 proposiciones, principalmente aquellas que implican construcciones con regla y compás; las otras las puede encontrar en el anexo digital de la presente investigación, la elaboración de las proposiciones 33 a la 48 son parte de la propuesta de las actividades.

1. **Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.**

Hipótesis: Dado el segmento $\overline{AB}$ construir un triángulo equilátero ▲ ABC.

1. Por el postulado 3, se construye el círculo 1 de radio *AB*
2. Por el postulado 3, se construye el círculo 2 de radio *BA*
3. Desde el punto C, donde se cortan los círculos se traza el segmento $\overline{CA}$ por el postulado 1.
4. De igual manera se traza el segmento $\overline{CB}$.
5. El triángulo ▲ ABC es equilátero.
    a. Ya que el punto A es el centro del círculo 1, por lo tanto, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, son iguales $\overline{AC} = \overline{AB}$, dada la definición 15.

b. Ya que el punto B es el centro del círculo 2, los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$, son iguales $\overline{CB}$ = $\overline{AB}$, dada la definición 15.

6. Las cosas iguales a una tercera son iguales entre sí. Por lo tanto, $\overline{AC}$ = $\overline{CB}$. Por la definición 20 el triángulo ▲ ABC es equilátero (ver Figura 6).

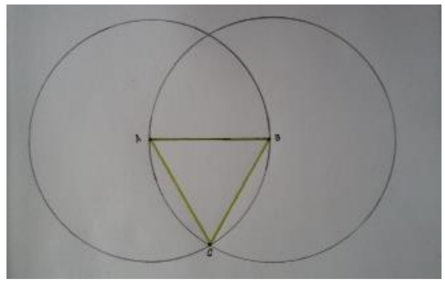


Figura 6. Proposición 1.

2. **Poner en un punto dado una recta igual a una recta dada.**

Hipótesis: Sean A un punto, y $\overline{BC}$ un segmento. Construir el segmento $\overline{AM}$, tal que $\overline{AM}$ = $\overline{BC}$.

1. Dado el postulado 1, se construye el segmento $\overline{AB}$.
2. Por la proposición 1, se construye el triángulo equilátero ▲ BAD.
3. Dado el postulado 2, el lado $\overline{AE}$ es la prolongación del lado $\overline{DA}$.
4. Del mismo modo $\overline{BF}$ es la prolongación del lado $\overline{DB}$.
5. Dado el postulado 3, con centro en el punto B y radio *BC* se traza el círculo.

a. Por tanto, el segmento $\overline{BC}$ = $\overline{BG}$ por la definición 15.

6. Por el postulado 1, se traza el segmento $\overline{DG}$.
7. Dado el postulado 3, con centro en el punto D y radio *DG* se traza el círculo.

a. Por tanto, el segmento $\overline{DM}$ = $\overline{DG}$, por la definición 15.

8. Por el postulado 1, se traza el segmento $\overline{DM}$.
9. Dado que D es el punto centro, por tanto, $\overline{DG}$ = $\overline{DM}$.
10. Cómo los segmentos $\overline{DB}$ = $\overline{DA}$, Entonces los segmentos $\overline{AL}$ = $\overline{BG}$.

11. Del mismo modo los segmentos $\overline{AL}$ = $\overline{BG}$ = $\overline{BC}$ (ver Figura 7).

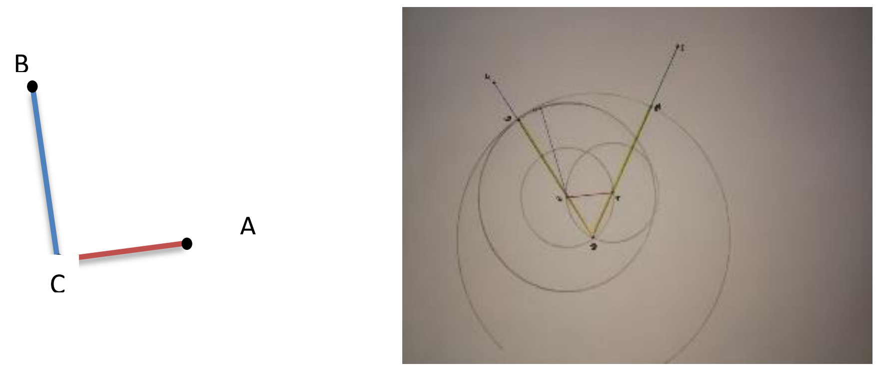


Figura 7. Proposición 2.

3. **Dadas dos rectas desiguales, restar de la mayor una recta igual a la menor.**

Hipótesis: El segmento $\overline{AB}$ y el lado *c* son segmentos dados y el segmento $\overline{AB}$ > *c*, construir sobre el segmento $\overline{AB}$ un segmento $\overline{AF}$, tal que el segmento $\overline{AF}$ = *c.*

1. Dada la proposición anterior se traza un segmento $\overline{AE}$ a partir del punto A, de tal manera que el segmento $\overline{AE}$ = *c*.
2. Ahora por el postulado 3, se traza un círculo centro en el punto A y radio *AE*, donde F es la intersección del círculo con el segmento $\overline{AE}$.
3. Como A es el centro del círculo, por la definición 15 se obtiene que los segmentos $\overline{AF}$ = $\overline{AE}$.
4. De igual manera el segmento $\overline{AE}$ = *c*, entonces, los segmentos $\overline{AF}$ = $\overline{AE}$ = *c.*
5. En conclusión, el segmento $\overline{AF}$ = *c*, (ver Figura 8).

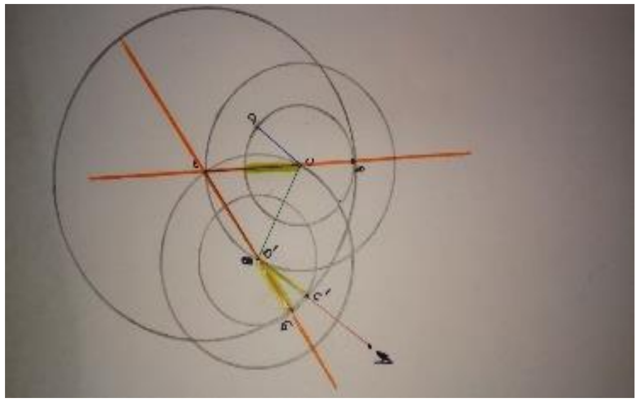


Figura 8. Proposición 3.

4. En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.

Hipótesis: Sea ▲ ABC un triángulo isósceles, de tal manera que los segmentos $\overline{AB}$ = $\overline{BC}$ y los ángulos ∢ABC = ∢ACB y ∢DBC=∢BCE.

1. Dado el postulado 2, los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.
2. F es un punto cualquiera del segmento $\overline{BD}$.
3. Por la proposición 3, se traza sobre el segmento $\overline{AE}$, el segmento $\overline{AG}$ entonces los segmentos $\overline{AE}$ = $\overline{AF}$.
4. Por el postulado 1, se construye el segmento $\overline{FC}$ y se obtiene el triángulo ▲ AFC.
5. Por el postulado 1, se construye el segmento $\overline{GB}$ y se obtiene el triángulo ▲ AGB.
6. Según la proposición anterior los segmentos $\overline{AF}$ = $\overline{AG}$ y $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$, y el ángulo ∢FAG es común entre los dos triángulos. Las bases son iguales $\overline{FC}$ = $\overline{GB}$, los triángulos ▲ AFC y ▲ AGB son iguales, los ángulos que quedan de los triángulos son iguales.

7. Finalmente, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales, por lo tanto, los ángulos ∢ABG = ∢ACF y ∢AFC = ∢AGB, (ver Figura 9).

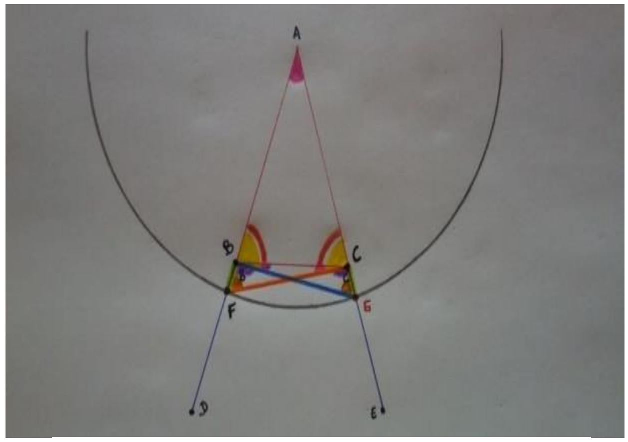


Figura 9. Proposición 5.

5. **Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado.**

Hipótesis: Sea el ángulo ∢BAC, dividirlo en dos partes iguales.

1. Se escoge un punto cualquiera D sobre el segmento $\overline{BA}$, se traza el segmento $\overline{AD}$.
2. Dada la proposición 3, se construye el segmento $\overline{AE}$ sobre el segmento $\overline{AC}$, por tanto, los segmentos $\overline{AE}$ = $\overline{AD}$. Ahora se construye el segmento $\overline{DE}$.
3. Dada la proposición 1, construir el triángulo ▲ DEF, por tanto, los segmentos $\overline{DE}$ = $\overline{EF}$ = $\overline{DF}$.
4. Construir el segmento $\overline{AF}$, el ángulo ∢BAC se biseca por el segmento $\overline{AF}$.
5. Ahora se tiene los triángulos ▲ DAF y ▲ FAE, los lados $\overline{AD}$ = $\overline{AE}$ y $\overline{AF}$ es un lado en común, el segmento base $\overline{DF}$ = $\overline{EF}$.
6. Los triángulos ▲ DAF y ▲ FAE por la proposición 8 son iguales.
7. Los ángulos ∢DAF y ∢FAE son iguales.
8. Finalmente, el segmento $\overline{AF}$ es la bisectriz del ángulo ∢BAC, ∢BAC = ∢DAF + ∢FAE, (ver Figura 10).

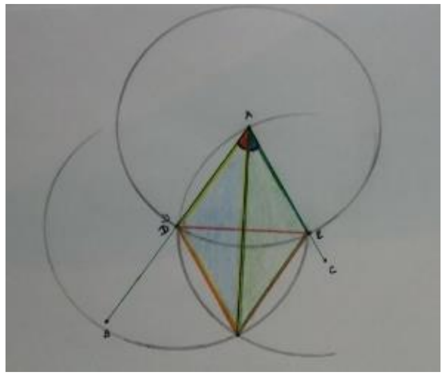


Figura 10. Proposición 9.

6. **Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella.**

Hipótesis: Dado el segmento $\overline{AB}$ de recta dada.

1. Dada la proposición 1, construir el triángulo ▲ ABC sobre el segmento $\overline{AB}$.
2. Por la proposición anterior, construir la bisectriz del lado $\overline{CD}$ del ángulo ∢ACB.
3. De tal forma que los ángulos ∢ACD = ∢BCD, por tanto, el lado $\overline{AB}$ es bisecado por D.
4. Ahora en los triángulos ▲ ACD y ▲ BCD se tiene que los segmentos $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ es lado común, por tanto, ∢ACD = ∢BCD, por la proposición 4 los triángulos son iguales.
5. Entonces las bases $\overline{AD}$ = $\overline{BD}$, se ha encontrado un punto D en el segmento $\overline{AB}$, entonces los segmentos $\overline{AD}$ = $\overline{BD}$ (ver Figura 11).

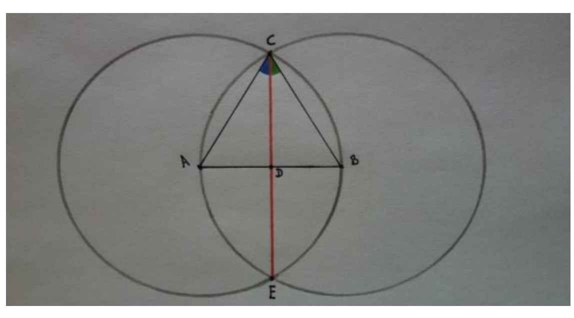


Figura 11. Proposición 10.

7. **Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella.**

Hipótesis: Sea $\overline{AB}$ un segmento dado, y C un punto en el segmento $\overline{AB}$.

1. Sobre el segmento $\overline{AC}$, tomar un punto D cualquiera.
2. Dada la proposición 3, sobre el segmento $\overline{CB}$ se escoge un punto E, de tal forma, que los segmentos $\overline{CE}$ = $\overline{CD}$, Además por la proposición 1, se construye el triángulo ▲ FDE en el segmento $\overline{DE}$, por lo tanto, los segmentos $\overline{DF}$ = $\overline{FE}$ = $\overline{DE}$.
3. Ahora, construir el segmento $\overline{CF}$, esta recta se encuentra en ángulo recto sobre el segmento $\overline{AB}$ en el punto C.
4. Dados los triángulos ▲ DCF y ▲ FCE, los lados $\overline{CD}$ = $\overline{CE}$, además tenemos el lado común $\overline{CF}$, así mismo, las bases $\overline{DF}$ y $\overline{FE}$ son iguales, por la proposición 8, los dos triángulos son iguales.
5. Entonces, los ángulos ∢DCF y ∢FCE son iguales, siendo ángulos adyacentes iguales.
6. Por la definición 10, los ángulos son rectos (ver Figura 12).

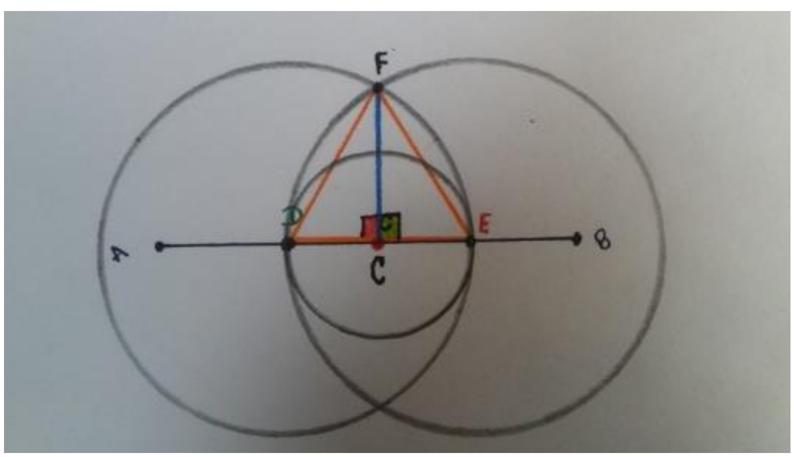


Figura12. Proposición 11.

8. **En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.**

Hipótesis: Demostrar que la suma de dos ángulos interiores del triángulo ▲ ABC es menor que 180º.

1. Dado el postulado 2, se alargar el segmento $\overline{BC}$ hasta el punto D.
2. Por la proposición 16, el ángulo ∢ABC < ∢ACD.
3. Ahora ∢ABC + ∢ACB < ∢ACD + ∢ACB.
4. De acuerdo a la proposición 13, ∢ACD + ∢ACB = 180°.
5. Por lo tanto, ∢ABC + ∢ACB < 180°.
6. Del mismo modo ∢BAC + ∢ACB < 180°, por tanto, ∢BAC + ∢ABC < 180° (ver Figura 13).

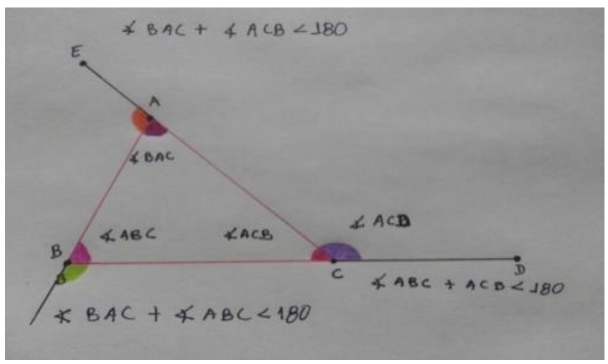


Figura 13. Proposición 17.

9. En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor.

Hipótesis: Sea ▲ ABC un triángulo tal que el lado $\overline{AC}$ es mayor que el lado $\overline{AB}$.

1. Dado la proposición 3, los segmentos $\overline{AC}$ > $\overline{AB}$, se construye el segmento $\overline{AD}$, de modo que los segmentos $\overline{AD}$ = $\overline{AB}$.
2. Unir el punto D con el vértice B, de forma que se construyen los triángulos ▲ BAD y ▲ BDC.
3. Ahora el ángulo ∢ADB es exterior al triángulo ▲ BCD, por la proposición 16, se obtiene ∢ADB < ∢DCB.
4. Por la proposición 5, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ son iguales, ya que el triángulo ▲ BAD es isósceles, entonces ∢ADB = ∢ABD.

5. Por otro lado, los ángulos ∢ADB > ∢ DCB, entonces ∢ABD > ∢ ACB.

6. Entonces, ∢ABC = ∢ ABD + ∢ DCB.

7. Por lo tanto, ∢ ABD > ∢ACB.

8. Finalmente ∢ABC > ∢ACB (ver Figura 14).

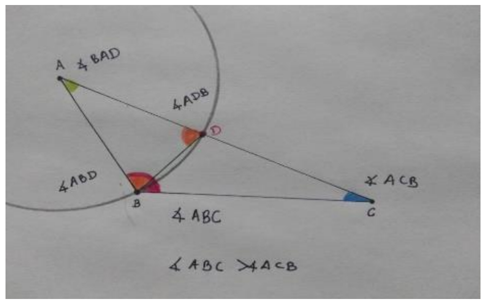


Figura 14. Proposición 18.

10. Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

Hipótesis: Sea $\overline{AB}$ el segmento dado y A uno de sus puntos, y sea ∢DCE el ángulo rectilíneo dado.

1. Tome los puntos D y E sobre el ángulo ∢DCE.

2. Ahora una los puntos D y E obteniendo los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$.

3. Por la proposición anterior, formar el triángulo ▲ AFG, los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{AG}$ y $\overline{FG}$, de modo que se obtenga los siguientes segmentos $\overline{AF}$ = $\overline{CD}$, $\overline{AG}$ = $\overline{CE}$ y $\overline{FG}$ = $\overline{DE}$.

4. Dado que los lados $\overline{AF}$ y $\overline{AG}$ son iguales y las bases $\overline{DE}$ y $\overline{FG}$ también lo son, entonces por la proposición 8, se obtiene que ∢DCE = ∢FAG.

5. Entonces se ha construido el ∢FAG que es igual ∢DCE (ver Figura 15).

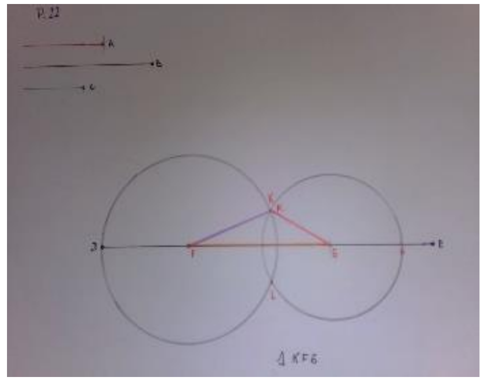


Figura 15. Proposición 23.

El estudio de estas demostraciones, está dado por dos razones, en primer lugar, con la idea de ilustrar los métodos euclidianos y en segundo lugar porque algunas de ellas van a formar parte de las actividades con los estudiantes.

2.4. Geometrías no euclidianas

Por más de 2000 años la geometría de Euclides era considerada como la única, sin embargo, el quinto postulado presentó diversas dificultades en gran medida por su formulación más compleja, extensa y no tan intuitivo a diferencia de los postulados anteriores. Durante los siglos XVII y XVIII el quinto postulado fue cuestionado por diversos matemáticos, algunos de ellos realizan diversos esfuerzos por demostrar este postulado, entre ellos tenemos Wallis (1616 - 1703), Saccheri (1667 - 1733), Lambert (1728 - 1777) y Legendre (1752 - 1833).

En sus intentos por demostrar la validez de este postulado, muchos de ellos admiten argumentos equivalentes con respecto al quinto postulado, conocidos como postulados sustitutos. Entre los trabajos desarrollados como postulados equivalentes o sustitutos se encuentra el de John Playfair (1748 - 1819), "*En un plano, dada una línea y un punto que no está en ella, a lo sumo se puede trazar por el punto una línea paralela a la línea dada*"[49] conocido hoy en día como el postulado de las paralelas.

Otros postulados equivalentes son:

- Dada una recta y un punto fuera de ella, por el punto pasa exactamente una recta paralela a la primera (Proclo).
- Existen triángulos de distinta área con ángulos iguales (Wallis, 1663).
- Dado un triángulo, siempre hay otro de área mayor (Gauss, 1799).
- Los puntos del plano situados al mismo lado de una recta y a la misma distancia de ella forman una recta (Clavius, 1574).
- Tres puntos distintos del plano o bien están alineados o yacen en un mismo círculo (Janos Bolyai, 1830).
- Existe un par de rectas coplanares en que todos los puntos de una se encuentran a la misma distancia de la otra (Postulado de Posidoneo).
- Por un punto situado dentro de un ángulo menor de 60° puede siempre trazarse una recta que corte a ambos lados del ángulo (Hipótesis de Lorentz).
- Existe al menos un triángulo en que la suma de sus tres ángulos es igual a dos rectos (Postulado de Legendre).
- Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo también es recto (Postulado de Lambert).

Otro matemático en el afán de demostrar la validez del quinto postulado fue Girolamo Saccheri (1667 - 1733), en su libro titulado *"omni Euclides ab naevo vindicatus"* (Euclides, sin ningún fallo) publicado en

[49] Playfair, J. (1846). Cita tomada directamente de Wikipedia.

1733, es el primero en considerar hipótesis contradictorias con el postulado. El plantea la idea de retirar el quinto postulado y colocar una hipótesis contraria, "*si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos"*[50] (Postulado de Saccheri).

Estos trabajos encaminados a transformar el postulado en teorema, conllevaron a encontrar los primeros pasos para alcanzar el desarrollo de las geometrías consideradas no euclidianas. Los diferentes tropiezos y esfuerzos en la ejecución por hallar argumentos que parten de la negación del quinto postulado, generan un semillero de aspectos productivos, la suposición de la no existencia de una recta paralela a una recta dada conllevó a la geometría esférica y suponer la existencia de más de una recta paralela a una recta dada, desencadenó en la geometría hiperbólica.

Retomando los aportes realizados por el jesuita italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733), éste escribe en uno de sus trabajos "*aunque admita como hipótesis la falsedad de la proposición que se quiere demostrar, se llega igualmente a concluir que es verdadera"*[51]. En un cuadrilátero conocido hoy en día como el cuadrilátero de Saccheri, (birrectángulo) el cual tiene dos ángulos rectos y dos lados opuestos de la misma longitud perpendiculares a la base, se propuso demostrar a partir de los 4 primeros postulados que los otros dos ángulos también eran rectos, lo cual era equivalente a demostrar el quinto postulado. Sin embargo, solo pudo demostrar que los otros dos ángulos eran congruentes.

Saccheri a pesar de no lograrlo, obtiene valiosos e importantes hallazgos los cuales se convierten en parte de las propiedades de la geometría no euclidiana. A pesar de estos descubrimientos tan sobresalientes, Saccheri los consideraba maliciosos e imposibles ya que este no concebía la existencia

[50] Alberto D. (1992), Historia de la matemática, p. 47
[51] Saccheri, G. (1903). Revista filosófica.

de otro tipo de geometría, pues la geometría euclidiana fue considerada por mucho tiempo como una lectura precisa de la realidad.

El trabajo desarrollado por Gerolamo Saccheri fue considerar un cuadrilátero $ABCD$ con $AD = BC$, donde los ángulos $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle CBA$ son rectos, entonces existen tres casos, según que este ángulo sea recto, agudo u obtuso. Se demuestra que siempre se está en el mismo caso cualesquiera sean las dimensiones de la base AB y de los segmentos iguales AD y BC, entonces aparecen así tres posibilidades que pueden tomarse como hipótesis: la del ángulo recto, la del ángulo agudo y la del ángulo obtuso, según lo sea el ángulo $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD$. Saccheri demuestra que el postulado de las paralelas equivale a la hipótesis del ángulo recto y trata a probar que las otras hipótesis conllevan a un absurdo.

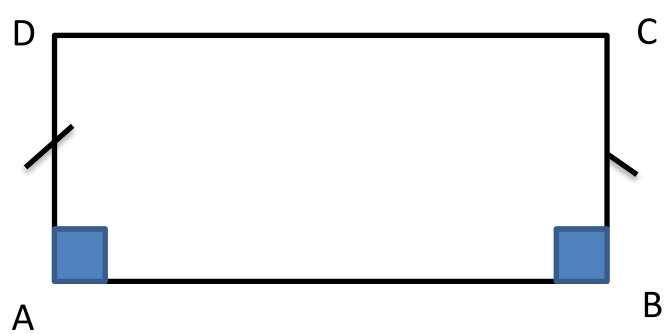


Figura 18. Cuadrilátero de Saccheri.

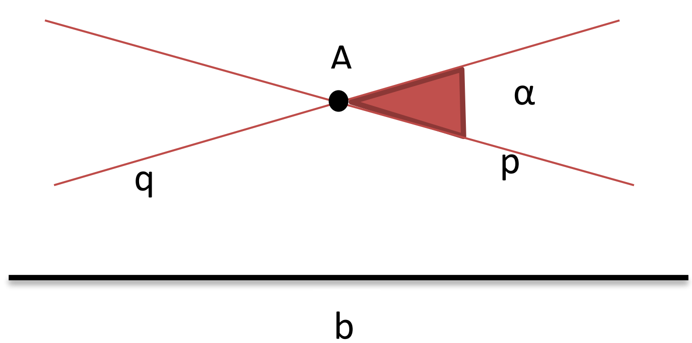
Para la hipótesis del ángulo obtuso consigue demostrar que ella conduce a la conclusión de que las rectas son finitas, lo que toma como el absurdo deseado, y por lo tanto excluye tal posibilidad. En cambio, para la hipótesis del ángulo agudo no consigue llegar a contradicción alguna.

1) Los ángulos $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle BDC$ son rectos. Hipótesis del ángulo recto, $\measuredangle ACD = \measuredangle BDC = 1$ recto.
2) Los ángulos $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle BDC$ son obtusos. Hipótesis del ángulo obtuso, $\measuredangle ACD = \measuredangle BDC > 1$ recto.
3) Los ángulos $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle BDC$ son agudos. Hipótesis del ángulo agudo, $\measuredangle ACD = \measuredangle BDC < 1$ recto.

Al realizar la demostración con base en la primera hipótesis se prueba que los ángulos deben ser rectos no pueden ser obtusos, llegando a una contradicción ya que se había partido de que eran obtusos.

Al buscar demostrar la hipótesis del ángulo agudo llegó a los mismos resultados, considerándolos contradictorios con la naturaleza de las rectas, y concluyó entonces que el quinto postulado se derivaba de los otros. Sin embargo, la "contradicción" que encuentra no estaba tan clara y se refiere más bien a la naturaleza de las rectas; es decir se refiere a la idea sobre lo que una recta debe ser y no a una inconsistencia lógica.

Fitzpatrick, (1964) se refiere al trabajo realizado por Saccheri (1733) y como llega al siguiente teorema: "*Dados cualquier punto A y una recta b, sobre la hipótesis del ángulo agudo existe en el lápiz (familia) de rectas a través de* A_2 *líneas p y q que dividen el lápiz (la familia) en dos partes. La primera de éstas consiste de las líneas que intersecan b, y la segunda consiste de aquellas líneas (sobre el ángulo α) que poseen una perpendicular común con b en algún lugar de b. Las líneas p y q son ellas mismas asintóticas a b*"[52]. De este resultado y una argumentación extensa, Saccheri dedujo que *p* y *q* tienen una perpendicular común en su punto común, que es en el infinito. Es esto lo que Saccheri considera que no corresponde a la naturaleza de las rectas.



Después de obtener concienzudamente muchos de los teoremas hoy clásicos de la geometría no euclídea, Saccheri obtiene incorrectamente una contradicción no convincente. En palabras de Saccheri:

[52] Fitzpatrick, M. O. M. (1964). Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry. The Mathematics Teacher, p<. 323-332.

La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, ya que es repugnante a la naturaleza de la línea recta.

A mediados del siglo XIX, matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Johann Bolyai (1802-1860) y Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) empiezan a reconocer que el quinto postulado realmente era independiente de los cuatro anteriores, considerando tres cuestiones diferentes las cuales son: por un punto no contenido sobre una recta dada, 1) pasa más de una, 2) solo una, o 3) ninguna recta paralela a la dada. Al desarrollar el estudio sobre la independencia del postulado de las paralelas se logra establecer nuevas geometrías consistentes y sin contradicciones. A continuación, se analiza el estudio de la geometría hiperbólica correspondiente al caso tercero, que es el objeto de esta investigación.

2.4.1. Geometría hiperbólica

El primer matemático en detectar que el quinto postulado era independiente de los demás fue Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855); este fundamenta la posibilidad de tener una nueva geometría diferente a la euclidiana pero igualmente lógica y precisa. Eves (2002) plantea que *"Para Gauss, el espacio era una estructura ya existente en el espíritu humano y los postulados eran en realidad juicios impuestos"*[53].

Así mismo el matemático Johann Bolyai (1802 - 1860) realiza estudios al establecer otra hipótesis en cuanto al quinto postulado, éste envía a su padre el matemático Wolfgang Bolyai una carta donde *"… expresa la felicidad por encontrar el nacimiento de una nueva geometría que conllevará a la creación de un nuevo y extraño universo"*[54]. En 1832 Johann Bolyai publica sus descubrimientos en un trabajo realizado por su padre. Gauss al leer la publicación contesta a Wolfgang que no puede elogiar el trabajo desarrollado por Johann ya que él mismo había llegado a conclusiones similares, y resalta la importancia

[53] Eves, H. (2002). Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, p. 844.
[54] Wolfe, H. E. (1945). Introduction to non-euclidean geometry. New York: The Dryden Press, p. 50.

que alguien diferente a él hubiese establecidos dichos resultados. Esto decepciona a Johann, ya que él esperaba haber sido el primero en establecer estos resultados, a tal punto que no pública nada más.

El matemático Nicolai Ivanovich Lobachevsky desarrolla un análisis más profundo a la existencia de más de una recta paralela a la recta dada originando lo que es conocido hoy en día como la geometría hiperbólica, resaltando la gran similitud entre la geometría euclidiana y la hiperbólica ya que estas solo difieren en el postulado de las paralelas. El primer trabajo de Lobachevsky, *On the Principles of Geometry* publicado en 1829 plantea que *"… marca el origen de la Geometría no-Euclidiana, pues fue Lobachevsky el primer matemático a dar el paso revolucionario de publicar una geometría específica construida sobre una hipótesis en relación directa con el postulado de las paralelas: Por un punto C fuera de una recta AB se puede trazar más de una recta del plano que no encuentra AB"*[55].

En palabras de Barker (1969) *"Los principios de esta nueva geometría eran diferentes de los principios euclidianos. En esta nueva geometría es posible obtener más de una recta paralela a una recta dada, por un punto fuera de esa recta; la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que dos rectos; los triángulos que limitan áreas diversas no son similares. Principios que huían de los patrones euclidianos, pero perfectamente coherentes, sin contradicción con los demás"*[56].

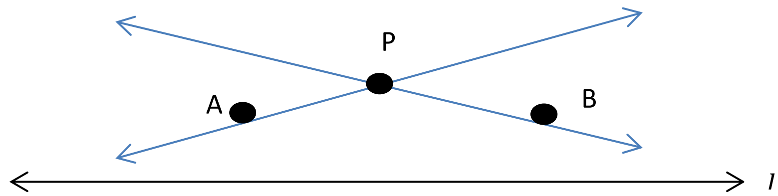
Históricamente queda establecido que los matemáticos que desarrollan la geometría hiperbólica son Gauss, Bolyai y Lobachevsky, sin embargo, el primero que publicó los resultados de su descubrimiento fue Lobachevsky, por esto se le da la recompensa del descubrimiento de esta geometría. Por su parte las dudas que generan estos descubrimientos son subsanadas a finales del siglo XIX gracias a los matemáticos Eugenio Beltrami, Henri Poincaré y Felix Klein, que crean modelos en el universo euclidiano, para esta nueva geometría. Para definir estos modelos, se debe introducir algunos conceptos nuevos.

---

55 Boyer, C. (1996). Historia da Matemática. S˜ao Paulo: Editora Edgard Bl¨ucher, p. 397.
56 Barker, S. (1969). Filosofia da Matemática. Rio de Janeiro: Zahar Editores, p. 51.

