RELACIONES ENTRE ESQUEMAS DE DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de

Doctor en Educación Matemática

Mauricio Penagos

República de Colombia

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2021

RELACIONES ENTRE ESQUEMAS DE DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de

Doctor en Educación Matemática

Mauricio Penagos

DIRECTOR DE TESIS

Rafael Sánchez Lamoneda (Ph.D.)

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2021

Nota de aceptación:

____

____

____

____

____

____

Firma del Presidente del Jurado

____

Firma del Jurado

____

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Septiembre 01 de 2021

Agradecimientos

El autor manifiesta su agradecimiento a:

- A mis asesores, los doctores Rafael Sánchez Lamoneda y Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, por sus valiosas orientaciones,
- A los docentes del Programa de Maestría y Doctorado en Educación Matemática por sus enseñanzas y aportes a mi formación,
- Al Doctor Miguel Cruz por sus oportunas recomendaciones,
- A mi Hija y a mi Familia, por su paciencia y apoyo,
- A los Docentes y Estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana.

Dedicatoria

A mi Hija y a mi Familia, que son la razón de ser de mi vida, gracias por su apoyo y motivación para lograr esta meta.

A mis colegas de la Universidad Surcolombiana, Hernando Gutiérrez, Augusto Silva y Ricardo Cedeño (q.e.p.d) quienes contribuyeron en mi formación básica y me motivaron a alcanzar nuevos logros académicos en mi profesión como docente.

RESUMEN

Se presentan avances en la caracterización del pensamiento algebraico, al realizar una investigación con un grupo de doce estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de un curso de Estructuras Algebraicas, si existen relaciones entre dos actividades propias de las matemáticas: resolver problemas y demostrar teoremas.

Se implementan dos encuestas semiestructuradas, entrevistas individuales, y un sistema de nueve actividades, en los que se pide a los participantes demostrar teoremas y resolver problemas. Al final se aplica una encuesta de satisfacción. Para triangular la información, las dos primeras encuestas se aplican también a docentes y expertos que han orientado cursos de Álgebra Abstracta.

La finalidad de los instrumentos implementados es clasificar las opiniones de los participantes de la existencia o no, de diferencias en la forma de razonar cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas, en el contexto del álgebra abstracta. La metodología utilizada es de tipo cualitativo y en el desarrollo de la investigación se tendrá en cuenta elementos teóricos del marco conceptual DNR, la propuesta de Schoenfeld (1985) sobre resolución de problemas, las comunidades de práctica de Wenger y la teoría del pensamiento matemático avanzado de David Tall.

Palabras clave: Pensamiento Algebraico, Álgebra Abstracta, Demostración Matemática, Resolución de Problemas, Marco Teórico DNR.

ABSTRACT

Advances in the characterization of algebraic thinking are presented, when investigating with a group of twelve undergraduate students in mathematics from an Algebraic Structures course, if there are relationships between two activities typical of mathematics: solving problems and proving theorems.

Two semi-structured surveys, individual interviews, and a system of nine activities are implemented, in which participants are asked to prove theorems and solve problems. At the end, a satisfaction survey is applied. To triangulate the information, the first two surveys are also applied to teachers and experts who have guided Abstract Algebra courses.

The purpose of the instruments implemented is to classify the opinions of the participants of the existence or not, of differences in the way of reasoning when they demonstrate theorems and when they solve problems, in the context of abstract algebra. The methodology used is qualitative and the development of the research will consider theoretical elements of the DNR conceptual framework, Schoenfeld´s proposal on problem solving, Wenger´s communities of practice and David Tall´s theory of advanced mathematical thinking.

Key words: Algebraic Thinking, Abstract Algebra, Mathematical Proof, Problem Solving, DNR Conceptual Framework.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁGINAS**

Lista de tablas

Lista de figuras

INTRODUCCIÓN

Muchos investigadores en educación matemática conciben la resolución de problemas como un motivador para producir conocimiento matemático. Así mismo, la demostración de teoremas, íntimamente ligada a procesos deductivos y argumentativos, permite afianzar los conceptos matemáticos y avanzar en la abstracción. Ambas son actividades que ponen en juego la destreza de docentes y estudiantes y también que ambas favorecen el desarrollo del pensamiento.

Rodríguez y otros (2019) consideran que, en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el estudiante se asemeja a un matemático, en el sentido que trabaja con problemas y cuestionamientos nuevos para él y realiza la misma actividad que un matemático: explora, conjetura, analiza, etc., con un conocimiento acorde a su nivel educativo. Por su parte, Sánchez y Gil (2014), arguyen que en la historia de las matemáticas, los retos motivados por algunas demostraciones y el desafío generado por algunos problemas, han sido fuente de inspiración para generar nuevos conocimientos y técnicas en el desarrollo de esta ciencia; prueba de ello son los tres problemas clásicos de la antigua Grecia y también el problema de resolver por radicales ecuaciones de grado mayor o igual que cinco que condujo a la formulación de la teoría de grupos en el siglo XIX.

El álgebra ocupa un lugar especial dentro de la matemática. Esta rama además de permitir la generalización, esencial para el desarrollo del pensamiento lógico, la caracteriza la elegancia y efectividad en las técnicas de manipulación y de representación que contribuyen al pensamiento crítico y desarrollo de destrezas para resolver problemas, así mismo favorece el progreso de otras ramas de la matemática pura y de la ciencia en general. Sin embargo, muchas de las bondades del álgebra son opacadas debido a fallas en la enseñanza, lo que repercute negativamente en el aprendizaje de los estudiantes. Algunas de esas fallas se derivan de metodologías mal direccionadas que priorizan la memorización de contenidos y mecanización de algoritmos, lo que no garantiza un aprendizaje significativo ni mucho menos el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

El álgebra moderna se enfoca en el estudio de constructos matemáticos llamados estructuras, que son el fundamento del método axiomático, y que resultan de definir una o varias leyes de composición interna (operaciones binarias) en conjuntos no vacíos y de plantear en ellos un reducido número de axiomas. A partir de esa base se estudia el comportamiento de los objetos que conforman el conjunto y esto conlleva a la construcción de una teoría. Precisamente es este hecho, el que da el carácter abstracto a esta rama de las matemáticas.

Esta nueva forma de hacer matemáticas surgió en el siglo XIX, comenzando con las estructuras de grupo y anillo y, a partir de ellas posteriormente aparecieron las de campo, espacio vectorial y álgebra. El matemático noruego Niels Abel (1802-1829) y el francés Evariste Galois (1811-1832), son considerados precursores del álgebra moderna. Falk (2013) afirma lo siguiente: *“El rasgo común de las diversas nociones agrupadas bajo el nombre genérico de estructura es que se aplican a conjuntos cuya naturaleza no está especificada. Para definir una estructura se dan una o varias relaciones en las que intervienen estos elementos, se postula luego que las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones que son los axiomas de la* *estructura. Hacer la teoría axiomática de una estructura es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura con exclusión de toda otra hipótesis…”*[1]

Con el desarrollo de la presente investigación se pretende lograr avances en la caracterización del pensamiento algebraico, al indagar si existen relaciones (diferencias o analogías) en la resolución entre de problemas y la demostración de teoremas de álgebra abstracta, explícitamente en lo que tiene que ver con el esfuerzo mental cuando se llevan a cabo estas tareas. Para lograrlo, se diseñaron y se hicieron validar diferentes instrumentos: dos encuestas semiestructuradas, un conjunto de nueve actividades didácticas (ver capítulo 4); también se realizaron entrevistas personalizadas y al final una encuesta de satisfacción (ver Anexos 5). Las primeras encuestas se implementaron no solamente a los estudiantes, sino también a cinco docentes y cinco expertos en con el fin de triangular la información (Anexos 1, 2, 3 y 4).

Diferentes son las razones para llevar a cabo este estudio, entre otras mencionamos las siguientes: en la mayoría de los programas de formación de profesores de matemáticas se ofrece al menos un curso de estructuras algebraicas. Findell (2001) considera que en estos cursos los estudiantes pueden extraer características comunes de sistemas matemáticos estudiados en otros cursos y pueden fortalecer sus habilidades de pensamiento algebraico. Por su parte Edwards & Brenton (1999) afirman que es necesario mantener estas asignaturas en los planes de estudios, ya

[1] de Losada M. F. (2013). Corrientes de Pensamiento Matemático del siglo XX Segunda parte Fundamentación Mary Falk de Losada. (pp.2). Universidad Antonio Nariño. Panamericana formas e impresos S.A.

que permiten al futuro docente, además de dominar los contenidos matemáticos, aprender a analizar y escribir demostraciones.

El estudio del álgebra constituye un punto de referencia para que los docentes en formación alcancen niveles más altos de abstracción. Al respecto Gallian (1999) arguye que el álgebra es importante para la educación de toda persona entrenada en matemáticas y que su terminología y metodología se usan ampliamente en otras ciencias del conocimiento como física, química y computación, entre otras. Según Dubinsky & otros (1994), los cursos relacionados con las estructuras algebraicas en ocasiones repercuten en un problema educativo, ya que los estudiantes consideran que son asignaturas complejas porque, aunque permite desarrollar la abstracción matemática, les exige memorizar axiomas, definiciones y teoremas que son fundamentales al momento de realizar sus propias demostraciones y resolver problemas. En atención a esto último, de que muchos estudiantes después de tomar estos cursos pierden el gusto por el estructuralismo matemático, el autor aborda la presente investigación teniendo en cuenta la incidencia de factores epistemológicos, psicológicos y didácticos de la solución de problemas y la demostración de teoremas.

En la literatura científica se puede encontrar un buen número de investigaciones que han sido publicadas y expuestas en congresos nacionales e internacionales de educación matemática, en relación con la importancia que tiene la resolución de problemas y la demostración en matemáticas, igualmente sobre las relaciones que existen entre ambos procesos. Entre esos congresos se mencionan algunos: International Congress of Mathematical Education (ICME), Congress of the

European Society for Research in Mathematics Education (CERME), Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), Congresos de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME) y otros organizados por importantes centros de educación superior del país como la Universidad Antonio Nariño de Bogotá y las universidades Pedagógica y Distrital.

Para llevar a cabo la presente investigación se implementarán elementos del marco teórico entre los cuales se encuentran DNR, acrónimo de Duality, Necessity and Repeated-Reasoning, propuesto por Harel (2007) quien asegura que, al implementarlo, se pueden establecer las condiciones para provocar necesidad intelectual de los estudiantes para aprender matemáticas, facilitándoles que organicen y se apropien de los conocimientos matemáticos. Se tendrá en cuenta la propuesta de Schoenfeld (1985) sobre resolución de problemas, elementos de la teoría del pensamiento matemático avanzado (PMA) de Tall (2013) y el trabajo en las llamadas comunidades, propuestas por Wenger (1998).

En atención a lo anterior, se formula el siguiente **problema científico**: ¿Es posible encontrar diferencias significativas en la forma de razonar cuando se demuestran teoremas y cuando se resuelven problemas de álgebra abstracta, de manera que se pueda avanzar en la caracterización del pensamiento algebraico?

Se define como **objeto de estudio:** el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra abstracta en la formación de docentes de matemáticas. El **campo de**

acción es el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra abstracta, a partir de la demostración teoremas y la resolución de problemas con docentes de matemáticas en formación.

Se propone como **objetivo general:** Contribuir a la caracterización del pensamiento algebraico al investigar si es posible encontrar diferencias significativas en la manera de razonar cuando se resuelven problemas y cuando demuestran teoremas de álgebra abstracta.

Se definen como **objetivos específicos**:

- Describir el pensamiento algebraico emergente, basado en los elementos del marco teórico DNR y el punto de vista de Schoenfeld (1985) sobre resolución de problemas.
- Lograr avances en la caracterización del pensamiento algebraico por medio de una metodología basada en la resolución de problemas y su relación con la demostración de teoremas.
- Analizar la incidencia de factores epistemológicos, psicológicos, didácticos y creencias sobre la matemática que repercuten en la ejecución de ambas tareas.

Para lograr el cumplimiento del objetivo general, los objetivos específicos y dar solución al problema de investigación, se plantea la siguiente **hipótesis científica**: El pensamiento algebraico que se requiere para demostrar teoremas es equivalente al que se necesita para resolver problemas en el contexto del álgebra abstracta.

Esta conjetura se va a sacar adelante por medio de una propuesta basada en los fundamentos teóricos del marco DNR, la teoría del PMA de Tall (2013), referentes sobre el pensamiento algebraico, la propuesta de Schoenfeld (1985) en relación con la resolución de problemas y la demostración de teoremas y el trabajo en comunidades de práctica a la manera de Wenger (1998). El problema que motiva el desarrollo de la tesis está en correspondencia con dos de las líneas de investigación del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño: Desarrollo del Pensamiento Matemático y Avances en su Caracterización, y, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y sus Aplicaciones a Nivel Universitario.

Como guía para el desarrollo de la tesis, resolver el problema de investigación y alcanzar los objetivos propuestos se presentan las siguientes **tareas de investigación**:

1. Consolidar el estado del arte, relacionando publicaciones científicas que destacan las similitudes o diferencias entre resolver problemas y demostrar teoremas
2. Establecer un marco teórico robusto, lo que implica la apropiación del marco DNR, la teoría de resolución de problemas de Schoenfeld, la teoría del PMA y las comunidades de práctica de Wenger.
3. Proponer actividades fundamentadas en la resolución de problemas y demostración de teoremas, en el contexto del álgebra abstracta de tal manera que pueda validarse o no la hipótesis científica.

4. Describir la manera en que razonan los participantes, de manera que se pueda contribuir a la caracterización del pensamiento algebraico.

El **aporte práctico** se fundamenta en: (1) La elaboración de dos encuestas semiestructuradas para estudiantes, docentes y expertos que permitan escuchar su opinión sobre la existencia de relaciones (diferencias o similitudes) en la forma de razonar cuando se resuelven problemas y cuando demuestran teoremas de álgebra abstracta; (2) El diseño de un conjunto de actividades didácticas dirigidas a los estudiantes, que permitan hacer un seguimiento y analizar el pensamiento algebraico emergente cuando realizan ambas tareas; (3) Una encuesta de satisfacción dirigida a los estudiantes con el fin de evaluar su percepción sobre el enfoque, diseño metodológico y la evaluación de las actividades desarrolladas en el curso.

El **aporte teórico** consiste en lograr avances en la caracterización del pensamiento algebraico, en una propuesta que tenga como sustento la resolución de problemas y la demostración de teoremas.

La presente investigación es de tipo cualitativo, pues se trata de un estudio cuyo fin es evaluar, ponderar e interpretar la información obtenida a través de entrevistas, conversaciones, registros y un sistema de actividades. Además, en la fase de análisis se requieren elementos básicos de estadística, como promedios y gráficos que no implican un manejo riguroso.

La tesis se estructura de la siguiente manera: introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el Capítulo 1 se expone el estado del arte. El Capítulo 2 consiste en el Marco Teórico, donde se describe el marco conceptual DNR, se hace una breve caracterización del pensamiento algebraico, fundamentos sobre resolución de problemas y demostración de teoremas, la teoría del PMA de Tall (2013) y una descripción de las comunidades de práctica de Wenger (1998). En el Capítulo 3 se detalla la metodología de la investigación. En el Capítulo 4 se expone en detalle cada una de las actividades que se van a implementar. Finalmente, el Capítulo 5 se describe el análisis de los datos, los resultados y los avances teóricos logrados en la caracterización del pensamiento algebraico. Se incluye al final de la tesis una sección de recomendaciones, referencias bibliográficas y los anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

La demostración matemática y la resolución de problemas en todos los niveles educativos es un tema de gran interés dentro de la comunidad de educadores matemáticos. En tal sentido muchos investigadores dedican particular interés a la relación que pueda encontrarse cuando se realizan estas actividades, estudios que pueden direccionarse desde diferentes puntos de vista: históricos, epistemológicos, sociales, psicológicos, filosóficos, curriculares, etc. En la presente investigación direccionada al nivel universitario, se analizarán las relaciones (diferencias o similitudes en cuanto al esfuerzo mental que implica), que puedan encontrarse cuando se resuelven problemas y se demuestran teoremas en el contexto del álgebra abstracta.

Por la experiencia docente del investigador y en atención a entrevistas realizadas a docentes de álgebra en ejercicio y a las recomendaciones de expertos, en el estado del arte se tendrán en cuenta publicaciones científicas direccionadas a los enfoques epistemológicos, psicológicos y didácticos de la demostración y la resolución de problemas. Algunas publicaciones que se referencian aquí abarcan más de uno de estos puntos de vista a la vez, ya que según los autores estos enfoques se articulan estrechamente y en tal sentido la variedad que se propone puede ser más inclusiva que disyuntiva.

1.1. Investigaciones relacionadas con el plano epistemológico de la demostración

En el campo de la filosofía, Sierpinska y Lerman (1996) consideran que la epistemología es la rama que estudia el conocimiento científico y en la cual se pueden plantear cuestiones como: ¿Cuáles son los principios del conocimiento científico? (si es empírico o racional); ¿Cómo se valida este conocimiento? (capacidad de predecir sucesos, la consistencia lógica); ¿Cómo se desarrolla el conocimiento científico? (acumulación, continuidad, etc.). En el caso de las matemáticas, la epistemología puede direccionarse a responder preguntas como ¿Cuál es el origen de nuestras creencias? ¿Cuál es el significado del conocimiento matemático y cómo se constituye?, ¿Cuál es su ontogénesis?

En la educación matemática se investiga los procesos de progreso del conocimiento matemático (mecanismos, condiciones, el contexto de descubrimiento o creación, los períodos de estancamiento y las afirmaciones que, desde el punto de vista de la teoría actual, pueden haber sido erróneas); también se investiga los procesos de descubrimiento matemático que realizan tanto los expertos matemáticos como los estudiantes y los modos de provocar tales procesos en la enseñanza. A continuación, se presentan algunos resultados de la literatura científica en educación matemática, enfocados desde el punto de vista epistemológico, donde se considera que los procesos de demostrar teoremas y resolver problemas guardan estrecha relación.

1.1.1. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof[2]

Se presenta un análisis de las demostraciones matemáticas, tanto las rigurosas como las formales. Se examina también la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, los puntos de vista que tienen los estudiantes sobre la misma y se caracterizan los esquemas de demostración que utilizan. Los académicos ofrecen su punto de vista sobre la evolución histórica de la demostración y su importancia en las investigaciones actuales en educación matemática, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de esta.

Harel & Sowder (2007) destacan la importancia de la demostración en la formación universitaria y consideran que los bajos niveles de desempeño de los estudiantes al demostrar se deben a planes de estudios mal concebidos, deficiencias en los libros de texto y en la enseñanza que ofrecen los maestros; también influyen las creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas. Los investigadores distinguen entre los términos “demostración” y “esquema de demostración”. El primero hace referencia a la argumentación matemática, lógico-deductiva y precisa (reconocida por la comunidad matemática) que se da a una proposición. “Esquema de demostración” se refiere al carácter subjetivo de la demostración y lo definen explícitamente como lo que establece la verdad de alguna afirmación o una proposición para una persona o una comunidad.

[2] Harel G., & Sowder L. (2007). “Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof”. En F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 805–842), Reston, VA, EE.UU.

Según los autores, al momento de construir demostraciones deben tenerse en cuenta factores cognitivos, matemáticos, epistemológicos, históricos y sociales. Es deber del docente asumir la demostración tal como es aceptada por la comunidad científica, pero también debe considerarse el aspecto cognitivo del estudiante y la naturaleza social de la demostración, ya que se ofrecen los argumentos de una persona para ser aceptado por otras.

Los académicos consideran que uno de los objetivos de la enseñanza debe ser diseñar estrategias que permitan que los estudiantes refinen y modifiquen sus esquemas de demostración y les permita llegar a construir verdaderas demostraciones matemáticas. Afirman que los estudiantes que reciben más tiempo de enseñanza para resolver problemas desarrollan mejor el razonamiento analítico, así mismo que los estudiantes a quienes se enfatiza la escritura de demostraciones pueden alcanzar mayores niveles intelectuales.

1.1.2. Learning to Prove in Order to Prove to Learn[3]

Demostrar es una habilidad que deben desarrollar todos los matemáticos, aunque es una habilidad difícil de adquirir para muchos estudiantes. Se investiga las dificultades que tienen los estudiantes al demostrar y las estrategias que emplean. Según la investigadora la demostración articula diferentes procesos: verificar, explicar, comunicar, persuadir, construir nuevos conocimientos y la síntesis axiomática.

---

[3] Knapp J. (2003). Learning to Prove in Order to Prove to Learn. Department of Mathematics, Arizona State University, Tempe, Arizona 85287. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.489.9566&rep=rep1&type=pdf

Para Knapp (2003) una demostración puede relacionar varias áreas de la matemática y muchas veces los estudiantes no tiene el conocimiento suficiente, tampoco de las leyes de la lógica, el razonamiento deductivo y la síntesis, incluso algunos demuestran presentando ejemplos. Para demostrar se requiere tener buen conocimiento matemático, destrezas para resolver problemas, capacidad de direccionar los conocimientos y reformular ideas, redacción y síntesis matemática asumir conductas que tienen los expertos en hacer demostraciones. Según la autora las dificultades de los estudiantes al demostrar encajan en dos categorías: (1) Dificultades con el uso de la lógica, el lenguaje y la falta de cultura de la demostración. (2) Carencia de conocimiento el área específica como definiciones, teoremas, estrategias y capacidad de generar ejemplos. Considera que los estudiantes de pregrado no tienen un conocimiento sólido de la demostración y que sus percepciones repercuten en los razonamientos y en las demostraciones que producen.

La académica está de acuerdo con Healy & Hoyles[4] (2000) en que los estudiantes tratan de buscar significado y la explicación a las demostraciones y que las califican por su forma en dos tipos distintos: (1) Las explicativas o empíricas, que son las que prefieren; (2) Las algebraicas, que según ellos son las preferidas por los profesores incluso cuando el procedimiento sea defectuoso o incorrecto. La investigadora asume los tres tipos de esquemas de demostración propuestos por Harel & Sowder (1998): externos, empíricos y analíticos y se acoge a estos autores en que es necesario fortalecer lo cognitivo para llegar a los esquemas analíticos, así mismo

[4] Healy L & Hoyles C. A study of proof conceptions in algebra, Journal for Research in Mathematics Education 31(4), 396-428.

que los estudiantes pueden usar varios esquemas a la vez, ya que desde su perspectiva cada esquema de demostración es convincente.

Según la académica, la secuencia natural para desarrollar el pensamiento matemático es: intuición, ensayo, error, especulación, conjetura y demostración. Considera que los estudiantes aprenden a demostrar cuando están inmersos en las matemáticas y que en los planes estudio son necesarios los cursos que promuevan la definición, la conjetura y la demostración.

1.1.3. On Similarities and Differences Between Proving and Problem Solving[5]

Hacer demostraciones es fundamental en los cursos de matemáticas de pregrado y posgrado, sin embargo, poco se analiza el procedimiento que realizan los estudiantes. Savic (2015) considera que la demostración matemática y la resolución de problemas se superponen y que se puede revisar la literatura sobre resolución de problemas para describir aspectos de la demostración, ya que esta última es un subconjunto de la resolución de problemas, una consecuencia.

A partir del Marco Multidimensional de Resolución de Problemas (MMRP) de Carlson y Bloom[6], el académico aborda dos preguntas de investigación: ¿Qué diferencias o similitudes pueden encontrarse en la construcción de demostraciones y la resolución de problemas?, y, ¿Qué diferencias pueden encontrarse en los

[5] Savic, M (2015). On Similarities and Differences Between Proving and Problem Solving. *Journal of Humanistic Mathematics, Volume 5,* Issue 2. July 2015.

[6] Carlson M. & Bloom I. (2005) proponen un marco teórico para la resolución de problemas matemáticos, más amplio que el propuesto por Schoenfeld (1985), en el que conciben cuatro fases (orientación, planificación, ejecución y verificación o revisión), transversalizadas por cuatro características o atributos (recursos, control o monitoreo, heurísticas y emociones).

procesos que realiza un estudiante graduado de posgrado en matemáticas (demostrador intermedio) y un matemático experto (un topólogo)?

Se escogieron dos participantes de un grupo de nueve matemáticos profesionales y cinco estudiantes graduados. Durante la investigación se les entregó documentos sobre semigrupos, papel y un lápiz livescribe (que es un bolígrafo que cuenta con una cámara que toma fotografías mientras se escribe y también tiene un micrófono incorporado que graba lo que se dice). A los participantes se les pidió resolver dos problemas, dar siete ejemplos y demostrar trece teoremas. Se aportan las siguientes conclusiones:

- El MMRP permite describir parte de los procesos de demostración y concluir que hay similitudes con la resolución de problemas.
- Existen diferencias en la manera en que los participantes revisan su trabajo: el matemático verificó mucho más; el estudiante graduado intentó varios caminos al demostrar sin analizar los intentos anteriores.
- Hay momentos durante la demostración que no puede explicar el MMRP, tales como momentos de trabajo inconsciente y otras de labor silenciosa. Se puede ampliar el MMRP para ofrecer uno más completo que incluya otras fases que ocurren durante la demostración como la incubación (tomar un descanso, que es crucial para la creatividad) e instancias de múltiples fases.
- Tres fases al demostrar: planificación, ejecución y verificación. La orientación está incluida en la planificación y las tres fases están superpuestas por pares, pero nunca se dan al mismo tiempo. Ver figura a continuación.

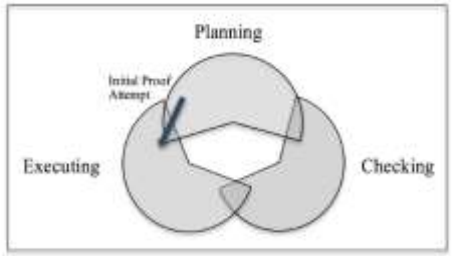


Figura 1. Marco de producción de demostraciones[7]

1.1.4. Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction[8]

Se describen los tipos de razonamiento y los procesos de resolución de problemas que utilizan los estudiantes universitarios cuando hacen demostraciones, teniendo en cuenta la relación entre el razonamiento que realizan y lo que aprenden. Weber (2005) considera que la demostración es una actividad de resolución de problemas y que quienes son exitosos resolviendo problemas utilizan técnicas sintácticas similares al hacer demostraciones, lo que permite comprender aspectos de la demostración, como la heurística y las estrategias que deben enseñarse a los estudiantes para que aprendan a demostrar.

Un problema matemático es una tarea en la que no está claro qué acciones deben aplicarse para resolverlo. En el caso de la demostración se da al individuo una información inicial (proposición) y se requiere que éste recuerde y aplique resultados matemáticos mediante reglas de inferencia para llegar a la conclusión deseada.

[7] Savic, M (2015). On Similarities and Differences Between Proving and Problem Solving. *Journal of Humanistic Mathematics, Volume 5,* Issue 2. July 2015.

[8] Weber K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. Journal of Mathematical Behavior 24 (2005) 351–360.

Según el investigador algunos profesores diferencian entre resolver problemas y hacer demostraciones. Weber (2005) considera que esta distinción es artificial, pues todos tienen que ver con la producción de argumentación matemática.

La resolución de problemas se enfatiza en los procesos de pensamiento para avanzar en el proceso; la demostración enfatiza más en evaluar la solidez de un resultado. El investigador considera que hay aspectos comunes en ambos procesos y que hay estudiantes universitarios que equivocadamente, consideran la demostración como una tarea que les permite practicar y dominar la aplicación de algoritmos para adquirir competencias en algunas tareas.

Weber (2005) propone tres tipos de demostraciones: procedimental, sintáctica y semántica. En la primera, el individuo utiliza una fuente externa para inferir un procedimiento, como tomar una demostración similar como plantilla; considera que se trata de un conjunto lineal de pasos distantes de un conocimiento conceptual. En las semánticas, se usan representaciones informales o intuitivas de conceptos formales para direccionar la demostración y mediante razonamientos, convencerse si la afirmación que se quiere demostrar es o no cierta. En las sintácticas, se parte de un conjunto de definiciones y supuestos sobre los que se realiza inferencias aplicando otros resultados matemáticos hasta terminar la demostración; el estudiante puede ver como cada nueva inferencia se deduce de las anteriores, lo que le permite convencerse de que un teorema es una consecuencia lógica de resultados matemáticos.

Weber (2005) asegura que hacer demostraciones se relaciona con el razonamiento deductivo y que, en la resolución de problemas este tipo de razonamiento por sí solo no le permite al estudiante desarrollar estrategias para saber si un determinado paso es o no correcto, o si todo el proceso de solución es válido. Considera más importante el razonamiento inductivo (obtención de evidencias al considerar casos no exhaustivos), útil para el trabajo exploratorio, aunque también insuficiente por sí solo para establecer el resultado deseado.

El investigador cree que se pueden abordar otras investigaciones en educación matemática sobre la demostración desde perspectivas como su dimensión lógica, conceptual, social, su relación con la resolución de problemas y la manera en que influyen las creencias de los estudiantes en sus argumentos.

1.1.5. Abstract algebra, mathematical structuralism and semiotics[9]

En la investigación se da respuesta a dos preguntas: ¿cómo los estudiantes construyen el concepto abstracto de grupo?, y ¿qué tipo de representaciones deben utilizar, cuando se trata de descartar la naturaleza particular de los elementos de un conjunto? Se presentan los resultados a partir de la ingeniería didáctica dentro de un marco semiótico, que el autor llama “teoría de los banquetes”, para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra moderna, que facilita el desarrollo del método axiomático y el pensamiento estructuralista.

Para Hausberger (2014), un banquete consiste en un conjunto E (los objetos) dotado de una relación binaria R que satisface los siguientes axiomas:

$A1. \, Ningún \; objeto \; cumple \; xRx$

---

[9] Hausberger T. (2014). Abstract Algebra, Mathematical Structuralism and Semiotics. <hal-01083768>. Recuperado de http://www.math.univ-montp2.fr/prepub/2014/2014_20(Hausberger).pdf.

$A2. Si\ xRy\ y\ xRz\ entonces\ y\ =\ z.$

$A3. Si\ yRx\ y\ zRx\ entonces\ y\ =\ z.$

$A4. Para\ todo\ x, existe\ al\ menos\ un\ y\ tal\ que\ xRy.$

El álgebra abstracta dio un vuelco a la jerarquía conceptual del álgebra clásica: los grupos, anillos y campos, construidos todos sobre la base general de estructura algebraica lograron gran aceptación, sin embargo, la brecha epistemológica generada al cambiar objetos concretos por estructuras abstractas generó muchos problemas didácticos. Hay una deficiencia semántica al trabajar con estructuras matemáticas definidas por sistemas axiomáticos en los que los aspectos sintácticos prevalecen.

Para Hausberger (2014) la transposición didáctica de la noción de estructura es un metaconcepto que los estudiantes deben aprender por sí mismos. El académico abarca tres contextos de uso del metaconcepto “estructura”: (1) Su definición axiomática, (2) La estructura de “banquete” y, (3) Un “teorema estructural”, que describe cómo un objeto puede reconstruirse a partir de objetos más simples del mismo tipo.

Según el académico, para que los estudiantes construyan un concepto de estructura abstracta y alcance una semántica adecuada del conjunto de axiomas, debe utilizar isomorfismos. Cree que los datos empíricos guardan relación semántica y que es posible encontrar procesos mentales basados en el reconocimiento de patrones (visuales): los estudiantes manipulan objetos matemáticos que son isomorfos, aunque no manejen una definición formal de dicho concepto para que sea funcional.

Para finalizar, está de acuerdo con Winslow (2004)[10], en que los conceptos matemáticos no se aprenden de manera individual sino como patrones o estructuras coherentes lo que aplica a las estructuras, con lo cual se puede llegar a mayores niveles de abstracción y unificación.

1.1.6. Understanding abstract algebra concepts[11]

Tomando como base la teoría fundamentada se indaga sobre la naturaleza de la abstracción y la manera como es adquirida por los estudiantes. La investigación se basa en el análisis de la formación de conceptos (ensamblaje, generalización teórica de entes abstractos y articulación).

El estudio se realizó con un grupo de estudiantes tomando como base sus interpretaciones sobre conceptos de álgebra como operación binaria, elementos identidad e inverso, grupo y subgrupo. Según Titova (2014), para construir una idea abstracta se parte de abstracciones iniciales, luego estas se agrupan en un nivel elemental, posteriormente se identifican conexiones internas con ideas ya aprendidas y finalmente se llega a la generalización. El resultado de lo anterior es una nueva estructura, más compleja y abstracta que hace posible construir nuevos ejemplos concretos.

Titova (2014) considera que la función principal de la abstracción es el reconocimiento de un objeto como perteneciente a una determinada clase, mientras que la función principal de la generalización es la construcción de dicha clase, a partir de establecer conexiones entre los objetos. El razonamiento sobre los objetos

[10] Winsløw, C. (2004). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic studies in Mathematics Education 9* (2), 81-100.
[11] Titova, A. (2014). Understanding Abtract Algebra Concepts. Becker College. Recuperado de: http://pzacad.pitzer.edu/~dbachman/RUME_XVI_Linked_Schedule/rume16_submission_40.pdf.

abstractos se basa en la afirmación de que la abstracción es un cambio de abstracto a concreto.

Al final se concluye que se requiere contar con ideas abstractas previas, para comprender nuevas estructuras y que no se puede aprender un concepto abstracto sin ejemplos concretos y problemas relacionados con el mismo: la articulación de conceptos abstractos es necesaria para la formación de estructuras coherentes. En el proceso de abstracción existe una interacción constante entre los procesos de ensamblaje y articulación: en otras palabras, si hay problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje, el concepto abstracto no se forma adecuadamente.

1.2. Investigaciones relacionadas con el plano psicológico de la prueba

La rigidez de la demostración matemática, basada en procesos lógico-deductivos como único método posible, se ha venido revaluando en las últimas en la educación matemática. Los investigadores proponen que es necesario analizar los diversos significados la demostración como también de la resolución de problemas y los factores que inciden en los procesos relacionados con estas actividades.

La didáctica, las creencias sobre las matemáticas, el papel de las emociones, los contextos, el desempeño en otros aspectos relacionados con la demostración y la resolución de problemas (como la explicación, la argumentación, el razonamiento, la verificación, la comunicación, etc.) son factores que también repercuten en el desempeño de los estudiantes, el cual está enmarcado en éxitos y dificultades. En tal sentido se destacan las siguientes investigaciones.

1.2.1. Proof and Problem Solving at University Level[12]

La investigación se realiza con estudiantes de pregrado y posgrado que resuelven problemas y demuestran teoremas que les dejan sus profesores o que realizan por iniciativa propia. Los autores creen que la demostración es importante en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas universitarias, por lo que algunos profesores piden a sus estudiantes que trabajen en estas actividades para evaluar lo que aprenden. En su intento, muchos no saben cómo empezar y otros no manejan el proceso de argumentación. Los investigadores coinciden con Furinghetti & Morselli (2009) en que la representación que elijan los estudiantes puede favorecer u obstaculizar el proceso de demostración o de resolución de problemas. Consideran además que las emociones (sentimientos y afectos) influyen en el proceso: los sentimientos cognitivos no emocionales de lo que es correcto o incorrecto influyen y direccionan estas tareas.

Selden & Selden (2013) afirman que los problemas rutinarios se resuelven utilizando métodos prácticos o algorítmicos, mientras que otros menos sencillos requieren que el individuo articule sus conocimientos. Los problemas no rutinarios dependen de un conocimiento sólido, de considerar otros problemas y del uso de técnicas heurísticas desde el punto de vista de Schoenfeld (1985), ya que en su solución influyen aspectos como el control y las creencias sobre las matemáticas. Al demostrar un teorema pueden ocurrir dos situaciones de resolución de problemas: las que le permiten al individuo llegar de la hipótesis a la conclusión y aquellas en

[12] Selden, A. and Selden, J. (2013). Proof and Problem Solving at University Level. *The Mathematics. Enthusiast: Vol. 10: No. 1*, Article 14. Available at: https://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/14,

las que es posible convertir una solución informal en un resultado matemático aceptable. En ocasiones existen dificultades en el uso de la lógica, en la utilización de definiciones, desconocimiento de ejemplos y contraejemplos, de resultados relacionados y que se requiere elegir representaciones apropiadas.

