AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS NO RUTINARIOS

Margarita Pinzón Cardozo

Código: 12991625894

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá, Colombia

2022

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS NO RUTINARIOS

Margarita Pinzón Cardozo

Tesis presentada como requisito para optar al título de:

Doctora en Educación Matemática

Director: Dr. Gerardo Antonio Chacón Guerrero

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá, Colombia

2022

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá D.C. 22 de Enero de 2022.

AGRADECIMIENTOS

Mi más profundo y sincero agradecimiento al doctor Gerardo Chacón, principal colaborador durante todo este proceso de este trabajo, quien, con su dirección, conocimiento, enseñanza, colaboración y entrega en su labor.

A todas las personas que hacen parte del equipo del Doctorado en Educación Matemática por su profesionalismo y por sus aportes en esta investigación.

A mis estudiantes porque fueron parte esencial en esta investigación. Infinitas gracias por su dedicación, entrega y grandes aportes.

DEDICATORIA

A mi esposo Fausto Yobany Castro y mis hijas Zareth y Luisa quienes con su amor y su apoyo incondicional caminaron conmigo para cumplir este sueño.

A mis hermanos que siempre han sido un apoyo a lo largo de mi vida y de los proyectos que me he propuesto.

A mis padres por inculcar en mí el ejemplo y la valentía para cumplir los sueños.

Finalmente, a todos mis amigos, por apoyarme y extender su mano en momentos difíciles.

SÍNTESIS

Esta investigación se realiza con el fin de contribuir a la caracterización del pensamiento geométrico. Partiendo de estudios reportados en la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, autores como Bressoud (2010), Altman y Kidron (2016) y Gomes (2013), evidencian que existe una dicotomía entre la trigonometría triangular y la trigonometría circular, conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, la no familiaridad en las construcciones con regla y compás, no permiten una buena comprensión en el momento de aprender trigonometría.

Observando las dificultades anteriores se propone elaborar un diseño instruccional y una secuencia de siete (7) actividades, partiendo de conceptos fundamentales de la geometría y del problema fundamental que surge de la trigonometría, el cálculo de la longitud de la cuerda.

El diseño instruccional fue elaborado con base en modelo NDR (necesidad psicológica e intelectual, dualidad y razonamiento repetido), compuesto por tres fases: 1) Motivación 2) Intervención del docente y 3) Razonamiento repetido autónomo.

Los problemas propuestos en las actividades fueron pensados para integrar la trigonometría circular y la trigonometría del triángulo, partiendo del problema fundamental que surge de la trigonometría, el cálculo de la longitud de una cuerda. Además, para la resolución de los problemas se tuvo en cuenta el uso del software dinámico GeoGebra como una herramienta didáctica y de apoyo en el aula, favoreciendo la comprensión de estos dos enfoques de manera articulada muy al estilo de lo que sugiere Bressoud (2010).

El análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de las actividades reveló las estrategias utilizadas por los estudiantes en los procesos de resolución de problemas trigonométricos, permitiendo identificar los elementos que aportan en la caracterización el pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo del Instituto Técnico Nueva Familia de Duitama.

SUMMARY

The objective of this research project is to contribute to characterization of geometric thinking, based on existing studies in current literature on teaching and learning trigonometry. Authors such as Bressoud (2010), Altman and Kidron (2016) and Gomes (2013) show that there is a dichotomy between triangular and circular trigonometry; insufficient knowledge in geometry and algebra, as well as lack of familiarity with straightedge and compass constructions, do not allow for solid comprehension when learning trigonometry.

Given the aforementioned difficulties, this work aims to create an instructional design and a sequence of seven (7) activities, starting from fundamental concepts in geometry and from the fundamental problem in trigonometry: calculating the length of a string.

The instructional design was constructed based on the NDR model (Needs, both psychological and intellectual, Duality, and Repeated Reasoning), which comprises three stages: 1) Motivation, 2) Teacher's Intervention, and 3) Autonomous Repeated Reasoning.

The problems proposed in the activities were designed to integrate circular and triangular trigonometry, based on the fundamental problem in trigonometry: calculating the length of a string. Besides, for problem solving, the dynamic software Geogebra was used as a tool for teaching and support in the classroom; GeoGebra enables comprehension of these two approaches in an articulated manner in a style similar to Bressoud's (2010) suggestions.

Analysis of the results obtained during application of these activities showed the strategies utilized by students during the process of solving trigonometric problems, allowing for identification of the elements that contribute to characterization of geometric thought in tenth grade students from the Technical Institute Nueva Familia, in Duitama.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo nombre se deriva de los términos griegos *trigonos* que significa triángulo y *metron* que significa medida, es decir medida de los triángulos. La trigonometría surgió inicialmente con los trabajos de los babilonios, los egipcios, y los griegos quienes ven la necesidad de resolver problemas de la astronomía y otras disciplinas, aplicando relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Posteriormente se definen las funciones trigonométricas empleadas para resolver problemas en otros campos del conocimiento como la mecánica, electricidad, termodinámica, entre otros.

En la educación media, el estudio de la trigonometría se destaca en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM, 2006), creados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), donde se hace énfasis en los cinco tipos de pensamiento y uno de ellos es el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, haciendo referencia a que: *"…La percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no solo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría*[1]*.*

En los últimos años, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) reafirma la importancia del proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en la educación básica secundaría y la media vocacional con la creación e implementación de los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA (2016) y las Matrices de Referencia MR (2016), donde se plantean los siguientes objetivos de aprendizaje de la trigonometría: *"Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente. Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica,*

---

[1] [1] Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias*, Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia. p. 61.

valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones. Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario. Reconoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración, entre otros. Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas"[2].

Se han realizado muchas investigaciones en Educación Matemática sobre el desarrollo del pensamiento geométrico y su caracterización, cuyos resultados han sido tratados con detenimiento en eventos como el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 13, Hamburgo 2016), en cuyos documentos se afirma que: *"La geometría se ha incluido tradicionalmente como una materia de estudio en los planes de estudio de matemáticas secundarias, pero también se ha presentado como un recurso en la resolución de problemas….Además, la geometría a menudo juega un papel en la preparación del maestro, las matemáticas de pregrado y en el lugar de trabajo"*[3].

Otro aspecto relevante que se ha tratado en el ICME, desde 1969, es cómo la resolución de problemas juega un papel importante en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular en un grupo de estudio TSG 19 del ICME 13, (Hamburgo 2016), donde se afirma que: *"La resolución de problemas matemáticos se ha visto durante mucho tiempo como un aspecto importante de las matemáticas, la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas… Y como tal, ha sido de interés para los investigadores de educación matemática durante el tiempo que ha existido nuestro campo"*[4].

---

[2] Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Panamericana. p. 69.

[3] Herberst, P. & Cheah, U. (2017). *Teaching and learning of geometry – secondary level*. ICME 13. Hamburg. p. 1.

[4] Liljedahl, P., Santos, M., Malaspina, U. & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education.* ICME 13, Hamburg (2016), p. 1.

En la literatura reciente se encuentran investigaciones en educación matemáticas, con el propósito de mejorar el proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. La mayor parte de estas investigaciones tienen como objetivo la resolución de problemas, donde el eje central es la resolución de triángulos, es decir establecer relaciones entre los lados del triángulo y los ángulos medidos en grados. Otras investigaciones centran la atención en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), como una herramienta didáctica y de apoyo en el aula, con el objetivo de favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, a través de la visualización y la simulación.

Por otro lado, hay investigaciones con el propósito de identificar las dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden trigonometría. Bressoud (2010), afirma que "*El estudio de la trigonometría adolece de una dicotomía básica que presenta un serio obstáculo para muchos estudiantes*"[5]. Lo anterior se refiere a trigonometría triangular y la trigonometría circular, que se presentan como dos contextos conceptuales distintos, que tienden a confundir a los estudiantes.

Por otra lado, Altman y Kidron (2016) parten de estudios reportados en la literatura, especialmente sobre las dificultades que tienen los estudiantes al no relacionar la trigonometría triangular y circular, y que los estudiantes acceden a la universidad sin el conocimiento firme de la trigonometría, especialmente en relación con el círculo trigonométrico.

Las primeras ideas de la presente investigación sobre las dos trigonometrías no relacionadas de las que habla Bressoud (2010), surgen desde la experiencia como docente y en eventos de reflexión en el contexto de la educación matemática con otros colegas, donde estos manifiestan que existen dificultades cuando los estudiantes deben aplicar y relacionar las dos trigonometrías en la resolución de problemas.
Las investigaciones mencionadas anteriormente confirman la importancia del tema que se propone en la presente investigación.

[5] Bressoud, D. (2010). *Historical reflections on teaching trigonometry*. The Mathematics Teacher, 104(2), 106-112.

Según Gomes (2013) la no familiaridad en las construcciones geométricas con regla y compás, y conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, originan la baja comprensión en el aprendizaje de la trigonometría. Además, personalidades a nivel mundial como el Dr. Luis Cáceres, reconocido matemático que ha realizado importantes aportaciones a las Olimpiadas Matemáticas en Puerto Rico y quien posee amplia experiencia en el campo de la investigación, reconocen que existe una problemática en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en Colombia, y sugieren que este proceso se puede mejorar si los estudiantes tienen un buen método en el aprendizaje de la geometría para luego aprender la trigonometría.

Las investigaciones anteriores y la fase exploratoria permiten determinar el **problema de investigación:** ¿Cómo avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo de la educación media a través de la resolución de problemas de trigonometría?

La propuesta de investigación tiene como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en estudiantes de grado décimo de educación media.

El **objetivo general** es lograr avances en la caracterización del pensamiento geométrico, manifestado por los estudiantes en el grado décimo de la educación media al resolver problemas de trigonometría. A lo largo del trabajo se interpretará caracterización del pensamiento matemático como la identificación de niveles e indicadores de desempeño en el grupo de estudiantes.

El proceso de investigación se llevará a cabo durante el desarrollo de las clases de matemáticas con estudiantes de grado décimo del Instituto Técnico Nueva Familia del municipio de Duitama.

Siguiendo a Drijvers et al. (2019) se observa que, aunque existe consenso en cuanto al que el proceso de enseñanza y aprendizaje debe dirigirse hacia pensar matemáticamente, no hay un acuerdo general hacia lo que esto significa y asumiendo en esta investigación como definición operacional de pensamiento matemático la consideración de que pensar matemáticamente es equivalente a resolver problemas, además de ello, se hará distinción en dos aspectos adicionales: la modelación y la abstracción.

Con el propósito de dar viabilidad al objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Elaborar un diseño instruccional, basado en la resolución de problemas, que ofrezca experiencias de aprendizaje de los conceptos y resultados básicos de trigonometría.
2. Describir los procesos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas de trigonometría, en el marco del diseño instruccional presentado.
3. Describir los procesos que siguen los estudiantes en la modelación de situaciones utilizando trigonometría, en el marco del diseño instruccional presentado.
4. Describir los procesos que siguen los estudiantes al realizar tareas que requieran la abstracción cuando resuelven problemas de trigonometría, en el marco del diseño instruccional presentado.

De acuerdo con el objetivo general y objetivos específicos, el **campo de acción** de esta investigación está dirigido al proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, para hacer un acercamiento a la caracterización del pensamiento geométrico con estudiantes de grado décimo.

Para el cumplimiento de los objetivos indicados y la solución del problema de investigación, se plantean las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Qué trabajos de investigación se han realizado sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, dentro del marco de la educación matemática?
2. ¿Qué referentes teóricos sustentan la caracterización del pensamiento geométrico referente al proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría?
3. ¿Cómo diseñar una secuencia de actividades desde la experiencia como docente, que permitan avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico con estudiantes de grado décimo en el proceso de la resolución de problemas trigonométricos no rutinarios?
4. ¿Cómo valorar el desarrollo de la aplicación de la secuencia de actividades, diseñadas e

implementadas, que permita avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría con estudiantes de grado décimo?

Con la finalidad de dar cumplimiento al objetivo general y responder estas preguntas científicas se plantean las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte, desde la revisión y análisis de investigaciones que han hecho aportes importantes en el desarrollo de la trigonometría, dentro del marco de la educación matemática.
2. Establecer el marco de referencia que permita soportar la base teórica, a través de los referentes conceptuales que guiarán la propuesta de investigación.
3. Diseñar e implementar un conjunto de actividades a través de la metodología de investigación basada en el diseño (IBD), la resolución de problemas, el pensamiento matemático, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) e historia de las matemáticas como herramienta de apoyo en el aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.
4. Analizar y valorar el desarrollo de la secuencia de actividades realizadas por los estudiantes para obtener avances en la caracterización del pensamiento geométrico en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Este documento consta de la introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos.

El primer capítulo se presenta el análisis del estado del arte. En el segundo capítulo se estructura el marco teórico, creado para fundamentar la presente investigación. El tercer capítulo hace referencia a la metodología de investigación con un enfoque cualitativo y el aporte práctico, y en cuarto capítulo se presenta la implementación del diseño instruccional bajo el modelo y el aporte teórico de esta tesis, el cual consiste en lograr avances en la caracterización del pensamiento geométrico.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este primer capítulo se presentan investigaciones realizadas dentro del marco de la Educación Matemática que están relacionadas con la propuesta de investigación; a partir de estos aportes se construye el estado del arte que es soporte de este trabajo de investigación.

Dentro de esas investigaciones se tiene en cuenta: en primer lugar, investigaciones que exploran las dificultades y errores que cometen los estudiantes cuando resuelven problemas trigonométricos. En segundo lugar, investigaciones donde se diseñaron actividades a través de la resolución de problemas y otras formas de enseñar para mejorar la comprensión de la trigonometría. En tercer lugar, se encuentran investigaciones que incorporar las TIC en el proceso enseñanza aprendizaje de la trigonometría.

1.1. Percepciones en el proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría

1.1.1. From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry[6]

La tesis de Challenger (2009) describe una investigación sobre los conceptos trigonométricos desarrollados por estudiantes ingleses de 16-18 años durante sus estudios de matemáticas de nivel A. El estudio es guiado por los marcos teóricos de desarrollo de esquemas matemáticos propuestos por Sfard (1991) y la teoría APOS de Dubinsky (1991) que describen cómo el conocimiento operativo de uno o más procedimientos se convierte en una comprensión conceptual.

En esta investigación se examinan las percepciones de los estudiantes sobre las representaciones mediadoras a través de una investigación fenomenológica basada en mapas conceptuales, entrevistas, observaciones en el aula y resolución de problemas por los estudiantes seleccionados. Dentro de los

[6] Challenger, M. (2009). *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry*. (Tesis doctoral). Universidad de Warwick, Inglaterra.

resultados se encuentra el siguiente comentario de los docentes que enseñan matemáticas en el nivel A:

- *La trigonometría ha sido con frecuencia el tema más problemático para los estudiantes.*

De igual forma se tienen los siguientes comentarios por parte de los estudiantes:

- *¿Estamos hablando de trigonometría triangular o trigonometría circular aquí?*
- *Solía entenderlo cuando solo eran triángulos, pero ahora no sé por dónde empezar*
- *No entiendo radianes, solo puedo hacer trigonometría en grados.*

Con respecto a los objetivos de la evaluación, el investigador concluye que en los segundos mapas conceptuales y las segundas entrevistas, se observa que lo que se está aprendiendo en esta sala de clase puede estar por debajo de los objetivos de evaluación establecidos en el primer año del curso de matemáticas, denominado nivel AS.

Este trabajo es importante para la presente investigación, puesto que pone de manifiesto las deficiencias y dificultades presentadas por estudiantes de básica secundaria en el aprendizaje de la trigonometría, asimismo, se observan dos contextos distintos en la enseñanza de la trigonometría en la escuela.

1.1.2. Historical reflections on teaching trigonometry[7]

Bressoud (2010) en su investigación reflexiona acerca de la enseñanza de la trigonometría y plantea que existe una dicotomía entre la trigonometría triangular, donde los ángulos comúnmente se miden en grados y las funciones trigonométricas se definen como las proporciones entre los lados de un triángulo rectángulo y, por otro lado, la trigonometría circular, donde los ángulos comúnmente se miden en radianes y las funciones trigonométricas se expresan en términos de las coordenadas de un punto en el círculo unitario centrado en el origen. El autor afirma que, frente a dos enfoques conceptuales tan distintos, no es de extrañar que los estudiantes se confundan.

[7] Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *The Mathematics Teacher*, 104(2), 106-112.

Igualmente, existe la tradición de que primero se enseña la trigonometría triangular de una forma simple y básica antes de profundizar en la trigonometría circular. Históricamente, se evidencia que este proceso se desarrolló en dirección opuesta.

El problema fundamental que surge en la trigonometría, es el cálculo de la longitud de una cuerda que conecta los puntos finales de un arco (ver Figura 1), y a los estudiantes raras veces se les proponen problemas que involucran esta temática.

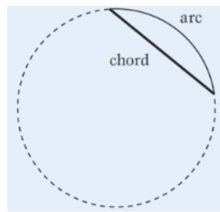


***Figura 1*. Cuerda que conecta dos puntos de la circunferencia**
Fuente: propia del autor del artículo

Por otro lado, se describe en el artículo el surgimiento de la trigonometría triangular, comenzando con el siguiente problema ¿cómo determinar la longitud de una sombra proyectada por una vara vertical, dado el ángulo del sol desde la vertical? (ver Figura 2).

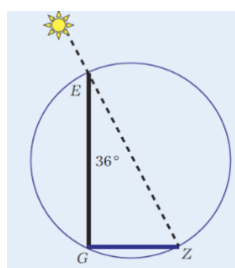


***Figura 2*. Longitud de la sombra proyectada por una vara**
Fuente: propia del autor del artículo

Finalmente, el autor plantea que la historia juega un papel muy importante al describir cómo los antepasados llegaron a descubrir ideas importantes en el campo de la trigonometría, y cómo estas pueden resultar útiles e interesantes en el momento de enseñar trigonometría imitando a los astrónomos que descubrieron y exploraron estas relaciones funcionales al verlas como longitudes de arcos.

Esta investigación propone una forma para abordar el proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, partiendo de la trigonometría circular para luego abordar la trigonometría triangular.

1.1.3. Making sense of mathematics through perception, operation & reason: the case of trigonometric functions[8]

La investigación de Chin & Tall (2012) se realizó con estudiantes de postgrado que se preparan para enseñar matemáticas en secundaria. Se basa en la teoría desarrollada por Tall (2004), donde intenta describir cómo los humanos aprenden a pensar matemáticamente desde la primera infancia hasta las fronteras de la investigación matemática. La investigación se realiza dentro del campo de la trigonometría y se desarrolla desde las relaciones visuales y simbólicas en triángulos rectángulos específicos, trigonometría circular y relaciones de funciones dinámicas.

Para el estudio se realizó un cuestionario con preguntas como:

- Describa $sen\ x$ con sus propias palabras,
- ¿Cuál es el valor de $sen\ 270\ °$? Explique por qué es este valor
- Explique por qué el $sen\ \theta$ nunca puede ser igual a 2.

El propósito era obtener una visión inicial de cómo los estudiantes tienen una conceptualización de la trigonometría. El estudio revela la distancia que tienen que recorrer los tres estudiantes de postgrado, para volverse sensibles a los problemas que surgirán en sus aulas.

Una reflexión más profunda es, sí los educadores matemáticos y otros profesionales involucrados en la enseñanza de las matemáticas como maestros o diseñadores de planes de estudio, son explícitamente conscientes de este problema sobre las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría triangular y circular en nivel secundario.

---

[8] Chin, K. & Tall, D. (2012). Making sense of mathematics through perception, operation & reason: the case of trigonometric functions. *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Canadá.

1.1.4. Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios[9]

Koyunkaya (2016) centra su investigación en describir la comprensión de los estudiantes de postgrado en educación matemática sobre las relaciones entre el seno y el coseno de dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. El estudio se realiza con nueve estudiantes que se ofrecen como voluntarios para completar tres tareas y tres estudiantes voluntarios para responder entrevistas semiestructuradas.

El círculo unitario y el triángulo rectángulo se identificaron como imágenes conceptuales de los estudiantes, también se observa que tienen una comprensión instrumental de las proporciones trigonométricas, mientras que eran menos flexibles para actuar en las tareas de relación trigonométrica, teniendo una comprensión limitada. En la investigación se enfatiza sobre la importancia del papel de la trigonometría en la educación matemática para conectar los conceptos matemáticos, teniendo en cuenta que el estudio de la trigonometría es un requisito previo en cursos de nivel universitario, como física, arquitectura e ingeniería, entre otros.

En particular, aunque a estos estudiantes adultos se les había enseñado trigonometría y conceptos relacionados, y algunos de ellos enseñaban en escuelas secundarias, todos tenían dificultad en razonar sobre las tareas que involucraban las razones trigonométricas. Este hallazgo sugiere un déficit en la comprensión de los estudiantes avanzados que debe explorarse más a fondo. Asistir a un programa de postgrado en el departamento de educación matemática podría ser útil para que los docentes de secundaria (y otros estudiantes adultos) superen sus dificultades y mejoren su capacidad para enseñar trigonometría.

Este trabajo es importante para la presente investigación, porque evidencia las deficiencias y dificultades presentadas por estudiantes de postgrado y la importancia de la enseñanza de la trigonometría en la

[9] Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(7), 1028-1047.

secundaria, puesto que es un requisito previo en cursos de nivel universitario, como la física, arquitectura e ingeniería entre otros.

1.1.5. Trigonometric Concepts: Pre-Service Teachers' Perceptions and Knowledge[10]

La investigación de Nabie, Akayuure, Ibrahim-Bariham, y Sofo, (2018), es diseñada para explorar las percepciones y el conocimiento de los maestros en formación sobre conceptos trigonométricos, evaluando lo que necesitan adquirir los maestros en formación para convertirse en futuros maestros competentes en la enseñanza de las matemáticas. Los investigadores proponen las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son las percepciones, de los maestros en formación, sobre conceptos trigonométricos?, ¿qué nivel de conocimiento tienen los maestros en formación sobre conceptos básicos de trigonometría? y ¿cuáles son las dificultades conceptuales, de los maestros en servicio, sobre trigonometría?