2.4.2. Resultados Hiperbólicos

Axioma hiperbólico. En la geometría hiperbólica existe una línea l y un punto P, que no está sobre l, tales que hay al menos dos rectas distintas que pasan por P y son paralelas a l.



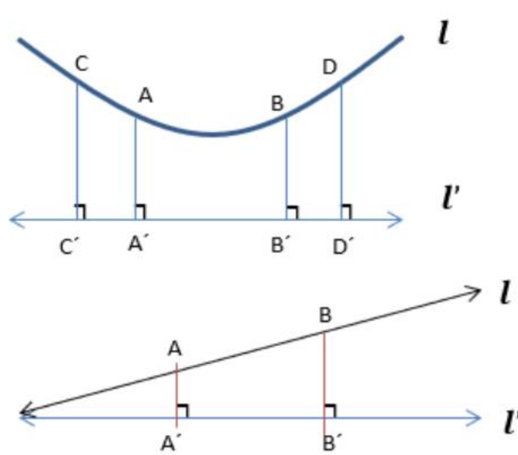
Teorema 1. En geometría hiperbólica, no existen los rectángulos y en todos los triángulos se satisface que la suma de sus ángulos es menor que 180°.

Corolario. En todos los cuadriláteros se satisface que la suma de sus ángulos es menor que 360°.

Teorema 2. En geometría hiperbólica, si dos triángulos son semejantes entonces son congruentes.

Teorema 3. En geometría hiperbólica, si l y l' son dos líneas paralelas distintas, entonces cualquier conjunto de puntos de l equidistantes de l' tiene a lo más dos elementos.

Al existir dos puntos en l que al mismo tiempo sean equidistantes de l' pueden tenerse dos posibilidades:



Teorema 4. Dado el cuadrilátero $ABCD$, con ángulos rectos en C y D, luego lado $AD > BC$ si y solo si el ángulo $\measuredangle ABC > \measuredangle BAD$ (ver Figura 19).

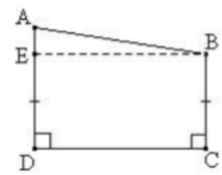


Figura 19. Teorema 5. (El lado más largo está opuesto al ángulo más grande).

Una consecuencia directa de esto es que el segmento que conecta los puntos medios de la cima y la base de un cuadrilátero de Saccheri es más corto que sus lados. También sabemos que este segmento es el único segmento perpendicular a la base y la cima. (Si hubiera otro, entonces se tiene un rectángulo).

Teorema 5. El segmento que conecta los puntos medios de la cima y la base de un cuadrilátero de Saccheri es más corto que los lados y es el único segmento perpendicular tanto a la cima como a la base.

Teorema 6. Si l y l' son líneas paralelas para las cuales existe un par de puntos A y B sobre l equidistantes de l', entonces l y l' tienen un segmento perpendicular común, que además es el segmento más corto entre l y l'.

A continuación, se demuestra este teorema. Suponga que los puntos A y B en l son equidistantes de l'. Entonces $A'B'BA$ es un cuadrilátero de Saccheri, donde A' y B' son los pies en l' de las perpendiculares de A y B. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y M' el punto medio de $\overline{A'B'}$ (ver Figura 20).

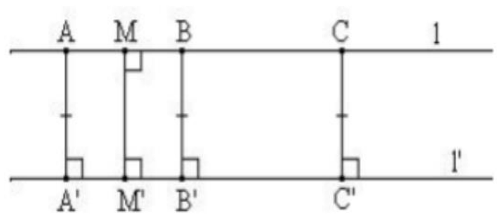


Figura 20. Demostración teorema.

La existencia de la perpendicular común es inmediata según el teorema 5. Para mostrar que la longitud de esta perpendicular común es la distancia más corta entre l y l', elija cualquier punto C en l, y sea C' el pie de la perpendicular de C a l'. Dado el cuadrilátero $M'C'CM$ y según el teorema 4, el lado CC' es mayor que MM'.

Teorema 7. Si dos líneas l y l' tienen un segmento perpendicular común $\overline{MM'}$, entonces dichas líneas son paralelas, y el segmento $\overline{MM'}$ es único. Además, si A y B son puntos en l tales que M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, entonces A y B equidistan de l'.

A continuación, se demuestra este teorema. Sabemos que si l y l' tienen un lado MM' perpendicular común, entonces l es paralelo a l' según el teorema (Si dos líneas están cortadas por una transversal de manera que un par de ángulos alternos internos sean congruentes, entonces las líneas son paralelas), También se sabe que MM' es único porque si no lo fuera, se tiene un rectángulo. Queda por demostrar que A y B, dada la Figura 21 son equidistantes de l'. Por LAL, los triángulos AMM' y BMM' son congruentes, y por AAL, los triángulos $AA'M'$ y $BB'M'$ son congruentes. Entonces los segmentos AA' y BB' son congruentes.

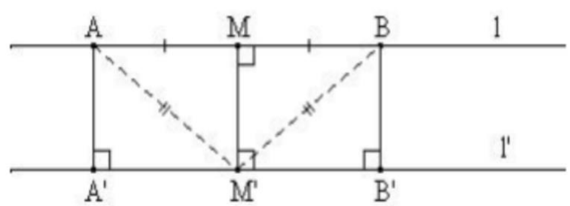


Figura 21. Teorema 7.

Teorema 8. Para toda línea l y todo punto P que no está sobre l, sea Q el punto sobre l tal que $\overline{PQ}$ es el segmento perpendicular a l. Entonces existe Qn dos únicos rayos $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{PX'}$, situados en caras opuestas de la línea $\overline{PQ}$, que no cortan a l y tienen la propiedad siguiente: un rayo emanando de P corta a l si y sólo si está entre $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{PX'}$. Además, estos rayos límite están situados simétricamente alrededor de $\overline{PQ}$, en el sentido que $\measuredangle XPQ \cong \measuredangle X'PQ$.

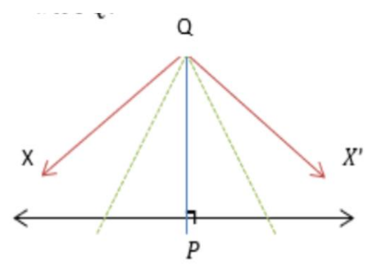


Figura 22. Teorema 8.

Se puede observar que en la geometría hiperbólica existen dos tipos de líneas paralelas a una recta l. Las primeras son las líneas paralelas m que tienen una perpendicular en común. Las rectas m y l divergen en ambos lados de la perpendicular en común.

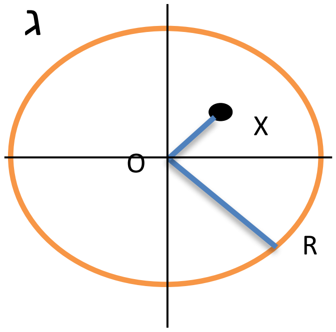
Las segundas son las paralelas m que se aproximan asintóticamente a la recta dada l, según una dirección que contiene un rayo paralelo límite, divergen según la dirección contraria, en este caso, las rectas l y m no tienen una perpendicular común.

Teorema 9. Sea m una línea paralela a l que no contiene un rayo límite paralelo (en ninguna de las dos direcciones), entonces existe una perpendicular común a m y l (que además es única).

Estos resultados no buscaban realizar una exhaustiva colección de todos los teoremas que conforman esta geometría, al contrario, buscan dar una mirada diferente. A continuación, se observa los modelos que dan consistencia a la geometría hiperbólica.

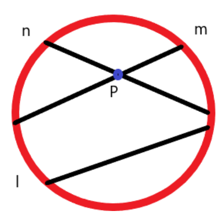
2.4.3. Consistencia de la geometría hiperbólica: Modelos

2.4.3.1. El Modelo De Beltrami – Klein



Se considera una circunferencia ƛ en el plano, de centro en un punto O y de radio $\overline{OR}$. Entonces el interior de ƛ es el conjunto de puntos X tales que $\overline{OX} < \overline{OR}$.

Una cuerda ƛ es un segmento $\overline{AB}$ uniendo dos puntos A y B que están en ƛ. Se define la cuerda abierta, y se denota $A)(B$, como la cuerda AB sin los puntos extremos A y B. En el modelo de Beltrami – Klein, abreviadamente, se denomina modelo de Klein, las cuerdas abiertas representan las líneas del plano hiperbólico. La relación "está sobre" tiene la misma interpretación en la geometría euclidiana: P se encuentra en $A)(B$ significa que P se encuentra en la línea euclidiana $\overline{AB}$ y P está entre A y B. La relación hiperbólica "entre" también se interpreta como la misma relación en la geometría euclidiana. La interpretación de la "congruencia" requiere un poco más de trabajo y esfuerzo. La siguiente figura justifica inmediatamente que el axioma hiperbólico se satisface:



Se puede observar que las dos cuerdas m y n pasan por el punto P, siendo paralelas a la cuerda l, ya que no tienen puntos en común (el plano hiperbólico se circunscribe al interior de la circunferencia). El hecho de que los segmentos en el plano Euclidiano al prolongarse se corten es irrelevante, los puntos fuera de λ no representan puntos del plano hiperbólico. Una vez que se han interpretado todos los términos definidos, se debe interpretar los axiomas del sistema. La incidencia de axioma, por ejemplo, tiene la siguiente interpretación en el modelo de Klein:

Axioma: Dados dos puntos distintos en el interior de la circunferencia λ, existe una única cuerda abierta l de λ tal que A y B están sobre l.

Este axioma en la geometría euclidiana es un teorema. Una vez que todos los axiomas de la geometría hiperbólica han sido interpretados como resultados de los teoremas de la geometría euclidiana; cualquier prueba de contradicción en la geometría hiperbólica se puede trasladar inmediatamente a una contradicción en la geometría euclidiana. Del convencimiento de la consistencia en la geometría euclidiana, se deduce que tal prueba de contradicción no puede existir. En consecuencia, si la geometría euclidiana es consistente, entonces también lo es la geometría hiperbólica.

2.4.3.2. El Modelo de Poincaré

El modelo de disco es debido a Henri Poincaré (1854-1912), el cual representa los puntos del plano hiperbólico, como los puntos del interior de una circunferencia λ, pero las líneas se presentan de forma distinta. Todas las cuerdas que pasan por el centro O de la circunferencia (es decir, los diámetros abiertos de λ) representan líneas. Las otras líneas son arcos abiertos de circunferencias que intersecan ortogonalmente a ϱ, en el sentido Euclidiano del término ortogonal (ver Figura 23).

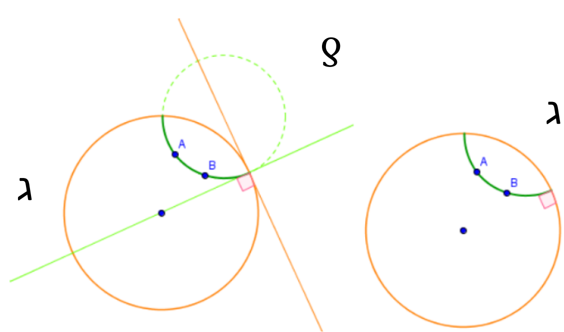


Figura 23. Modelo hiperbólico.

A continuación, se define la circunferencia ϱ ortogonal a la circunferencia λ. Por un lado, la intersección de ϱ con el interior de λ define un arco abierto m, que por definición representa una línea en el modelo de Poincaré. Por otro lado, una línea de Poincaré, una $P - línea$, es un diámetro abierto o bien un arco abierto m ortogonal a λ, como se observa en la Figura 24.

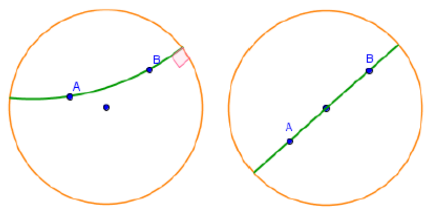


Figura 24. Modelo hiperbólico[57].

¿Cómo se interpretan las otras relaciones indefinidas de la geometría? Un punto interior a λ "está sobre" una $P - línea$ si está sobre ella en el sentido Euclidiano. De manera análoga, la relación "entre" tiene el mismo significado que en el caso Euclidiano. La interpretación de la "congruencia" tiene dos partes diferenciadas: la difícil (la relativa a la congruencia de segmentos) y la fácil (la que se refiere a la congruencia de ángulos). Esta última tiene el mismo significado que en el caso Euclidiano, lo que supone la principal ventaja de este modelo respecto del modelo de Klein. De manera totalmente análoga a como se ha hecho con el modelo de Klein, es posible trasladar, a través de este modelo, todos los axiomas de la geometría hiperbólica a teoremas de la geometría euclidiana.

En consecuencia, a lo planteado anteriormente, el modelo de Poincaré proporciona una nueva demostración de que, si la geometría euclidiana es consistente, entonces también lo es la geometría

[57] Ribeiro, R. (2013). Geometrias não-euckidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinámica, Pág 31.

hiperbólica. Observe a continuación algunas figuras que ilustran algunos de los resultados más característicos de la geometría hiperbólica, ver Figura 25.

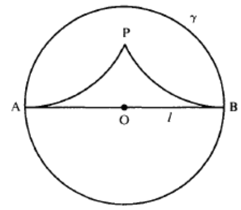


Figura 25. Figura hiperbólica.

La figura anterior ilustra los rayos límites paralelos. Como línea l se ha escogido el diámetro abierto $A)(B$; los rayos son los arcos circulares que cortan la recta AB en A y B, además, son tangentes a dicha línea en esos puntos. Puede observarse que estos rayos se aproximan asintóticamente a la recta l conforme se acerca a los puntos A y B. La siguiente figura ilustra dos $P - líneas$ con una perpendicular común. La gráfica muestra que m diverge de l por ambos lados de la perpendicular común (ver Figura 26).

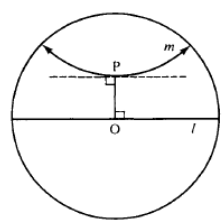


Figura 26. Modelo de Poincaré.

La siguiente figura ilustra un cuadrilátero de Lambert, donde puede comprobarse que el cuarto ángulo es agudo, (ver Figura 27).

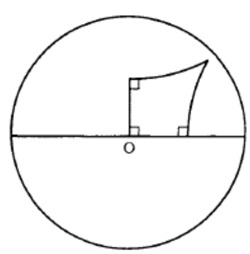


Figura 27. Modelo Poincaré.

Se anexa su imagen reflejada en un espejo se obtiene el cuadrilátero de Saccheri, (ver Figura 28).

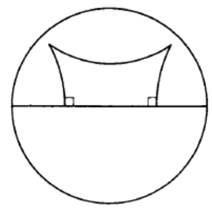


Figura 28. Cuadrilátero de Saccheri.

A continuación, se observa cómo construir circunferencias ortogonales:

1. Construir una circunferencia (Disco) de centro O y P punto en su interior (ver Figura 29).

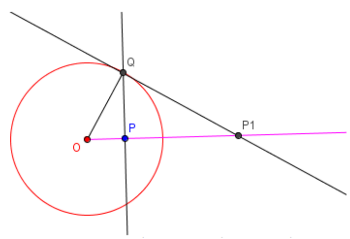


Figura 29. Construcción circunferencia ortogonal[58].

2. Ahora, la semirrecta OP de origen O y pasando por P.
3. Trace la recta perpendicular a la semirrecta OP, pasando por P, e interseccionando la circunferencia en el punto Q.
4. Trace la recta de radio OQ y recta perpendicular al radio en Q interseccionando la semirrecta OP en P_1 (ver Figura 29).

Esta transformación en asociación al punto P en el punto P_1 , que cumpla los pasos de la construcción es llamada la transformación de inversión en relación a la circunferencia (en el caso, el horizonte del Disco). En la construcción anterior, la inversión está definida para puntos del interior del círculo, y esto

[58] Ribeiro, R. (2013). Geometrias não-euckidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinámica, p. 31.

basta para explicar la construcción de la circunferencia ortogonal al horizonte del disco (para extender la definición hacia el plano, basta invertir el orden de la construcción dada arriba).

El punto P y su inverso P_1 satisfacen la igualdad $OP * OP_1 = r.r$, siendo el rayo del Disco. De hecho, como los triángulos rectángulos $\blacktriangle OPQ$ y $\blacktriangle OQP_1$ son semejantes, por el criterio AAA, se tienen la igualdad de razones $\frac{OP}{r} = \frac{r}{OP_1}$, por lo tanto, $OP * OP_1 = r.r$.

Ahora, se puede enunciar la siguiente propiedad: cualquier circunferencia pasando por los puntos P y P_1 (y ellos son infinitos) es ortogonal al horizonte del disco hiperbólico D (ver Figura 30).

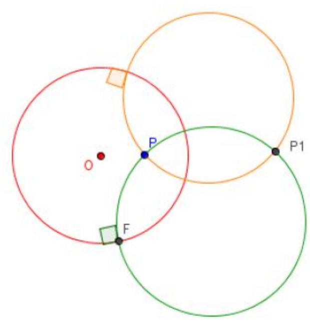


Figura 30. Circunferencias ortogonales.

2.5. Referentes sobre la geometría dinámica en el aula

En relación con la enseñanza y aprendizaje de la geometría, la tecnología propicia al estudiante la posibilidad de manipular, con la ayuda del ratón, los objetos representados en la pantalla del computador. Esta manipulación se caracteriza esencialmente por la posibilidad de movimiento o desplazamiento de elementos constitutivos de esas representaciones, el arrastre. Según Henríquez (1999) el arrastre abre nuevas posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de geometría basado en la exploración, posibilita que sus conceptos básicos se vuelvan más atractivos y accesibles. Zulatto (2002) afirma que el arrastre proporciona la simulación de diferentes casos de la figura, como si el alumno estuviera verificando "todos" los casos posibles de una misma familia de configuración.

Al respecto Schumann & Green (1994) aportan *"… el arrastre es un prerrequisito esencial para actividades de construcción interactiva, que van más allá de pura simulación de construcción con compás, regla y escuadra. Con el cursor, podemos mover libremente los objetos básicos de una construcción (...) y, de este modo, transformar la figura"*[59].

Por lo tanto, el software de geometría dinámica no sólo ofrece la posibilidad de efectuar cualquier construcción geométrica de modo más rápido y preciso que en el ambiente papel y lápiz, también crea la posibilidad de mover y modificar los dibujos, y con esta característica, permite a los estudiantes una visualización e identificación de propiedades geométricas invariantes bajo estas transformaciones. Entre los diversos softwares de geometría dinámica se puede destacar el software GeoGebra como una alternativa interesante. Es un software libre que se puede instalar de forma gratuita en cualquier computadora.

Es así como el software GeoGebra es una herramienta que une la geometría, el álgebra y el cálculo, convirtiéndose en un instrumento para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. GeoGebra permite desarrollar construcciones utilizando puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas y funciones, y a cambiar todos estos objetos dinámicamente después de que la construcción esté finalizada.

Además, GeoGebra ofrece el recurso de la regla y el compás electrónicos y el proceso de construcción de las figuras se hace mediante el uso de un menú en lenguaje natural de la geometría, por ejemplo punto, recta pasando por dos puntos, rectas paralelas, rectas perpendiculares, círculos, transformaciones geométricas.

En tanto a otras utilidades de este software, se encuentra el poder manejar variables para números, vectores y puntos, derivar e integrar funciones y aún ofrece comandos para encontrar raíces y puntos

---

[59] Schumann, H. y Green, D. (1994). Learning geometry through interactive construction. In: Discovering Geometry with a computer – Using CabriGéomètre. Ed. Chartwell-Bratt, p. 33

extremos de una función. De este modo, el programa reúne las herramientas tradicionales de la geometría, con otras más adecuadas al álgebra y al cálculo. Así tiene la ventaja didáctica de presentar al mismo tiempo dos representaciones diferentes de un mismo objeto, que interactúan entre sí: su representación geométrica y su representación algebraica.

Es así como se establece el potencial en la introducción de ambientes informáticos, en especial los de la geometría dinámica, ya que permiten la construcción de conocimientos geométricos. Con el propósito de utilizar el dinamismo del software GeoGebra en el estudio de la geometría hiperbólica, más precisamente con el modelo del Disco de Poincaré, se opta por realizar construcciones de herramientas que posibilitan la construcción de objetos geométricos hiperbólicos (rectas, círculo, segmentos, entre otros). De esta forma, se determina un "menú hiperbólico", donde es posible construir objetos hiperbólicos de forma sencilla, facilitando el proceso de interacción del estudiante con esa nueva geometría.

2.6. La teoría de la resolución de problemas. Problemas no rutinarios

Investigadores como Polya (1965), Krulik y Rudnik (1980), Schoenfeld (1985), Campistrous y Rizo (1996), Sriraman y English (2010), Rodríguez y Pochulu (2012), Liljedahl, Santos-Trigo (2019), entre otros, han realizado diferentes investigaciones sobre la resolución de problemas, aportando definiciones de problema, estrategias para resolver un problema e instrumentos para poder medir el avance de los estudiantes en la resolución de problemas. A continuación, se traen en mención un par de definiciones sobre problema y cuál es la postura que se adopta en el presente trabajo.

Polya (1965) plantea que: *“Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata”*[60].

[60] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas. p.117.

Por otro lado, Labarre (1996) enuncia que: *"…un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar[61]".*

Por su parte, Krulik y Rudnik (1987) expresan que: *"Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma[62]".* Esta definición es la que se asume en esta tesis.

En tanto a la resolución de problema, el presente trabajo asume la dada por *Polya, (1965)* el cual asevera que: *"...resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"[63].* Frecuentemente se encuentran situaciones que se pueden llamar problemas matemáticos, pero se debe tener cuidado porque lo que es un problema para un estudiante, puede no serlo para otro y para éste se convierte en una mera actividad.

Diferentes investigadores han abordado las fases o estrategias para la resolución de problemas, como son Polya (1965), Mason, Burton y Stacey (1988), Ballester et al. (1992), Schoenfeld (1995), entre otros.

Para resolver problemas se necesita de la construcción de un modelo matemático, este se define como un *"Sistemas de elementos, operaciones, relaciones, y las reglas que se pueden utilizar para describir, explicar o predecir el comportamiento de algún otro sistema familiar"[64]*. La construcción de modelos matemáticos para el proceso de resolución de problemas aumenta en los estudiantes su confianza, se

[61] Labarrere, A. (1988). Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. p. 6
[62] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . p. 4.
[63] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas.
[64] Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. Journal for research in mathematics education, p. 112.

tornan más perseverantes, creativos y mejoran su espíritu investigador, proporcionándoles un contexto en el que los conceptos pueden ser aprendidos y las capacidades desarrolladas.

Al tratar la temática de problemas en matemáticas se puede encontrar dos clasificaciones, problemas rutinarios y no rutinarios. Al respecto se encuentra las siguientes definiciones. Un problema rutinario es *"…cuando puede ser resuelto aplicando directa y mecánicamente una regla que el estudiante no tiene ninguna dificultad para encontrar; la cual es dada por los mismos profesores o por el libro de texto. En este caso no hay ninguna invención, ni ningún desafío a su inteligencia. El alumno adquiere cierta práctica en la aplicación de una regla única al resolver un problema como éste"*[65].

La presente investigación asume por problema no rutinario *"… cuando exige cierto grado de creación y originalidad por parte del estudiante. Su resolución puede exigirle un verdadero esfuerzo, pero no lo hará si no tiene razones para ello. Un problema no rutinario:*

- *Deberá tener un sentido y un propósito, desde el punto de vista del estudiante.*
- *Deberá estar relacionado, de modo natural, con objetos o situaciones familiares.*
- *Deberá servir a una finalidad comprensible para él"*[66].

Para mejorar las habilidades de los estudiantes a la hora de enfrentar un problema se establece como fases o estrategias para la resolución de problemas en esta tesis, las establecidas por Polya (1965) en su libro: *How to solve it.* Ellas son:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.

---

[65] Matematización, (2009) recuperable el 5 de 01 de 2015, de la URL: http://ciberdocenciagobpe.blogspot.com/2009/11/matematizacion.html

[66] Ministerio de Educación de Perú. Resolución de Problemas. Recuperable el 29 de enero de 2015 de la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf

- Revisión retrospectiva.

Al aplicar las etapas dadas por Polya (1965), aparece la noción de heurística, éste las define como *"el estudio de medios y métodos de la resolución de problemas"*[67].

Una heurística es utilizada por el estudiante cuando éste está en el proceso de resolver el problema, pero no se ajusta a estrategias exitosas que le permita dar una respuesta correcta al instante. El uso de las heurísticas se da en cualquier momento de los pasos establecidos por Polya (1965) en la resolución de problemas. A continuación, se mencionan algunas heurísticas:

- Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico.
- Razonar por analogía.
- Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos.
- Considerar casos particulares.
- Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar (razonamiento de tipo inductivo).
- Verificar usando casos particulares.
- Trabajar desde el final.
- Dividir el problema en sub-problemas.
- Simplificar el problema.
- Introducir un elemento auxiliar.

2.6.2. Sobre las etapas en la resolución de problemas

En palabras de Polya (1965) *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone*

[67] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas.

a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por medios propios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimir una huella imperecedera en la mente y en el carácter"[68].

Para mejorar la capacidad de desarrollo de los estudiantes en la resolución de problemas es primordial para el docente estimular en los estudiantes su interés por los problemas, así como también proporcionarles muchas oportunidades de practicarlos. A continuación, se encuentra una serie de preguntas heurísticas tomadas de Ballester et al., (1962) en cada etapa, las cuales pueden ser utilizadas como guía para propiciar este interés en los estudiantes.

En la primera etapa referida a comprender el problema se pueden realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante/contradictoria para determinar la incógnita?

En la segunda etapa referida a concebir el plan se pueden realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿Es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar? ¿imaginarse un problema análogo más simple/ general/particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, etc.

En el desarrollo de la tercera etapa que se refiere a ejecutar el plan se pueden realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿Puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución? ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

[68] Polya, G. (1957). How to Solve It second edition, p. 6. Recuperable 2 de 08 de 2014 de la URL: https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf.

En la cuarta etapa que se define como la revisión retrospectiva se puede realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

En la investigación se comparte el criterio relacionado a los fines de la resolución de problemas, los cuales constituyen el propósito de los problemas no rutinarios, pues estos deben:

- *“Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- *Darle una buena base matemática”*[69].

Para llevar a cabo la solución de un problema es necesario desarrollar una diversidad de estrategias, las cuales sean aplicables a diferentes situaciones. Además, se precisa que los estudiantes logren identificar una serie de mecanismos útiles para dar solución al problema. Algunas de las estrategias utilizadas según Ballester et al. (1992) son:

- Resolver un problema similar más simple: inicialmente desarrollar el problema con datos más sencillos muchas veces facilita su solución, una vez hecho este proceso se continúa a resolver el problema con los datos planteados.

---

[69] Resolución de problemas, (sf), recopilación, recuperable el 15 de 12 de 2014, de la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf

- Tanteo y error organizados (métodos de ensayo y error): a partir de la elección de operaciones y soluciones al azar, que cumplan con las condiciones dadas en el problema, se desarrolla hasta lograr el objetivo de la solución o comprobar que eso no es posible, después de algunos ensayos ya no se eligen operaciones al azar sino las condiciones necesarias para la solución del problema.
- Hacer una gráfica, un esquema, un dibujo, una tabla: al realizar un dibujo, esquema o diagrama, se puede llegar a la solución del problema, si la representación es adecuada, esto sucede porque el estudiante piensa mucho mejor con el apoyo de imágenes que con palabras, números o símbolos.
- Buscar irregularidades o un patrón: el estudiante debe considerar casos particulares o patrones iniciales, una vez realizado esto debe aplicarlos en la búsqueda de una solución general que sirva en todos los casos, este proceso es adecuado cuando el problema presenta figuras o secuencias de números ya que se usa un razonamiento inductivo para la solución.
- Trabajar hacia atrás: el estudiante lo resuelve con datos finales, desarrollando las operaciones que deshacen las iniciales, este proceso es muy útil cuando el problema implica juego de números.
- Imaginar el problema resuelto: es muy útil en construcciones geométricas, se realiza una figura aproximada a la que se plantea, de las conclusiones observadas en el bosquejo se plantea la solución para desarrollar el problema inicial.
- Utilizar el álgebra para expresar relaciones: relacionar una expresión algebraica de los datos enunciados con las condiciones del problema (hay que nombrar con letras cada uno de los datos desconocidos). En seguida se plantean operaciones con las condiciones enunciadas, estas deben conducir a la solución del problema mediante la expresión algebraica.

2.7. Fundamentos de la visualización matemática en la enseñanza aprendizaje de la geometría

Los conceptos matemáticos, las ideas, los métodos tienen una gran riqueza de relaciones visuales que son intuitivas representable en una variedad de formas. El uso de ellos es claramente beneficioso desde el punto de vista de su presentación, su manipulación en la resolución de problemas y en la investigación. Los expertos en un campo particular poseen una variedad de imágenes visuales de formas intuitivas de percibir y manipular los conceptos y métodos más habituales en el tema en el que trabajan.

Las ideas básicas del análisis matemático, por ejemplo, orden, distancia, operaciones con números, nacen de situaciones muy concretas y visualizables, en la cual cada experto es consciente de su utilidad, refiriéndose a estos aspectos concretos cuando está manejando los objetos abstractos correspondientes. Esta forma de actuar con atención explícita a las representaciones concretas de los objetos que uno está manipulando, con el ánimo de tener un enfoque de las relaciones abstractas que se está manejando, es lo que se llama visualización matemática.

El hecho de que la visualización sea un aspecto importante de las matemáticas es algo bastante natural, pues se tiene en cuenta el significado de la actividad matemática y la estructura de la mente humana. A través de la actividad matemática el ser humano intenta explorar muchas estructuras diferentes de la realidad que son aptas para ser manejadas por el proceso que se llama matematización.

Inicialmente se tiene la percepción de ciertas similitudes en los objetos reales que guían a la abstracción de estas percepciones, de lo que es común y someterlo a una peculiar elaboración racional y simbólica, que permite manejar eficientemente las estructuras que están detrás de tales percepciones.

La aritmética, por ejemplo, surge con la intención de dominar racionalmente la multiplicidad, lo que es presente en la realidad. La geometría intenta racionalizar las propiedades de la forma y la extensión en el espacio. El álgebra, en un proceso de abstracción de segundo orden, explora las estructuras de operaciones relacionadas con ellas. El análisis matemático, por ejemplo, hace frente a las estructuras de cambio de las cosas reales en el tiempo y en el espacio. En toda esta rama de la matemática la visualización juega un rol importante en su proceso de enseñanza y aprendizaje.

La percepción humana es muy visual, por lo tanto, no es sorprendente en absoluto que el soporte continuo en su aspecto visual sea tan bajo en muchas de las tareas relacionadas con la matemática, no sólo en aquellas que, como la geometría, tratan más directa y específicamente con aspectos espaciales, sino también en algunos otros, como el análisis matemático, que surge con el fin de explorar diferentes tipos de cambios que ocurren en las cosas materiales. Incluso en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevar al investigador o al estudiante mucho más allá de lo que es perceptible a la visión material, se usan muy a menudo procesos simbólicos, diagramas visuales, y muchas otras formas de procesos mentales que involucran la imaginación que los acompañan en su trabajo.

Además, la visualización matemática ayuda a adquirir lo que se puede llamar una cierta intuición del abstracto, un conjunto de reflejos, una familiaridad especial con el objeto a la mano, lo cual les proporciona relaciones entre los diferentes objetos de su contemplación. La visualización matemática aparece como algo absolutamente natural no sólo en el nacimiento del pensamiento matemático, sino también en el descubrimiento de nuevas relaciones entre objetos matemáticos y también, por supuesto, en los procesos de transmisión y comunicación propios de la lógica matemática en la actividad.

Zimmermann y Cunningham (1991), de Guzmán (1996), Arcavi (2003), Presmeg (2006), entre otros, han aportado a la visualización matemática. Por otra parte, Arcavi (2003) precisa que la visualización es: *"… la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión[70]"*. Esta definición se asume en la presente investigación.

[70] Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba. P48.

2.8.1. Tipos de visualización

La visualización humana, incluso el fenómeno aparentemente superficial que se llama "visión" en su sentido más fisiológico, no es un proceso que simplemente involucra los procesos ópticos de los ojos. Es mucho más complejo, ya que implica de una forma bastante importante, la actividad del cerebro.