Los académicos destacan la importancia de la ejercitación y consideran que las tareas se ubican en un continuo que va desde las rutinarias hasta los problemas verdaderamente retadores. Asumen los planteamientos de Schoenfeld (1985) al considerar que, para un individuo, una tarea matemática es un problema si no conoce un método fácil de solución, o un ejercicio rutinario si conoce un procedimiento o un algoritmo para resolverlo. Al hacer demostraciones, los estudiantes deben tener en cuenta dos aspectos: la parte retórica formal o marco de la prueba y la parte centrada en el problema. La primera depende de los preconceptos, la interpretación y la lógica para entender la formulación del teorema; la parte centrada en el problema alude a la teoría de resolución de problemas matemáticos, en el sentido de Schoenfeld (1985). Al demostrar los estudiantes pueden o no ser conscientes del problema matemático que deben resolver, después depende de su capacidad para resolver problemas.

Para los investigadores la demostración es una secuencia de acciones físicas (escribir o dibujar) y mentales (preconceptos). Cada acción es una respuesta a una situación interna, contraria a la situación externa, que es visible para un observador. Los pares situación-acción son respuestas inconscientes a órdenes conscientes basadas en la heurística, la lógica y las estrategias. Con el tiempo y la repetición, los pares inconscientes de situación-acción se convierten en estructuras mentales llamados esquemas de comportamiento y tanto los buenos como los que no lo son, los implementa el individuo de manera inconsciente cuando resuelve problemas.

La investigación concluye proponiendo algunas preguntas investigaciones futuras: ¿Cómo el afecto, creencias, actitudes, emociones y sentimientos, se relacionan con la cognición durante la resolución de problemas?, ¿Cómo fomentar la exploración matemática y la lluvia de ideas como estrategia para la resolución de problemas?, ¿De qué manera los argumentos informales se convierten en argumentos matemáticos aceptables?, ¿Cómo las representaciones influyen en el desarrollo y el éxito o fracaso en la resolución de problemas y demostración de teoremas?

1.2.2. Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving[13]

Furinghetti & Morselli (2009) realizan su investigación con estudiantes de un curso de teoría de números, a los que se les dio un listado de teoremas que debían demostrar y escribir a la vez los pensamientos y sentimientos que acompañaron el proceso. Fueron analizados los procedimientos de dos estudiantes no exitosos, para establecer relaciones entre el afecto y la cognición, teniendo en cuenta los momentos en que sus creencias (sobre sí mismos y sobre la matemática) afectaron su desempeño. Las investigadoras consideran la demostración de teoremas como un caso especial de resolución de problemas acorde con las fases de Polya: comprensión, desarrollar un plan, ejecutar el plan y finalmente revisarlo. A partir de

[13] Furinghetti, F & Morselli, F. (2009). Every Unsuccessful Problem Solver Is Unsuccessful in His or Her Own Way: Affective and Cognitive Factors in Proving. Educational Studies in Mathematics. Vol. 70, No. 1 (Jan., 2009), pp. 71-90

estos crean un marco conceptual, no lineal, consistente de ciclos, desviaciones y recesos, similar al propuesto en el MMRP de Carlson y Bloom (2005).

Las académicas creen que las fases están relacionadas: las acciones que se realizan en una fase se conectan con la fase siguiente y están de acuerdo con Radford (1996)[14] en que cuando los estudiantes no resuelven un problema, es posible que entiendan el enunciado, pero no la lógica de la solución. Para comprender, es necesario leer y reformular el texto y esto puede hacerse mediante gestos, palabras, imágenes, símbolos y ejemplos, entre otros.

Furinghetti & Morselli (2009) están de acuerdo con Schoenfeld (1983)[15] en que al demostrar y al resolver problemas pocas veces se da un comportamiento puramente cognitivo, ya que este se distorsiona por factores afectivos, creencias conscientes o inconscientes, el entorno social y la percepción que tiene el individuo de sí mismo y su relación con la tarea. Creen que las investigaciones no definen el límite entre los factores afectivos y cognitivos, presentes en el proceso de demostración y otros factores interpretativos que también inciden.

1.2.3. Affect and Mathematical Problem Solving[16]

En la publicación se plantea que las investigaciones científicas sobre resolución de problemas se han concentrado más en lo cognitivo, dejando de lado la dimensión afectiva y emocional, que es más compleja describir. McLeod (1989) considera que

[14] Radford, L. (1996). *La Résolution Des Problèmes: Comprendre Puis Résoudre*. Bulletin AMQ, XXXVI (3), 19–30.

[15] Schoenfeld, A. H. (1983). *Beyond The Purely Cognitive: Beliefs Systems, Social Cognitions, And Metacognitions As Driving Forces In Intellectual Performance*. Cognitive Science, 7, 329–363.

[16] McLeod, D. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem. In "*Afect and Mathematical Problem Solving"*. McLeod, D & Adams, M. editors. Springer-Verlag New York. Douglas B. McLeod, Verna M. Adams (eds.).

cuando los estudiantes resuelven problemas matemáticos, manifiestan diferentes tipos de emociones y que, al trabajar en el problema por mucho tiempo, estas emociones se vuelven intensas: en ocasiones inician con entusiasmo, pero después asumen reacciones negativas, como estrés y frustración; incluso, algunos que no pueden resolver el problema, expresan ira y se rehúsan a recibir ayuda. Por el contrario, los estudiantes exitosos expresan satisfacción y alegría.

El académico cita a Mandler (1984)[17]quien desde la psicología, a partir del concepto de interrupción, desarrolla un marco teórico que considera la incidencia de las emociones: al interrumpirse un proceso, como resolver un problema, ocurren diferentes emociones: cuando un individuo inicia un proceso se activa en su mente un esquema que produce una secuencia de pensamiento-acción que debería completarse; al interrumpirse la secuencia ocurre una excitación fisiológica del individuo (tensión muscular o aumento del ritmo cardíaco) y el individuo evalúa la interrupción. El resultado puede ser de sorpresa, frustración, alegría u otra emoción. Mandler (1989) asegura que cuando se resuelven problemas, la memoria, la representación, la conciencia, la metacognición y la autonomía son aspectos de la cognición relacionados con el afecto; concluye que en un marco teórico para investigar la influencia del afecto en la resolución de problemas se debe considerar la intensidad de las emociones (positivas o negativas), duración, nivel de conciencia y nivel de control de estas. Así mismo que se debe investigar cómo influyen esos factores en lo cognitivo, los entornos de enseñanza y las creencias.

[17] Mandler, G. (1984). Mind and body: Psychology of emotion and stress. New York: Norton.

McLeod (1989) plantea que, desde lo cognitivo, los expertos consideran que un problema retador es una tarea cuya solución no es alcanzable de inmediato y como no hay un algoritmo o una fórmula obvia para resolverlo, el abordaje depende de estrategias y de heurísticas. En ocasiones, la reacción inicial del estudiante es que el problema es difícil de resolver, lo que conduce a un bloqueo; otras veces la estrategia de solución es inadecuada y el proceso se interrumpe, produciendo respuestas emocionales; esto hace necesario que se tengan en cuenta no únicamente lo cognitivo, sino también las dimensiones emocionales y afectivas.

El académico cita a Charles y Lester (1984)[18] quienes consideran que, cuando se enseña a los estudiantes a resolver problemas, se producen cambios positivos en su confianza y en la de los maestros, lo que influye positivamente en el factor afectivo de su desempeño. Más adelante se refiere a Silver (1982)[19], quien plantea que existe relación entre factores afectivos como la confianza y la persistencia cuando se resuelven problemas y de su impacto en los procesos metacognitivos. En los procesos de resolución de problemas, muchos estudios analizan factores como la actitud y el interés, dejando de lado aspectos como la frustración o la satisfacción y los factores afectivos involucrados (Silver, 1985)[20].

McLeod (1989) destaca los sistemas de gestión y control que utilizan quienes resuelven problemas y el papel que juegan las creencias sobre las matemáticas en

[18] Charles, R.I., & Lester, F.K., Jr. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. Journal for Research in Mathematics Education, 15, 15-34.

[19] Silver, E.A. (1982). Thinking about problem solving: Toward an understanding of meta cognitive aspects of mathematical problem solving. Paper prepared for the Conference on Thinking, Fiji.

[20] Silver, E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some under represented themes and needed directions. In E.A. Silver (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 247-266). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

las decisiones que éstos toman. Enfatiza además que la actitud hacia las matemáticas y la confianza son aspectos relacionados con las creencias de los estudiantes, que tienen un efecto importante en la manera en que manejan sus recursos cognitivos.

1.2.4. An expanded theoretical perspective for proof construction and its teaching[21]

La investigación ofrece una perspectiva teórica para comprender y enseñar la demostración de teoremas a nivel universitario considerando aspectos psicológicos, como los esquemas de comportamiento, la automaticidad, la memoria, la conciencia y los sentimientos cognitivos no emocionales. Los fundamentos son el proceso de demostración y la construcción de marcos de demostración, que una vez automatizados reducen la carga sobre la memoria y permiten a los estudiantes dedicar más recursos a la parte difícil del proceso.

Selden & Selden (2017) afirman que una demostración es una secuencia de acciones físicas (como escribir o dibujar) y mentales (analizar la hipótesis para llegar a la conclusión, recordar otros resultados). Estas acciones pueden ser más extensas que el texto de la demostración y en tal sentido Pedemonte, (2007)[22] citado por los investigadores, considera que una línea informal de razonamiento puede en

[21] Selden, J & Selden, A. (2017). An expanded theoretical perspective for proof construction and its teaching. CERME10-WG1, Proof and Argumentation, February 4, 2017, Dublin, Ireland. hal-01865647f. Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01865647/document.
[22] Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analyzed? Educational Studies in Mathematics, 66, 23-41.

ocasiones demostrar un teorema, sin embargo, esto difiere del texto escrito, requerido por los estándares de la comunidad matemática.

Por lo general, las palabras sentimiento y emoción se usan indistintamente para expresar acciones conscientes de estados mentales inconscientes. Los académicos asumen el punto de vista de Damasio (2003)[23] para diferenciar estos términos: las emociones se expresan a través de características físicas observables, como la expresión facial, la presión arterial, la frecuencia del pulso, la transpiración entre otras. Las emociones proporcionan un vínculo directo entre la mente consciente y las acciones de la mente inconsciente. Los sentimientos cognitivos no emocionales como el saber influyen al realizar una demostración: un estudiante puede experimentar la sensación de saber que antes ha visto un resultado útil, pero no ser capaz de recordarlo. Estos sentimientos pueden guiar las acciones cognitivas e influir en la decisión de continuar o no el proceso. Otros sentimientos cognitivos no emocionales son su familiaridad con el enunciado del teorema o problema y el sentimiento de corrección que tiene de este.

En cuanto al papel del afecto y la autoconfianza, están de acuerdo con Bandura (1995)[24] en que para demostrar teoremas difíciles se requiere persistencia, la cual está ligada a la autoconfianza, definida como la creencia del individuo en su capacidad para tener éxito en una situación particular: cuando un individuo ve que otras personas, gracias a su persistencia tienen éxito, aumenta su confianza de que también puede triunfar en actividades semejantes.

[23] Damasio, W. (2003). Looking for Spinoza: Joy, sorrow, and the feeling brain. Orlando, FL: Harcourt.
[24] Bandura, A. (1995). Self-efficacy in changing societies. Cambridge: Cambridge University Press.

Selden & Selden (2017) creen que su propuesta permitirá avanzar en la enseñanza de la demostración y que como cada demostración se hace utilizando un marco diferente, se puede investigar en la construcción de tales marcos. También puede indagarse sobre ¿Qué acciones pueden implementarse para que los estudiantes universitarios automaticen la escritura de demostraciones? Los autores consideran que la exploración no guiada es útil para que los estudiantes aprendan a escribir demostraciones, aunque algunos necesitan mucho tiempo para lograrlo. Forjar la autoconfianza podría ser la solución, pero no hay estudios sobre cómo se puede enseñar esto. Otra estrategia es hacer que reescriban demostraciones, pero esto requiere una planificación detallada del curso. Seguir un libro de texto, puede ayudar, pero algunos libros sólo demuestran los teoremas más importantes que el autor considera más útiles.

1.2.5. Between affect and cognition: proving at university level[25]

Se expone un estudio de caso realizado con un estudiante de tercer año de Matemáticas quien debía demostrar una proposición de teoría de números. La hipótesis de investigación es que cuando se demuestra una proposición, se siguen dos caminos que se cruzan: el cognitivo y el afectivo. El estudiante debía escribir los pensamientos y emociones que acompañaron el proceso.

Las académicas afirman que las investigaciones sobre demostración matemática y resolución de problemas se direccionan principalmente al desempeño cognitivo de los estudiantes, poco en el campo afectivo y menos aún a las interacciones entre ambos, lo que limita los resultados. Están de acuerdo con Schoenfeld (1983) en que

[25] Furinghetti, F & Morselli, F. (2004). 2004 - Between affect and cognition: proving at university level. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/266234353.

nunca ocurre un comportamiento sólo cognitivo, sino que hay fuerte incidencia de las creencias que tiene el individuo sobre las matemáticas y sobre sí mismo y que las creencias se relacionan con la metacognición, la autorregulación y la autoconciencia.

Las investigadoras asumen el punto de vista de De Bellis y Goldin (1997)[26] en que en la resolución de problemas deben tenerse en cuenta emociones inherentes como el asombro, la curiosidad, la frustración y la confianza, las cuales moldean los procesos de demostración del alumno. Asumen las tres categorías de los esquemas de demostración propuestos por Harel y Sowder (1998): externos (ritual, autoritario, simbólico), empíricos (inductivo, perceptual) y analíticos (transformacional, axiomático); para su investigación toman como base los esquemas rituales y los simbólicos.

Furinghetti & Morselli (2004) afirman que el aspecto cognitivo de una demostración se refiere a pasos como leer el enunciado, comprenderlo, diseñar el plan y desarrollarlo secuencialmente, en los que cada acción matemática implica la siguiente; este proceso involuntario no es suficiente para tener éxito. Están de acuerdo con Barnard & Tall (1997)[27] en que se debe vincular y controlar el conocimiento y en que cuando un individuo cree que no es capaz de realizar una tarea, automáticamente bloquea otros recursos útiles para desarrollar el proceso como buscar otros caminos, implementar otras heurísticas y otros métodos.

---

[26] De Bellis, V. & Goldin, G.A.: (1987), 'The affective domain in mathematical problem solving', in E. Pehkonen (ed.), Proc. PME 21, v.2, 209-216.

[27] Barnard, T. & Tall, D.: (1997), 'Cognitive units, connections and mathematical proof', in E. Pehkonen (ed.), Pro. PME 21, v.2, 41-48.

Las investigadoras se acogen a planteamiento de Goldin (2002)[28] en que, los factores afectivos son prioritarios, en la dimensión cognitiva del individuo y están de acuerdo con Leron y Hazzan (1997)[29] en que, lo cognitivo es importante por la necesidad de escribir algo con sentido, para satisfacer las expectativas propias o de otra persona. Durante una demostración se presentan avances y retrocesos, callejones sin salida y otras dificultades que dependen tanto de la cognición como de lo afectivo. Están de acuerdo con De Bellis y Goldin (1997), en que lo afectivo es una secuencia de estados y sentimientos complejos, que afectan las representaciones y configuraciones cognitivas; al realizar una demostración los factores cognitivos y afectivos se entrelazan y en ocasiones, las creencias sobre la matemática influyen en los resultados: la apreciación sobre las matemáticas que tiene el individuo determina la manera que aborda un problema matemático.

1.2.6. Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics[30]

Tall (2002) considera que existen tres tipos de demostración matemática que dan lugar a tres diferentes universos (modos de pensamiento o etapas) de pensamiento matemático: el encarnado, el proceptual y el formal. Considera que algunos individuos pueden operar y vivir predominantemente en uno de estos mundos, según su conveniencia, o quizás en dos.

Las demostraciones encarnadas se fundamentan en la percepción, la interacción y en las acciones físicas con el mundo exterior, perceptible a través de los sentidos.

[28] Goldin, G.A.: (2002), 'Affect, meta-affect, and mathematical belief structures', in G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (eds), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Kluwer, Dordrecht, 59-72.

[29] Leron, U., Hazzan, O.: 1997, 'The world according to Johnny: A coping perspective in mathematics education', Educational Studies in Mathematics, v.32, 265-292.

[30] Tall, D. (2002). Differing modes of proof and belief in mathematics. In International conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand (pp. 91-107).

En estas, como resultado de la reflexión se llega a la concepción de propiedades y a las relaciones entre estas, que conducen naturalmente al individuo a reinventar el platonismo, así que permite abarcar argumentos como los de la geometría euclidiana. La demostración conceptual se relaciona con el manejo de símbolos aritméticos, algebraicos y de formas analíticas (proceptos, en los que se operan símbolos dualmente como proceso y concepto) que mediante el cálculo y la manipulación permiten justificar proposiciones. La demostración formal la considera el ideal y afirma que se construye mediante el razonamiento lógico – deductivo, a partir de axiomas y definiciones y que permite erigir sistemas matemáticos coherentes. El académico propone que el mundo formal utiliza experiencias de los otros dos universos para construir definiciones y procesos de demostración y que estas formas de demostración habitan en el pensamiento matemático del individuo, con distintos criterios de creencia, verdad y validación.

Tall (2002) considera que es importante analizar el tipo de demostración que tiene un individuo, sus características especiales, e investigar sobre su crecimiento cognitivo. Es necesario motivar a los estudiantes a comprender la naturaleza de la demostración y esto no se logra simplemente haciéndoles reproducir las demostraciones que hacen los matemáticos profesionales; se requiere tener en cuenta el punto de vista del desarrollo humano.

Según el investigador, en cada uno de los universos, la demostración tiene distinto nivel de validez. A excepción de las formales, los matemáticos rara vez consideran las otras dos formas de argumentación como verdaderas demostraciones. Recomienda tener en cuenta como un enfoque alternativo, considerar no sólo el proceso argumentativo, sino también otras nociones de validez (garantías de la verdad) utilizadas por los estudiantes para justificar sus creencias. Considera que cada universo de las matemáticas tiene su propia secuencia de desarrollo y las garantías de verdad no son nociones estáticas y fijas. A medida que el individuo crece en conocimientos necesita de argumentos más sutiles.

Finalmente, Tall (2002) afirma que la demostración formal es la cúspide del desarrollo matemático y que, para sostenerla, se requiere de la comprensión implícita que tienen los matemáticos. Lograr este nivel requiere de un complejo desarrollo cognitivo y que a medida que este avanza, las garantías de verdad de los otros mundos de las matemáticas alcanzan nuevos significados y mejoras hasta construir un conocimiento sólido. Es necesario tener en cuenta que sin el desarrollo biológico del cerebro humano no alcanzaríamos un buen nivel de las matemáticas, así que se requiere investigar para comprender la naturaleza de este desarrollo y la manera en que podemos utilizar el conocimiento en el crecimiento educativo de las futuras generaciones.

1.3. Investigaciones enfocadas desde el plano didáctico de la prueba

Profesores y estudiantes de los programas de formación de docentes deben asumir el compromiso de apropiarse de los métodos de demostración y técnicas heurísticas de resolución de problemas. En tal sentido la didáctica asociada a estos procesos es de vital importancia y por lo tanto debe ser un objetivo fundamental. A continuación, se relacionan algunas investigaciones relacionadas con el tema.

1.3.1. Some Pedagogical Aspects of Proof[31]

Hanna (1990) propone tres tipos de demostración en educación matemática: la formal o teórica, basada en la lógica formal y considerada el ideal en la matemática pura; las demostraciones aceptables que son medianamente rigurosas y son aceptadas por los docentes de matemáticas y la demostración con contenido didáctico, relacionada con la enseñanza de la justificación y que permite definir los resultados matemáticos que son importantes para transmitir a los estudiantes.

Según la investigadora, en los planes de estudios hay una tendencia a alejarse de la demostración formal, dando lugar la búsqueda de formas alternativas, a tal punto que se han publicado estudios sobre la enseñanza de la demostración, lo que contribuye a su didáctica para facilitar la comprensión. Hanna (1990) cree que en la mayoría de las investigaciones se asume la demostración únicamente como argumento de validación, pero que en realidad ésta debe validar y explicar, pues estos son dos aspectos son fundamentales, que no hay diferencia en su grado de rigor y que ambos pueden ser validados por la comunidad matemática.

Destaca que una demostración que sólo justifica la validez de un teorema únicamente aporta al estudiante razones probatorias. Una prueba que explica y también justifica, ofrece un conjunto de razones que se deducen del proceso en sí y explican por qué es así. Hanna (1990) considera que al escoger las pruebas explicativas y abandonar las estrictamente formales, el plan de estudios fortalece las buenas prácticas matemáticas. La académica insiste en que vale la pena

[31] Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange 21(1), 6–13. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Gila_Hanna/publication/226635673_Some_pedagogical_aspects_of_proof/links/549c38710cf2d6581ab4826b.pdf.

centrarse en las buenas explicaciones matemáticas, que destaquen en la demostración de un teorema las ideas matemáticas importantes que conducen a su verdad. La comprensión va más allá que validar los pasos de una cadena deductiva, lo cual da únicamente integridad a demostración, pero que puede oscurecer en lugar de iluminar”.

1.3.2. Engaging students in roles of proof[32]

La investigación se realiza en curso de Fundamentos de Matemáticas Superiores con un grupo de trece estudiantes universitarios (siete docentes en formación), con el fin de responder la pregunta de investigación: ¿Qué elementos del aprendizaje brindan oportunidades para que los estudiantes participen activamente en una demostración matemática? Bleiler-Baxter & Pair (2017) encontraron que los roles de presentar, discutir, conjeturar, trabajar grupos y criticar favorecen la participación y consideran que, aunque las demostraciones son importantes para los matemáticos, por lo general los estudiantes no entiendan el propósito de ellas.

Están de acuerdo con la propuesta de De Villiers (1990) sobre las cinco funciones de la demostración matemática que permite involucrar a los estudiantes en su aprendizaje: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. La verificación permite a una persona convencerse él mismo o a otros; la explicación tiene que ver con las razones que justifican la verdad. La sistematización ocurre cuando se usa la demostración para organizar y crear un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas. Ocurre un descubrimiento

---

[32] Bleiler-Baxter, S. K., & Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 16-34. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.005 .

cuando el individuo (por lo general un matemático) demuestra un resultado que no se esperaba. La comunicación tiene lugar cuando por medio de la demostración los individuos transmiten sus conocimientos a otros individuos.

El mismo De Villiers (1990) considera que los estudiantes aprenden a demostrar si comprenden la funcionalidad de la demostración y que hay estudiantes (y matemáticos) que se convencen de la validez de un resultado únicamente al considerar casos particulares. Las demostraciones permiten ir más allá del rol de verificación y tienen un efecto positivo en el compromiso que asumen y la comprensión del resultado.

Bleiler-Baxter & Pair (2017) refieren el planteamiento de Hemmi (2010)[33], de que los roles que se asumen en una demostración favorecen la construcción de significado y mejoran su participación en la práctica matemática. En tal sentido es importante saber qué rol les llama la atención de los estudiantes y que estos reconozcan los roles que pueden asumir en una demostración y así éstos tendrán mayores elementos para involucrar a sus futuros alumnos en ellas.

Finalmente exponen la "perspectiva situacional" según la cual el aprendizaje es el resultado de la participación en comunidades de práctica: aprender matemáticas equivale a convertirse en un mejor participante de la comunidad utilizando las herramientas y recursos físicos y discursivos. El aprendizaje tiene lugar en el sentido de Wenger (1989) y se mide analizando la manera en que los estudiantes

[33] Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof. Educational Studies in Mathematics, 75, pp. 271–291.

internalizan el conocimiento, participando en las prácticas que son valoradas por la comunidad y las oportunidades que favorecen su participación.

1.3.3. Student´s Proof Schemes: A Closer Look at What Characterizes Students' Proof Conceptions[34]

Stilianou, et al. (2006) realizan su investigación con estudiantes de pregrado en un curso de matemáticas discretas direccionado a la demostración y a la resolución de problemas, encontrando que demostraciones y la resolución de problemas tienen mucho en común, por lo que concluyeron que estas tareas se relacionan con el desempeño y rendimiento de los estudiantes.

La investigación estaba direccionada a resolver las siguientes preguntas: ¿Qué esquemas de demostración evidencian los estudiantes universitarios en sus primeros cursos?; ¿Qué patrones de resolución de problemas se pueden observar en tales esquemas?, y, ¿Qué interrelaciones hay o qué patrones pueden encontrarse en ambos procesos? Los académicos utilizaron el marco DNR para identificar cuál de los tres esquemas externo, empírico o analítico utilizaron los estudiantes, encontrando que la mayoría utilizaban el esquema empírico.

Para resolver las preguntas de investigación se realizaron entrevistas a los participantes asumiendo el punto de vista de Schoenfeld (1985). Cada instrumento se dividió en apartes para obtener información sobre el enfoque utilizado: uso de representaciones, definiciones, justificaciones y otras. La investigación permitió identificar relaciones entre los esquemas de demostración de los estudiantes y sus

[34] Stilianou D. et al. (2006). Student´s Proof Schemes: A Closer Look at What Characterizes Student´s Proof Conceptions. Vol. 2-54. PME-NA 2006 Proceedings.

estrategias en la resolución de problemas. El académico considera que estos resultados pueden dar lugar a otras investigaciones para resolver preguntas como: ¿es posible que al enseñar a los estudiantes a resolver problemas se favorece su avance en la demostración (o viceversa)? ¿Las estrategias de resolución de problemas inhiben el progreso del estudiante en la demostración?

1.3.4. Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas[35]

Fiallo, et al. (2013), abordan su investigación desde cinco líneas: (1) Consideraciones histórico-epistemológicas, (2) La demostración en el currículo, (3) Concepciones y dificultades de los estudiantes al demostrar, (4) Relaciones entre la argumentación y la demostración, y (5) Propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración.

Los autores resaltan que la enseñanza y el aprendizaje de la demostración son importantes en todos los niveles educativos y manifiestan que el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM), incluye el razonamiento y la demostración en los Principios y Estándares de las Matemáticas Escolares. Recomiendan que, desde la educación infantil hasta la secundaria se debe convencer a los estudiantes que el razonamiento y la demostración son fundamentales, incluyendo enseñar a formular e investigar conjeturas, desarrollar y evaluar argumentaciones, tipos de razonamiento y métodos de demostración.

[35] Fiallo J. y otros. (2013) Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. Revista Integración. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Vol. 31, No. 2, 2013.

Desde lo histórico-epistemológico, los autores citan a Balacheff (2008)[36], según el cual la demostración es de naturaleza idiosincrásica e individual y depende del contenido matemático. Para Fiallo, et al. (2013), el esquema de demostración de una persona es subjetivo y puede variar de una persona a otra, de una cultura a otra y de una generación a otra. En cuanto a las relaciones entre argumentar y demostrar, destacan los aspectos cognitivos y sociales que intervienen en la demostración y resaltan algunas dificultades que tienen los estudiantes para relacionar los argumentos que producen al resolver problemas y al demostrar enunciados que son solución a los problemas.

Desde la epistemología señalan que algunos estudios han mostrado que existen diferencias entre la argumentación empírica, propia del razonamiento elemental, y la basada en el razonamiento deductivo, típica del razonamiento teórico y que estos puntos de vista antagónicos conducen a dificultades en el proceso de resolver problemas y demostrar teoremas. Fischbein (1987)[37], citado por los investigadores, considera que la validación empírica y la demostración son estructuralmente diferentes, aunque ambas pueden coexistir. Balacheff (2000)[38] plantea que existe una heterogeneidad epistemológica entre estos dos procesos debido a que los conocimientos utilizados son diferentes, por el paso de lo pragmático a lo teórico.

---

[36] Balacheff N. (2008). "The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof", *ZDM the International Journal on Mathematics Education 40*. Pp 501–512.
[37] Fischbein E. (1987). Intuition in science and mathematics, Dordrecht, Los Países Bajos, D. Reidel.
[38] Balacheff N. (2000). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège, Tesis doctoral, Grenoble, Francia, 1988. [Traducción al español: Balacheff N., Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas, Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Desde la didáctica, Fiallo, et al. (2013) acogen los argumentos de Bell (1976)[39] sobre la importancia de proponer tareas basadas en problemas, porque esta metodología permite que los estudiantes conjeturen, dando lugar a la discusión y a la necesidad de justificar y a la construcción de argumentos formales. Se requiere además que los estudiantes tomen conciencia del carácter público del conocimiento y de la importancia de la aprobación social por medio del trabajo cooperativo; los estudiantes deben argumentar tanto para rechazar como legitimar una afirmación.

Los investigadores destacan el papel activo que debe asumir el profesor en el aula y refieren a Blanton y Stylianou (2002)[40] quienes consideran que el parafraseo y la confirmación de las ideas de los estudiantes son un mecanismo que da autoridad y confianza, muestra el camino sugerido por ellos y comparte la responsabilidad en el proceso; al requerirles justificar los involucra en discusiones que favorecen su corresponsabilidad en la construcción de demostraciones.

Los investigadores al final recomiendan que es necesario unir esfuerzos para implementar los procesos de argumentación y demostración en todos los niveles educativos, principalmente en la formación de maestros, pues sus experiencias académicas serán fundamentales para implementar la cultura de la demostración en el aula.

---

[39] Bell A.W. (1976). “A study of pupil’s proof-explanation in mathematical situation”, *Educational Studies in Mathematics 7* no. 1, 23–40.
[40] Blanton M.L & Stylianou, D.A. (2002). “Exploring sociocultural aspects of undergraduate students’ transition to mathematical proof”, Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the PME International Group 4, p 1673–1680.

1.3.5. Three principles of learning and teaching mathematics: particular reference to linear algebra[41]

Se reportan los resultados de una investigación realizada por un grupo de profesores de matemáticas de Estados Unidos, el LACSG, (Linear Algebra Curriculum Study Group) cuyo objetivo fue indagar y buscar soluciones a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, sobre los siguientes aspectos:

- ¿Cómo aprenden los estudiantes?, ¿cómo deben enseñarse las matemáticas? y ¿qué consideraciones pedagógicas y epistemológicas están involucradas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal?
- ¿Qué renovaciones curriculares con enfoques pedagógicos deben realizarse para la enseñanza del álgebra lineal?
- ¿Cómo tener en cuenta las opiniones de los docentes de cursos de matemáticas que tienen como base el álgebra lineal para mejorar el currículo?

El marco teórico se basó en tres principios pedagógicos del proceso de enseñanza-aprendizaje: el Principio de Concreción, el Principio de Necesidad y el Principio de Generalización. En cuanto al primero, los estudiantes abstraen una estructura matemática, cuando parten de entidades conceptuales concretas y comprenden un concepto en un contexto familiar para ellos. La formación de conceptos fue estudiada por Piaget quien considera que constituye un proceso de abstracción

[41] Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics: Particular reference to linear algebra - old and new observations. En Dorier, J. (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp.177-190). Kluwer Academic Publishers

reflexiva, en la que una acción física o mental se reconstruye y reorganiza en un plano superior del pensamiento, de tal manera que el aprendiente la entiende.

En cuanto al principio de necesidad, los maestros deben comprender las formas de pensar de los estudiantes para conocer sobre su necesidad intelectual, que puede ser de tres tipos: de cálculo, de formalización o de elegancia. La primera generalmente es la común. Harel (2000) está de acuerdo con Piaget en que para ampliar el conocimiento de los estudiantes es importante la resolución de problemas, ya que el alumno utiliza sus conocimientos previos para abordar la solución y los modifica cuando alcanza desequilibrios cognitivos que lo conducen a cuestionar su acción anterior y tratar de resolverla, y esto constituye una transición gradual hacia concepciones avanzadas.

El principio de generalización enfatiza que las actividades de enseñanza deben permitir y motivar la universalización de conceptos y está relacionado con la necesidad de realizar abstracción de los conceptos.

El LACSG hace las siguientes recomendaciones (estrategias) pedagógicas:

- Restructurar los planes de estudio de secundaria, para que se enseñen temas como sistemas de ecuaciones lineales, álgebra matricial, determinantes, geometría analítica y espacio euclidiano. Incluir en el currículo universitario un segundo curso sobre teoría matricial, debido que las horas de clase en el primer curso de álgebra lineal eran suficientes para abarcar todos los temas.
- Cursos intelectualmente desafiantes, con énfasis en esquemas de demostración. El nivel de rigor debe ser acorde con la capacidad matemática de los estudiantes.

- Implementar la tecnología en todos los cursos de álgebra lineal. Se recomendó el uso de MATLAB u otro software similar, ya que el elemento de datos básicos es la matriz, lo que facilita a los estudiantes el trabajo con n-tuplas y matrices.

1.3.6. Didactic number theory and group theory for school teachers[42]

La investigación se llevó a cabo en Finlandia con docentes en formación de un curso de teoría de números y álgebra, con el fin de identificar la relación entre las matemáticas de secundaria y las universitarias. Para ello, a través de un problema sobre las expansiones decimales infinitas periódicas de números racionales, se buscan conexiones con conceptos y resultados de la relación de congruencia módulo m, la función phi (φ) de Euler, los conceptos de grupo, subgrupo, grupos cíclicos, clase lateral y Teorema de Lagrange. Los investigadores concluyen que, a partir de problemas sencillos se puede transversalizar temáticas de distintos niveles educativos de las matemáticas, desde la escuela primaria hasta la universidad y recomiendan que el énfasis didáctico de un curso universitario de matemáticas debe cubrir tres aspectos:

- Organizar los contenidos del curso en relación con las matemáticas que el futuro docente orientará en el ejercicio de su profesión
- Utilizar métodos de enseñanza y formas de acercamiento que permitan a los docentes en formación utilizar métodos similares en su desempeño profesional

[42] Poranen, J. & Haukkanen, P. (2012). Didactic Number Theory and Group Theory for School Teachers. IMVI, Open Mathematical Education Notes, 2, pp. 23–37.

- Proponer una visión rica y multifacética de las matemáticas universitarias, que permita trascender en la escuela secundaria.

Según los académicos, en el currículo de educación primaria en Finlandia, se estudia el sistema decimal, la división, divisibilidad, fracciones y los enteros negativos, por lo que el profesor debe dominar los conceptos de grupo, subgrupo y clase lateral. De 6° a 9° se prepara a los estudiantes a realizar pruebas mediante conjeturas, ensayos y contraejemplos. Se estudian en profundidad los números enteros, los racionales, los reales y la factorización prima. En los últimos grados de secundaria se fomenta la investigación y la invención y se ofrece un curso opcional de teoría de números donde se profundiza en la divisibilidad, el algoritmo de la división, la congruencia módulo m y el teorema fundamental de la aritmética.

Poranen & Haukkanen (2012) concluyen que, a través del estudio de estructuras algebraicas como grupo y anillo, los futuros docentes pueden adquirir una visión clara de los conjuntos numéricos, la geometría y elementos del álgebra en general.

1.3.7. An abstract algebra story[43]

Esta investigación parte de la premisa de que la enseñanza del álgebra abstracta es compleja, pero que se puede mejorar el aprendizaje al reemplazar los métodos tradicionales por métodos constructivos e interactivos que involucren manejo de software y aprendizaje cooperativo. Dubinsky & Leron (1995), en un curso de álgebra abstracta, implementan el software ISETL, permite que los alumnos participen de la clase, resuelvan los ejercicios asignados mediante papel y lápiz y

[43] Dubinsky E. & Leron, U. (1995). An Abstract Algebra Story. The American Mathematical Monthly, 102(3), 227-242. Recuperado de http://www.math.kent.edu/~edd/AlgbraStory.pdf.

conformen equipos de trabajo de máximo cuatro integrantes. Antes de utilizar el software para resolver los ejercicios propuestos por el docente, los estudiantes y el profesor interactúan y discuten los temas.

Segú los investigadores esta metodología favorece la participación interactiva de los estudiantes y la investigación de las propiedades axiomáticas de las estructuras algebraicas, a la vez que ponen en práctica su conocimiento de programación en ISELT. Los alumnos aprenden por descubrimiento, mientras participan con preguntas y tratan de descubrir respuestas. El trabajo en equipos implica llegar a acuerdos. Los investigadores arguyen que los estudiantes no aprenden los conceptos memorizando la definición, sino que los conceptos deben construirse en la mente.

El método se basa en la premisa de que, si se les pide a los estudiantes que construyan el concepto de grupo programándolo en la computadora, existe una gran posibilidad de que en su mente ocurra una construcción paralela.

1.3.8. On learning fundamental concepts in group theory

Dubinsky, et al. (1994) investigan sobre la naturaleza del conocimiento algebraico a partir de la teoría de grupos y cómo lograr una comprensión de sus conceptos. El objetivo era contribuir a la caracterización del pensamiento matemático desde el álgebra y desarrollar estrategias pedagógicas para mejorar su aprendizaje en estudiantes de pregrado. El estudio se realizó basado en la teoría APOS, a partir de observaciones sobre el aprendizaje de la teoría de grupos, analizando su apropiación y el papel del error. Para ello se tuvo en cuenta las dificultades evidenciadas en un grupo de profesores de matemáticas de secundaria que intentaban explicar temas sobre teoría de grupos.