El estudio se realiza con 119 maestros en formación de dos colegios de educación secundaria en la Región Norte de Ghana, que estaban preparados para comenzar la práctica docente en varias materias, incluidas las matemáticas del nivel básico.

El estudio identifica cuatro hallazgos principales en la mayoría de los maestros en formación:

1. Considera que los conceptos trigonométricos eran abstractos y aburridos. Sin embargo, perciben que aumentan su capacidad para el razonamiento y el análisis.
2. Carece del conocimiento básico sobre trigonometría y los pocos que conocían los conceptos no los entendieron.
3. No realiza la gráfica de la función seno y tampoco indican sus características.

[10] Nabie, M.J., Akayuure, P., Ibrahim-Bariham, U.A., & Sofo, S. (2018). Trigonometric concepts: Pre-service teachers' perceptions and knowledge. *Journal on Mathematics Education, 9*(2), 169-182.

4. Tiene dificultades conceptuales con las relaciones trigonométricas, situación que limita su capacidad de explicar identidades trigonométricas básicas o aplicar las relaciones para demostrar identidades trigonométricas básicas.

Finalmente, los investigadores concluyen que la mayoría de los maestros en formación no puede construir y reconstruir las estructuras mentales apropiadas para una comprensión significativa que les permitiera responder a importantes tareas básicas de trigonometría. Por lo tanto, infieren que, para lograr el objetivo de una educación de calidad en matemáticas, los docentes de las universidades de Ghana que ofrecen la carrera de educación, necesitan cambiar su práctica de instrucción para desarrollar una buena comprensión de los conceptos trigonométricos por parte de los maestros en formación.

1.2. Enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas y otras formas de enseñanza de la trigonometría

1.2.1. Teaching the art of problem solving[11]

La propuesta de Post (1994) tiene como objetivo realizar un curso sobre resolución de problemas durante un "corto plazo". A los estudiantes, que no se especializan en matemáticas o ciencias matemáticas, a menudo les resulta difícil entender y participar en el "verdadero pensamiento matemático". Post afirma que es gratificante para el maestro trabajar con estudiantes extremadamente brillantes, pero el verdadero desafío para el maestro está en trabajar con estudiantes con bajo desempeño o estudiantes promedio. Aquellos estudiantes que han llegado a la escuela con un buen trabajo al dominar los algoritmos matemáticos, pero sin un conocimiento real de qué son las matemáticas y cómo funcionan, encuentran una nueva realidad en la universidad que los cuestiona sobre qué es pensar matemáticamente.

El curso fue diseñado con cincuenta problemas, que fueron seleccionados desde varias fuentes como

[11] Post, S. (1994). Teaching the art of problem. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *4*(4), 359-368.

"*Thinking Mathematically"* de Mason, Burton, & Stacey (1982) y un texto secundario *"Cómo plantear y resolver problemas"* de Polya (1965).

El primer día de clases se distribuyeron los problemas a los estudiantes, ellos trabajaron en la solución de los problemas durante el trimestre, a medida que los estudiantes solucionaban los problemas los entregaban al docente y la forma de evaluar al estudiante era elogiar las respuestas correctas y realizar sugerencias cuando fuese necesario para corregir los errores.

Uno de los resultados importantes durante el curso, fue que al ingresar en el aula de clases se observó que los estudiantes ya hablaban animadamente sobre los problemas, estaban muy motivados y pensando en los problemas todo el tiempo, pensando matemáticamente y aumentando su confianza y seguridad hacia el aprendizaje de las matemáticas, situación que casi nunca se presenta en las clases tradicionales, pues lo importante era que el estudiante resolviera de forma correcta los problemas a lo largo del curso sin importar el tiempo.

Este trabajo es importante para la presente investigación, porque uno de los objetivos es la resolución de problemas no rutinarios, permitiéndole al estudiante aplicar de forma autónoma y creativa todos los conocimientos matemáticos que posee.

1.2.2. Tour of a simple trigonometry problem[12]

Kin-Keung (2012) se centra en un problema simple de la trigonometría que presenta un fenómeno extraño cuando se aplican diferentes métodos de solución, es decir, los resultados en cada método son diferentes. El problema radica en dos triángulos rectángulos construidos sobre una misma base BC, (ver Figura 3). Según la gráfica este lado BC es igual para los triángulos.

[12] Kin-Keung, P. (2012). Tour of a simple trigonometry problem. c, *Hong Kong Institute of Education, 10 Lo Ping Road, Tai Po, Hong Kong*, *43*(4), 449-461.

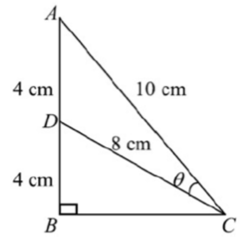


Figura 3. **Triángulos rectángulos que comparten la misma base**
Fuente: propia del autor del artículo

Cuando los estudiantes realizan los cálculos matemáticos para hallar el lado BC, encuentran que los datos del problema son inconsistentes.

A partir de este problema de trigonometría, Kin-Keung (2012) propone una serie de actividades de resolución de problemas para que los estudiantes de secundaria puedan abordarlas con precisión. La característica fundamental de estas actividades es proponer nuevos problemas partiendo del problema inicial, observando debilidades y fortalezas en la solución de este tipo de problemas.

El autor concluye que la resolución de problemas les permite a los estudiantes experimentar una gama de emociones asociadas a cada una de las etapas abordadas cuando resuelven los problemas con éxito, apreciando la grandeza de las matemáticas.

Uno de los resultados que cabe destacar, es que estudiantes a los cuales se les dificulta la resolución de problemas, entienden y aprecian el proceso del pensamiento cuando pasan por cada una de las etapas de la resolución de problemas y pasos en las actividades propuestas. También se reconoce las ventajas de la resolución de problemas para construir un pensamiento lógico matemático.

1.2.3. Teaching trigonometry using an historical approach: an educational product[13]

El estudio realizado por Gomes (2013) muestra la construcción de un libro de actividades para la

[13] Gomes, S. (2013). Teaching trigonometry using an historical approach: an educational product. *Bolema, Boletim de Edecação Matemática, 27*(46), *563-577.*

enseñanza de la trigonometría -Trigonometría con un enfoque histórico-, con el fin de promover entre los docentes del área de matemáticas, posibles articulaciones pedagógicas que involucran la historia de la trigonometría.

Esta propuesta de investigación se dio al percibir, que en el transcurso de su experiencia como docente, los estudiantes presentan dificultades al interpretar enunciados de problemas y al aplicar conceptos básicos de geometría y trigonometría. Además, diferentes estudios como Brito y Morey (2004) y Nacarato, Bredariol y Pasos (2007), afirman que la mayoría de los docentes tenía poca formación en los cursos de pregrado en la enseñanza de la geometría y prácticamente nulo en la enseñanza de la trigonometría.

De acuerdo con lo anterior, el investigador elabora un libro de actividades que explora el desarrollo de la trigonometría por medio de cinco actividades secuenciales, enfocando conocimientos algebraicos, geométricos y trigonométricos teniendo en cuenta la historia, el software GeoGebra, como recurso auxiliar, para la construcción de figuras geométricas.

Algunos de los resultados obtenidos durante el transcurso de la investigación son: 1) El proceso de diseño y aplicación del material educativo. 2) Cursos de corta duración para docentes de matemáticas o alumnos de licenciatura en matemáticas y 3) La metodología utilizada en los cursos se presenta mediante un taller pedagógico conformando grupos pequeños de trabajo, el docente que dirige el curso coordina las actividades, despejan dudas y dan sugerencias, además observa las dificultades que presentan los participantes.

Algunos obstáculos encontrados en la aplicación de las actividades fueron: la no familiaridad con las construcciones geométricas con regla y compás, y conocimientos insuficientes en geometría y el álgebra, que originan la baja comprensión en el aprendizaje de la trigonometría.

1.2.4. The Circle Approach to Trigonometry[14]

En la investigación de Moore y LaForest (2014) sobre la enseñanza de las funciones trigonométricas, se observa que la mayoría de los docentes está de acuerdo, que los estudiantes presentan dificultades para hacer uso las funciones trigonométricas y relacionarlas como cantidades en los contextos del círculo unitario y del triángulo rectángulo. Si los estudiantes van a hacer uso de las funciones trigonométricas productivamente, deben entender los siguientes conceptos: la medida de un ángulo, el círculo unitario y los triángulos rectángulos.

Los autores se basan en investigaciones recientes sobre el aprendizaje de los estudiantes en trigonometría para introducir la medida del ángulo y la función seno, conectándolos entre sí de modo que implique un razonamiento cuantitativo, porque se piensa de manera diferente la medida de un ángulo en radianes que la medida del ángulo en grados. Esto resulta en una dicotomía en la comprensión de las funciones trigonométricas. Como señalaron Bressoud (2010) y Thompson (2008).

En las primeras experiencias con los estudiantes en el tema de ángulos, se hace referencia al uso de un transportador para determinar la medida del ángulo en grados y seguramente clasificarlos en agudos, obtusos, complementarios y suplementarios etc. Lo anterior solo se centra en la acción de medir ángulos, pero no relaciona el diseño del transportador con la partición de un arco o la cuestión de cómo se podría medir un ángulo sin transportador.

La investigación sugiere que el uso del círculo unitario es más adecuado para un enfoque que se basa en la medición de ángulos e involucra fundamentalmente ideas de medición, covarianza y equivalencia. Sin embargo, no se puede concluir que trigonometría circular sea más importante que la trigonometría triangular, ambos contextos ofrecen muchas aplicaciones y usos importantes.

[14] Moore, K. C. & LaForest, K. R. (2014). The circle approach to trigonometry. *The Mathematics Teacher, 107*(8), 616-623.

1.2.5. Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle[15]

Altman y Kidron (2016) parten de estudios reportados en la literatura, especialmente sobre las dificultades que tienen los estudiantes con las dos trigonometrías no relacionadas. Ellos, percibieron que los estudiantes acceden a la universidad sin un conocimiento firme de la trigonometría, especialmente en relación con el círculo trigonométrico.

El objetivo general de esta investigación es analizar el proceso de construcción del conocimiento en la transición de la trigonometría triangular a la trigonometría circular. La investigación enfatiza sobre cómo los estudiantes construyen el conocimiento y cómo este evoluciona a través del tiempo.

Las actividades propuestas por los investigadores se centran en dos situaciones, la primera en dibujar triángulos rectángulos con hipotenusa de una (1) unidad, donde el estudiante debe analizar en cada uno el valor aproximado de la función seno y coseno, en la segunda situación los estudiantes deben dibujar sobre el plano cartesiano un círculo unitario con diferentes ángulos y deben hallar el valor aproximado de la función seno y coseno.

Una de las conclusiones de la investigación reside esencialmente en el micro análisis del proceso de construcción del conocimiento y la transición de la trigonometría triangular a la trigonometría circular. Los estudiantes fueron capaces de construir el significado de las funciones trigonométricas en el círculo unitario. El autor presenta algunas limitaciones de este estudio, que se ven reflejadas en que, en los datos tomados de las construcciones para realizar operaciones, los estudiantes no distinguen entre respuestas aproximadas y respuestas exactas.

---

[15] Altman, R., & Kidron, I. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1048-1060.

1.3. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la trigonometría con apoyo de las TIC

1.3.1. High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge[16]

La investigación de Santos y Barrera (2011) utiliza una serie de tareas para promover la reflexión de los docentes de secundaria sobre las formas de abordar los problemas promoviendo el uso de diferentes herramientas computacionales. Las tareas se agrupan en función de la naturaleza de los datos que intervienen en el enunciado del problema.

Veamos un problema propuesto. Un camión se está acercando a un paso subterráneo donde hay una señal de tránsito que indica la altura máxima. El puente está ubicado justo en la base de carretera descendente (ver Figura 4). Las preguntas que se le plantearon a los docentes fueron: ¿qué datos son esenciales para saber si el camión puede pasar por debajo del puente?, ¿cuál es el efecto de la inclinación de la carretera respecto a la altura del camión al pasar por debajo del puente?

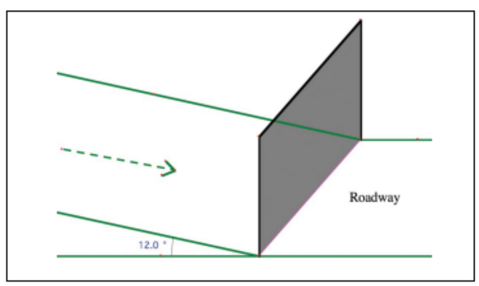


Figura 4. **Representación de la calzada y el puente**
Fuente: propia del autor del artículo

Los participantes leyeron y entendieron el problema, luego pidieron más información. Como: ¿qué tipo de camión debemos tener en cuenta?, ¿qué dimensiones debe tener el tráiler del camión?, entre otras.

Es importante resaltar es esta investigación es el uso del software dinámico, puesto que, les permite

[16] Santos, M. & Barrera, F. (2011). High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 21(8), 699-718.

observar a través de la simulación el comportamiento de la altura del camión para diferentes posiciones en un punto determinado. En estas condiciones, la visualización juega un papel importante en la resolución de este de problemas.

Los autores comentan que los participantes reconocieron que el objetivo era identificar y explorar un conjunto de relaciones matemáticas que surgieron durante el proceso de la resolución del problema. Es evidente que el uso de estas herramientas ayudó a los docentes a pensar en diferentes formas de representar y explorar objetos matemáticos asociados con la resolución del problema. Concluyendo que estas actividades permiten modelar problemas de forma dinámica y promueven el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Este trabajo propone el uso de las TIC, como una herramienta que le permite a los estudiantes visualizar los problemas de forma dinámica, proporcionándoles escenarios favorables para resolver problemas matemáticos.

1.3.2. The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry[17]

El propósito de la investigación de Zemin, Firman y Butuca (2014) es determinar los efectos del software dinámico GeoGebra sobre el rendimiento de los estudiantes en la enseñanza de las funciones trigonométricas en la clase de matemáticas, porque observaron que este campo los estudiantes experimentan dificultades cruciales en su aprendizaje, según afirman (Adamek, Penkalski & Valentine, 2005; Butuca & Baki, 2009; Tatar, Okur & Tuna, 2008), citado por Zemin, Firman y Butuca (2014).

El objetivo de este trabajo es determinar la eficiencia del método de enseñanza asistida por computador. Los autores afirman que hay una lucha para integrar el computador en la escuela, siendo una herramienta

[17] Zengin, Y., Furkan, H. & Kutluca, T. (2014). The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *31*, 183-187.

didáctica que le permite al docente implementar nuevos métodos en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

La investigación contiene actividades con uso de GeoGebra y otras prácticas sobre los logros establecidos de acuerdo con el plan de estudios oficial de matemáticas. Se desarrolló con dos grupos, uno experimental de 51 estudiantes y un grupo de control conformado con 26 estudiantes. El grupo experimental se somete a una metodología asistida por computador con el software GeoGebra, el otro grupo de control trabaja lecciones con clases magistrales. Los resultados de la investigación indican que hubo una diferencia significativa entre los promedios de los puntajes de los estudiantes en el examen posterior a favor del grupo de estudiantes que trabajo con el software GeoGebra.

Esta investigación se centra en la importancia que tienen las herramientas TIC, que le permiten al docente y al estudiante mejorar sus prácticas en el aula, especialmente en procesos dinámicos como son las construcciones de gráficas, brindándole al estudiante la oportunidad de experimentar, interactuar, visualizar y de esta forma construir y potenciar sus conocimientos.

1.3.3. Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course[18]

Gutiérrez y Fiallo (2017) en esta investigación presentan los resultados de una intervención en el aula diseñada para ayudar a los estudiantes de grado 10º en aulas de Colombia donde aprenden a realizar demostraciones en un entorno de software de geometría dinámica mientras estudian trigonometría.

Los objetivos de la investigación fueron diseñar y administrar una unidad de enseñanza de la trigonometría, y proporcionar a los estudiantes un ambiente adecuado para realizar las demostraciones dentro de su proceso de aprendizaje.

[18] Gutiérrez, A. & Fiallo, J. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 145-167.

Para realizar el análisis, se busca información sobre dos preguntas críticas entrelazadas sobre la resolución de problemas de conjetura y demostración:

1. ¿De qué manera el tipo de conexión (o la falta de ella) entre la producción de una conjetura y la construcción de la demostración afecta el tipo de demostración (empírica o deductiva) producida?
2. ¿Cómo se puede evaluar si hay una evolución en los tipos de demostraciones realizadas por los estudiantes a lo largo de la intervención en el aula?

Se analizan las soluciones de algunos estudiantes, donde se les permite adquirir experiencia en la formulación de conjeturas y el desarrollo de demostraciones, observando el progreso en los estudiantes desde el desarrollo de las demostraciones empíricas básicas hacia el desarrollo de demostraciones deductivas y la comprensión del papel de las conjeturas y las demostraciones en las matemáticas deductivas.

Este trabajo es importante para la presente investigación, porque pone de manifiesto la importancia que tienen las demostraciones en el campo de la enseñanza de la trigonometría, el papel de la conjetura, la resolución de problemas y el buen uso de las TIC en el aula.

Conclusiones del Capítulo 1

En este capítulo se muestra la revisión de literatura sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. En las investigaciones se evidencia la existencia de una brecha cuando se enseña trigonometría triangular y trigonometría circular, concluyendo que no existe una buena comprensión por parte de los estudiantes.

Varios autores, entre ellos Gomes (2013) resaltan la dificultad que tienen los estudiantes cuando aprenden trigonometría por la no familiaridad en las construcciones geométricas con regla y compás, y conocimientos insuficientes en geometría y álgebra.

Otras investigaciones resaltan la importancia de la enseñanza de la trigonometría, porque existen aplicaciones en el contexto real y en otras áreas del conocimiento como la Física. Sin embargo, son limitadas las investigaciones sobre caracterización de la geometría a través de la resolución de problemas trigonométricos e investigaciones sobre cómo disminuir la brecha cuando se enseña trigonometría triangular y trigonometría circular.

Otro aspecto importante encontrado en la revisión de la literatura, es la resolución de problemas, porque les permite a los estudiantes la construcción de un pensamiento matemático lógico, estimula la capacidad para crear, investigar, razonar y experimentar una gama de emociones asociadas en cada una de las etapas abordadas cuando resuelven los problemas, apreciando la grandeza de las matemáticas, como lo afirma Kin-Keung (2012).

Ahora bien, el uso de la regla, compás y graduador son importantes para una buena comprensión y abstracción de los conceptos en la trigonometría, pero no se debe limitar simplemente al uso de estos instrumentos. Las TIC son una herramienta de apoyo en el aula, que se puede usar para explicar, modelar, resolver problemas, realizar demostraciones, también provoca y activa el trabajo mental del estudiante y facilita la comprensión de los conceptos abstractos de la trigonometría.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que soportan el trabajo de investigación. Estos fundamentos teóricos están organizados en seis componentes: resolución de problemas, pensamiento matemático, modelo DNR, uso de las TIC e historia de las matemáticas como una herramienta didáctica y de apoyo en el aula en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

2.1. Resolución de Problemas

Durante muchos años la resolución de problemas ha sido un tema abordado por diferentes investigadores en el campo de la educación matemática. A continuación, se presenta brevemente los aportes de algunos autores. Polya (1954) plantea que resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como por ejemplo el nadar. La habilidad se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de resolver problemas hay que observar, imitar lo que hacen otras personas en casos semejantes y así aprender a resolver problemas. Falk (1980), señala que para que un problema sea motivante para el estudiante debe tener tres características *"… que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el estudiante, y que la solución no sea inmediata"*[19]. Santaló (1981), señala que *"enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema"*[20].

2.1.1. Enfoques en la resolución de problemas para la comprensión matemática

The National Council of Teachers of Mathematics, EE. UU. (1980) recomienda que: *"La resolución de problemas debe ser el objetivo principal en la enseñanza de las matemáticas"*[21]. Los estudiantes de hoy, van a vivir en un mundo donde se van a enfrentar a situaciones cada vez más complejas. Por lo tanto, la

[19] Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. p.16.
[20] Santaló, L.A. (1981). *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires: Docencia.
[21] The National Council of Teachers of Mathematics, EE. UU. (1980). *An agenda for action: Recomendations for School Mathematics for the 1980s*, Reston, Virginia., National Council of Teachers of Mathemactics.

resolución de problemas debe ser uno de los instrumentos principales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que permite el desarrollo de habilidades intelectuales cuando se enfrentan a situaciones complejas. De acuerdo con lo anterior, la resolución de problemas debe plantarse como uno de los objetivos para la educación en este milenio.

Schroeder y Lester (1989, pp. 32-33) escribieron sobre el desarrollo de la comprensión matemática a través de la resolución de problemas desde tres enfoques distintos. Los cuales son:

1. *Enseñanza sobre la resolución de problemas*
2. *Enseñanza para la resolución de problemas*
3. *Enseñanza a través de la resolución de problemas*

Cuando *enseñan sobre la resolución de problema,* los docentes con frecuencia utilizan el método de cuatro pasos para resolver problemas formulado por Polya (1957). Además, se les enseña una serie de "heurísticas" o "estrategias", las cuales se pueden aplicar en la resolución de problemas.

En la *enseñanza para la resolución de problemas*, los docentes se enfocan en cómo las matemáticas que enseñan, pueden aplicarse en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios. Además, el docente que enseña a resolver problemas se preocupa por la capacidad que tienen los estudiantes para transferir lo que han aprendido en un contexto de resolución de problemas y aplicarlo en otro contexto.