En la actividad matemática las experiencias de visualización tienen una importancia interpretativa. Esto hace que el proceso de visualización se fundamente en la interacción entre personas en su entorno, en la inmersión y la inculturación en el contexto histórico y social de las matemáticas. Por lo tanto, *"la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solo podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer apropiadamente el tipo de comunicación que la sustenta"*[71].

La introducción de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no es una tarea fácil, requiere una clara conciencia de la transparencia del proceso, por ejemplo, para el maestro que, debido a su familiaridad con su proceso adquirido por la práctica continua a lo largo de muchos años, presenta un alto grado de visualización, sin embargo, puede estar ausente en absoluto para quien comienza con este tipo de proceso. A continuación, se presentan los diferentes tipos de visualización que a juicio del autor de la presente investigación son aplicables a las actividades que se proponen.

2.8.1.1. Visualización isomorfa

Los objetos pueden tener una correspondencia "exacta" con las representaciones que se realizan con ellos. Esto significa que, en principio, es posible establecer un conjunto de reglas para traducir los elementos de la representación visual y las relaciones matemáticas de los objetos que representan. De esta forma, las manipulaciones visuales de los objetos pueden transformarse, si así lo desean, en

[71] Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2), 694-701.

relaciones matemáticas abstractas. Este tipo de representación se llama visualización isomorfa. La modelación de un problema matemático, que en muchos casos es posible, puede ser en muchos casos una visualización isomorfa. La manipulación de los objetos que se percibe con nuestros sentidos o con la imaginación es normalmente más fácil y directa que el manejo de objetos abstractos, que con frecuencia pueden ser bastante complicados en su estructura.

2.8.1.2. Visualización homeomorfa

En este tipo de visualización que se llama "homeomorfo", algunos de los elementos tienen cierta relación mutua que justifica de manera suficiente las relaciones entre los objetos abstractos y puede proporcionar apoyo, a veces importante, para guiar la imaginación en los procesos matemáticos de conjeturar, buscar y demostrar.

2.8.1.3. Visualización analógica

En este caso, se sustituye el objeto del proyecto por otro que se relacionan entre sí de manera análoga y cuyo comportamiento es más conocido o quizás más fácil de manejar, porque ya ha sido explorado. Este tipo de visualización o modelación analógica fue uno de los métodos de descubrimiento habituales utilizados por Arquímedes, según lo que le dice a su amigo Eratóstenes en la famosa carta conocida por *The Method*. Hay muchos descubrimientos espectaculares por parte de Arquímedes, por ejemplo, su cálculo del volumen de la esfera, que se obtiene primero siguiendo esta forma de analogías y experimentos de pensamiento de naturaleza mecánica.

2.8.1.4. Visualización diagramática

En este tipo de visualización, los objetos mentales y sus relaciones mutuas con respecto a los aspectos que interesan están representados meramente por diagramas que constituyen una ayuda útil en los procesos de pensamiento. Se puede decir que, en muchos casos, tales diagramas son similares a las reglas mnemotécnicas. Tales simbolizaciones y diagramas se convierten en algunos casos de uso generalizado, pero en muchos casos son de uso personal, y no pueden compartirse fácilmente con los demás. Sin embargo, a veces se piensa que tales imágenes y diagramas constituyen un verdadero obstáculo para el desarrollo del estudiante en matemáticas, ya que lo que importa, dicen, es solo la justificación formal de los argumentos.

Es del criterio del autor de esta tesis que el éxito que experimentan los maestros en matemáticas se debe muy a menudo a los esfuerzos que realizan para transmitir a otros y para compartir con ellos no solo los resultados de sus propias investigaciones, sino también los procesos por los cuales alguien en alguna parte pudo obtener tales resultados. Está claro que la clasificación de los posibles tipos de visualización que se ha visto aquí no es ni exhaustiva ni clara. Obviamente, existen muchos casos que no pueden incluirse en ninguno de los tipos que se ha descrito aquí.

Por último, para lograr una adecuada visualización matemática en geometría se hace necesario considerar el uso de la manipulación geométrica. Esta constituye una herramienta *"que implica en el alumno la acción de tocar, operar y maniobrar con las manos figuras y cuerpos geométricos reales o virtuales construidos (opacos, transparentes, con varillas, con ayuda de los SGD u otros programas informáticos) para propiciar el aprendizaje de sus elementos, de sus características, de la invariancia de sus propiedades, de las formas de representación y su identificación"*[72]. Por su parte Rojas (2009) aduce que la manipulación geométrica permite:

- Manipular objetos geométricos reales o virtuales.
- Buscar características y propiedades de las figuras geométricas.
- Conocer las particularidades, los detalles y analizar los cambios que se producen en las figuras geométricas.

[72] Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba. p. 48.

2.8. Fundamentos del pensamiento geométrico para la enseñanza de la geometría, bases para una caracterización

Es común que en los establecimientos educativos de educación formal a nivel de secundaria en Colombia la enseñanza de la matemática se desarrolle bajo una pedagogía tradicional, basada en el uso exclusivo de lápiz, papel y pizarra. En consecuencia, la enseñanza de la geometría se realiza con los mismos parámetros, la cual no ofrece al estudiante posibilidades de desarrollo. Por su parte, Hernández y Villalba (2001) opinan que *"… en los cursos de geometría, se presenta al estudiante un producto final y ya terminado, lo cual no da lugar a que él tome un papel activo en el desarrollo de su conocimiento matemático; además, no propicia el fomento de la creatividad y del aprendizaje significativo en el estudiante"*[73], aspectos estos que limitan el pensamiento geométrico de los estudiantes.

Para contribuir a mejorar esta situación y por ende favorecer una construcción robusta del pensamiento geométrico, el MEN propone una geometría activa, la cual *"… es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio"*[74].

La construcción del pensamiento geométrico en la escuela se sustenta en varias teorías del aprendizaje entre ellas el constructivismo. Esta teoría "…*concibe al conocimiento como algo que se construye, algo que cada individuo elabora a través de un proceso de aprendizaje. Para el constructivismo, el conocimiento no es algo fijo y objetivo, sino algo que se construye y, por consiguiente, es una elaboración individual relativa y cambiante. El supuesto fundamental del constructivismo es que los seres humanos construyen, a través de la experiencia, su propio conocimiento y no simplemente reciben la información*

[73] Hernández V. y Villalba M. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI.* Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm
[74] Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Bogotá: MEN, p. 38.

procesada para comprenderla y usarla de inmediato; es necesario crear modelos mentales que puedan ser cambiados, amplificados, reconstruidos y acomodarlos a nuevas situaciones"[75].

En la construcción de conceptos como base del pensamiento geométrico apoyado en la teoría constructivista, el docente puede ayudar a los estudiantes a construir su propio conocimiento geométrico y colectivamente significativo. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003) ve a *"… la geometría como la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, y aprende a analizar sus características y relaciones. A la vez señala la visualización espacial como un aspecto importante del pensamiento geométrico, sin dejar de mencionar la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial como una manera de describir el entorno; todo lo cual la constituye en una herramienta importante en la resolución de problemas, ya sean geométricos o de otras áreas de las matemáticas o del conocimiento en general*[76]*"*. Por su parte, el NCTM (2000) precisa que a través del uso de software de geometría dinámica (SGD) se puede generar y explorar una gama de problemas geométricos, lo cual aporta a construir y desarrollar un robusto pensamiento geométrico, donde se involucre la geometría euclidiana y no euclidiana.

Para el desarrollo del pensamiento geométrico se encuentra el enfoque teórico desarrollado por de Dina Van Hiele Geldof y su esposo Pierre Van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda en 1957, *"modelo que explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo"*[77].

---

[75] Vygotsky. L. (1974). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores Edición crítica*. Barcelona, p. 94.
[76] National Council of Teachers of Mathematics. (2003), *Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, VA.
[77] Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on learning problems in mathematics*, 20, 27-46.

Este modelo abarca dos aspectos el descriptivo y el instructivo, el primero hace referencia a diferentes formas de razonamiento geométrico de los estudiantes y se evalúa su progreso, mientras que el segundo establece pautas a los profesores con el objetivo de favorecer el aprendizaje geométrico de los estudiantes dado el nivel en que se encuentran. Estos niveles están dados por cinco escalas las cuales son el nivel 1: reconocimiento o visualización, nivel 2: análisis, nivel 3: deducción informal u orden, nivel 4: deducción, nivel 5: Rigor. El aprendizaje se va desarrollando de acuerdo a la superación de cada nivel por parte del estudiante y este a su vez debe cumplir en cada uno de ellos ciertos objetivos, logros y procesos.

Por otra parte, el MEN (2006) en los Estándares Básicos de Competencias, precisa tres momentos en la construcción del pensamiento geométrico:

- Una cuantificación de la posición dada por el concepto de medida.
- El establecimiento de la noción de posición absoluta o relativa de los objetos.
- Los teoremas formales de la geometría euclidiana (esto corresponde a un pensamiento formal).

Los dos últimos momentos son bases para la caracterización sobre el pensamiento geométrico involucrado en geometría euclidiana y no euclidiana que se aborda en esta tesis. Por otro lado, Hoffer (1981) plantea cinco habilidades o destrezas propias del pensamiento geométrico:

- Visualización de imágenes (identificar, observar características, comprender un dibujo, identificar posiciones).
- Lenguaje (uso correcto de la terminología y precisión en el lenguaje para describir los objetos y las relaciones espaciales).
- Construcción de formas (realizar construcciones en 2D y 3D, dibujar figuras semejantes, dibujar figuras simétricas).
- Pensamiento lógico (reconocer criterios para clasificar, formular hipótesis y verificarlas, demostrar).

- Aplicación (aplicar conocimientos aprendidos en la práctica, resolver problemas prácticos utilizando geometría).

Estas destrezas expresadas por Hoffer (1981) se toman para la caracterización del pensamiento geométrico de los estudiantes en el epígrafe 5.2. Por su parte, los procesos del pensamiento geométrico: construcción, razonamiento y visualización, propuestos por Duval (2005) estimulan el aprendizaje práctico que le permite al estudiante relacionar los conocimientos geométricos, establecer categorías y generalizaciones teóricas modificables en lo particular, lo cual propicia adquirir experiencia en la resolución de los problemas de la geometría euclidiana y no euclidiana, y por ende contribuir al desarrollo de este pensamiento.

Conclusiones del Capítulo 2

En la presente investigación se realiza un análisis sobre los conceptos de la geometría plana del Libro I de Euclides, conocida como geometría euclidiana, sus definiciones, nociones, proposiciones y sus cinco postulados. Se profundiza sobre el quinto postulado, analizando los postulados equivalentes a este último, se desarrolla un pequeño recorrido histórico para observar cómo surge a partir del quinto postulado la geometría no euclidiana, en particular la hiperbólica. Además, se plantea la importancia para el desarrollo de geometrías no euclidianas en el aula de clase de la incorporación de la tecnología como el software GeoGebra.

También se examina diferentes constructos sobre definiciones de problema, asumiendo la dada por Polya (1965), el cual plantea que un problema para el estudiante debe mostrar una dificultad que sea alcanzable por él, pero no fácilmente visualizada; a su vez se asume para la resolución de problemas no rutinarios las cuatro etapas propuestas por Polya (1965).

Se establece como primordial generar en los estudiantes un alto grado de motivación por aprender, para esto se parte de las diferentes construcciones geométricas con regla y compás, lo cual desarrolla en los alumnos un agrado por la geometría.

Incorporar el uso de la tecnología en la transición de la geometría euclidiana a la no euclidiana genera un nuevo enfoque motivacional en el aula de clase. Para fortalecer los conceptos matemáticos se propone desarrollar actividades a través de construcciones con regla y compás, adoptándose el enfoque motivacional de Keller (*1983, 1984, 1987*), el cual es *"un enfoque de solución de problemas para el diseño de los aspectos motivacionales de los ambientes de aprendizaje para estimular y mantener la motivación de los estudiantes para aprender"*[78]*.* Este enfoque motivacional es muy acertado para el desarrollo de actividades basadas en la construcción con regla y compás, aplicando propiedades inherentes a las figuras geométricas, para mejorar sus habilidades en la resolución de problemas, como base para fortalecer los contenidos geométricos.

La visualización matemática, como se observa, es de importancia en las diferentes actividades matemáticas, en particular en la geometría, convirtiéndose en una estrategia para la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana. Las ideas, los conceptos y los métodos geométricos tienen una riqueza en contenidos visuales, intuitivos y geométricos.

En el campo de la geometría euclidiana y no euclidiana los expertos forman imágenes visuales, formas intuitivas de abordar ciertas situaciones habituales, formas imaginativas de percibir conceptos y métodos de ayuda para ellos y que son de valor para otros en su propio trabajo. Estos bosquejos son capaces de ofrecer todos los elementos necesarios para construir, si así se desea, toda la estructura formal del contexto teórico correspondiente o el problema. En este capítulo se habla de caracterizar el pensamiento

[78] Keller, J. (1987). Modelo motivacional. Recuperable, 7 de 06 de 2014, de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED409895.pdf

geométrico involucrado, mencionándose los modelos realizados por Van Hiele (1947) y Hoffer (1981), para el desarrollo de la caracterización del pensamiento geométrico; en la presente investigación se toman las destrezas propuestas por este último.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de la geometría plana (euclidiana) en transición a las no euclidianas en educación básica secundaria, es necesario realizar un análisis a las necesidades disciplinares, estudiantes y el contexto de enseñanza. Es por ello que a continuación se exhibe el tipo de investigación, alcance del estudio y los métodos utilizados.

3.1. Diseño metodológico

La presente investigación se basa en un enfoque cualitativo, con un diseño de investigación acción. En este diseño se determina el nivel conceptual de los estudiantes de grado séptimo, evaluando los cambios y mejoras en su aprendizaje en cada una de las etapas propuestas a través de las actividades. Para determinar claramente y cumplir con este objetivo, el trabajo también se desarrolla a través de un análisis temático, interpretando el nivel real de los estudiantes por medio sus representaciones, estrategias de solución y actitudes.

Se establece el proceso de desarrollo del estudiante por cada etapa y los procesos de su pensamiento geométrico para construir significado sólido del concepto a estudiar y lograr categorizarlos. Se realizan actividades didácticas para que sean resueltas de forma individual por parte de los estudiantes y en algunos casos se establecerán grupos de trabajo para analizar su desarrollo y sus respuestas y, por ende, buscar dilucidar activamente lo que van captando.

La motivación es fundamental en el desarrollo de las actividades, pues le permite al docente transformar, mejorar y enriquecer su quehacer docente. Además, al permitir un razonamiento independiente, libre y autónomo los estudiantes comprueban sus ideas y las comparten con los demás enriqueciendo su aprendizaje.

3.2. Población y muestra

Para esta investigación se toma como **población** los estudiantes de la Institución Educativa Rodrigo Lara Bonilla y la muestra un grupo de estudiantes del grado séptimo de la jornada mañana del año académico 2018, 2019, 2020.

3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Histórico-lógico: se utiliza con el objetivo de estimar el avance y progreso del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la educación básica.

Análisis-síntesis: existe una interrelación entre dichos procesos presente en la investigación, tanto en su estructura teórica, como en el estudio de los resultados del diagnóstico relacionados con la enseñanza de la geometría en la educación básica, lo que permite establecer el significado de los hechos para interpretar, sintetizar los resultados y elaborar las conclusiones y generalizaciones.

Del nivel **empírico** son empleados

La observación participante: para la observación a clases y otras actividades docentes, para obtener información de la enseñanza aprendizaje de la geometría en la educación básica.

Encuesta: a los estudiantes (ver Anexo 1) para obtener información sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría en la educación básica. También se aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes.

Los **métodos matemáticos estadísticos** (procedimiento del cálculo porcentual) se utiliza para el procesamiento de la información lograda a través de los métodos y técnicas del nivel empírico, en diferentes momentos de la investigación.

3.4. Fases de la investigación

Preparatoria. Se diseña la observación participante. En esta fase se hace una búsqueda exhaustiva del estado del arte, la cual permite confirmar el problema de investigación, restructurar el objetivo general y determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría euclidiana y no euclidiana en la escuela. Además, se concreta el marco teórico de la tesis.

Diseño de la metodología y análisis de resultados. En esta fase se realiza el diseño y elaboración de diez actividades las cuales se muestran en el Capítulo 4. En la fase se considera el trabajo de campo, la aplicación de instrumentos, la aplicación de las actividades, aplicación de la encuesta de satisfacción, la recogida de la información, el proceso de información y el análisis de los resultados.

Fase informativa. En esta fase se realiza la elaboración del documento escrito, la publicación o socialización de resultados y la sustentación de la tesis.

Conclusiones del Capítulo 3

El paradigma de la investigación que se adopta en la tesis es cualitativo con un enfoque de investigación acción. Para lograr los resultados esperados se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Esta metodología permite el desarrollo de evidencias que hacen que el presente proyecto sea innovador y pertinente para la enseñanza de la geometría no euclidiana en la educación básica y media.

CAPÍTULO 4. DISEÑO DE ACTIVIDADES

En el siguiente capítulo se describe cómo fue la elaboración de las actividades utilizadas para el desarrollo de la presente investigación. Inicialmente se elabora y aplica una prueba diagnóstica con el fin de conocer el nivel de conocimientos que los estudiantes poseen y así tener una idea más clara del pensamiento geométrico que ellos han desarrollado previamente.

Las actividades están desarrolladas en tres etapas. La primera está basada en realizar diferentes construcciones con regla y compás, buscando la motivación de los estudiantes por aprender. La segunda etapa se fundamenta en realizar un proceso de construcción de las proposiciones del Libro I de Euclides, etapa que se complementa con el desarrollo de problemas no rutinarios basados en esta geometría. Finalmente, en la tercera se indaga sobre nuevas geometrías con ayuda del ordenador.

4.1. Diseño y aplicación de las actividades

A continuación, se diseñan diez actividades con el ánimo de generar en los estudiantes la motivación por aprender, clave importante en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y en particular de la geometría, para caracterizar el pensamiento geométrico involucrado, objetivo de la presente investigación. Para ello, las actividades están apoyadas en construcciones con regla y compás, el uso del software GeoGebra, y el desarrollo de problemas no rutinarios que salen de lo cotidiano en el aula. No se pretende desarrollar la habilidad sólo para responder una prueba, sino se busca ver si el estudiante construye sus propios conceptos, y de esta forma analizar cuáles son los procesos de pensamiento que desarrolla el estudiante.

4.1.1. Actividad 1. Círculos con trazos de líneas rectas

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico por medio de la manipulación y apreciación de figuras geométricas planas (círculos) desde diferentes posiciones y perspectivas.

Sugerencias metodológicas: como primera actividad se plantea una acción lúdica para comenzar a introducir los conceptos geométricos, donde el estudiante comience a sentirse interesado, motivado y curioso sobre esta nueva temática. La actividad se desarrolla individualmente por los estudiantes, su objetivo es salir de lo cotidiano, generando interés por el aprendizaje.

Finalidad de la actividad: las instrucciones para el desarrollo de la actividad buscan que los estudiantes mismos descubran los círculos a medida que progresan en su solución y, además, que encuentren una serie de preguntas ante las cuales se requiere un análisis y reflexión por parte de ellos.

Materiales a utilizar: regla, lápices de colores y hoja cuadriculada.

Desarrollo de la actividad: cada estudiante debe realizar la construcción de los planos cartesianos como lo indica la siguiente figura (ver Figura 1); la hoja se trabaja de forma horizontal.

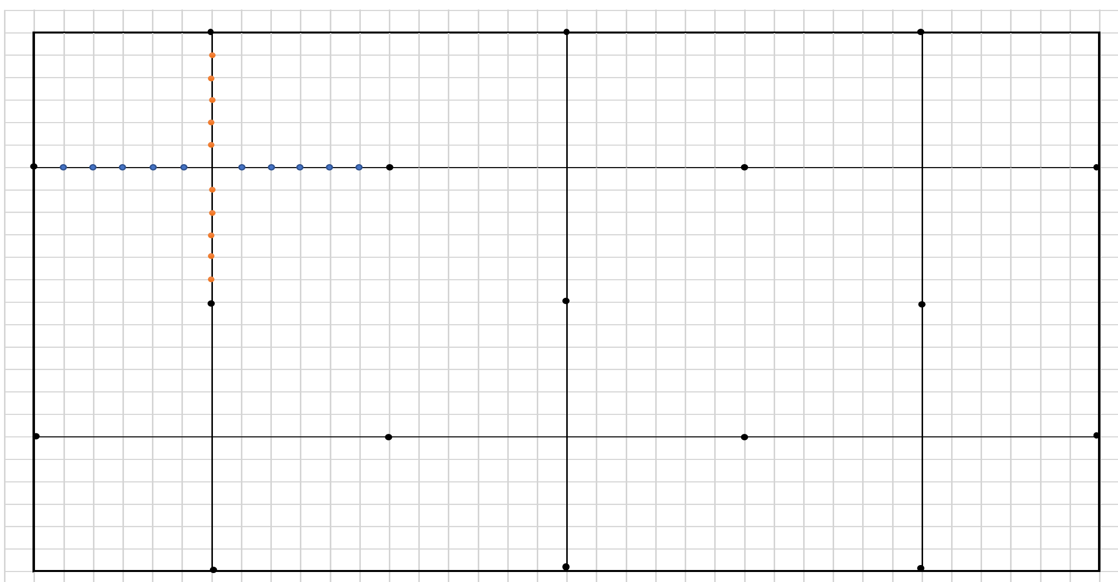


Figura 1. Hoja horizontal.

Una vez elaborada la construcción anterior, en el primer plano cartesiano (parte superior izquierda), siga las indicaciones como lo muestra la figura (ver Figura 2).

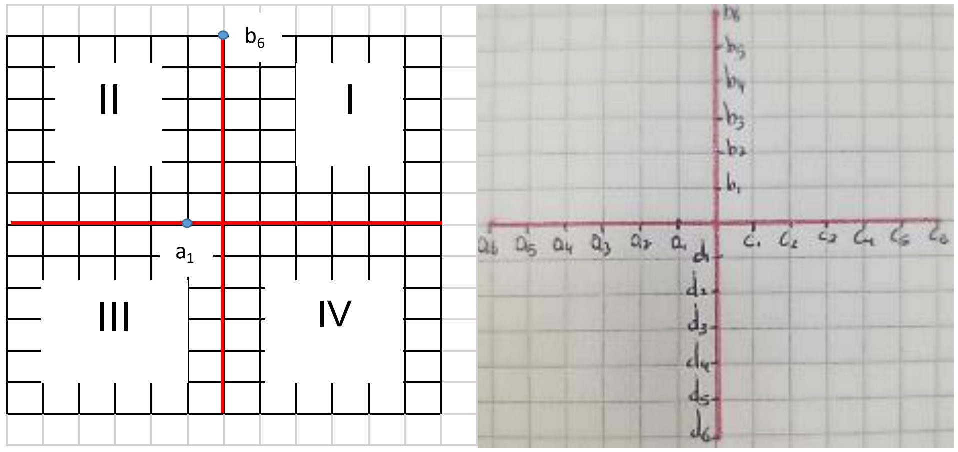


Figura 2. Plano Cartesiano.

A continuación, siga las siguientes instrucciones:

1. Una el punto a_1 con el punto b_6.
2. A continuación, una el punto a_2 con el punto b_5, continúe en el cuadrante II hasta llegar a unir el punto a_6 con b_1.
3. Ahora, una el punto c_1 con el punto b_6.
4. A continuación, una el punto c_2 con el punto b_5, continúe en el cuadrante I hasta llegar a unir el punto c_6 con b_1.
5. Ahora, una el punto a_1 con el punto d_6.
6. A continuación, una el punto a_2 con el punto d_5, continúe en el cuadrante III hasta llegar a unir el punto a_6 con d_1.
7. Ahora, una el punto c_1 con el punto d_6.
8. A continuación, una el punto c_2 con el punto d_5, continúe en el cuadrante IV hasta llegar a unir el punto c_6 con d_1.

Continúe en proceso anterior en el siguiente plano cartesiano, como lo muestra la figura (ver Figura 3) y repita las instrucciones dadas. Finalmente repita estos pasos en cada plano cartesiano.

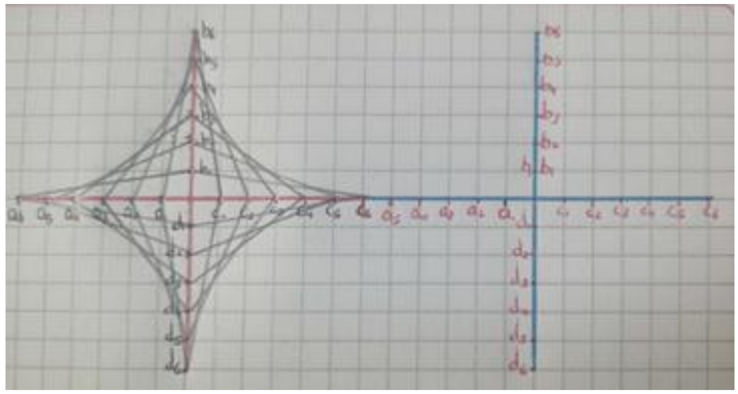


Figura 3. Continuación Actividad.

Responda las siguientes preguntas:

1. Si el tamaño de cada cuadrito de la hoja es de 0.5cm x 0.5cm, calcule el radio del círculo obtenido.
2. Calcular el diámetro del círculo hallado.
3. ¿El radio de los círculos es el mismo?, ¿por qué?

4.1.2. Actividad 2. Construcción de figuras con regla y compás: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, octágono, eneágono

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de la construcción con regla y compás de las siguientes figuras: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, octágono.

Sugerencias metodológicas: para el inicio de la actividad se toma una acción lúdica para comenzar a introducir la temática de la geometría plana, donde el estudiante comience a sentirse interesado, motivado y curioso sobre este tema. El desarrollo de esta actividad consta de 6 clases diferentes. La actividad debe ser desarrollada de forma individual, su objetivo es salir de lo cotidiano, generando un interés por el aprendizaje. Para ello se propone realizar la construcción con regla y compás de las siguientes figuras: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, octágono.

Finalidad de la actividad: las instrucciones de la actividad buscan que los estudiantes descubran y asimilen mejor los conceptos geométricos a través del progreso de las construcciones con regla y compás. Además, encuentran una serie de preguntas ante las cuales se requiere del análisis, comprobación y reflexión de las propiedades de las figuras geométricas por parte de los estudiantes. Con ayuda de estas construcciones deben responder de forma correcta las preguntas planteadas.

A cada estudiante se le solicita tener a la mano los instrumentos geométricos y seguir las siguientes instrucciones.

1. Trace un segmento de 5cm de largo en la mitad de la hoja en cada extremo ubique los puntos A y B respectivamente.
    a. Ubique el compás en el punto A y ábralo hasta el punto B; trace el círculo, repita esto en el punto B. A continuación, sitúe el punto C, el punto de intersección de los círculos en su parte inferior, una los puntos desde el punto A hasta el punto C y desde el punto B hasta el punto C.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?
- ¿Los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva explique por qué.

2. En una hoja nueva, trace un segmento de 4 cm de largo en la mitad de la hoja y en cada uno de sus extremos ubique los puntos A y B respectivamente.
    a. Ubique el compás en el punto A y ábralo más allá del punto B; trace el círculo, repita esto en el punto B. A continuación, ubique el punto C que es el punto de intersección de los círculos en la parte inferior, una los puntos desde el punto A hasta el punto C y desde el punto B hasta el punto C.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?
- ¿Todos los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva explique por qué, de lo contrario explique cuáles lo son y por qué.

3. Construcción con tres segmentos dados. En una nueva hoja, trace tres segmentos con las siguientes dimensiones: el primer segmento ℓ_1 de 10cm de largo color rojo, el segundo segmento ℓ_2 de 7cm de largo color verde y finalmente el segmento ℓ_3 de 5cm de largo color azul, (ver Figura 3).

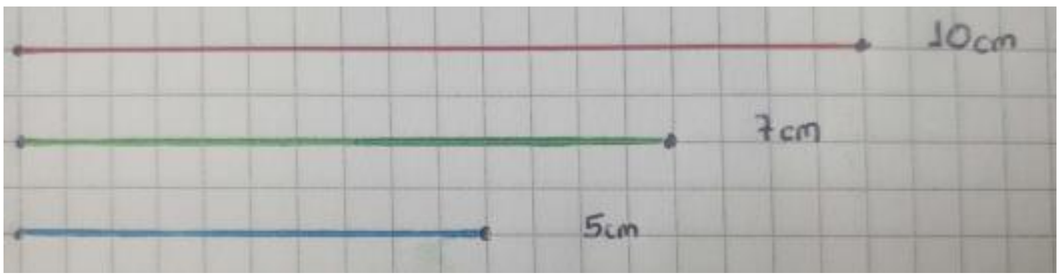


Figura 3. Segmentos dados.

a. A continuación, en la mitad de la hoja trace nuevamente el segmento ℓ_1, ubique en los extremos de este segmento los puntos A y B respectivamente.
b. Tome la distancia del segmento ℓ_2, ahora, ubique el compás en el punto A y trace el círculo c_1.
c. Tome la distancia del segmento ℓ_3, ahora, ubique el compás en el punto B y trace el círculo c_2.
d. Seleccione el punto de intersección superior de los círculos c_1 y c_2 respectivamente, el cual corresponde al punto C. A continuación, trace una línea desde el punto A hasta el punto C y desde el punto B hasta el punto C.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?
- ¿Todos los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva explique por qué, de lo contrario explique cuáles no lo son y por qué.

4. En una hoja nueva, trace un segmento de 8cm en la parte inferior de la hoja y ubique en sus extremos los puntos A y B respectivamente; este segmento será ℓ_1.
    a. Fíjese en el punto A y trace un círculo c_1 (aproximadamente de 2cm de radio), ubique el punto A_1, que es el punto de intersección del segmento ℓ_1 con el círculo c_1.
    b. Ahora ubíquese en el punto A_1 y trace un nuevo círculo c_2, con la misma apertura del compás.
    c. A continuación, ubique el punto A_2, que es el punto de intersección de la parte superior de los círculos c_1 y c_2 respectivamente.
    d. Proceda a fijarse en el punto A_2 y trace el círculo c_3 con la misma apertura anterior del compás.
    e. Ahora, ubique el punto A_3, que es la intersección entre los círculos c_3 y c_1, respectivamente. Este punto debe ser diferente al punto A_1.
    f. A continuación, fíjese en el punto A_3 y con la misma apertura anterior del compás, trace el círculo c_4, entonces, ubique el punto A_4, que es la intersección de los círculos c_4 y c_3. Este punto debe ser diferente al punto A.
    g. Ahora, fíjese en el punto A y extienda el compás hasta el punto B y trace el semicírculo c_5, en la parte superior del segmento ℓ_1.
    h. A continuación, tracé el segmento ℓ_2, que pasa por el punto A y el punto A_4, de modo que interseque al semicírculo c_5, entonces proceda a ubicar el punto D, el cual corresponde al punto de intersección del segmento ℓ_2 con el semicírculo c_5.
    i. Ahora, proceda a fijarse en el punto B y extienda el compás hasta el punto A; a continuación, trace el semicírculo c_6, en la parte superior del segmento ℓ_1.
    j. Entonces, fíjese en el punto D y extienda el compás hasta el punto A; a continuación, trace el semicírculo c_7, entonces proceda a ubicar el punto C, el cual corresponde al punto de intersección de los semicírculos c_6 y c_7, respectivamente, que es diferente al punto A.

k. Finalmente, trace los segmentos desde el punto A hasta el punto B, desde el punto B hasta el punto C y desde el punto C hasta el punto D.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?
- ¿Todos los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva, explique por qué. De lo contrario, explique cuáles lo son y por qué.
- ¿Los lados de esta figura son paralelos? ¿Por qué?

5. Trace dos segmentos de recta ℓ_1 y ℓ_2 de 10 cm de largo que sean perpendiculares en sus respectivos puntos medios. Sea X el punto de intersección y con centro en el punto X trace el círculo c_1 de aproximadamente 6cm de radio.

   a. Ahora proceda a ubicar el punto A_1, el cual se encuentra a la derecha de la intersección entre el segmento ℓ_1 y el círculo c_1 respectivamente (ver Figura 4).