Los investigadores manifiestan que se deben desarrollar estrategias pedagógicas efectivas para la enseñanza del álgebra abstracta, por cuanto muchos estudiantes de pregrado que toman estos cursos serán luego maestros. En los primeros cursos universitarios las metodologías se centran en resolver problemas de tipo algorítmico, pero al llegar a los cursos de álgebra el cambio es abrupto, y si el curso no es llevado adecuadamente, la complejidad de los conceptos dificulta el éxito.

Entre los resultados de la investigación, se encuentran los siguientes:

- Las nociones matemáticas de grupo y subgrupo se desarrollan de manera paralela, con una psicogénesis esencialmente lineal. Para comprender estos conceptos, los estudiantes necesitan de otros conceptos matemáticos como el de conjunto y el de función; el concepto de subgrupo se basa en la noción de la restricción de una función a un subconjunto de su dominio. Considerar una operación binaria como una función es importante también para el desarrollo de ambos conceptos.

- Para que los estudiantes asimilen el concepto de grupo, deben comprender primero varias propiedades matemáticas abstractas, resolver ejemplos particulares y suficientes problemas. Los académicos consideran que las mayores dificultades en la teoría de grupos comienzan con los conceptos que conducen al Teorema de Lagrange y los grupos cociente.

- De las entrevistas se concluyó que la comprensión que alcanzan los estudiantes de los conceptos elementales sobre grupos es compleja. Existe variedad de interpretaciones, conceptos erróneos, dificultades de pasar de grupos modulares a grupos de permutaciones. En la mente de un individuo se presenta no linealidad en el desarrollo de estos conceptos; incluso los inicios del álgebra abstracta constituyen un evento importante en el desarrollo cognitivo de un estudiante ya que es uno de los primeros cursos con los que se encuentra en que no es capaz de dominar y memorizar conceptos e imitar las soluciones de problemas.

Conclusiones del capítulo

Al demostrar teoremas y resolver problemas la integración de la didáctica y las técnicas heurísticas constituye un gran desafío para los docentes de matemáticas en todos los niveles educativos, principalmente el universitario, más aún en la formación de docentes.

Recientemente muchas investigaciones consideran, tanto en la resolución de problemas como en la demostración matemática, la incidencia de factores no únicamente cognitivos sino también históricos, epistemológicos, sociales, psicológicos, filosóficos, didácticos, curriculares y de creencias sobre las matemáticas, entre otros; en tal sentido se pueden abordar este tipo de investigaciones desde varias perspectivas.

Buena parte de las investigaciones presentadas lograron poner en evidencia que la resolución de problemas y la demostración de teoremas se relacionan e incluso que se superponen. Si bien es cierto, la resolución de problemas permite poner en práctica los resultados matemáticos, también es una manera de favorecer el desarrollo de habilidades para demostrar teoremas. Por esta razón, una manera de lograr avances significativos en el desarrollo del pensamiento matemático consiste en involucrar a los estudiantes en las dos actividades y pedirles que realicen acciones como presentar, discutir, conjeturar, trabajar en grupo y explicar sus puntos de vista. El desempeño que tienen los estudiantes al resolver problemas dice mucho de su habilidad para hacer demostraciones y recíprocamente. El razonamiento que utilizan se relaciona con lo que aprenden (preconceptos) y son capaces de articular para interpretar, conjeturar, aplicar, resolver problemas y generalizar (en el caso de la construcción de demostraciones); todo esto coadyuva al desarrollo de su pensamiento matemático.

Destacamos el planteamiento de Harel & Sowder (1998) sobre los esquemas de demostración que pueden utilizar los estudiantes: externo, empírico o analítico y el hecho que es posible que pueden usar varios esquemas a la vez. Weber (2005) hace otra propuesta diferente y teoriza sobre demostraciones de tipo procedimental, sintáctica y semántica. Por su parte Tall (2002) propone también tres tipos de demostración matemática (universos, modos de pensamiento o etapas): el encarnado, el proceptual y el formal. Considera que algunos individuos pueden operar y vivir predominantemente en uno de estos mundos, según su conveniencia, o quizás en dos.

Otro aspecto para tener en cuenta en la investigación es lo planteado por Selden & Selden (2013) en el sentido que la demostración tiene dos componentes: la parte retórica formal (marco de la demostración) y la parte centrada en el problema. La primera se relaciona con la interpretación de la proposición, el conocimiento matemático asociado y el uso de la lógica. La otra parte tiene que ver con la teoría sobre resolución de problemas como lo plantea Schoenfeld (o Polya). Al abordar una demostración, los estudiantes pueden o no ser conscientes del problema matemático al que se enfrentan; lo que sigue depende de su capacidad para resolver problemas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

A continuación, se presentan los fundamentos que sitúan al lector dentro de los referentes conceptuales para entender el abordaje y desarrollo del problema de investigación. Se tendrán en cuenta los siguientes pilares: una presentación del marco teórico DNR; el punto de vista de Schoenfeld sobre la resolución de problemas matemáticos, fundamentos del Pensamiento Matemático Avanzado de David Tall, elementos sobre el pensamiento algebraico y finalmente las llamadas comunidades de práctica que propone el investigador suizo Étienne Wenger.

2.1. El Marco Conceptual DNR

De acuerdo con Harel (1997), el objetivo fundamental del aprendizaje de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a construir formas de pensar y formas de entender objetivas. DNR es acrónimo de Dualidad, Necesidad and Razonamiento Repetido, llamados principios instruccionales, los cuales obedecen a dos elementos fundamentales para la construcción del conocimiento: las premisas y los determinantes. Las *premisas* son: subjetividad, desarrollo del conocimiento, enseñanza y epistemología matemática; esta última define la integridad matemática de los contenidos, resultado de la evolución que esta ha alcanzado a través del tiempo. Los *determinantes* son: los Actos Mentales, las Formas de Entender y las Formas de Pensar, las dos últimas llamadas categorías del conocimiento.

Actos mentales. Algunos son: representar, interpretar, definir, calcular, conjeturar, demostrar, simbolizar, transformar, generalizar, aplicar, modelar, relacionar, clasificar, formular y resolver problemas. La diferencia entre estos es de tipo cognitivo y permite al docente comprender la matemática que desarrollan sus estudiantes y establecer objetivos cognitivos para la enseñanza.

Formas de entender: Son las maneras de comprender asociadas a los actos mentales. Se refieren a productos como definiciones, conjeturas, teoremas, demostraciones, problemas y soluciones. La forma de entender es la cadena de argumentos que ofrece un individuo cuando construye una demostración.

Formas de Pensar: Son las prácticas matemáticas que utiliza el individuo para lograr las formas de entender y dependen de la naturaleza de los actos mentales y de las elecciones o caminos que tiene para interpretar una situación. Harel & Sowder (1998) consideran que, la resolución de problemas, los esquemas de demostración y las creencias sobre las matemáticas son formas de pensar relacionadas con la manera en que los individuos interpretan y hacen conjeturas.

Resolución de problemas: incluye todos los actos mentales. La solución que un individuo ofrece a un problema es una forma de entender porque es el resultado de actos mentales, pero es también una forma de pensar porque en cada paso analiza si es posible plantear un problema más simple, considerar otras posibilidades o buscar estrategias diferentes para la solución.

Esquemas de demostración: ocurren en cualquier actividad matemática y se relacionan con los actos mentales de generalizar y de demostrar. Harel (2007) considera que constituyen la esencia de los actos mentales que utiliza un individuo para determinar o persuadir, que son etapas de la demostración. Al determinar, un individuo se convence de la verdad o falsedad de una afirmación; al persuadir elimina las dudas que tienen los demás. Para Harel & Sowder (1998) una afirmación que haga un individuo puede ser una conjetura o un hecho. Una conjetura es una afirmación cuando se tiene dudas sobre una verdad; la conjetura se convierte en un hecho cuando se asegura la verdad.

Los investigadores proponen tres niveles de esquemas de demostración: externos, empíricos y axiomáticos o analíticos. En los empíricos, se realizan pruebas inductivas, basadas en los sentidos, conocimientos previos, lo observado en ejemplos, sustituir en fórmulas u observar algún patrón con el que se pueden validar muchos casos particulares. Estos esquemas prevalecen en los estudiantes y afectan sus procesos de demostración, así que los docentes deben advertirles sobre las limitaciones de lo empírico.

Los esquemas externos pueden ser rituales, autoritarios o simbólicos no cuantitativos. En los primeros, el individuo se convence por la forma de la demostración; en los autoritarios se convencen por lo que dice un texto, afirma un maestro u otra autoridad; en los simbólicos los estudiantes manipulan símbolos, aunque poco comprendan su significado. Harel & Sowder (1998) consideran que, junto con los esquemas autoritarios, los simbólicos se deben a una enseñanza deficiente.

Los esquemas *analíticos* ocurren cuando la demostración se obtiene a partir de la deducción lógica y pueden ser *transformacionales o axiomáticos*. En los primeros el estudiante realiza un proceso deductivo de generalización y aplica operaciones mentales orientadas a objetivos. Los axiomáticos son los más avanzados y en ellos el estudiante reconoce que el conocimiento matemático se erige sobre axiomas que son aceptados sin demostración.

Creencias sobre las matemáticas: tienen que ver con las convicciones o presunciones que tiene un individuo para dar respuesta a preguntas como: ¿qué es la matemática y cómo se crea?; ¿cuál es su utilidad intelectual y práctica? A continuación, se caracterizan los principios fundamentales del modelo DNR:

Principio de Dualidad: Existe una relación de causa-efecto, entre las formas de entender y las formas de pensar. Los estudiantes logran formas acertadas de pensar únicamente cuando alcanzan formas acertadas de entender y esto se logra cuando alcanzan formas adecuadas de aplicar los actos mentales, por ejemplo, al leer y escribir matemáticas, explicando y argumentando, resolviendo problemas y al analizar y demostrar teoremas.

Principio de Necesidad. La resolución de problemas debe ser la meta y el medio para desarrollar el conocimiento matemático. Los problemas matemáticos son oportunidades de enseñanza-aprendizaje que involucran dos formas de comprensión distintas: la de quien propone el problema y la de quien va a resolverlo. Harel (2007) señala que los maestros deben dirigirse a sus estudiantes como sujetos aprendientes, motivar en ellos la necesidad intelectual (no social ni económica) del conocimiento que quiere comunicar.

Razonamiento Repetido. La experiencia que se gana a través de la práctica es importante en todo proceso cognitivo. Los problemas deben exigir razonamiento y deben responder a las necesidades intelectuales de los estudiantes, para que a través de la práctica puedan internalizar, organizar y retener formas de entender y formas de pensar.

2.2. Sobre la demostración matemática

Según Tall (2002) la demostración es el propósito de la matemática moderna y un concepto fundamental en el que todos los matemáticos están de acuerdo. Considera que es necesario analizar la naturaleza de la demostración que tienen los individuos, sus características e investigar sobre su crecimiento cognitivo a medida que estos maduran. Esto no se puede logra simplemente haciéndole que reproduzca lo que hacen los matemáticos; es necesario que profundice en la naturaleza misma de la demostración, no sólo dentro de la comunidad de práctica de los matemáticos, sino en su desarrollo humano.

Balacheff (2010) considera que en educación matemática los términos “demostración” y “prueba” se utilizan indistintamente y se relacionan con las acciones de “explicar” y “justificar”, y que esto constituye un obstáculo para las investigaciones, porque fusionan diferentes niveles de cognición de los individuos. Cita a Piaget, para quien “explicar” alude a las razones que da un individuo para responder al por qué de una situación y por lo tanto no tiene que ver con una cadena deductiva. Balacheff cree que el paso de la explicación a la demostración es un proceso social en el que un discurso que asegura la validez de un resultado para un individuo es luego aceptado por una comunidad. Esta posición no necesariamente es definitiva, con el tiempo y el avance del conocimiento científico puede ser rechazada luego.

Balacheff (2010) considera que las demostraciones se caracterizan por su forma estrictamente codificada, en la cual no todos los pasos deben ser explícitos. En ellas se organizan enunciados siguiendo un conjunto bien definido de reglas de inferencia lógica. En cuanto al término “razonamiento”, Balacheff está de acuerdo con Blanché (1973)[44] en que tiene dos enfoques distintos: el de actividad intelectual del individuo (acto mental) porque relaciona la intuición y el pensamiento o como la producción de su explicación verbal o simbólica, una manera de organizar el discurso y convertirlo en operaciones formales ordenadas (validación).

Para Hanna (1990) una demostración formal es una secuencia finita de argumentos, donde se parte de un axioma y en adelante pueden encontrarse otros axiomas o argumentos que se deducen de los anteriores; en la última línea se encuentra la conclusión de la demostración. Considera que los procesos argumentativos son mecanizables y excluyen aspectos psicológicos de la demostración: el formalismo se desarrolló para eliminar la necesidad de recurrir a la intuición y al juicio humano, ambos vistos como posibles fuentes de errores.

Según la académica muchos matemáticos y educadores matemáticos consideran de manera consciente o inconsciente, que la demostración debe provenir de axiomáticas y premisas verdaderas, sin argumentos defectuosos y llevar a un

[44] Blanché, R. (1973). Le raisonnement. Paris: P.U.F.

resultado que, si no es el esperado, al menos tiene sentido en otro contexto. La validez formal está por encima de la aceptación social, la cual no es ni necesaria ni suficiente. Otros matemáticos no se preocupan mucho por la formalidad y rigurosidad de las demostraciones, sino que prefieren las que tengan implicaciones interesantes y puedan proporcionar aplicaciones a otros campos, que establezcan relaciones matemáticas esenciales, por encima de otras que simplemente justifiquen la validez de un resultado.

Selden, et al. (2010) consideran que la demostración de teoremas es importante en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Que algunos docentes piden a sus estudiantes hacer demostraciones para evaluar su comprensión y consideran que, si no saben argumentar y construir la demostración, no podrán convencerse ellos mismos y tampoco persuadir a otros. Clasifican los teoremas de acuerdo con un grado creciente de dificultad: Tipo 0: la demostración se sigue inmediatamente de las definiciones; Tipo 1: pueden requerir apoyo de textos; Tipo 2: requieren de otros resultados matemáticos relativamente fáciles de entender, formular y demostrar, y los Tipo 3: en los que se requiere de otros resultados cuya formulación, comprensión y demostración es compleja. Por su parte, Tall (1988) considera que desarrollar una demostración matemática tiene dos propósitos: (i) mostrar que un supuesto lleva a una conclusión mediante una secuencia de pasos lógicos; y (ii) poner en evidencia cómo y por qué, la conclusión se deduce de las hipótesis o supuestos.

2.3. La heurística y la resolución de problemas

En matemáticas, el término “heurística” se refiere a las técnicas de descubrimiento, a las estrategias para guiar o descubrir. Polya (1945) afirma que se relaciona con el estudio de los métodos y las reglas de descubrimiento e invención. Schoenfeld (1985) considera que las estrategias heurísticas son reglas generales para la resolución exitosa de problemas, son sugerencias que le permiten al individuo comprender mejor el problema y avanzar hacia su solución.

McDonald, citado por Hughes (1974) considera la heurística como un modelo de procesamiento de información que produce procedimientos efectivos para resolver problemas o adquirir comportamientos inteligentes para saber cómo proceder autónomamente, conjeturar y hacer demostraciones. Para Daguplo (2013) las heurísticas son procedimientos o estrategias que no prometen una solución a un problema, pero proporcionan un método altamente probable para resolverlo.

En cuanto a la resolución de problemas matemáticos, Windsor (2010) lo considera como un factor crucial y un motivador del aprendizaje y la comprensión de las matemáticas. Schoenfeld (1985) considera que la resolución de problemas trasciende a la adquisición de técnicas rutinarias y permite a los estudiantes desarrollar una comprensión profunda para conceptualizar las matemáticas que aprenden, mejorar el razonamiento y desarrollar un pensamiento superior; un problema retador es una pregunta interesante para la cual los estudiantes no conocen un procedimiento para resolverlo, pero conocen los hechos y procedimientos necesarios. Según Polya (1945), estos problemas favorecen el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes y fomentan el uso de las matemáticas de manera creativa.

La Universidad Antonio Nariño, pionera a nivel nacional en Olimpiadas de Matemáticas, en una de sus publicaciones[45] describe los problemas no rutinarios como aquellos que invitan al estudiante a pensar de manera autónoma, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su pensamiento. Esto le permitirá expresar sus ideas de forma clara y convincente, lo que repercute en su beneficio y en el del grupo, porque los demás pueden aprender sus métodos y estrategias.

Según Bonotto (2013), citado por Malaspina (2015), la resolución de problemas es una forma de investigación en matemáticas, que al ser implementada en el aula permite llegar mucho más allá de lo que se consigue con los problemas elementales o ejercicios; es una forma de estimular las potencialidades de los estudiantes y una vía para lograr objetivos más amplios. Ponte & Henríques (2013), citados por Irvine (2017) consideran que esta actividad refuerza las habilidades matemáticas de los alumnos, aumenta la motivación, la responsabilidad y la flexibilidad de pensamiento y es útil para que los maestros evalúen los procesos cognitivos de los estudiantes, identifiquen conceptos erróneos y modifiquen sus metodologías. Halmos (1980), citado por Schoenfeld (1992), afirma que la actividad principal de los matemáticos es resolver problemas; es el corazón de las matemáticas. Los estudiantes deben prepararse para la resolución de problemas, así que los docentes deben motivar a los estudiantes para que sean mejores solucionadores de problemas.

Schoenfeld (1992) cita a Polya (1954) para quien, tanto en la ciencia como en la vida cotidiana, cuando un individuo se enfrenta a un problema inicia haciendo

[45] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria (2000-2004) Problemas y Soluciones. Editorial Universidad Antonio Nariño.

conjeturas. La primera suposición puede no ser la mejor, pero se intenta y se modifica si es necesario. Luego de varios intentos, motivado por observaciones y guiado por analogías, es posible un buen abordaje. El resultado del trabajo creativo del matemático es el razonamiento demostrativo: hacer demostraciones. Esto se logra mediante un razonamiento plausible (conjetural), suponiendo y redireccionando. Como el aprendizaje de las matemáticas se relaciona con el descubrimiento, se le debe dar al estudiante oportunidad de resolver problemas en los que primero adivine, conjeture y también demuestre resultados.

2.4. La propuesta de Schoenfeld

Schoenfeld (1985) propone una metodología de cuatro etapas para la solución de problemas: análisis, exploración, ejecución y comprobación. Considera que deben ser tenidos en cuenta otros factores importantes: los recursos, las heurísticas, el control y las creencias sobre las matemáticas. Ángel Ruiz, citado por Barrantes (2006) considera que Schoenfeld (1985) es un racionalizador de la teoría de Polya (1945), porque incluye los recursos, agrupa las heurísticas e introduce el control durante el proceso. Las etapas propuestas por Schoenfeld (1985) son:

Análisis: Etapa de reflexión sobre la pregunta del problema, los datos que ofrece y las condiciones; si es posible se hace un diagrama, se examinan casos particulares y se simplifica el problema.

Planeación: Se relacionan los datos que ofrece el problema y lo que pide. Se analiza la validez de la pregunta, se buscan problemas que similares, se cambian condiciones por otras equivalentes y se descompone el problema en casos.

Ejecución del plan: desarrollar el plan cuidadosamente y verificar paso a paso que el procedimiento es correcto.

Comprobación: el individuo debe tener en cuenta si el resultado obtenido es coherente con lo que se esperaba encontrar. Los otros factores propuestos por Schoenfeld (1985) son:

Los Recursos. Se refiere a los conocimientos previos que tiene el individuo como los conceptos, fórmulas y los algoritmos que conoce. Puede haber recursos, por ejemplo, procedimientos mal aprendidos o fórmulas equivocadas.

Las Heurísticas. A diferencia de Polya quien propone una heurística genérica para resolver problemas, Schoenfeld (1985) considera que cada tipo de problema requiere de heurísticas particulares teniendo en cuenta que cada problema plantea una situación diferente.

El Control. El individuo debe monitorear el proceso de solución del problema y si es necesario abandonarlo y tomar un nuevo camino.

Las Creencias. Son las convicciones que tienen los estudiantes sobre las matemáticas. También son obstáculos las creencias del profesor, las de la sociedad, incluyendo las del grupo al que pertenece el estudiante. Las opiniones y prejuicios interfieren en las actitudes que asumen los estudiantes al resolver problemas.

2.5. El marco multidimensional para la resolución de problemas (MMRP)[46]

Carlson, M. & Bloom, I. (2005) proponen un marco teórico para la resolución de problemas matemáticos, según ellos más amplio que el de Schoenfeld (1985), en el que conciben cuatro fases, transversalizadas por cuatro características o atributos. Las fases o dimensiones son: orientación, planificación, ejecución y verificación o revisión. Los atributos son recursos, control o monitoreo, heurísticas y emociones.

Los recursos son la comprensión conceptual, el conocimiento, los hechos (acciones) y los procedimientos utilizados durante la resolución de problemas. El control se refiere a los comportamientos metacognitivos (relacionados con el conocimiento y el monitoreo de los procesos de pensamiento) y el control durante la resolución de problemas y las decisiones que influyen en el camino de la solución. Incluye la selección e implementación de recursos y estrategias, (planificación, monitoreo, toma de decisiones, actos metacognitivos conscientes). La heurística describe las habilidades, métodos creativos y criterios que favorecen la solución del problema. La dimensión afectiva incluye actitudes, creencias, emociones, valores y ética.

2.6. El pensamiento algebraico

Según Radford (2006), no es posible tener una definición precisa se este pensamiento debido a la amplia gama de objetos que maneja: ecuaciones, funciones, patrones, procesos (como inversión y simplificación), así como a las diversas formas posibles de concebir el pensamiento en general. Se trata de una forma particular de reflexionar matemáticamente que interrelaciona tres elementos:

[46] Carlson I. & Bloom I (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. Educational Studies in Mathematics, Vol. 58, No. 1 (2005), pp. 45-75.

(a) La indeterminación de objetos matemáticos como incógnitas, variables y parámetros que, contrario a la determinación numérica, permite representar objetos desconocidos; (b) La manipulación analítica de los objetos algebraicos, y (c) el modo simbólico que tiene para designar y relacionar objetos, que es lo que permite pensar algebraicamente.

Windsor (2010), considera que el pensamiento algebraico es un elemento fundamental del pensamiento matemático y del razonamiento. En su forma elemental se relaciona con la habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas generales entre números, objetos y formas. En su forma pura, apoya el conocimiento profundo para pensar formalmente, amplía la capacidad para resolver problemas más allá de situaciones concretas y permite operar con objetos matemáticos de forma lógica e independiente del mundo material.

Warren, et al. (2016)[47], afirman que álgebra es una rama importante de las matemáticas, fundamental para el aprendizaje de las matemáticas a nivel avanzado y que el pensamiento algebraico se apoya en dos pilares básicos: el concepto de "variable" como entidad abstracta general, que puede representarse de diferentes maneras, y el de "estructura". Ambos conceptos están involucrados en cualquier actividad algebraica (abstracción, generalización, resolución de problemas, análisis de estructuras, modelización, cantidades relacionadas, etc.).

Dentro de la comunidad de Psicología de la Educación Matemática (PME) surgen inquietudes epistemológicas, sobre qué se entiende exactamente por álgebra,

[47] Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In The second handbook of research on the psychology of mathematics education (pp. 73-108). Brill Sense.

pensamiento algebraico, razonamiento algebraico y problemas algebraicos. Hasta ahora han trabajado como si estos términos fueran equivalentes, sin embargo, algunos puntos de vista frente a las dificultades de aprendizaje del álgebra dejan claro que esto no es así. Se vienen desarrollando investigaciones sobre la noción de variable y sus múltiples usos, de acuerdo con diferentes niveles de abstracción: en la resolución de problemas, tales usos (como incógnita, representación de números, variables relacionadas, parámetros) frecuentemente aparecen juntos y se utilizan los mismos símbolos para representarlos. Insisten que una distinción más explícita ayudaría a los estudiantes a dar sentido a los símbolos utilizados para representarlas.

2.7. La teoría del Pensamiento Matemático Avanzado

La teoría constructivista APOE (APOS en inglés, acrónimo de Actions, Processes, Objects, and Schemas) fue propuesta por Ed Dubinsky y desarrollada por el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), y se fundamenta en las ideas de Piaget sobre la manera en que los individuos aprenden matemáticas. APOS se desarrolló para investigar sobre el razonamiento matemático avanzado a nivel universitario y explicar las dificultades que enfrentan los estudiantes durante el aprendizaje, inicialmente en la teoría de grupos, la teoría de números y posteriormente fue implementada en el cálculo. Esta teoría toma como base el concepto de *abstracción reflexiva* propuesta por Piaget, como un mecanismo para desarrollar el pensamiento y mediante el cual los individuos construyen en la mente las estructuras lógico-matemáticas.

Tall (2002)[48] publica la investigación "Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking", de Dubinsky donde afirma que en la teoría APOS, el saber matemático de una persona se alcanza de manera progresiva cuando se enfrenta a la resolución de problemas porque en su abordaje, mediante la reflexión, construye y reconstruye acciones, procesos y objetos que organiza en esquemas mentales para llegar a la solución. Según Arnon, et al. (2014)[49], la abstracción reflexiva de Piaget consta de dos etapas: La etapa cognitiva, que es de la reflexión sobre el contenido y las operaciones con ese contenido y va de un nivel inferior a uno superior. La segunda etapa es la de reconstrucción y reorganización del contenido y permite que las operaciones se conviertan en nuevos contenidos y se puedan aplicar nuevas operaciones; esta etapa tiene que ver con la construcción de conceptos matemáticos.

Dubinsky está de acuerdo con Piaget en que la abstracción reflexiva de un individuo inicia a edad temprana y continúa desarrollándose a lo largo de su vida. Es un proceso que le permite, a partir de acciones mentales sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones con otros objetos en un nivel de pensamiento superior en el que organiza dichas acciones (separación forma-contenido), para luego insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel más alto.

Trigueros (2005), afirma que los significados o conceptos que alcanza el individuo no siguen una secuencia lineal: un individuo puede tener por mucho tiempo

[48] Tall, D. (2002). Advanced Mathematical Thinking. Science Educational Department, University of Warwick. New York, U.S.A: Kluwer Academic Publishers.
[49] Arnon, I. et al. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York, U.S.A: Springer.

concepciones intermedias o tener concepciones distintas para aspectos diferentes de un mismo concepto. Puga & Miranda (2004) consideran que la teoría psicogenética de Piaget propone tres niveles de abstracción: empírico, pseudo-empírico y reflexivo. En el primero están los conocimientos matemáticos elementales que adquiere el individuo de los rasgos físicos perceptibles de los objetos; en el pseudo-empírico el individuo, desde su percepción mental, descubre los efectos de las acciones que puedan aplicarse a un objeto para modificarlo internamente. En el nivel reflexivo establece relaciones, conocimientos y procesos abstractos coordinados de los objetos y le realiza generalizaciones.

Los conceptos de la teoría APOS se definen a continuación: Un *objeto* puede ser físico o mental; estos últimos son los objetos matemáticos como números, variables, funciones, espacios y estructuras. Dubinsky considera que, en cualquier momento de su desarrollo cognitivo un individuo realiza acciones que van más allá de lo concreto y es capaz de manipular y operar con objetos matemáticos. Según Bermúdez (2011), en las matemáticas elementales los objetos se describen, mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen".

Un *proceso* es la interiorización de una acción, una construcción mental producto de una transformación interna, que permite al individuo ser consciente de la acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones. Para Bermúdez (2011), una vez se alcanza el proceso, el individuo puede mentalmente invertirlo o deshacerlo, para construir uno nuevo, este mecanismo es llamado inversión y según Dubinsky, Piaget no lo incluye en su teoría, sino que lo considera otra forma de construcción del pensamiento matemático. Un *esquema* es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados de manera coherente en la mente del individuo y que este recuerda cuando resuelve problemas matemáticos. Dubinsky propone los siguientes mecanismos de construcción del PMA:

Interiorización: es la apropiación mental por parte del individuo, de acciones que se convierten en procesos.

Coordinación: consiste en tomar dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso.

Encapsulación: es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Según Bermúdez (2011) el objeto puede ser visto como una entidad total y ser nuevamente transformado mentalmente por otras acciones o procesos y se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

Generalización. Tiene lugar cuando el individuo aplica un conocimiento o esquema a fenómenos externos. Permanece el mismo esquema, excepto que ahora tiene aplicabilidad. Se considera una forma de abstracción reflexiva.

Descomposición genética. El conocimiento se construye al aislar pequeñas porciones de este y describir sus relaciones con los esquemas (así se construyen los conceptos matemáticos mentalmente). Para Trigueros (2005) la descomposición genética de un concepto no es única, pueden coexistir diferentes descomposiciones genéticas de un mismo concepto.

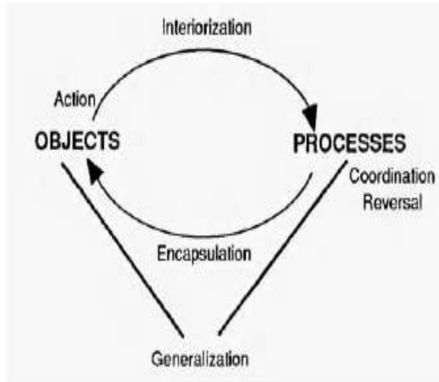


Figura 2. Construcción de Esquemas[50]

Arnon, et al. (2014)[51] analizan la investigación de Dubinsky (1994) sobre la Teoría APOS y mediada por el software matemático ISETL y en el contexto del álgebra abstracta proponen que la descomposición genética del concepto “grupo” es un esquema que consta de otros tres esquemas: conjunto, operación binaria y axioma. Los esquemas de “conjunto” y “operación binaria” se encargan de formar objetos y se coordinan a través del esquema de “axioma”. La interacción de estos tres esquemas se ilustra en la siguiente figura.

[50] Dubinsky E. & Leron, U. (1995). An Abstract Algebra Story. The American Mathematical Monthly, 102(3), 227-242. Recuperado de http://www.math.kent.edu/~edd/AlgbraStory.pdf.
[51] Arnon, I et al. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York, U.S.A: Springer, p. 67.

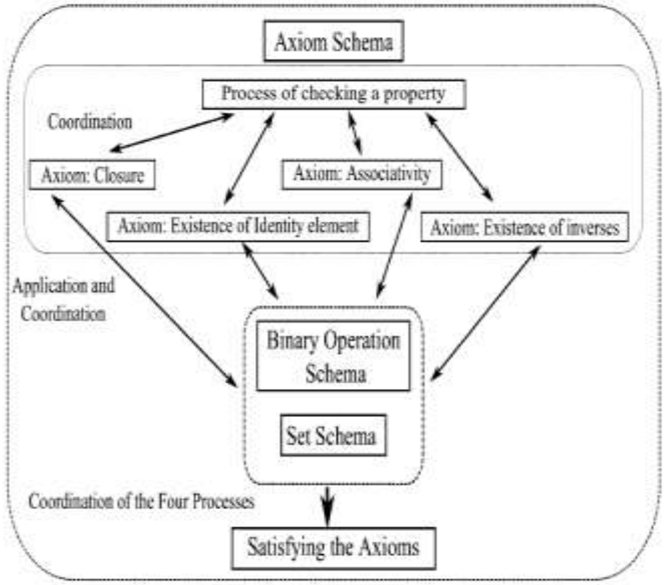


Figura 3. Descomposición genética del concepto de grupo[52]

2.8. Las Comunidades de Aprendizaje

Están conformadas por un grupo de personas reunidas en torno a intereses comunes, que aprenden compartiendo conocimientos, algunos provenientes de la experiencia y utilizando herramientas en un mismo entorno, para dar solución a problemas específicos. Wenger (1989) señala que, desde el principio de la historia los seres humanos han formado comunidades que acumulan su aprendizaje colectivo lo que define el conocimiento como un acto de participación.

Las comunidades de práctica ofrecen un marco conceptual para robustecer el aprendizaje, partiendo del hecho que el hombre es un ser social, el conocimiento y el aprendizaje se relacionan con la participación, la interacción y el compromiso

[52] Arnon, I et al. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York, U.S.A: Springer.

activos en el proceso. En otras palabras, el aprendizaje es un acto de participación social activa de los individuos.

Conclusiones del capítulo 2

En marco teórico se expone la importancia del marco DNR que es un sistema de instrucción que teoriza que se alcanzan niveles significativos en el aprendizaje de las matemáticas a partir de los principios que formula: dualidad, necesidad y razonamiento repetido. Esta teoría plantea la importancia de motivar la necesidad intelectual en el individuo sobre la importancia de adquirir conocimientos, soportado en las llamadas formas de entender, las formas de pensar y la necesidad de la internalización de los problemas a los cuales se enfrenta.

Se ofrecen también los planteamientos de algunos investigadores en relación con la heurística y su trascendencia de la resolución de problemas y la demostración de teoremas para lograr que los estudiantes avancen significativamente en el desarrollo de su pensamiento matemático, particularmente el algebraico. En tal sentido Schoenfeld (1985) quien afirma que, cuando los estudiantes resuelven problemas, desarrollan una comprensión profunda que les permite conceptualizar las matemáticas y que esta práctica va más allá de la adquisición de técnicas procedimentales. La resolución de problemas es una forma de investigar en matemáticas, que permite llegar mucho más allá de lo que se consigue con los problemas rutinarios (Bonotto, 2013); esta tarea aumenta la motivación, la responsabilidad y la flexibilidad de pensamiento (Ponte & Henríques, 2013).

De la misma manera se exponen puntos de vista sobre el pensamiento algebraico, sus conceptos fundamentales como son el de variable, el de estructura y la manera en que permite interrelacionas y manipularlos analíticamente. Se deja claro que este pensamiento es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas a nivel avanzado y que favorece la abstracción, la generalización, la resolución de problemas y la modelización entre otras.

Finalmente, en virtud de que el ser humano es sociable por naturaleza y por ende se apoya en el trabajo colaborativo, la implementación de comunidades de aprendizaje en el sentido de Wenger (1989), favorece la participación de los estudiantes al momento de implementar las actividades.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Metodología de la Investigación

3.1.1. De la elección del tema de investigación

Una motivación para escoger el tema de investigación es la reflexión que hace el autor de su experiencia a lo largo de ocho años orientando cursos relacionados con el álgebra abstracta como teoría de grupos, teoría de anillos y estructuras algebraicas; también las vivencias en su época de estudiante de licenciatura en matemáticas. No menos importante es destacar la auto reflexión como estudiante de doctorado y el énfasis motivado por la Universidad Antonio Nariño de implementar la resolución de problemas en los cursos de matemáticas, como una manera de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático; esto último conlleva a la inquietud de analizar si existen relaciones entre demostrar teoremas y resolver problemas en el contexto del álgebra abstracta.

3.1.2. Enfoque de la investigación

Se asume el paradigma cualitativo, ya que se producirán datos descriptivos de manera permanente, producto de la aplicación de instrumentos opiniones y la conducta observable. El foco de atención del investigador consiste en describir situaciones, eventos, interacciones y comportamientos observables, escuchar a los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones (Colmenares & Piñero, 2008).

3.1.3. Alcance de la investigación

Con la misma se pretende dar respuesta a la hipótesis científica: El pensamiento algebraico que se requiere para demostrar teoremas es equivalente al que se necesita cuando se resuelven problemas en el contexto del álgebra abstracta. El autor pretende sacar adelante esta conjetura por medio de una propuesta metodológica basada en el marco conceptual DNR, el punto de vista de Schoenfeld (1985) sobre resolución de problemas, la implementación de comunidades de aprendizaje y la teoría del PMA. La meta es lograr avances a la caracterización del pensamiento algebraico con el fin de aportar a la literatura científica del tema.

3.1.4. Población y muestra

La **población** la constituye estudiantes del V semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana de Neiva, modalidad presencial, del curso de Estructuras Algebraicas del segundo semestre académico de 2020. La muestra la constituye un grupo de 12 estudiantes. Debido al aislamiento social a causa de la pandemia ocasionada por el virus SARS-CoV-2 (COVID 19), las actividades se desarrollaron mediante encuentros virtuales (sincrónicos y asincrónicos) utilizando la plataforma Meet de Google.