En la *enseñanza a través de la resolución de problemas,* los problemas se valoran no solo como un propósito para aprender matemáticas, sino también como el medio principal para hacerlo. Para la enseñanza de un tema matemático, primero se plantea un problema que incorpora aspectos claves del tema, estimula el pensamiento de los estudiantes, cumple una función motivadora y logra mostrar para qué sirven las matemáticas.

2.1.2. Elementos en la resolución de problemas

El trabajo de Schoenfeld (1985) ha tenido gran influencia en la investigación sobre resolución de problemas (ver Barrantes, 2006). En él plantea un marco, para la resolución de problemas matemáticos, que describe los elementos a examinar para determinar el éxito (o no) en la resolución de un problema. Estos son:

1. Recursos: se refiere a los conocimientos matemáticos que posee la persona que aborda la resolución del problema.

2. Estrategias de resolución de problemas: conocidas como heurísticas: ¿qué herramientas o técnicas se aplican en la resolución de problemas?

3. Control: aspectos de la metacognición que permiten "*maneja*r" los recursos de resolución de problemas.

4. Creencias: el sentido individual que los individuos otorgan a las matemáticas, a sí mismos, al contexto y en general, todo lo cual da sentido a lo que perciben y lo que eligen hacer al abordar un problema.

Posteriormente Schoenfeld (2010) examina su trabajo y propone lo que denomina una teoría de resolución de problemas, en la que indica tres elementos que determinan las elecciones del que aborda un problema, matemático o no. Estos son: objetivos, recursos y orientaciones. Este último término abarca disposiciones, creencias, valores, gustos y preferencias.

Zayyadi (2019)[22] reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas como parte del proceso cognitivo de individualización llevado a cabo por cada estudiante. A pesar de ser un proceso interno, implica comunicación. Los procesos de individualización y comunicación están interrelacionados reflexivamente (Sfard, 2007). El propósito del análisis cognitivo, es observar la capacidad que tienen los estudiantes para

---

[22] Zayyadi, Moh. (2019. A Commognitive framework: The process of solving mathematical problems of middle school students. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research,* 18(2), 89-102.

resolver problemas, no solo por los resultados que obtienen, sino también por las palabras utilizadas, las rutinas realizadas, figuras o símbolos para mejorar la comunicación y mediadores utilizados para resolver problemas.

Los elementos examinados por Zayyadi (2019), como parte del análisis cognitivo fueron: el uso de palabras, mediadores visuales, narraciones compatibles y rutinas.

2.2. Pensamiento Matemático

2.2.1. Enfoques del pensamiento matemático

Drijvers, Kodde-Buitenhuis, & Doorman, (2019) afirman que, a pesar del consenso sobre la importancia del pensamiento matemático como un objetivo de aprendizaje, las opiniones están divididas y se presentan a través de tres enfoques. El primero enfatiza sobre la resolución de problemas (por ejemplo, Mason, 2000; Pólya, 1962; Schoenfeld, 1992, 2013, 2014). Un segundo aspecto sobre el pensamiento matemático se refiere al modelado, este implica conectar las matemáticas con el mundo que nos rodea, aplicarlas e inventar las matemáticas para resolver problemas. (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007; Kaiser, Blomhøj y Sriraman, 2006). Un tercer aspecto sobre el pensamiento matemático, es la perspectiva de la abstracción. La abstracción es *"una actividad mediante la cual nos damos cuenta de las similitudes [...] entre nuestras experiencias"*[23] Skemp (1986), por decirlo de otra manera, *"… el aislamiento de atributos específicos de un concepto pueden considerarse por separado de los otros atributos"*[24] Tall (1988). Como resultado de esta abstracción, se ingresa al mundo de los objetos matemáticos y sus relaciones (Mason, 1989).

Este triple modelo sobre la resolución de problemas, el modelado y la abstracción, se convierte en elemento importante para el desarrollo del pensamiento matemático.

---

[23] Skemp, R. (1986). The psychology of mathematics learning. *Suffolk: Penguin Books*.
[24] Tall, F. D. (1988). Covering and separation properties in the Easton model. *Topology and its Applications*, *28*(2), 155-163.

2.2.2. Procesos en el pensamiento matemático

Falk (1994) propone un modelo, a partir de ideas de Leone Burton, que describe los procesos del pensamiento matemático.

Afirma Falk (1994) que para pensar es necesario un estímulo o evento. Estos son los elementos sobre los que actúa el pensamiento matemático, el cual busca representar y relacionar estos eventos de alguna manera. El pensar significa que se ordenan dichos elementos, haciendo correspondencias y equivalencias, llamadas operaciones del pensamiento matemático.

Falk (1994) describe cuatro de estos procesos que considera centrales: especializar, conjeturar, generalizar y convencer, y los describe de la siguiente manera.

Especializar: cuando se está frente a un problema o pregunta, una forma valiosa de explorar su significado es examinando modelos particulares. Esta es la clave desde una mirada inductiva en el aprendizaje y se observa de manera natural en los niños.

Conjeturar. Cuando se examinan suficientes modelos o ejemplos, automáticamente se hacen conjeturas acerca de las relaciones que los conectan, a través de este proceso se explora y se ratifica un patrón subyacente.

Generalizar. Cuando se reconoce una regularidad o un patrón subyacente, se desencadena en la afirmación de una generalización. Estas afirmaciones, son los elementos usados por los aprendices para dar orden y significado entre una cantidad abrumadora de información. El precisar comportamiento depende de dichas generalizaciones.

Convencer. Para llegar a una generalización sólida, no es suficiente con verificar, es cuestionar hipótesis o supuestos, dudar y sondear la generalización, para llegar a producir una demostración.

La dinámica del pensamiento matemático, según Falk (1994) se inicia cuando un elemento provoca suficiente sorpresa o curiosidad para impulsar su exploración a través de la manipulación. Este elemento puede ser un objeto físico, un diagrama, una idea o un símbolo, que sea inspirador para el pensador y lo incite a la interpretación. Cualquier vacío que se presenta antes de la manipulación y lo que realmente sucede al manipularlo, genera una tensión que lo lleva a buscar un patrón. Encontrar ese patrón lo libera de tensión y lo conduce a una sensación de logro haciendo que la curiosidad o expectativas en el proceso se mantengan.

2.3. Modelo DNR

El modelo DNR de Harel (2008)[25] es un sistema de enseñanza de la matemática que contempla condiciones de aprendizaje basadas en tres principios, de los cuales se deriva el nombre del modelo, como son: Principio de dualidad, principio de necesidad y principio de razonamiento repetitivo.

El Principio de Dualidad, afirma que los estudiantes desarrollan formas de pensar a través de la producción de formas de entender y, las formas de entender que ellos producen se ven afectadas por las formas de pensar que poseen. Además, manifiesta que los estudiantes no llegan a la escuela con la mente en blanco. Más bien, lo que los estudiantes saben se constituye en una base para robustecer lo que aprenderán en el futuro.

El principio de necesidad: para que los estudiantes aprendan las matemáticas que pretendemos enseñarles, deben tener una necesidad, donde la "necesidad" aquí referida es la necesidad intelectual.

El principio de razonamiento repetido: Los estudiantes deben practicar el razonamiento para interiorizar las formas deseables de entender y de pensar. Por lo tanto, un solo problema no es suficiente para que os estudiantes interioricen completamente las formas de pensar. Se hace necesario proporcionarles a los estudiantes situaciones que requieran la aplicación de una forma de pensar específica.

[25] Harel, G. (2008). Una perspectiva DNR sobre el currículo y la instrucción de matemáticas. Parte II: con referencia a la base de conocimientos del profesor. ZDM, 40 (5), 893-907.

Incluso si las formas de comprender y las formas de pensar son intelectualmente necesarias para los estudiantes, los maestros deben asegurarse de que sus estudiantes interioricen, retengan y organicen el conocimiento. (ver Figura 5).

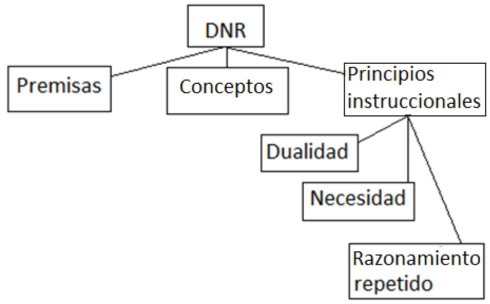


***Figura 5*. Principios instruccionales del modelo de Harel**
Fuente: propia del autor del artículo

Las premisas del modelo DNR que surgen de un proceso de exploración y reflexión vienen a ser la base teórica que sustentan los principios instruccionales. En total son ocho premisas agrupadas en cuatro categorías como son:

- *Premisa matemática. El conocimiento de las matemáticas consiste de todas las formas de entender y de pensar que se han institucionalizado a lo largo de la historia.*
- *Premisa aprendizaje. Los humanos -todos los humanos- poseen la capacidad de desarrollar el deseo de ser desconcertados y de aprender a realizar actos mentales para resolver los rompecabezas que crean. Las diferencias individuales en esta capacidad, aunque presentes, no reflejan capacidades innatas que no pueden ser modificadas a través de una experiencia adecuada. El conocimiento es un proceso de desarrollo que procede a través de una tensión continua entre asimilación y acomodación, dirigida hacia un equilibrio (temporal).*
- *Premisa enseñanza. El aprendizaje de las matemáticas no es espontáneo. Siempre habrá una diferencia entre lo que uno puede hacer bajo la dirección de un experto o en colaboración con compañeros más capaces y lo que puede hacer sin orientación.*

- *Premisa ontológica. Subjetividad, cualquier observación que los humanos afirmen que han hecho se debe a lo que su estructura mental atribuye a su entorno. Interdependencia, Las acciones de los seres humanos son inducidas y se rigen por sus visiones del mundo y, a la inversa, sus visiones del mundo se forman por sus acciones*[26].(ver Figura 6).

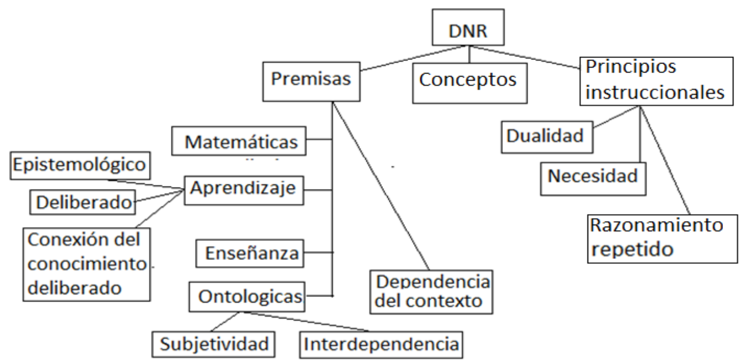


Figura 6. **Premisas del modelo DNR de Harel**
Fuente: propia del autor del artículo

La definición de aprendizaje de las matemáticas en el modelo DNR se deriva de las premisas, cuando el estudiante encuentra una situación problema, experimentando una fase de desequilibrio, cuando encuentra la solución al problema experimenta el equilibrio. El desequilibrio lo causa el obstáculo, llevando al estudiante a ir más allá de su conocimiento actual para formar el concepto de aprendizaje, es decir, el equilibrio entre la estructura de la mente y el entorno.

El modelo DNR incorpora la necesidad psicológica y necesidad intelectual. La primera pertenece al campo de la motivación, su objetivo es activar e impulsar el aprendizaje en general mediante la resolución de un problema. La segunda se refiere a la epistemología de una disciplina concreta con un individuo o comunidad frente a los conocimientos que poseen actualmente. Existe la necesidad de adquirir nuevos conocimientos o reacomodar los que ya posee para poder resolver un problema.

Es así que para Harel (2008) una forma de entendimiento y una forma de pensamiento desde el punto de

---

[26] Harel, G. (2008). Una perspectiva DNR sobre el currículo y la instrucción de matemáticas. Parte II: con referencia a la base de conocimientos del profesor. *ZDM*, *40* (5), 893-907. (p 894)

vista pedagógico y epistemológico de la matemática, se relaciona como una disciplina que pude presentarse en dos categorías de conocimiento: la primera es la forma de entender que está relacionada directamente con el tema de estudio y la segunda es la forma de pensar que implica la herramienta conceptual. Harel (2008) define las formas de pensar y entender de la siguiente forma. *"Una forma de entender es el producto de un acto mental, mientras que una forma de pensar es una característica de las formas de comprensión asociadas a ese acto"*[27]

Por último, desde la perspectiva constructivista del modelo DNR, en el proceso enseñanza aprendizaje a través de la resolución de problemas, resulta indispensable la participación del docente en el aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos. Los estudiantes necesitan de un guía que facilite la adquisición de conocimientos.

2.4. Las TIC como herramienta didáctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Real (2013)[28] reflexiona sobre la era de la tecnología que se está viviendo en las instituciones educativas. El uso de diferentes recursos tecnológicos por parte de los estudiantes y docentes, pueden llegar a jugar un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, si se utilizan correctamente. Por esta razón, se requiere que el docente tenga adquiridas una serie de competencias profesionales, no solamente en el uso de las herramientas que corresponda a cada momento, sino más importante aún, la metodología que va a utilizar, y que será la que haga que el proceso de enseñanza y aprendizaje alcance los objetivos que se haya planteado inicialmente.

Moreno (2018)[29], describe la importancia de la representación en las matemáticas a través de ejemplos. El mapa de una región, es la representación de un territorio que ya existía antes de que alguien se le

---

[27] Harel, G. (2008). Una perspectiva DNR sobre el currículo y la instrucción de matemáticas. Parte II: con referencia a la base de conocimientos del profesor. *ZDM*, *40* (5), 893-907. (p 896)
[28] Real, M. (2013*). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Jornadas de Innovación docente. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
[29] Moreno, L. (2018*).* La geometría en el mundo moderno. *Revista Praxis, Educación y Pedagogía*. 2, 96-123.

ocurriese producir un mapa de aquella región. Pero, ¿qué ocurre con la representación de un triángulo?, ¿cómo podríamos hablar de alguna propiedad del triángulo si no hay una representación del mismo? Lo que se puede decir de los triángulos, solo lo podemos decir a través de alguna representación. Representar una idea matemática, un concepto matemático, es una manera de darle existencia material a dicho concepto, siempre teniendo en cuenta que, un concepto se puede representar de varias formas, como: una gráfica, una tabla, una expresión algebraica, etc.

Moreno afirma, que tener un sistema de representación como el suministrado por GeoGebra, permite cerrar la grieta entre la intuición y la capacidad deductiva. Permite reinterpretar el pensamiento geométrico que se ha heredado, abriendo una ventana hacia una didáctica que fusiona los problemas de carácter cultural y cognitivo de los estudiantes.

2.5. Historia de las matemáticas como un instrumento pedagógico en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría

Barbin (2000)[30], señala que un buen momento para comenzar un análisis de la efectividad del uso de una dimensión histórica en la enseñanza de las matemáticas es preguntar "¿funciona?". Primero, es necesario determinar la naturaleza de los objetivos del docente cuando usa la historia como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Solo después de ello se podrá buscar una respuesta a esta pregunta. Para Barbin no existen estudios exitosos en los que se pueda medir el impacto de una dimensión histórica mediante el uso de un banco de pruebas que pueda determinar las competencias de los estudiantes, como tampoco se evidencia experiencias comparativas entre clases en las que se utilizó o no una dimensión histórica. Como lo cita la autora, la razón de esto es que el logro de los objetivos exigidos para usar la historia no puede medirse mediante evaluaciones (Rogers 1993).

[30] Barbin, E. (2000). *ICMI Study 6, The historical dimension: from teacher to learner, Pag 66-70.* Kluwer Academic Publishers.

Man-Keung (2000)[31] hace referencia a que varias investigaciones de diferentes partes del mundo han escrito sobre la importancia que ha desempeñado la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, el autor comparte su experiencia en el aula de cómo integró la historia de las matemáticas en la enseñanza con estudiantes de pregrado, concibiendo el uso de la historia de las matemáticas en el aula de acuerdo con las siguientes categorías:

Anécdotas, utilizar algún pasaje de la historia a modo de anécdota, resulta ser muy útil como un recurso de motivación o distensión del aula de clase. En este caso, se suele hacer referencia a hechos históricos aislados, ya sea del desarrollo de las matemáticas o de la vida de los matemáticos.

Como esquema amplio, es útil dar una visión general de un tema. Esto puede proporcionar motivación y perspectiva para que los estudiantes sepan la dimensión histórica de un tema y cómo se relaciona con el conocimiento previamente adquirido.

Introducción de un concepto, a través de la presentación de algún problema y el análisis de cómo se resolvió históricamente. Este recurso resulta ser pertinente porque, pone en evidencia el contexto intelectual en que se desarrolla el problema planteado. Además, muestra la estructura interna de los mecanismos conceptuales y analíticos, que le permiten al estudiante el abordaje y la resolución de un problema, generando el interés y la participación activa de los estudiantes, para la construcción del conocimiento a través de la resolución de problemas.

Conclusiones del Capítulo 2

Teniendo en cuenta lo que señala Falk (1980), que un problema es motivador si posee tres características: estimula el pensamiento, es interesante y la solución no es trivial; la autora de la presente tesis está

[31] Man-Keung, S. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (Undergraduate) classroom. Katz, V. Using history to teach mathematics an international perspective. (pp. 3-11). Washintong, DC. Editorial: The Mathematical Association of America.

plenamente convencida que iniciar cada una de las actividades propuestas en la investigación con un problema interesante y retador, que incorpore aspectos claves del tema, estimula el pensamiento de los estudiantes, pone en juego los conocimientos previos y permite dinamizar el aprendizaje a través de la necesidad de adquirir nuevos conceptos mediante su solución. Además, cuando el estudiante resuelve un problema involucra ciertos elementos como: los recursos, la heurística, el control y las creencias, como lo afirma Schoenfeld (1985).

Drijvers, P. et al (2019)[32], señalan que la resolución de problemas, el modelado y la abstracción, se convierten en elementos importantes para el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez, de manera análoga y con acompañamiento del docente permite el redireccionamiento del aprendizaje para consolidar nuevas y mejores estructuras del pensamiento matemático del estudiante.

El uso de las herramientas TIC, como una herramienta pedagógica, le permite al estudiante la representación, generar conclusiones, comunicar, conjeturar, hacer demostraciones, modelar y llegar a resolver problemas, favoreciendo el aprendizaje de la trigonometría en el estudiante.

Esta propuesta de investigación se apoyará de la historia de las matemáticas como un instrumento pedagógico, con la introducción de pasajes de la historia de la trigonometría, para el diseño, elaboración y aplicación de la secuencia de actividades.

---

[32] Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H. & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*. 102, 435-456.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se hace una presentación de la metodología de investigación que se va a asumir en la presente tesis, y una descripción de la población donde se desarrolla el estudio. De igual forma, para el diseño, elaboración, aplicación y análisis de las actividades, se propone trabajar con la metodología de Investigación Basada en el Diseño (IBD). Esta metodología plantea tres fases que se ajustan al objetivo de la investigación, las cuales son: preparación del diseño, implementación y análisis retrospectivo.

3.1. Enfoque Cualitativo

El enfoque de esta investigación es de tipo cualitativo. De acuerdo con lo manifestado por Sampieri (2014), *"brinda la posibilidad de comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los estudiantes en un ambiente natural y en relación con su contexto"*[33].

Para afinar la hipótesis y precisas la importancia del problema se realizó una investigación preliminar, aplicando los siguientes instrumentos:

1) *Encuesta a docentes de aula* que orientan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en educación media en el municipio de Duitama. Este instrumento fue evaluado y validado mediante el juicio de los expertos el Dr. Marcel David Pochulu y el Dr. Mario Estrada Doallo.

Esta encuesta se aplicó a una muestra de 10 docentes que orientan matemáticas en los niveles de educación media de colegios privados, colegios públicos urbanos y colegios públicos rurales del municipio de Duitama (Boyacá), con el fin de obtener información sobre potencialidades y dificultades en el proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en estudiantes de grado décimo de educación media, así como ayudas didácticas y metodologías utilizadas.

2) *Entrevista a personalidades:* es importante tener una visión más amplia del tema a investigar con la

[33] Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill, p. 358

opinión de personalidades, que con su amplia experiencia en el campo de la enseñanza de la trigonometría y la investigación nos aportan nuevas ideas y sugerencias. La entrevista se le realizó al Dr. Luis F. Cáceres.

3.2. Metodología de Investigación Basada en el Diseño[34]

Bell (como citó Gibelli, 2014) afirma que la metodología de investigación basada en el diseño (IBD), se centra en el diseño y exploración de todo tipo de innovaciones educativas, a nivel didáctico y organizativo, considerando también posibles herramientas digitales tales como los softwares, que contribuyen a la innovación y al mejoramiento de la comprensión de la naturaleza y condiciones del aprendizaje.

La estructura de la metodología de IBD, en términos generales, como lo señalan Gravemeijer y Prediger (2016), tiene un objetivo cuando se realiza el diseñan, que es implementar y reflexionar sobre lecciones individuales. A continuación, se muestra cómo se desarrollan las tres fases en una investigación basada en el diseño.

3.2.1. Preparación del diseño

En esta fase los investigadores necesitan definir:

- Metas de aprendizaje: explicar con detalle cuáles son los resultados de aprendizaje esperados.
- Describir las condiciones iniciales del contexto en que se implementará la intervención.
- Definir las intenciones teóricas del estudio: convalidar la teoría local preliminar y/o generar nuevas teorías.
- Elaborar el diseño instruccional: describir los supuestos acerca de cómo se llevará a cabo el proceso de aprendizaje y describir los medios que los harán posible.

[34] Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2016). Topic-specific design research: An introduction. Kaiser, G. & Presmeg,. *Compendium for Early Career Researcher in Mathematics Education.* 33-57. Hamburgo, Alemania: ICME-13.