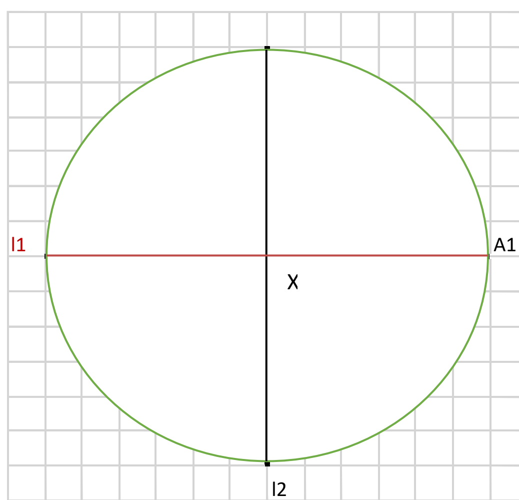


Figura 4. Ubicación punto A_1.

   b. A continuación, fijarse en el punto A_1 y extienda el compás hasta el punto X, a continuación, trace el círculo c_2.

   c. Ahora, por los puntos de intersección de los círculos c_1 y c_2, trace el segmento s_1.

d. A continuación, proceda a ubicar el punto A_2, el cual es el punto de intersección entre la recta ℓ_1 y el segmento s_1.
e. Prosiga ubicando el punto A_3, el cual es la intersección entre la recta ℓ_2 y el círculo c_1 en su parte superior.
f. Ahora, fíjese en el punto A_2 y extienda el compás hasta el punto A_3 y trace el semicírculo c_3.
g. A continuación, ubique punto A_4, el cual es el punto de intersección entre el semicírculo c_3 y la recta ℓ_1.
h. Ahora, fíjese en el punto A_3 y extienda el compás hasta el punto A_4 y trace el semicírculo c_4, de modo que intercepte al círculo c_1.
i. A continuación, prosiga a ubicar los puntos A y D, son los puntos de intersección entre el círculo c_1 y el semicírculo c_4.
j. Ahora, fíjese en el punto A y extienda el compás hasta el punto A_3 (es la misma distancia anterior). Entonces trace el semicírculo c_5, de modo que interseca al círculo c_1. A continuación, ubique los puntos de intersección entre el círculo c_1 y el semicírculo c_5, uno de ellos es el punto A_3 y el otro será el punto B.
k. A continuación, ubíquese en el punto D y extienda el compás hasta el punto A_3 (es la misma distancia anterior). Ahora, trace el semicírculo c_6, prosiga a ubicar los puntos de intersección entre el círculo c_1 y el semicírculo c_6. Uno de ellos es el punto A_3 y el otro será el punto C.
l. Finalmente, una los puntos desde el punto A_3 hasta el punto A, desde el punto A hasta el punto B, desde el punto B hasta el punto C, desde el punto C hasta el punto D y finalmente desde el punto D hasta el punto A_3.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?

- ¿Todos los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva explique por qué, de lo contrario explique cuáles no lo son y por qué.
- ¿Cuánto mide su apotema?
- Identifique el ángulo central, ¿qué amplitud tiene?

6. Trace dos segmentos de recta ℓ_1 y ℓ_2 de 10 cm de largo que sean perpendiculares en sus respectivos puntos medios. Sea X el punto de intersección y con centro en el punto X trace el círculo c_1 de aproximadamente 6cm de radio.
   a. Coloqué los puntos de intersección entre la recta ℓ_2 y el círculo c_1, nómbrelos A_1 y A_2 respectivamente.
   b. A continuación, fíjese en el punto A_1 y extienda el compás hasta el punto X, a continuación, trace el círculo c_2.
   c. Ahora, determine los dos puntos de intersección entre los círculos c_1 y c_2, nombre a estos puntos A y D respectivamente.
   d. A continuación, fíjese en el punto A_2 y extienda el compás hasta el punto X, prosiga a trazar el círculo c_3.
   e. Ahora, proceda a determinar los dos puntos de intersección entre los círculos c_1 y c_3, a estos puntos desígnelos como B y C respectivamente.
   f. Finalmente, una desde el punto A_1 hasta el punto A, ahora desde el punto A hasta el punto B, desde el punto B hasta el punto A_2, desde el punto A_2 hasta el punto C, desde el punto C hasta el punto D y finalmente desde el punto D hasta el punto A_1.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?

- ¿Todos los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva explique por qué, de lo contrario explique cuáles no lo son y por qué.
- ¿Cuánto mide su apotema?
- ¿Cuánto mide el ángulo central?

7. Trace dos segmentos de recta ℓ_1 y ℓ_2 de 10 cm de largo que sean perpendiculares en sus respectivos puntos medios. Sea X el punto de intersección y con centro en el punto X trace el círculo c_1 de aproximadamente 6cm de radio.
   a. A continuación, ubique los puntos de intersección entre la recta ℓ_1 y el círculo c_1 y denomínelos puntos C y G, respectivamente.
   b. Ahora, determine los puntos de intersección entre la recta l_2 y el círculo c_1, denomínelos puntos A y E, respectivamente.
   c. A continuación, proceda a trazar el segmento s_1, el cual pasa por los puntos A y C, respectivamente.
   d. Ahora, halle la mediatriz del segmento s_1, bosqueje la mediatriz de forma que interseque en dos puntos al círculo c_1, los puntos de intersección entre la mediatriz y el círculo c_1, corresponden a los puntos B y F, respectivamente.
   e. A continuación, trace el segmento s_2, el cual pasa por los puntos entre C y E, respectivamente.
   f. Ahora, halle la mediatriz del segmento s_2, bosqueje la mediatriz de forma que interseque en dos puntos al círculo c_1, los puntos de intersección entre la mediatriz y el círculo c_1, corresponden a los puntos D y H, respectivamente.
   g. Finalmente, una desde el punto A hasta el punto B, desde el punto B hasta el punto C, desde el punto C hasta el punto D, desde el punto D hasta el punto E, desde el punto E hasta el punto

F, desde el punto F hasta el punto G, desde el punto G hasta el punto H y finalmente desde el punto H hasta el punto A.

Con ayuda de la construcción anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se llama la figura obtenida?
- ¿Todos los lados de esta figura son iguales? Si la respuesta es positiva explique por qué, de lo contrario explique cuáles no lo son y por qué.
- ¿Cuánto mide su apotema?
- ¿Cuánto mide el ángulo central?

4.1.3. Actividad 3. Mediatriz, bisectriz y problemas

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico por medio de construcciones con regla y compás, aplicando conocimientos adquiridos a la resolución de problemas.

Sugerencia metodológica: esta actividad es planteada para ser desarrollada en dos fases diferentes, en la primera se trabaja de forma individual, mientras que en la segunda se reúnen en grupos de máximo tres estudiantes. Para el desarrollo de la actividad se destinan 3 clases diferentes, una clase para la fase 1 y dos clases para la fase 2. En la primera clase se realiza la construcción con regla y compás del circuncentro e incentro, en la segunda y tercera se da solución a los problemas planteados.

Finalidad de la actividad: a través de la construcción con regla y compás del circuncentro e incentro, los estudiantes comprenden conceptos como mediatriz, bisectriz, entre otros, mejorando así la interiorización de estos conocimientos. Una vez terminada la primera parte de la actividad, se requiere del análisis, comprobación y reflexión de las propiedades de las mediatrices y bisectrices del triángulo. Además, se analizan el circuncentro e incentro del triángulo, esto con el objetivo de que los estudiantes logren desarrollar la segunda y tercera parte de la actividad que corresponden a la resolución de los problemas.

A cada estudiante se le solicita tener a la mano los instrumentos geométricos y seguir las siguientes instrucciones.

Instrucciones para la parte uno

1. Trace un segmento de 9cm y ubique sobre estos dos puntos cualesquiera A y B respectivamente.
    a. A continuación, fíjese en el punto A y abra el compás hasta el punto B y trace el círculo c_1.
    b. Ahora, ubique el compás en el punto B y ábralo hasta el punto A y trace el círculo c_2.
    c. A continuación, ubique los puntos A_1 y A_2, son las intersecciones de los círculos c_1 y c_2.
    d. Finalmente, trace la recta ℓ_1 que pasa por los puntos A_1 y A_2, entonces ℓ_1 se llama mediatriz del segmento AB.
2. Construya un triángulo escaleno, y denote los vértices por A, B y C.
    a. A continuación, con las indicaciones anteriores trace las mediatrices de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
    b. Ahora, ubique el punto de intersección (concurrencia) de las tres mediatrices O_r (circuncentro).
    c. Finalmente, fíjese en el punto O_r y abra el compás hasta el punto A, entonces, trace el círculo circunscrito c_1.
3. Construya un triángulo escaleno cuyos lados tengan todos longitudes mayores a 2 cm; denote los vértices por A, B y C.
    a. Ahora, fíjese en el punto A y trace el círculo c_1 de radio 2cm.
    b. Ubique los puntos A_1 y A_2, que son los puntos de intersección del círculo c_1 y el ▲ ABC.
    c. A continuación, incrústese en el punto A_1 con la misma apertura anterior del compás y trace el círculo c_2.
    d. Ahora, fíjese en el punto A_2 y con la misma apertura anterior del compás trace el círculo c_3.

e. A continuación, ubique el punto X, el cual es el punto de intersección de los círculos c_2 y c_3, dentro del ▲ ABC.

f. Ahora trace la recta por ℓ_1 que es aquella que pasa por los puntos A y X respectivamente, por tanto, la recta ℓ_1 es la primera bisectriz del ▲ ABC.

g. A continuación, fíjese en el punto B y trace el círculo c_4 de radio 2cm.

h. Ahora, ubique los puntos B_1 y B_2, que son los puntos de intersección del círculo c_4 y el ▲ ABC.

i. A continuación, incrústese en el punto B_1 con la misma apertura anterior del compás y trace el círculo c_5.

j. Ahora, fíjese en el punto B_2 y con la misma apertura anterior del compás trace el círculo c_6.

k. A continuación, ubique el punto Y el cual es el punto de la intersección de los círculos c_5 y c_6, dentro del ▲ ABC.

l. Ahora trace la recta ℓ_2, que es aquella que pasa por los puntos B y Y, respectivamente. La recta ℓ_2 es la segunda bisectriz del ▲ ABC.

m. A continuación, fíjese en el punto C y trace el círculo c_7 de radio 2cm.

n. Ahora, ubique los puntos Q_1 y Q_2, son los puntos de intersección del círculo c_7 y el ▲ ABC.

o. A continuación, incrústese en el punto Q_1 y con la misma apertura anterior del compás trace el círculo c_8.

p. Ahora fíjese en el punto Q_2 y con la misma apertura anterior del compás trace el círculo c_9.

q. A continuación, ubique el punto Z, el cual es el punto de la intersección de los círculos c_8 y c_9, dentro del ▲ ABC.

r. Ahora trace la recta ℓ_3, es aquella que pasa por los puntos C y Z respectivamente. Por tanto, la recta ℓ_3 es la tercera bisectriz del ▲ ABC.

s. A continuación, ubique el punto I_r, el cual es punto resultante de la intersección de las rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3, respectivamente; este punto recibe el nombre de incentro (I_r).

t. Construir el segmento perpendicular al lado AB desde el punto I_r y trazar un círculo con centro en I_r, cuyo radio sea igual a la longitud de esa perpendicular.

Instrucciones para la parte dos

Un ganadero tiene un terreno con dimensiones triangulares. Éste compra un lote de ganado de 20 reses. Para aprovechar y mejorar el rendimiento del pasto, el terreno se debe dividir por parcelas iguales y el ganado permanece 15 días en cada parcela. Pasado este tiempo se debe mover a la siguiente parcela, así sucesivamente hasta nuevamente llegar a la primera parcela.

1.) El terreno tiene las siguientes proporciones, las cuales están dadas por las coordenadas A(1,-2), B(8,-2) y C(7,4) al ubicarlo en el plano cartesiano.

a. Suponga que cada unidad en el plano corresponde a 200 metros. ¿Cuál es el área del terreno?
b. Para solucionar y mejorar la producción del pasto realice la división del terreno en 6 partes de igual área. ¿Cuál es el área individual de cada terreno?
c. Dada la importancia de mantener regando la parcela donde se encuentra el lote de ganado, el ganadero se ve en la necesidad de comprar regaderas. Cuando llega a la ferretería le enseñan cinco tipos de regaderas, las cuales se diferencian por el alcance. ¿Cuál debe ser el alcance de cada

regadera?, ¿Dónde debe ubicar el ganadero cada regadera según la parcela donde se encuentra el ganado?

d. Si la toma de agua se encuentra en el vértice C, ¿cuántos metros de manguera debe utilizar el ganadero para cubrir la demanda de las regaderas?

e. En una visita de funcionarios del acueducto le informan al ganadero que al colocar las regaderas es necesario que coloque un punto central de desagüe y establezca canaletas donde el agua se desplace hacia la parte de afuera del terreno. Ubique el punto donde se debe poner el desagüe dentro del terreno. Dibuje las canaletas de desagüe hacia el exterior del terreno.

2.) Construir el triángulo ▲ ABC y en cada lado construir un triángulo equilátero. Ubicar los puntos notables de estos tres triángulos equiláteros. ¿Qué tipo de triángulo se obtiene al unir estos puntos notables?

4.1.4. Actividad 4. Problemas no rutinarios sobre circuncentro e incentro

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de la construcción con regla y compás y la resolución de problemas no rutinarios.

Sugerencias metodológicas: El desarrollo de la actividad es planteada para dos clases diferentes. En la primera clase los estudiantes trabajan de forma individual, realizan construcciones con regla y compás sobre las mediatrices del triángulo, ubicando el punto circuncentro, y trazan el círculo que pasa por los tres vértices. A continuación, se realiza el proceso de construcción de las bisectrices del triángulo y la ubicación del punto incentro, y se traza el círculo interno que ~~toca~~ es tangente a los tres lados. La segunda clase es diseñada para ser desarrollada en grupo, se plantean problemas no rutinarios para los cuales el estudiante debe aplicar lo visto previamente en la primera parte de la actividad. Para el proceso de resolución de problemas se consideran las fases o estrategias propuesta por Polya (1965).

Finalidad de la actividad: los estudiantes observan, una vez terminada la primera clase, la construcción realizada con regla y compás, donde se requiere del análisis, comprobación y reflexión de las propiedades de las mediatrices y bisectrices de los ángulos del triángulo. Además, analizan el circuncentro e incentro del triángulo, con el objetivo de que logren desarrollar la segunda clase que corresponde a la resolución de los problemas retadores para los estudiantes.

A continuación, se les plantea a los estudiantes problemas retadores con los que se sale de lo tradicional y cotidiano, con estos se les permite que analicen las posibles estrategias de solución del problema.

1. Ubicar las coordenadas A(-6,-7); B(7,-6); C(-2,6), y formar el triángulo ▲ ABC con las coordenadas anteriores en el plano cartesiano.
    a. A partir de las construcciones necesarias en el triángulo ▲ ABC coloque el circuncentro y nómbrelo $O_{r.}$.
    b. Ahora, trace la recta ceviana, que pasa por el vértice C y que contiene al circuncentro $O_{r.}$
    c. Sea T el punto de corte de la recta ceviana con el lado $\overline{AC}$. Sí el ángulo ∡ABT = 40° y el ángulo ∡TBC = 20°. ¿Cuál es el valor del ángulo ∡CTB?
2. Sea ▲ ABC un triángulo (ver Figura 5). Construya en el triángulo ▲ ABC el circuncentro O_r e incentro $I_{r.}$

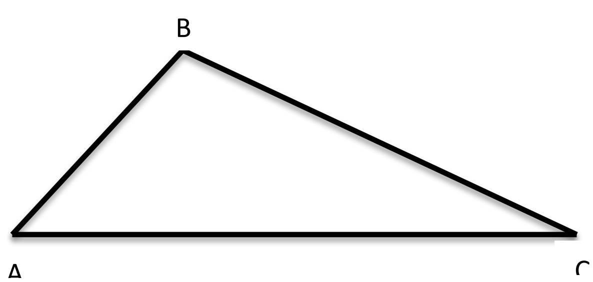


Figura 5. Triángulo escaleno.

a. Si la medida del ángulo ∡ACB es igual a 120°, determine la suma de las medidas de los ángulos ∡AI_rB + ∡AO_rB.

3. Observe el triángulo ▲ ABC (ver Figura 6).

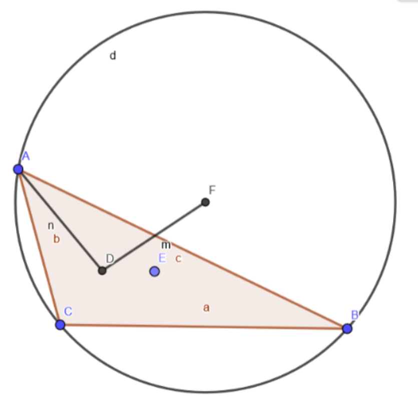


Figura 6. Problema.

En el triángulo ▲ ABC los puntos D, F y E corresponden al incentro, circuncentro y baricentro (punto de intersección de las medianas del triángulo) respectivamente, además el segmento $\overline{DE}$ es paralelo al segmento $\overline{CB}$. Demostrar que el ángulo ∡ADF = 90°.

4.1.5. Actividad 5. Problemas retadores

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de la resolución de problemas retadores.

Sugerencias metodológicas: para el desarrollo de esta actividad se plantea que los estudiantes trabajen en grupos integrados por cuatro estudiantes. La actividad está conformada por cuatro problemas, basados en los conceptos vistos previamente sobre las demostraciones con regla y compás; estos problemas se deben desarrollar a través de las fases o estrategias propuesta por Polya (1965).

Finalidad de la actividad: los estudiantes deben desarrollar la actividad aplicando los conceptos vistos previamente y las nociones empleadas en las construcciones con regla y compás para explicar cada paso utilizado en la solución de los problemas que se les plantea.

1. Inscribir en tres círculos concéntricos de centro A, un triángulo equilátero (ver Figura 7).

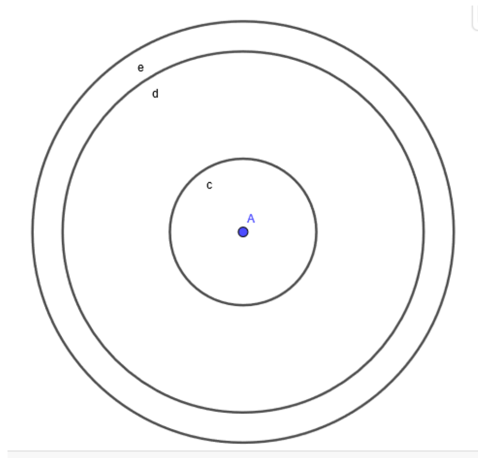


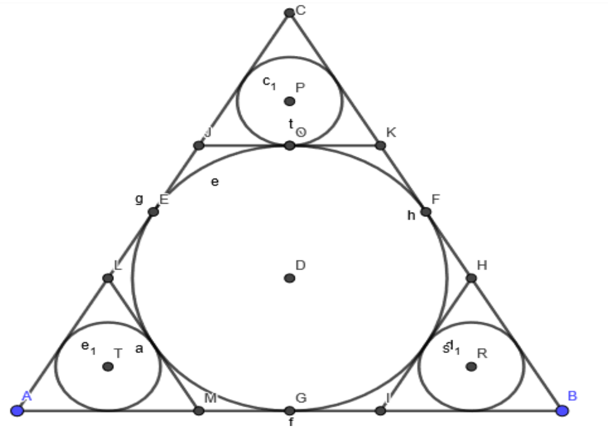
Figura 7. Círculos concéntricos.

2. Construir un triángulo escaleno, hallar el circuncentro O_r, el incentro I_r, de tal manera que r es el radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz entre segmento del circuncentro O_r y el incentro I_r corta a la circunferencia circunscrita en L, y el segmento entre el punto L y el punto del incentro I_r, corta nuevamente en M a la circunferencia circunscrita. Demuestre que $I_rM = 2r$.

4. Sea ▲ ABC un triángulo. La circunferencia inscrita en el ▲ ABC es tangente a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos D y E, respectivamente. Sea O, el circuncentro del triángulo ▲ BCE, demuestre que el ángulo ∡ODB = ∡OEC.

5. Sea ▲ ABC un triángulo y P un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita al triángulo ▲ ABC. Sean X, Y, Z los puntos de las perpendiculares desde P sobre los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$. Demostrar que los puntos X, Y, Z son colineales (Línea de Simson).

6. Sea ▲ ABC un triángulo equilátero y a, b, c las longitudes de sus lados. Las rectas tangentes a la circunferencia inscrita en el triángulo, las cuáles son paralelas a los lados, dividen al triángulo ▲ ABC en tres pequeños triángulos. En cada triángulo pequeño considerar la circunferencia inscrita. Calcula la suma de las áreas de las cuatro circunferencias inscritas (problema, Yugoslavia[79]).[80]



4.1.6. Actividad 6. Introducción a la geometría no euclidiana

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de introducción de nuevas geometrías mediante el uso de la historia de la geometría como un recurso didáctico.

Sugerencias metodológicas: para el desarrollo de esta actividad se plantea que los estudiantes trabajen en pequeños grupos de a cuatro y se realice un breve recorrido histórico a través del desarrollo de tres lecturas planteadas donde se hace uso de la historia de la geometría como un recurso didáctico. A continuación, se les solicita a los estudiantes materiales para la construcción de figuras, las cuales plantean la existencia de geometrías no euclidianas. En esta actividad los estudiantes deben realizar cada lectura y responder las preguntas que se proponen al final de cada una.

Finalidad de la actividad: los estudiantes a través de la lectura pueden observar el recorrido histórico del surgimiento de las geometrías no euclidianas. Además, se plantea que con la construcción de las

[79] Becheanu, M. (2001). *International Mathematical Olympiads*. 1959–2000, The Academic Distribution Center.

[80] Para el desarrollo de los problemas planteados se fortalecieron las nociones de los estudiantes sobre geometría euclidiana, proceso que se realizó durante 2 años.

figuras puedan constatar la existencia de las mismas. Al final se tiene una serie de preguntas para verificar el cumplimiento del objetivo de la actividad.

Lectura 1. Desarrollo histórico de geometrías no euclidianas

La geometría, ¡el estudio del espacio…!, parece ser el más comprendido de los campos de la matemática. Ciertamente sus fundamentos son más precisos, más aún cuando los matemáticos de los siglos XVIII y XIX tras observar directamente sus fundamentos descubren cosas preocupantes, ***¡tal vez la Geometría euclidiana pudiese estar equivocada!***

¿Qué opciones habría para la geometría? ¿La naturaleza misma del espacio podría ser cuestionada?

*¡El camino que he tomado podría no llevarme hacia mi objetivo sino más bien, vuelve un poco dudosa la verdad acerca de la geometría! (*Carl Friedrich Gauss).

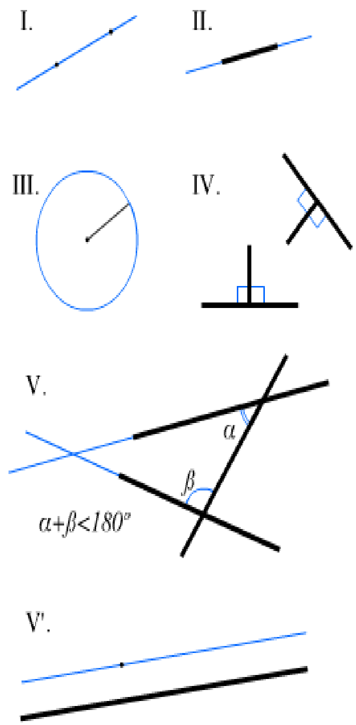
Gauss en el año 1799 escribe la frase ¡***La verdad sobre la geometría!***, se interesa en una pregunta relativamente simple de la geometría euclidiana, a saber, en verdad ***¿describe correctamente el espacio en que vivimos?*** Pues la respuesta parece ser un simple sí, parece probable que la geometría euclidiana sea verdadera. Sin embargo, Gauss no estaba satisfecho con que las apariencias fueran ciertas.

¡Cada vez me convenzo más y más de que la verdad sobre geometría no puede ser probada!

¡Tal vez en otra vida podríamos tener una visión más precisa de la naturaleza del espacio, lo cual es inalcanzable por ahora!

¡Pero hasta entonces no debemos catalogar a la geometría con la aritmética, cuya verdad es una cuestión de lógica, más así con la mecánica!

¿Por qué dudaba Gauss de la geometría?, observe detalladamente que la geometría euclidiana es necesariamente verdadera, *¿cómo probar que está afirmación es verdadera?* Se da comienzo con algunas premisas iniciales. Los cinco postulados de Euclides:



1. "Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos cualquiera.

2. Cualquier línea recta terminada puede extenderse indefinidamente.

3. Se puede dibujar un círculo con cualquier punto dado como centro y cualquier radio dado.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si dos líneas rectas que se encuentran en un plano se encuentran con otra línea, y si la suma de los ángulos internos en un lado es menor que dos ángulos rectos, entonces las líneas rectas se encontrarán si se extienden suficientemente en el lado en el que la suma de los ángulos es menor que dos ángulos rectos"[81]*.*

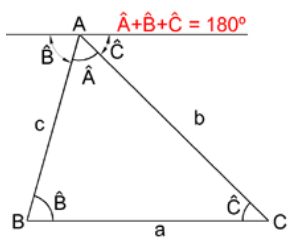
Proposiciones definitivamente imprescindibles, entonces se puede justificar las creencias acerca del espacio físico a partir de ellas. De esta forma se muestra que esas creencias son necesariamente verdaderas porque siguen la lógica de las premisas. La dificultad de Gauss y otros matemáticos no era el método de raciocinio, pero sí, uno de estos postulados.

[81] Euclides (2007). Elementos de Euclides. Libros I – VII. Biblioteca Gredos, p. 12.

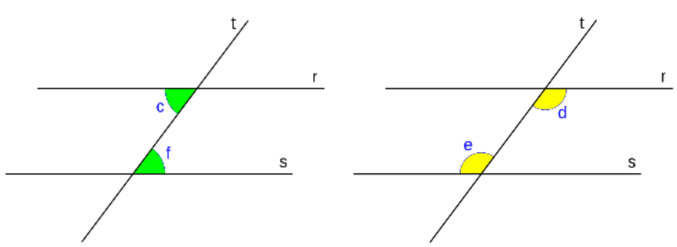
Nadie duda que una línea puede ser trazada entre dos puntos o cómo un círculo es trazado, pero el quinto postulado no era tan obvio, a criterio del autor de esta tesis, *"¡si en un plano una tercera línea cruza otras dos y si la suma de los ángulos alfa y beta es menor que dos ángulos rectos, entonces las líneas se encuentran!"* (ver figura anterior).

Fue la necesidad de asumir este postulado que se llama el postulado de las paralelas lo que incomoda a los matemáticos por siglos. Esta no es una verdad obvia, cuando se trabaja para obtener determinado conocimiento del mundo, es preocupante tener que asumir una verdad no tan obvia. Entonces los matemáticos trabajan intensamente e intentan comprobarla. Así descartan el postulado y pretenden deducirlo, usando los postulados restantes de Euclides, debilitando así el punto de partida, el problema surge al intentar deducir el teorema a partir de esta lista restringida.

El postulado de las paralelas es muy útil, siendo difícil deducir problemas sin él, las personas encuentran varios supuestos equivalentes a él. Por ejemplo, se puede deducir acerca de los ángulos dentro de un triángulo usando el postulado de las paralelas.



Asumiendo el postulado de las paralelas. Además, estos dos pares de ángulos son iguales



Unificando toda esta información se comprueba que la suma de los ángulos internos del triángulo es igual a 180° o dos ángulos rectos. Pero cuidado, pues no es lo que las personas intentan realizar, ellos intentaban deducir el postulado de las paralelas sin hacer ninguna otra suposición.

En 1733, el italiano Gerolamo Saccheri, fue el pionero de la mejor alternativa, intentó imaginar una geometría diferente a la Euclidiana. Saccheri pretende demostrar que esa geometría puede no existir, si Euclides hace la única geometría consistente, entonces sería verdadera. Saccheri de hecho descubre que había solamente otras dos geometrías que considerar, en ambas geometrías Saccheri acepta los primeros cuatro postulados, más utiliza alternativas para el quinto. En su primera geometría ***¡no existen líneas paralelas!***

Construcción 1. Para mejorar y facilitar la comprensión y poder imaginar la geometría sin líneas paralelas observe el siguiente gráfico.

Tome la esfera de icopor, puede imaginar las líneas como grandes círculos.

1. Recorte 3 tiras de 1.5 cm de ancho y el largo que cubra la superficie de la esfera sobre el ecuador, coloree cada una negra, roja y verde respectivamente.
2. A continuación, pegue la tira de color negro sobre el ecuador, como lo muestra la Figura 1, la tira de color rojo péguela de forma que sea perpendicular a la recta de color negro, formando un ángulo recto, por último, pegue la de color verde de forma que también haga un ángulo recto con el ecuador (ver Figura 1).

Figura 1. Geometría esférica.

- Gire la esfera, a través de ese punto en el ecuador.
- Mientras, más se mueven a la parte superior de la esfera, las líneas más se acercan, encontrándose en el polo.

Considerando el trabajo realizado responda las siguientes preguntas:

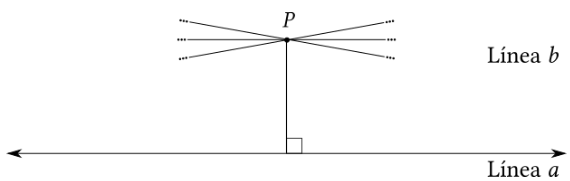
1. ¿Los ángulos de intersección de la recta de color verde con la de color negro y la recta de color rojo con la recta negra suman 180 grados? Explique su respuesta.
2. Mientras más se mueven a la parte superior de la esfera las rectas más se acercan, encontrándose en el polo. ¿Las rectas roja y verde son paralelas? Si su respuesta es positiva o negativa explique por qué.
3. ¿Cómo puede llamarse está geometría en esta superficie? Argumente.
4. Tome trozos de cartulina de tamaño igual y forme un triángulo equilátero. ¿Se puede construir el triángulo? Explique su respuesta.
5. ¿Qué forma tienen los lados? Argumente su respuesta.

Lectura dos. Desarrollo histórico

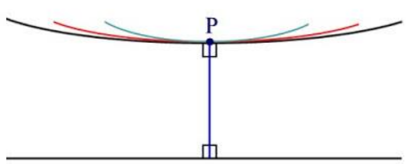
En la geometría esférica se puede observar que cada lado es un arco de círculo máximo en la superficie de la esfera. Al dibujar un triángulo en esta geometría esférica se necesita un grupo de postulados diferentes, por lo tanto, no sirve como primera alternativa para Saccheri.

Saccheri pudo demostrar que la combinación de los cuatro postulados de Euclides y esta propiedad (no existencia de paralelas) es insustentable porque lleva a una contradicción.

En la segunda geometría que exploró Saccheri, las líneas que pasan por el punto P nunca tocan la línea a.



Para visualizar esta geometría, las líneas rectas parecen curvas y se imagina en un plano.



Esta segunda geometría resulta ser resistente, simplemente no entra fácilmente en contradicción. El matemático suizo Johann Lambert escribió en 1770: *¡buscando las consecuencias de estas hipótesis para ver si había señales de contradicción constaté que estás hipótesis no se destruyen tan fácilmente!*

Allí fue donde Gauss comienza a pensar acerca de las diferentes geometrías, él lee el libro de Lambert en Gottingen en 1795 y al principio él también cree que la hipótesis alternativa puede contradecirse comprobando a la geometría euclidiana como la única verdadera. Gauss también descubre cosas extrañas en la hipótesis, pero se da cuenta que no es contradictoria.

Por ejemplo, en el caso en que hay muchas paralelas, la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que 180 grados y las figuras no pueden tener la misma forma sin tener también el mismo tamaño. Es algo inesperado, más no imposible. Gauss comienza a creer que esta geometría alternativa puede ser lógicamente consistente. Por las correspondencias de Gauss se observa que estas ideas se desarrollan muy poco.

El desarrollo histórico de esta nueva geometría continua en regiones lejanas en Europa, hacia Rusia y Hungría. El amigo de Gauss llamado Wolfgang Bolyai viajó a Hungría y se convierte en profesor. Su hijo János resulta ser un genio de las matemáticas y supo del problema de la geometría por su papá.

¡pido que abandone la ciencia de las paralelas, pensé en sacrificarme por la verdad, convertirme en el mártir que cambiaría la falla de la geometría devolviéndola purificada y real para la humanidad!; ¡regresé cuando vi que nadie podía salir de esa oscuridad!