En los encuentros el investigador realizaba la presentación del tema de la clase, procedía a la explicación y demostración de los resultados más importantes e ilustraba con problemas; al final de la clase se exponían las actividades que los estudiantes debían desarrollar. En otras reuniones los estudiantes exponían temas del curso o socializaban y discutían las soluciones propuestas a las tareas. Se realizaba una discusión en grupo de los aciertos o desaciertos en los problemas y los teoremas que resolvían.

3.1.5. Técnicas e instrumentos

El objetivo de toda investigación científica es la producción de conocimiento científico, cuyas principales características son la sistematicidad, el orden, que es metódico, racional, reflexivo y abierto a la crítica. Para el diseño metodológico se asume un enfoque de investigación-acción pues lo asumen personas que desarrollan una actividad conjunta para beneficio mediante la reflexión, interactúan la teoría y la práctica y no hay distinción entre lo que se investiga, quién investiga y el proceso (Colmenares & Piñero, 2008). El diseño también se asemeja a la investigación participativa, pues la problemática es un acuerdo entre los investigadores y los participantes, cuenta la opinión de todos y el estudio es conducido por los participantes, ya que se requiere identificar sus necesidades, comprender sus fortalezas y debilidades, relaciones, etc. (Hernández, 2014). En todas las fases de la investigación, los involucrados participan tanto del proceso de construcción del conocimiento, como en la toma de decisiones.

Se destaca la importancia de la Teoría Fundamentada (GT por sus siglas en inglés) propuesta por Corbin & Strauss (1990), que es método cualitativo de comparación permanente que permite aproximarse de manera inductiva a la problemática investigada y donde la teoría emerge a partir de los datos. El conocimiento científico surge de la observación y de los consensos entre los participantes y permite explicar, describir y dar alguna previsibilidad del fenómeno que se estudia. Según Arraiz (2014), en la GT los datos iniciales están en continuo refinamiento durante la recolección y el análisis, permitiendo siempre encontrar relaciones entre las categorías y la formulación de hipótesis. Esta comparación permite descubrir nuevas categorías y encontrar nuevas relaciones. El proceso no es lineal y tampoco se parte de supuestos ni de resultados de otras investigaciones; se presenta una entrada y salida permanente de la escena, cambiando el foco de atención y buscando nuevas direcciones que se manifiestan en los resultados obtenidos, esto permite diversificar las estrategias para recolectar, procesar y analizar los datos. Los instrumentos implementados en la investigación son los siguientes:

Dos encuestas semiestructuradas. Se estructuraron con el fin de triangular la información aportada por los participantes. Fueron elaboradas tres de cada una, para ser aplicadas a los estudiantes que constituyen la muestra, docentes que hayan orientado curso de álgebra abstracta y expertos en esta rama de las matemáticas.

Una encuesta de satisfacción: Consiste en diez preguntas tipo Likert e implementada al finalizar la investigación. La finalidad es evaluar la percepción de los estudiantes en relación con el enfoque de la investigación, el diseño metodológico y la evaluación del sistema de actividades.

Un sistema de nueve actividades didácticas. En las que se pide a los estudiantes, sin decirles si es lo uno o lo otro, que demuestren teoremas y que resuelvan problemas de álgebra abstracta. Los objetivos trazados fueron los siguientes.

- Analizar la manera en que los estudiantes razonan cuando abordan las actividades.
- Clasificar las opiniones de los estudiantes sobre su percepción sobre ¿Cuáles diferencias significativas encuentran en el pensamiento matemático al resolver problemas y al demostrar teoremas de álgebra abstracta?

Los métodos estadísticos para el procesamiento y análisis de la información se reducen al cálculo de estadígrafos básicos como promedios y la elaboración de tablas y gráficos estadísticos para ilustrar la información procesada.

3.1.6. Fases de la investigación

Estas se caracterizan por su flexibilidad durante todo el proceso de investigación. Las que se tuvieron en cuenta fueron las siguientes.

Fase 1: Búsqueda y recopilación de información para consolidar el estado del arte y el marco teórico. Esta fase es transversal con las demás etapas que se proponen.

Fase 2: Elaboración de instrumentos, validación y calibración. Tanto las encuestas como el conjunto de actividades fueron enviados a expertos (doctores en matemáticas o en educación matemática) para su revisión y validación.

Fase 3. Ejecución de las actividades y clasificación de la información. En la investigación se asume lo propuesto por Hernández (2014) en que pueden formularse preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos. Las actividades pueden en algún momento redireccionarse o repetirse si es el caso.

Fase 4. Análisis de la información y entrega del Informe final. Es difícil dar por acabado cualquier proceso de investigación, particularmente los cualitativos como es el caso del actual. Se espera que esta etapa tenga éxito una vez se haya hecho el análisis estadístico de la información recopilada y se hayan sacado conclusiones valederas que tengan el visto bueno del Jurado.

Conclusiones del capítulo 3

Se deja claro que la investigación es de tipo cualitativo y que para su desarrollo se tendrá en cuenta el punto de vista, el comportamiento, las creencias y las inquietudes de los docentes en formación del curso de estructuras algebraicas. Para lograr esto, el investigador hace parte del grupo, estará inmerso y dispuesto en todo momento, a escuchar y mediar con los participantes, a encaminar el proceso siempre que sea necesario. Un aspecto de cuidado y de mucho compromiso en el desarrollo de la investigación lo constituye el hecho que el trabajo que se realizará de manera remota, sincrónica o asincrónica, debida a la necesidad de trabajar desde casa a causa de la pandemia por el Covid 19.

La investigación consiste en cuatro fases: consolidación del marco teórico y el estado del arte, elaboración y validación de los instrumentos para recoger información (dos encuestas semiestructuradas, un sistema de nueve actividades y una encuesta de satisfacción), implementación de los instrumentos y clasificación de la información, y finalmente, análisis y entrega del informe final. En todas las fases los docentes en formación participan del proceso de construcción del conocimiento y en la toma de decisiones. En tal sentido, el diseño metodológico se asemeja a la investigación participativa, ya que la problemática es un acuerdo entre los investigadores y la comunidad, y la opinión de todos es importante para la solución.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA INDAGAR SI ES POSIBLE ENCONTRAR RELACIONES ENTRE DEMOSTRAR TEOREMAS Y RESOLVER PROBLEMAS

Durante la investigación se implementaron dos encuestas semiestructuradas y un sistema de nueve actividades sobre la temática desarrollada en el curso de estructuras algebraicas. Al final se aplicó una encuesta de satisfacción, con el fin de conocer la percepción de los estudiantes sobre el enfoque, el diseño metodológico y la evaluación de las actividades. Las encuestas se encuentran al final de la tesis en la sección de anexos.

Los instrumentos, todos elaborados por el autor, fueron revisados y validados por expertos con grado de doctorado en matemática o educación matemática, diestros en la enseñanza del álgebra abstracta y con importante trascendencia investigativa.

4.1. Relación del marco teórico con el sistema de actividades

Se asume como marco teórico el DNR al igual que algunas concepciones científicas sobre la demostración matemática, la propuesta de Schoenfeld (1985) sobre resolución de problemas y las comunidades de práctica de Wenger (1998). En la formulación de los problemas propuestos y los teoremas que integran las actividades, se evidencian e interrelacionan estas categorías, con lo cual se dinamiza su solución y a la vez se enriquece los elementos teóricos abordados.

Lo anterior se apoya en el estado del arte de la investigación, donde se exponen resultados de la literatura científica sobre la relación que existe entre demostrar teoremas y resolver problemas, desde tres enfoques: epistemológico, psicológico y didáctico; el autor considera que estos enfoques se articulan estrechamente.

4.2. Sistema de actividades para favorecer la caracterización del pensamiento algebraico

Las nueve actividades didácticas implementadas fueron: Métodos de Demostración, Conjuntos y Operaciones, Relaciones de Equivalencia, Operaciones Binarias, Grupos, Subgrupos, Grupos Cíclicos, Clases Laterales y Grupos Cociente y Homomorfismo de Grupos. En cada actividad se enuncian los objetivos, se ofrecen elementos teóricos y al final se propone solucionar problemas y demostrar teoremas sin mencionar a los participantes, si se trata de lo uno o lo otro. La intención es observar la forma en que abordan la solución de estas tareas y analizar las estrategias que siguen en el proceso. En todas las actividades al final se les pregunta si consideran que se presenta una manera distinta de razonar, en otras palabras, si los procesos mentales involucrados al demostrar teoremas y resolver problemas son significativamente diferentes.

Desde el inicio, la investigación se convierte en un reto para el investigador debido a las creencias que tienen los estudiantes sobre los temas que se manejan en el curso de álgebra, sumado a esto la escasa experiencia que tienen en el manejo de las demostraciones y la resolución de problemas. Con el fin de ganar confianza con el grupo, el investigador explica la forma en que se va a trabajar durante el proceso investigativo, la importancia de hacer parte de este y la importancia de los temas del curso para robustecer el conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento algebraico.

En cuanto a la metodología, en principio se desea que los participantes trabajen las actividades durante la clase, de manera individual o en comunidades de aprendizaje. Sin embargo, a causa de la suspensión de la presencialidad académica debido a la pandemia por el Covid-19, el desarrollo de estas debió hacerse de manera remota.

Previo a la implementación de cada actividad, la clase se desarrolla utilizando el método tradicional de enseñanza, se procede luego a explicar a los participantes los objetivos y se les pide enseguida que la desarrollen; en la clase siguiente se socializan y discuten las respuestas con el fin de retroalimentar. Por la forma remota en que se trabaja es difícil controlar el trabajo individual. Una estrategia consiste en solicitar a los estudiantes que expliquen los procedimientos utilizados en la solución. Las dos encuestas semiestructuradas fueron diligenciadas por los 12 estudiantes del grupo, cinco docentes de álgebra en ejercicio y cinco expertos, con el fin de realizar una triangulación de los resultados. El sistema de actividades y la encuesta de satisfacción se aplicó únicamente a los docentes en formación. La implementación de los instrumentos se realiza semanalmente, en el siguiente orden: la primera entrevista semiestructurada en la tercera semana del curso, luego una a una las primeras cuatro primeras actividades didácticas, en la sexta semana se implementa la segunda encuesta semiestructurada; se procede con las cinco actividades restantes y al final del curso se aplica la encuesta de satisfacción.

4.2.1. Actividad 1. Métodos de demostración y resolución de problemas

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal (entrevistas) de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas matemáticos.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se propone para ser desarrollada en 3 horas.

Insumos: Los conocimientos previos de los estudiantes, enriquecido por lo visto en las clases como teoría y ejemplos sobre los diferentes métodos de demostración matemática, haciendo énfasis sobre la naturaleza y la importancia de esta. Igualmente se trabaja la resolución de problemas tomados de libros de texto universitarios y otros de olimpiadas. El desarrollo de la actividad se propone de manera individual y se realiza de manera remota; al final se realizó una socialización para retroalimentar.

- **Finalidad y evaluación de la actividad:**

Evaluar las fortalezas y deficiencias que tienen los estudiantes para interpretar y comprender proposiciones matemáticas, resolver problemas y demostrar teoremas. También se procura identificar cuál o cuáles de los tres niveles de esquemas de demostración propuestos en el marco conceptual DNR: externos, empíricos, y axiomáticos o analíticos, utilizan los estudiantes.

- **Materiales para utilizar:** Los estudiantes pueden consultar libros de texto en físico o electrónicos, tablero y marcadores de colores, la guía de la actividad, en formato pdf, que se envía al correo electrónico.

- **Desarrollo de la actividad:**

Elementos Teóricos: Para demostrar proposiciones de la forma $p \leftrightarrow q$, llamadas bicondicionales, primero se demuestra $p \to q$ y después $q \to p$. La prueba por contradicción es una forma de demostración indirecta. Para demostrar por contradicción que una proposición P, se asume que P es falsa, se analizan las consecuencias de tal supuesto, con lo cual se llega a un absurdo o imposibilidad de la forma $r \wedge \sim r$. Dado que una proposición es verdadera ó falsa y se probó que P no puede ser falsa, se concluye que P debe ser verdadera.

Problemas y Teoremas:

- Demuestre que los números reales a y b son raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$, si y sólo si, $a + b = -p$ y $ab = q$.
- Demuestre que si r es un número real tal que $r^2 = 2$, entonces r es irracional.
- Sea X un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades: $3 \in X$, $x \in X \wedge y \in X \Longrightarrow xy \in X$, $6 \notin X$. Concluya que

  $\frac{5}{2} \in X \rightarrow \frac{4}{5} \notin X$ y que $\frac{1}{x} \in X \rightarrow \sqrt{2}\,x \notin X$.
- Demuestre o refute la proposición: “Si n es un entero positivo, entonces $n^2 + n + 41$ es un número primo”.

4.2.2. Actividad 2. Conjuntos y operaciones

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal (entrevistas) de los estudiantes al demostrar teoremas y resolver problemas sobre conjuntos.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se propone para ser desarrollada en 3 horas.

Insumos: Se presenta a los participantes elementos de la teoría intuitiva de conjuntos: definiciones, operaciones básicas (unión, intersección, diferencia y complemento), las principales propiedades y ejemplos, donde se incluye demostración de proposiciones y resolución de problemas. Se omite la explicación de la operación diferencia simétrica, para ser implementada en la actividad.

- **Finalidad y evaluación de la actividad**.

A partir de las operaciones básicas entre conjuntos, los participantes deben abordar la operación diferencia simétrica y demostrar algunas propiedades. La intención es que ganen confianza y construyan de manera abstracta esta operación que es más compleja. Gracias al carácter práctico de la actividad y al hecho que la teoría de conjuntos es un tema que han estudiado en cursos anteriores, se evidencia buena participación y aportes. Los estudiantes trabajan individualmente y de manera colaborativa en comunidades de práctica.

- **Materiales para utilizar:**

Tablero y marcadores de colores, libros de texto, en físico o electrónicos y guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad:**

Elementos teóricos. Se define la diferencia simétrica entre conjuntos, denotada por "$\triangle$" de la siguiente manera: $A \triangle B = \{x: x \in A \text{ ó } x \in B\}$.

Problemas y teoremas.

a. Demuestre que $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, y que, $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
b. Demuestre que la diferencia simétrica conmuta, es decir $A \triangle B = B \triangle A$.
c. Puede suceder que $A \cap B = B$. Dé un ejemplo en el cual sea válida esta igualdad. ¿Puede usted idear una condición necesaria y suficiente para que tal igualdad se cumpla? Justifique su respuesta.

4.2.3. Actividad 3. Relaciones de equivalencia

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes en el estudio de relaciones de equivalencia.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: Actividad programada para tres horas.

Insumos: En la clase se explica que este tipo de relaciones se definen entre los elementos de un conjunto arbitrario y que el objetivo fundamental es abstraer el concepto de igualdad (equivalencia). Estas relaciones permiten hacer una partición del conjunto en clases de equivalencia las cuales son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos y cuya unión reproduce el conjunto original, por lo que cada elemento del conjunto pertenece a una y sólo una de las clases. Se realizan diferentes ejemplos en los que se incluyen demostración de teoremas y solución de problemas, en los que se pide la participación de los docentes en formación

- **Finalidad y evaluación de la actividad.**

Se pretende introducir la relación de congruencia módulo m: destacar su importancia, sencillez y las múltiples aplicaciones en la matemática, particularmente en la teoría de números, ampliamente relacionada con el álgebra.

Los docentes en formación argumentan que las actividades (problemas y teoremas) sobre congruencia modular son interesantes y asequibles. El investigador considera que el lenguaje simbólico propio de este tipo de relaciones matemáticas les llama la atención, aunque todavía algunos les cuesta dificultad entender.

- **Materiales para utilizar:**

Libros de texto, en físico o electrónicos, tablero y marcadores de colores, la guía de la actividad que se envía al correo electrónico.

- **Desarrollo de la actividad:**

Elementos teóricos: Una relación binaria R definida en un conjunto A se dice que es de equivalencia cuando es reflexiva, simétrica y transitiva. Simbólicamente:

i. Para cada $a \in A, (a,a) \in R$

ii. Si $(a,b) \in R, entonces\ (b,a) \in R$

iii. Si $(a,b) \in R\ y\ (b,c) \in R, entonces\ (a,c) \in R$

La *clase de equivalencia* del elemento $a \in A$, es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto A que se relacionan con él. En símbolos:

$$[a] = \{x \in A: (a,x) \in R\} = \{x \in A: aRx\}$$

Si R es una relación de equivalencia definida en un conjunto A, el *conjunto cociente* es el formado por todas las clases de equivalencia y se denota A/R. Esto es:

$$A/R = \{[a]: a \in A\}$$

La relación de congruencia módulo m ("$\equiv\ mod(m)$"). La aritmética modular fue introducida en 1801 por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss en su libro Disquisitiones Arithmeticae y se formula de la siguiente manera: Si m es un entero positivo y a, b dos números enteros, a y b son congruentes entre sí módulo m, denotado $a \equiv b\ mod(m)$, si m divide la diferencia $a - b$. En símbolos:

$$a \equiv b\ mod(m) \leftrightarrow m|a - b.$$

A manera de ejemplo, $43 \equiv 22\ mod(7)$, ya que 7 divide a $43 - 22 = 21$.

Problemas y teoremas:

- Una relación de equivalencia R, definida en un conjunto A, induce una partición del conjunto. Esto es:

(i) $[a] \neq \emptyset, \forall a \in A$; (ii) $Si\ [a] \neq [b] \rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$; (iii) $\cup_{a \in A} [a] = A$.

- En el conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se define la relación $aRb \leftrightarrow a - b\ es\ múltiplo\ de\ 3$. Demuestre que esta relación es de equivalencia, halle sus diferentes clases y obtenga el conjunto cociente.

- La relación de congruencia módulo m es de equivalencia.

- Todo entero es congruente módulo m con un único elemento del conjunto $\{0, 1,2,3, \dots, m-1\}$.

4.2.4. Actividad 4. Operaciones binarias

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas sobre operaciones binarias.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se propone para ser desarrollada en 3 horas.

Insumos: Se expone a los participantes el significado de las operaciones binarias o leyes de composición interna (LCI) y se explica que son en esencia relaciones funcionales con las que ya han trabajado en cursos anteriores y que en el curso de estructuras algebraicas se llaman de esta forma, utilizando el lenguaje matemático adecuado a este nivel y que se estudian sus propiedades cuando al ser definidas en conjuntos abstractos. Se presentan ejemplos que incluyen resolución de problemas y demostración de proposiciones matemáticas.

- **Finalidad y evaluación de la actividad.**

Ampliar y refinar el conocimiento matemático de los docentes en formación al motivarlos a que analicen las relaciones entre los elementos de un conjunto abstracto cuando se define en él una operación y conducirlos al estudio de las estructuras algebraicas.

Los participantes acogen con agrado la actividad y manifiestan que se proponen situaciones nuevas e interesantes, las actividades son muy diferentes a los que habían trabajado antes en otros cursos de la carrera, porque incluyen mayor simbología y se tienen en cuenta las propiedades intrínsecas que definen cada operación. Les llama la atención un problema sobre el mínimo común múltiplo, destacan su particularidad ya que no encuentran problemas parecidos (para tomar como modelo) para resolverlo y que en consecuencia deben proponer el proceso de resolución. Se abre una discusión y se resuelve el ejercicio con la participación de los estudiantes.

- **Materiales para utilizar:**

Libros de texto, en físico o electrónicos, tablero y marcadores de colores y la guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad**

Elementos teóricos: Una operación binaria o ley de composición interna (LCI), " $*$ " definida en un conjunto no vacío G, es una función que asigna a cada par ordenado (x, y) de G otro elemento z de G, condición que es llamada clausura. En símbolos: $*(x, y) = x * y = z$. Son ejemplos de LCI la adición y producto de enteros. La división de enteros no es una LCI. En $\mathbb{R}$ la operación media aritmética es una LCI. Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, en $\wp(A)$ las operaciones de unión, intersección y diferencia simétrica son LCI. En el mismo conjunto $A \neq \emptyset$, la composición de biyecciones de A sobre sí mismo es una LCI.

Si "$*$" es una LCI en un conjunto A, la operación es **asociativa** si $\forall a, b, c \in A$, $(a * b) * c = a * (b * c)$. La misma LCI se dice que es **conmutativa** si $(a * b) = (b * a)$. Se llama **elemento neutro o idéntico** del conjunto A al elemento $e \in A$, tal que $\forall a \in A, a * e = a = e * a$. Si A tiene elemento neutro e y si para cada $a \in A$, es posible encontrar en A otro elemento a' tal que $a * a' = e = a' * a$, tal a' es llamado el **inverso** o simétrico de a y suele denotarse a^{-1}.

Problemas y teoremas:

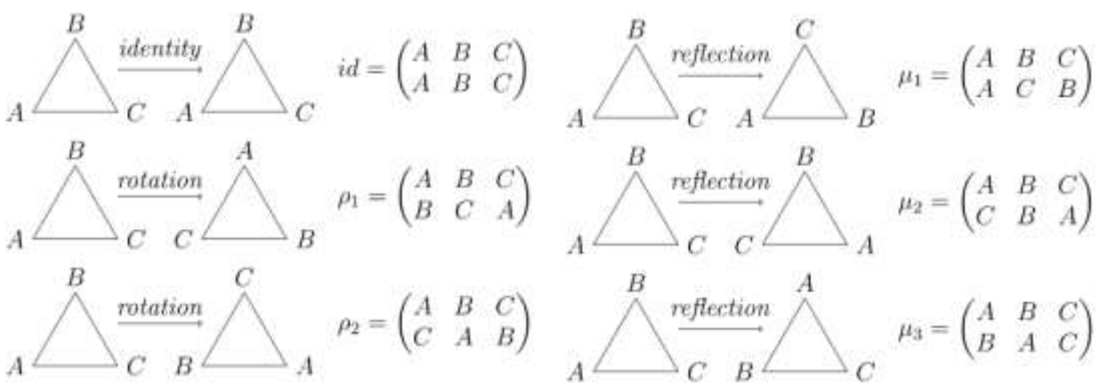
- Una LCI definida en un conjunto A admite a lo más un elemento neutro.
- Se llama elemento absorbente de un conjunto no vacío A, dotado de una LCI "$*$", al elemento $\alpha \in A$, tal que $\forall x \in A, x * \alpha = \alpha = \alpha * x$. Demuestre que una LCI admite a lo más un elemento absorbente.
- Sea $*: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, de la siguiente manera: para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $*(m, n) = m.c.m\,(m, n) = [m, n]$. ¿Es esta operación asociativa? ¿Cumple la conmutatividad? Halle el elemento neutro de la LCI y el elemento absorbente. ¿Qué elementos de $\mathbb{N}$ son invertibles y cuáles son sus respectivos inversos?
- Dados dos números reales x e y, Las siguientes son LCI válidas en $\mathbb{R}^+$: la media aritmética $m_a = \frac{x+y}{2}$; la media geométrica $m_g = \sqrt{x.y}$ y la media armónica $m_h = \frac{2xy}{x+y}$. Estudie las ecuaciones que definen estas operaciones binarias y concluya que $m_g^2 = m_a.m_h$ y que $m_h \leq m_g \leq m_a$.

4.2.5. Actividad 5. Grupos

- **Objetivo:** Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas sobre grupos.
- **Sugerencia metodológica:**

Duración: Tres horas.

Insumos: La actividad sobre operaciones binarias constituye un preconcepto esencial para introducir la estructura de Grupo. Se explica a los participantes que la teoría de los grupos es de gran importancia, no solo en las matemáticas en áreas como la geometría, el análisis y la topología, sino también en otras ciencias modernas, como la física, en ramas como la mecánica cuántica y la cristalografía, también en la química y en la biología.



$$id = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

Figura 4. Simetrías del triángulo equilátero[53]

El tema se introduce a partir del grupo de simetrías del triángulo equilátero y con los grupos $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$. También se les presentan casos de conjuntos en los que se definen operaciones binarias que, sin embargo, no son grupos. Se construye la tabla del grupo de simetrías del triángulo equilátero y se deja como tarea las simetrías del cuadrado y su tabla de composición.

[53] Tomada de: http://www.math.utk.edu/~cartwright/iaawa/section-sym.html

- **Finalidad y evaluación de la actividad.**

Motivar a los estudiantes por el estudio de estructuras abstractas y la generalización en matemáticas, oficio que difiere del trabajo algorítmico e instrumental que han llevado en cursos anteriores; también resaltar las importantes aplicaciones de la teoría de grupos en otros campos del conocimiento humano.

El trabajo con las tablas de Cayley fue bien acogido por los estudiantes y fueron aclaradas, por los demás compañeros participantes y el investigador, inquietudes sobre la composición de elementos y verificación de propiedades. Algunos estudiantes utilizan casos particulares y técnicas inductivas, como en un problema donde se pide demostrar que un grupo con un número par de elementos tiene uno de ellos, distinto del neutro, que es su propio inverso.

- **Materiales para utilizar:**

Material didáctico construido en madera para ilustrar las simetrías del triángulo equilátero y el cuadrado, tablero y marcadores de colores, libros de texto en físico o electrónicos y la guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad**

Elementos teóricos: Dado un conjunto G y una operación binaria " $*$ " que asigna a cada par ordenado (a,b) de elementos de G otro elemento en G denotado por $a * b$, se dice que $(G,*)$ es un grupo si se cumplen las siguientes tres propiedades o axiomas.

1. Asociatividad: para cada a, b, c en $G,\ (a * b) * c = a * (b * c)$

2. Identidad. Hay un elemento $e \in G$ tal que para cada $a \in G,\ a * e = a = e * a$. Este elemento $e \in G,$ es llamado neutro o idéntico.

3. Existencia de Inversos. Para cada elemento $a \in G,$ existe un único elemento $b \in G,$ tal que $a * b = e = b * a$. Tal $b \in G$ es llamado el inverso de a y suele representarse $b = a^{'}$.

Si un grupo $(G,*)$ tiene la propiedad de que $a * b = b * a$ para cada par de elementos a, b en G, el grupo es llamado abeliano en honor al matemático noruego Niels Abel (1802-1829).

El orden de un grupo G, denotado $|G|$, corresponde al número de elementos del conjunto G. Si este tiene ~~digamos~~ n elementos, se escribe $|G| = n$; si es infinito, se escribe $|G| = +\infty$. Por otro lado, si $a \in G$, el orden de a, denotado $o(a)$, es el menor entero positivo n, tal que $a^n = e$, donde e es el elemento idéntico de G. Si tal entero n no existe, se dice que el elemento a es de orden infinito y se escribe $o(a) = +\infty$.

<u>Operaciones definidas por tablas.</u> Una forma de representar una LCI definida en un conjunto no vacío y finito $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$ es mediante una tabla de la operación (ver tabla adjunta), que se construye de acuerdo con las siguientes reglas:

$*$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_n
a_1		$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
a_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_2 * a_4$			$\vdots$
a_3		$\vdots$					$\vdots$
a_4		$\vdots$					$\vdots$
a_5	$\cdots$	$a_5 * a_2$					$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
a_n	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_n * a_n$

Tabla 1. Esquema de una tabla de Cayley

- Los elementos del conjunto A se escriben en el mismo orden en la fila superior de izquierda a derecha y en la columna de la izquierda de arriba hacia abajo.
- En la esquina superior izquierda se escribe el símbolo de la operación.
- El resultado de operar dos elementos se coloca donde se intersecan la fila de la primera componente, con la columna de la segunda componente.

Si $(A,*)$ es finito, el procedimiento anterior permite definir la operación binaria en A en una tabla de composición, llamada *Tabla de Cayley*, nombrada así en honor al matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895).

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Tabla 2. Simetrías del triángulo equilátero

Problemas y teoremas:

- Demuestre o refute la siguiente proposición: Si $(G,*)$ es un grupo con un número par de elementos, existe un elemento distinto del neutro que es su propio inverso. ¿Qué pasa si el grupo $(G,*)$ tiene un número impar de elementos?
- Construya las tablas de Cayley para grupos de orden uno, dos tres y cuatro. Justifique que en los tres primeros casos sólo se obtiene una tabla de Cayley, mientras que si un grupo $(G,*)$ tiene cuatro elementos es posible construir cuatro tablas de composición. Concluya que las tablas obtenidas en todos los casos corresponden a grupos abelianos.

- Explique que, en el caso $|A| = 4$, las tablas obtenidas pueden resumirse en únicamente dos (2) tablas, dado que tres de ellas, aunque se ven diferentes, son estructuralmente idénticas (isomorfas). Observe que, en la tabla que es diferente a las otras tres, satisface:

$$\forall x \in A, x * x = x^2 = e,\ \ y, \forall x, y, z \in A, x * y = z.$$

Esta representa el llamado IV Grupo de Klein, denotado K_4, y nombrada así en honor al matemático alemán Félix Christian Klein (1849 - 1925).

- Sea $G = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$. Se define en G la operación " $*$" de la siguiente manera: para cada $a, b \in G, a * b = \frac{a+b}{1+ab}$. Concluya que la operación " $*$ " es una ley de composición interna en G y que $(G,*)$ tiene estructura de grupo abeliano.

4.2.6. Actividad 6. Subgrupos

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas sobre sugbrupos.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se propone para ser desarrollada en 3 horas.

Insumos: El principal es el concepto de grupo. Se hace claridad que dado un grupo $(G,*)$, un subgrupo es un subconjunto no vacío de G, digamos H, que cumple también los axiomas de grupo con la operación "$*$". Se toma el conjunto $R = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2,\}$ de las rotaciones de 0, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$ respectivamente del grupo de simetrías del triángulo equilátero $S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ y se explica analíticamente y por medio de una tabla de Cayley que este conjunto constituye un grupo con la operación de composición. Se muestra que $(S_{3,} *)$ tiene seis subgrupos distintos: el de las rotaciones R, $(\{\rho_0\},*)$, los correspondientes a las tres reflexiones $(\{\rho_0, \mu_1\},*)$, $(\{\rho_0, \mu_2\},*)$ y $(\{\rho_0, \mu_3\},*)$ y el mismo $(S_{3,} *)$, dado que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Un segundo ejemplo consistió en escoger tres subconjuntos de $\mathbb{Z}$: los pares, los impares y los primos y se les pide que determinen cuáles de estos, constituyen un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. Los participantes se convencen de que únicamente los números pares satisfacen los axiomas. Se afirma y comprueba que $(n\mathbb{Z}, +)$ es un subgrupo del grupo aditivo de los enteros, para todo $n \geq 1$.

- **Finalidad y evaluación de la actividad.**

Refinar y aplicar el concepto de grupo y sus propiedades para que construir el concepto de subgrupo. Explorar que dado un grupo G, los estudiantes infieran si algún subconjunto propio, digamos $H \subset G$, con la operación de G, es también un grupo. Se discute con los participantes que todos los subgrupos propios de S_3 son abelianos y sin embargo S_3 no lo es. Los estudiantes acogen las actividades propuestas, consideran que son prácticas las relacionadas con las tablas de Cayley. Las actividades propuestas las desarrollan inicialmente de manera individual y luego en comunidades de práctica, debido que requieren mayor abstracción y orden en los procesos lógico-deductivos de la solución. Al final se realiza la retroalimentación; el trabajo en comunidades de práctica pone en evidencia su efectividad.

- **Materiales para utilizar:**

Se retoma el material didáctico en madera para ilustrar las simetrías del triángulo equilátero; tablero y marcadores de colores, libros de texto en físico o electrónicos y la guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad**

Elementos teóricos: Si un subconjunto H de un grupo G es también un grupo con la operación de G, entonces H es llamado un subgrupo de G y se denota $H \leq G$. Si H es un subconjunto propio de G, se dice que H es un subgrupo propio de G y escribe $H < G$. Los subconjuntos {e} y G son llamados subgrupos triviales de G, si hay otros subgrupos, estos se denominan subgrupos no triviales de G.

En el grupo S_3 de las simetrías invariantes del triángulo equilátero, el conjunto $R = \{\rho_0, \rho_1, \rho_1\}$ de las rotaciones de 0, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$ respectivamente es un subgrupo. El grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$ tiene como subgrupo el conjunto de los pares $(2\mathbb{Z}, +)$ y en general puede probarse que $(n\mathbb{Z}, +)$ es subgrupo para cada entero positivo n.

<u>Subgrupo generado por un elemento de un grupo</u>: Si G es un grupo, dado $a \in G$, el conjunto $\{a^n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{a^n : a \in G \wedge n \in \mathbb{Z}\}$ es llamado el grupo generado por a, y se denota $\langle a \rangle$.

Problemas y teoremas:

- Demuestre el Criterio de Caracterización de Subgrupos: Si $(G,*)$ es un grupo y H un subconjunto no vacío de G, entonces H es un subgrupo de G si y sólo si, para cada $a, b \in H$, se cumple que $a * b^{-1} \in H$.
- Si G es un grupo y $g \in G$, entonces el conjunto $H = \{g^n : g \in G \wedge n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G, denotado $\langle g \rangle$ y llamado el subgrupo generado por g. Además,

este es el subgrupo más pequeño que contiene al elemento g, en el sentido de que si T es otro subgrupo de G y $g \in T$, entonces $\langle g \rangle \subseteq T$.

- Sea $(G,*)$ un grupo y para el cual $G = \{e, a, b. g, w, d\}$ donde e es el elemento neutro. Si $a * d = g,\ d * a = b,\ b * d = a,\ d * b = g,\ a * b = w,\ o(a) = 2,\ y,$ $o(d) = 3$. Se pide lo siguiente: Construya la tabla de Cayley y halle todos los subgrupos del grupo $(G,*)$. Compare la tabla del grupo $(G,*)$ con la del grupo $(S_3, \circ)$ de las simetrías invariantes del triángulo equilátero. ¿Qué similitudes encuentra en relación con los subgrupos? ¿Son estos dos grupos estructuralmente idénticos (isomorfos)?

4.2.7. Actividad 7. Grupos Cíclicos

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas sobre grupos cíclicos.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se propone para ser desarrollada en 3 horas.

Insumos: Para robustecer la comprensión del tema se hace un repaso sobre divisibilidad y el algoritmo de Euclides. Se explica a los estudiantes que 1 y -1 son generadores de $(\mathbb{Z}, +)$, es decir que cualquier número entero puede obtenerse a partir de composiciones sucesivas de estos dos elementos. Se recalca el hecho que 1 es el opuesto de -1 y recíprocamente. El grupo $(\mathbb{Z}, +)$ al cumplir esta propiedad es llamado Cíclico.

Se explica que ρ_1 y ρ_2, las rotaciones de $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$, son los generadores del subgrupo de las rotaciones del triángulo equilátero $R = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \}$ y que una es inversa de la otra. Se hace énfasis en que, a pesar de que R es un subgrupo cíclico de S_3, sin embargo $(S_3,*)$ no es cíclico, porque no es generado por ninguno de sus elementos. Para evaluar la comprensión del tema, se les pide a los participantes que den razones si el grupo multiplicativo de las raíces cuartas de la unidad $H = \{1, -1, i, -1\}$ y el grupo de Klein $K_4 = \{e, a, b, c\}$ son o no cíclicos.

- **Finalidad y evaluación de la actividad.**

Continuar profundizando (teorizando) sobre los grupos. En los teoremas y problemas de la actividad se pretende motivar al estudiante sobre el concepto de subgrupo generado por un elemento de un grupo, lo cual se fundamenta en la propiedad de clausura y el axioma de asociatividad de la operación del grupo. También se hace énfasis en que en los grupos cíclicos, debe tenerse en cuenta que, al ser generados por un único elemento facilita su estudio, pues cada elemento del grupo puede escribirse como una potencia del generador.

A los estudiantes les parece interesante el tema y resaltan sus aplicaciones. Se observa que algunos estudiantes tratan de resolver las actividades a partir de casos concretos y de representaciones gráficas. El investigador indaga sobre las respuestas que presentaron y retroalimenta las razones que ellos ofrecen, luego se hacen las aclaraciones necesarias y se orienta a los participantes sobre cómo debe ser la solución.

- **Materiales para utilizar:**

Tablero y marcadores de colores, libros de texto en físico o electrónicos y la guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad**

Elementos teóricos. Si G es un grupo, dado $a \in G$, el conjunto $\{a^n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{a^n : a \in G \ \wedge n \in \mathbb{Z}\}$ es llamado el grupo generado por a, y se denota $\langle a \rangle$.