3.2.2. Implementación del diseño

Esta fase se implementa la secuencia de actividades y continuamente se realizan ajustes: el diseño inicial se va adecuando en función de la dinámica y el contexto, con base en un análisis del proceso real de la participación y aprendizaje de los estudiantes en cada actividad y se toman decisiones para rediseñar las próximas actividades. El objetivo es comprender las consecuencias de la instrucción anterior, sobre la cual se puede construir en los ciclos posteriores, revisando para observar cómo está evolucionando el pensamiento y comprensión de los estudiantes.

3.2.3. Análisis retrospectivo

Esta tercera fase incluye dos tareas específicas:

- Análisis de los datos recolectados: se hace una revisión de los sucesos de forma cronológica, se interpretan y se comparan, con el propósito de confirmarlos o refutarlos.
- Construcción de la teoría: el análisis mencionado en la tarea anterior debe llevar a una construcción de la teoría, que dé cuenta de los cambios progresivos en los aprendizajes y la efectividad del diseño.
- El siguiente esquema muestra un resumen de las tres fases de la investigación basada en el diseño (IBD), con los subprocesos de cada fase (ver Figura 7).

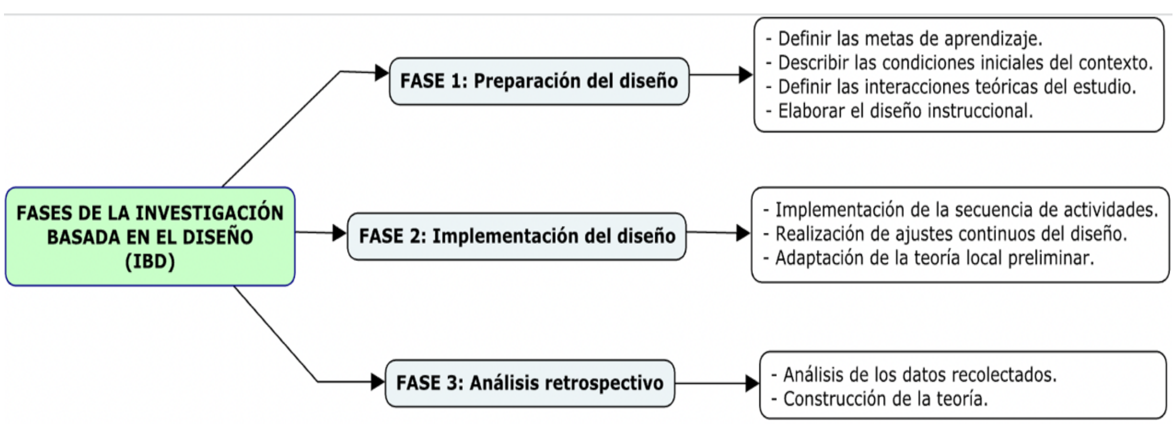


Figura 7. **Fases de la Investigación Basada en el Diseño (IBD)**
Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Gravemeijer & Prediger (2016)

3.3. Implementación de la metodología de Investigación Basada en el Diseño

A continuación, se describe cómo se llevará a cabo la primera etapa de la investigación. En este primer aparte se presentará la preparación del diseño.

3.3.1. Preparación del diseño

Metas teóricas del estudio: el objetivo general de la investigación es lograr avances en la caracterización del pensamiento geométrico, manifestado por los estudiantes del grado décimo de la educación media al resolver problemas de trigonometría.

A partir de la revisión de la literatura y de las elecciones del marco teórico de la presente investigación, se tomó la decisión de desarrollar un diseño instruccional cuya meta pedagógica es integrar la trigonometría circular y la trigonometría triangular partiendo desde la geometría.

Condiciones iniciales del contexto: la propuesta está dirigida a un grupo de 10 estudiantes de grado décimo que oscilan en edades entre 15-16 años del Instituto Técnico Nueva Familia del municipio de Duitama (Boyacá).

Teniendo en cuenta las circunstancias mundiales de la pandemia, la autora de la investigación tomó la decisión de aplicar las actividades con trabajo autónomo en casa y encuentros sincrónicos virtuales para realizar la intervención del docente. Por lo tanto, la muestra es homogénea y se realizó por conveniencia, es una técnica de muestreo no probabilístico y no aleatorio. La elección de los estudiantes se hizo teniendo en cuenta las siguientes características: disponibilidad del tiempo, facilidad de comunicación para los encuentros virtuales porque cuentan con equipo de cómputo y conectividad a internet.

Antes de implementar las actividades, se determina la situación inicial del grupo de estudiantes en cuanto a conceptos preliminares y perspectivas individuales de los estudiantes que se pueden esperar a través de una prueba de entrada sobre conceptos preliminares de geometría y una entrevista semiestructurada individual sobre perspectivas individuales. (ver Anexo 1).

3.3.2 Diseño instruccional

Para la elaboración del diseño instruccional, se plantea dentro de un marco teórico, llamado enseñanza de las matemáticas basada en el modelo DNR. Para la elaboración del diseño instruccional se propone una adaptación al modelo DNR, en cuanto al orden de los principios que propone Harel (2008).

3.3.2.1. Descripción del diseño instruccional dentro del marco NDR, para la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría

A continuación, se presenta la descripción con detalle de cada uno de los pasos a seguir del diseño instruccional dentro del marco NDR, y el paso a paso que seguirá el docente para la aplicación de cada una de las actividades propuestas. (ver Figura 8).

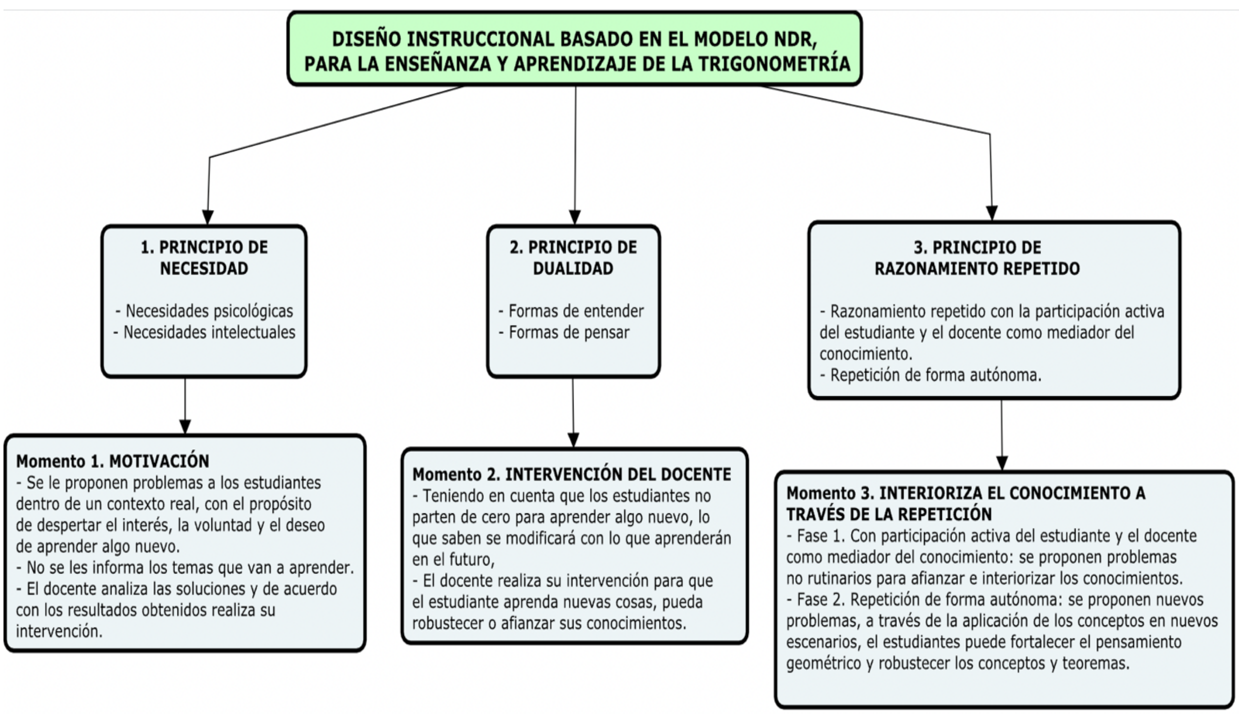


Figura 8. **Diseño instruccional basado en el modelo NDR, para la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Harel (2008)**

3.3.2.2 Diseño de las actividades

El desarrollo del material consta de siete unidades de contenido denominadas unidades temáticas, la actividad cero se compone de conceptos fundamentales de geometría y seis actividades restantes por compuesta por los núcleos conceptuales que conforman parte del currículo de la asignatura de trigonometría. Los temas y subtemas específicos que son la base para el diseño de la secuencia de actividades se presentan en el siguiente mapa conceptual. (ver Figura 9).

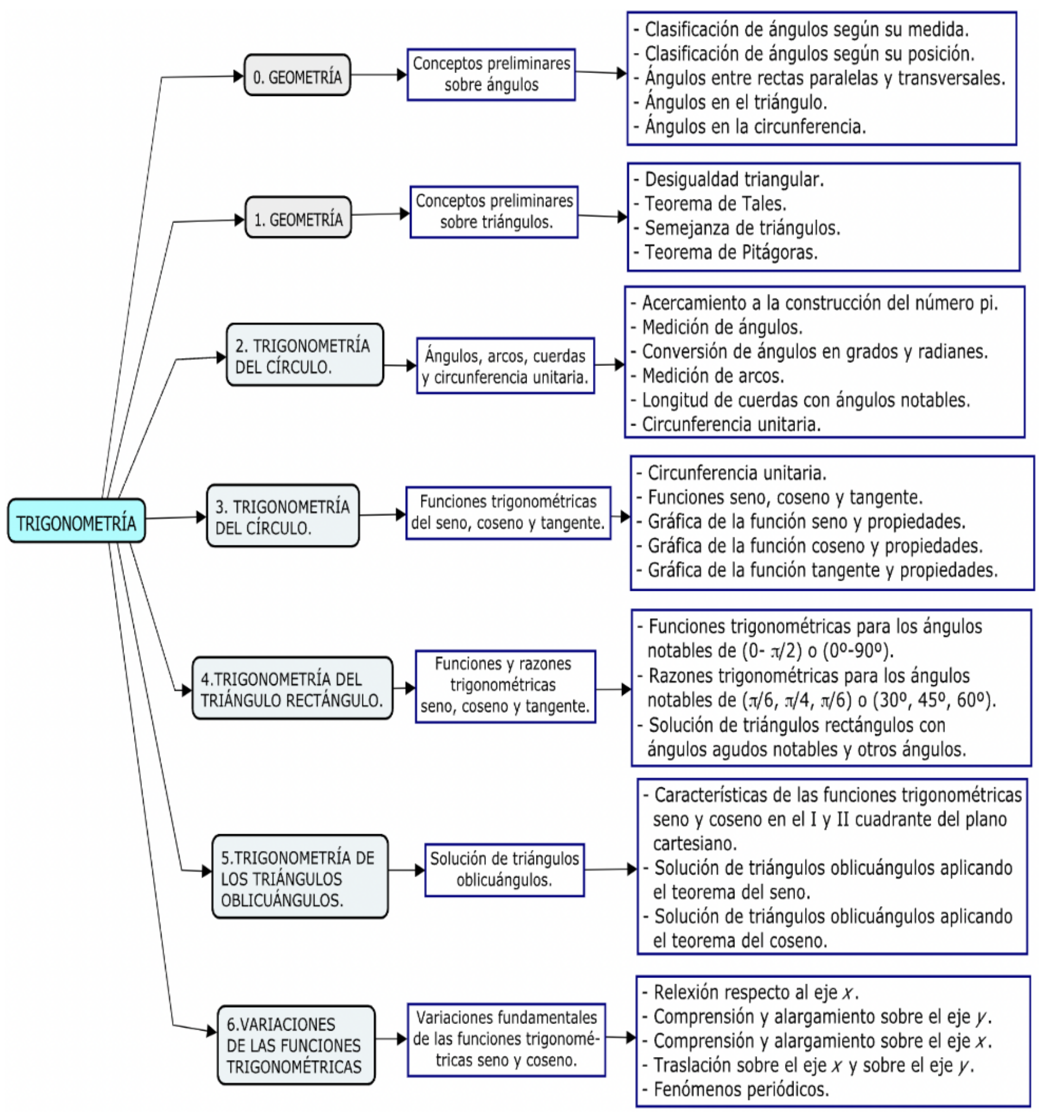


Figura 9. **Conceptos y teoremas sobre trigonometría**
Fuente: Elaboración propia

3.3.2 Estructuración de las actividades

Para la elaboración de la secuencia de actividades de los estudiantes y las guías de trabajo del docente, fue necesario especificar y estructurar los contenidos para diseñar una disposición de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría a través de una trayectoria de aprendizaje prevista por el docente en cada actividad, como lo propone Harel (2008).

1) Estructura y componentes de las guías del docente

- ***Encabezado***: se encuentra el escudo que identifica a la institución educativa y el nombre de la institución y número de la actividad.
- ***Tabla con datos fundamentales***: aquí se encuentran datos importantes para el desarrollo de la actividad como son: área de enseñanza, docente, grado, tema, título de la actividad, tiempo estimado para el desarrollo de la actividad, objetivo de profesor y objetivos de los estudiantes.
- ***Mentefacto conceptual:*** a través de este diagrama se presentan las definiciones y teoremas que los estudiantes aprenderán durante el desarrollo de cada actividad.
- ***Trayectoria de aprendizaje prevista por el docente:*** a partir del modelo NDR, se proponen los tres momentos: motivación, intervención del docente y razonamiento repetido autónomo.
- ***Intervención del docente:*** se proponen problemas para que los estudiantes los resuelven o intenten resolverlos con los conocimientos que poseen. A través de preguntas orientadas por el docente se crea la "necesidad" del aprendizaje para solucionar los problemas. Finalmente, se propone una secuencia de problemas con el propósito de construir conceptos robustos a través de la repetición y diferentes formas de solucionar los problemas.

2) Estructura de las actividades del estudiante

Motivación: se proponen problemas a los estudiantes a partir de situaciones del contexto real, para que los resuelvan de forma autónoma, con el objetivo de identificar con cuáles recursos cuentan los estudiantes, además no se les informa los temas que van a aprender.

Estos problemas están pensados desde situaciones reales que motivan a los estudiantes a pensar cómo aplicar los conocimientos matemáticos que posee y ver la necesidad de aprender cosas nuevas.

Razonamiento repetido autónomo: Se proponen problemas no rutinarios para que los estudiantes a través de la aplicación de los conceptos en nuevos escenarios, puedan fortalecer el pensamiento geométrico y robustecer los conceptos y teoremas.

3.4. Actividades

Se proponen una secuencia de siete (7) guías para el docente y siete (7) guías para el estudiante. La aplicación de las actividades ocurre en ambientes virtuales y trabajo autónomo de los estudiantes. En este caso del ambiente virtual, se realizan dos encuentros sincrónicos semanales con los estudiantes cada uno de (1,5) horas, las actividades propuestas para los estudiantes las envían a través de la plataforma edmodo.

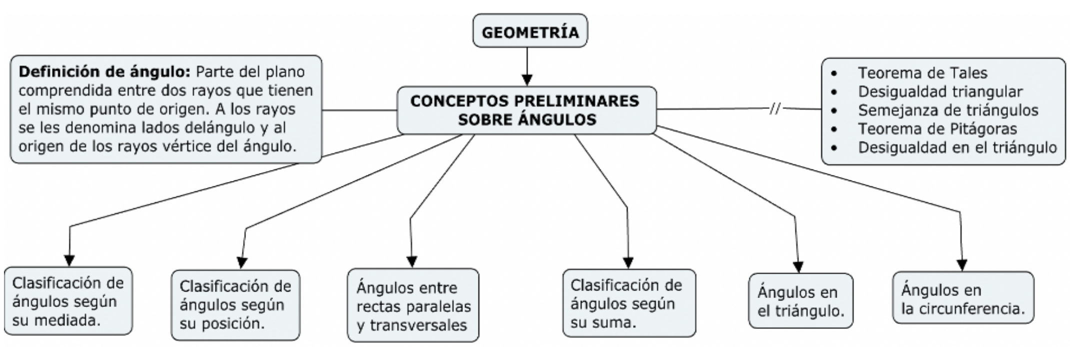
3.4.1. Actividad No.0 “Un recorrido de 360º”

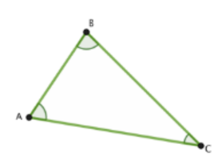
Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL DOCENTE
Actividad No. 0

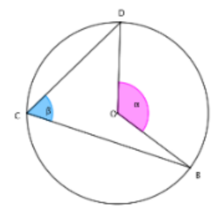
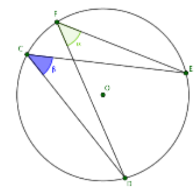
Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema 0:	Ángulos: definiciones, teoremas y demostraciones preliminares.
Título:	Un recorrido de 360º
Tiempo estimado:	Intervención del docente: tres encuentros sincrónicos de y 1,5 horas
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando conceptos preliminares de ángulos.
Objetivos de los estudiantes:	1. Resolver problemas que involucran las definiciones preliminares sobre la teoría de ángulos y generalidades de los triángulos. 2. Hacer conexiones con las temáticas sobre generalidades de los triángulos entre: gráficos, definiciones y teoremas para resolver problemas.

1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre ángulos, que el estudiante conoce o debe aprender a través de la resolución de los problemas propuestos.



FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES	
Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: Los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.	
<u>Teorema 1:</u> La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos. $$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^{\circ}$$	

<u>Teorema 2:</u> La medida de un ángulo central en una circunferencia es igual al doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que abren el mismo arco. $\measuredangle\alpha = 2(\measuredangle\beta)$	
<u>Teorema 3:</u> Todos los ángulos inscritos que abren el mismo arco, tienen la misma medida. $\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$	

FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES

- Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los problemas, permitiéndoles hacer conjeturas por inspección visual sobre:

1. Los estudiantes deducen que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos, por lo tanto proponen que $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 2r = 180^o$, con $r = 90^o$
2. Los estudiantes deducen que la medida de un ángulo central en una circunferencia es igual al doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que abren el mismo arco.

- Los estudiantes relacionan de forma lógica los teoremas y definiciones sobre la temática de ángulos para realizar demostraciones y/o resolver problemas.
- El estudiante utiliza un lenguaje verbal y algebraico sobre la temática de ángulos de manera correcta en la resolución de los problemas.

2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

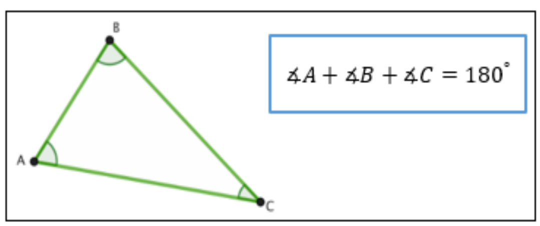
Teorema 1. Demostración haciendo uso de la herramienta GeoGebra.

<u>Problema 1:</u> El docente les pide a los estudiantes que dibujen un triángulo en GeoGebra, con las medidas de los ángulos internos encontrar la suma de los ángulos internos. Tomar uno de los vértices del triángulo y moverlo varias veces. De acuerdo con la información anterior el docente les propone dos preguntas a los estudiantes

- ¿Qué pueden decir de la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo?
- Encontrar una expresión en función de los ángulos que le permita establecer la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo.

De acuerdo con las respuestas de las dos preguntas anteriores se formula el siguiente teorema:

<u>Teorema 1:</u> La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.



Problema 2. Observa la siguiente animación sobre la *suma de ángulos internos para cualquier triángulo.*

Archivo: Demostración sin palabras del Teorema 1.ggb

A partir de la animación y con la participación de los estudiantes se procede a demostrar que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.

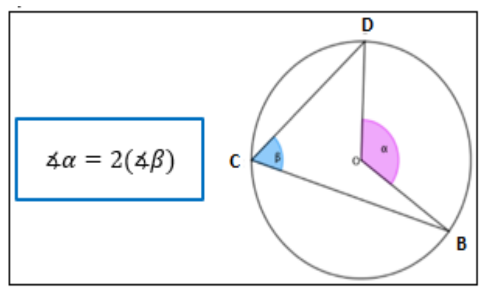
Teorema 2. Demostración haciendo uso de la herramienta GeoGebra.

Problema 3. Construir en GeoGebra la gráfica que se muestra a continuación. Mover el punto D sobre la circunferencia desde en punto C hasta el punto B como les indica el docente. De acuerdo con la información anterior, la docente les propone las siguientes preguntas a los estudiantes.

- Describan con sus palabras lo que observan en la figura cuando se mueve el punto D sobre la circunferencia.
- Medir el ángulo α y el ángulo β, desplazar el punto D y observar con detenimiento la figura. ¿Qué pueden decir de la figura nuevamente cuando se desplaza en el punto?
- De acuerdo con las observaciones anteriores, ¿encontraron alguna regularidad en la figura?. Si la respuesta es afirmativa, describa dicha regularidad y encuentre una expresión que le permita establecer dicha regularidad.

De acuerdo con las respuestas de las preguntas anteriores se formula el siguiente teorema:

Teorema 2: La medida de un ángulo central en una circunferencia es igual al doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que abren el mismo arco.

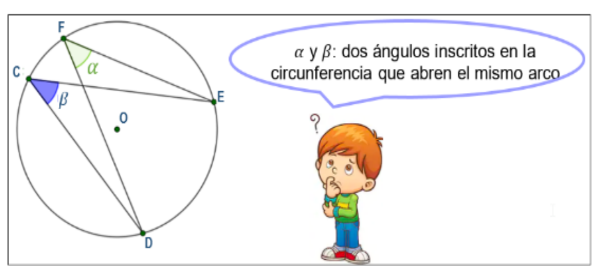


- Con la ayuda del gráfico que se presenta en GeoGebra y con la participación activa de los estudiantes se procede a demostrar que la medida de un ángulo central en una circunferencia es igual al doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que abren el mismo arco.