El hijo no escuchó y el padre intentó nuevamente

¡He viajado por todos los arrecifes de este mar muerto infernal y siempre regreso con el mástil quebrado y la vela rasgada!

Imagine la reacción con la respuesta de su hijo en 1823.

¡aun no lo he descubierto, pero el camino que estoy siguiendo es casi seguro que me llevará a mi objetivo. ¡Es el camino correcto dado que sea posible!, ¡Todo lo que puedo decir es que he creado un mundo totalmente nuevo a partir de nada! ¡Lo que he inventado hasta ahora es como un castillo de naipes, comparado con una torre!

A continuación, se muestran dos frases; ***¡aún no he descubierto!...*** y ***¡He creado un mundo nuevo a partir de nada,*** es el resumen de lo que se llama geometría no euclidiana, ya que el hecho de que puede existir una nueva geometría tal vez fue la única verdad!

Para que la geometría fuese verdadera, debe pasar por experimentos, iguales a lo que se haría con la física mecánica. Pero aún no hay la certeza de haberla descubierto, todavía existen contradicciones. En 1831, las dudas acaban y el trabajo de János fue publicado como apéndice al libro de geometría del padre, una copia fue enviada a Gauss quien respondió:

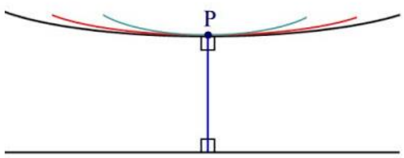
¡Si yo no conociera su trabajo, ciertamente quedaría sorprendido más no puedo hacer lo contrario, sería lo mismo que elogiarme! ¡De verdad el contenido de este trabajo, el camino seguido y los resultados alcanzados coinciden casi totalmente con mis meditaciones!

Naturalmente János nunca perdonó a Gauss, por lo que cree ser la tentativa de un famoso matemático de haberse apropiado falsamente del trabajo de un matemático completamente desconocido.

En Rusia, una historia semejante se desarrollaba. Un profesor y matemático de la universidad de Kazan, Nikolai Lobachevsky, intentaba probar que era lógicamente posible tener una segunda geometría. En 1829, publica la primera descripción de la Geometría no euclidiana dos años antes de la publicación de János Bolyai. Sin embargo, Bolayi no pudo haber tenido forma de conocer este trabajo.

¿Qué fue lo que estos matemáticos lograron? Puesto que las descripciones de la geometría no euclidiana son tan similares, es conveniente realizar la descripción de estos trabajos en conjunto y cómo estas geometrías son diferentes de la euclidiana. Se debe olvidar las concepciones del mundo y prepararse para entrar en un nuevo universo.

La primera sorpresa es que Lobachevsky y János Bolyai describen una geometría "tridimensional" en el sentido de ser una geometría en una superficie curva, donde en este mundo una línea y un punto definen esa superficie, el "plano" de esta nueva geometría. En este plano, siempre hay una infinidad de líneas a través del punto que no se ~~juntan~~ intersecan a la línea en consideración.



Por esta hipótesis, existen dos líneas interesantes.

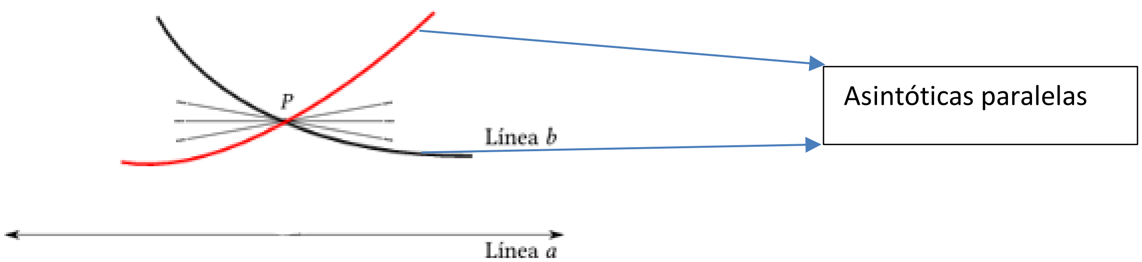


Figura 3. Líneas asintóticas paralelas

Una en cada dirección asintótica a la línea inicial, llegando cada vez más cerca sin que se intersequen. Se llama a esas líneas: asintóticas paralelas a la línea inicial (ver Figura 3).

Los matemáticos querían desarrollar la trigonometría asociada a esta nueva geometría, por ejemplo, dada la distancia *a* (ver Figura 4), ¿cuál es el valor del ángulo θ, conocido como el ángulo de paralelismo?

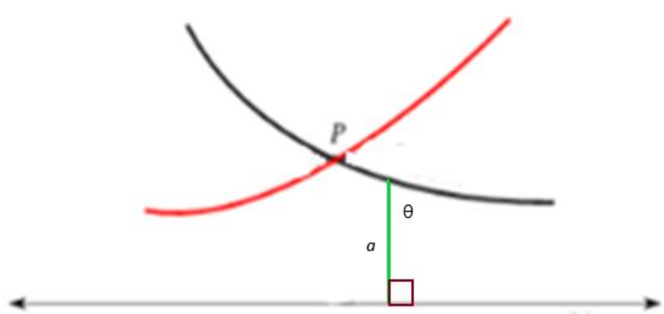


Figura 4. Distancia línea a

Se quiere que la medida del ángulo Θ en función de la distancia *"a"*, θ = π(a); la novedad radica en el uso de funciones en geometría. Pero antes se va a girar la figura para orientarnos (ver Figura 5)

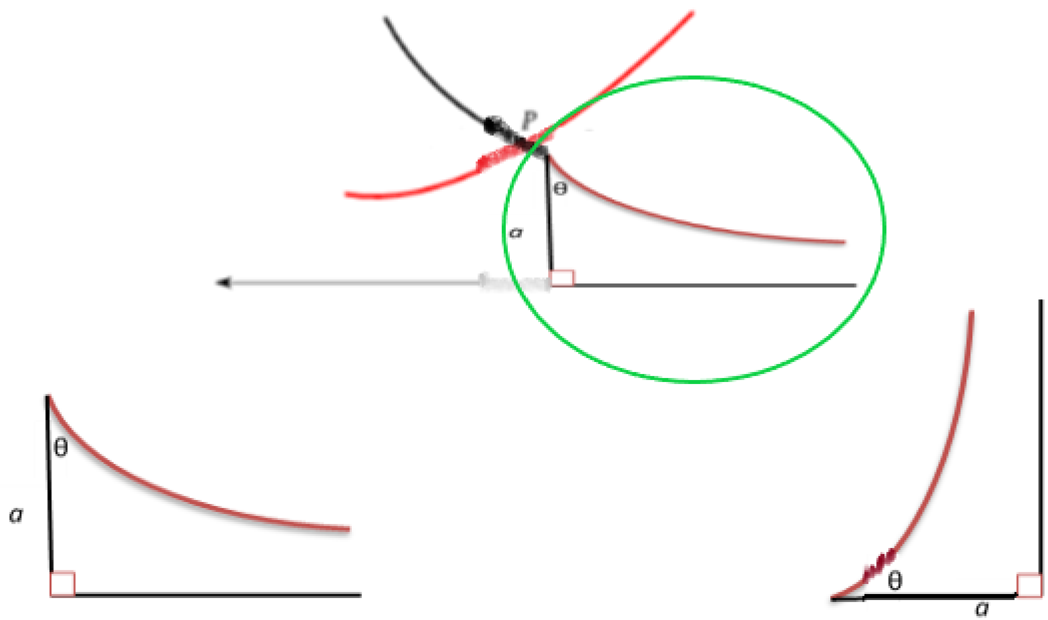


Figura 5. Movimiento de la figura.

La línea inicial ahora se vuelve perpendicular a la base del plano, y aquí hay una paralela asintótica a la línea.

Construcción 2. Dado los materiales suministrados, realice las siguientes orientaciones:

1. Tome la cartulina y trace un círculo de radio 15cm.
2. Ubique el círculo sobre la mesa.
3. Sobre el círculo ubique el palito de valso de forma vertical, éste va a representar la línea *a* (Línea Inicial).
4. Tome el palito curvo, ubíquelo a 5cm, de la base del palito de valso anterior, éste va a representar la línea curva.

5. El círculo sobre la mesa ahora va a ser el plano, como se muestra en la Figura 1.

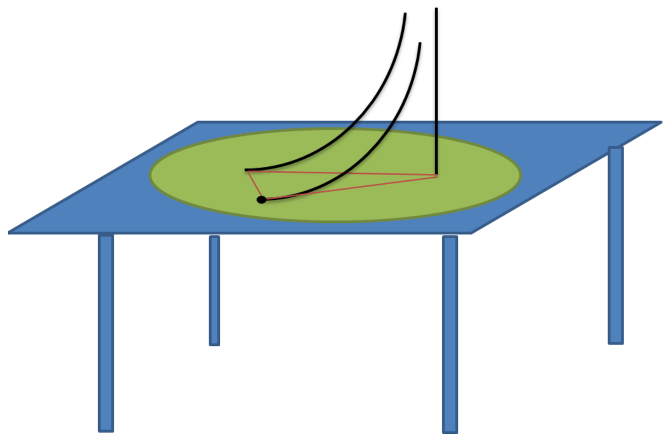


Figura 1. Construcción.

6. La línea curva ahora es una paralela asintótica a la línea inicial.
7. Escoja otro punto sobre la base de la mesa.
8. Se obtiene un triángulo no euclidiano, el nuevo punto forma un ángulo recto.
9. En este punto coloque el otro palito de valso curvo, es otra paralela asintótica, perpendicular a la primera.

Teniendo en cuenta las anteriores instrucciones responda las siguientes preguntas justificando su respuesta:

a) ¿La línea inicial es?
   - Paralela al plano.
   - Perpendicular al plano.

b) ¿Cualquier fórmula trigonométrica describe el triángulo esférico en nuestro peculiar mundo no euclidiano?

c) ¿Conociendo la forma del triángulo esférico es posible determinar la forma del triángulo no euclidiano? Explique.

d) ¿La geometría esférica depende de los postulados de Euclides?

Construcción tres

1. Elija el tazón y ubíquelo de tal forma que la línea inicial quede en el centro de éste, ver Figura 3.

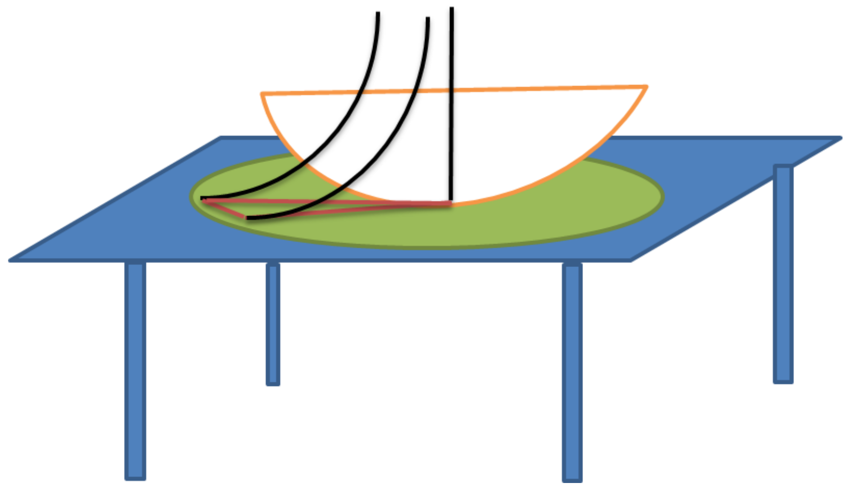


Figura 3. Construcción tres.

2. Con los trozos de cartulina de 1.5cm de ancho una los puntos de intersección de los palitos de valso con el tazón.
3. ¿Toda paralela es asintótica a la perpendicular original?, ¿sus ángulos son rectos?, explique su respuesta.
4. ¿Cuánto suman los ángulos internos del triángulo dentro del tazón? Argumente la razón.

Lectura tres. Desarrollo histórico.

Se puede concluir que dentro de este extraño espacio tridimensional no euclidiano de Bolyai y Lobachevsky también hay figuras precisas de geometría euclidiana representadas en esta superficie. Así mismo, muestran que la geometría euclidiana no era necesariamente una verdad absoluta. Pero por la lógica de la respuesta de Bolyai y Lobachevsky, esta era pobre. En este sentido se puede ver porque, después de todo, los dos parten de una hipótesis sobre paralelas, pero su informe no muestra realmente si esta hipótesis pueda ser posible.

Es necesario volver a pensar todo. Algo que pudiese aceptarse y alcanzarse desde una antigua geometría, y desde las nuevas ideas. Quien logra esto fue el alumno de Gauss, Georg Friedrich Bernhard Riemann; sus argumentos son los que revolucionan la manera en que la geometría es considerada.

Riemann no empieza con la creencia que se conoce sobre lo que es la geometría euclidiana ni tampoco con la idea que se tiene acerca de líneas o ángulos rectos, sino afirma que se puede hacer geometría en cualquier superficie. Riemann también define la línea en términos de longitud, "*la línea recta entre dos puntos… es la curva de menor longitud en la superficie…entre los puntos".*

Gauss estaba muy impresionado con las ideas de Riemann puesto que la nueva geometría aceptaba a todas las demás. La geometría euclidiana ahora es apenas una de muchas, la de una superficie plana que se puede reconocer apenas mirándola. Ahora, si se quiere definir geométricamente se debe usar las propiedades de esta superficie.

Fue el mismo Gauss quién muestra cómo definir una curvatura de esta superficie, la cual está determinada por propiedades inherentes de la superficie. Esto significa que en el caso que todo triángulo en la superficie tenga la suma de sus ángulos internos igual a 180 grados, para Gauss significa una superficie de curvatura cero, en otras palabras, una superficie plana. La superficie donde la suma de los ángulos internos del triángulo es mayor a 180 grados, es una superficie de curvatura positiva (geometría esférica). Por otro lado, un triángulo en una superficie como el tazón, tiene una curvatura negativa.

El italiano Eugenio Beltrami es quien supera este dilema y su solución es ingeniosa. Beltrami reconoce que el Atlas que se usa comúnmente describe una esfera. Conociendo la variación de la escala de punto a punto, se puede usar el atlas para encontrar distancias en la esfera. Por lo tanto, el atlas es una perfecta descripción de una superficie con curvatura positiva constante. El modelo del atlas tiene algunas características que están en desacuerdo, por ejemplo, distancias iguales en la esfera parecen crecer cada vez más en magnitud, mientras se acercan a los polos.

Así Beltrami quiere construir un atlas para superficies de curvatura negativa, si eso fuese posible puede comprobar la existencia de esa superficie y no hay problemas con los límites. Beltrami logró construir un mapa, pero lo que se muestra a continuación es la versión de Henri Poincaré. Con los mapas en forma de globo las distancias son distorsionadas, el espacio no euclidiano tridimensional es dibujado en este disco, ver Figura 4.

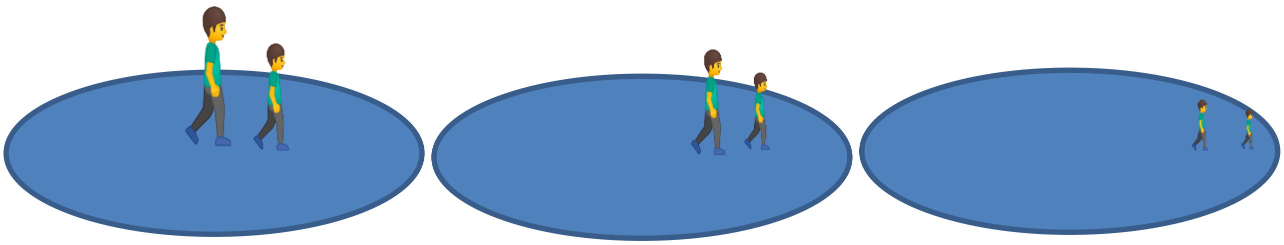


Figura 4. Espacio no euclidiano.

Conforme se mueve, las distancias parecen acortarse debido a la distorsión del mapa, las distancias no se encogen y eso es una ventaja. Ahora mirando desde arriba, las líneas no euclidianas dan la impresión de arcos, perpendiculares al borde del círculo o al diámetro (ver Figura 5). Si se continua con la observación desde arriba los ángulos no se distorsionan. Entonces, en este triángulo, la suma de los ángulos internos es menor a 180 grados o dos ángulos rectos (ver Figura 6).

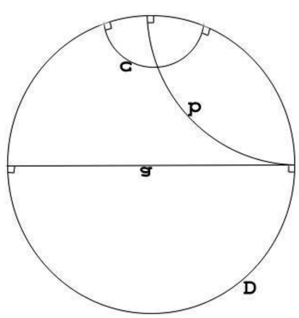


Figura 5. Líneas hiperbólicas.

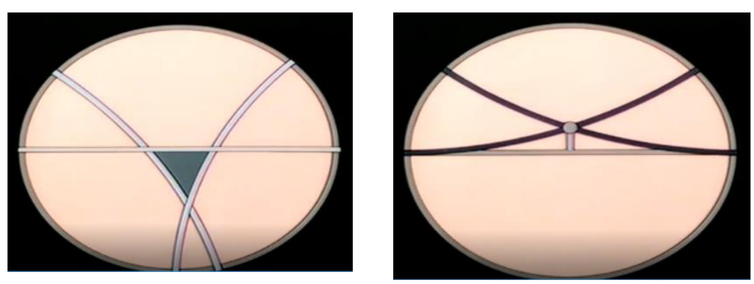


Figura 6. Triángulo hiperbólico.

A continuación, se encuentra por la geometría no euclidiana dos paralelas no asintóticas desde esta línea a través de este punto, pero las líneas se rozan en el borde, esta es una analogía no euclidiana de que las paralelas euclidianas se encuentran en el infinito. Entonces, estos mapas demuestran que existen superficies con curvatura negativa. Por primera vez, los matemáticos tenían la certeza de que las geometrías alternativas son posibles. Ahora, pueden descubrir la verdad de la geometría euclidiana sin tener que dudar acerca de ella.

Construcción Cuatro

Dado los materiales entregados construya la figura dada (ver figura 7):

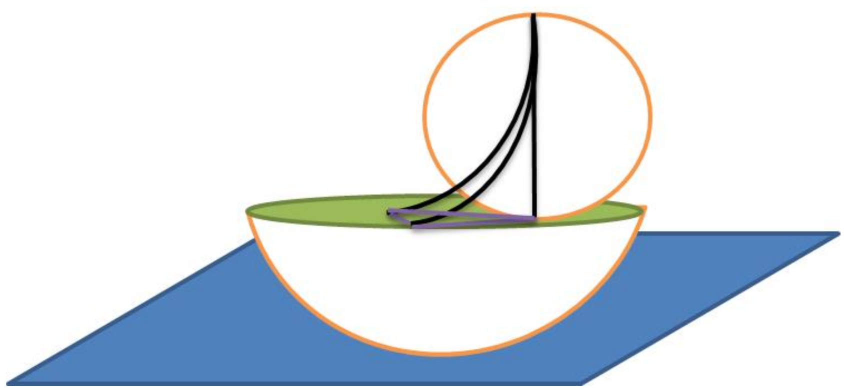


Figura 7. Construcción cuatro.

Dada la figura construida responda:

1. ¿Cuáles son las paralelas asintóticas a la línea original? Explique por qué las que usted señala lo son.
2. El punto que parece de contacto entre las paralelas asintóticas y la línea original ¿está infinitamente lejos en el espacio no euclidiano? Justifique su respuesta.
3. ¿Se puede afirmar que este atlas confirma el modelo tridimensional no euclidiano? Explique su respuesta.

Finalmente, retomando este modelo, hay dos formas de configuración equivalentes, mirado desde afuera es un mapa tridimensional de un espacio no euclidiano descubierto por Bolyai y Lobachevsky.

Mientras que por dentro es un espacio tridimensional no euclidiano, en el cual se tiene una figura precisa de otra geometría, tal vez extraña para los estudiantes, pero lógicamente posible. Estas ideas muestran el destacable trabajo de geometría euclidiana bidimensional.

4.1.7. Actividad 7. Actividades GeoGebra geometría hiperbólica

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de la manipulación de rectas y puntos en el software GeoGebra con la temática de geometría hiperbólica.

Sugerencias metodológicas: se plantea un trabajo en pequeños grupos de dos en la sala de sistemas. A través de la guía los estudiantes deben realizar ciertas construcciones en el disco de Poincaré. Para cada serie de construcciones se plantean preguntas las cuales tienen como objetivo incentivar a los estudiantes a realizar comparaciones entre ambas geometrías, la euclidiana y la hiperbólica.

Finalidad de la actividad: los estudiantes resuelven la actividad sobre geometría hiperbólica, empleando construcciones elaboradas a través del ordenador por medio del software GeoGebra. Para el desarrollo de esta actividad se destinan 2 clases diferentes; se plantea realizar construcciones con GeoGebra simulando las construcciones con regla y compás elaboradas en clase sobre geometría euclidiana. Los estudiantes deben realizar una comparación entre la geometría euclidiana y la hiperbólica, cada construcción tiene una serie de preguntas que deben responder, para mejorar la interiorización de los conceptos. A continuación, se familiariza a los estudiantes con el programa.

Ingrese al software GeoGebra, observar la siguiente pantalla (ver Figura 8).

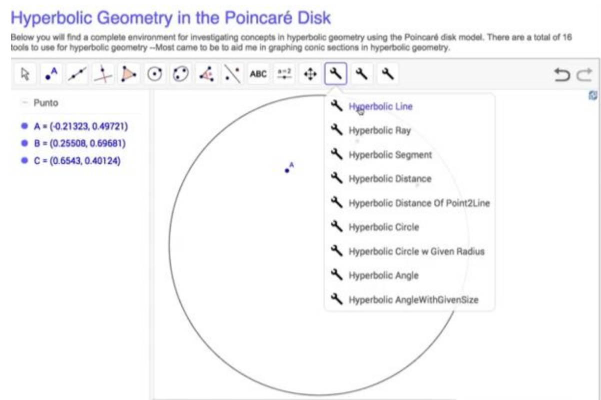


Figura 8. GeoGebra Disco de Poincaré.

1. A continuación, siga las instrucciones dadas y responda las preguntas.

   b. Seleccione el botón punto, ahora coloque tres puntos en diferentes partes del disco de Poincaré.

   c. Elija el botón hyperbolic line, seleccione el punto A y el punto B y trace la línea hiperbólica.

   1.1. Con ayuda de las instrucciones anteriores, responda a las siguientes preguntas.

   - ¿Estas líneas hiperbólicas son arcos de circunferencia perpendiculares en los dos puntos del disco de Poincaré? Explique.
   - ¿Al elegir un punto A y al desplazar el puntero se mantiene la perpendicularidad? ¿Ocurre lo mismo al elegir el punto B? Argumente.

2. A continuación, siga las instrucciones dadas y responda las preguntas.

   a. Elija otro punto en el disco de Poincaré de tal manera que se trace otra línea hiperbólica y esta se corte con la línea anterior.

   b. Elija otros dos puntos sobre la mitad del disco de Poincaré de tal manera que ésta no se corte con las dos líneas hiperbólicas anteriores.

   2.1. Con ayuda de las instrucciones anteriores, responda a la siguiente pregunta:

   - ¿Éstas tres líneas hiperbólicas serán paralelas? Justifique su respuesta.

3. A continuación, siga la instrucción y responda la pregunta.

3.1. Proceda a ubicar tres puntos sobre el disco de Poincaré, seleccione el botón “Hyperbolic Segment”.

- ¿Qué figura se forma? Explique su diferencia con respecto a la geometría euclidiana.

4.2. Con el botón “Hyperbolic Angle” proceda a calcular los ángulos del triángulo, y responda las siguientes preguntas:

- ¿Los ángulos de los triángulos en este modelo hiperbólico suman más o menos de 180 grados?, ¿Cuánto suman sus tres ángulos?

4.3. Seleccione los puntos del triángulo y desplácese por el disco de Poincaré:

- ¿Qué sucede con los ángulos del triángulo si acerca los tres vértices a los extremos del disco de Poincaré?
- ¿Qué sucede con los ángulos del triángulo si acerca los tres vértices al centro del disco de Poincaré?

4.4. Construya una mediatriz en el Disco de Poincaré (geometría hiperbólica). Siga las instrucciones dadas y responda la pregunta.

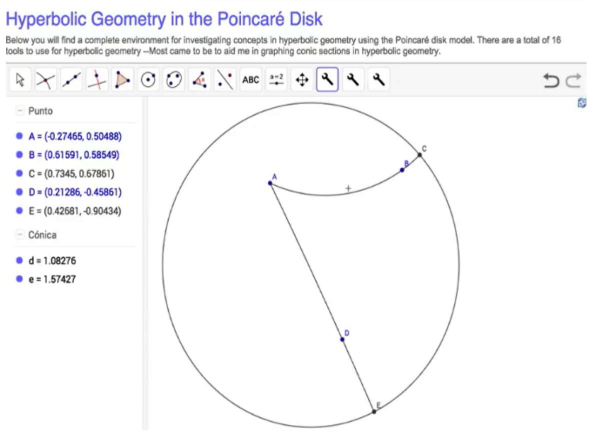
a. Ubique dos puntos A y B dentro del disco de Poincaré.
b. Seleccione el botón “Hyperbolic Segment”
c. Ahora, ubíquese en el punto B y elija el botón “Hyperbolic Circle”, trace el círculo hiperbólico que pasa por el punto A, y proceda de igual forma en el punto A. En los puntos de intersección de los dos círculos trace la línea hiperbólica que pase por esos dos puntos. Ahora, seleccione el punto B y comiéncelo a mover.

- ¿Qué sucede con la mediatriz hiperbólica? Argumente.

4.5. Compruebe con el botón “Hyperbolic Angle” que el punto de intersección del segmento entre los puntos A y B y la mediatriz es de 90 grados, ahora, compruebe que los dos segmentos resultantes del segmento $\overline{AB}$ miden lo mismo con el botón “Hyperbolic Distance”.

4.6. Construya una bisectriz en el Disco de Poincaré (geometría hiperbólica). Siga las instrucciones dadas. Al final responda la pregunta.

- Construya con el botón “Hyperbolic Ray” dos semirrectas hiperbólicas $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente (ver Figura 9),



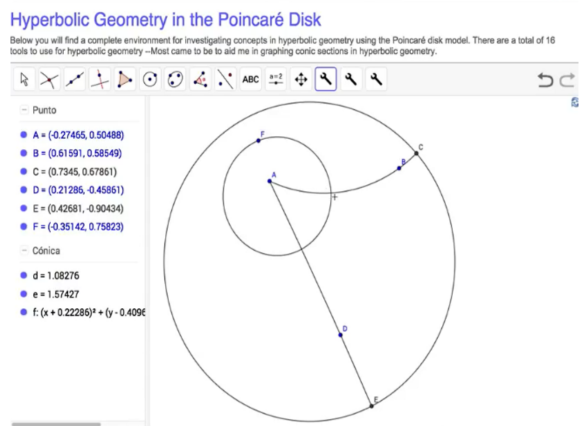


Figura 9. Construcción Bisectriz.

Figura 10. Construcción Bisectriz.

- Entonces, elija el botón Hyperbolic Circle y, fijándose en el punto A, trace un círculo c_1 (ver Figura 10).
- Ubique los puntos de intersección G y H del círculo c_1 con las dos semirrectas hiperbólicas.
- Ahora, con la herramienta “Hyperbolic Circle” fíjese en el punto G y tal que pase por el punto H trace el círculo c_2.
- Repita esto en el punto H pasando por el punto G y trace el círculo c_3,
- Se generan dos puntos de intersección entre los círculos c_2 y c_3 respectivamente; elegir un punto de la intersección y denotarlo por I.

- Finalmente, con la herramienta "Hyperbolic Line" trazar una línea hiperbólica que pase por los puntos A e I respectivamente.

Compruebe que la línea hiperbólica es la bisectriz calculando la medida de los ángulos.

4.1.8. Actividad 8. Mediana, mediatriz y bisectriz en un triángulo hiperbólico

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de la realización de construcciones sobre la mediana, mediatriz y bisectriz en un triángulo hiperbólico con el software GeoGebra.

Sugerencias metodológicas: cada estudiante debe construir las medianas, mediatrices y bisectrices de un triángulo hiperbólico con el software GeoGebra. Se plantea una serie de preguntas comparando las construcciones con regla y compás elaboradas en clase de geometría euclidiana con el objetivo de que los estudiantes comparen las geometrías euclidiana e hiperbólica.

Finalidad de la actividad: los estudiantes resuelven la actividad sobre geometría hiperbólica empleando construcciones elaboradas a través del ordenador por medio del software GeoGebra. En este proceso los estudiantes pueden comparar el trabajo realizado en el salón de clase sobre la temática basada en la geometría euclidiana con el realizado en el ordenador. Cada construcción tiene una serie de preguntas que los estudiantes deben responder para mejorar su interiorización de los conceptos y procedimientos geométricos.

Construcción de rectas notables de un triángulo hiperbólico.

1. Construya las mediatrices de un triángulo hiperbólico ▲ ABC dentro del disco de Poincaré. Siga las instrucciones dadas.

   a. Con el botón "Hyperbolic Midpoint", halle los puntos D, F y E, los cuales son los puntos medios de los segmentos hiperbólicos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ Y $\overline{BC}$, respectivamente, en el triángulo hiperbólico ▲ ABC.

b. Ahora, fíjese en el punto D y con la herramienta “Hyperbolic Perpendicular at Point” y dando clic en el segmento $\overline{AB}$, se traza la mediatriz del segmento mencionado. Repita el proceso en los puntos F y E, respectivamente.

1.1. Con ayuda de la construcción anterior, responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Las tres mediatrices se cortan en el mismo punto? Argumente su respuesta.
2. ¿Sucede lo mismo para cualquier triángulo? Explique.

1.2. Construya la circunferencia circunscrita y, a continuación, responda las preguntas.

1. ¿La circunferencia circunscrita, se mantiene para diferentes tipos de triángulos? Justifique su respuesta.
2. ¿El punto de intersección de las tres líneas hiperbólicas (mediatrices) como se llama?

2. Construya las medianas de un triángulo hiperbólico dentro del disco de Poincaré siguiendo las instrucciones dadas.

a) Con el botón “Hyperbolic Midpoint”, halle el punto medio de cada segmento hiperbólico (lado) del triángulo.

b) Ahora, elija el botón “Hyperbolic Line” y trace una línea hiperbólica desde cada vértice al punto medio del lado opuesto del triángulo hiperbólico.

2.1. Con ayuda de la construcción anterior, responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Las tres medianas se cortarán en el mismo punto? Explique.
2. ¿Sucede igual para cualquier triángulo hiperbólico? Justifique su respuesta.
3. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las tres líneas hiperbólicas (medianas)?

3. Construya las bisectrices de un triángulo hiperbólico ▲ ABC dentro del disco de Poincaré. Siga las instrucciones dadas.

~~a)~~ Fíjese en el punto A y con el botón "Hyperbolic Angle Bisector", halle el punto medio del segmento hiperbólico $\overline{AB}$, repita el proceso en el punto B y el segmento hiperbólico $\overline{AB}$, igualmente repita el proceso en el punto C y el segmento hiperbólico $\overline{AC}$.

b) Con esta herramienta seleccione cada vértice, trace la bisectriz por el vértice elegido, repita el proceso hasta construir las tres bisectrices.

3.1. Con ayuda de la construcción anterior, responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Las tres bisectrices se cortan en el mismo punto? Argumente su respuesta.
2. ¿Sucede para cualquier triángulo hiperbólico? Explique.
3. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las bisectrices hiperbólicas?
5. ¿Es posible construir una circunferencia inscrita en el triángulo a partir del punto de intersección de las tres bisectrices hiperbólicas? Justifique.

4.1.9. Actividad 9. Construcción del triángulo equilátero y cuadrado en el disco de Poincaré a través de GeoGebra

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico, a través de construcciones del triángulo equilátero y cuadrado en el disco de Poincaré con el software GeoGebra.

Sugerencias metodológicas: cada estudiante debe realizar la construcción con GeoGebra de un triángulo equilátero en el disco de Poincaré y comparar el resultado con la construcción en geometría euclidiana. Este proceso se repite con la construcción del cuadrado. Posterior a esto se realiza otro modelo de construcción dentro del disco de inversión.