Un grupo G es llamado cíclico si existe $a \in G$, tal que $G = \langle a \rangle$. A manera de ilustración, el grupo aditivo de los enteros es tal que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$. Además $\mathbb{Z}_m$ el grupo de las clases residuales módulo $m \in \mathbb{Z}^+$ es tal que, $\mathbb{Z}_m = \langle \hat{1} \rangle$, aunque en general, $\langle \hat{1} \rangle$ no necesariamente es el único generador de $\mathbb{Z}_m$, pues esto depende del entero positivo m, por ejemplo, en el caso de $\mathbb{Z}_6$ se tiene que $\mathbb{Z}_6 = \langle \hat{1} \rangle = \langle \hat{5} \rangle$.

Problemas y teoremas:

- Si G es un grupo y $x \in G$, entonces el conjunto $H = \{x^n : x \in G \ \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$ es un subgrupo de G.
- Sea G un grupo cíclico y $a \in G$, tal que $o(a) = n$. Si $a^m = e$, para algún entero m, entonces n divide a m.
- Un grupo cíclico con un solo generador tiene a lo más dos elementos.
- El grupo aditivo de los reales $(\mathbb{R}, +)$ no es cíclico.

4.2.8. Actividad 8. Clases laterales y grupos cociente

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas sobre clases laterales.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se planea para desarrollar en 3 horas.

Insumos: Los conceptos de subgrupo, relación de equivalencia y partición de un conjunto. Se retoma la relación de congruencia módulo $m \in \mathbb{Z}^+$ y la manera como ésta induce una partición de los números enteros.

Se retoman las tablas de Cayley de las simetrías del triángulo y se discute nuevamente con los participantes el concepto de subgrupo, además se ilustra el hecho que, el orden del subgrupo divide al orden del grupo. Se considera el subgrupo de las rotaciones $R = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2,\}$ y se presenta a los estudiantes la definición de las clases laterales derecha e izquierda y se hacen las correspondientes composiciones. Se trata de que ellos observen la partición que induce R en S_3.

La actividad se refuerza solicitando a los docentes en formación que deduzcan las clases laterales que induce el subgrupo $(\mu_1, \circ)$ de S_3 y que hagan otro tanto con el subgrupo $(3\mathbb{Z}, +)$ del grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$.

- **Finalidad y evaluación de la actividad:**

Mostrar la importancia de las clases laterales como una herramienta para realizar la partición de un grupo en subconjuntos disyuntos. También se quiere destacar la importancia del teorema de Lagrange de la teoría de grupos, según el cual, en cualquier grupo finito G, el número de elementos de cada subgrupo H de G divide el número de elementos de G. Como una aplicación, se coloca también un segundo problema “Todo grupo de orden primo es cíclico”, el cual es una consecuencia directa del Teorema de Lagrange.

Para favorecer el desarrollo de las actividades y su asimilación fue preciso el trabajo en comunidades de práctica y la discusión en la clase, dado que las actividades propuestas son resultados que requieren un tratamiento formal. En ocasiones fue necesario hacer aclaraciones e ilustrar con ejemplos concretos los resultados que se pedían resolver.

- **Materiales para utilizar:**

Libros de texto, en físico o electrónicos, tablero y marcadores de colores y la guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad**

Elementos teóricos. Si H es un subgrupo de un grupo G es posible definir las siguientes dos *relaciones de equivalencia* en G:

i. $a \equiv_i b(mód\ H) \leftrightarrow a^{-1}b \in H$, llamada relación de congruencia por la izquierda módulo H.

ii. $a \equiv_d b(mód\ H) \leftrightarrow ab^{-1} \in H$, llamada relación de congruencia por la derecha módulo H.

Una relación de equivalencia "$\sim$" definida en un conjunto A, induce una *partición* del conjunto en *clases de equivalencia*. El conjunto $[a] = \{b \in A: a \sim b\}$ es llamado la clase de equivalencia del elemento $a \in A$. El conjunto formado por las clases de equivalencia se llama el conjunto cociente y es denotado por $A/_{\sim}$. En el caso de la relación de congruencia por la izquierda módulo H, la clase de equivalencia de $a \in G$ es el conjunto:

$$[a] = \{b \in G: a \equiv_i b(módH)\} = \{b \in G: a^{-1}b \in H\}$$

$$= \{b \in G: a^{-1}b = h, h \in H\} = \{b \in G: b = ah, h \in H\}$$

Es decir, $[a]$ está formada por los elementos de la forma ah, para algún $h \in H$, es decir $[a] = aH = \{b \in G: b = ah, h \in H\}$. A este conjunto se le llama clase lateral izquierda de H en G inducida por a. Similarmente, el conjunto $Ha = \{ha: h \in H\}$ es a la clase lateral derecha de H en G inducida por a. El elemento $a \in G$ es llamado el representante de la clase lateral aH ($o\ Ha$ según sea el caso).

El número de clases laterales izquierdas o derechas distintas es llamado el índice de H en G y se denota $i(H,G) = [H:G]$. Si G es finito es válida la igualdad: $i(H:G) = [H:G] = \frac{|G|}{|H|}$, donde $|G|$ y $|H|$ representan respectivamente el orden de G y de H.

Como ejemplo, considere $G = \mathbb{Z}_6$ con la suma de clases y el subgrupo $H = \{0,2,4\}$. Las siguientes son las clases laterales izquierdas:

$$\begin{gathered}
0 + H = \{0+0, 0+2, 0+4\} = \{0,2,4\} = H \\
1 + H = \{1+0, 1+2, 1+4\} = \{1,3,5\} \\
2 + H = \{2+0, 2+2, 2+4\} = \{2,4,0\} = H \\
3 + H = \{3+0, 3+2, 3+4\} = \{3,5,1\} \\
4 + H = \{4+0, 4+2, 4+4\} = \{4,0,2\} = H \\
5 + H = \{5+0, 5+2, 5+4\} = \{5,1,3\}
\end{gathered}$$

Notamos que existen dos clases laterales izquierdas de H en $\mathbb{Z}_6$, que son: $\{0,2,4\} = H$ y $\{3,5,1\}$. Esto significa que el índice de H en G es 2, es decir:

$$i(H:G) = [H:G] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2.$$

Problemas y teoremas:

- Si es G un grupo finito y H un subgrupo de G, entonces el orden de H divide al orden de G. Este resultado es conocido como el Teorema de Lagrange.
- Todo grupo de orden primo es cíclico.
- En el grupo de simetrías del cuadrad o grupo diédrico D_4, sea R el grupo generado por r, la rotación de 90^o en sentido antihorario. Resuelva lo siguiente: (a) De un listado de las clases laterales izquierdas aR con $a \in D_4$. (b) Describa la

partición generada por las clases laterales izquierdas aR en D_4. ¿Puede usted dar una interpretación geométrica de ellas? (c) Verifique el teorema de Lagrange.

- Si H un subgrupo de un grupo finito G, ntonces cada clase lateral izquierda de H en G, tiene el mismo número de elementos que H.

4.2.9. Actividad 9. Homomorfismo de grupos

- **Objetivo:**

Analizar la argumentación escrita y verbal de los estudiantes cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas sobre homomorfismo de grupos.

- **Sugerencia metodológica:**

Duración: La actividad se propone para ser desarrollada en 3 horas.

Insumos: En relación con los preconceptos, es vital el concepto de función y su caracterización: funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Se inicia tomando en consideración las tablas de Cayley del grupo $\{1, -1\}$ con la multiplicación usual y del subgrupo $\{\mu_1, \rho_0\}$ de S_3 y se procede a establecer una relación funcional entre estos. Se realiza otro ejemplo con las clases residuales módulo 4 con la suma de clases $(\mathbb{Z}_4, +)$ y el grupo multiplicativo $\{1, i, -1, -i\}$ de las raíces cuartas de la unidad con el producto usual de números complejos. Se analiza que las tablas son idénticas en su estructura, la única diferencia son la operación y los elementos que componen los conjuntos. Explícitamente se puede observar la relación que existe entre la clase del $[0]$ con el número 1, la clase $[1]$ con la unidad imaginaria i, la de $[2]$ con -1 y la de $[3]$ con $-i$.

La intención es introducir el concepto de homomorfismo grupos, en este caso particular al tratarse de biyecciones, se trata de isomorfismos. De manera informal, si dos grupos G y H tienen la misma estructura, podremos esperar que sean del mismo tamaño. Esto de manera intuitiva nos puede llevar a pensar que es posible definir una biyección entre ellos. Esta idea intuitiva nos lleva a la construcción del concepto de isomorfismo.

- **Finalidad y evaluación de la actividad:**

Resaltar que es posible establecer relaciones funcionales entre grupos (homomorfismos), que preservan la estructura del grupo. En palabras de Falk (2013), *"Una forma de transportar la estructura de grupo es por medio de funciones especiales llamadas homomorfismos. En esencia los homomorfismos conservan operaciones y esto es suficiente para conservar la estructura."*[54]

Si $f:(G,\circ) \to (H,*)$ es un homomorfismo, al preservar la estructura de grupo, se asegura de que la imagen del grupo G bajo f es siempre un subgrupo del grupo H. En los ejemplos expuestos en la clase se deja claro que es posible establecer homomorfismos entre grupos distintos, por ejemplo, conjuntos G y H cuyos elementos son de naturaleza completamente diferente. Falk (2013) afirma que, "*el isomorfismo representa la formalización de la noción de modelo, en tanto que el homomorfismo representa la formalización de la noción de analogía o semejanza".*

Los estudiantes destacan el hecho de que dos grupos distintos, pueden ser estructuralmente idénticos. Al igual que en ocasiones anteriores, es necesario desarrollar varios ejemplos y establecer discusiones con el fin de retroalimentar y

[54] de Losada M. F. (2013). Corrientes de Pensamiento Matemático del siglo XX Segunda parte Fundamentación Mary Falk de Losada. (pp.34). Universidad Antonio Nariño. Panamericana formas e impresos S.A.

aclarar. El trabajo en comunidades de aprendizaje es fundamental para desarrollar la actividad.

- **Materiales para utilizar:**

Libros de texto, en físico o electrónicos, tablero y marcadores, guía de la actividad.

- **Desarrollo de la actividad**

Elementos teóricos. La palabra "homomorfismo" proviene del griego "homos", que significa "igual" y "morphe" que significa "forma", por lo que literalmente significa "misma forma". En lenguaje matemático, dados dos grupos $(G,\cdot)$ y $(G^{\prime},*)$, la función $f: G \rightarrow G^{\prime}$ es llamada un homomorfismo del grupo G en el grupo $G^{\prime}$, si y solamente si, f preserva las operaciones de ambos grupos. En símbolos,

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \text{ para cada } x, y \in G.$$

Si $f: G \rightarrow G^{\prime}$ es un homomorfismo, entonces: si $G' = G$ es llamado endomorfismo; si f es inyectiva, se llama monomorfismo; si f es sobreyectiva, se llama epimorfismo; si f es una biyección, se llama isomorfismo y se denota $G \cong G^{\prime}$. Si f es un isomorfismo de G en G, se le llama automorfismo. Algunos conceptos importantes sobre los homomorfismos se relacionan a continuación:

- Al conjunto de todos los homomorfismos de G en $G^{\prime}$ se denota por:

$$Hom\left(G, G^{\prime}\right) = \left\{f: G \rightarrow G^{\prime} \;/\; f \text{ } es\ un\ homomorfismo\right\}$$

Si $(G,\cdot)$ y $(G^{\prime},*)$, son dos grupos, e y $e_{G^{\prime}}$ son los elementos neutros de G y $G^{\prime}$, respectivamente y $f \in Hom(G, G^{\prime})$, se define el núcleo o kernel de f, denotado $N(f)$ o $Ker(f)$, se define de la siguiente manera:

$$Ker(f) = \{g \in G : f(g) = e_{G'}\}$$

El conjunto de imágenes de f, denotado $Im(f)$ está definido por:

$$Imf(f) = \{f(g) \in G' : g \in G\} = \{y \in G' : \exists x \in G \wedge y = f(x)\}$$

Problemas y teoremas:

- Si $f: G \to G'$ es un homomorfismo, entonces $Ker(f)$ es un subgrupo de G e $Imf(f)$ es un subgrupo de G'.
- La composición de isomorfismos es también un isomorfismo.
- Todo grupo cíclico finito de orden n es isomorfo al grupo de las clases residuales módulo n: $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$.
- Todo grupo cíclico infinito es isomorfo al grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$.

Conclusiones del capítulo 4

El *diseño y elaboración* de las actividades fueron el producto de un proceso reflexivo, a partir de la experiencia del docente investigador y de las sugerencias hechas por los expertos. Se tuvo en cuenta suficiente bibliografía de textos clásicos de álgebra abstracta de manera que cada actividad tuviera elementos teóricos básicos y posteriormente se propusiera a los estudiantes la demostración de uno o dos teoremas y un número igual de problemas de álgebra.

En cuanto a la *aplicación o implementación* de dos primeras actividades, los estudiantes se preocuparon únicamente por resolverlas para "cumplir con la tarea". La motivación ofrecida por el investigador, sobre la importancia de éstas para favorecer el pensamiento algebraico, lo mismo que el compromiso que tenían, de aportar a la solución (ellos debían luego exponer la solución en la clase), hizo que cambiara su actitud, a tal punto que se logra un progreso significativo en la manera en que asumen con responsabilidad y desarrollan las actividades.

En el subsecuente desarrollo de las actividades se observa que los estudiantes tanto al demostrar teoremas y resolver problemas analizan los enunciados y construyen representaciones a partir de sus preconceptos, hacen uso de sus intuiciones, procuraban descubrir patrones y después hacer conjeturas. Para tener certeza de la validez de los procesos, al principio utilizaron procedimientos empíricos (ensayo y error), que poco a poco se hicieron más refinados (analíticos), a tal punto que al final la lógica (que es un eslabón superior de razonamiento) constituyó un fundamento de certeza que les permitía estar seguros de que su argumento fuera correcto.

Finalmente, las estrategias metodológicas implementadas de las que fue importante la confianza, el escuchar a los participantes, la retroalimentación y el trabajo en comunidades de práctica a la manera de Wenger (1989) y el intercambio de roles permitió un avance significativo en la manera de razonar de los estudiantes, lo que tiene un impacto positivo en el desarrollo de su pensamiento algebraico.

CAPÍTULO 5. AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

5.1. Análisis de los resultados de los instrumentos implementados

Como se mencionó en el Capítulo IV, se implementaron dos encuestas semiestructuradas (ver Anexos) y nueve actividades relacionadas con los contenidos del curso de álgebra abstracta. Al final se aplicó a los estudiantes una encuesta de satisfacción (ver Anexos) para evaluar su percepción sobre el enfoque, diseño metodológico y la evaluación de las actividades desarrolladas en el curso. Las encuestas semiestructuradas se aplicaron a cinco docentes que orientan o han orientado cursos de estructuras algebraicas por tres o más años, cinco expertos en el área y a doce estudiantes que están tomando el curso. Sus puntos de vista se describen a continuación.

5.1.1. Análisis de las encuestas semiestructuradas

La primera encuesta tenía como fin identificar la percepción que tienen los estudiantes sobre la resolución de problemas y la demostración de teoremas y su concepción sobre el pensamiento algebraico; al final se les pregunta si consideran que existen diferencias entre resolver problemas y demostrar teoremas.

Resultados y análisis de la Encuesta Semiestructurada No. 1

Las primeras cuatro preguntas de la encuesta son tipo Likert, la quinta y séptima preguntas son de selección y la sexta y octava preguntas son abiertas. La escala Likert es la siguiente:

5	4	3	2	1
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

A continuación, se resume y discute los resultados de la aplicación del instrumento. Como ya se dijo, la encuesta se encuentra en la sección de anexos de la tesis.

Pregunta No 1. Todos los participantes: los docentes, estudiantes y expertos están de acuerdo en que, en los cursos preliminares del núcleo específico y que anteceden el curso de álgebra, de la Licenciatura en Matemáticas los estudiantes no desarrollan las competencias suficientes para resolver problemas y demostrar teoremas.

Pregunta No 2. El total de estudiantes y docentes afirman que se requiere incluir en el plan de estudios cursos sobre resolución de problemas. En cuanto a los expertos, uno de ellos (1 de 5) manifiesta que esta tarea puede desarrollarse de manera transversal.

Pregunta No 3. Todos los participantes corroboran que los estudiantes evidencian dificultades cuando se les pide a resolver problemas y demostrar teoremas.

Pregunta No 4. Los estudiantes, docentes y expertos están de acuerdo en que al proponer a los estudiantes demostrar teoremas y resolver problemas se favorece el desarrollo del pensamiento algebraico.

Pregunta No 5. En relación con los *esquemas de demostración* de teoremas propuestos por Harel & Sowder (2008), los estudiantes afirman que utilizan principalmente los de base externa y los empíricos; ninguno afirma utilizar esquemas analíticos o axiomáticos. Docentes y expertos ratifican esta afirmación y además manifiestan que son pocos los estudiantes que utilizan el último tipo de esquemas porque se requiere buena fundamentación matemática.

Pregunta No 6. Al preguntar a los participantes por las *dificultades* que observan en los estudiantes cuando se les pide que resuelvan problemas o demuestren teoremas de álgebra abstracta, los estudiantes consideran que se les dificulta el manejo lógico deductivo y la interpretación del lenguaje matemático, que ellos piensan principalmente en aplicar fórmulas o desarrollar algoritmos.

Los expertos opinan que encuentran en los estudiantes escasa capacidad para argumentar lo que escriben en los procesos de resolución. Que ven las matemáticas como un conjunto de técnicas y fórmulas, se fijan más en lo cuantitativo y que existe temor a la palabra “demostración”: se presenta un rechazo automático a situaciones donde se les pida demostrar o argumentar y que existe dificultad en establecer conexiones del álgebra abstracta con otras ramas de la matemática.

Por su parte los docentes consideran que las principales dificultades son: Utilizar definiciones y resultados matemáticos, generar esquemas mentales y modelos de representación, desconocimiento de estrategias, escasa comprensión de los métodos de demostración y que algunos dedican poco tiempo al estudio del álgebra.

Pregunta No 7. Al indagar a los estudiantes si encuentran *diferencias en la manera de razonar* cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas de álgebra abstracta, 8 de 12 afirma que sí (66.6%, este resultado se compara al final con los resultados de la encuesta de satisfacción). Al modo de ver del investigador, la respuesta se debe a que los participantes no comprenden la dimensión de la pregunta, que se refiere a si el esfuerzo metal involucrado en uno y otro caso son significativamente distintos o no. Posiblemente entendieron que se les preguntaba si un problema y un teorema es lo mismo.

Un docente (1 de 5, es decir 20%) también considera que los procesos mentales son diferentes. Su argumentación es la siguiente: "L*os objetos algebraicos son construcciones mentales abstractas y al razonar con ellos en una demostración, la mayoría de las veces no se tiene soportes fácticos lo que conlleva a esfuerzos mentales exigentes"*; el docente no hace alusión a la resolución de problemas.

También uno de los cinco expertos (20%) considera que hay diferencias y afirma: "*Los procesos lógicos del pensamiento, en esencia, son los mismos. Los esquemas de pensamiento tienen sustento sobre conceptos, juicios y razonamientos. Cuando se resuelven problemas, el alumno está en un ambiente más familiar, mientras que al demostrar teoremas influyen otros procesos como las creencias y concepciones… En los teoremas, se parte del hecho de que se pide demostrar un resultado que es verdadero y debe construirse la cadena de argumentos para la justificación. En los problemas, a pesar del uso de argumentos lógicos, la intuición juega un papel fundamental y se ponen en juego otros esquemas, se puede privilegiar el ensayo y error y el análisis de casos.* Se *puede presentar como problema la demostración de un teorema, sin decirle al estudiante y estudiar lo que ocurre, ya que, en últimas, se trata de un problema no rutinario"*.

El autor de la investigación observa que, precisamente, esto último que menciona el experto es lo que se propone en el sistema de actividades que se implementa en la tesis: colocar problemas y teoremas sin decirle al estudiante que es una u otra cosa. De todas maneras, el investigador considera que en la opinión ofrecida por el experto está implícita la idea de que tanto la demostración de teoremas como la resolución de problemas requieren de un significativo esfuerzo mental.

Pregunta No 8. En cuanto a las *estrategias* para favorecer la solución de problemas y la demostración de teoremas, las respuestas de los participantes (estudiantes, docentes y expertos) guardan estrecha relación. Se destacan las siguientes: uso de representaciones gráficas, estudio de casos particulares, considerar ejemplos concretos, proponer aplicaciones que motiven la necesidad intelectual de acercarse al tema. Consideran importante la implementación de material didáctico, incluyendo las TIC, contextualización de teoremas y problemas, trabajo colaborativo en el que todos los estudiantes participen. Proponen la motivación y apoyo por parte del profesor, gradualidad y dosificación de contenidos, problemas cuya solución no sea inmediata, pero que permita su abordaje, introducir citas históricas, enseñar a los estudiantes a ser persistentes, llevar al aula actividades que permitan la comprensión intuitiva y la utilidad de otros problemas y resultados matemáticos.

- **Análisis de la encuesta semiestructurada No. 2**

El objetivo es clasificar las opiniones de estudiantes, docentes y expertos sobre su percepción de la incidencia de factores epistemológicos, psicológicos y didácticos al demostrar teoremas y resolver problemas de álgebra abstracta. Cinco de las seis preguntas de la encuesta son abiertas y en ellas se comparan aspectos de cuando un individuo realiza estas tareas. La pregunta restante es de selección múltiple y se indaga a los participantes por el enfoque principal de los teoremas de álgebra abstracta (formales o teóricos, procedimentales o de carácter didáctico) en atención a lo expuesto por Hanna (1990).

A continuación, se resume y analizan los resultados de las respuestas obtenidas luego de la aplicación del instrumento.

Pregunta No 1. Todos los participantes consideran que la demostración matemática (DM) y la resolución de problemas (RP) son fundamentales para el estudio del álgebra abstracta porque favorecen el desarrollo del pensamiento matemático, a la vez que mejoran la confianza del individuo que aprende matemáticas.

En relación con la RP afirman que permite mostrar la aplicación de las matemáticas, que es un apoyo para la enseñanza y el aprendizaje, que favorece el desarrollo de estrategias heurísticas y la libertad de proponer y disponer argumentos que pueden estar por fuera de los parámetros de la intuición. En cuanto a la DM consideran que favorece el razonamiento lógico deductivo y le da solidez al pensamiento matemático.

Pregunta No 2. Al indagar sobre las condiciones que debe cumplir la demostración de un teorema para su validación y la solución de un problema para que estas sean aceptadas, se obtienen los siguientes resultados de los participantes:

DM: Que la tesis sea una consecuencia de la hipótesis, ligada a otros resultados matemáticos incluyendo axiomas, mediante una correcta argumentación lógica y aplicación de los métodos de demostración. En cuanto a la RP, se debe distinguir claramente entre los datos y las incógnitas, debe ejecutarse un plan de resolución coherente, buen uso de algoritmos para ejecutar el plan, que los argumentos que soportan el resultado deben ser razonables y no deben estar en contradicción.

Se resalta la respuesta de uno de los expertos, en relación con las *similitudes* que considera existen entre resolver problemas y demostrar teoremas de álgebra abstracta: *“Rigor, argumentación y formalización; reinterpretación y visualización del* *resultado: problema resuelto y teorema demostrado. En ambos casos también pueden evidenciarse errores en el razonamiento lógico-formal, así como en el rigor y empleo del simbolismo matemático, empleo incorrecto de las premisas, unas veces por exceso (supuesto de condiciones inexistentes), otras por defecto (desestimación de la información necesaria), otras por la malinterpretación o empleo incorrecto y negligente de la información".* Otro experto manifiesta que *"La validez de ambas tareas depende de que cada afirmación nueva se pueda deducir lógicamente de las anteriores. No importa si es una demostración o es un problema en general".*

Pregunta No 3. Todos los participantes consideran que cuando se demuestran teoremas y se resuelven problemas de álgebra no ocurren procesos únicamente cognitivos; están de acuerdo que intervienen factores psicológicos, emocionales, afectivos y las creencias sobre las matemáticas. En particular, los estudiantes afirman que cuando entienden lo que se les pregunta en un teorema o en un problema sienten satisfacción, autoestima, confianza y deseo de continuar. Ocurre lo contrario cuando no comprenden o cuando llegan a un punto donde ya no pueden continuar: inmediatamente tienen la sensación de frustración e impotencia.

Docentes y expertos consideran que en ocasiones los estudiantes manifiestan sentimientos de alegría, otras veces inseguridad, ansiedad o duda incluso de lo que saben o entienden. Observan que los factores psicológicos o emocionales se relacionan con la motivación, la perseverancia y el compromiso. Uno de los expertos manifiesta que *"Se trata de un proceso del pensamiento humano, que no puede verse desligado de lo actitudinal, lo afectivo y lo emocional. Las creencias y concepciones son parte constituyente del proceso de resolución de problemas y* *demostración de teoremas. Existen creencias que necesitan ser cambiadas, la mayoría relacionada con el papel del profesor y del alumno ante el saber matemático y su enseñanza-aprendizaje. Hay otras creencias e incluso concepciones más sutiles, relacionadas con la aprehensión del saber matemático, que pasan inadvertidas pues su control no constituye objeto de enseñanza ni de evaluación del aprendizaje".*

Pregunta No 4. Estudiantes, docentes y expertos coinciden en que los principales tipos de *representaciones* utilizadas por los estudiantes cuando resuelven problemas o demuestra teoremas son: dibujos, gráficos, tablas o esquemas que permitan algún tipo de simplificación, ejemplos y contraejemplos antes de iniciar un proceso riguroso de solución o demostración, analizar casos particulares para hacer claridad al inicio, durante o al final del proceso.

Un experto manifiesta que las siguientes estrategias son comunes: *"Ensayo-error de casos y variantes particulares o especiales, a fin de encontrar una idea para resolver problemas o demostrar teoremas, transferencia de experiencias vivenciadas en escenarios similares, como el empleo de un mismo método de demostración o de un mecanismo similar para la solución de un problema. Casos especiales son las reglas heurísticas de reducir un problema a otro ya resuelto, de considerar casos particulares, de dibujar un esquema o una figura de análisis, entre otras ideas descritas por Polya"*[55].

Uno de los docentes opina lo siguiente: *"Los problemas que se resuelven en un curso de álgebra requieren comprensión y uso de conceptos, para ello es importante*

[55] Criterios de expertos

que los estudiantes puedan inventar ejemplos que cumplen y que no cumplen con lo dado, esta puede ser una relación con la demostración de teoremas, se requiere comprender los conceptos y poder hacer uso de ellos, así como de teoremas previos o poder establecer contraejemplos. Sin duda en ambos casos es necesario escribir"[56].

Pregunta No 5. En consonancia con lo propuesto por Hanna (1990), en cuanto al enfoque principal que tienen los teoremas de álgebra abstracta, el 80% de los docentes y el 80% de los expertos consideran que son de tipo formal, que algunos cuantos pueden abordarse de manera procedimental o de manera didáctica. En general, docentes y expertos creen que esto se debe al carácter teórico del álgebra y, en consecuencia, que es difícil dar a todos los teoremas y problemas un enfoque didáctico. De hecho, uno de los docentes afirma que "*Hay problemas que por el nivel de abstracción que manejan es imposible un enfoque didáctico. En ese caso debe hacerse un ejemplo bien llevado para ilustrar el enunciado del teorema*". Manifiestan que en ocasiones omiten hacer demostraciones en la clase, para evitar dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje; que prefieren ilustrar los resultados matemáticos o en vez de resolver problemas, realizar ejemplos explícitos de aplicación.

Por su parte 7 de los 12 estudiantes (58.3%) cree que los teoremas presentados en el curso son de tipo formal, 3 de los 12 (25%) considera que son procedimentales y 2 de los 12 (16,7%) piensan que son de tipo didáctico. Están de acuerdo en que las soluciones de las actividades propuestas escapan del estilo algorítmico utilizado

[56] Criterios de epertos

para resolver tareas de otros cursos de matemáticas, que son más rigurosas y requieren y articular los conocimientos, lo cual les demanda mayor tiempo y esfuerzo mental. Que al principio tuvieron dificultades para resolver las actividades por el grado de abstracción que implicaban pero que, con la investigación que hacían, el trabajo en comunidades y el mejoramiento de las estrategias, fueron superando los obstáculos.

El investigador procura hacer la demostración los resultados que, según su criterio, son fundamentales en el curso. Durante las clases se introduce cada tema de manera tan intuitiva como sea posible para facilitar la comprensión y se interesa por agregar elementos didácticos y casos particulares para favorecer la generalización. Se realizan ejemplos ilustrativos y se fomenta la discusión en la clase. Está de acuerdo con lo planteado por Hanna (1990) en que la demostración matemática debe justificar y explicar porque el formalismo excesivo, ligado a procesos lógico-deductivos rigurosos, dificulta el proceso de enseñanza aprendizaje con los estudiantes. Las demostraciones y los procedimientos de solución con contenido didáctico favorecen la comprensión y en últimas direccionan los resultados matemáticos más importantes que deben aprender los estudiantes.

Pregunta No 6. Todos los participantes coinciden en que es posible involucrar a los estudiantes para mejorar los procesos de demostración y de resolución de problemas. En cuanto a las *estrategias*, los estudiantes mencionan las siguientes: hacer suficientes ejemplos, proponer teoremas y problemas que puedan ser abordados, dar participación, promover la exposición de temas, problemas y teoremas, fortalecer la discusión y la contextualización de resultados.

Los docentes que han orientado cursos de álgebra proponen que se debe empezar con problemas elementales, usar acertijos, juegos, curiosidades y elementos históricos. Como el álgebra es exigente, hay que tener en cuenta el tema que se persigue enseñar y formular estrategias que permitan llevarlo al alcance de los estudiantes (esto depende de la experiencia y pericia del docente). Unas buenas estrategias permitirán combinar, adaptar e inclusive fusionar apropiadamente abordajes formales, procedimentales y didácticos.

Según los expertos se requiere crear una visión de aprendizaje más allá de lo práctico, pero sin perder la rigurosidad y utilizar los preconceptos para comprender conceptos abstractos. Entre las estrategias proponen la motivación mediante la lectura libros de texto y publicaciones relacionadas, fortalecimiento de semilleros de investigación, apropiación a través de exposiciones de temas afines que involucren la escritura matemática, practicar con muchas demostraciones, muchos problemas y trabajo en equipo. En particular uno de los expertos afirma: *"Con la motivación es posible lograr avances. La primera estrategia es de naturaleza pedagógica y consiste en explorar los resortes que motivan al alumno por la profesión y diagnosticar con precisión sus fortalezas y debilidades presentes en la esfera cognitiva. Un alumno con aptitud puede requerir de una adecuada compensación afectivo-motivacional; otro con motivación profesional puede requerir de una compensación en su desarrollo cognitivo. Si hay carencias de ambas cosas, probablemente requiera de una reorientación en su formación profesional. Las estrategias de enseñanza son una mezcla adecuada de formas de construcción del conocimiento. Hay conceptos que ameritan un camino inductivo, a partir de ejemplos y luego una definición rigurosa, otros contenidos, pueden tratarse más* *rápidamente, de todas maneras, no puede dejarse de lado la importancia del currículo"*[57].

5.2. Validación de la metodología y del sistema de actividades

Desde el inicio, la investigación se convierte en un reto para el investigador debido a las creencias que tienen los estudiantes sobre la temática abstracta propia del curso; sumado a esto a la escasa experiencia que tienen en el manejo de las demostraciones y la resolución de problemas. Con el fin de ganar confianza con el grupo, el investigador explica la metodología que se va a implementar, la importancia de hacer parte de la investigación y lo positivo de los temas del curso para robustecer el conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento algebraico.

La implementación de los instrumentos se realiza semanalmente en el siguiente orden: la primera encuesta semiestructurada en la tercera semana del curso, después siguiendo el orden del micro diseño curricular (syllabus) se implementaron una a una las primeras cuatro primeras actividades. A continuación, la segunda encuesta semiestructurada y finalmente las cinco actividades restantes (Grupos, Subgrupos, Grupos Cíclicos, Clases Laterales y Homomorfismo de Grupos). Al final del semestre se aplica la encuesta de satisfacción.

Previo a la implementación de cada actividad el profesor orienta la clase utilizando apoyado con una pizarra y marcadores que los estudiantes pueden seguir a través de la plataforma Meet de Google, después explica a los participantes los objetivos del instrumento. Una vez implementada cada actividad, en la clase siguiente se

[57] Criterio de expertos

socializan y discuten las respuestas aportadas por los estudiantes con el fin de hacer la respectiva retroalimentación.

5.3. Análisis de los resultados del sistema de actividades para indagar si existen relaciones entre demostrar teoremas y resolver de problemas

5.3.1. Análisis de la Actividad 1: Métodos de Demostración

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Con las debidas recomendaciones los estudiantes asumen con disposición esta primera actividad.

Motivación por el aprendizaje. A los docentes en formación se le invita al estudio de la solución de problemas y la demostración de proposiciones matemáticas. El investigador expone la metodología que se piensa implementar en las sesiones de clase y les recuerda que durante el curso se desarrollará una investigación en la que la participación de ellos será importante, además que el trabajo se desarrollará tanto individualmente como en comunidades de práctica (o aprendizaje).

Logros. Luego de socializar y discutir las soluciones aportadas a las actividades didácticas, los participantes logran una mayor comprensión de los métodos de demostración y la resolución de problemas. A continuación, se presentan algunas soluciones de los estudiantes:

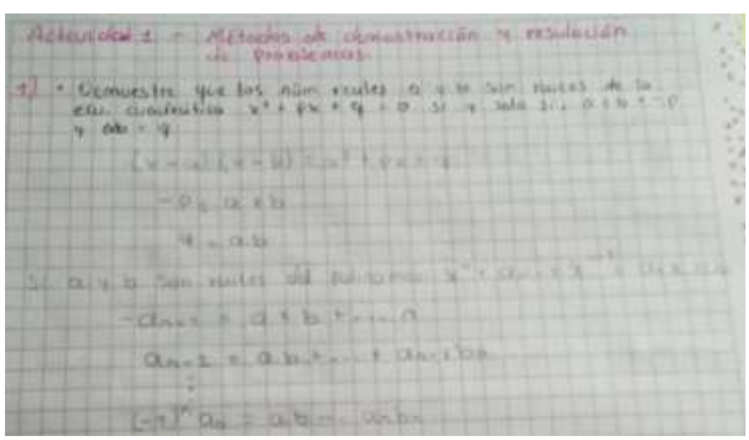
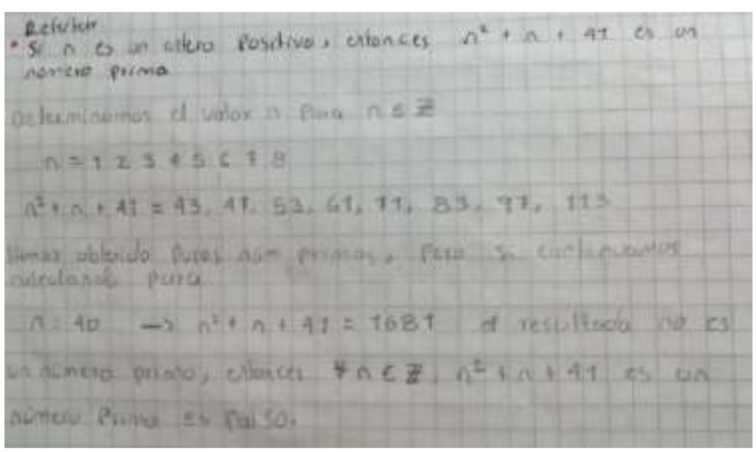


Figura 5. Esquema de demostración de convicción externa[58]

En esta solución se observa que, en la primera parte, sin ofrecer detalles el estudiante demuestra la suficiencia de la proposición $(p \rightarrow q)$. La segunda parte no conduce a ninguna conclusión coherente que pruebe la necesidad $(q \rightarrow p)$. Al indagar al estudiante sobre su respuesta, manifiesta que él escribe lo que entiende del ejercicio; que recibió apoyo de sus compañeros y de lo que lo entendió en una consulta que realizó. Que lo importante es entregar la actividad resuelta para no sacar mala nota.

La solución corresponde el esquema de convicción externa, propuesto por Harel & Sowder (1988), según la cual el individuo se convence por lo observado en libros o por lo que les asegura otra persona al que creen sus argumentos. Otras respuestas encontradas corresponden con el esquema simbólico, en el cual los estudiantes manipulan símbolos matemáticos, sin entender bien su significado. La intención es convencer de que sus argumentos son correctos.