Explicación con detalle.

Teorema 3. Demostración haciendo uso de la herramienta GeoGebra.

Problema 4. Construir en GeoGebra la gráfica que se muestra a continuación. Mover el punto E hasta llegar al punto D $c$omo lo indica el docente. De acuerdo con la información anterior, la docente les propone las siguientes preguntas a los estudiantes.

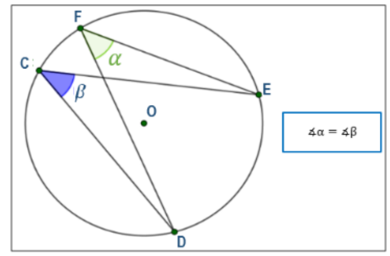


- Describan con sus palabras qué observa en la figura cuando se mueve el punto E sobre la circunferencia hasta el punto D.

- Medir el ángulo α y el ángulo β, mover el punto D y observar con detenimiento la figura. ¿Qué puede decir de la figura nuevamente cuando se desplaza el punto D?
- De acuerdo con las observaciones anteriores, ¿encontró alguna regularidad en la figura? Si la respuesta es afirmativa, describa dicha regularidad y encuentre una expresión que le permita establecer dicha regularidad.

De acuerdo con los resultados de las preguntas anteriores se formula el:

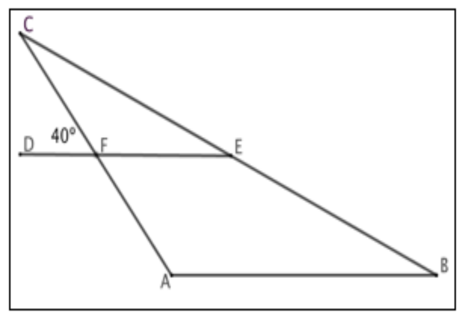
Teorema 3: Todos los ángulos inscritos que abren el mismo arco, tienen la misma medida.



3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

Con la participación activa del estudiante y el docente como mediador del conocimiento se proponen y se resuelven los siguientes problemas.

Problema 1. En la imagen al ángulo $\measuredangle CFD = 40^0$, el segmento $\overline{EF}$ es paralelo al segmento $\overline{AB}$ y $\overline{CF} = \overline{EF}$. De acuerdo con la información anterior, el docente les propone las siguientes preguntas a los estudiantes.

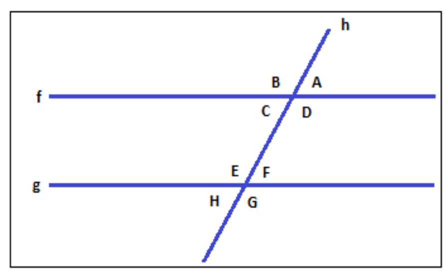


- ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle EFA$? Explique por qué.
- ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle CEF$? Explique por qué.
- ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle FEB$? Explique por qué.
- ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle BAF$? Explique por qué.

Problema 2. Observa la figura, el ángulo

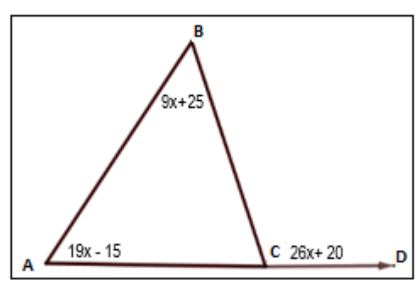
$A = (2x - 10)$ y el ángulo $G = (4x + 40)$ y $f \parallel g$.

- ¿Cuánto mide el ángulo A? Explicar paso a paso cómo obtiene la solución
- ¿Cuánto mide el ángulo G? Explicar paso a paso cómo obtiene la solución.



Problema 3. Observa que en la figura los ángulos están en función de x, $\measuredangle ABC = 9x + 25$, $\measuredangle BAC = 19x - 15$, $\measuredangle BCD = 26x + 20$.

- ¿Cuál es la medida en grados de los ángulos internos del ΔABC?
- Clasifica el ΔABC de acuerdo con la amplitud de sus ángulos internos.



1. MOTIVACIÓN

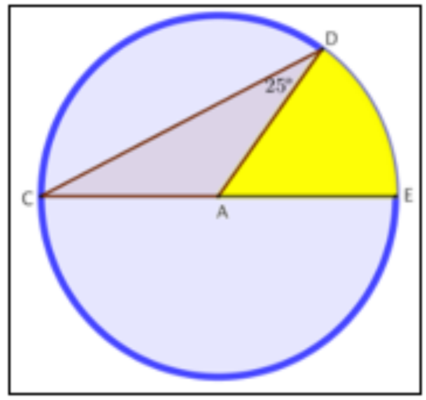
Problema 1. La siguiente imagen es la vista superior de "**El Pentágono**", es la sede del Departamento de Defensa de los Estados Unidos ubicado en Virginia, cerca de Washington D.C. El edificio tiene forma de pentágono regular.

Vista superior del edificio "El Pentágono"
Fuente: https://images.app.goo.gl/Fzn2u9jrH7k7psYW6

Un estudiante interesado por la arquitectura del edificio quiere averiguar algunos detalles geométricos de este edificio. Se planteó las siguientes preguntas. ¿Puedes ayudarle a resolverlas?

- ¿Cuál es el valor del ángulo interior α que se forma en cada vértice del pentágono? Explique con detalle por qué es ese valor.
- ¿Cuál es el valor del ángulo interior β que se encuentra en los cuadriláteros de las esquinas del pentágono? Explique con detalle cómo se obtuvo ese valor.

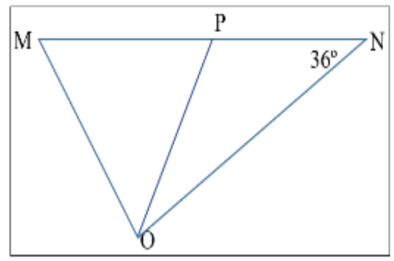
Problema 2. La imagen muestra el piso de un parqué infantil. El diseñador del parque necesita la medida del ángulo $\measuredangle ADE$, teniendo en cuenta que el punto A es el centro de la circunferencia, el ángulo $\measuredangle CDA = 25^o$ y $\overline{CE}$ es el diámetro de la circunferencia.



- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle DAC$? Explique por qué.
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle ADE$? Explique por qué.
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle CDE$? Explique por qué.

2. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA

Problema 1. En la imagen, el ángulo $\measuredangle ONP = 36^o$, $\overline{OP} = \overline{MO}$ y $\overline{OP} = \overline{PN}$

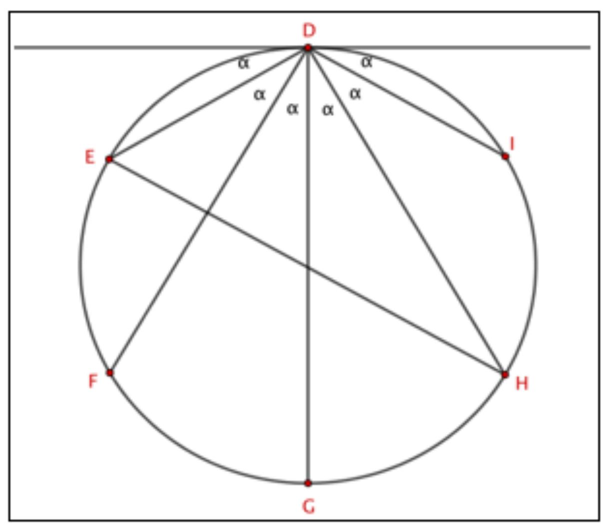


- ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle OPN$? Explique por qué
- ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle OMP$? Explique por qué.
- Si el ángulo $\measuredangle ONP = \alpha$, encuentren una expresión que le permita hallar el ángulo $\measuredangle OPN$ y el ángulo $\measuredangle OMP$ en función de α.

Problema 2: Los ángulos del triángulo ΔABC están en función de x, $\measuredangle A = 10x + 20$, $\measuredangle B = 12x - 19$, $\measuredangle C = 3x + 4$.

- Demostrar que el ΔABC es un triángulo rectángulo.

Problema 3: Los puntos D, E, F, G, H e I se encuentran sobre una circunferencia, sobre el punto D se dibuja una recta tangente, formando 6 ángulos congruentes α, como se muestra en la imagen.



- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle DIH$? Explique por qué.
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle DEH$? Explique por qué.

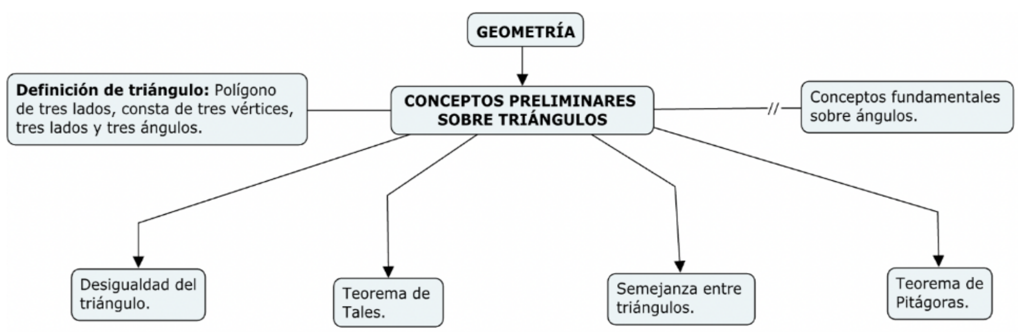
3.4.2. Actividad No. 1 “Tales y Pitágoras”

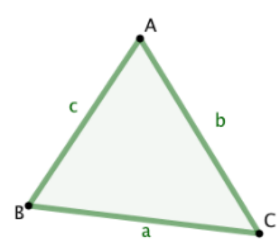
Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL DOCENTE
Actividad No. 1

Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media
Tema 1:	Triángulos: definiciones, teoremas y demostraciones preliminares.
Título:	Tales y Pitágoras
Tiempo estimado:	Intervención del docente: tres encuentros sincrónicos de y 1,5 horas
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando conceptos sobre preliminares de los triángulos.
Objetivos de los estudiantes:	1. Resolver problemas que involucran las definiciones preliminares sobre triángulos. 2. Hacer conexiones entre la temática de triángulos entre gráficos, definiciones y teoremas para resolver problemas.

1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre triángulos, que el estudiante conoce o debe aprender a través de la resolución de los problemas propuestos.

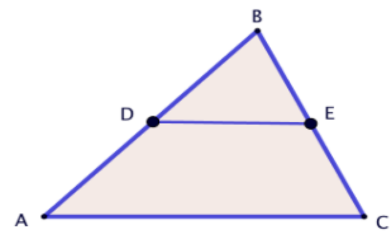


FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES	
Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: Los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.	
<u>Teorema 1. (Desigualdad del triángulo):</u> En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante. $a + b > c, a + c > b$ y $c + b > a$	

<u>Teorema 2. (Teorema de Tales):</u> Si en un triángulo se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

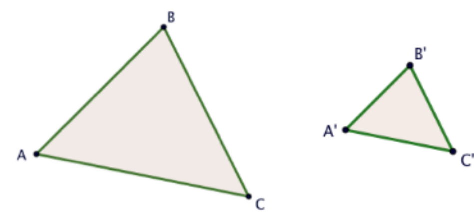
$$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DBE$$



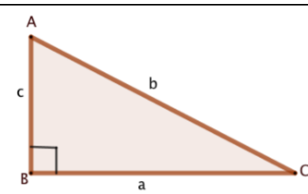
<u>Definición 1. (Triángulos semejantes):</u> Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.

Los ángulos correspondientes son $A = A', B = B'\ y\ C = C'$. Para denotar que dos triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes se escribe $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



<u>Teorema 3. (Teorema de Pitágoras):</u> En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadro de la longitud de la hipotenusa.

$$b^2 = a^2 + c^2$$

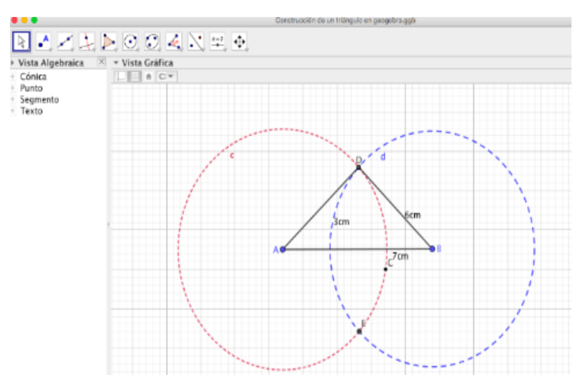


FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES

- Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los enunciados de los problemas permitiéndoles hacer conjeturas por inspección visual sobre:
  1) Los estudiantes deducen a partir de casos que tres segmentos representan los lados de un triángulo, si la suma de las longitudes de dos lados segmentos cualesquiera es siempre mayor a la longitud del segmento restante.
  2) Los estudiantes conjeturan que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.
  3) A partir de descomposiciones y recomposiciones con el tangram los estudiantes conjeturan que, en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.
- Los estudiantes relacionan de forma lógica los teoremas y definiciones sobre la temática de ángulos y generalidades de los triángulos, para realizar demostraciones y/o resolver problemas.
- El estudiante utiliza un lenguaje verbal y algebraico sobre la temática de ángulos y generalidades de los triángulos de manera correcta en la resolución de los problemas.

2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

2.1. Desigualdad triangular haciendo uso de la herramienta GeoGebra



Actividad 1: El docente grafica un triángulo con las siguientes medidas: $a = 3\ cm$, $b = 7\ cm$ y $c = 6\ cm$ en GeoGebra, como se muestra en la figura.

Luego les pide a los estudiantes que grafiquen los siguientes 5 triángulos en GeoGebra.

1. $a = 3\ cm\ b = 4\ cm\ c = 6\ cm$
2. $a = 4\ cm\ b = 7\ cm\ c = 3\ cm$
3. $a = 3\ cm\ b = 5\ cm\ c = 4\ cm$
4. $a = 3\ cm\ b = 8\ cm\ c = 4\ cm$
5. $a = 5\ cm\ b = 2\ cm\ c = 5\ cm$

- ¿Qué puede decir de los 5 triángulos construidos en GeoGebra? Explique con detalle.

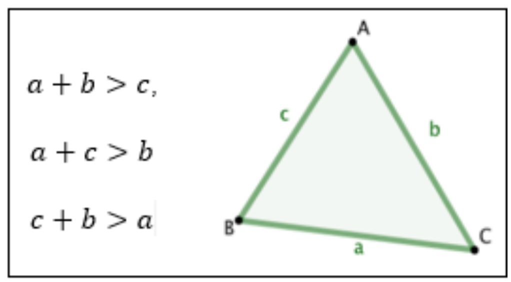
Actividad 2: Demostración sin palabras de la desigualdad triangular haciendo uso de la herramienta GeoGebra

Archivo: Desigualdad triangular..ggb

De acuerdo con la situación presentada, se construye el teorema de la desigualdad triangular con la ayuda de los estudiantes, se realizan los procesos de observación y generalización.

Se espera que, a través de la simulación anterior, los estudiantes deduzcan que para construir un triángulo la suma de dos lados cualesquiera siempre debe ser mayor que el tercer lado.

Teorema 1. (desigualdad triangular): En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante. Es decir:

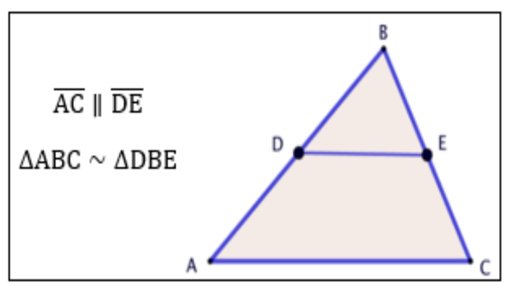


2.2. Teorema de Tales

Se les presenta a los estudiantes el siguiente video como una introducción al teorema de Tales.

https://www.youtube.com/watch?v=6nYnXeqrhKQ

Teorema 2. (Teorema de Tales): Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

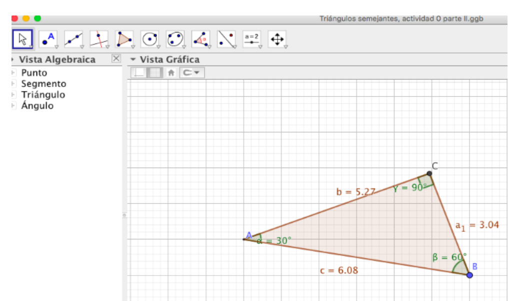


Los puntos *D* y *E* determinan segmentos proporcionales a los lados del triángulo, es decir

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$$

2.3. Triángulos semejantes

El docente le presenta a sus estudiantes un triángulo construido en GeoGebra. Luego se ubica sobre el punto *B* y lo estira o escoge de tal forma que el valor de *b* sea un número entero.



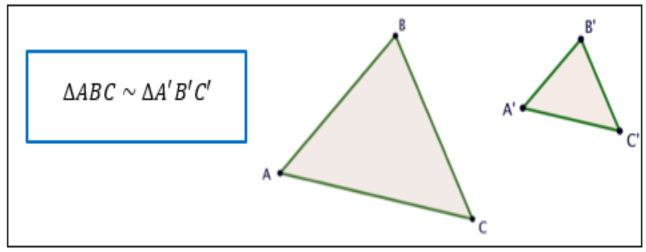
Archivo: Triángulos semejantes, actividad.ggb

Luego se les pregunta a los estudiantes:

- ¿Qué observaron en el triángulo cuando se estiró o encogió el punto B?

Se espera que a través de la simulación anterior, los estudiantes deduzcan que los ángulos del triángulo permanecen constantes y la longitud de los lados aumentan o disminuyen de forma proporcional, de lo anterior se enuncia la definición formal de triángulos semejantes.

Definición 1. (Triángulos semejantes): Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales. Los ángulos correspondientes son $A = A', B = B'\ y\ C = C'$. Para denotar que dos triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes se escribe:



2.4. Teorema de Pitágoras

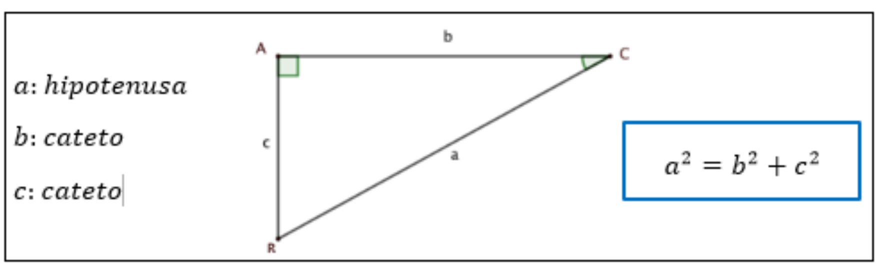
El docente le presenta a sus estudiantes un video con dos juegos de fichas diferentes, sobre descomposición y recomposición de cuadrados para hacer un acercamiento al Teorema de Pitágoras.

Archivo: https://www.youtube.com/watch?v=Wx4d6giyias

Con la presentación del video, se espera los estudiantes a través de descomposición y recomposición:

- Establezcan que el área del cuadrado grande es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños.
- Al utilizar el área de los tres cuadrados puedan establecer que: en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

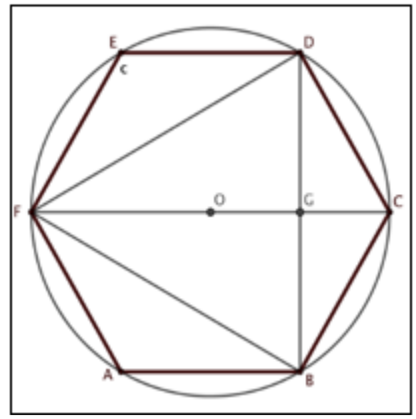
Teorema 4 (Teorema de Pitágoras): en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

Con la participación activa del estudiante y el docente como mediador del conocimiento se proponen y se resuelven los siguientes problemas.

Problema 1: Un hexágono regular inscrito en una circunferencia de centro O, el segmento $\overline{FB} = 4\sqrt{3}$, como se observa en la figura.



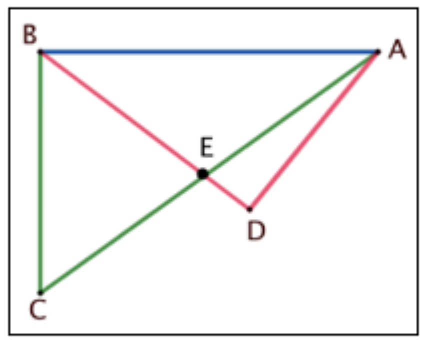
- Completa la siguiente tabla. Explicar el proceso con detalle.

ΔFDC	ΔFGD	ΔDGC
$\overline{FD} =$	$\overline{FG} =$	$\overline{GD} =$
$\overline{DC} =$	$\overline{GD} =$	$\overline{GC} =$
$\overline{FC} =$	$\overline{FD} =$	$\overline{DC} =$

- ¿Qué se puede decir acerca de los triángulos ΔFDC, ΔDGC y ΔFGD teniendo en cuenta sus lados y sus ángulos internos?
- ¿Cuál es el área del ΔFDE?

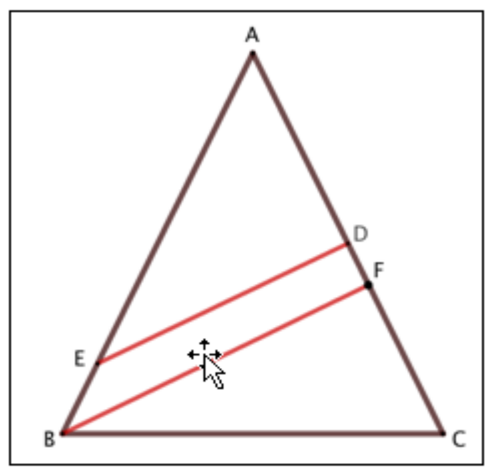
Problema 2: En la figura, el ΔABC es rectángulo en B y en el ΔBDA es rectángulo en D. Si $AC = 25\ cm$,

$AD = 12\ cm$ y $BD = 16\ cm$.



- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{ED}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{ED}$?
- ¿Cuál es el área del ΔADE?

Problema 3: En la figura el ΔABC es un triángulo isósceles donde $\overline{AC} = \overline{AB} = 16$, además $\overline{DE}$ es la mediatriz del ΔABC correspondiente al lado $\overline{AC}$, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EA}} = \frac{1}{3}$ y $\overline{ED} \parallel \overline{BF}$.



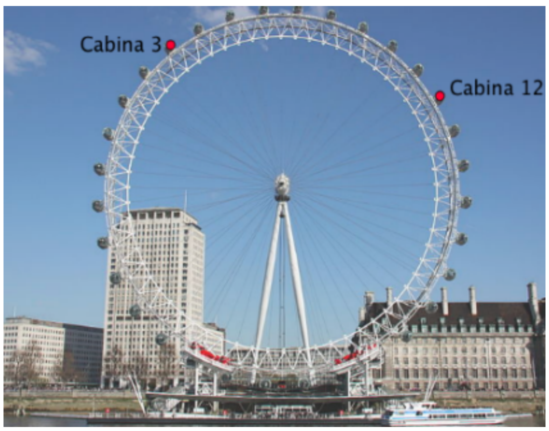
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{\text{AE}}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{\text{ED}}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{\text{BF}}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{\text{BC}}$?

Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL ESTUDIANTE
Actividad N. 1

1. MOTIVACIÓN

De acuerdo con la siguiente información resuelve los problemas 1,2 y 3.

El London Eye es una gran noria situada en el en el Sourh Bank del río Támesis en Londres, Reino Unidos. Tiene 135 m de altura y el círculo de la noria tiene un diámetro de 120 m y 36 cabinas.



Vista London Eye desde el otro lado del río Támesis.
Khamtran (2009) https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6418599.

Problema 1. Dos amigos Andrés y Felipe turistas, les encantan las alturas, deciden subirse a la **gran noria de Londres. Para sorpresa de ellos ubican a Felipe en la cabina 3 y a Andrés en la cabina 12.**

- ¿Cuál es la distancia que separa las dos cabinas donde se encuentra Andrés y Felipe? *(La distancia entre Andrés y Felipe se denota como* $\overline{AF}$*)*

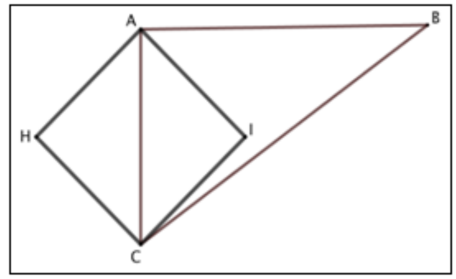
Problema 2. En Colombia se quiere construir una noria similar a la de Londres con la misma cantidad de cabinas, de modo que si Andrés y Felipe se suben y ocupan las mismas cabinas como en la **noria de Londres, si la distancia que los separa es de** $6\sqrt{2}\,m$**.**

- ¿Con qué radio (r) se debe construir la noria en Colombia?

Problema 3. Andrés y Felipe se quieren ubicar en dos cabinas en la noria de London, de tal forma que entre el centro y las dos cabinas cualesquiera que sean formen un ángulo de 60º.

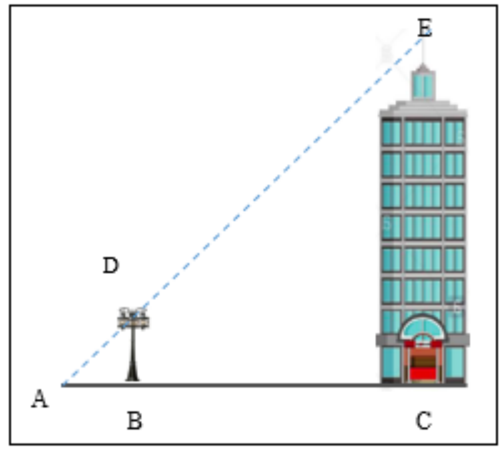
- ¿En qué cabinas se pueden ubicar Andrés y Felipe para que se cumpla la condición?
- ¿Cuál es la distancia entre dos cabinas que ocupan Andrés y Felipe?

3. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA



Problema 1: El triángulo ΔABC es rectángulo en A, $\overline{AC}$ es la diagonal del cuadrado $AICH$. Si $\overline{BC} = 8\sqrt{2}$ y $\overline{HA} = 4\sqrt{2}$.

- ¿Cuál es longitud del segmento $\overline{AB}$?



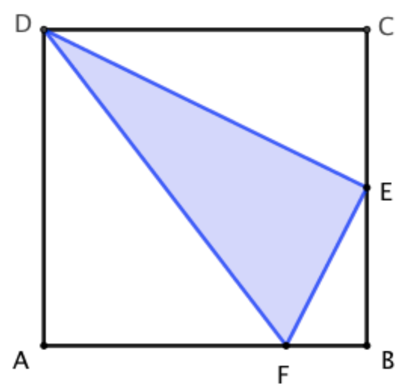
Problema 2: Se desea calcular la altura del edificio que se muestra en la figura. Se logra determinar que existe una recta que pasa por el punto E y por el punto D y al proyectar esta recta se encuentra el punto A que toca el piso. A partir de lo anterior, se encuentran las siguientes relaciones:

$AD = 2\sqrt{5}$,

$\frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$ y

$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{4}$

- ¿Cuál es la altura del edificio $\overline{EC}$?



Problema 3: El cuadrado *ABCD* que se observa en la figura tiene $16\ cm^2$ de área, *E* es el punto medio de $\overline{CB}$, el triángulo $\triangle$*DEF* es rectángulo en E.

- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{EF}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{DF}$?
- ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle DEF$?

Problema 4: El triángulo $\triangle$*ABC* está formado por los puntos sobre el plano cartesiano A(4,4), B(0,0) y (6,-6) y el triángulo $\triangle$*DEF* está formado por los puntos D(8,0), E(10,2) y F(13,1).

- Demostrar que los triángulos son rectángulos.
- Demostrar que el $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

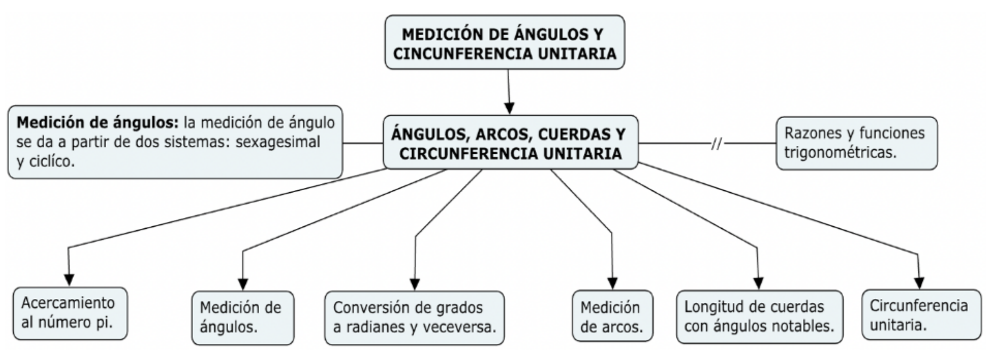
3.4.3. Actividad No. 2 "Siguiendo a los griegos"

Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL DOCENTE
Actividad No. 2

Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema 2:	Medición de ángulos, arcos, cuerdas y circunferencia unitaria.
Título:	Siguiendo a los griegos
Tiempo estimado:	3 horas (2 sesiones de 1,5 horas)
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando conceptos sobre medición de ángulos, medición de arcos, longitud de cuerdas con ángulos notables y circunferencia unitaria.
Objetivos de los estudiantes:	1. Entender la medida de un ángulo en radianes como la longitud del arco en la circunferencia subtendido por el ángulo. 2. Resolver problemas que involucran la medición de ángulos, medición de arcos, longitud de cuerdas con ángulos notables y circunferencia unitaria. 3. Hacer conexiones con la temática de ángulos entre gráficos, definiciones y teoremas para resolver problemas.

1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre triángulos, que el estudiante conoce o debe aprender a través de la resolución de los problemas propuestos.



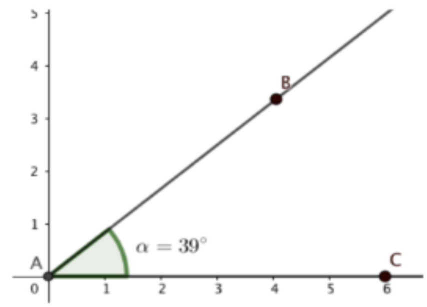
FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES
Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.

Medición de ángulos en grados

Grado sexagesimal: Un grado es la amplitud del ángulo que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales y tomar una de ellas. La notación utilizada es 1°.

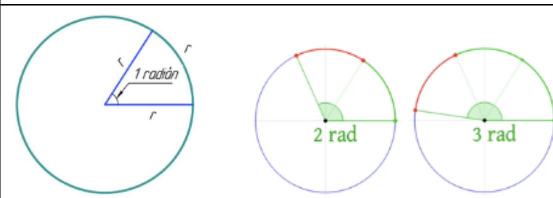
Por convención consideramos un

- Ángulo en posición estándar: el lado inicial coincide con el eje x positivo.
- Ángulo positivo: se representa en sentido contario a las manecillas del reloj. Por ejemplo, el ángulo que se muestra en la figura 1 mide $39°$.
- Ángulo negativo: se representa en sentido de las manecillas del reloj.



Medición de un ángulo en radianes

- Un ***radián*** (1 rad) es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma. Ver imagen
- Por ejemplo, los ángulos que representan 1 rad, 2 rad y 3 rad se muestran en las imágenes.



Medición de un ángulo en grados y en radianes

Escribir 2π por sí solo representa un número, escribir 2π radianes significa una vuelta completa. Es decir, la medida de un ángulo que corresponde a la rotación de una vuelta completa.

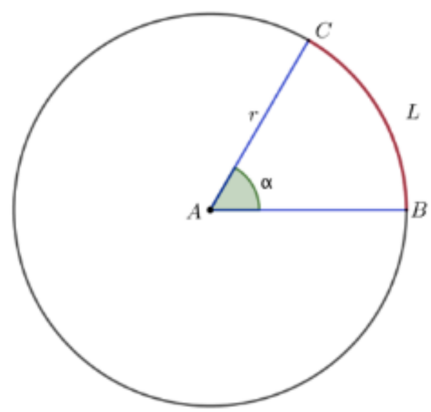
$$1\ vuelta = 360^o = 2\pi\ rad$$

Esto permite encontrar una relación útil entre estos dos sistemas de medición de ángulos.

La medida en radianes de un ángulo es equivalente a la longitud del arco en el círculo unitario subtendido por el ángulo. Por lo tanto,

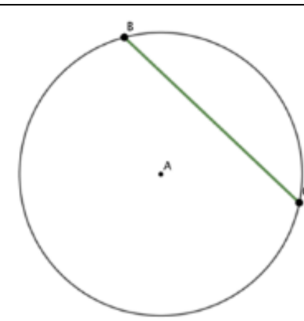
$$L = r \cdot \alpha$$

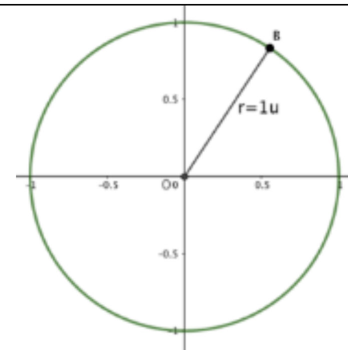
L: Longitud del arco dentro una circunferencia.
r: radio de la circunferencia.
α: ángulo en radianes que abarca el arco.



Cuerda: Es un segmento con sus extremos sobre dicha curva.

Longitud de una cuerda en la circunferencia: Distancia en línea recta entre dos puntos en un círculo. $Cuerda\ \overline{BC}$



Circunferencia unitaria: Circunferencia centrada en el origen del plano cartesiano $(0,0)$ y radio de una unidad (1 u). Para todo punto (x, y) que pertenece a la circunferencia unitaria, se cumple que $x^2 + y^2 = 1$	

FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES
• Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los enunciados de los problemas permitiéndoles hacer conjeturas, además aplican las definiciones para resolver problemas. • Los estudiantes relacionan de forma lógica los teoremas y definiciones sobre la temática de medición de ángulos, arcos y cuerdas para realizar demostraciones y/o resolver problemas. • El estudiante utiliza un lenguaje verbal y algebraico acorde con la temática de ángulos, arcos, cuerdas y circunferencia unitaria de manera correcta en la resolución de los problemas.

2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

Actividad 1: Se presenta la siguiente definición conocida por los estudiantes.

Definición 1. Grado sexagesimal: Un grado es la amplitud del ángulo que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales y tomar una de ellas. La notación utilizada es 1º.

A partir de la definición se les proponen las siguientes preguntas a los estudiantes:

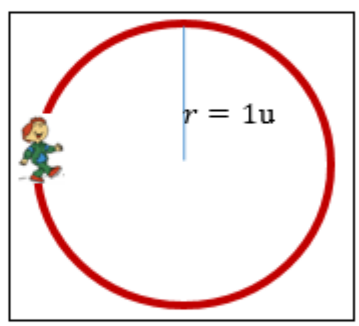
- ¿Por qué $\frac{1}{4}$ de circunferencia representa 90º?
- ¿Qué parte de la circunferencia representa 60º?
- ¿Cuántos grados representan $\frac{1}{12}$ de circunferencia?

Actividad 2: Teniendo en cuenta la actividad que realizaron los estudiantes en casa de forma autónoma sobre un acercamiento a la construcción del número pi (π), se presenta la siguiente definición.

Definición 2. Número pi (π): es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi \approx 3{,}141592 \ldots$$

Lee con detenimiento y analiza la siguiente situación del contexto:



Caminar alrededor del contorno de una circunferencia, corresponde a caminar una trayectoria equivalente al perímetro de la circunferencia $p = 2\pi r = 2\pi \times 1u = 2\pi\, u$. Por tanto, parece natural asociar el número 2π radios con el concepto de una vuelta completa.

Es decir:

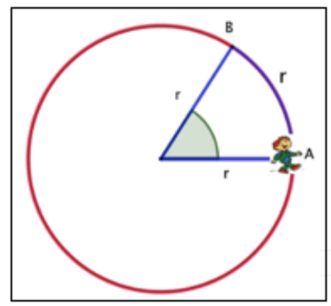
$$\boxed{1\ vuelta = 360° = 2\pi\ rad}$$

Teniendo en cuenta la situación del contexto, se les proponen los siguientes problemas a los estudiantes.

Problema 1: Completa la siguiente tabla, explicación con detalle.

Vueltas (V)	Grados (º)	Radios (rad)
$\mathbf{1\ V}$	$360°$	2π *rad*
$\mathbf{1/2\ V}$		
	$90°$	
		$\frac{\pi}{3}$ *rad*
	$45°$	
$\mathbf{1/12\ V}$		

Problema 2: Como $1\ vuelta = 360° = 2\pi\ rad$



Tomando el valor de pi con dos decimales ($\pi \approx 3{,}14$), se puede afirmar que:

$1\ vuelta = 360° \approx 2(3{,}14) radios \approx 6{,}28\ radios.$

- Si una persona recorre un arco exactamente igual a la longitud de un radio, ¿Cuántos grados mide aproximadamente el ángulo de barrido? Observa la imagen.

A continuación, se presentan las siguientes definiciones a los estudiantes:

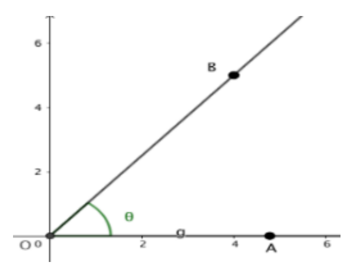
Definición 3. Radián: Un radián es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma.

Finalmente, los estudiantes establecen que:

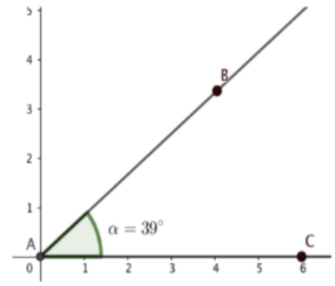
$$\boxed{1\ \text{rad} \approx 57{,}29°}$$

Para afianzar la definición de radián se muestra la construcción de un radián en GeoGebra. Construcción y defición de un radián.ggb

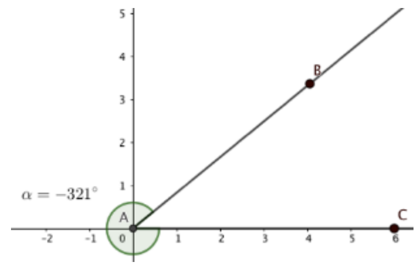
Definición 3. Ángulo en posición estándar: Un ángulo está en posición estándar cuando tiene el vértice en el origen del plano cartesiano y el lado inicial coincide con el semieje x positivo.



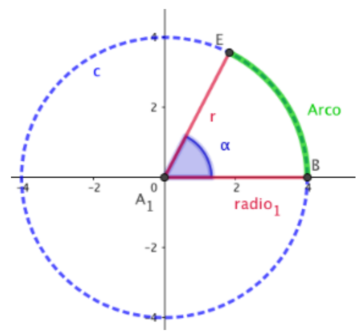
Definición 4. Ángulo en posición estándar positivo: Un ángulo en posición estándar es positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por ejemplo, el ángulo que se muestra en la imagen mide $39°$.



Definición 5. Ángulo en posición estándar negativo: Un ángulo en posición estándar es negativo cuando se mide en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo el ángulo que se muestra en la imagen mide $-321°$.



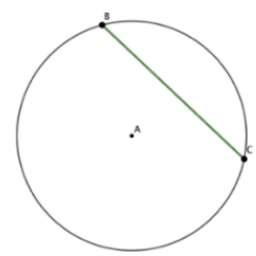
Definición 6. Longitud de arco de circunferencia: Sea α un ángulo central medido en radianes, la longitud del arco es la medida de la porción de la circunferencia ubicada entre los dos rayos del ángulo.



$$\boxed{L = r \cdot \alpha}$$

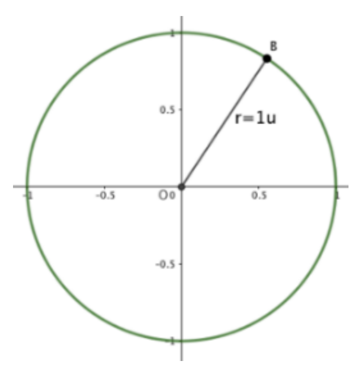
L: Longitud del arco dentro una circunferencia.
r: radio de la circunferencia.
α: ángulo en radianes que abarca el arco.

Definición 6. Cuerda de circunferencia: Segmento que une los dos puntos de un arco de la circunferencia.



$$Cuerda\ \overline{BC}$$

Definición 7. Circunferencia unitaria: Circunferencia centrada en el origen del plano cartesiano (0,0) y radio de una unidad (1 u).



Para todo punto (x, y) que pertenece a la circunferencia unitaria, se cumple que

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1 \text{ ó } \sqrt{x^2 + y^2} = 1}$$

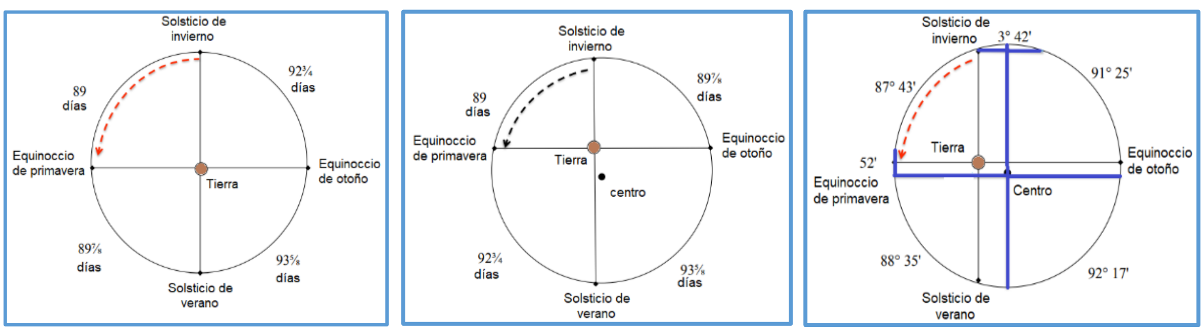
3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

Un aparte de la historia ¿cómo surgió la trigonometría en Grecia? Hiparco de Nicea (190- 120 a.C.), considerado por la gran mayoría de autores como el más grande astrónomo de la antigüedad y padre de la trigonometría. Quizás uno de los problemas que se usó y que hoy conocemos como trigonometría fue uno resuelto por Hiparco de Rodas (alrededor de 190-120 a.C): sobre las cuatro estaciones del año que tenían períodos de tiempo diferente. Figura 16.

- El invierno: 89 días.
- Primavera: $92\frac{3}{4}$ días.
- Verano: $92\frac{5}{8}$ días.
- Otoño: $89\frac{7}{8}$ días

Hiparco usó el período de tiempo de las estaciones observadas para determinar la duración del arco recorrido por el sol en su órbita durante cada estación. Luego determinó la longitud de las cuerdas que conectan la posición del sol al final de cada estación. Estas longitudes le permitieron determinar qué tan lejos está la tierra del centro de la órbita del sol, como se observa en la imágen.