Finalidad de la actividad: al realizar la actividad el estudiante compara los resultados obtenidos en la Actividad 3 con los obtenidos aquí y luego responde una serie de preguntas que le ayudan a afianzar los conceptos en la geometría euclidiana e hiperbólica.

1. Construya un triángulo equilátero en la geometría hiperbólica a partir de las siguientes instrucciones y responda las preguntas dadas.

a) Con el botón Hyperbolic Segment trace un segmento dentro del disco de Poincaré-para obtener los vértices A y B.
b) Fíjese en el punto A y con la herramienta Hyperbolic Circle trace el círculo con centro en el punto A y que pase por el punto B, repita el proceso con centro en el punto B y que pase por el punto A.
c) Ubique el punto de intersección de los dos círculos hiperbólicos; este se llamará el punto C.
d) Con el botón Hyperbolic Segment trace los segmentos hiperbólicos desde el punto A hasta el punto C y desde el punto B hasta el punto C.

1.1. Con ayuda de la construcción anterior, responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuánto mide cada lado de su triángulo? ¿Son iguales?
2. ¿Qué medida tiene cada ángulo de su triángulo? ¿Son iguales?
3. ¿Si ubican los puntos A y B en diferentes regiones del disco de Poincaré y se realiza esta misma construcción, se mantienen los resultados anteriores?
4. ¿Cuánto suman los ángulos internos del triángulo construido?

2. Construir un cuadrado en geometría hiperbólica sobre un lado dado, a partir de las siguientes instrucciones y responda las preguntas dadas.

a) Con el botón Hyperbolic Segment trace un segmento dentro del disco de Poincaré para obtener los vértices A y B.
b) Ahora, con el botón Hyperbolic Perpendicular at Point fíjese en el punto B y dé clic sobre el segmento AB. Esta línea es llamada ℓ_1.
c) Repita el proceso en el punto A. Esta línea es llamada ℓ_2. Ahora tiene dos líneas perpendiculares hiperbólicas ℓ_1 y ℓ_2 en los dos vértices A y B, respectivamente.

d) Con la herramienta Hyperbolic Circle ubíquese en el punto B y trace el círculo c_1 que pase por el punto A. Repita el proceso en el punto A y trace el círculo c_2 que pase por el punto B.

e) Luego ubique el punto de intersección entre el círculo c_2 y la recta ℓ_2, este va a ser el punto E. Continúe con el mismo proceso ubicando el punto de intersección entre el círculo c_1 y la recta ℓ_1.

f) Con el botón Hyperbolic Segment trace los segmentos desde el punto A hasta el punto E, desde el punto E hasta el punto F y desde el punto F hasta el punto B.

2.1. Con ayuda de la construcción anterior, responda la siguiente pregunta:

1. En la construcción anterior se utiliza el mismo procedimiento empleado en la geometría euclidiana. ¿Se obtienen los mismos resultados en el disco de Poincaré al aplicar los mismos procedimientos?

3. Construir un cuadrilátero con lados iguales a partir de las siguientes instrucciones y responder las preguntas formuladas.

a) Ubique dos puntos A y B sobre el disco de Poincaré.

b) Con la herramienta Hyperbolic Line trace la línea hiperbólica ℓ_1.

c) A través de la herramienta Hyperbolic Perpendicular at Point, trace una línea ℓ_2 perpendicular en el punto A. Sobre esta línea perpendicular con el botón Hyperbolic Circle, trace un círculo c_1.

d) Finalmente, ubicar los puntos de intersección entre la línea hiperbólica ℓ_1 y el círculo c_1. Realice el mismo procedimiento, ubicando los puntos de intersección entre la línea hiperbólica ℓ_2 y el círculo c_1.

e) Con la herramienta Hyperbolic Segment trace los segmentos uniendo estos cuatro puntos de intersección.

3.1. Con ayuda de la construcción anterior, responda a las siguientes preguntas.

1. ¿Estos segmentos tienen la misma longitud? Argumente su respuesta.

2. ¿Los ángulos de esta figura tienen la misma medida? Justifique su respuesta.
3. ¿Qué sucede si se desplazan los puntos? Explique su respuesta.

4.1.10. Actividad 10. Construcciones con regla y compás en el disco de inversión o disco de Poincaré

Objetivo: potenciar el pensamiento geométrico a través de la contrastación de construcción en GeoGebra y con regla y compás.

Sugerencia metodológica: cada estudiante desarrolla con regla y compás circunferencias ortogonales, medianas, mediatrices, circuncentro y teselaciones dentro del disco de inversión o disco de Poincaré, comparando el resultado de sus construcciones realizadas en GeoGebra con las implementadas con regla, escuadra y compas en geometría hiperbólica.

Finalidad de la actividad: el estudiante al realizar la actividad a través de construcciones con regla y compás dentro del disco de inversión afianza sus procesos de aprendizaje, compara los resultados obtenidos en el ordenador mediante el software GeoGebra y responde una serie de preguntas que le ayuda a afianzar conceptos en la geometría euclidiana e hiperbólica.

A continuación, usted debe realizar las siguientes construcciones haciendo uso de regla, escuadra y compás.

1. Trazar una circunferencia c_1 de radio 10cm (este va representa el disco de Poincaré).
   a. Construir dos circunferencias ortogonales con regla, escuadra y compás. ¿Los radios de las tres circunferencias son ortogonales entre sí?
2. Construir la inversión de un punto del interior del disco de Poincaré al exterior y viceversa.
3. Ubicar dos puntos cualesquiera en el disco de inversión.
   a. Trazar una circunferencia ortogonal a c_1 que pase por los dos puntos.

4. Calcular la mediatriz de los dos puntos anteriores.
5. Construir un triángulo equilátero dentro del disco de inversión.
6. Elaborar un cuadrado dentro del disco de Poincaré.
7. Construir en el disco de Poincaré la teselación dada en la siguiente Figura 11.

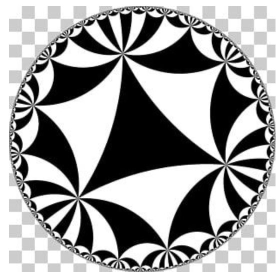


Figura 11. Teselación.

Conclusiones Capítulo 4

Las actividades se han diseñado con el objetivo de mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela, ya que esta rama de la matemática es de gran interés para los estudiantes. La implementación de construcciones con regla y compás en el aula resulta en la transformación de clases tradicionales y monótonas a clases motivantes e interesantes para los estudiantes, lo cual conlleva a mejorar comprensión de nuevos conceptos geométricos.

Se plantea la comparación en las diferentes construcciones geométricas, tanto con el software GeoGebra como con los instrumentos geométricos. Esto se realiza en ambas geometrías, la euclidiana y la hiperbólica, con el ánimo de incentivar en los estudiantes el análisis, la argumentación y la justificación, en el descubrimiento de diferentes propiedades inherentes a figuras geométricas.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES

El proceso de enseñanza y aprendizaje sobre la geometría hiperbólica a partir de la profundización de la geometría euclidiana conlleva al desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes. En este capítulo se aborda el análisis de cada una de las actividades, donde se define logros, fortalezas, dificultades y conclusiones.

5.1. Análisis de los resultados de las actividades en el contexto escolar

La propuesta se implementa en el colegio Rodrigo Lara Bonilla de la ciudad de Bogotá localidad 19 de Ciudad Bolívar, se plantea el trabajo grupal tomando la teoría de la comunidad de práctica de Wenger; sin embargo, algunas actividades son desarrolladas de forma individual. Cada actividad es diseñada para que los estudiantes planteen sus propias estrategias de solución, en la ejecución de los problemas propuestos. Estas actividades se fundamentan en construcciones con regla y compás, primero sobre geometría euclidiana y posteriormente se realizan dentro del disco de inversión a través del modelo de Poincaré.

La caracterización del pensamiento geométrico se va obteniendo a través del estudio y análisis del aporte de los estudiantes en la solución de las actividades y las estrategias planteadas por ellos, fomentando la construcción de conceptos en geometría euclidiana. Este proceso permite abrir la puerta a nociones no euclidianas en particular conceptos hiperbólicos, por medio de la contrastación de construcciones con regla y compás sobre geometría plana, con sus respectivas construcciones con regla, escuadra y compás dentro del disco de inversión. A continuación, se presenta un breve resumen del desarrollo de cada actividad.

5.1.1. Círculos con trazos de líneas rectas

Al plantear la actividad de diagnóstico y considerando los resultados de la entrevista aplicada a los estudiantes, se pudo constatar que en su mayoría no habían trabajado en el aula de clase con regla y compás, lo que afianza la idea, que a los estudiantes se les impartía conceptos geométricos por medio del desarrollo de procesos aritméticos. Esta actividad tiene un impacto positivo para los estudiantes, se puede observar el interés de ellos y la felicidad al resolverla. A continuación, se muestra el resultado de la actividad por un estudiante (ver Figura 28).

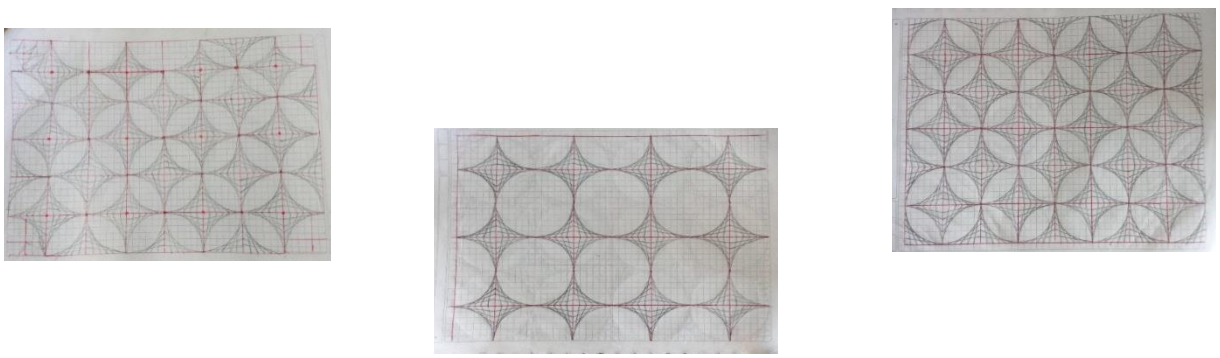


Figura 28. Resolución actividad 1.

Dificultades. La dificultad presentada por un grupo de estudiantes está dada en el cumplimiento de contar con los materiales como regla y compás.

Fortalezas. Los estudiantes se notan entusiasmados con la actividad, quedan sorprendidos con el resultado, responden las preguntas planteadas en la guía, se cumple con el objetivo planteado al inicio de la actividad, se obtienen respuestas de los estudiantes como *"profe ya obtuve el círculo", "profe tan chévere podemos hacer más"*[82]. Además, los estudiantes se convierten en orientadores para sus mismos compañeros, le prestan materiales como la regla, para que realicen la actividad.

[82] Criterios de los estudiantes.

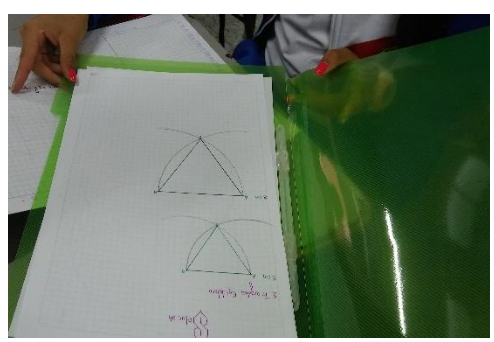
Conclusiones. Del total de estudiantes que realizan la actividad, el 93% de los estudiantes cumplen con el objetivo y finaliza su desarrollo, el cual permite generar motivación en los estudiantes por aprender nuevas temáticas.

5.1.2. Construcción de figuras con regla y compás triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, octágono

Se da inicio a la actividad, se suministra a los estudiantes el objetivo propuesto y los conceptos a trabajar, dando una pequeña biografía de Euclides. Esta actividad se plantea para trabajar de forma individual. Los estudiantes deben realizar las construcciones con regla y compás. Al inicio de la actividad, ellos se notan muy interesados por la temática planteada.

La primera actividad, la construcción del triángulo equilátero, deja en claro el interés de los estudiantes. Todos ellos desarrollan la guía, además, realizan la construcción con regla y compás de los diferentes polígonos planteados. Las inquietudes presentadas son resueltas por parte del docente.

Los alumnos responden las preguntas que se plantean al final de cada instrucción. A medida que se avanza en el desarrollo de la actividad, son notorias la exploración y asimilación de los conceptos sobre la geometría euclidiana, gracias al interés que genera la actividad en los estudiantes. A continuación, se puede observar el trabajo realizado por los estudiantes (ver Figura 29).



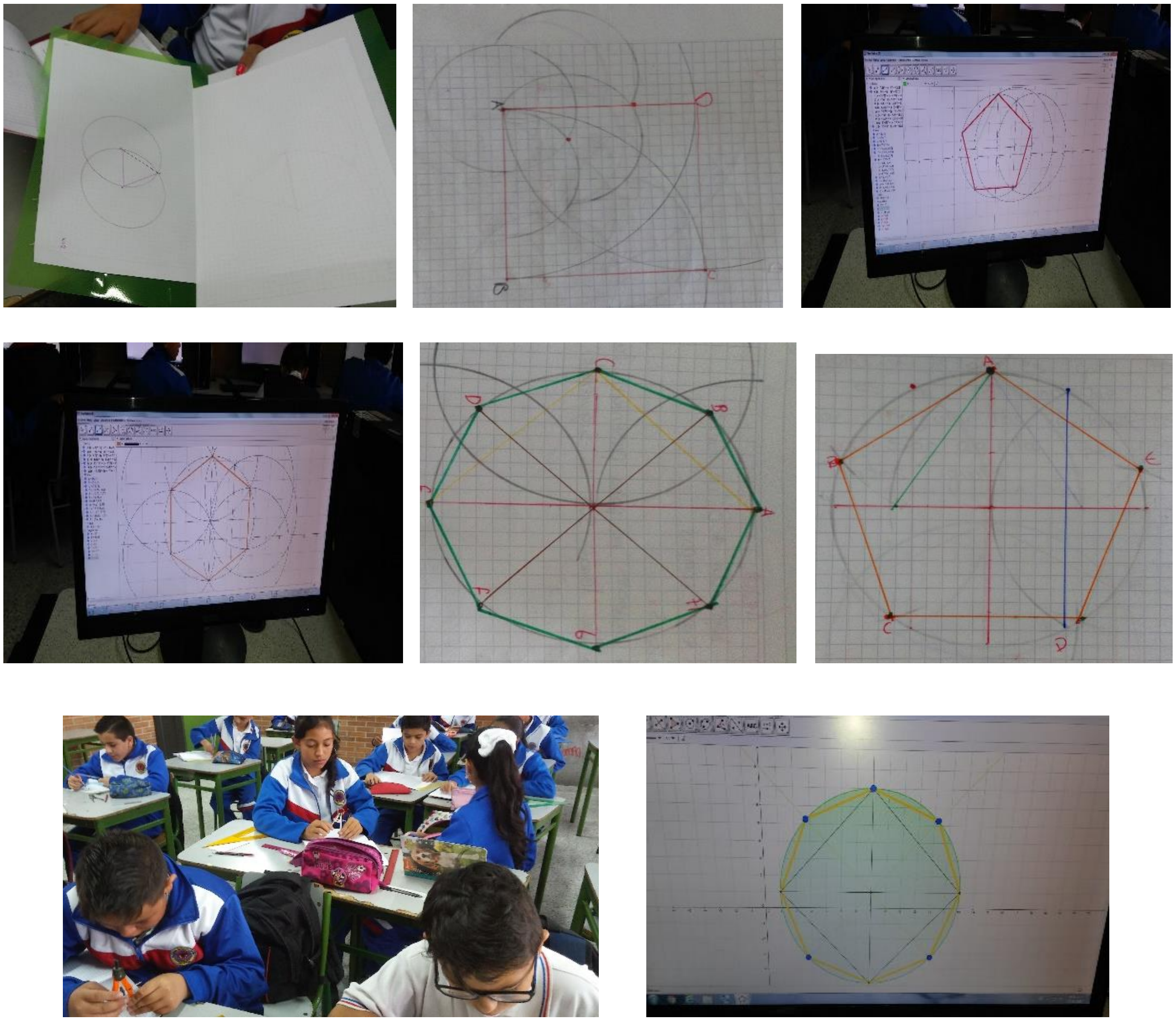


Figura 29. Desarrollo de los estudiantes de la actividad.

Dificultades. Un pequeño grupo de estudiantes el primer día no trajo el compás, lo que impide que ellos realizan el desarrollo de la actividad, este instrumento se solicita con fijación para asegurar que al levantarlo no se distorsionen las distancias.

Fortalezas. Los estudiantes se notan interesados en el desarrollo de la actividad, responden correctamente las preguntas planteadas, se logra mejorar la interiorización de los conceptos y además se obtienen como logros:

- Identifican las figuras a partir de la construcción.

- Mejoran la asimilación e interiorización de los conceptos.
- Gracias a la construcción pueden justificar por qué una figura geométrica tiene sus lados iguales.

Al desarrollar la guía se obtienen comentarios de los estudiantes como *"… profes tan chéveres sus clases, así es más fácil aprender, ahora si no olvido, es más fácil recordar"*[83].

Conclusión. El implementar construcciones con regla y compás en clase de geometría mejora la comprensión de conceptos de los estudiantes, se desarrolla una clase no tradicional, generando así en los alumnos gran interés por aprender. Los estudiantes a través de los procesos de visualización establecen por sí mismos propiedades de las figuras geométricas, este proceso es indispensable en el desarrollo del pensamiento geométrico.

5.1.3. Mediatriz, bisectriz y problemas

Esta actividad se plantea para que los estudiantes utilicen los conceptos vistos hasta este punto; su desarrollo es en dos momentos, la primera parte se debe desarrollar de forma individual, mientras que la segunda se organiza en grupos de tres estudiantes.

El inicio de la actividad es bastante estimulante para el autor de la presente investigación, ya que los estudiantes se notan impacientes para conocer que se va a realizar, se escuchan frases como *"… profe que vamos a aprender hoy, estas clases nos gustan mucho"*[84]. Los estudiantes presentan mayor dificultad en el incentro, la construcción del circuncentro con la circunferencia circunscrita les resulta un poco más sencilla de realizar que la inscrita.

En la segunda parte de la actividad se organizan los grupos de trabajo, comparan sus construcciones, se da un tiempo para que analicen lo realizado en clase y abstraigan propiedades de las construcciones

[83] Criterios de los estudiantes.
[84] Criterios de los estudiantes.

elaboradas. Antes de iniciar a resolver el problema se recuerdan las fases de Polya; a continuación, se analiza la resolución dada por los estudiantes a cada uno de las preguntas del problema.

- La primera pregunta es analizada y resuelta correctamente por todos los grupos de trabajo.
- La segunda pregunta les toma un par de minutos comprender que para dar solución se debe construir las mediatrices, la emoción al resolver la pregunta es evidente por parte de los estudiantes.
- Los estudiantes emplean diferentes estrategias para calcular el área de cada terreno.
- Los estudiantes rápidamente empiezan a aplicar conceptos de las construcciones para dar solución a las preguntas, sin embargo, para algunos grupos les es más difícil establecer la estrategia de solución. Los grupos de trabajo empiezan a debatir sobre cómo resolver la pregunta *"… ya lo tengo, tracemos las mediatrices, si utilizamos la bisectriz"*[85]. Los grupos que presentan mayor dificultad en la solución del problema emplean más tiempo en descubrir la solución.

A continuación, se puede observar el trabajo realizado por los estudiantes (ver Figura 30).

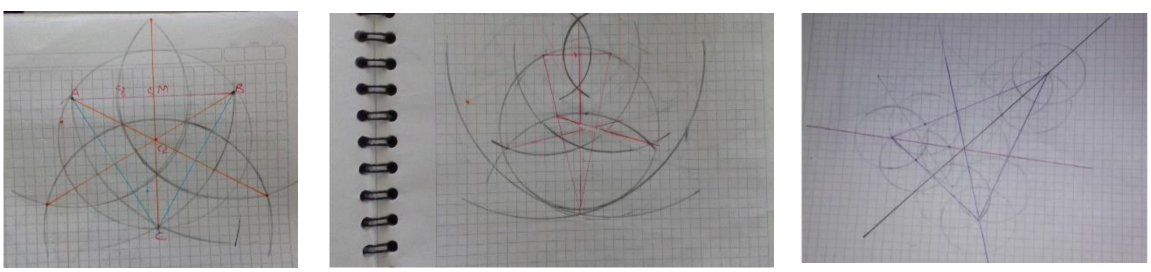


Figura 30. Construcción circuncentro.

Dificultades. La actividad fue dividida en dos partes, la primera parte es la construcción del circuncentro y el círculo que pasa por los tres vértices del triángulo. En esta parte se presenta la dificultad en construir las bisectrices para obtener el incentro, ya que varios estudiantes a pesar de realizar los pasos correctos en la construcción no obtienen el círculo inscrito. Esto se supera al mejorar la punta del lápiz y la ubicación

[85] Criterios de los estudiantes.

de la aguja del compás. En la segunda parte todos los grupos llegan a la respuesta correcta, sin embargo, en algunos grupos se presenta la dificultad de no poder escribir su método de resolución.

Fortalezas: el interés de los estudiantes al resolver la actividad planteada en la primera parte, el cálculo del circuncentro e incentro, los estudiantes obtienen los siguientes logros:

- Una vez realizada la construcción y la solución de las preguntas, los estudiantes reconocen las propiedades de la construcción y ubicación del circuncentro e incentro lo cual será de gran utilidad para la siguiente actividad.
- El problema al inicio les parece un poco difícil; sin embargo, una vez empiezan a plantearse diferentes estrategias de solución, les resulta muy agradable la actividad. Se escuchan frases como *"ahora sé para qué se puede utilizar la matemática*, *miren por las construcciones se puede resolver"*[86].

Conclusión. Los estudiantes observan que lo visto hasta el momento les es útil para afrontar problemas reales de su diario vivir, se observa a los estudiantes mirar las construcciones anteriores y plantearse *"… profe al realizar la construcción de la bisectriz, esta divide al ángulo en dos partes iguales"*[87]. Las estrategias utilizadas por los estudiantes para dar resolución al problema son originales, ellos mismos comienzan a descubrir ciertas propiedades tanto del circuncentro como del incentro.

5.1.4. Problemas no rutinarios circuncentro e incentro

Los estudiantes se organizan en grupos de máximo cuatro personas y se ven muy entusiasmados en el desarrollo de la actividad. En el problema se encuentran algunas inquietudes por parte de los estudiantes, "*¿qué es la ceviana?"*[88]: Se solicita a los estudiantes buscar por sí mismo este concepto, después de un

---

[86] Criterios de los estudiantes.
[87] Criterio de los estudiantes.
[88] Pregunta de los estudiantes.

momento esta duda fue resuelta por ellos mismos. Los grupos dan inicio al desarrollo del problema. Los estudiantes comienzan con a un pequeño debate, se generan ideas en los grupos de trabajo de cómo se puede resolver este problema *"dibujemos un triángulo, hagamos las mediatrices"*[89]. Ellos se plantean dibujar un triángulo y construir las mediatrices y por ende la ubicación del circuncentro.

Otra inquietud de un grupo en particular es ¿qué significa que contenga al circuncentro? A través de la orientación del maestro esto fue resuelto. Un par de grupos se plantea suponer la ubicación del circuncentro sin realizar la construcción. Sin embargo, la posición del circuncentro la realizan con precaución, tomando en cuenta que cumpla con las condiciones dadas. A estos estudiantes se les solicita que justifiquen cada paso.

Los estudiantes se plantean analizar diferentes aspectos a partir de las construcciones anteriores. Los grupos plantean representar gráficamente el problema y determinar cuál es el interrogante, una vez los estudiantes establecen la pregunta a través de un gráfico se presentan como análisis:

1. *"profe la suma del triángulo ▲ ABM = 180°, y también del triángulo ▲ MBC = 180°*
2. *¿profe es un triángulo equilátero?"*[90]

A continuación, se puede observar las soluciones plateadas por los estudiantes (ver Figuras 31 y 32).

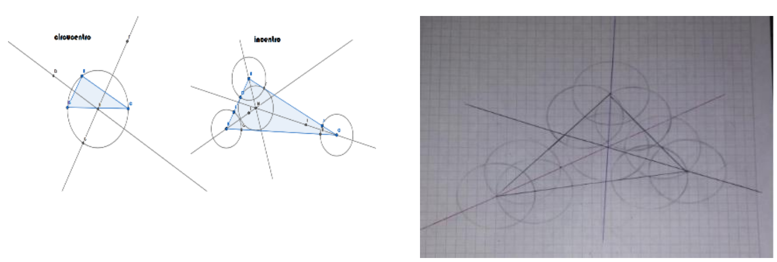


Figura 31. Construcción incentro.

[89] Criterios de los estudiantes.
[90] Criterios de los estudiantes.

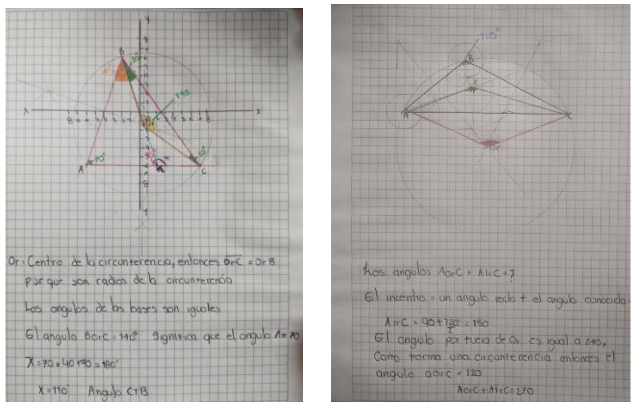


Figura 32. Solución a problemas.

Dificultades. Al inicio los estudiantes no logran interpretar el problema, dado que desconocen el concepto de ceviana, de igual manera al plantear gráficamente el problema la mayoría lo representa como triángulo equilátero. Un grupo de estudiantes no logra plantear un proceso que le permita solucionar el problema, se decide disolver ese grupo distribuyendo a los estudiantes en los grupos restantes, para que logren despejar las dudas presentadas. Algunos grupos expresan mayor dificultad para plantear por sí mismo propiedades de los triángulos.

Fortalezas. En esta actividad se obtienen los siguientes logros:

- El interés y la motivación de los estudiantes al resolver los problemas planteados.
- Los estudiantes se ven forzados a analizar las construcciones realizadas para determinar algunos aspectos; con la orientación del docente ellos mismo establecen algunas propiedades que les son útiles al momento de resolver el problema.
- La disolución de un grupo resulta muy acertada, los estudiantes con la colaboración de sus compañeros logran superar su dificultad y plantear un proceso que permita solucionar el problema.
- El haber utilizado un problema que requiere el uso de algunas propiedades, ayuda a mejorar la interiorización de los conceptos, ya que son ellos mismos los que formalizan las propiedades.

- El problema al inicio les parece un poco difícil, sin embargo, una vez empiezan a plantearse diferentes estrategias de solución el problema les parece agradable.

Conclusión: Es propicio no suministrar en los próximos temas las propiedades, ya que fue muy interesante observar el debate entre los estudiantes sobre el uso de posibles propiedades y preguntarse si esto se aplica a todo triángulo. Así mismo, los estudiantes observan que lo visto hasta el momento les es útil para afrontar problemas reales de su diario vivir, las estrategias utilizadas por los estudiantes para dar solución al problema son originales, ellos mismos dan inicio a plantearse ciertas propiedades tanto del circuncentro como del incentro.

5.1.5. Problemas no rutinarios circuncentro e incentro

Esta actividad es planteada para ser desarrollada en dos clases distintas y se solicita a los estudiantes formar grupos de cuatro personas. La actividad uno, que se realiza con el ánimo de captar el interés y motivación de los alumnos, trata de una construcción con regla y compás.

El problema dos inicia con la construcción de un triángulo escaleno, ubicando en este el circuncentro e incentro, ya varios grupos parten del concepto, realizan el bosquejo de un triángulo escaleno y ubican el circuncentro e incentro provisionalmente, sustentando cada paso.

A continuación, se puede observar a los estudiantes trabajando en la solución de la actividad (Figura 32):

Figura 32. Estudiantes planteando solución al problema.

Para los problemas 2 y 3 se obtienen soluciones muy atractivas por parte de los estudiantes; sin embargo, para el desarrollo de la actividad es necesario tomar 4 clases, dos más de lo planteado.

Dificultades: Los estudiantes presentan en el problema 2 dificultades de interpretación, los grupos se ven en la necesidad de realizar un bosquejo o construcción de lo interpretado lo cual conlleva a facilitar la generación de métodos de solución del problema.

El tiempo destinado para cada problema fue muy corto, los estudiantes necesitan más tiempo del que se había trazado.

Fortalezas: Los estudiantes se ven muy interesados en los problemas, es así, que se logra obtener como logros:

- Una vez más es necesario que los estudiantes regresen a las construcciones, para interpretar aspectos, para reconocer y así establecer propiedades.
- Varios grupos por iniciativa propia han adelantado investigaciones, algunas de estas son utilizadas para dar solución a los problemas.
- Se fortalece los conceptos de los estudiantes.

Conclusiones: Es propicio no suministrar en los próximos temas las propiedades, ya que fue muy interesante observar debatir a los estudiantes sobre posibles propiedades y preguntarse si esto se aplica a todo triángulo. Así mismo, los estudiantes observan que lo visto hasta el momento les es útil para afrontar problemas reales de su diario vivir, las estrategias utilizadas por los estudiantes para dar solución a los problemas son muy originales, ellos mismos dan inicio a plantearse ciertas propiedades tanto del circuncentro como del incentro.

5.1.6. Introducción a la geometría no euclidiana

Para la introducción a esta temática se toma como estrategia realizar tres lecturas que trata de un breve recorrido histórico del desarrollo de la geometría no euclidiana. Al finalizar cada lectura se encontró una serie de preguntas que tienen como objetivo comprobar la comprensión e interiorización de la lectura.

Para mejorar el interés de los estudiantes se proyecta la escena de la película *Midiendo el mundo* del 2005 que trata de cuando Gauss era niño. Una vez terminada la proyección se organizan los grupos y se realiza la entrega formal de la lectura.

Una vez los estudiantes finalizan la primera lectura proceden a realizar la actividad planteada y responder las preguntas. A continuación, se puede observar el trabajo realizado por algunos estudiantes (ver Figura 33).

Figura 33. Trabajo estudiantes geometría esférica.

La segunda lectura es desarrollada por los grupos; a medida que esta avanza se comienza a notar el interés por los resultados de los cuales se hace referencia. A continuación, se observa el trabajo realizado por los estudiantes (ver Figura 34).

Figura 34. Trabajo estudiantes geometría hiperbólica.

Finalmente, se da inicio de la tercera y última lectura, actividad que comienza con un par de intervenciones de los estudiantes, referentes a la comprensión de las dos lecturas anteriores. Ellos se notan muy interesados en la lectura, les impresiona mucho el desarrollo de las geometrías no euclidianas. Una vez finalizada la lectura los estudiantes se disponen a dar comienzo a desarrollar la actividad planteada.

Dificultades: Nuevamente el tiempo planteado para el desarrollo de la lectura con el desarrollo de la actividad queda corto, ya que se originan diferentes debates internos entre los estudiantes. Algunos grupos no traen los materiales completos para realizar la actividad.

Fortalezas: La actividad resulta muy agradable para los estudiantes, quienes se notan interesados en el desarrollo de la actividad. Se obtienen los siguientes logros:

- Los estudiantes inician pequeños debates al finalizar cada lectura, lo cual mejora la comprensión.
- Las construcciones desarrolladas al finalizar cada lectura son de gran interés.
- Los estudiantes, al finalizar las tres lecturas, reconocen la existencia de otras geometrías, además la construcción realizada favoreció la comprensión de estos nuevos conceptos.

Conclusiones: El recorrido histórico a través de la lectura resulta muy apropiada, ya que los estudiantes conocen el desarrollo de nuevas geometrías. Les gustó mucho el video de Gauss en su niñez y ahora los estudiantes reconocen la existencia de triángulos cuya suma interna de sus ángulos es menor o mayor a 180 grados, además, el observar líneas rectas en el modelo hiperbólico resulta muy llamativo para ellos.