La solución propuesta por el mismo estudiante a un problema de la actividad se muestra a continuación:

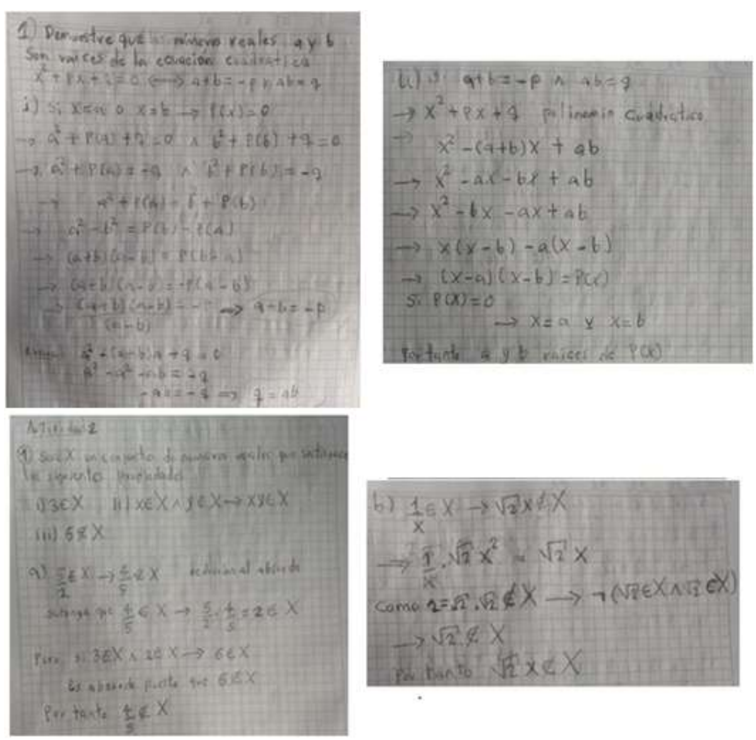


58 Por un estudiante que hace parte de la investigación.

Figura 6. Esquema de demostración empírico[59]

La explicación que da el estudiante es la siguiente: en los cursos que ya había visto del plan de estudios (Precálculo, Cálculo Diferencial, Álgebra Lineal, Geometría Euclidiana) no se trabaja este tipo de problemas y tampoco les ha tocado hacer demostraciones. Que el profesor explica la teoría y presenta (sin demostrar) algunos resultados importantes y sigue la ejercitación, donde soluciona ejemplos."

La solución que ofrece el estudiante está en concordancia con los esquemas de demostración empíricos propuestos por Harel & Sowder (1988): demostraciones inductivas sustentadas en sus percepciones sensoriales, conocimientos previos, sustituir en fórmulas matemáticas o en la observación de patrones que le permite muchos ejemplos. En la figura siguiente se ofrece la demostración de un teorema y abajo la solución de un problema por parte de otro estudiante:



[59] Por un estudiante que hace parte de la investigación.

Figura 7. Esquema de demostración analítica[60]

El investigador destaca que hay bastante coherencia matemática en la solución. Pueden observarse algunas limitaciones en la escritura, sin embargo, se entiende lo que quiere expresar y se percibe un mayor dominio conceptual. Cuando se le indaga al estudiante sobre sus argumentos es capaz de explicar, además que es consciente de que los resultados matemáticos están soportados por argumentos lógico-deductivos.

El procedimiento encaja en los esquemas de demostración analíticos de Harel & Sowder (1988): se utiliza la deducción lógica para validar conjeturas. El investigador considera que es de tipo transformacional (no axiomáticos), ya el estudiante realiza un proceso deductivo de generalización en los que sus operaciones mentales están orientadas a objetivos definidos.

Dificultades. Se perciben debilidades en los conocimientos previos (preconceptos): algunos manifiestan que es la primera vez que demuestran teoremas y resuelven problemas de este tipo; se encuentra dificultades para trabajar en comunidades de práctica por la manera remota en que deben realizarse los encuentros y las fallas en la conexión a internet o la carencia de equipos de computación adecuados.

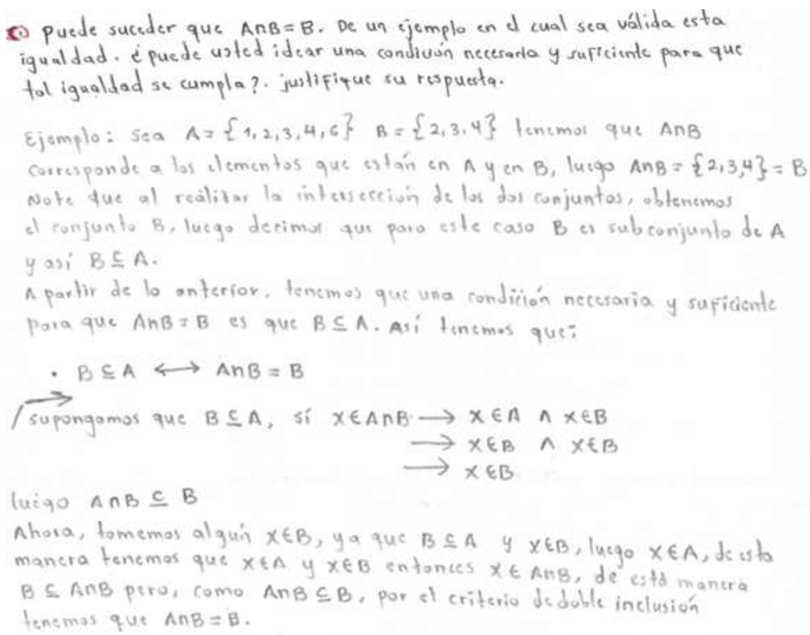
5.3.2. Análisis de la Actividad 2. Conjuntos y Operaciones

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Se observa mayor interés por participar. La socialización de las respuestas de esta segunda actividad tiene gran acogida. El investigador aclara las dudas que surgen en los participantes, utilizando un abordaje sencillo y procurando un manejo didáctico.

[60] Propuesta por un estudiante en la Actividad 1.

Motivación por el aprendizaje. El investigador alienta a los participantes de la importancia del estudio de los conjuntos y sus propiedades; sumado a esto que se trata de un tema que ya han estudiado antes y que en el curso de álgebra se profundizará un poco y se justificarán los resultados más importantes. El investigador les recuerda la importancia de desarrollar las actividades tanto de manera individual y de discutir en las comunidades de práctica.

Logros. Se nota mayor comprensión de lo que se propone en la actividad. Los estudiantes logran mayor independencia para trabajar de manera individual y también empiezan a hacerlo en comunidades de aprendizaje. El apoyo del docente es fundamental. Una de las soluciones aportadas por un estudiante es la siguiente:


(c) Puede suceder que $A \cap B = B$. De un ejemplo en el cual sea válida esta igualdad. ¿puede usted idear una condición necesaria y suficiente para que tal igualdad se cumpla?. justifique su respuesta.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4\}$ tenemos que $A \cap B$ Corresponde a los elementos que están en A y en B, luego $A \cap B = \{2, 3, 4\} = B$. Note que al realizar la intersección de los dos conjuntos, obtenemos el conjunto B, luego decimos que para este caso B es subconjunto de A y así $B \subseteq A$.

A partir de lo anterior, tenemos que una condición necesaria y suficiente para que $A \cap B = B$ es que $B \subseteq A$. Así tenemos que:

- $B \subseteq A \longleftrightarrow A \cap B = B$

$\overrightarrow{}$ / supongamos que $B \subseteq A$, sí $x \in A \cap B \longrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\longrightarrow x \in B \wedge x \in B$

$\longrightarrow x \in B$

luego $A \cap B \subseteq B$

Ahora, tomemos algún $x \in B$, ya que $B \subseteq A$ y $x \in B$, luego $x \in A$, de esta manera tenemos que $x \in A$ y $x \in B$ entonces $x \in A \cap B$, de está manera $B \subseteq A \cap B$ pero, como $A \cap B \subseteq B$, por el criterio de doble inclusión tenemos que $A \cap B = B$.

Figura 8. Demostración de un problema de la Actividad 2[61]

[61] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

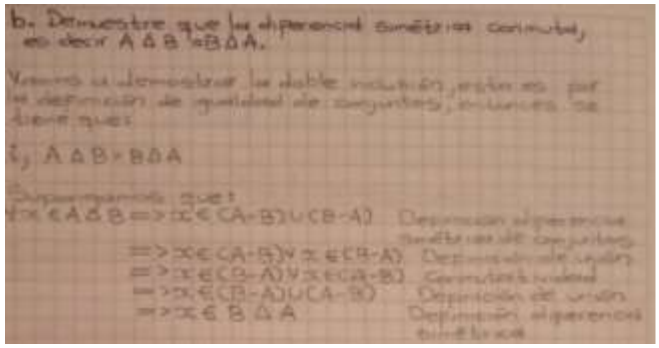


Figura 9. Demostración una proposición de la Actividad 2[62]

En ambos procesos se observa una escritura más ordenada y coherente. El investigador considera que en buena medida se debe a que a los estudiantes les llama la atención la clase, se sienten más comprometidos y revisan el material complementario que recomienda el docente.

Dificultades. Aún con el trabajo remoto, aunque esto se va subsanando por el creciente compromiso de los participantes. Desarrollar la actividad extra-clase, les permite a los estudiantes tener más tiempo para reflexionar e indagar. Esto incluye hacer búsquedas más detalladas en textos en físico o en internet, y un mejor trabajo en comunidades de aprendizaje.

5.3.3. Análisis de la Actividad 3. Relaciones de Equivalencia

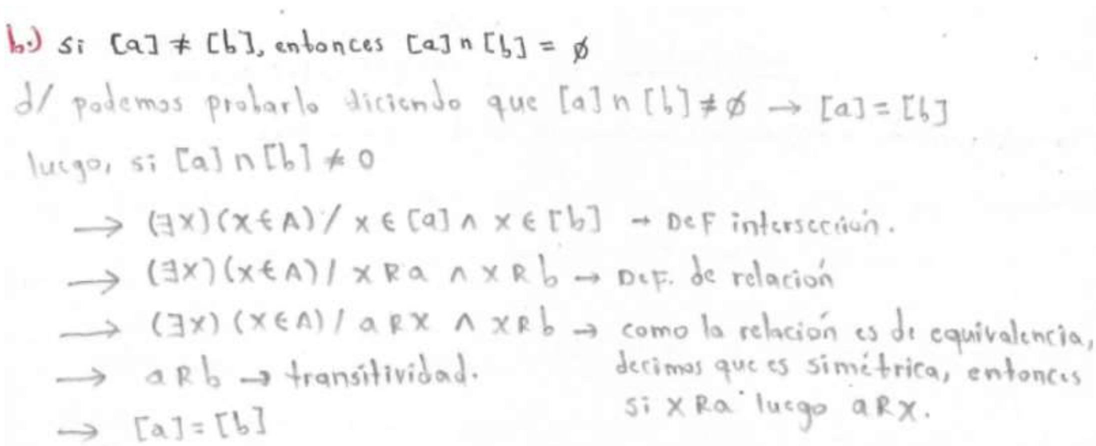
Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. El compromiso de los estudiantes es cada vez mayor y la apropiación de contenidos, el interés y la participación mejoran.

Motivación por el aprendizaje. El investigador explica a los estudiantes que este tipo de relaciones permiten clasificar los elementos de un conjunto dado de acuerdo con algunas propiedades especiales. Se mantiene el abordaje intuitivo de los temas,

[62] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

implementando estrategias didácticas y alentándolos a trabajar en comunidades de aprendizaje.

Logros. Mayor comprensión de las actividades, los estudiantes son más independientes para el trabajo individual y en comunidades de aprendizaje. Se les



b.) Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$

d/ podemos probarlo diciendo que $[a] \cap [b] \neq \emptyset \to [a] = [b]$

luego, si $[a] \cap [b] \neq 0$

$\longrightarrow (\exists x)(x \in A) / x \in [a] \wedge x \in [b] \to$ Def intersección.

$\longrightarrow (\exists x)(x \in A) / x R a \wedge x R b \to$ Def. de relación

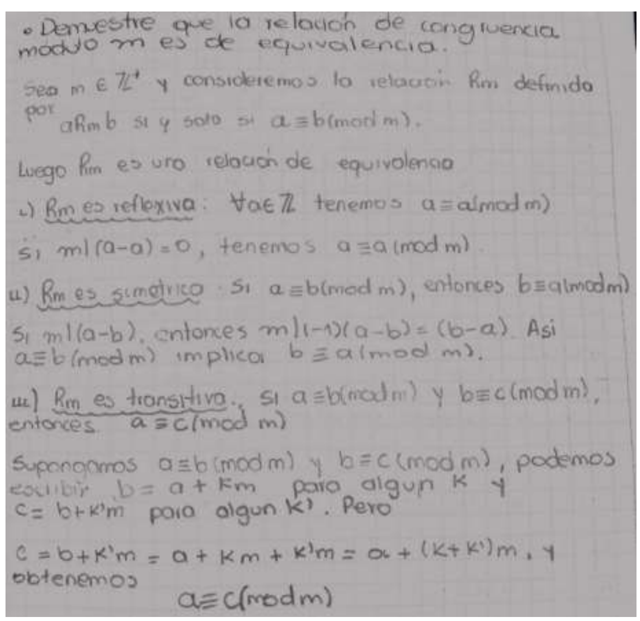
$\longrightarrow (\exists x)(x \in A) / a R x \wedge x R b \to$ como la relación es de equivalencia, decimos que es simétrica, entonces si $x R a$ luego $a R x$.

$\longrightarrow a R b \to$ transitividad.

$\longrightarrow [a] = [b]$

mayor confianza cuando se socializa y discuten las soluciones. A continuación, algunas de las respuestas aportadas por los estudiantes:

Figura 10. Demostración de un teorema de la Actividad 3[63]



• Demuestre que la relación de congruencia modulo m es de equivalencia.

Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ y consideremos la relación R_m definida por $a R_m b$ si y solo si $a \equiv b (mod\ m)$.

Luego R_m es una relación de equivalencia

i) R_m es reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$ tenemos $a \equiv a (mod\ m)$

Si $m | (a-a) = 0$, tenemos $a \equiv a (mod\ m)$.

ii) R_m es simetrico. Si $a \equiv b (mod\ m)$, entonces $b \equiv a (mod\ m)$

Si $m | (a-b)$, entonces $m | (-1)(a-b) = (b-a)$. Asi $a \equiv b (mod\ m)$ implica $b \equiv a (mod\ m)$.

iii) R_m es transitiva. Si $a \equiv b (mod\ m)$ y $b \equiv c (mod\ m)$, entonces $a \equiv c (mod\ m)$

Supongamos $a \equiv b (mod\ m)$ y $b \equiv c (mod\ m)$, podemos escribir $b = a + Km$ para algun K y $c = b + K'm$ para algun K'. Pero

$c = b + K'm = a + Km + K'm = a + (K+K')m$, y obtenemos

$a \equiv c (mod\ m)$

[63] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

Figura 11. Demostración de una proposición de la Actividad 3[64]

En ambos procesos es notable el orden, la justificación de los pasos y la coherencia en la argumentación. Esto se debe a que los estudiantes se interesan cada vez más por aprender, investigar por cuenta propia y revisar el material complementario que les comparte el investigador.

Dificultades. Han disminuido notablemente. Los estudiantes aportan notablemente al desarrollo de las actividades y ven con agrado lo que se estudia en el curso.

5.3.4. Análisis de la Actividad 4. Operaciones Binarias

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Desde que se presenta el tema en la clase, los participantes muestran interés por la teoría y las aplicaciones. Algunos opinan que en otros cursos como teoría de números han trabajado con operaciones binarias, pero que es en el curso de estructuras algebraicas que se les hace una presentación teórica.

Motivación por el aprendizaje. Se expone a los docentes en formación la importancia de las operaciones binarias. Este tipo de composiciones es simplemente una regla para combinar dos elementos de un conjunto, con lo cual se obtiene otro elemento del conjunto; se enfatiza en que con las operaciones binarias definidas en un conjunto abstracto se puede formar un sistema algebraico en el que, a partir de una axiomática se pueden definir “estructuras”. También se les indica que ellos antes han trabajado con operaciones binarias como la suma y multiplicación de enteros. Se continúa motivando la investigación y el trabajo tanto individual como en comunidades de práctica.

[64] Propuesta aportada por un estudiante que hace parte de la investigación.

Logros. Los estudiantes continúan avanzando en el desarrollo de su pensamiento algebraico, muestra de ello la forma en que resuelven la actividad. Hay independencia en la forma de trabajar y sus aportes en la solución de los problemas y la demostración de teoremas matemáticas es mayor. Esto es ideal por cuanto tendrán mayor capacidad para juzgar si existen diferencias significativas en la forma de razonar cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas.

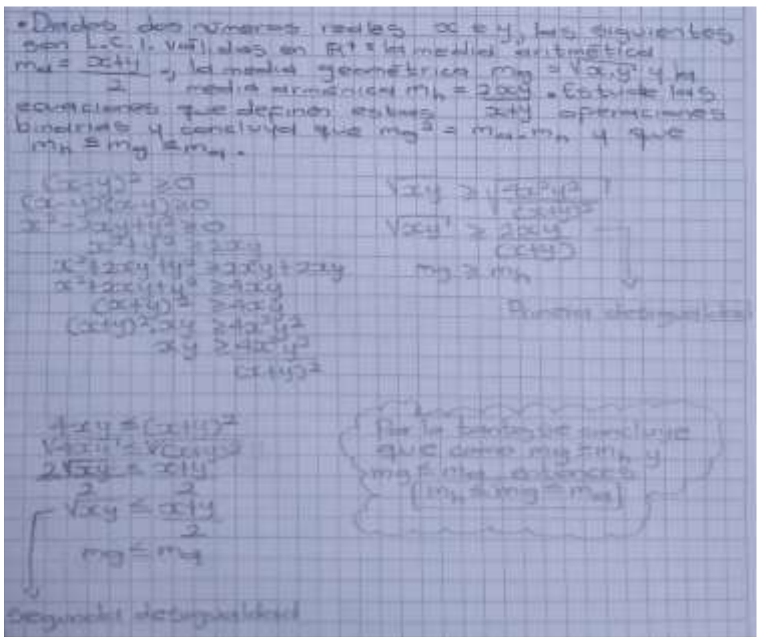


Figura 12. Demostración de una proposición de la Actividad 4[65]

Dificultades. Prácticamente han desaparecido: cada miembro del grupo es independiente en su trabajo y se han superado los problemas de conexión a internet y las necesidades con equipos de cómputo para asistir a los encuentros remotos.

5.3.5 Análisis de la Actividad 5. Grupos

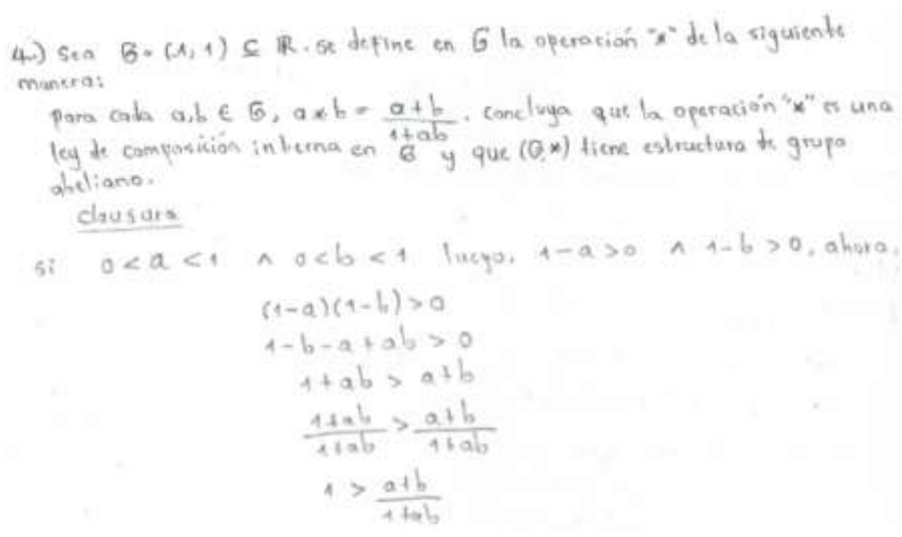
Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Alto cumplimiento y participación; la actividad tiene buena acogida: el tema sobre grupos

[65] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

les interesa porque se da continuidad a la actividad anterior sobre operaciones binarias y únicamente se agregaron los axiomas de asociatividad, elemento neutro y existencia de inversos para conseguir esta estructura algebraica.

Motivación por el aprendizaje. Se retomó el tema de las operaciones binarias y su importancia para introducir el nuevo tema sobre la estructura de grupo, se explicó las simetrías invariantes del triángulo equilátero, tanto las reflexiones como las rotaciones y a partir de esto las diferentes composiciones que pueden realizarse. Se concluyó que, en álgebra abstracta, un grupo es un conjunto no vacío en el que se define una operación binaria que satisface cuatro axiomas: clausura, asociatividad, identidad e invertibilidad.

Logros. Los estudiantes continúan progresando en la construcción de su pensamiento algebraico. Hay buena participación en el desarrollo de las actividades didácticas, el compromiso con el puede decirse que es total.


4.) Sea $G = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$. se define en G la operación "$*$" de la siguiente manera:

para cada $a, b \in G$, $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$. concluya que la operación "$*$" es una ley de composición interna en G y que $(G, *)$ tiene estructura de grupo abeliano.

clausura

si $0 < a < 1 \wedge 0 < b < 1$ luego, $1 - a > 0 \wedge 1 - b > 0$, ahora,

$$(1-a)(1-b) > 0$$
$$1 - b - a + ab > 0$$
$$1 + ab > a + b$$
$$\frac{1+ab}{1+ab} > \frac{a+b}{1+ab}$$
$$1 > \frac{a+b}{1+ab}$$

Figura 13. Solución de un problema de la Actividad 4[66]

[66] Aportada por un estudiante que hace parte de la investigación.

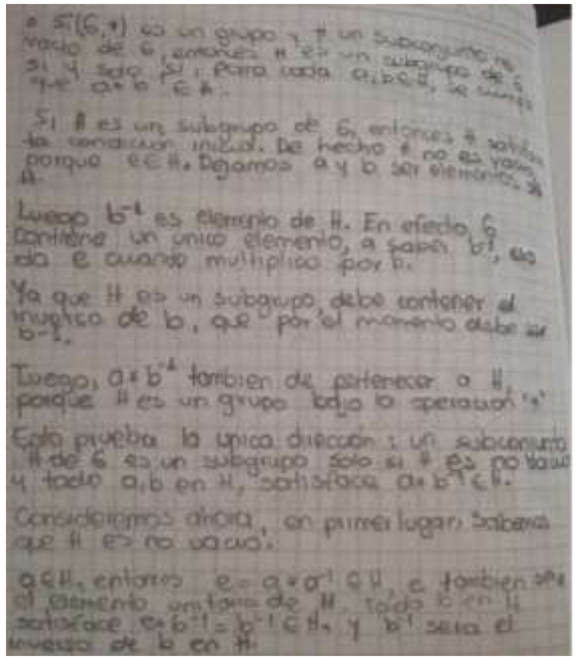
Dificultades. Por los alcances en la solución de las actividades, las dificultades iniciales prácticamente han desaparecido. Los docentes están por convicción y decididos a continuar en el proceso investigativo.

5.3.6 Análisis de la Actividad 6. Subgrupos

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Se evidencia total interés por la temática que se va a desarrollar.

Motivación por el aprendizaje. A los docentes en formación les llama la atención la idea que dado un grupo sea posible que algunos de sus subconjuntos que también tengan la estructura de grupo con la misma operación binaria. Sus aportes y opiniones favorecen el desarrollo de las actividades, manifiestan que se apoyan entre sí y aclaran dudas en encuentros virtuales que organizan. A continuación, algunas soluciones aportadas:

Logros. El avance de los estudiantes es progresivo, ahora son propositivos y captan con facilidad los conceptos que se estudian. Abordan las actividades (problemas y teoremas) con mayor decisión y evidencian más claridad para resolverlas.



Si (G,*) es un grupo y H un subconjunto no vacío de G, entonces H es un subgrupo de G si y solo si, para cada a,b∈H, se cumple que a*b⁻¹ ∈ H.

Si H es un subgrupo de G, entonces H satisface la condición inicial. De hecho H no es vacío porque e∈H. Dejamos a y b ser elementos de H.

Luego b⁻¹ es elemento de H. En efecto G contiene un único elemento, a saber b⁻¹, que da e cuando multiplico por b.

Ya que H es un subgrupo, debe contener el inverso de b, que por el momento debe ser b⁻¹.

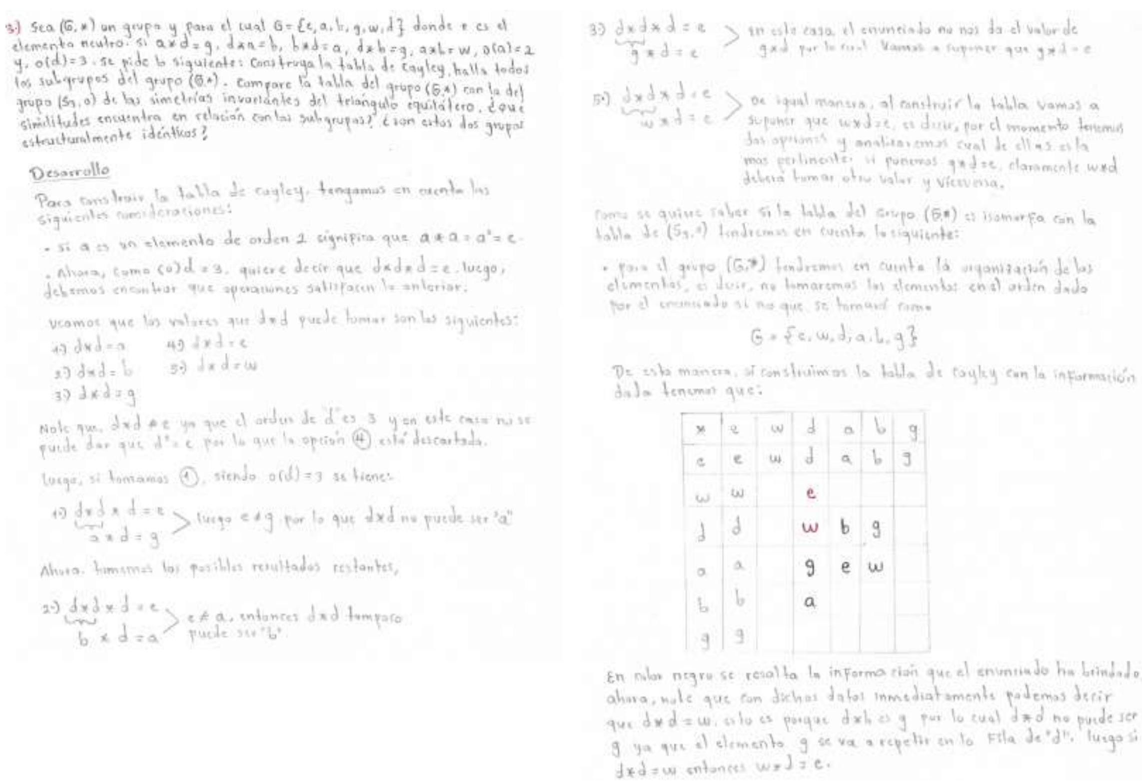
Luego, a*b⁻¹ también debe pertenecer a H, porque H es un grupo bajo la operación "*".

Esto prueba la única dirección: un subconjunto H de G es un subgrupo solo si H es no vacío y todo a,b en H, satisface a*b⁻¹∈H.

Consideremos ahora, en primer lugar sabemos que H es no vacío.

a∈H, entonces e = a*a⁻¹ ∈ H, e también es el elemento unitario de H, todo b en H satisface e*b⁻¹ = b⁻¹ ∈ H, y b⁻¹ será el inverso de b en H.

Figura 14. Demostración del teorema de caracterización de Subgrupos[67]



3.) Sea (G,*) un grupo y para el cual G={e,a,b,g,w,d} donde e es el elemento neutro. Si a*d=g, d*a=b, b*d=a, d*b=g, a*b=w, o(a)=2 y o(d)=3. Se pide lo siguiente: Construya la tabla de Cayley, halle todos los subgrupos del grupo (G,*). Compare la tabla del grupo (G,*) con la del grupo (S₃,∘) de las simetrías invariantes del triángulo equilátero. ¿Qué similitudes encuentra en relación con los subgrupos? ¿Son estos dos grupos estructuralmente idénticos?

Desarrollo

Para construir la tabla de Cayley, tengamos en cuenta las siguientes consideraciones:

- Si a es un elemento de orden 2 significa que a*a = a² = e.
- Ahora, como o(d) = 3, quiere decir que d*d*d = e, luego, debemos encontrar qué operaciones satisfacen lo anterior.

Vemos que los valores que d*d puede tomar son los siguientes:

1.) d*d = a 4.) d*d = e
2.) d*d = b 5.) d*d = w
3.) d*d = g

Note que, d*d ≠ e ya que el orden de "d" es 3 y en este caso no se puede dar que d² = e por lo que la opción 4 está descartada.

Luego, si tomamos 1, siendo o(d)=3 se tiene:

1.) d*d*d = e, a*d = g > luego e ≠ g por lo que d*d no puede ser "a"

Ahora, tomemos los posibles resultados restantes,

2.) d*d*d = e, b*d = a > e ≠ a, entonces d*d tampoco puede ser "b".

3.) d*d*d = e, g*d = e > En este caso el enunciado no nos da el valor de g*d por lo cual vamos a suponer que g*d = e

5.) d*d*d = e, w*d = e > De igual manera, al construir la tabla vamos a suponer que w*d=e, es decir, por el momento tenemos dos opciones y analizaremos cuál de ellas es la más pertinente. Si ponemos g*d=e, claramente w*d deberá tomar otro valor y viceversa.

Como se quiere saber si la tabla del grupo (G,*) es isomorfa con la tabla de (S₃,∘) tendremos en cuenta lo siguiente:

- Para el grupo (G,*) tendremos en cuenta la organización de los elementos, es decir, no tomaremos los elementos en el orden dado por el enunciado si no que se tomará como

G = {e, w, d, a, b, g}

De esta manera, si construimos la tabla de Cayley con la información dada tenemos que:

*	e	w	d	a	b	g
e	e	w	d	a	b	g
w	w		e			
d	d		w	b	g	
a	a		g	e	w	
b	b		a			
g	g					

En color negro se resalta la información que el enunciado ha brindado, ahora, note que con dichos datos inmediatamente podemos decir que d*d = w, esto es porque d*b es g por lo cual d*d no puede ser g ya que el elemento g se va a repetir en la Fila de "d". Luego si d*d = w entonces w*d = e.

Figura 15. Solución a un problema sobre subgrupos[68]

[67] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.
[68] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

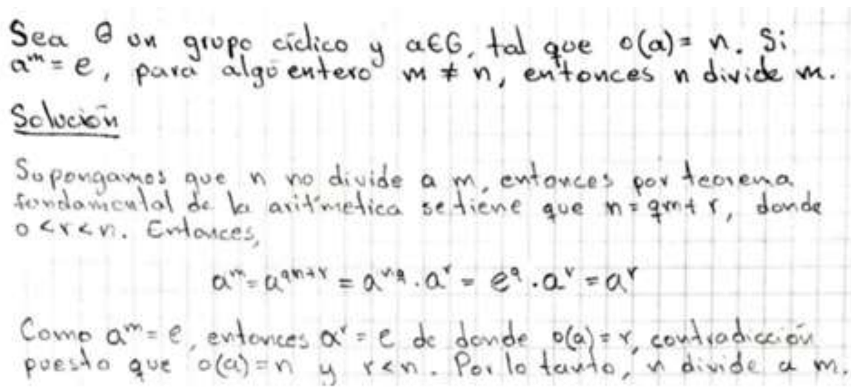
Dificultades. Son escasas. Al menos 10 de los 12 estudiantes trabajan de manera autónoma. Los que requieren apoyo, revisan los videos de la clase, se reúnen virtualmente con sus compañeros en comunidades de práctica; en ocasiones preguntan al docente investigador.

5.3.7 Análisis de la Actividad 7. Grupos Cíclicos

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. El trabajo con el grupo es agradable. Hay buena participación y aportes interesantes. Los estudiantes muestran seguridad en sus opiniones y argumentan sus opiniones.

Motivación por el aprendizaje. Los docentes manifiestan que les resulta interesante estudiar y comprender que algunos grupos pueden ser generados por al menos uno de sus elementos. De manera autónoma reconocen la importancia de consultar en diferentes fuentes y de trabajar en comunidades de aprendizaje.

Logros. Avances notorios en la abstracción y en la implementación de estrategias heurísticas para solucionar las actividades, lo que indica que están robusteciendo el desarrollo de su pensamiento algebraico. Esto es positivo para la investigación, ya que al mejorar en la tarea de resolver problemas y demostrar teoremas, juzgarán de manera objetiva si encuentran diferencias o similitudes al desarrollar estas tareas y se podrá aportar a la caracterización del pensamiento algebraico.



Sea G un grupo cíclico y $a \in G$, tal que $o(a) = n$. Si $a^m = e$, para algún entero $m \neq n$, entonces n divide m.

Solución

Supongamos que n no divide a m, entonces por teorema fundamental de la aritmética se tiene que $m = qn + r$, donde $0 < r < n$. Entonces,

$$a^m = a^{qn+r} = a^{nq} \cdot a^r = e^q \cdot a^r = a^r$$

Como $a^m = e$, entonces $a^r = e$ de donde $o(a) = r$, contradicción puesto que $o(a) = n$ y $r < n$. Por lo tanto, n divide a m.

Figura 16. Demostración de un teorema sobre grupos cíclicos[69]

Dificultades. Ninguna. Los estudiantes están por convicción y decididos a participar

5.3.8 Análisis de la Actividad 8. Clases Laterales

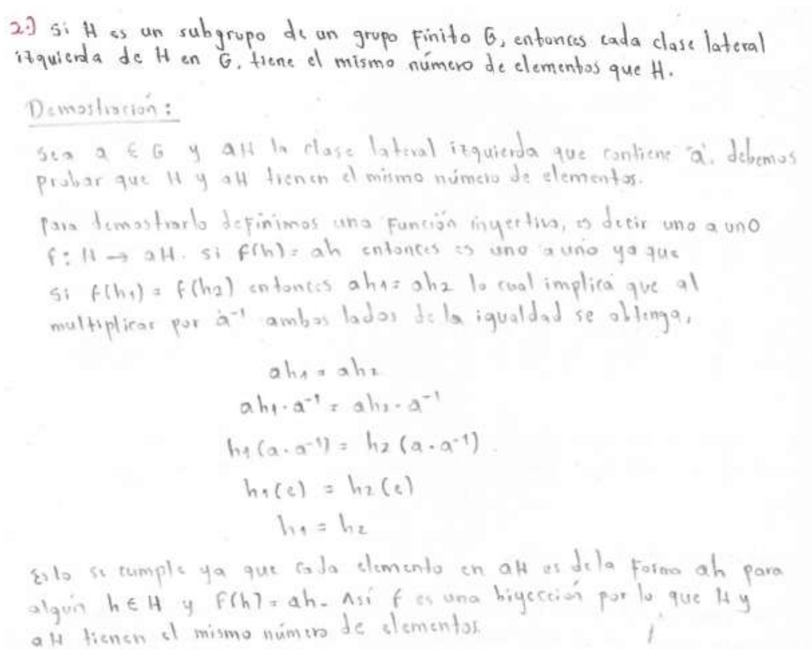
Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. La acogida es positiva, se percibe un interés por el tema. Los participantes escuchan con atención la explicación del docente investigador y asumen con responsabilidad la actividad. Se mantiene el deseo de participar y opinar.

Motivación por el aprendizaje. Se les explica a los estudiantes que en la actividad didáctica se estudiará un tipo de relaciones interesantes tales que, dado un grupo G y un subgrupo $H \subset G$, se puede definir la "congruencia módulo H" en G, que es una relación de equivalencia. Se retoma como ejemplo la congruencia módulo m en los números enteros.

Logros. Excelente comportamiento de los participantes. Hay interés por los temas del álgebra abstracta y un compromiso decidido por adquirir nuevos conocimientos y completar los contenidos del curso. Se hace una discusión sobre el Teorema de

[69] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

Lagrange y algunas de sus aplicaciones. A continuación, se presenta la manera en que un par de estudiantes aportan a la solución de las actividades:



2.) Si H es un subgrupo de un grupo finito G, entonces cada clase lateral izquierda de H en G, tiene el mismo número de elementos que H.