Como se puede observar uno de los problemas de la astronomía: radicaba en hallar la longitud de dos cuerdas para los ángulos de 3° 42' y 52'.



Períodos de tiempo de las estaciones del año.
Fuente: Bressoud, D. (2009)

Con la participación activa del estudiante y el docente como mediador del conocimiento se proponen y se resuelven los siguientes problemas.

Problema 1: Si el radio de la circunferencia es r, responde:

- ¿Cuál es la longitud de la cuerda cuando el ángulo mide $90°$?
- Si el radio de la circunferencia es $\mathrm{r} = 2\ \mathrm{cm}$, ¿cuál es la longitud del arco y la longitud de cuerda cuando el ángulo mide $90°$?
- Realizar la gráfica en GeoGebra del arco y la cuerda para un ángulo de $90°$ y un $r = 2\ cm$. Compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

Problema 2: Si el radio de la circunferencia es r:

- Cuál es la longitud de la cuerda cuando el ángulo mide $45°$?
- Si el radio de la circunferencia es $r = 3\ cm$, ¿cuál es la longitud del arco y la longitud de cuerda cuando el ángulo mide $45°$?
- Realizar la gráfica en GeoGebra del arco y la cuerda para un ángulo de $45°$ y un $r = 3\ cm$. Compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

Problema 3: Realiza una gráfica de la circunferencia unitaria, dividirla en 8 partes iguales iniciando en el punto (1,0) en sentido antihorario, representar el origen $(0,0)$ con la letra (O) y cada punto de las divisiones de la circunferencia con las letras (A, B, C, D, E, F, G y H).

- Encontrar las coordinadas (x, y) de los puntos A, B, C, D, E, F, G y H
- Realizar la gráfica en GeoGebra y compara las respuestas obtenidas en el problema con GeoGebra.
- Si cada una de las divisiones de la circunferencia representa un ángulo en posición estándar partiendo desde el punto A. ¿Cuál es la medida de cada ángulo en radianes?

Problema 4: Realiza una gráfica de la circunferencia unitaria, representar el origen $(0,0)$ con la letra (O).

- Mostrar que para cada punto (x, y) que pertenece a la circunferencia unitaria, se cumple que
$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ó } \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$
- Identificar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia unitaria, cuáles están dentro de la circunferencia unitaria y cuáles están fuera de la circunferencia unitaria.

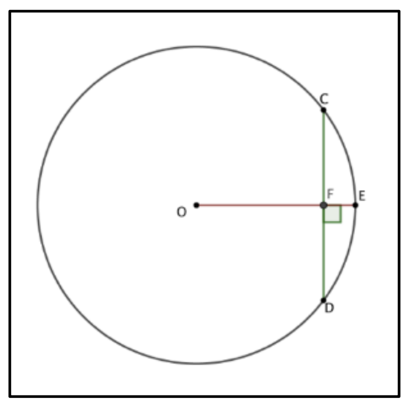
  A$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C$(1,1)$D$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E$(-1,0)$
- Si el punto F$\left(x, \frac{3}{4}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria, ¿cuál es el valor de la componente x?

Problema 5: Cuando el radio es perpendicular a la cuerda, divide la cuerda y el arco en partes congruentes.

$$\overline{OE} \perp CD \Rightarrow \overline{CF} \cong \overline{FD}\ y\ \widehat{CE} \cong \widehat{ED}$$

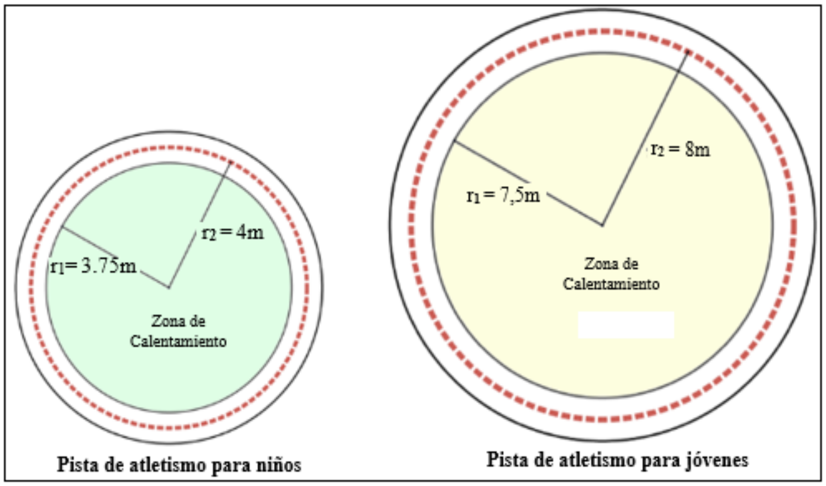
Si se traza una cuerda de $8\ cm$ sobre una circunferencia de radio $5\ cm$.

- ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda, segmento $\overline{OF}$?
- ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{CE}$?



1. MOTIVACIÓN

Problema 1: Las siguientes imágenes representan unas pistas circulares de atletismo para entrenamiento de los niños y jóvenes.



1. La línea punteada de color rojo representa el recorrido de los atletas en cada entrenamiento. Si los niños y jóvenes deben realizar 10 vueltas en cada entrenamiento

- ¿Cuántos metros lineales deben recorrer los niños en cada entrenamiento?
- ¿Cuántos metros lineales deben recorrer los jóvenes en cada entrenamiento?

2. *(Selecciona la respuesta correcta y explique)* Respecto a los metros lineales recorridos por los niños y los jóvenes se puede afirmar que

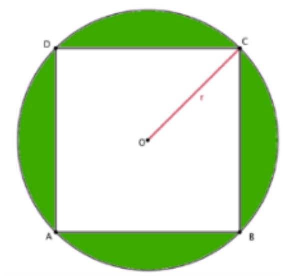
a. Un niño recorre una cuarta parte de los metros lineales que recorre un joven.
b. Un joven recorre cuatro veces los metros lineales que recorre un niño.
c. Un niño recorre la mitad de los metros lineales que recorre un joven.
d. Los jóvenes y los niños recorren la misma cantidad de metros lineales.

3. ¿De cuántos metros cuadrados de área disponen los niños y jóvenes para realizar su calentamiento?

3. (*Selecciona la respuesta correcta y explique)* Teniendo en cuenta las circunstancias actuales, cada niño o cada joven dispone de 2π m^2 de área para su calentamiento, de lo anterior se puede afirmar que

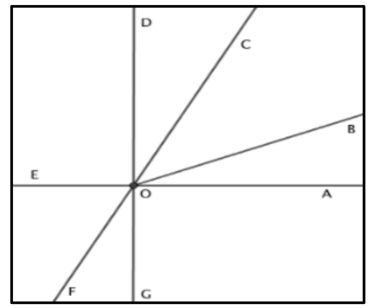
a. En la zona de jóvenes caben el doble que en la zona de niños.
b. En la zona de niños cabe la cuarta parte que en la zona de jóvenes
c. En ambas zonas caben la misma cantidad de personas
d. En la zona de jóvenes caben 8 veces lo que caben en la zona de niños

Problema 2: En la imagen se observa un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.



- Calcular el valor del área sombreada.

Problema 3: Observa la gráfica de la derecha, la recta $\overleftrightarrow{DG} \perp \overleftrightarrow{EA}$, el ángulo $\measuredangle AOB = 22°$ y el ángulo $\measuredangle BOC = 2(\measuredangle AOB)$.

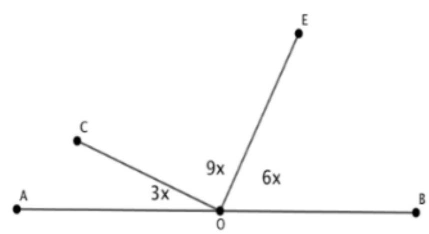


- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle COD$?
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle EOC$?
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle EOF$?
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle FOB$?

Problema 4: Observa la gráfica de la derecha, los ángulos $3x, 9x$ y $6x$ están sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$

- ¿Teniendo en cuenta los datos de la gráfica, se puede afirmar que uno de los tres ángulos es recto?

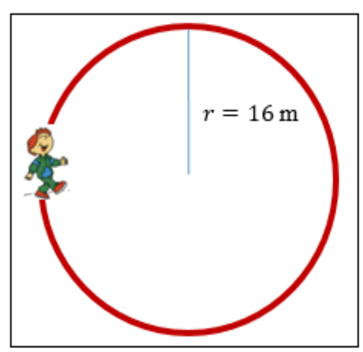
Si la respuesta es afirmativa o negativa, explique por qué.



- ¿Cuál es la medida del $\measuredangle COA$?
- ¿Cuál es la medida del $\measuredangle EOC$?
- ¿Cuál es la medida del $\measuredangle BOE$?

2. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA

Problema 1: Andrés es un atleta que entrena en una pista circular de 16 m de radio como se observa en la imagen. En el primer recorrido avanzó $210°$, en el segundo recorrido $\frac{3}{2}\pi\mathrm{rad}$ y en tercer recorrido $\frac{1}{2}$ vuelta,



1. ¿En cuál de los tres recorridos, Andrés avanzó más?
2. ¿Cuál fue el recorrido total de Andrés en metros (m)?

Recuerde que:

$$\boxed{1\ vuelta = 360° = 2\pi rad}$$

Problema 2: Si el radio de la circunferencia es r, responde:

- ¿Cuál es la longitud de la cuerda cuando el ángulo mide $60°$?
  Recomendación: realizar un bosquejo de la situación con regla y compás.
- Si el radio de la circunferencia es $\mathrm{r} = 4\mathrm{cm}$, ¿cuál es la longitud del arco y la longitud de cuerda cuando el ángulo mide $60°$?

- Realizar la gráfica en GeoGebra del arco y la cuerda para un ángulo de $60°$ y un $r = 4cm$. Compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

Problema 3: Si el radio de la circunferencia es r, responde:

- ¿Cuál es la longitud de la cuerda cuando el ángulo mide $30°$?
  Ayuda: Utiliza el valor de la cuerda de 60º.
  Recomendación: realizar un bosquejo de la situación con regla y compás
- Si el radio de la circunferencia es $r = 5$ cm, ¿cuál es la longitud del arco y la longitud de cuerda cuando el ángulo mide 30º?
- Realizar la gráfica en GeoGebra del arco y la cuerda para un ángulo de $30°$ con $r = 5$ cm. Compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

Problema 4: Realiza una gráfica de la circunferencia unitaria, dividirla en 12 partes iguales iniciando en el punto $(1, 0)$ en sentido antihorario, representar el origen $(0, 0)$ con la letra (O) y cada punto de las divisiones de la circunferencia con las letras (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L). *Recomendación: realizar la gráfica de la situación con regla y compás*

- Encontrar las coordinadas (x, y) de los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L
- Realizar la gráfica en GeoGebra y comparar las respuestas obtenidas en el problema con GeoGebra.
- Si cada una de las divisiones de la circunferencia representa un ángulo en posición estándar partiendo desde le punto A, ¿cuál es la medida de cada ángulo en radianes?

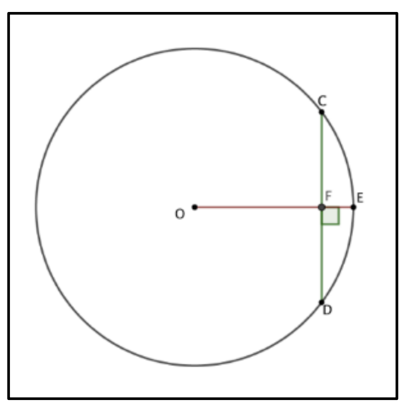
Problema 5: Una circunferencia unitaria está centrada es el origen $(0, 0)$ y radio $r = 1$

Recuerde que si el punto (x, y) pertenece a la circunferencia unitaria se cumple que

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ ó } \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

- Muestre que los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia unitaria.
  A$\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ C(-1,0) D$\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ E$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Problema 6: Recuerde que cuando el radio es perpendicular a la cuerda, divide la cuerda y el arco en partes congruentes.



$$\overline{OE} \perp CD \Rightarrow \overline{CF} \cong \overline{FD} \text{ y } \widehat{CE} \cong \widehat{ED}$$

Sobre una circunferencia de diámetro $12\ cm$, trazar una cuerda $\overline{CD}$, luego trazar una recta perpendicular a la cuerda que pase por el centro de la circunferencia $\overline{OE}$. Si la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda es de $4\ cm$.

- ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{CD}$?
- ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{CE}$?
- ¿Cuál es el área del triángulo ΔOCD?
- Realizar la gráfica en GeoGebra y compara las respuestas obtenidas de las dos cuerdas y el área del triángulo con GeoGebra.

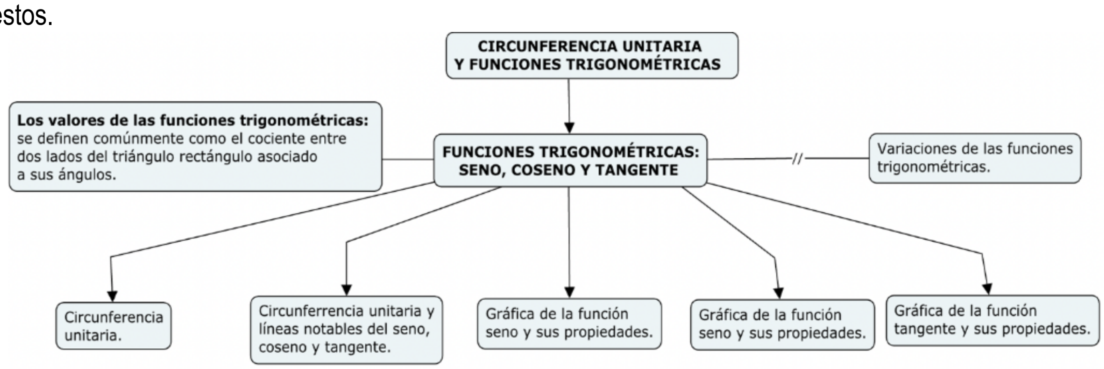
3.4.4. Actividad No.3 Los árabes “De la circunferencia unitaria a las funciones trigonométricas”.

Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL DOCENTE
Actividad No. 3

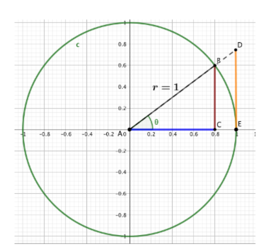
Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema 3:	Funciones trigonométricas
Título:	Los árabes: “De la circunferencia unitaria a las funciones trigonométricas”
Tiempo estimado:	3 horas (2 sesiones de 1,5 horas)
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando conceptos sobre circunferencia unitaria y propiedades de las funciones trigonométricas.
Objetivos de los estudiantes:	1. Entender que los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo θ en posición normal, son segmentos de recta sobre la circunferencia unitaria que coinciden con las razones entre dos lados del triángulo rectángulo. 2. Resolver problemas que involucran las aplicaciones de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para un ángulo θ o las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. 3. Hacer conexiones entre las gráficas y propiedades de las funciones trigonométricas para resolver problemas.

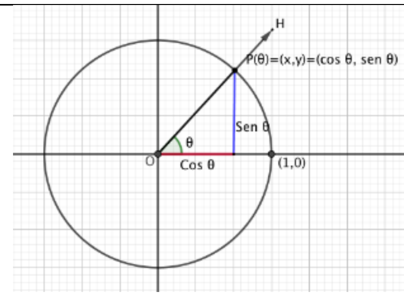
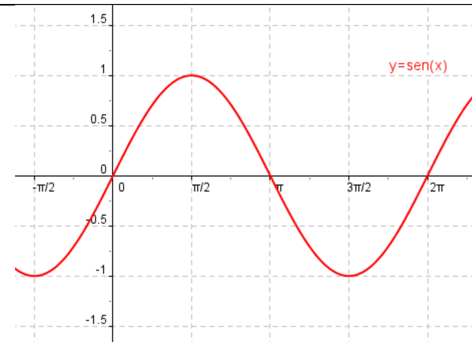
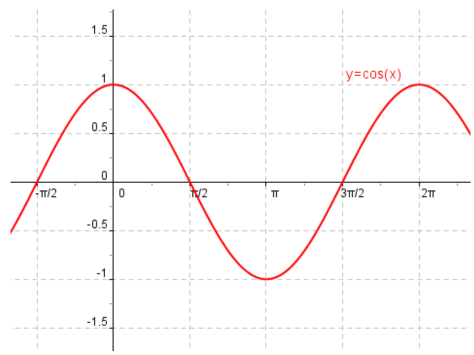
1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, que el estudiante conoce o debe aprender a través de la resolución de los problemas propuestos.



<table>
<tr><th colspan="2">FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES</th></tr>
<tr><td colspan="2">Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.</td></tr>
<tr><td><u>Líneas trigonométricas:</u> Las líneas trigonométricas para el ángulo θ en posición normal, son los segmentos de recta sobre la circunferencia unitaria y sus medidas coinciden con cada de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo.

$sen\ (\theta) = \overline{CD} \quad cos\ (\theta) = \overline{AC} \quad tan\ (\theta) = \overline{ED}$</td><td>
</td></tr>
</table>

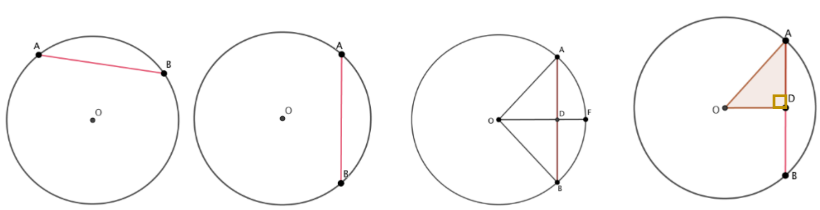
<u>Función trigonométrica:</u> Sea θ cualquier número real y $P(\theta) = P(x, y)$, el punto de intersección en el círculo unitario con el lado terminal del ángulo de θ radianes en posición estándar. Entonces, las tres funciones trigonométricas del número real θ son: $sen\ (\theta) = y \quad cos\ (\theta) = x \quad tan\ (\theta) = x/y$	
<u>Función trigonométrica seno:</u> $x \longrightarrow f(x) = sen(x)$ La función que asocia a cada número real x el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. Propiedades: a) El dominio de la función seno es ℝ. b) El recorrido de la función seno es [−1, 1], ya que el valor máximo que puede tomar el seno es 1 y el mínimo es -1. c) La función seno es periódica y su periodo es 2π.	
<u>Función trigonométrica coseno:</u> $x \longrightarrow f(x) = cos(x)$ La función que asocia a cada número real x el coseno del ángulo cuya medida en radianes es x. Propiedades: a) El dominio de la función coseno es R. b) El recorrido de la función coseno es [−1, 1], ya que el valor máximo que puede tomar el coseno es 1 y el mínimo es -1. c) La función seno es periódica y su periodo es 2π.	

FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES

- Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los enunciados de los problemas permitiéndoles hacer conjeturas, además aplican las definiciones para resolver problemas.
- Los estudiantes relacionan de forma lógica las propiedades de las funciones trigonométricas usando las gráficas.
- El estudiante utiliza un lenguaje verbal, algebraico y gráfico sobre las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente para aplicarlo en la resolución de problemas.

2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

<u>Actividad 1:</u> Observa la cuerda $\overline{AB}$ en la secuencia de imagenes.



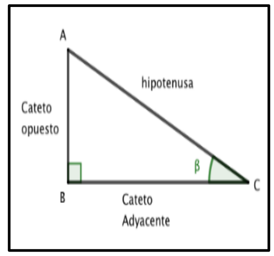
- De acuerdo con la secuencia de figuras, establezca una equivalencia para la longitud de la cuerda $\overline{AB}$.

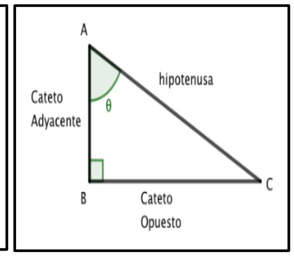
De acuerdo con las respuestas obtenidas por los estudiantes, se puede concluir que si se conoce la longitud del segmento $\overline{AD}$, la longitud de la cuerda se puede determinar mediante la expresión $\overline{AB} = 2(\overline{AD})$.

Para resolver al problema de cómo hallar la longitud de una cuerda se necesita conocer el segmento $\overline{AD}$, que representa uno de los catetos de un triángulo rectángulo.

Definición 1. Los catetos del triángulo rectángulo se definen según el ángulo agudo de referencia β y θ.

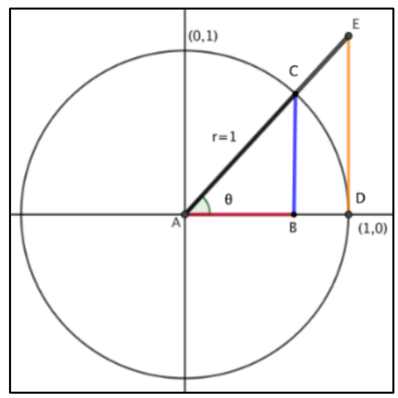
- **Cateto adyacente:** Se define como el lado que está junto al lado del ángulo dado.
- **Cateto opuesto:** Se define como el lado que está enfrente del ángulo dado.





Definición 2. Líneas trigonométricas: Las líneas trigonométricas para el ángulo θ en posición normal, son los segmentos de recta sobre la circunferencia unitaria y sus medidas coinciden con cada una de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo.

Una ***razón trigonométrica*** es el cociente entre dos lados del triángulo rectángulo, se puede expresar como una fracción o usando una representación decimal.