5.1.7. Actividades GeoGebra geometría hiperbólica

La actividad da comienzo con indicaciones a los estudiantes y desde este momento la clase se desarrolla en la sala de sistemas, que es de gran agrado para ellos. Una vez ubicados en la sala de sistemas el trabajo se desarrolla en parejas, por el número de equipos en la sala. Los estudiantes están familiarizados con el software GeoGebra, ya que en meses anteriores se desarrolló actividades de construcción en geometría euclidiana usando este software.

Se da inicio con una pequeña explicación de los nuevos botones que se tienen en esta parte de trabajo en el software GeoGebra. Además, se informa que las construcciones a realizar serán ejecutadas sobre el modelo de disco de Poincaré.

Los estudiantes responden las preguntas que se plantean al final de cada instrucción. A medida que se avanza en el desarrollo de la actividad se nota la exploración y asimilación de los conceptos planteados sobre la geometría hiperbólica. A continuación, se puede observar el trabajo realizado por los estudiantes (ver Figura 35).

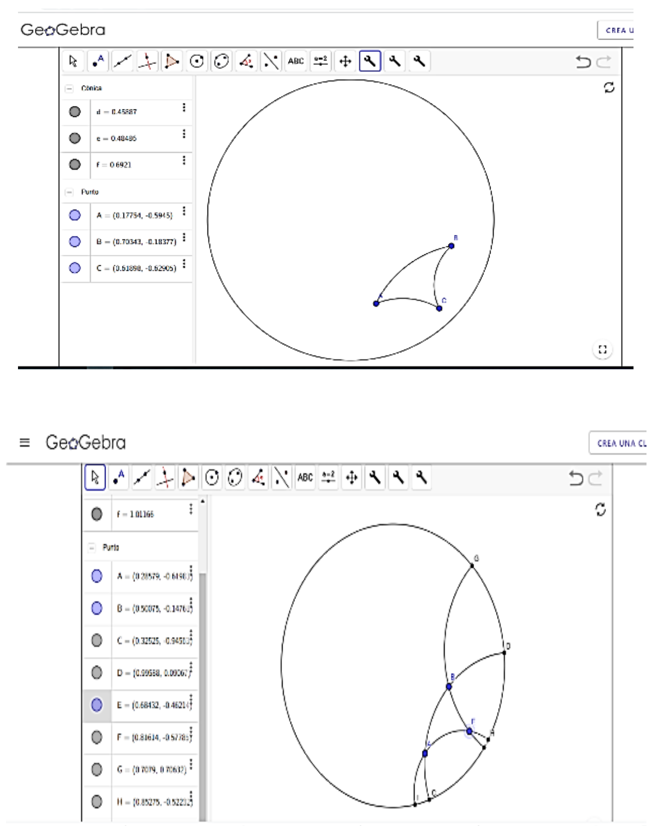


Figura 35. Trabajo desarrollado en GeoGebra por los estudiantes.

Dificultades: es limitado el número de equipos con que se cuenta en la sala de sistemas~~, esto~~ lo cual ocasiona pequeñas discordias, porque cada uno de los estudiantes desea desarrollar la actividad en el computador. Los estudiantes presentan dificultad en comprender por qué las circunferencias son ortogonales, les cuesta mucho entender la línea hiperbólica como segmento de una circunferencia ortogonal al disco.

Fortalezas: el trabajo desarrollado es muy agradable para los estudiantes, el poder observar algunos conceptos que ellos previamente habían leído fue muy impactante para ellos, ya que muchos tenían dudas o incertidumbre sobre la temática. Se obtienen los siguientes logros:

- Antes de dar inicio a la actividad en sala de sistemas, se solicita realizar un círculo en cartulina con un cordón, este ejemplifica el disco de Poincaré, luego se menciona que los radios en este sistema deben ser perpendiculares al círculo, y se solicita que tracen una línea sobre el ecuador y posterior tracen una perpendicular a esta.
- Al construir improvisadamente tres rectas que forman un triángulo ellos quedan muy sorprendidos; realizado esto se da comienzo a la actividad en la sala de sistemas.
- Una vez en la sala se compara el círculo realizado por ellos en la cartulina con el que aparece en la pantalla, ahora se solicita que utilicen el botón hyperbolic line y tracen una línea hiperbólica, ellos constatan la perpendicularidad, al realizar los desplazamientos de los puntos e interactuar con el software se busca maximizar la apropiación de estos conceptos.
- Ellos realizan la actividad, se logra obtener respuestas como *"profe estas líneas son paralelas porque no se cortan*, *profe ya entendí la guía"*[91], la actividad resulta muy agradable para los estudiantes y todos terminan la actividad.

[91] Criterios de los estudiantes.

Conclusiones: desarrollar la clase de geometría en la sala de sistemas maximiza el interés de los estudiantes. Así mismo, el poder cotejar lo leído con la manipulación afianza y mejora la comprensión de esta nueva temática. Los estudiantes salen de la sala realizando diversos comentarios sobre estos conceptos, lo cual evidencia la apropiación de esta temática, la cual es un punto de partida para poder sostener la enseñanza de estos conceptos en los primeros niveles de secundaria.

5.1.8. Mediatriz, mediana, bisectriz en un triángulo hiperbólico

Gracias a la actividad anterior los estudiantes llegan muy interesados a clase; antes de dirigirse a la sala de sistemas se realizan algunas preguntas para constatar el nivel de conocimientos o apropiación de la temática. El 90% de los estudiantes contesta correctamente a las preguntas formuladas por el docente.

Algunas de las preguntas son, *¿recuerdan la construcción del circuncentro?, "si profe, se trazan las mediatrices y se ubica su punto de intersección, el circuncentro es el círculo que toca los vértices del triángulo"*[92]. Ahora que es *¿el incentro?, "profe es la intersección de las bisectrices, la bisectriz en la división del ángulo en dos partes iguales"*[93]. A continuación, se les pregunta *¿qué es una línea hiperbólica?,* a lo que los estudiantes responden *"es una línea curva, es perpendicular al disco es sus puntos de intersección"*[94].

Se reorganizan las parejas de la siguiente manera: un estudiante que está más avanzado conceptualmente con uno que presente ciertas dificultades. A continuación, se puede observar el trabajo realizado por los estudiantes en GeoGebra (ver Figura 36).

---

[92] Criterios de los estudiantes.
[93] Criterios de los estudiantes.
[94] Criterios de los estudiantes.

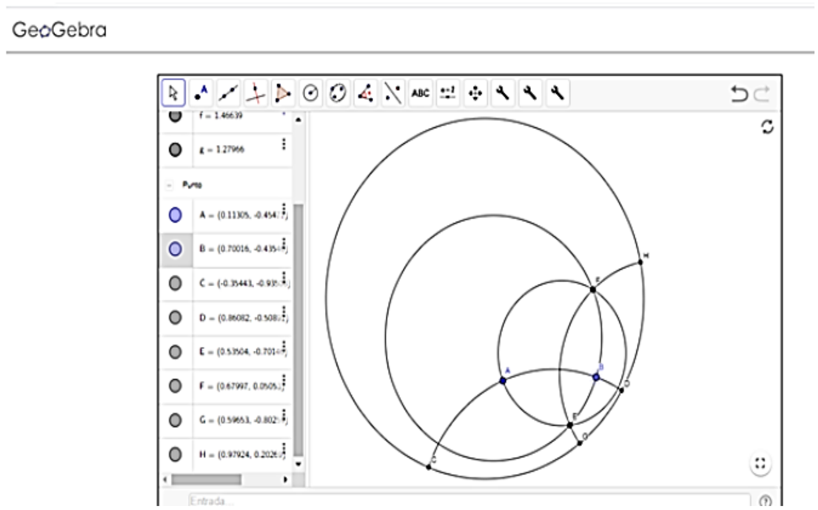


Figura 36. Construcción realizada por los estudiantes sobre la mediatriz por medio de GeoGebra.

Dificultades: nuevamente la mayor dificultad es no tener un computador por cada estudiante. Sin embargo, el interés de participación de los estudiantes genera un buen desarrollo de la actividad. Algunos estudiantes que presentaban falencias en conceptos euclidianos tienen mayor dificultad en la solución de la actividad, lo que sustenta que es necesario fortalecer estos conceptos antes de introducir conceptos sobre geometría no euclidiana.

Fortalezas: el interés mostrado por los estudiantes es su más grade fortaleza. Al elegir las parejas de trabajo se fortalece el desarrollo de la actividad y esta parte de la actividad resulta interesante para ellos. Los estudiantes inician trazando líneas hiperbólicas para formar un triángulo, comparan lo realizado en clase y ellos mismos detectan ciertos errores que cometen. *"profe en la cartulina me quedó mal, los radios no me quedaron perpendiculares*, *profe este triángulo sus ángulos no suman 180 grados"*[95], el poder comprobar que en esta geometría los ángulos no suman 180 grados resulta impactante para ellos, *"profe tanto tiempo engañado"*[96]. El docente interviene mencionando que los resultados obtenidos en geometría

[95] Comentarios de los estudiantes.
[96] Comentarios de los estudiantes.

plana no están mal, se debe abrir la mente para aceptar estos nuevos resultados que pertenecen a nuevas geometrías.

Los estudiantes finalizan las construcciones planteadas para esta actividad, *"profe muy chévere la clase, ya entendí la lectura, primero nos hubiera traído a la sala y luego la lectura"*[97].

Conclusiones: algunos estudiantes abordan al docente al finalizar la actividad y le sugieren para un próximo grupo realizar primero la actividad en la sala y luego realizar la actividad de la lectura. Esta sugerencia por parte de los estudiantes va a ser tenida en cuenta para los próximos grupos. Se puede constatar el interés de los estudiantes por esta nueva temática.

5.1.9. Construcción del triángulo equilátero y cuadrado en el disco de Poincaré

Para dar inicio a la actividad se comienza con una serie de preguntas a los estudiantes, sin embargo, a diferencia de la actividad anterior, estas preguntas se realizan directamente en la sala. Al preguntar el profesor "muchachos, ¿recuerdan la construcción del triángulo equilátero?, se obtiene la repuesta *"si profe, se traza un segmento en cada extremo se traza un círculo, profe trazo un segmento y ubicado en A trazo en círculo, luego cambio a B y hago lo mismo, C es el punto de corte"*[98]. Luego el profesor pregunta, ¿recuerdan el del cuadrado?, *"profe sí, es muy larga, si profe"*[99]. Se construyen estas dos figuras en el disco de Poincaré. A continuación, se puede observar el trabajo realizado por los estudiantes (ver Figura 37).

[97] Comentarios de los estudiantes.
[98] Comentarios de los estudiantes.
[99] Comentarios de los estudiantes.

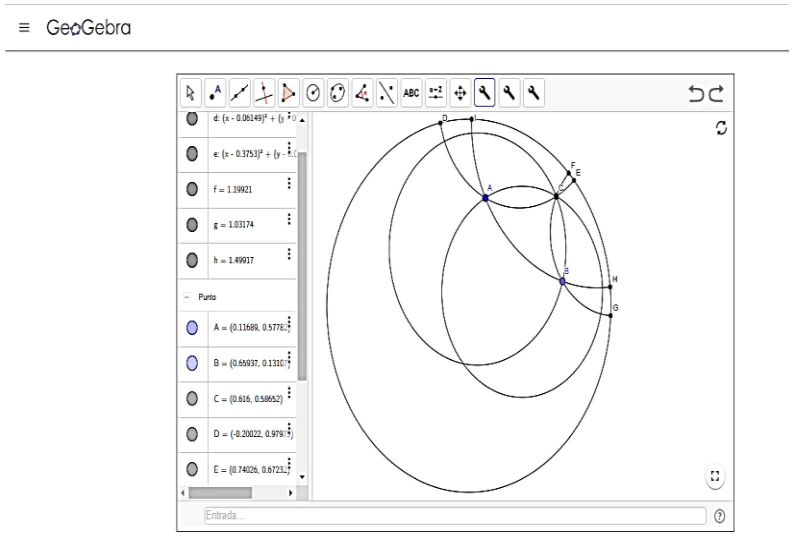


Figura 37. Construcción realizada por los estudiantes sobre el triángulo equilátero hiperbólico.

Dificultades: la dificultad presentada es que un par de estudiantes no recordaban las construcciones realizadas, sin embargo, los mismos compañeros le colaboran para superar esta dificultad.

Fortalezas: el interés por parte de los estudiantes, el notar que la construcción del triángulo equilátero es la misma y la del cuadrado no es aplicable fue muy interesante para ellos. Al obtener el cuadrado a partir de una nueva construcción los estudiantes logran comparar las dos geometrías.

Conclusiones: Los estudiantes desarrollan todas las actividades planteadas, ellos comparan los resultados en ambas geometrías.

1.1.10. Construcciones con regla y compás en el disco de inversión o disco de Poincaré

Se da inicio a la actividad proporcionando a los estudiantes el objetivo propuesto y los conceptos a trabajar, se realiza aclaración del desarrollo de las instrucciones. Esta actividad se plantea para ser desarrollada de forma individual.

Los estudiantes deben realizar las construcciones con regla y compás, al inicio de la actividad los estudiantes se notan muy interesados por la temática planteada.

Con la primera actividad, sobre la construcción de circunferencias ortogonales los estudiantes superan varias dudas presentadas en el desarrollo de la actividad con el software GeoGebra, se continúa con la explicación de la construcción del punto de inversión y finalmente se construye un triángulo dentro del disco de Poincaré. Los estudiantes comprenden que la línea hiperbólica es un segmento de la circunferencia ortogonal al disco de inversión, por otra parte, poder realizar la construcción con regla y compás de lo desarrollado en el software da excelentes resultados.

Todos los estudiantes desarrollan la guía, realizan las construcciones con regla y compás dentro del disco de inversión. Aunque la actividad con regla y compás resulta muy laboriosa es de gran agrado para los estudiantes. Las inquietudes presentadas son resultadas por parte del docente. A continuación, se puede observar la construcción realizada por el docente para los estudiantes sobre el punto de inversión (ver Figura 38).

Es importante destacar que al introducir el uso de la escuadra no se están haciendo construcciones con regla y compás a la manera de Euclides. Sin embargo, se emplea para minimizar los procesos de construcción de perpendicularidad de un punto dado a una recta dada, estos pasos se explican con anterioridad a los estudiantes, ellos conocen el procedimiento de la construcción euclidiana.

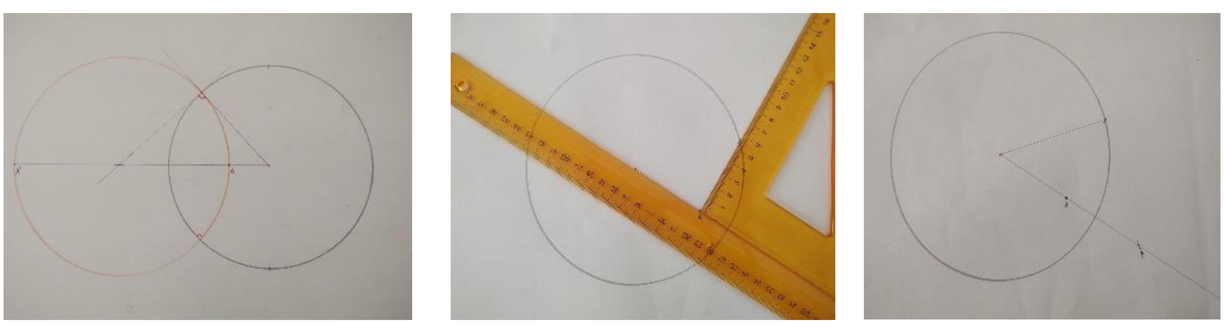


Figura 38. Disco de inversión, construcción con regla y compa, realizada por el docente como vía de explicación a los estudiantes

Los estudiantes responden las preguntas que se plantean al final de cada instrucción. A medida que se avanza en el desarrollo de la actividad se nota la exploración y asimilación de los conceptos planteados sobre la geometría hiperbólica. A continuación, se puede observar el trabajo realizado por los estudiantes, en la construcción del triángulo equilátero y mediatriz dentro del disco hiperbólico (ver Figuras 39 y 40), respectivamente.

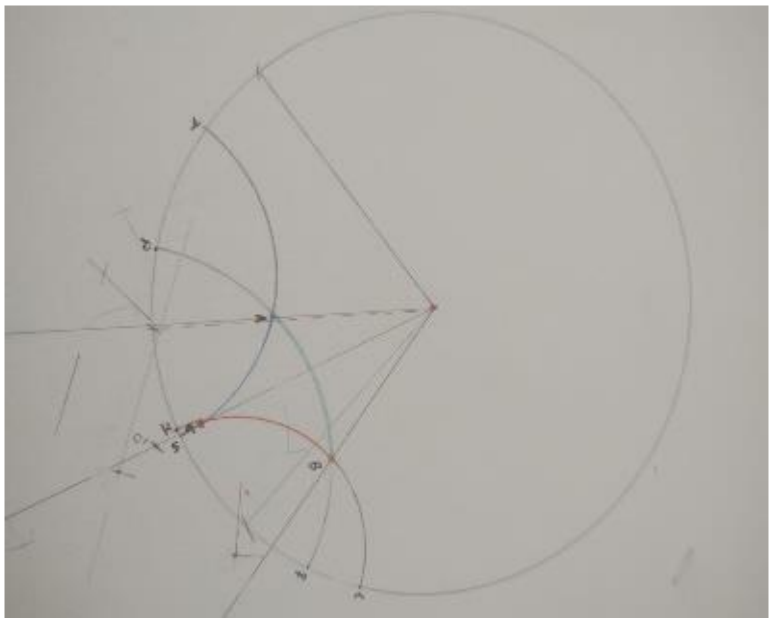


Figura 39. Construcción realizada por los estudiantes sobre el triángulo hiperbólico en el disco de inversión.

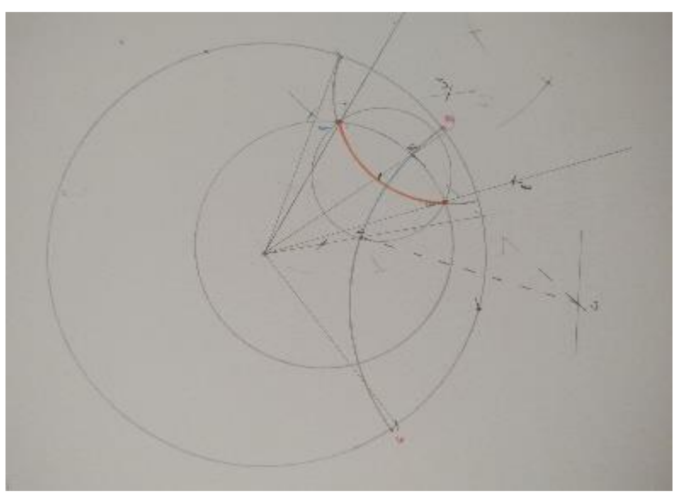


Figura 40. Construcción realizada por los estudiantes sobre mediatriz disco hiperbólico.

Dificultades: Un pequeño grupo de estudiantes en el primer día de los tres planificados del desarrollo de la actividad no trajo el compás.

Fortalezas: los estudiantes se notan muy interesados en el desarrollo de la actividad, responden correctamente las preguntas planteadas, se logra mejorar la interiorización de los conceptos. Se obtiene como logros en esta actividad:

- Aclaración de dudas sobre circunferencias ortogonales.
- Mejoran la asimilación e interiorización de los conceptos.
- Gracias a la construcción se pudo justificar muchos conceptos sobre geometría hiperbólica en los cuales los estudiantes presentaban dificultades.
- Poder elaborar con regla y compás la mayoría de las actividades realizadas a través del software GeoGebra resulta muy gratificante para los estudiantes.

Conclusión: el implementar construcciones con regla y compás en una clase de geometría hiperbólica mejora la comprensión de conceptos de los estudiantes, se desarrolla una clase no tradicional, generando así en los alumnos gran interés por aprender. Los estudiantes a través de los procesos de visualización establecen por sí mismos propiedades hiperbólicas y superan dificultades presentadas en el desarrollo de la actividad anterior. Este proceso es indispensable en el desarrollo del pensamiento geométrico.

5.2. Caracterización del pensamiento geométrico

A continuación, se realiza la caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes, mientras desarrollan cada una de las actividades en la etapa práctica de esta investigación. El trabajo en las actividades basadas en regla y compás, genera en los estudiantes un gran entusiasmo por la clase de geometría, lo cual ayuda a mejorar su comprensión y asimilación de los conceptos, facilitando la introducción de nuevos conocimientos sobre geometrías no euclidianas, en particular la hiperbólica. Además, el trabajo autónomo de los estudiantes es un buen factor motivacional.

Figura 14. Etapas en la caracterización del pensamiento geométrico.

Las diez actividades, cinco basadas en geometría euclidiana y cinco en geometría no euclidiana, contribuyen a la caracterización del pensamiento geométrico, además, de la identificación de las características del pensamiento mostrado por los estudiantes en el desarrollo de las actividades. Esta caracterización se concreta en cinco etapas (ver Figura 14).

Etapa 1: se da inicio con una actividad de diagnóstico que tiene por objetivo verificar el manejo de los instrumentos geométricos y generar motivación por el aprendizaje en los estudiantes. El desempeño de los estudiantes se caracterizó por:

- Falta de claridad en el proceso de seguir instrucciones.
- El no uso de compás en clase por parte de los estudiantes.
- Falta de dominio de un lenguaje geométrico.
- Limitado desarrollo de los procesos de visualización geométrico.

Con base en el análisis del nivel conceptual y sus características en los estudiantes, se propone desarrollar procesos de pensamiento a través de construcciones con regla y compás, generando experiencias retadoras e interesantes. Este primer momento toma como punto de partida el interés y la motivación hacia el aprendizaje de la geometría en los estudiantes por medio de construcciones geométricas basadas en geometría euclidiana. Esto a su vez permite que los estudiantes comiencen a reconocer propiedades inherentes a las figuras geométricas por sí mismos, dando inicio a la construcción de conceptos, como la visualización de imágenes (identificar, observar características, comprender el dibujo, identificar posiciones) en su proceso de caracterización del pensamiento geométrico.

Etapa 2: en esta etapa se les plantea a los estudiantes elaborar construcciones con regla y compás de figuras geométricas, pero también que realicen demostraciones de algunos teoremas. Este proceso da como resultado una mejoría en sus capacidades cognitivas en los siguientes aspectos:

- Reconocen y diferencian los tipos de triángulos (equilátero, isósceles y escaleno).
- Identifican figuras geométricas como cuadrilátero, pentágono, hexágono entre otros.
- Comienzan a desarrollar habilidades para el trabajo con ayuda de la herramienta que posee el software y aquellas propias de las construcciones con regla y compas.

- Dan inicio a la descripción de propiedades inherentes a estas figuras geométricas (construcción de conceptos).
- Dan comienzo a desarrollar procesos de visualización.
- Desarrollan conceptos geométricos para generar una comprensión geométrica.

Esta caracterización del pensamiento geométrico se genera gracias a la manipulación de las figuras geométricas, por medio de construcciones con regla y compás. En una primera etapa se da comienzo a la profundización de conceptos sobre geometría euclidiana, realizando demostraciones de algunos teoremas euclidianos con los instrumentos regla y compás lo que le permite adquirir herramientas para el proceso de resolución de problemas. Estas características se pueden evidenciar en las Actividades 1 y 2.

Etapa 3: se afianza en la caracterización del pensamiento geométrico con la comparación de las construcciones con regla y compás, con aquellas realizadas a través del software GeoGebra. Los estudiantes manipulan puntos y rectas, observando la conservación de propiedades a pesar del desplazamiento de los objetos. Los avances que se logran identificar son:

- Se desarrollan ciertas habilidades matemáticas en el proceso del pensamiento geométrico (visuales, verbales, de dibujo, lógicas, establecer, comparar, representar, construir)
- Comparan lo desarrollado en el salón de clase con lo implementado en el aula de sistemas, por medio del ordenador.
- Manipulan los objetos y las construcciones observando la conservación de propiedades.
- Responden a preguntas utilizando un lenguaje más formal.
- Mejoran en el proceso de visualización.
- Adquieren habilidades en la resolución de problemas.

Los estudiantes utilizan la comparación como uno de los elementos más importantes, ya que contrastan las construcciones con regla y compás, con las elaboradas con el software GeoGebra, recrean las demostraciones elaboradas de los teoremas en el salón de clase con los instrumentos geométricos, por medio de GeoGebra, confrontando los resultados obtenidos previamente, profundizan sus procesos de visualización. Esto se puede evidenciar en las Actividades 2 y 3 respectivamente. Al desarrollar esta contrastación los estudiantes mejoran en la apropiación y comprensión de conceptos geométricos, lo cual se puede observar en el desarrollo de problemas retadores que exigían la aplicación de propiedades, Actividades 4 y 5.

Etapa 4: se basa en el análisis de los procesos históricos y la generación de propuestas propias, se utiliza la visualización matemática como una herramienta que facilita la comprensión de los nuevos conceptos en la introducción de la geometría no euclidiana, en particular la hiperbólica. Los estudiantes comienzan a comparar la geometría euclidiana con la geometría hiperbólica. Este momento se caracteriza por:

- Dificultad para identificar dos circunferencias ortogonales.
- Continuación con el desarrollo de habilidades matemáticas en la construcción del pensamiento geométrico. Además de las ya mencionadas, se propician las referidas a construir, extraer y analizar. Sin embargo, se evidencian dificultades en la interpretación, los procesos de visualización desarrollados hasta el momento y los conocimientos geométricos, las cuales no admiten la comprensión de las propiedades inherentes desarrolladas en el modelo de Poincaré.
- Sorpresa al verificar que la suma interna de los ángulos de un triángulo en el modelo disco de Poincaré, a través del ordenador, es menor a 180 grados (esto es logrado a través de la utilización de herramientas proporcionadas por GeoGebra).
- Comparación de las construcciones realizadas con GeoGebra en geometría euclidiana con las elaboradas en el disco de Poincaré.

Los estudiantes comparan las construcciones dentro del disco de Poincaré con las construcciones euclidianas elaboradas previamente. Aunque se trabaja exitosamente, se puede observar algunas falencias en el reconocimiento de conceptos dentro del disco de inversión. Los estudiantes llegan a comparar resultados euclidianos con los obtenidos en la geometría hiperbólica, estos resultados se pueden observar en las Actividades 6, 7 y 8.

Etapa 5: se propone realizar las construcciones elaboradas en el disco de Poincaré con el uso de la regla y el compás. Se da inicio con la construcción de dos circunferencias ortogonales, a continuación, la ubicación del punto de inversión, y finalmente, el desarrollo de las construcciones elaboradas previamente mediante el software GeoGebra, pero ahora con regla y compás. En la caracterización del pensamiento geométrico se muestran los siguientes avances.

- Poseen los procesos de visualización matemática que les permiten construir el conocimiento en la geometría hiperbólica
- Utilizan las habilidades matemáticas ya mencionadas y adquieren la habilidad de interpretar nuevos conceptos sobre geometría no euclidiana.
- Pueden observar mediante la construcción con regla y compás los radios perpendiculares de las circunferencias ortogonales lo que potencia la asimilación y comprensión de conceptos hiperbólicos.
- Comparan lo elaborado a través de la utilización de herramientas proporcionadas por GeoGebra el disco de inversión y el poder replicar la construcción con regla y compás lo cual afianza su proceso de aprendizaje.
- Argumentan y visualizan claramente conceptos geométricos hiperbólicos.
- Logran desarrollar lo elaborado con el software GeoGebra a través de construcciones con regla y compás utilizando propiedades en las construcciones euclidianas.

- Realizan la comprensión geométrica desarrollando la transición de conceptos y propiedades de geometría euclidiana a la no euclidiana, en particular la hiperbólica.

Las características del pensamiento geométrico se logran gracias a la contrastación de la geometría euclidiana con la hiperbólica a través de las construcciones con regla y compás. En este proceso se demuestra que, a medida que los estudiantes realizan las construcciones, mejoran la interiorización y comprensión de los conceptos geométricos, consiguiendo comparar resultados de la geometría euclidiana con la geometría hiperbólica. Además, este trabajo les permite crear vínculos entre los nuevos conocimientos y los que poseen previamente, para lograr así una construcción robusta del conocimiento geométrico que les permita elaborar procedimientos autónomos para resolver problemas.

5.3. La motivación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría

En la investigación se pretende generar en los estudiantes su capacidad de desarrollo matemático, promulgando la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, propiciando así una visión diferente de la asignatura, brindando como resultado que los estudiantes la observen necesaria para su vida.

García (1983) precisa que la motivación educativa es donde se *"… presenta un cuerpo de conocimientos para los responsables de la enseñanza, ya que da pautas para comprender lo que ocurre en el aula, desde la perspectiva del alumno, del profesor y de las relaciones entre ambos. Define qué es un alumno motivado y qué motivos se pueden adquirir, buscando un enfoque integrador con alternativas integradoras para salir al paso de las preocupaciones de los profesores"*[100].

Dado el objetivo de lograr una caracterización del pensamiento geométrico es imperativo contar con una excelente motivación por parte del estudiantado, es así que se propuso anexar a la enseñanza de la

[100] García, J. (1983). Motivación y auto aprendizaje elementos claves en el aprendizaje y estudio de los alumno recuperable el 14 de 06 de 2014 de la URL: http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista17/17_11.pdf, p.6

geometría el desarrollo de construcciones geométricas con regla y compás, comparando los resultados obtenidos con aquellos logrados con el uso de tecnologías de software como GeoGebra.

Se constata que los estudiantes mejoran su proceso de aprendizaje a través de las diferentes construcciones planteadas, ya que ellos las asimilan mejor y comprenden propiedades inherentes a estas, pues se sienten motivados por cada actividad planteada. En este trabajo se logra un aprendizaje significativo dado que adquieren conceptos e ideas que asimilan en base de sus propias experiencias al desarrollar la construcción, facilitando la comprensión de nuevos conceptos.

Las actividades planteadas desarrollan sus capacidades de interpretación y proposición, generando el desarrollo de su pensamiento geométrico. Por otro lado, las actividades basadas en geometría euclidiana y posteriormente las construcciones propuestas en el disco de Poincaré (geometría hiperbólica) permite un constructo de conceptos coherentes a nivel de abstracciones apropiadas, pues se parte de situaciones concretas (construcciones con regla y compás) y se llega a situaciones generalizadas (ordenador), ya que se puede manipular los objetos y realizar transformaciones.

Conclusiones del Capítulo 5

En este capítulo se analizan y describen los procesos de solución que utilizan los estudiantes en las diferentes actividades planteadas, y cómo mejoran sus procesos de interiorización de nuevos conceptos a través de la manipulación de las construcciones con regla y compás, generando su contrastación con lo elaborado por medio del software GeoGebra. En este proceso los estudiantes pueden transformar y manipular los puntos de las figuras y analizar que mantienen sus propiedades sin importar su forma.

Con base en estas contrastaciones entre lo desarrollado en el aula de clase con lo elaborado en el ordenador, los estudiantes encuentran relaciones geométricas y reconocen propiedades inherentes a cada figura geométrica, lo que les permite desarrollar su pensamiento geométrico, generando su capacidad de argumentación, creatividad e innovación a la hora de solucionar una situación problema, ya que debían utilizar conceptos que ellos mismos van descubriendo a medida que avanzan en el desarrollo de las actividades planteadas.

Los estudiantes utilizan en la construcción con regla y compás conceptos euclidianos, realizan la demostración de diferentes proposiciones del libro de Euclides, determinando la similitud entre la geometría euclidiana y la geometría hiperbólica. Además, elaboran diferentes construcciones por medio del software GeoGebra contrastando los resultados obtenidos tanto en geometría plana como los logrados en el disco de inversión o disco de Poincaré, dando como resultado un avance en su pensamiento geométrico.

Por ejemplo, los estudiantes, al realizar la construcción en GeoGebra del triángulo equilátero, demostración que aparece en el libro I de Euclides y las de los triángulos isósceles y escaleno por medio de las herramientas de este software, pueden comprobar que la suma interna de sus ángulos es igual a 180 grados, sin importar el tamaño o forma de los triángulos. Al contrastar este resultado con las construcciones en el disco de inversión, verifican que la suma interna de sus ángulos es inferior a 180 grados y que además este resultado se acerca a 180 grados cuanto más cerca esté la figura al punto centro del disco de inversión. Este proceso facilita en los estudiantes la asimilación de nuevos conceptos en los cuales analizan geométricamente las relaciones existentes entre estas geometrías, fomentado sus procesos de pensamiento, lo que conlleva a generar gran intriga por el descubrimiento de una nueva geometría.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre la caracterización del pensamiento geométrico en el proceso de hacer construcciones, contrastando las formas en que se enfrenta la geometría euclidiana y las no euclidianas, en particular la hiperbólica, en los estudiantes de grado séptimo, permite dar respuesta al objetivo de la misma. Los resultados logrados permiten resaltar elementos que parecen ser esenciales en este trabajo, los cuales se detallan a continuación.