Demostración:

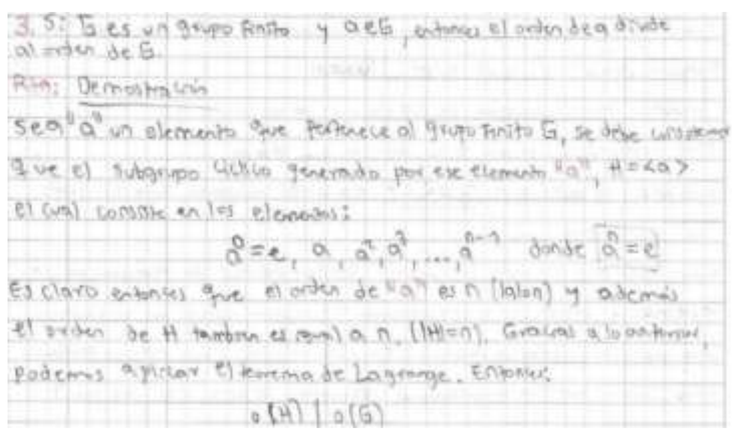
Sea $a \in G$ y aH la clase lateral izquierda que contiene 'a'. debemos probar que H y aH tienen el mismo número de elementos.

Para demostrarlo definimos una función inyectiva, es decir uno a uno $f: H \to aH$. si $f(h) = ah$ entonces es uno a uno ya que si $f(h_1) = f(h_2)$ entonces $ah_1 = ah_2$ lo cual implica que al multiplicar por a^{-1} ambos lados de la igualdad se obtenga,

$$ah_1 = ah_2$$
$$ah_1 \cdot a^{-1} = ah_2 \cdot a^{-1}$$
$$h_1(a \cdot a^{-1}) = h_2(a \cdot a^{-1})$$
$$h_1(e) = h_2(e)$$
$$h_1 = h_2$$

Esto se cumple ya que cada elemento en aH es de la forma ah para algún $h \in H$ y $f(h) = ah$. Así f es una biyección por lo que H y aH tienen el mismo número de elementos.

Figura 17. Demostración de un teorema sobre clases laterales[70]



3. Si G es un grupo finito y $a \in G$, entonces el orden de a divide al orden de G.

Rta: Demostración

Sea "a" un elemento que pertenece al grupo finito G, se debe considerar que el subgrupo cíclico generado por ese elemento "a", $H = \langle a \rangle$ el cual consiste en los elementos:

$$a^0 = e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{n-1} \quad \text{donde } a^n = e$$

Es claro entonces que el orden de "a" es n ($|a| = n$) y además el orden de H también es igual a n. ($|H| = n$). Gracias a lo anterior, podemos aplicar el teorema de Lagrange. Entonces:

$$o(H) \mid o(G)$$

Figura 18. Demostración de un problema sobre clases laterales[71]

Dificultades. Están superadas. El trabajo remoto ya es un hábito de trabajo, los participantes asumen los compromisos con responsabilidad, tal como si se tratara de un trabajo presencial.

[70] Aportada por un estudiante que hace parte de la investigación.
[71] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

5.3.9 Análisis de la Actividad 9. Homomorfismo de Grupos

Desempeño de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. Al inicio se notan expectantes porque deben retomar el tema de las funciones y ahora aplicar esta teoría en un nuevo ambiente donde el dominio y el rango son grupos. De todas maneras, su receptividad es notable.

Motivación por el aprendizaje. Los docentes en formación manifiestan que les parece curioso que se pueda establecer relaciones funcionales entre dos grupos distintos, que no alteran sus propiedades. En este caso, se trata se los llamados homomorfismos y, atendiendo a sus propiedades (así como las funciones) pueden ser de varios tipos: endomorfismos monomorfismos, isomorfismos, etc.

Logros. El esfuerzo por aplicar conceptos estudiados al inicio del curso e implementarlo en un nuevo contexto.

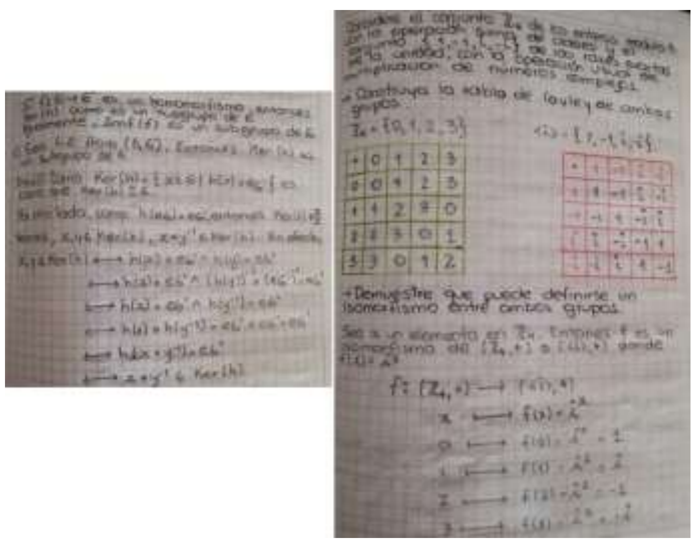


Figura 19. Demostración de un teorema y solución de un problema sobre homomorfismos[72]

Dificultades. Al inicio de la actividad se presentan dudas en relación con algunos conceptos sobre los homomorfismos que se incluyen en la actividad: los conceptos

[72] Propuesta por un estudiante que hace parte de la investigación.

de núcleo o Kernel, imagen y los tipos de homomorfismos. De todas maneras, las definiciones (abstractas) de estos conceptos y suficiente práctica permiten el avance en la actividad.

5.4. Análisis de la Encuesta de Satisfacción

La encuesta consiste en 10 preguntas, las primeras 9 son tipo Likert y la última pregunta es de contestar SI o NO y justificar. La escala Likert es la siguiente:

5	4	3	2	1
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

A continuación, se resumen y discuten los resultados de la aplicación del instrumento:

1. La metodología empleada durante el curso, motivada por la solución de las actividades didácticas y las exposiciones realizadas favoreció en los participantes que asumieran la responsabilidad de investigar de manera autónoma.

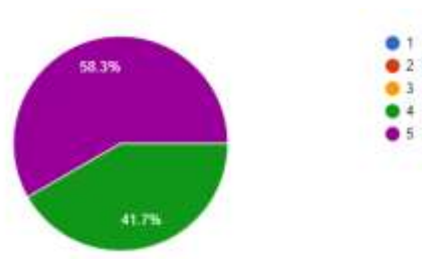


Figura 20. Resultados a la pregunta 1 de la encuesta de satisfacción

2. La metodología permitió mejorar el modelo tradicional de enseñanza y favoreció el desarrollo de la abstracción y del pensamiento algebraico.

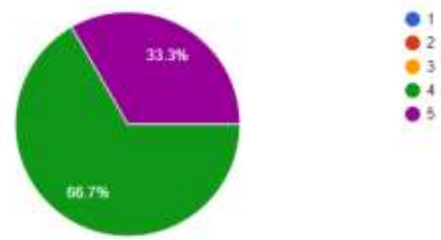


Figura 21. Resultados a la pregunta 2 de la encuesta de satisfacción

3. El enfoque basado en la resolución de problemas y la demostración de teoremas despierta la curiosidad y motiva la creatividad para la búsqueda de soluciones.

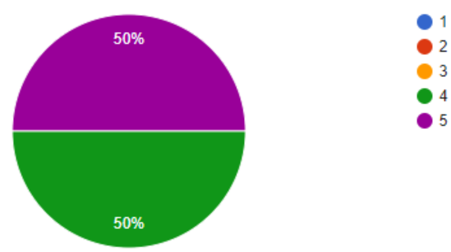


Figura 22. Resultados a la pregunta 3 de la encuesta de satisfacción

4. Al demostrar teoremas y resolver problemas pudo percibirse la incidencia de factores no solamente cognitivos, sino también factores epistemológicos, psicológicos, didácticos y las creencias sobre las matemáticas.

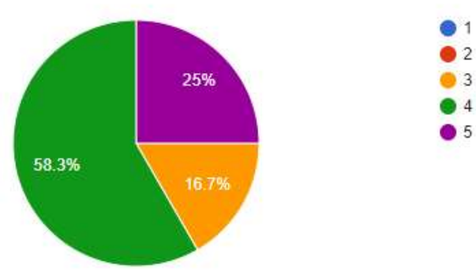


Figura 23. Resultados a la pregunta 4 de la encuesta de satisfacción

5. La mayoría de las veces, al demostrar teoremas y resolver problemas de álgebra abstracta se utilizaron representaciones y se emplearon estrategias similares.

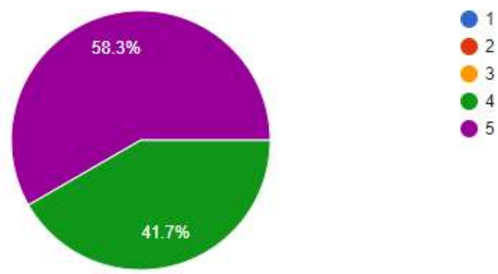


Figura 24. Resultados a la pregunta 5 de la encuesta de satisfacción

6. El trabajo en comunidades de aprendizaje, en las que se intercambia el rol de los participantes, favoreció el desarrollo del pensamiento algebraico de los docentes en formación.

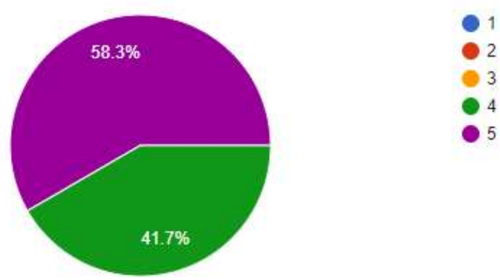


Figura 25. Resultados a la pregunta 6 de la encuesta de satisfacción

7. La manera en que el investigador durante el curso manejó la evaluación del avance de los participantes (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación) fue pertinente.

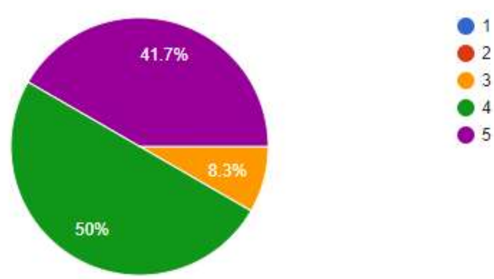


Figura 26. Resultados a la pregunta 7 de la encuesta de satisfacción

8. Durante el desarrollo del curso, hubo un interés por parte del investigador en dar a la mayoría de los teoremas y problemas estudiados una presentación y un enfoque didáctico.

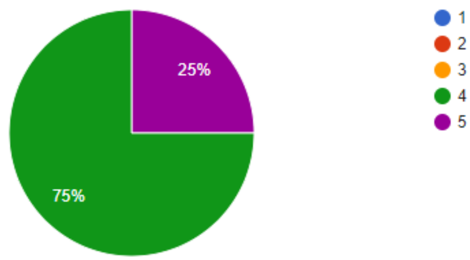


Figura 27. Resultados a la pregunta 8 de la encuesta de satisfacción

9. La forma de razonar, es decir los procesos mentales involucrados, cuando se demuestran teoremas y se resuelven problemas de álgebra abstracta son los mismos.

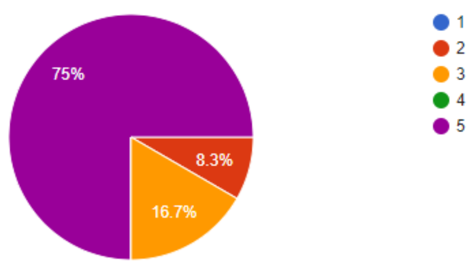


Figura 28. Resultados a la pregunta 9 de la encuesta de satisfacción

10. Atendiendo a su progreso cognitivo y al manejo cada vez más refinado de la teoría del álgebra abstracta durante el curso, ¿considera que fue posible avanzar (cambio de un nivel a otro), en los tres niveles de esquemas de demostración propuestos por Harel & Sowder (2008): de base externa, empíricos y analíticos (axiomáticos)?

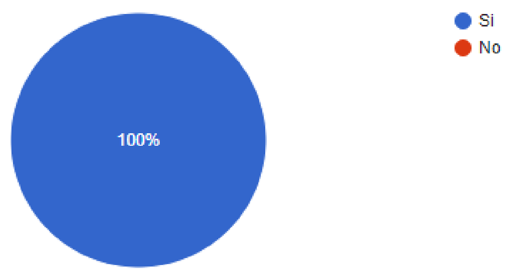


Figura 29. Resultados a la pregunta 10 de la encuesta de satisfacción

¿Cuál cree Usted que es actualmente el nivel de demostración que más utiliza cuando demuestra teoremas y cuando resuelve problemas de álgebra abstracta?

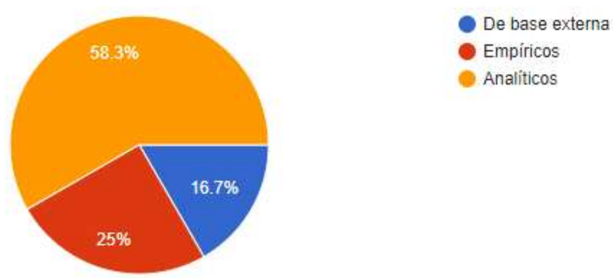


Figura 30. Esquemas de demostración que utilizan los estudiantes

Las preguntas 1, 2 y 6 de la encuesta, se refieren a la metodología implementada en la clase: la investigación que debían realizar los estudiantes, los beneficios del trabajo en comunidades de práctica y su implicación para favorecer el pensamiento algebraico. Las respuestas dan cuenta que todos los docentes en formación están de acuerdo o completamente de acuerdo las implicaciones positivas.

Las preguntas 3, 4 y 5 aluden respectivamente a si el enfoque basado en la resolución de problemas y la demostración de teoremas despierta la curiosidad y motiva la creatividad, también se les indaga si cuando resuelven problemas y demuestran teoremas perciben incidencia de otros factores además de los cognitivos (psicológicos, creencias, del contexto entre otros), de la isma manera, si los procesos de abordaje y solución de ambas actividades son similares. Como se aprecia en los gráficos estadísticos de las preguntas 3 y 5 los estudiantes están de acuerdo o completamente de acuerdo. En el de la pregunta 4, el 16.7% son indiferentes a la incidencia de otros factores aparte de los cognitivos; mientras que el 83.3% está de acuerdo o completamente de acuerdo en su incidencia.

En la pregunta 7, sobre la pertinencia o no en el manejo de la evaluación utilizada por el docente. El 91.7% la aprueba y el 8.3% le resulta indiferente.

Como se observa en los resultados de la pregunta 8, el total de los estudiantes está de acuerdo en que el investigador durante siempre se preocupó el curso por dar a los teoremas y problemas un enfoque didáctico.

Respecto a la pregunta 9, el 83.3% de los docentes en formación considera que cuando se demuestran teoremas y se resuelven problemas de álgebra abstracta la forma de razonar, es decir los procesos mentales involucrados son iguales.

Finalmente, en pregunta 10 todos los estudiantes coinciden en que, en el curso lograron progresos cognitivos y un manejo más refinado de la abstracción. En cuanto a los tres niveles de esquemas de demostración propuestos por Harel & Sowder (2008), manifiestan que el 58.3% alcanzó el nivel analítico, 25% se encuentra en el nivel empírico y 16.7% en el de base externa.

5.5. Avances en la caracterización del pensamiento algebraico

Durante la investigación los estudiantes estuvieron inmersos en las matemáticas, se favoreció la investigación, la lectura y justificación de resultados matemáticos, la resolución de problemas y demostración de teoremas; estas tareas motivaron a los estudiantes, los sacaron del practicismo y aplicación de resultados y fue gracias a esto que se alcanzó un progresivo nivel en el desempeño de los docentes en formación, quienes se volvieron más propositivos, mejoraron en la implementación de estrategias y técnicas heurísticas para desarrollar las actividades didácticas. Por lo anterior, se puede mantener un nivel significativo de exigencia y abstracción en el aula cuando se implementa una metodología que promueva la investigación, la discusión y el trabajo en comunidades de aprendizaje.

Cuando los estudiantes abordan los problemas y teoremas propuestos en las actividades, recorren las fases propuestas por Schoenfeld (1985): análisis preliminar (exploración), diseñar un plan, ejecutarlo, utilización de estrategias y verificación. Estas etapas enmarcadas dentro de los recursos (preconceptos), las heurísticas, el control y las creencias sobre las matemáticas. Paulatinamente los participantes alcanzan mayor madurez matemática, deseos de profundizar y en consecuencia aprender más del álgebra abstracta.

A continuación, se describen los avances alcanzados en la caracterización del pensamiento algebraico por los docentes en formación a partir de la solución de problemas y demostración de teoremas:

- Apropiación de la simbología matemática para designar objetos abstractos de la teoría de grupos; logran distinguir el concepto de estructura abstracta y sus características.
- Se mejora ampliamente el *manejo conceptual y el axiomático*, lo mismo que las relaciones y consecuencias entre resultados matemáticos.
- Se encontraron logros significativos en *la manipulación analítica de los objetos algebraicos*.

- Los docentes en formación *explican, dan razones y justifican* lo que escriben en las actividades propuestas.

La investigación permite hallar la razón a lo propuesto con Bleiler-Baxter & Pair (2017) en que presentar, discutir, conjeturar, trabajar en comunidades y refutar son elementos del aprendizaje que permiten a los estudiantes avanzar en la resolución de problemas y la escritura de las demostraciones matemáticas. Se ratifica el punto de vista de De Villiers (1990) de que la verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación son elementos que permiten involucrar a los estudiantes en las mencionadas actividades.

Sumado a lo anterior se valida lo planteado por Findell (2001) de que el álgebra abstracta favorece los procesos de generalización y fortalece las habilidades de pensamiento, a la vez que se ratifica el punto de vista de Edwards & Brenton (1999) en que los cursos de álgebra abstracta son necesarios en los planes de estudios de los docentes de matemáticas en formación, porque les permite analizar los conceptos matemáticos en su forma pura, favorecen la escritura de demostraciones, y esto se va a ver reflejado en sus avances en el conocimiento algebraico.

5.6 Conclusiones del capítulo 5

En el capítulo analizan los instrumentos implementados a los estudiantes del curso de álgebra abstracta participantes en la investigación, que se trató de dos encuestas semiestructuradas, un sistema de nueve actividades didácticas sobre los contenidos estudiados en el curso y una encuesta de satisfacción; para triangular la información las primeras encuestas se aplicaron también a docentes de álgebra y a expertos en esta rama de las matemáticas.

En la primera encuesta implementada para identificar la percepción que tienen los estudiantes, los docentes y los expertos sobre la importancia de la resolución de problemas y la demostración de teoremas para avanzar en el desarrollo del pensamiento algebraico, se encontró un alto grado de coincidencia en las respuestas de los participantes, en relación con la relevancia de ambas tareas; de la misma manera están de acuerdo en que los estudiantes utilizan principalmente esquemas de demostración empíricos o de convicción externa, son escasos los que utilizan esquemas analíticos.

En la segunda encuesta semiestructurada, los participantes consideran que al demostrar teoremas y resolver problemas de álgebra abstracta inciden factores epistemológicos, psicológicos y didácticos, no solamente cognitivos. Las estrategias de solución y representación en ambas actividades son muy similares; para lograr avances en el desarrollo del pensamiento algebraico se debe motivar a los estudiantes para que se involucren en los procesos de solución que implican ambas tareas y utilizar la didáctica siempre que sea posible.

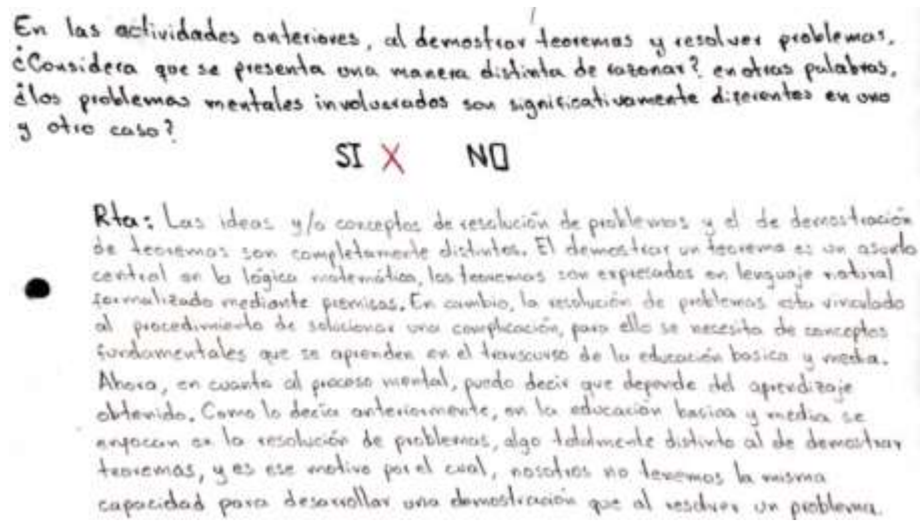
En cuanto al sistema de actividades didácticas se observó un avance progresivo en la manera de abordar y resolver los problemas y demostrar los teoremas en la medida en que avanzaba el curso. La participación de los estudiantes tanto individual como en las comunidades de práctica influyó positivamente en el desarrollo de la autonomía de trabajo, el apoyo mutuo, el intercambio de roles, la investigación y la asimilación de la mayoría de los conceptos abstractos, propios del álgebra; se notó progresivamente la evolución de los esquemas de demostración empíricos y externos a los analíticos, tal como lo propone Harel & Sowder (2008).

Se valida en la encuesta de satisfacción implementada al final del curso, que la resolución de problemas y la demostración de teoremas despierta la curiosidad y motiva la creatividad de los estudiantes, favorece la responsabilidad de investigar de manera autónoma y trabajar en comunidades de aprendizaje tal como lo propone Wenger (1988). La madurez alcanzada durante la investigación desarrollando ambas tareas le permite a más del 80% de los participantes concluir que no encuentran diferencias significativas en la forma de razonar cuando demuestran teoremas y cuando resuelven problemas de álgebra abstracta; en otras palabras que los procesos mentales involucrados son los mismos.

CONCLUSIONES

Que se tratara de un curso nuevo para los estudiantes, su carácter abstracto y generalizador no fue un obstáculo para que avanzaran significativamente en la resolución de problemas, la demostración de teoremas y mejoraran sus procesos de abstracción. Con el transcurso de las clases aumenta la empatía por el álgebra, el compromiso, la capacidad de trabajo individual, la participación, las estrategias que proponen y la argumentación en el desarrollo de las actividades; esto es evidencia de los avances en el desarrollo del pensamiento matemático, particularmente en el algebraico.

Al inicio de la investigación, al preguntar a los estudiantes si encuentran diferencias significativas en la forma de razonar cuando demuestran teoremas y resuelven problemas, 8 de los 12 participantes (66.7%) manifiestan que sí. Enseguida una de las respuestas en ese momento:



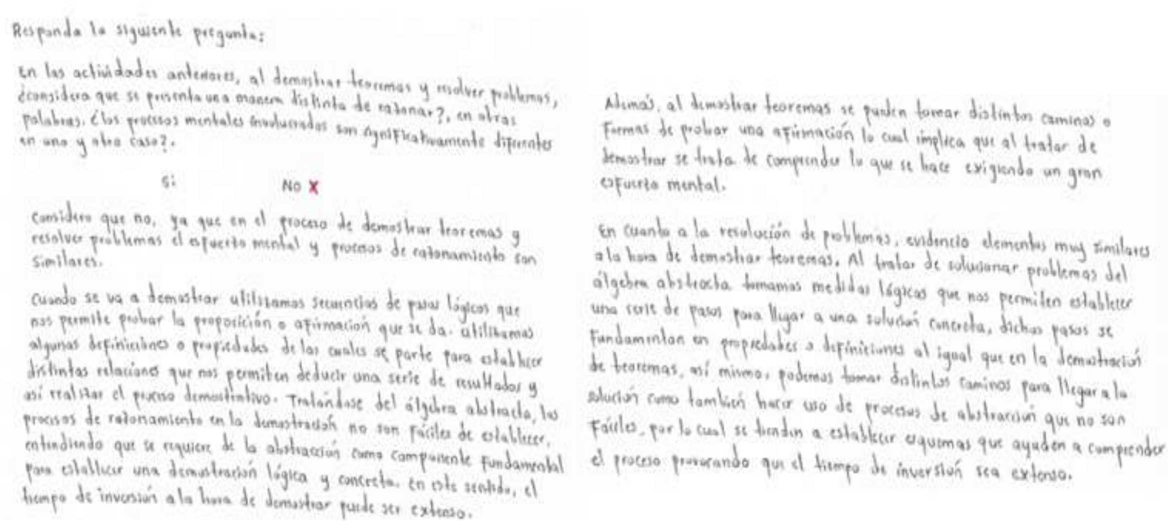
En las actividades anteriores, al demostrar teoremas y resolver problemas. ¿Considera que se presenta una manera distinta de razonar? en otras palabras, ¿los problemas mentales involucrados son significativamente diferentes en uno y otro caso?

SI X NO

Rta: Las ideas y/o conceptos de resolución de problemas y el de demostración de teoremas son completamente distintos. El demostrar un teorema es un asunto central en la lógica matemática, los teoremas son expresados en lenguaje natural formalizado mediante premisas. En cambio, la resolución de problemas esta vinculado al procedimiento de solucionar una complicación, para ello se necesita de conceptos fundamentales que se aprenden en el transcurso de la educación basica y media. Ahora, en cuanto al proceso mental, puedo decir que depende del aprendizaje obtenido. Como lo decía anteriormente, en la educación basica y media se enfocan en la resolución de problemas, algo totalmente distinto al de demostrar teoremas, y es ese motivo por el cual, nosotros no tenemos la misma capacidad para desarrollar una demostración que al resolver un problema.

Figura 31. Respuesta de un estudiante a la pregunta de investigación al inicio [73]

A medida que avanza la investigación, gradualmente cambia su punto de vista y al final 10 estudiantes de 12 (83,3%) están de acuerdo o totalmente de acuerdo en que, en el contexto del álgebra abstracta demostrar teoremas y resolver problemas requiere igual esfuerzo mental. La opinión de los dos estudiantes restantes (el 16.7%) es indiferente



Responda la siguiente pregunta:

En las actividades anteriores, al demostrar teoremas y resolver problemas, ¿considera que se presenta una manera distinta de razonar?, en otras palabras, ¿los procesos mentales involucrados son significativamente diferentes en uno y otro caso?.

Si No X

Considero que no, ya que en el proceso de demostrar teoremas y resolver problemas el esfuerzo mental y procesos de razonamiento son similares.

Cuando se va a demostrar utilizamos secuencias de pasos lógicos que nos permite probar la proposición o afirmación que se da. utilizamos algunas definiciones o propiedades de los cuales se parte para establecer distintas relaciones que nos permiten deducir una serie de resultados y así realizar el proceso demostrativo. Tratándose del álgebra abstracta, los procesos de razonamiento en la demostración no son fáciles de establecer, entendiendo que se requiere de la abstracción como componente fundamental para establecer una demostración lógica y concreta. En este sentido, el tiempo de inversión a la hora de demostrar puede ser extenso.

Además, al demostrar teoremas se pueden tomar distintos caminos o formas de probar una afirmación lo cual implica que al tratar de demostrar se trata de comprender lo que se hace exigiendo un gran esfuerzo mental.

En cuanto a la resolución de problemas, evidencio elementos muy similares a la hora de demostrar teoremas. Al tratar de solucionar problemas del álgebra abstracta tomamos medidas lógicas que nos permiten establecer una serie de pasos para llegar a una solución concreta, dichos pasos se fundamentan en propiedades o definiciones al igual que en la demostración de teoremas, así mismo, podemos tomar distintos caminos para llegar a la solución como también hacer uso de procesos de abstracción que no son fáciles, por lo cual se tienden a establecer esquemas que ayuden a comprender el proceso procurando que el tiempo de inversión sea extenso.

Figura 32. Respuesta de un estudiante a la pregunta de investigación al final [74]

[73] Ofrecida por un estudiante participante.
[74] Ofrecida por un estudiante participante.

El 83.3% del grupo considera que al resolver problemas y demostrar teoremas de álgebra abstracta inciden factores epistemológicos, psicológicos, didácticos y creencias sobre la matemática; esto se ratifica en las entrevistas y en la segunda encuesta semiestructurada y en la encuesta de satisfacción.

Figura 33. Efectos de los factores que inciden en la solución de problemas y la demostración de teoremas[75]

Las creencias sobre la matemática y la dimensión afectiva del individuo son importantes y afectan la dimensión cognitiva. La necesidad de resolver correctamente una actividad, para satisfacer las expectativas propias o de otra persona, son dominantes (Leron y Hazzan, 1997). Por otro lado, tanto al resolver problemas como al demostrar teoremas se presentan avances, retrocesos y estancamientos que dependen de lo cognitivo, de lo afectivo y de las creencias sobre las matemáticas. Lo afectivo es una cadena de estados y sentimientos complejos, que afectan lo cognitivo y al desarrollar estas actividades estos factores se entrelazan e influyen en los resultados.

[75] Elaboración del autor.

Las proposiciones de álgebra abstracta se caracterizan por su contenido teórico, el nivel de generalización y la importancia para fundamentar otros resultados. Hacer una demostración implica una interacción cognitiva entre la proposición y el individuo, ya que éste desde su conocimiento e intuición interpreta el enunciado, articula sus saberes y piensa y diseña estrategias para abordar el proceso, con el fin de alcanzar un resultado exitoso (que lo convenza a él y pueda convencer a otros); si esto se logra podrá asimilar la proposición y sus implicaciones. Algo similar ocurre al resolver problemas de álgebra abstracta, por cuanto la solución de éstos depende de sólidos preconceptos, un buen grado de análisis y razonamiento, el manejo de estrategias heurísticas pertinentes durante el proceso y una búsqueda no lineal o inmediata de la solución; con estos insumos direccionados acertadamente tiene un alto grado de posibilidad de tener éxito (Schoenfeld, 1985).

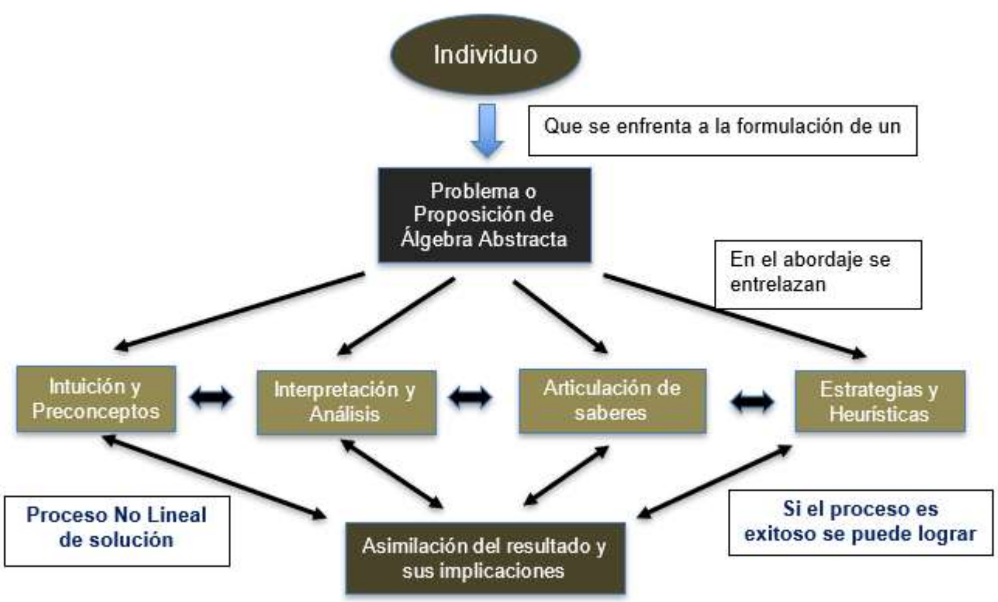


Figura 34. Elementos presentes en la solución de problemas y demostración de teoremas exitosos[76]

[76] Elaboración del autor

En cuanto al pensamiento algebraico emergente, la solución de las actividades didácticas, las encuestas implementadas y las entrevistas realizadas permiten concluir que al hacer demostraciones el razonamiento que utilizan los docentes es formación es igual que cuando resuelven problemas. En ambas tareas se encuentran los mismos patrones en el análisis, el abordaje, uso de representaciones, procesos de solución y verificación que se relacionan con su desempeño y rendimiento. Se ratifica lo propuesto por Weber (2005), Furinghetti & Morselli (2009) y Savic (2015) de que la demostración matemática es una actividad de resolución de problemas y que quienes son exitosos resolviendo problemas utilizan técnicas similares cuando hacen demostraciones.

En la medida en que los estudiantes se enfrentan con verdaderos problemas matemáticos y no con simples ejercicios, su percepción sobre las relaciones (semejanzas o diferencias) en la forma en que deben abordarlos y resolverlos, en comparación con la demostración de teoremas cambia, a tal punto que, al menos en el contexto del álgebra abstracta manifiestan que no perciben diferencia alguna.

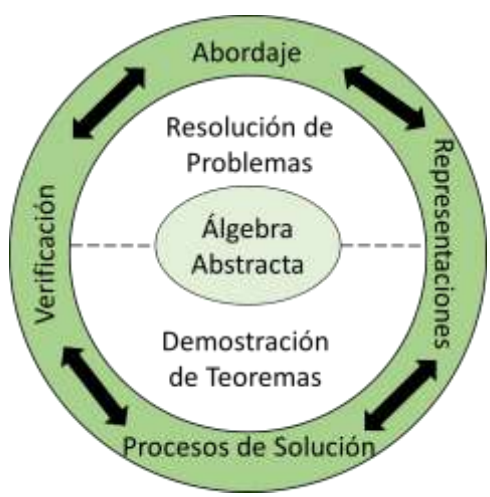


Figura 35. Procesos equivalentes encontrados en la resolución de problemas y demostración de teoremas.

En cuanto a la metodología y el sistema de actividades didácticas implementadas se concluye que estas:

- Favorecieron en los estudiantes el desarrollo de formas de pensar y formas de entender objetivas, lo que condujo al progreso en la implementación de heurísticas, respaldadas por los actos mentales propuestos en el DNR como representar, interpretar, relacionar, simbolizar, clasificar, conjeturar, demostrar, generalizar y resolver problemas.
- Ratifican lo planteado por Selden & Selden (2013) en que al hacer demostraciones hay dos aspectos a tener en cuenta: el marco de la demostración y la parte centrada en el problema. La primera depende de la interpretación del individuo para comprender la proposición matemática; la parte centrada en el problema depende de la teoría de resolución de problemas como lo plantea Schoenfeld; cuando un individuo aborda una demostración puede o no ser consciente del problema matemático que debe resolver, lo que sucede después depende de su capacidad para resolver problemas.
- Validar los argumentos de Savic (2015), en que en los procesos de resolución de problemas y demostración de teoremas consisten en tres fases: planear, ejecutar y verificar. Estas fases son un caso especial de las etapas Schoenfeld (1985): análisis, exploración, ejecución y comprobación quien además considera en su teoría los recursos, las heurísticas, el control y las creencias sobre las matemáticas. Estas fases están conectadas, ya que las acciones que se realizan en una fase se interrelacionan con las de la siguiente.

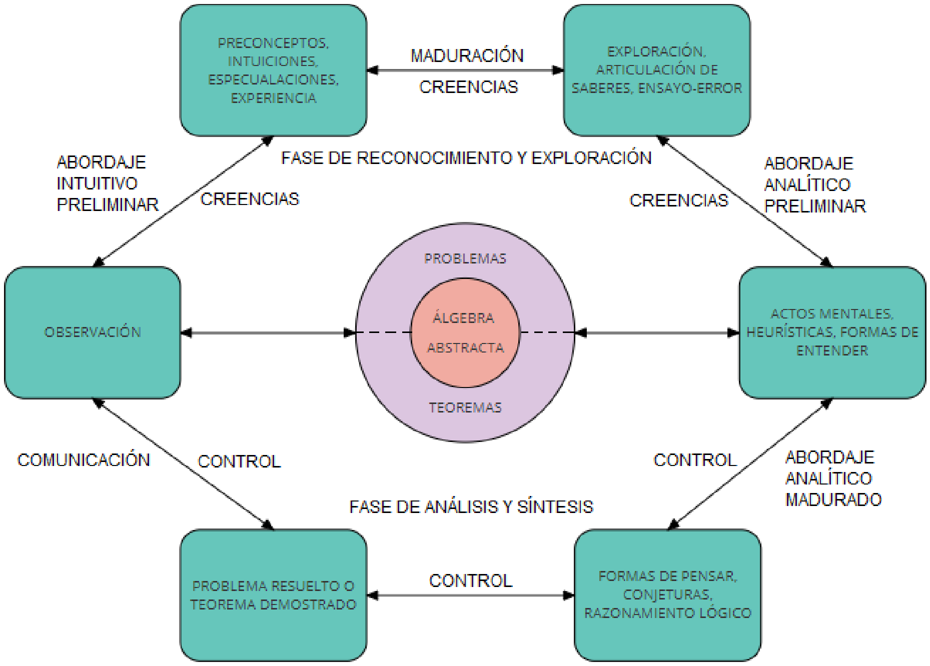


Figura 36. Esquema del proceso de solución de problemas y demostración de teoremas[77]

- Se puede motivar y comprometer a un grupo de estudiantes a trabajar tanto de manera individual como de manera colaborativa para alcanzar metas comunes con la participación de todos en comunidades de práctica como lo propone Wenger (2008). Debe promoverse el intercambio de roles, el compromiso y acompañamiento decidido del docente (como un miembro más del grupo) esto permite a los individuos alcanzar o mejorar sus hábitos investigativos y romper un paradigma en la manera de trabajar.
- Los docentes en formación pasaron de solucionar ejercicios de tipo algorítmico, práctico y utilitario y de demostrar proposiciones que requieren argumentos básicos de justificación y escasa carga conceptual o axiomática a resolver otro tipo de problemas (no rutinarios) y demostrar otro tipo de proposiciones para las

[77] Elaboración del autor.

que necesitan mantener una actitud indagadora permanente. Con los avances logrados al final reconocen que resolver problemas y demostrar teoremas repercute positivamente en el desarrollo de su pensamiento algebraico.

RECOMENDACIONES

Se pueden abordar los temas de álgebra abstracta a partir de los preconceptos que tienen los estudiantes, generando confianza, ilustrando resultados, ofreciendo ejemplos y contraejemplos e implementando recursos didácticos. Debe haber apoyo decidido del docente para motivar y dar seguridad a los estudiantes de sus capacidades para resolver problemas y demostrar teoremas. Con esto se logra eliminar gran parte de las creencias negativas sobre las matemáticas, que adquieran mayor compromiso académico, facilidad de asimilar los contenidos y tomen la iniciativa de investigar, profundizar, explicar y dar razones.

En todos los niveles educativos es un reto para los docentes implementar la resolución de problemas y la construcción de demostraciones. La propuesta es proponer situaciones que progresivamente impliquen obstáculos mayores y que exijan buen nivel de razonamiento y justificación. Se propone articular la resolución de problemas como lo propone Schoenfeld (1985), con el trabajo en comunidades de práctica propuesto por Wenger, todo enmarcado en el marco teórico DNR. Esto demanda que el docente logre sugerir actividades que permitan construir formas de pensar y formas de entender objetivas y transmitir a los estudiantes la necesidad intelectual de avanzar cognitivamente, de explicar, ilustrar, justificar, refutar proponer problemas y caminos alternativos para demostrar proposiciones tanto de manera individual como en comunidades de aprendizaje. Es preciso también que haga seguimiento de los alcances logrados y realice retroalimentación.

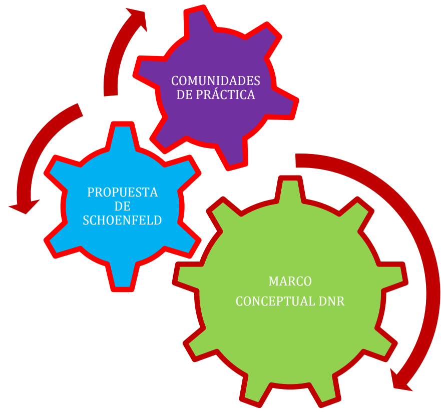


Figura 37. Articulación del DNR, la resolución de problemas y las comunidades de práctica[78]

En lo que respecta a la formación de docentes de matemáticas, en los cursos del núcleo específico deben fortalecerse la argumentación, direccionada tanto a la solución de problemas como a la escritura de demostraciones; estas tareas favorecen la articulación de conocimientos, les permite ser más propositivos y lograr un mayor nivel de abstracción. Es necesario considerar el contenido didáctico en estas actividades (Hanna, 1990). Por otro lado, el trabajo en comunidades de aprendizaje en las que se propenda por el intercambio de roles y las discusiones entre los participantes resulta ser de gran apoyo.

Investigaciones similares, podrían implementarse en otras áreas de la matemática, por ejemplo, la teoría de números y el análisis, para indagar si es posible encontrar diferencias significativas en el pensamiento matemático de los profesores de matemáticas en formación al resolver problemas y al demostrar teoremas.

[78] Elaboración del autor.

BIBLIOGRAFÍA

Arnon, I et al. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York, U.S.A: Springer.

Arraiz G. (2014). Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemática. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, núm. 41, febrero-abril, 2014, pp. 19-29. Fundación Universitaria Católica del Norte, Medellín, Colombia.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una Empresa Docente, pp.200. <hal-00520133> Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133.

Barnard, T., & Tall, D. (1997, July). *Cognitive units, connections and mathematical proof*. In PME conference (Vol. 2, pp. 2-41). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.

Barrantes, H. (2006). Resolución De Problemas. El Trabajo de Alan Schoenfeld. *Cuadernos De Investigación Y Formación En Educación Matemática*, *1*(1).

Bermúdez, E. (2011). Comprensión del Concepto de Integral Definida en el Marco de la Teoría “APOE” (tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.

Bleiler-Baxter S. & Pair J. (2017) Engaging students in roles of proof. Journal of Mathematical Behavior. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.005.

Carlson I. & Bloom I (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. Educational Studies in Mathematics, Vol. 58, No. 1 (2005), pp. 45-75.

Colmenares, A. y Piñero, M. (2008). La Investigación Acción. Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socioeducativas. *Laurus*, *14*(27), 96-114.

Corbin J. & Strauss A. (1990). Grounded Theory Research: Procedures, Canons, and Evaluative Criteria. Qualitative Sociology, Vol. 13, No. 1. Recuperado de https://med-fom-familymed-research.sites.olt.ubc.ca/files/2012/03/W10-Corbin-and-Strauss-grounded-theory.pdf.

Daguplo Marvin S. (2013). Non-routine Mathematical Problems: Phenomenological Analysis of Positive and Negative Learning Impact. Journal of Educational and Human Resource Development.

de Losada M. F. (2013). Corrientes de Pensamiento Matemático del siglo XX Segunda parte Fundamentación Mary Falk de Losada. (pp.2). Universidad Antonio Nariño. Panamericana formas e impresos S.A.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 17-24.

Dubinsky, E. (2002). “Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking” in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed.) (pp. 95-123). Boston, U.S.A: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky E. & Leron, U. (1995). An Abstract Algebra Story. *The American Mathematical Monthly*, *102*(3), 227-242. Recuperado de http://www.math.kent.edu/~edd/AlgbraStory.pdf.

Dubinsky E. & Otros. (1994). On Learning Fundamental Concepts in Group Theory. Recuperado de http://www.math.kent.edu/~edd/FundConGrpTh.pdf.

Edwards T & Brenton L. (1999). An Attempt to Foster Students' Construction of Knowledge during a Semester Course in Abstract Algebra. The College Mathematics Journal, Vol. 30, No. 2 (Mar., 1999), pp. 120-128. Recuperado de: https://www.jstor.org/stable/2687722.

Fiallo J. y otros. (2013) Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. Revista Integración. Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Vol. 31, No. 2, 2013, (pp. 181–205).

Findell, B. (2001). Learning and Understanding in Abstract Algebra (tesis doctoral). Universidad de New Hampshire, U.S.A.

Furinghetti, F & Morselli, F. (2004). 2004 - Between affect and cognition: proving at university level. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/266234353.

Furinghetti, F & Morselli, F. (2009). Every Unsuccessful Problem Solver Is Unsuccessful in His or Her Own Way: Affective and Cognitive Factors in Proving. Educational Studies in Mathematics. Vol. 70, No. 1 (Jan., 2009), pp. 71-90.

Gallian, J. (1999). Contemporary Abstract Algebra. Brooks/Cole Cengage Learning.

Gutiérrez, Á., Leder, G. C., & Boero, P. (Eds.). (2016). The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues. Springer.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. Interchange 21(1), 6–13. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Gila_Hanna/publication/226635673_Some_pedagogical_aspects_of_proof/links/549c38710cf2d6581ab4826b.pdf.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics: Particular reference to linear algebra - old and new observations. En Dorier, J. (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp.177-190). Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2007). The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction. En Lesh, R., Kaput, J. & Hamilton, E. (Eds.) (pp. 263-280). Foundations for the Future in Mathematics Education, Erlbaum.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Student´s Proof Schemes. Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III. En Dubinsky, E., Schoenfeld, A. & Kaput, J. (Eds.) (234-283.). AMS.

Harel, G. & Sowder L. (2007). “Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof”. En F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 805–842), Reston, VA, EE.UU. 29.

Hausberger T. (2014). Abstract Algebra, Mathematical Structuralism and Semiotics. <hal-01083768>. Recuperado de http://www.math.univ-montp2.fr/prepub/2014/2014_20(Hausberger).pdf.

Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación Científica*. México: McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A.

Hughes, B. (1974). Heuristic Teaching in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *5*(3), 291–299.

Irvine, J. (2017). Problem Posing in Consumer Mathematics Classes: Not Just for Future Mathematicians. The Mathematics Enthusiast, Volume 14. Number 1 Numbers 1, 2, & 3 Article 22.

Knapp J. (2003). Learning to Prove in Order to Prove to Learn. Department of Mathematics, Arizona State University, Tempe, Arizona 85287. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.489.9566&rep=rep1&type=pdf

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/129741798.pdf.

McLeod, D. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem SolvingAffect and mathematical problem solving. In "*Afect and Mathematical Problem Solving"*. McLeod, D & Adams, M. editors. Springer-Verlag New York. Douglas B. McLeod, Verna M. Adams (Eds.).

Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. New Jersey, U.S.A: Anchor Books Edition.

Poranen, J. & Haukkanen, P. (2012). Didactic Number Theory and Group Theory for School Teachers. *IMVI, Open Mathematical Education Notes, 2*, 23–37.

Puga, K. & Miranda, E. (2004). Construcción del Esquema Mental para la Construcción del Concepto de Integral. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa CLAME A.C.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and The Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. PME-NA 2006 Proceedings. Vol. 1-2.

Rodríguez, M. et al. (2019). Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos 1a ed. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. 84 p. Recuperado de https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2020/04/9789876304405-completo.pdf.

Sánchez, E, y Gil, A. (2014). La demostración en las Matemáticas. Un ejemplo de aplicación en el aula con alumnos de 3.º ESO. Enseñanza & Teaching, 33, 1-2015, 163-192. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/277969625_La_demostracion_en_las_matematicas_Un_ejemplo_de_aplicacion_en_el_aula_con_alumnos_de_3_ESO.

Savic, M (2015). On Similarities and Differences Between Proving and Problem Solving. Journal of Humanistic Mathematics, Volume 5, Issue 2. July 2015.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Florida, U.S.A: Academic Press Inc.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, And Sense-Making in Mathematic. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Selden, A. et al (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process," International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 41 Issue 2, p. 199-215.

Selden, A. & Selden, J. (2013). Proof and Problem Solving at University Level. The Mathematics. Enthusiast: Vol. 10: No. 1, Article 14. Available at: https://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/14.

Selden, J. & Selden, A. (2017). An expanded theoretical perspective for proof construction and its teaching. CERME10-WG1, Proof and Argumentation, February 4, 2017, Dublin, Ireland. hal-01865647f. Recuperado de: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01865647/document.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop, et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. [Traducción de Juan D. Godino]

Stilianou D. et al. (2006). Student´s Proof Schemes: A Closer Look at What Characterizes Student´s Proof Conceptions. Vol. 2-54. PME-NA 2006 Proceedings.

Tall, D. (1988). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? Mathematics Education Research Centre. Institute of Education University of Warwick.

Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking. Science Educational Department, University of Warwick*. New York, U.S.A: Kluwer Academic Publishers.

Titova, A. (2014). Understanding Abtract Algebra Concepts. Becker College. Recuperado de: http://pzacad.pitzer.edu/~dbachman/RUME_XVI_Linked_Schedule/rume16_submission_40.pdf.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17* (1), 5-31.

Weber K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. Journal of Mathematical Behavior 24 (2005) 351–360.

Wenger, E. (1999). Communities of practice: Learning, meaning, and identity. Cambridge university press.

Windsor, W. (2010). Algebraic Thinking: A Problem-Solving Approach. Mathematics Education Research Group of Australasia, Paper presented at the Annual

Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (33rd, Freemantle, Western Australia, Jul 3-7, 2010).

Anexos

Anexo 1 Encuesta semiestructurada para estudiantes

Objetivo: Clasificar las opiniones de estudiantes sobre su percepción, de si existen diferencias en la forma de razonar cuando se demuestran teoremas y cuando se resuelven problemas, en el contexto del álgebra abstracta.

Duración: 1 hora

DESARROLLO DE LA ENCUESTA

Para las preguntas que se indican a continuación, en una escala de 5 a 1, califique colocando una equis (X) en la opción que considere estar más de acuerdo. Tenga en cuenta que 5 corresponde a la más alta (estar totalmente de acuerdo) y 1 es la calificación más baja (estar completamente en desacuerdo).

5	4	3	2	1
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

El libro Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria (2000-2004) Problemas y Soluciones, editado por la Universidad Antonio Nariño, versa que los problemas no rutinarios son aquellos que invitan al estudiante a pensar autónomamente, indagar, cuestionar, razonar y explicar su razonamiento. Schoenfeld (1985) considera que son preguntas para las cuales el resolutor no conoce los pasos para resolverlas, pero tiene el conocimiento de los hechos y procedimientos necesarios para hacerlo y que estos problemas brindan a los estudiantes la oportunidad de pensar críticamente, presentar ideas creativas, comunicarse matemáticamente con sus compañeros y aprender matemáticas de manera heurística.

1. Los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas desarrollan las competencias suficientes de resolución de problemas y demostración de proposiciones en los cursos del núcleo específico.

5	4	3	2	1

2. El plan de estudios de la licenciatura en matemáticas debe contar con cursos sobre resolución de problemas.

5	4	3	2	1

3. Los estudiantes del curso de estructuras algebraicas presentan dificultades cuando se les pide que resuelvan problemas.

5	4	3	2	1

Los teoremas constituyen la esencia de las matemáticas. Un teorema es una afirmación sobre una verdad matemática que debe demostrarse. Balacheff (2010), distingue entre demostraciones y pruebas y considera que una demostración es el argumento lógico deductivo que permite justificar un teorema. La prueba hace referencia a un proceso social en el que un discurso que asegura la validez de una proposición finalmente es aceptado por una comunidad.

Esquemas De Demostración De Teoremas. De acuerdo con Harel & Sowder (2008), son argumentos que utiliza el estudiante para convencerse a sí mismo o para convencer a otras personas y se relacionan con los actos mentales de generalizar y de probar. Proponen tres niveles de esquemas de demostración que representan diferentes etapas cognitivas en el desarrollo matemático del estudiante: de base externa, empíricos y analíticos (axiomáticos). Los de base externa, pueden ser rituales, autoritarios o simbólicos. En los de tipo ritual, los estudiantes se convencen por la forma en que está escrita la demostración; en los autoritarios el convencimiento depende de lo que aparece en los libros o por lo que dice un maestro u otra autoridad; en los simbólicos los estudiantes manipulan símbolos, aunque no entiendan su significado. En los esquemas empíricos, el estudiante realiza demostraciones inductivas a partir de sus percepciones sensoriales, preconceptos, ejemplos, mediciones, sustituir en fórmulas u observar patrones que les permiten generar muchos ejemplos. En los esquemas analíticos, la validación de conjeturas se obtiene mediante deducción lógica: el individuo reconoce que la matemática está soportada por axiomas y postulados que son aceptados sin prueba por la comunidad matemática; son los más avanzados y se consideran verdaderas demostraciones matemáticas.

Pensamiento Algebraico. En su forma elemental tiene que ver con la habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas entre números, objetos y formas geométricas. En su forma pura, favorece el conocimiento profundo para pensar matemáticamente. El pensamiento algebraico amplía la capacidad para resolver problemas, más allá de situaciones concretas y operar con objetos matemáticos de forma lógica, independiente del mundo material (Windsor, 2010).

4. Una manera de favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes es a través de la demostración de teoremas y la resolución de problemas.

5	4	3	2	1

5. ¿Cuál de los niveles de esquemas de demostración de teoremas propuestos por Harel & Sowder (2008) utiliza Usted más frecuentemente?

De base externa		Empíricos		Analíticos	

6. Mencione algunas dificultades que Usted ha tenido al resolver problemas y demostrar teoremas álgebra abstracta.
7. En el contexto del álgebra abstracta, durante los procesos de resolución de problemas y demostración de teoremas, ¿cree Usted que se presenta una manera distinta de razonar? En otras palabras, ¿los procesos mentales (esfuerzo metal) involucrados en uno y otro caso son distintos?

Si		No	

Escriba algunas razones:

8. Escriba algunas estrategias para favorecer el proceso de resolución de problemas retadores y la demostración de teoremas.

Anexo 2 Encuesta semiestructurada para docentes

Objetivo: Clasificar las opiniones de docentes que orientan cursos de estructuras algebraicas, sobre su concepción de si existen diferencias en la forma de razonar cuando se demuestran teoremas y cuando se resuelven problemas de álgebra abstracta.

Duración: 1 hora

DESARROLLO DE LA ENCUESTA

Años de experiencia docente en la enseñanza de la matemática en el nivel universitario

Más de 10		Entre 5 y 10		Menos de 5	

Años de experiencia en la enseñanza de cursos relacionados con las estructuras algebraicas

Más de 5		Entre 3 y 5		Menos de 3	

Su nivel de formación académica

Licenciado		Especialista		Magister		Doctor	

Para las preguntas que se indican a continuación, en una escala de 5 a 1, califique colocando una equis (X) en la opción que considere estar más de acuerdo. Tenga en cuenta que 5 corresponde a la más alta (estar totalmente de acuerdo) y 1 es la calificación más baja (estar completamente en desacuerdo).

5	4	3	2	1
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

El libro Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria (2000-2004) Problemas y Soluciones, editado por la Universidad Antonio Nariño, versa que los problemas no rutinarios son aquellos que invitan al estudiante a pensar autónomamente, indagar, cuestionar, razonar y explicar su razonamiento. Schoenfeld (1985) considera que son preguntas para las cuales el resolutor no conoce los pasos para resolverlas, pero tiene el conocimiento de los hechos y procedimientos necesarios para hacerlo y que estos problemas brindan a los estudiantes la oportunidad de pensar críticamente, presentar ideas creativas, comunicarse matemáticamente con sus compañeros y aprender matemáticas de manera heurística.

1. Los profesores de matemáticas en formación desarrollan las competencias suficientes en la resolución de problemas y demostración de proposiciones en los cursos del núcleo específico de la licenciatura.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

2. Los planes de estudio de las licenciaturas en matemáticas deberían contar con cursos sobre resolución de problemas, en los cuales se enseñen técnicas básicas y se estudien los principales referentes teóricos.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

3. Los estudiantes de los cursos de estructuras algebraicas presentan dificultades cuando se les pide que resuelvan problemas.

5	4	3	2	1

Los teoremas constituyen la esencia de las matemáticas. Un teorema es una afirmación sobre una verdad matemática que debe demostrarse. Balacheff (2010), distingue entre demostraciones y pruebas y considera que una demostración es el argumento lógico deductivo que permite justificar un teorema. La prueba hace referencia a un proceso social en el que un discurso que asegura la validez de una proposición finalmente es aceptado por una comunidad.

Esquemas De Demostración De Teoremas. De acuerdo con Harel & Sowder (2008), son argumentos que utiliza el estudiante para convencerse a sí mismo o para convencer a otras personas y se relacionan con los actos mentales de generalizar y de probar. Proponen tres niveles de esquemas de demostración que representan diferentes etapas cognitivas en el desarrollo matemático del estudiante: de base externa, empíricos y analíticos (axiomáticos). Los de base externa, pueden ser rituales, autoritarios o simbólicos. En los de tipo ritual, los estudiantes se convencen por la forma en que está escrita la demostración; en los autoritarios el convencimiento depende de lo que aparece en los libros o por lo que dice un maestro u otra autoridad; en los simbólicos los estudiantes manipulan símbolos, aunque no entiendan su significado. En los esquemas empíricos, el estudiante realiza demostraciones inductivas a partir de sus percepciones sensoriales, preconceptos, ejemplos, mediciones, sustituir en fórmulas u observar patrones que les permiten generar muchos ejemplos. En los esquemas analíticos, la validación de conjeturas se obtiene mediante deducción lógica: el individuo reconoce que la matemática está soportada por axiomas y postulados que son aceptados sin prueba por la comunidad matemática; son los más avanzados y se consideran verdaderas demostraciones matemáticas.

Pensamiento Algebraico. En su forma elemental tiene que ver con la habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas entre números, objetos y formas geométricas. En su forma pura, favorece el conocimiento profundo para pensar matemáticamente. El pensamiento algebraico amplía la capacidad para resolver problemas, más allá de situaciones concretas y operar con objetos matemáticos de forma lógica, independiente del mundo material (Windsor, 2010).

4. En el contexto de las estructuras algebraicas, al proponer a los estudiantes que demuestren teoremas y resuelvan problemas, se favorece el desarrollo del pensamiento algebraico.

5	4	3	2	1

Responda las siguientes preguntas a partir de su experticia como docente de los cursos de estructuras algebraicas en la formación de profesores:

5. ¿Cuál de los niveles de esquemas de demostración propuestos por Harel & Sowder (2008), considera Usted que utilizan más frecuentemente los estudiantes?

De base externa		Empírico		Analítico	

6. Mencione algunas dificultades que evidencian los estudiantes al resolver problemas y demostrar teoremas de álgebra abstracta:
7. En el contexto de las estructuras algebraicas, durante los procesos de resolución de problemas y de construcción de esquemas de demostración de teoremas, ¿cree Usted que se presenta una manera distinta de razonar? En otras palabras, ¿los procesos mentales (esfuerzo metal) involucrados en uno y otro caso son distintos?

Si		No	

   Escriba algunas razones:
8. Escriba algunas estrategias para favorecer el proceso de resolución de problemas retadores y la demostración de teoremas.

Anexo 3 Encuesta semiestructurada para expertos

Objetivo: Clasificar las opiniones de expertos en estructuras algebraicas, sobre su concepción de si existen diferencias en la forma de razonar cuando se demuestran teoremas y cuando se resuelven problemas de álgebra abstracta.

Duración: 1 hora

DESARROLLO DE LA ENCUESTA

Años de experiencia docente en la enseñanza de la matemática en el nivel universitario

Más de 10		Entre 5 y 10		Menos de 5	

Años de experiencia en la enseñanza de cursos relacionados con las estructuras algebraicas

Más de 5		Entre 3 y 5		Menos de 3	

Su nivel de formación académica

Licenciado		Especialista		Magister		Doctor	

Para las preguntas que se indican a continuación, en una escala de 5 a 1, califique colocando una equis (X) en la opción que considere estar más de acuerdo. Tenga en cuenta que 5 corresponde a la más alta (estar totalmente de acuerdo) y 1 es la calificación más baja (estar completamente en desacuerdo).

5	4	3	2	1
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

El libro Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria (2000-2004) Problemas y Soluciones, editado por la Universidad Antonio Nariño, versa que los problemas no rutinarios son aquellos que invitan al estudiante a pensar autónomamente, indagar, cuestionar, razonar y explicar su razonamiento. Schoenfeld (1985) considera que son preguntas para las cuales el resolutor no conoce los pasos para resolverlas, pero tiene el conocimiento de los hechos y procedimientos necesarios para hacerlo y que estos problemas brindan a los estudiantes la oportunidad de pensar críticamente, presentar ideas creativas, comunicarse matemáticamente con sus compañeros y aprender matemáticas de manera heurística.

1. Los profesores de matemáticas en formación desarrollan las competencias suficientes en la resolución de problemas y demostración de proposiciones en los cursos del núcleo específico de la licenciatura.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

2. Los planes de estudio de las licenciaturas en matemáticas deberían contar con cursos sobre resolución de problemas, en los cuales se enseñen técnicas básicas y se estudien los principales referentes teóricos.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

3. Los estudiantes de los cursos de estructuras algebraicas presentan dificultades cuando se les pide que resuelvan problemas.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

Los teoremas constituyen la esencia de las matemáticas. Un teorema es una afirmación sobre una verdad matemática que debe demostrarse. Balacheff (2010), distingue entre demostraciones y pruebas y considera que una demostración es el argumento lógico deductivo que permite justificar un teorema. La prueba hace referencia a un proceso social en el que un discurso que asegura la validez de una proposición finalmente es aceptado por una comunidad.

Esquemas De Demostración De Teoremas. De acuerdo con Harel & Sowder (2008), son argumentos que utiliza el estudiante para convencerse a sí mismo o para convencer a otras personas y se relacionan con los actos mentales de generalizar y de probar. Proponen tres niveles de esquemas de demostración que representan diferentes etapas cognitivas en el desarrollo matemático del estudiante: de base externa, empíricos y analíticos (axiomáticos). Los de base externa, pueden ser rituales, autoritarios o simbólicos. En los de tipo ritual, los estudiantes se convencen por la forma en que está escrita la demostración; en los autoritarios el convencimiento depende de lo que aparece en los libros o por lo que dice un maestro u otra autoridad; en los simbólicos los estudiantes manipulan símbolos, aunque no entiendan su significado. En los esquemas empíricos, el estudiante realiza demostraciones inductivas a partir de sus percepciones sensoriales, preconceptos, ejemplos, mediciones, sustituir en fórmulas u observar patrones que les permiten generar muchos ejemplos. En los esquemas analíticos, la validación de conjeturas se obtiene mediante deducción lógica: el individuo reconoce que la matemática está soportada por axiomas y postulados que son aceptados sin prueba por la comunidad matemática; son los más avanzados y se consideran verdaderas demostraciones matemáticas.

Pensamiento Algebraico. En su forma elemental tiene que ver con la habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas entre números, objetos y formas geométricas. En su forma pura, favorece el conocimiento profundo para pensar matemáticamente. El pensamiento algebraico amplía la capacidad para resolver problemas, más allá de situaciones concretas y operar con objetos matemáticos de forma lógica, independiente del mundo material (Windsor, 2010).

4. En el contexto de las estructuras algebraicas, al proponer a los estudiantes que demuestren teoremas y resuelvan problemas, se favorece el desarrollo del pensamiento algebraico.

5	4	3	2	1

Responda las siguientes preguntas a partir de su experticia como docente de los cursos de estructuras algebraicas en la formación de profesores:

5. ¿Cuál de los niveles de esquemas de prueba propuestos por Harel & Sowder (2008), considera Usted que utilizan más frecuentemente los estudiantes?

De base externa		Empírico		Analítico	

6. Mencione algunas dificultades que evidencian los estudiantes al resolver problemas y demostrar teoremas de álgebra abstracta:
7. En el contexto de las estructuras algebraicas, durante los procesos de resolución de problemas y de construcción de esquemas de demostración de teoremas, ¿cree Usted que se presenta una manera distinta de razonar? En otras palabras, ¿los procesos mentales (esfuerzo metal) involucrados en uno y otro caso son distintos?

Si		No	

Escriba algunas razones:

8. Escriba algunas estrategias para favorecer el proceso de resolución de problemas retadores y la demostración de teoremas.

Anexo 4 Encuesta semiestructurada para estudiantes

Objetivo: Clasificar las opiniones de estudiantes sobre su percepción, de la incidencia de factores epistemológicos, psicológicos y didácticos en los procesos de demostración de teoremas y resolución de problemas de álgebra abstracta.

Duración: 1 hora

Tema: Aspectos Epistemológicos, Psicológicos y Emocionales que intervienen en la demostración matemática y en la resolución de problemas.

DESARROLLO DE LA ENCUESTA

Edad (años)	Entre 15 y 20		Entre 21 y 25		Mayor de 25	

Semestres en la carrera	Entre 1 y 5		Más de 5	

La demostración de teoremas y la resolución de problemas son actividades importantes en la formación de matemáticos y de docentes, en tal sentido, en educación matemática se realizan investigaciones y se dedica particular interés a las relaciones que existen entre ambas actividades. Muchas investigaciones se direccionan a la demostración y a la resolución de problemas dentro de marcos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, didácticos y curriculares entre otros. Fiallo, et al. (2013) destacan la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración para los docentes y los estudiantes. Destacan que la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) incluye el razonamiento y la demostración en los estándares de procesos que los estudiantes de todos los niveles educativos necesitan conocer, dominar y utilizar.

Desde una visión epistemológica, De Villiers (1990) afirma que los estudiantes aprenden a demostrar cuando logran comprender y experimentar la funcionalidad de la demostración y que hay estudiantes y profesores que se convencen de la validez de una proposición al considerar ejemplos particulares. La demostración permite ir más allá de la simple verificación y es importante en el compromiso de aprender matemáticas.

Responda las siguientes preguntas:

1. Escriba tres razones de la importancia la demostración matemática y la resolución de problemas en un curso de álgebra abstracta.

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Cree que algunas razones coinciden en ambos casos?

Si		No	

Si su respuesta es SI, diga cuales:

2. ¿Qué condiciones debe cumplir la demostración de un teorema para que esta sea validada? ¿Y la solución de un problema para que sea aceptada?

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Pueden encontrarse condiciones similares al realizar ambas tareas?

Si		No	

¿Cuáles?

Desde lo *psicológico*, Selden & Selden (2013) consideran que al demostrar teoremas y al resolver problemas intervienen factores afectivos, emocionales y creencias sobre las matemáticas que inciden en el aspecto psicológico Como consecuencia de ello en ocasiones los estudiantes no saben cómo iniciar o tienen dificultades el proceso de argumentación. Furinghetti & Morselli (2009), consideran que el uso de representaciones puede favorecer u obstaculizar el proceso y que las emociones (sentimientos y afectos) tienen incidencia y que lo direccionan. Schoenfeld (1983) plantea que al resolver problemas y al demostrar proposiciones pocas veces se da un comportamiento sólo cognitivo; el proceso puede distorsionarse por factores afectivos, creencias conscientes o inconscientes, el entorno social y la percepción que tiene el individuo de sí mismo y de la tarea.

Según McLeod (1989), las investigaciones sobre resolución de problemas y demostración de teoremas se concentran más en lo cognitivo que en lo afectivo y lo emocional, que son aspectos complejos de describir. Mandler (1984) arguye que, cuando un individuo inicia una tarea se activa un esquema mental que produce una secuencia de acción, que inconscientemente debería completarse y que cuando se interrumpe este proceso, tienen lugar diferentes emociones: en términos psicológicos, lo que ocurre es que se detiene la secuencia de pensamiento produciendo una excitación fisiológica (como tensión muscular o aumento del ritmo cardíaco). La mente evalúa la interrupción y el resultado puede ser interpretado como sorpresa, frustración o alegría, entre otras.

3. ¿Cree usted que cuando se demuestran teoremas o se resuelven problemas de álgebra abstracta ocurren procesos únicamente cognitivos?

Si		No	

Si su respuesta es NO, ¿qué otro tipo de factores intervienen?

4. Mencione al menos tres (3) tipos de representaciones que Usted utiliza al resolver problemas y cuando demuestra teoremas de álgebra abstracta.

DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Ha utilizado Usted representaciones similares en ambas tareas?

Si		No	

En caso de haber respondido SI, indique algunas.

Los docentes y los estudiantes de matemáticas deben conocer los métodos de demostración de teoremas y técnicas de resolución de problemas. La *didáctica* asociada a estos procesos es importante y por lo tanto su apropiación debe ser un objetivo fundamental. Hanna (1990) cree que en la mayoría de las investigaciones se asume la demostración únicamente como argumento de validación; la demostración debe justificar y explicar: Considera que las demostraciones pueden ser de tres tipos: (a) las formales o teóricas, que están basadas en procesos lógico-deductivos y consideradas el ideal en la matemática pura; (b) Procedimentales, las cuales son admisibles para los profesores de matemáticas; (c) Las que incluyen contenido didáctico, estas definen los resultados matemáticos más importantes que deben aprender los estudiantes.

5. Según lo planteado por Hanna (1990) ¿cuál cree usted que es el principal enfoque de los teoremas y los problemas de álgebra abstracta?

   Formal (teórico) ____ Procedimental ____ Didáctico ___

   ¿Es posible dar a todos los teoremas y problemas de álgebra un enfoque didáctico?

Si		No	

Selden & Selden (2013) consideran que la demostración es una secuencia de acciones físicas (escribir o dibujar) y mentales (recordar resultados, definiciones, teoremas, etc.). Cada acción es respuesta a una situación y los pares situación-acción son respuestas inconscientes a órdenes conscientes y se basan en la heurística, la lógica o estrategias conocidas. Con el tiempo y la repetición, los pares situación-acción se convierten en esquemas mentales de comportamiento y tanto los acertados como los que no lo son, los implementa el individuo cuando resuelve problemas. De Villiers (1990) propone cinco funciones de esta permiten involucrar a los estudiantes en su aprendizaje: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. La verificación posibilita el convencimiento propio o de otros. La explicación se refiere a las razones que justifican la verdad. La sistematización ocurre cuando se usa la demostración para organizar un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas. Un descubrimiento ocurre cuando un individuo deduce un resultado que no esperaba. La demostración es también es un medio de comunicar, cuando a través de ésta se transmiten conocimientos a otros individuos.

6. ¿Cree Usted que es posible involucrar más a los estudiantes para mejorar los procesos de demostración matemática y de resolución de problemas?

Si		No	

Si la respuesta es SI, mencione al menos tres (3) estrategias que usted considere se pueden implementar.

Anexo 5 Encuesta de satisfacción

Objetivo: Evaluar la percepción de los estudiantes en relación con el enfoque, diseño metodológico y la evaluación de las actividades desarrolladas en el curso de Estructuras Algebraicas.

Duración: 1 hora

Para las preguntas a continuación, en una escala de 5 a 1, califique colocando una equis (X) en la opción que considere estar más de acuerdo. Tenga en cuenta que 5 corresponde a la calificación más alta (estar totalmente de acuerdo) y 1 es la más baja (estar completamente en desacuerdo).

5	4	3	2	1
Totalmente de Acuerdo	De Acuerdo	Indiferente	En Desacuerdo	Totalmente En Desacuerdo

DESARROLLO DE LA ENCUESTA

1. La metodología empleada durante el curso, motivada por la solución de las actividades didácticas y las exposiciones realizadas favoreció en los participantes que asumieran la responsabilidad de investigar de manera autónoma.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

2. La metodología permitió mejorar el método tradicional de enseñanza y favoreció el desarrollo de la abstracción y del pensamiento algebraico.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

3. El enfoque basado en la resolución de problemas y la demostración de teoremas despierta la curiosidad y motiva la creatividad para la búsqueda de soluciones.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

4. Al demostrar teoremas y resolver problemas pudo percibirse la incidencia de factores no solamente cognitivos, sino también factores epistemológicos, psicológicos, didácticos y las creencias sobre las matemáticas.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

5. La mayoría de las veces, al demostrar teoremas y resolver problemas de álgebra abstracta se utilizaron representaciones y se emplearon estrategias similares.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

6. El trabajo en comunidades de aprendizaje, en las que se intercambia el rol de los participantes, favoreció el desarrollo del pensamiento algebraico de los docentes en formación.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

7. La manera en que el investigador durante el curso manejó la evaluación del avance de los participantes (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación) fue pertinente.

5	**4**	**3**	**2**	**1**

8. Durante el desarrollo del curso, hubo un interés por parte del investigador en dar a la mayoría de los teoremas y problemas estudiados una presentación y un enfoque didáctico.

5	4	3	2	1

9. La forma de razonar, es decir los procesos mentales involucrados, cuando se demuestran teoremas y se resuelven problemas de álgebra abstracta son los mismos.

5	4	3	2	1

11. Atendiendo a su progreso cognitivo y al manejo cada vez más refinado de la teoría del álgebra abstracta durante el curso, ¿considera que fue posible avanzar (cambio de un nivel a otro), en los tres niveles de esquemas de demostración propuestos por Harel & Sowder (2008): de base externa, empíricos y analíticos (axiomáticos)?

Si		No	

¿Cuál cree Usted que es actualmente el nivel de demostración que más utiliza cuando demuestra teoremas y cuando resuelve problemas de álgebra abstracta?

De base externa		Empíricos		Analíticos	