La construcción con regla y compás en geometría raramente se aborda en el salón de clase, difícilmente se encuentra en libros ejercicios y/o problemas que soliciten al estudiante construir objetos geométricos, y es aún más difícil encontrar preguntas como ¿qué se puede concluir en esta situación? Y si se hace una demostración de la construcción de una figura geométrica, ¿qué sucede?, ¿es posible hacer generalizaciones? Considerando las respuestas a estas preguntas, en este trabajo se plantea como estrategia de investigación el desarrollo de este tipo de actividades, para fomentar el interés y la motivación de los estudiantes, mejorar la interiorización de conceptos y posibilitar la incorporación de nuevos conocimientos con el apoyo de las nuevas tecnologías y uso de los instrumentos geométricos, lo cual permite mostrar la existencia de diversas geometrías y explorarlas. En este proceso se aporta a la comunidad educativa una nueva propuesta pedagógica para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, a partir de la enseñanza de geometrías no euclidianas, basada en construcciones geométricas con el apoyo de recursos tecnológicos.

Las construcciones con regla y compás en geometría euclidiana son determinantes a la hora de fortalecer conceptos previos, necesarios para la introducción de nuevos conocimientos sobre geometrías no euclidianas, en particular la hiperbólica, como la identificación de propiedades geométricas inherentes a las figuras involucradas. Estas construcciones tienen implicaciones positivas en los estudiantes generando interés y motivación por la asignatura. Además, el uso de la tecnología a través del software

GeoGebra fortalece lo visto en clase. Con el uso de los instrumentos y de GeoGebra la construcción de figuras permite una mejor comprensión de conceptos geométricos, como lo afirma Poincaré (1854 - 1912) *"Puede preguntarse por qué no puede estudiarse la geometría sin figuras… las figuras son necesarias, pero ellas son un instrumento apenas menos grosero que la tiza que sirve para trazarlas…nos servimos de ellas para estudiar algo que es más elevado y sutil"*[101].

El uso del software GeoGebra como instrumento didáctico en la geometría euclidiana, permite comparar los resultados de las construcciones desarrolladas con regla y compás en geometría plana, logrando que los estudiantes generalicen diversas propiedades inherentes a estas, generando en los estudiantes un pensamiento geométrico analítico y argumentativo.

En la transición del desarrollo de conceptos sobre geometría plana a geometrías no euclidianas, en particular la hiperbólica, las construcciones con regla, escuadra y compás dentro del disco de Poincaré (Modelo de Poincaré), resultan interesantes y atractivas para los estudiantes, pues les permite comparar los resultados obtenidos en las construcciones realizadas con regla y compás en geometría euclidiana fortaleciéndose el proceso del pensamiento geométrico. Con esto se logra que los estudiantes potencien la interiorización y asimilación de los nuevos conceptos geométricos sobre la geometría hiperbólica.

La utilización del software GeoGebra como herramienta didáctica en la geometría hiperbólica, permite la manipulación y transformación de las figuras hiperbólicas dentro del disco de inversión, lo cual propicia el desarrollo de su pensamiento geométrico.

Se pudo comprobar que la construcción de figuras hiperbólicas dentro del disco de inversión, a través del uso de regla, escuadra y compás, resulta de gran referencia o soporte a los estudiantes para desarrollar pensamientos más concretos. Este proceso les permite responder de forma autónoma a las inquietudes

---

[101] Poincaré, H. y Einstein, A. (1948). Fundamentos de la Geometría. Buenos Aires: Iberoamericana, pp. 92 y 93.

y dificultades que presentan al realizar las actividades en el disco de Poincaré, por medio, del software GeoGebra, contribuyendo a fortalecer su aprendizaje, en relación a conceptos euclidianos e hiperbólicos, y así facilitar la transición a nuevos conceptos sobre las geometrías no euclidianas.

Esta investigación logra constatar que se puede introducir estos nuevos conceptos sobre geometría hiperbólica en grados inferiores en la escuela, pese a su complejidad, fortaleciendo sus nociones sobre geometría plana, a través de construcciones con regla y compás, ya que se logra potenciar la motivación de aprender de los estudiantes. La introducción de estas nuevas nociones hiperbólicas desconocidas hasta ahora por los estudiantes permite obtener interesantes experiencias. En este proceso los estudiantes se interrogan acerca de "*¿entonces la geometría de Euclides no sirve?, ¿cuál es la verdadera?, ¿dónde se aplica?"*[102], las cuales constituyen preguntas atrayentes, que resultan en clases muy productivas e interesantes.

Estas preguntas llevan a sostener lo conveniente que resulta utilizar las construcciones geométricas como puerta de acceso a las geometrías no euclidianas. La utilización de construcciones con regla, escuadra y compás dentro del disco de inversión y la utilización de GeoGebra como herramienta didáctica, potencia el aprendizaje por parte de los estudiantes, lo cual permite sustentar la importancia de la enseñanza de la geometría euclidiana y no euclidiana en el grado séptimo de secundaria en la escuela.

Caracterización del pensamiento geométrico

Con el progreso y estudio histórico del marco teórico de la presente investigación, la obtención de la experiencia y observación en la implementación de las actividades propuestas, así como el análisis de sus resultados, se logra obtener elementos para la caracterización del pensamiento geométrico.

[102] Opiniones de los estudiantes.

El desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes se fortalece con la profundización o construcción de conceptos en geometría euclidiana, fundamentada en construcciones con regla y compás, sobre las proposiciones propuestas en el libro I de Euclides, así mismo, la realización de polígonos con la ayuda de los instrumentos geométricos. Con base en estas construcciones los estudiantes se apropian y asimilan con mayor destreza nociones de propiedades inherentes a estas figuras.

Dada la importancia de las construcciones con regla y compás, la abstracción de conceptos por parte de los estudiantes es determinante en geometría durante las actividades planteadas, actividades que se diseñan para fortalecer nociones euclidianas previas y para así lograr introducir los nuevos conceptos sobre geometría hiperbólica.

La caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la transición de conceptos euclidianos a no euclidianos, en particular hiperbólicos, requiere realizar construcciones con regla y compás basadas en geometría euclidiana para comparar los métodos y similitudes en la elaboración de construcciones de figuras hiperbólicas dentro del disco de inversión, además de la utilización de GeoGebra como herramienta didáctica, para contrastar resultados obtenidos por los estudiantes en ambas geometrías. Esta última parte del trabajo permite a los estudiantes manipular y transformar las construcciones, de tal forma que individualmente los alumnos son capaces de realizar interpretaciones y abstracciones, donde utilizan activa y operacionalmente las propiedades de las figuras geométricas para formalizar su pensamiento geométrico.

A partir de las construcciones geométricas los estudiantes pueden desarrollar sus propios conocimientos, fortaleciendo conceptos previos sobre geometría euclidiana y edificando nuevas nociones sobre geometría hiperbólica.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades planteadas para la caracterización del pensamiento geométrico en los estudiantes de grado séptimo, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Continuar investigando sobre la inclusión de la geometría hiperbólica en la escuela y proponer nuevas construcciones retadores para el trabajo en el aula con los estudiantes de grado séptimo en la Educación Básica.
- Motivar a los estudiantes por el estudio de la geometría, específicamente hacia el proceso de realizar construcciones con regla y compás, por las potencialidades que posee este trabajo para el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Fomentar el trabajo de construcciones geométricas con el uso del software GeoGebra como herramienta didáctica como una forma para lograr conocimiento robusto de los contenidos.
- Incluir en el currículo de las escuelas el estudio de la geometría no euclidiana, en particular la hiperbólica, para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana y por ende contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico.
- Investigar la inclusión en el currículo escolar de otras geometrías no euclidianas, para fortalecer el proceso del pensamiento geométrico en los estudiantes.

BIBLIOGRAFIA

Arboleda, L. C. & Anacona, M. P. (1994). *Las Geometrías no euclidianas en Colombia, profesor Julio Garavito (1865-1920)*.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3).

Atanasova-Pacemska, T., Gunova, V., Lazarova, L., & Pacemska, S. (2016). Visualization of the Geometry Problems in Primary Math Education-Needs and Challenges. *IMO-Istrazivanje matematickog obrazovanja, 8*(15), 33-37.

Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Tomo I y II.La Habana: Pueblo y Educación.

Barker, S. (1969). *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Boyer, C. B. (1996). *Historia da Matematica*. Sao Paulo: Editora Edgard Blucher.

Cabariti, E. (2004). Geometria Hiperbólica: uma proposta didactica em ambiente informatizado. *Dissertacao de Mestrado em Educacao Matemática*, Pontifícia Universidade Católica de Sao Paulo.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 694-701.

Chiappini, G., & Bottino, R. M. (1999). *Visualisation in teaching-learning mathematics: the role of the computer*. Computer Graphics And Visualization Education.

Christi, D. (2011). *Hyperbolic geometry in the high school geometry classroom* (Tesis de grado). Iowa State University, Iowa, EUA. Recuperado de http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSM/Donald_C_MSM_F05.pdf .

Cowley, C. S. (2009). *Spherical and hyperbolic geometry in the high school curriculum* (Doctoral dissertation, University of Texas).

David, H. (1971). *Foundations of geometry (Grundlagen der Geometrie)*, translated by Leo Unger, Open Court, La Salle, IL.

De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. Cap. 0. *El papel de la visualización*. Madrid: Pirámide.

Ding, L., Fujita, T. y Jones, K. (2005). CERME 4. *Developing geometrical reasoning in the classroom: Learning from highly experienced teachers from China and Japan*. University of Southampton, University of Glasgow, University of Southampton. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG7.pdf

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. Journal for research in mathematics education, 110-136.

Duval, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et Sciences Cognitives,10, 5-53.

Dreyfus T.(1995), Immagery for Diagrams in R. Sutherland and J. Mason (eds) *Exploiting mental imagery with computer in Mathematics education*, NATO ASI Series, Springer - Verlag, Berlin, Series F, Vol 138, 3-19

Escalona, M. (2007). *El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario. 2007*. Tesis de doctorado no publicada. Instituto Superior Pedagógico “José de la Luz y Caballero”, Holguín. p. 65.

Euclides (2007). *Elementos de euclides. Libros I – VII*. Biblioteca Gredos.

Eves, H. (2002). *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp.

Fish, W. (1996). *Non-Euclidean geometry and its possible role in the secondary school mathematics syllabus* (Doctoral dissertation).

Fitzpatrick, M. O. M. (1964). *Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry*. The Mathematics Teacher, P. 323-332.

Garcia, J. (1983). *Motivación y auto aprendizaje elementos claves en el aprendizaje y estudio de los alumno*, recuperable el 14 de 06 de 2014 de la URL: http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista17/17_11.pdf, ,p.6

Geometría, *Uniciencia*, 27(1), 74-94. p. 75

González, Á. y Vílchez N. (2002). *Enseñanza De La Geometría Con Utilización De Recursos Multimedia*. Aplicación a la Primera Etapa de Educación Básica. Sector San Jacinto. Trujillo. Venezuela. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/14318/1/vilchez_nieves2.pdf

González, L. (2004). *La motivación hacia el estudio. Fundamentos y metodología para su evaluación en secundaria básica*. Tesis presentada en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Universidad de Pinar del Río “Hermanos Saíz Montes de Oca". La Habana.

Gravina, M. (1996). *Geometria dinamica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria*.IN: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on learning problems in mathematics*, 20, 27-46.

Guzmán, M. (2000). *The role of visualization In the Teaching and Learning of Mathematical Analysis*.

Henderson, D. (2000). *Experiencing Geometry in Euclidean*, Spherical, and Hyperbolic Spaces, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Henderson, D. (2001). *Mathematical Intelligencer*, Vol. 23, No. 2, pp. 17-28.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. Mathematics Teacher, 74(1), 11-18.

Hohenwarter, Markus & Preiner, Judith. (2007). *Dynamic Mathematics with GeoGebra*. The Journal of Online Mathematics and Its Applications RECUPERABLE, https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

John, P. (1839). *The Elements of Geometry: Containing the First Six Books of Euclid*, from the last London Edition, W.E. Dean, New York.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry In, Haggarty, Linda (eds.) *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice*. London, GB, Routledge pp. 121-139

Keith Jones, July (2001). *Teaching and learning geometry*, Recuperable https://pdfs.semanticscholar.org/9205/1fc5874bd732a3a1ecbecae5f9f221f2c040.pdf

Keller, J. (1983,1984,1987). Modelo motivacional. Recuperable, 7 de 06 de 2014, de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED409895.pdf

Kline, M. (1986). El fracaso de la Matemática Moderna – *Por qué Juanito no sabe sumar Siglo Veintiuno* Editores – México, p.p. 189 y 190.

Komarnicki, N. et al. (2013). *100 Construcciones Geométricas con Herramientas Manuales e Informáticas*. Buenos Aires: Duken.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . p. 4.

Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. p. 6

Lénárt, I. (2010). *Gauss, Bolyai, Lobachevsky–in General Education?* (Hyperbolic Geometry as Part of the Mathematics Curriculum). In Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture (pp. 223-230). Tessellations Publishing.

Leoni, M. & Reinaldo, F. (2013) *O Ensino das Geometrias Não-Euckidianas: uma prática metodológica investigativa e reflexiva no Ensino Médio*. book Brasil: PDF, pp.15. Available at: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/698-4

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical Problem-Solving Current Themes, Trends, and Research*. ICME-13 Topical Study Groups. Springer Nature Switzerland AG 2019

M. Becheanu, International Mathematical Olympiads. 1959–2000, The Academic Distribution Center, 2001.

Mammana, C. & Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Kluwer Academic Publishers.

Marcondes, T. (2014). *Geometrias hiperbólicas com uso do GeoGebra.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

María, M. (2004). *Una concepción pedagógica de la estimulación motivacional en el proceso de la enseñanza–aprendizaje*. Tesis de Doctorado. Recuperable el 17 de 10 de 2014, de la URL: http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/tesis/index/assoc/HASHe802.dir/doc.pdf, p. 3

Martin, G. E. (1975). Saccheri's Three Hypotheses. *In The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, New York, NY.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Editorial Labor.

Matematización (2009). recuperable el 5 de 01 de 2015, de la URL: http://ciberdocenciagobpe.blogspot.com/2009/11/matematizacion.html.

Miller, J. (1998). *The psychology mathematical*. Princenton University Press, Princenton.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Ministerio de Educación de Perú. Resolución de Problemas. (2015) de la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Imprenta Nacional, p. 62.

Moreno, M. (2004). *Una concepción pedagógica de la estimulación motivacional en el proceso de enseñanza aprendizaje*. Tesis en opción al grado de doctor en ciencias pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona" Facultad de Ciencias de la Educación. Habana, Cuba.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003), Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

O Ensino das Geometrias Não-Euclidianas (2013): *uma prática metodológica investigativa e reflexiva no Ensino Médio*. 1st ed. [ebook] Brasil. Available at: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/698-4.

Olive, J. (2000). *Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning*. Ensino e Aprendizagem de Geometria. Lisboa: SPCE, 7.

Pavanello, M. (1996). *O abandono do ensino da Geometria: Uma visão histórica*. GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria.IN: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Belo Horizonte.

Petakos, K.& Sgreccia, N. (s.f). *El quinto postulado de Euclides: Propuesta de clase para el último año de la escuela secundaria*. Revista de Educación Matemática, 25(2).

Poincaré, H. y Einstein, A. (1948). *Fundamentos de la Geometría. Buenos Aires: Iberoamericana*. pp. 92 y 93.

Polya, G. (1957). *How to Solve It*, second edition, recuperable 2 de 08 de 2014, de la URL: https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf, p.6

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas. p.117

Presmeg, N. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology*. En: Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds), Handbook of research on the psychology of mathematics education. Rotterdam: Sense.

Resolución de problemas. (2014), recopilación, de la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf

Ribeiro, R. (2013). *Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica*.

Richey, Fields, & Foxon, (2001). Diseño instruccional. Recuperable 12 de 09 de 2015 de la URL: http://www.ugr.es/~sevimeco/revistaeticanet/numero12/Articulos/Formato/articulo4.pdf

Rocha, Marília Valério. (2009). *Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba. P48.

Rosenfeld, B. (1988), *History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. With the editorial assistance of Hardy Grant. New York (Springer-Verlag). 1988. Xi, 471 pp.

Royer, J. M. (1979). Theories of the transfer of learning. Educational Psychologist, 14(1), 53-69.

Saccheri, G. (1903). Revista filosófica.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., & Pérez, M. D. L. L. C. (1998). Metodología de la investigación (Vol. 1). México: Mcgraw-hill.

Sandín Esteban, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.Madrid*: Mc Graw Hill.

Santos, T. A (2009). *Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática – PCM – Maringá.

Schumann, H. y Green, D. (1994). *Learning geometry through interactive construction. In: Discovering Geometry with a computer* . Using CabriGéomètre. Ed. Chartwell-Bratt.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Sierra, S. y Alicia, R. (2002). *Modelación y estrategia: Algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica. La Habana: Pueblo y Educación*. p. 317.

Tejada, D. Geometría s no-euclidianas: Friedrich Gauss, 1777-1855, Juan Bolyai, 1802-1860; Nikolai Lobachebskky, 1793-1856; Bernhard Riemann, 1826-1856.

Tomado de Ribeiro, R. S. (2013). *Geometrias não-euckidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinámica*, p. 30.

Tomado Henderson D, W. (2001), Mathematical Intelligencer, Vol. 23, No. 2, pp. 17-28, recuperable http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/crochet/crochet.html.

Valdeni Franco, & Luana P. Goulart de Menezes, (2012) *Utilizando O Geogebra Para Construção De Modelo Plano Para A Geometria Elíptica*, Recuperable http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/11.pdf.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometria*.

Wolfe, H. E. (1945). *Introduction to non-euclidean geometry*. New York: The Dryden Press, 1945.

Zimmermann, W. y S. Cunningham (1991). Editor's introduction: *What is mathematical visualization?* En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Anexo 1. Encuesta a estudiantes

Objetivo: Reconocer factores para mejorar la enseñanza y aprendizaje en los estudiantes.

Fuente: propia del autor

Desarrollo: Estimado estudiante, en aras de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela se realizan varias investigaciones en todo el país, esta es una de ellas. Se es del criterio de sus buenos resultados en esta área de la matemática. Y se requiere tener presente sus valiosas opiniones. Por lo que necesita sea lo más sincero y preciso posible en sus respuestas.

Muchas gracias por su colaboración.

Datos Generales: **Grado: _____________** **Edad: ___________**

Cuestionario:

Su opinión sobre la asignatura de geometría permite mejorar las actividades de formación en el futuro. Por favor, conteste a todas las preguntas. Gracias.

1) Durante años anteriores en el primer periodo académico la docente impartió clases de geometría:

   1 SI 2 NO 3 A veces si 4 A veces no

2) Durante años anteriores en el segundo periodo académico la docente impartió clases de geometría:

   1 SI 2 NO 3 A veces si 4 A veces no

3) Durante años anteriores en el tercer periodo académico la docente impartió clases de geometría:

   1 SI 2 NO 3 A veces si 4 A veces no

4) Durante años anteriores en el cuarto periodo académico la docente impartió clases de geometría:

   1 SI 2 NO 3 A veces si 4 A veces no

5) En grados anteriores en clases de geometría ha trabajado con regla y compás:

1 SI 2 NO 3 A veces si 4 A veces no

6) Conoce o a escuchado el concepto de Geometría euclidiana

1 SI 2 NO 3 no sabe 4 En alguna ocasión

7) Conoce o a escuchado de las Geometrías no euclidianas

1 SI 2 NO 3 no sabe 4 En alguna ocasión

8) Conoce y ha trabajado en el computador con el software GeoGebra

1 SI 2 NO 3 no sabe 4 En alguna ocasión

II. Valora en una escala del (1) al (5), donde (5) es siempre, (4) es casi siempre, (3) es algunas veces, (2) es rara vez y (1) es nunca, a las siguientes preguntas.

9) ¿Cómo califica las clases de geometría?

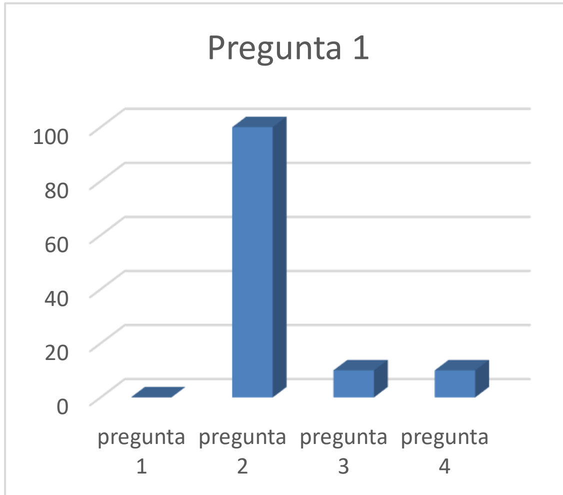
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

Anexo 2. Gráfico análisis encuesta para constatar estado inicial en los estudiantes

NÚMERO DE ESTUDIANTES ENCUESTADOS 120

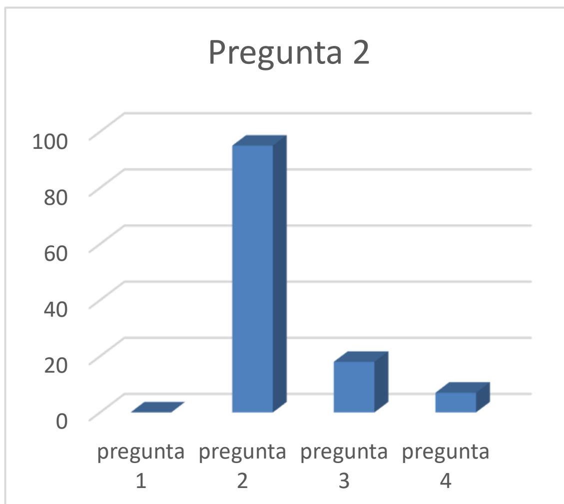
1) **PREGUNTA 1**: Durante años anteriores en el primer periodo académico la docente impartió clases de geometría:

PREGUNTAS	ESTUDIANTES
Pregunta 1: SI	0
Pregunta2: NO	100
Pregunta 3: AVECES SI	10
Pregunta4: AVECES NO	10



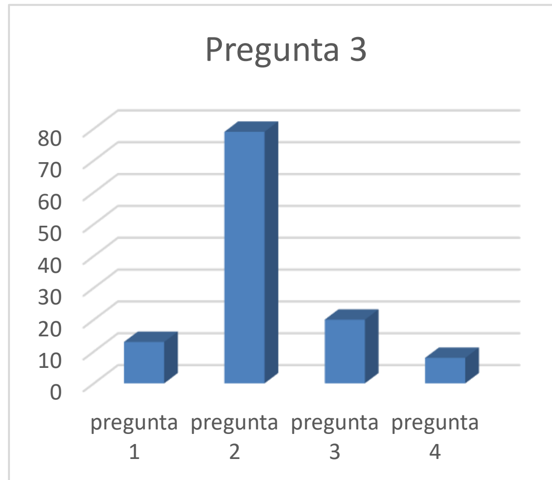
PREGUNTA 2: Durante años anteriores en el segundo periodo académico la docente impartió clases de geometría:

PREGUNTAS	ESTUDIANTES
Pregunta 1: SI	0
Pregunta2: NO	90
Pregunta 3: AVECES SI	15
Pregunta4: AVECES NO	5



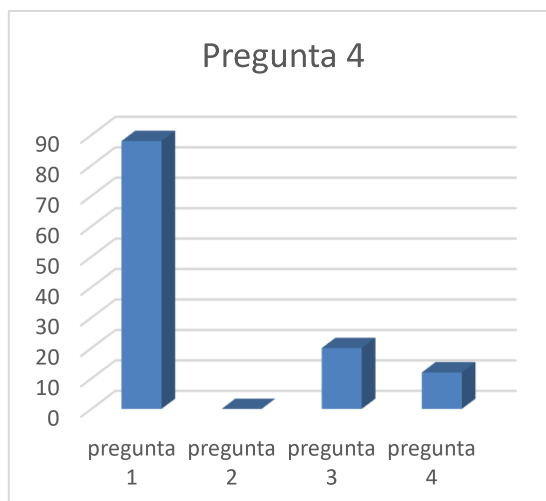
PREGUNTA 3: Durante años anteriores en el tercer periodo académico la docente impartió clases de geometría:

PREGUNTAS	ESTUDIANTES
Pregunta 1: SI	13
Pregunta2: NO	79
Pregunta 3: AVECES SI	20
Pregunta4: AVECES NO	8



PREGUNTA 4: Durante años anteriores en el cuarto periodo académico la docente impartió clases de geometría:

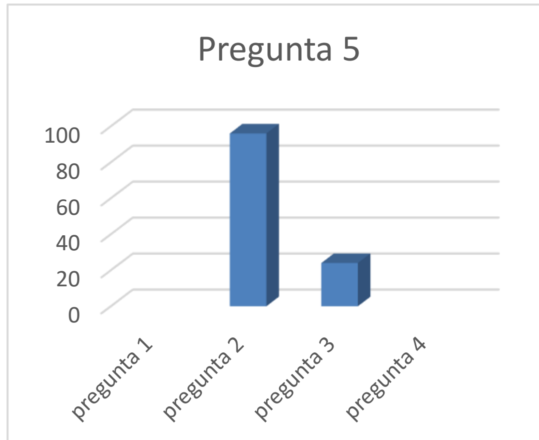
PREGUNTAS	ESTUDIANTES
Pregunta 1: SI	88
Pregunta2: NO	0
Pregunta 3: AVECES SI	20
Pregunta4: AVECES NO	12



PREGUNTA 5: En grados anteriores en clases de geometría ha trabajado con regla y compás:

PREGUNTAS ESTUDIANTES

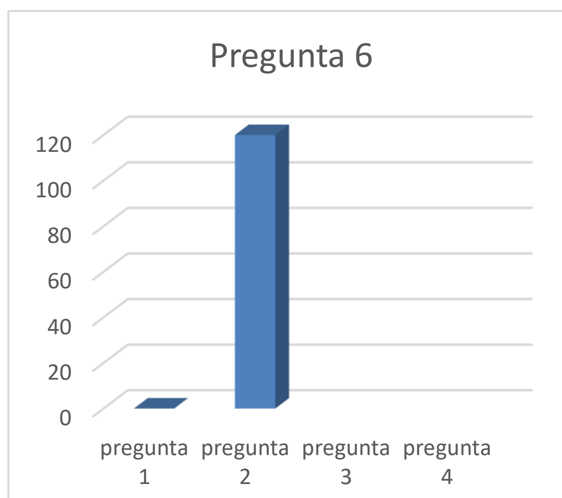
Pregunta 1: SI	0
Pregunta2: NO	96
Pregunta 3: AVECES SI	24
Pregunta4: AVECES NO	0



PREGUNTA 6: Conoce o a escuchado el concepto de Geometría euclidiana

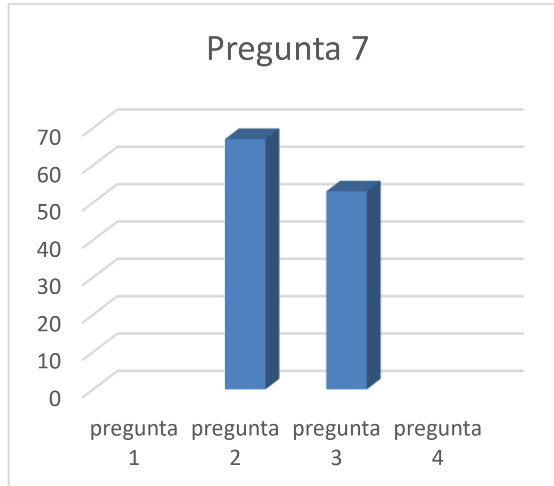
PREGUNTAS ESTUDIANTES

Pregunta 1: SI	0
Pregunta2: NO	120
Pregunta 3: AVECES SI	0
Pregunta4: AVECES NO	0



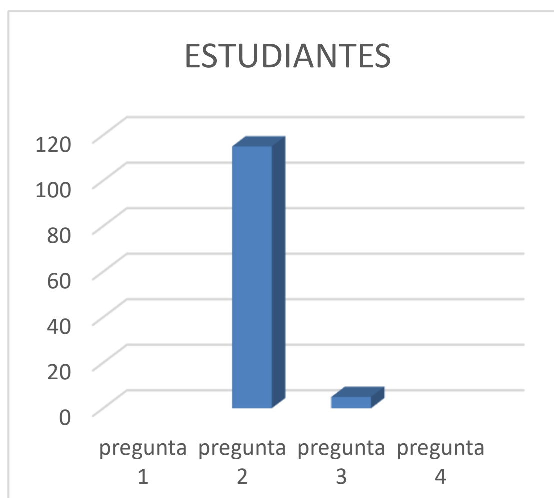
PREGUNTA 7: Conoce o a escuchado de las Geometrías no euclidianas

PREGUNTAS	ESTUDIANTES
Pregunta 1: SI	0
Pregunta2: NO	67
Pregunta 3: AVECES SI	53
Pregunta4: AVECES NO	0



PREGUNTA 8: Conoce y ha trabajado en el computador con el software GeoGebra

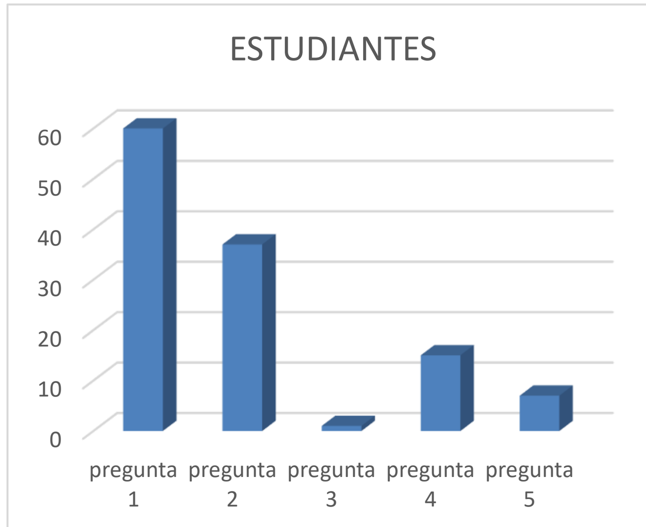
PREGUNTAS	ESTUDIANTES
Pregunta 1: SI	0
Pregunta2: NO	115
Pregunta 3: AVECES SI	5
Pregunta4: AVECES NO	0



PREGUNTA 9: II. Valora en una escala del (1) al (5), donde (5) es siempre, (4) es casi siempre, (3) es algunas veces, (2) es rara vez y (1) es nunca, a las siguientes preguntas.

1) ¿Cómo califica las clases de geometría?

pregunta 1: valoración 1	60
pregunta 2: valoración 2	37
pregunta 3: valoración 3	1
pregunta 4: valoración 4	15
pregunta 5: valoración 5	7



Anexo 3. Guion entrevista

Objetivo: caracterizar del pensamiento geométrico en el proceso de hacer construcciones contrastando la forma en que enfrenta la geometría euclidiana y el modelo hiperbólico de la geometría no euclidiana.

Se dará inicio con el desarrollo de preguntas a estudiantes para romper el hielo y obtener confianza y tranquilidad a la hora de responder.

¿Cómo se llama?

¿Cuántos años tiene?

¿A cuál grado pertenece?

¿Las actividades que se realizaron en el salón de clases fue de su agrado?

A cerca de las actividades sobre construcciones con regla y compás, usted considera que las clases de geometría deben realizarse de esta manera.

A continuación, se plantea una serie de preguntas donde se busca analizar la argumentación dada por cada estudiante, se entrega un formato donde cada uno de ellos puede responder dando solución a las preguntas planteadas.

1. ¿Qué es la geometría euclidiana?
2. ¿Las construcciones con regla y compás facilitan la comprensión de nuevos conceptos?
3. ¿La geometría debe ser incluido en el currículo de las matemáticas?
4. ¿Qué papel juega la tecnología en el estudio de la geometría?