Razón 1: $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CB}}{1} = \overline{CB}$

Este segmento se define como: $sen\ \theta = \overline{BC}$

Razón 2: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$

Este segmento se define como: $cos\ \theta = \overline{AB}$

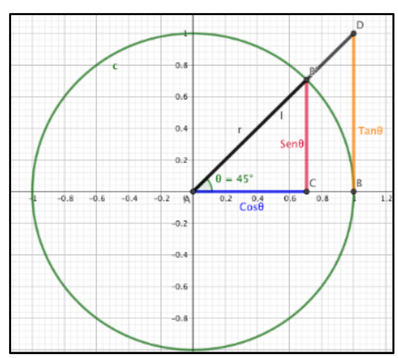
Razón 3: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, haciendo $\overline{AB} = 1$,

se obtiene la siguiente razón equivalente

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DE}}{1} = \overline{DE}$

Este segmento se define como: $tan\ \theta = \overline{DE}$

Actividad 2: Observa la animación en GeoGebra de las líneas trigonométricas del seno, coseno y tangente, completa la tabla de valores de las funciones trigonométricas. Observa el ejemplo en la imagen.



Animación: Líneas trigonométricas (0-360º).ggb

Ángulo θ en grados	Ángulo θ en rad	$Sen\ \theta$	$Cos\ \theta$	$Tan\ \theta$
$0°$	0			
$30°$	$\frac{\pi}{6}$ rad			
$45°$	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\approx 0{,}7$	$\approx 0{,}7$	$= 1$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$ rad			
$90°$				

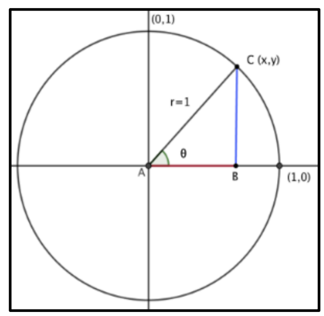
Ángulo θ en grados	Ángulo θ en rad	$Sen\ \theta$	$Cos\ \theta$	$Tan\ \theta$
$160°$				
$180°$	π rad			
$270°$				
$300°$				
$360°$				

3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

Un aparte de la historia: ¿Cómo surgen las líneas trigonométricas?

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes realizando estudios de trigonometría trabajaron con la función seno, heredados de los pueblos de Grecia y de la India. A finales del siglo X ya conocían tanto la función seno como las otras cinco funciones trigonométricas: coseno tangente, cotangente, secante y cosecante. Estos matemáticos árabes fueron quienes sugirieron el uso del valor $r = 1$ (*circunferencia unitaria*) en vez de $r = 60$, lo que dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.

Con la participación activa del estudiante y el docente como mediador del conocimiento se proponen y se resuelven los siguientes problemas.

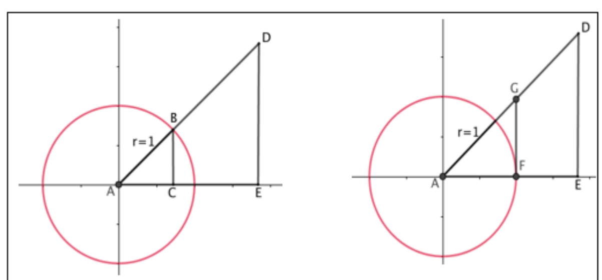


Problema 1: Observa la imagen. Las funciones trigonométricas se definen como: $sen\ \theta = \overline{BC}$ y $cos\ \theta = \overline{AB}$.

- Demuestre que

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

Problema 2: Teniendo en cuenta las definiciones de las funciones trigonométricas:



$sen\ \beta = \overline{CB}$, $cos\ \beta = \overline{AC}$.

$\tan \beta = \overline{FG}$.

- Demuestre que $sen\ \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$, y se define como $sen\ \beta = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenuesa} = \frac{co}{h}$
- Demuestre que $cos\ \beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$, y se define como $cos\ \beta = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenuesa} = \frac{ca}{h}$
- Demuestre que $tan\ \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$, y se define como $tan\ \beta = \frac{Cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{co}{ca}$

Problema 3: Realiza la gráfica de la circunferencia unitaria *(realidad: papel milimetrado 1 u:10 cm)*, dividirla en 36 partes iguales iniciando en el punto $(1,0)$. Cada división representa un ángulo en posición normal o estándar, trazar los segmentos de la función $\operatorname{sen}\theta$ para cada ángulo.

- Realizar una gráfica de la función $\operatorname{sen}\theta$, con lápiz y papel milimetrado. Sobre el eje x el ángulo $\theta = \{0, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, \dots, 360°\}$ y sobre el eje y el valor de la función $\operatorname{sen}\theta$, finalmente une los puntos con el curvígrafo.
- Observa la gráfica que obtuvo y la animación de la función seno en GeoGebra y responde las siguientes preguntas. Animación. Gráfica función seno.ggb

1. Completar la siguiente tabla de valores *(escribe los valores de la función $sen\theta$ con dos decimales de aproximación)*

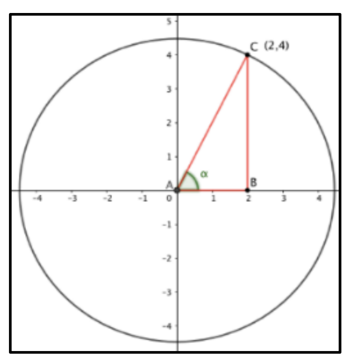
Ángulo en grados	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	$\cdots$	$360°$
Ángulo en radianes	0	$\frac{\pi}{18}$										
$sen\theta$												

2. ¿Para cuáles valores del ángulo θ la función $\operatorname{sen}\theta = 0$?
3. ¿Cuál es el máximo y mínimo valor que toma la función $\operatorname{sen}\theta$?, y ¿cuál o cuáles son los valores del ángulo θ?
4. ¿Cuál es el período de la función $\operatorname{sen}\theta$?
5. Observa la función en el intervalo $[0, 2\pi]$, ¿en cuáles intervalos la función es positiva $(+)$? y ¿en cuáles intervalos es negativa $(-)$? De acuerdo con los resultados obtenidos completa la siguiente tabla con los signos de la función.

Cuadrante	**I**	**II**	**III**	**IV**
$\operatorname{sen}\theta$				

6. Observa la función el intervalo $[0, 2\pi]$, ¿en cuáles intervalos la función es creciente?, y ¿en cuáles intervalos la función es decreciente?
7. ¿Para qué valores del ángulo θ el $\operatorname{sen}\theta = 2$?
8. ¿Para qué valores del ángulo θ el $\operatorname{sen}\theta = -3$?

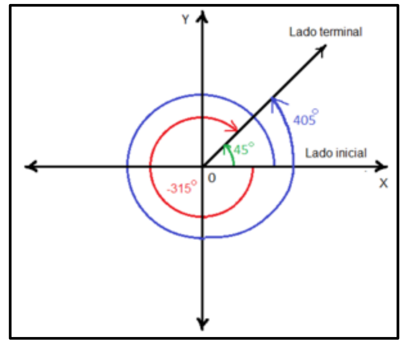
Problema 4: De acuerdo con la información que le proporciona la imagen, responde:



- ¿Cuál es el radio de la circunferencia?
- ¿Cuál es el valor del $\operatorname{sen}\alpha$?
- ¿Cuál es el valor del $\cos\alpha$?
- ¿Cuál es el valor del $\tan\alpha$?
- Demuestre que el $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Problema 5: A partir de la siguiente definición resuelve el problema propuesto.

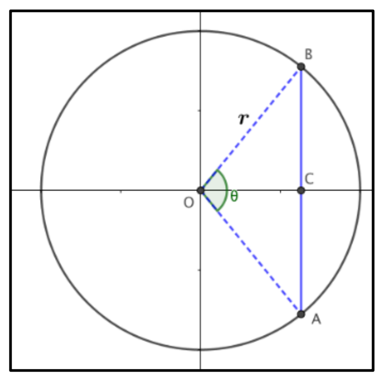
Definición 3: Los ángulos coterminales son ángulos que comparten sus dos lados iniciales y finales, y el vértice. Por ejemplo, los ángulos de 45º, 405º y -315 son coterminales.



Completa la tabla:

Ángulo θ	Ángulo coterminal positivo $(0-360^o, 0-2\,\pi)$	Ángulo coterminal negativo $(0-360^o, 0-2\,\pi)$	sen θ
$\mathbf{390°}$	$30°$	$-330°$	$\frac{1}{2}=0{,}5$
$\frac{15\pi}{2}$			
45º			
-480^o			
$-\frac{13\pi}{2}$			
$\frac{9\pi}{4}$			

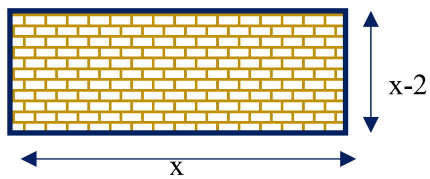
Problema 6. Observa la imagen. El ángulo $\measuredangle\theta\ = 130°$, el radio de la circunferencia es de $3{,}5\ \mathrm{cm}$ y C es el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$.



- ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{AB}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{OC}$?
- ¿Cuál es la longitud del arco $\widehat{AB}$?
- Realizar la gráfica en GeoGebra de la circunferencia con $r = 3{,}5\ \mathrm{cm}$, la cuerda y el arco, compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

1. MOTIVACIÓN

Problema 1. La siguiente gráfica representa una pared en forma rectangular.



Pared rectangular.

De acuerdo con la información anterior responde las preguntas 1 a la 6.

1. Encuentre una expresión algebraica que represente el perímetro del rectángulo (p).
2. (*Selecciona la respuesta correcta y explica*) La expresión algebraica que representa el perímetro del rectángulo (p) se puede asociar con una función
   a. Constante
   b. Lineal
   c. Cuadrática
   d. La expresión algebraica que se obtuvo no representa una función.
3. Encuentre una expresión algebraica que represente el área del rectángulo (A).
4. (*Selecciona la respuesta correcta y explica*) La expresión algebraica que representa el área del rectángulo se puede asociar con una función
   a. Constante
   b. Lineal
   c. Cuadrática
   d. La expresión algebraica que se obtuvo no representa una función.

5. Completar la siguiente tabla teniendo en cuenta los valores de x, perímetro del rectángulo (p) y área del rectángulo (A). *(Escribir todas operaciones que realizó para obtener el perímetro y el área).*

x	-2	-1	0	1	3	4	5	6
p								
A								

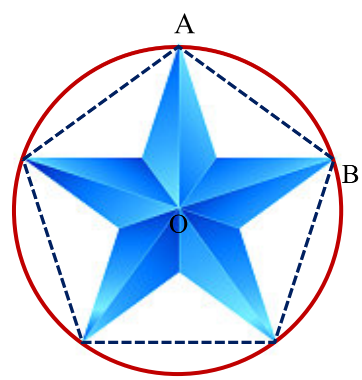
Realizar las siguientes gráficas sobre el mismo plano cartesiano. *(Cada una de un color)*

- Valor de x y el perímetro del rectángulo p.
- Valor de x y el área del rectángulo A.

6. Identificar las siguientes propiedades de cada gráfica.

Propiedades de cada gráfica	x vs. p	x vs. A
1) Tipo de función		
2) Dominio de la función		
3) Rango de la función		
4) Intervalos donde la función es creciente		
5) Intervalos donde la función es decreciente		

Problema 2. Observa la estrella de cinco puntas y el pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio $1\ u$. En punto O es el centro de la circunferencia.



Pentágono regular y estrella de cinco puntas inscritos en una circunferencia.

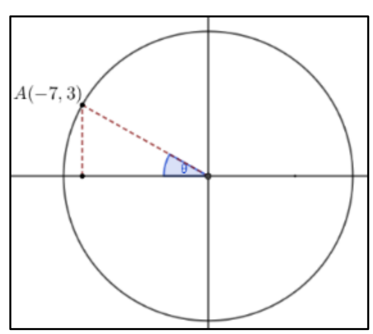
De acuerdo con la información anterior resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuál es la medida de los ángulos $\measuredangle AOB, \measuredangle OBA\ y\ \measuredangle OAB$?
- ¿Cuál es la longitud del arco $\widehat{AB}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$ si la estrella está inscrita en una circunferencia de radio $5\ u$?

2. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA

Problema 1: De acuerdo con la información que le proporciona la imagen, responde:

- ¿Cuál es el radio de la circunferencia?
- ¿Cuál es el valor del $\operatorname{sen} \theta$?
- ¿Cuál es el valor del $\cos \theta$?
- ¿Cuál es el valor del $\tan \theta$?
- Demuestre que el $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$



Problema 2: Realiza la gráfica de la circunferencia unitaria *(realidad: papel milimetrado 1 u:10 cm),* dividirla en 36 partes iguales iniciando en el punto (1, 0). Cada división representa un ángulo en posición normal o estándar, trazar los segmentos de la función $\cos\theta$ para cada ángulo.

- Realizar una gráfica de la función $\cos\theta$, con lápiz y papel milimetrado. Sobre el eje x el ángulo $\theta = \{0, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, \dots, 360°\}$. y sobre el eje y el valor de la función $\cos\theta$, finalmente une los puntos con el curvígrafo.
- Realiza la gráfica del $\cos\theta$ en GeoGebra y responde las siguientes preguntas y explica con detalle las respuestas.

1. Completa la siguiente tabla de valores *(escribe los valores de la función $\cos\theta$ con dos decimales de aproximación)*

Ángulo en grados	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	$\cdots$	$360°$
Ángulo en radianes	0	$\frac{\pi}{18}$										
$\cos\theta$												

2. ¿Para qué valores del ángulo θ la función $\cos\theta = 0$?
3. ¿Cuál es el máximo y mínimo valor que toma la función $\cos\theta$ y cuál o cuáles son los valores del ángulo θ?
4. ¿Cuál es el período de la función $\cos\theta$?
5. ¿Para qué valores del ángulo θ el $\cos\theta = 3$?
6. ¿Para qué valores del ángulo θ el $\cos\theta = -2$?
7. Observa la función en el intervalo [0, 2π], ¿en cuáles intervalos la función es positiva (+)?, y ¿en cuáles intervalos es negativa (-)? De acuerdo con los resultados completa la siguiente tabla con los signos de la función.

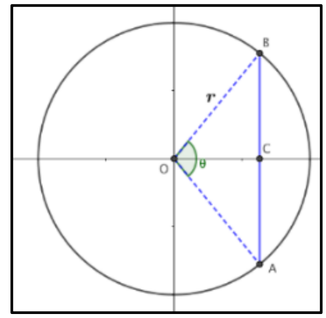
Cuadrante	**I**	**II**	**III**	**IV**
$\cos\theta$				

8. Observa la función el intervalo [0, 2π], ¿en cuáles intervalos la función es creciente y en cuáles intervalos la función es decreciente?

Problema 3: Si el radio de la circunferencia es $r = 5\ cm$.

- ¿Cuál es la longitud de la cuerda cuando el ángulo mide $150°$?
- ¿Cuál es la longitud del arco cuando el ángulo mide $150°$?
- Realizar la gráfica en GeoGebra de la circunferencia con $r = 5\ cm$, de la cuerda y el arco, compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

Problema 4: Si el radio de la circunferencia es r.

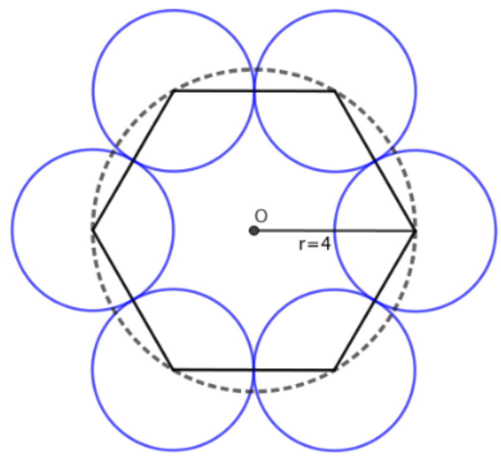


- Demostrar que longitud de la cuerda $\overline{AB} = 2rsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Problema 5: Si el radio de la circunferencia de la figura del problema 4 es de $3\ cm$ y el ángulo $\theta = \frac{7\pi}{9}$,

- ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{AB}$?
- ¿Cuál es la longitud del centro de la circunferencia a la cuerda (segmento $\overline{OC}$)?
- Realizar la gráfica en GeoGebra de la circunferencia con $r = 5\ cm$, de la cuerda $\overline{AB}$ y el arco $\widehat{AB}$, compara las respuestas obtenidas del problema con GeoGebra.

Problema 6: Seis circunferencias congruentes y tangentes en los puntos medios del hexágono, están sobre una circunferencia de $r = 4$ como se muestra en la imagen.



- ¿Cuál es el área que ocupan las seis circunferencias congruentes?
- Demuestre que el área que ocupa una circunferencia pequeña se puede calcular mediante la expresión:

$$A = \pi(R \cdot sen\ 30°)^2$$

R: radio de la circunferencia circunscrita al pentágono

- Demuestre que el área que ocupan las seis circunferencias se puede establecer mediante la expresión:

$$A = \frac{3}{2}\pi R^2$$

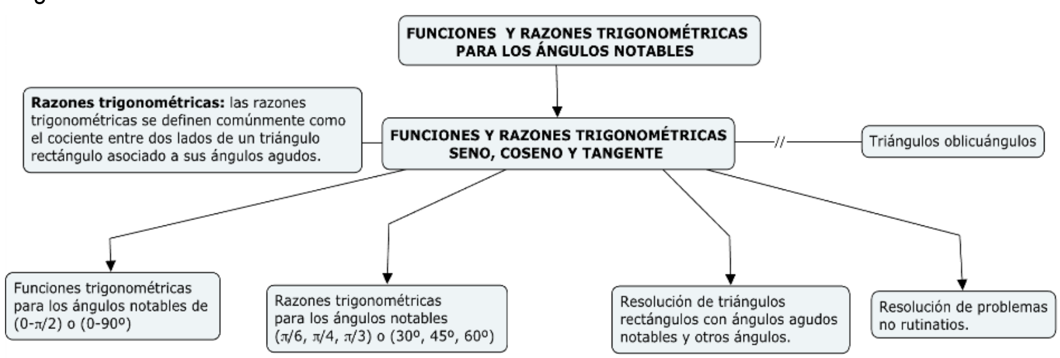
3.4.5. Actividad No. 4 De la trigonometría del círculo a la trigonometría del triángulo.

Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL DOCENTE
Actividad No. 4

Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema 4:	Razones trigonométricas y solución de triángulos rectángulos.
Título:	De la trigonometría del círculo a la trigonometría del triángulo.
Tiempo estimado:	3 horas (2 sesiones de 1,5 horas)
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando conceptos sobre la trigonometría del triángulo rectángulo.
Objetivos de los estudiantes:	1. Describir las funciones trigonométricas para un ángulo θ en posición normal, como segmentos de recta sobre la circunferencia unitaria que coinciden con las razones entre dos lados del triángulo rectángulo. 2. Resolver problemas que involucran las aplicaciones de las funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para el ángulo θ o las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. 3. Hacer conexiones entre las gráficas, las propiedades de las funciones trigonométricas y las razones trigonométricas para resolver problemas.

1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre funciones y razones trigonométricas para los ángulos notables.

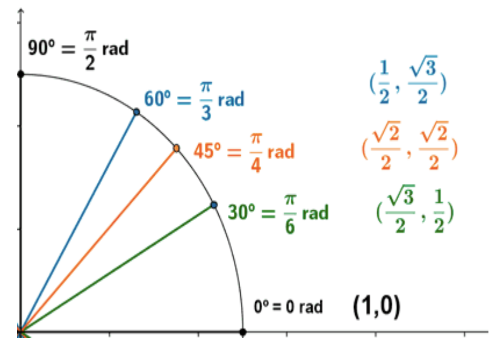


FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES
Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.

Valor de las funciones trigonométricas para ángulos notables de en el primer cuadrante: Sea $\theta = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$ y $P(\theta) = P(x, y)$, el punto de intersección en el círculo unitario con el lado terminal del ángulo de θ radianes en posición estándar. Entonces, el valor de las tres funciones trigonométricas para el ángulo θ, se determinan por:

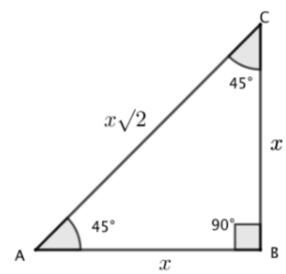
$\operatorname{sen}\theta = y$ $\qquad$ $\cos\theta = x$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$\mathbf{sen}\ (\boldsymbol{\theta})$	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	1
$\mathbf{cos}\ (\boldsymbol{\theta})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	0
$\mathbf{tan}\ (\boldsymbol{\theta})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$	1	$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$	ND



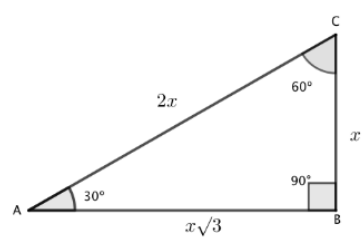
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo isósceles para el ángulo agudo de $\frac{\pi}{4} = 45°$: Construyendo un triángulo rectángulo isósceles semejante al construido sobre la circunferencia unitaria. Las razones trigonométricas **seno (sen)**, **coseno (cos)** y **tangente (tan)**, se definen para el ángulo agudo $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ como sigue.

$\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = 1$



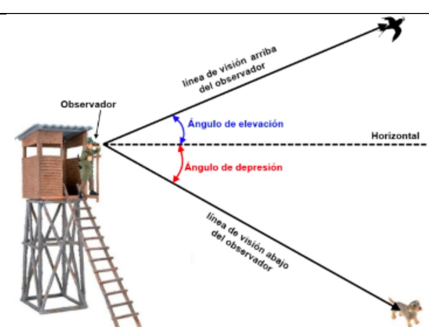
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo escaleno con ángulos agudos de $30° = \frac{\pi}{6}$ y $60° = \frac{\pi}{3}$: Construyendo un triángulo rectángulo escaleno semejante al construido sobre la circunferencia unitaria. Las razones trigonométricas **seno (sen)**, **coseno (cos)** y **tangente (tan)**, se definen para el ángulo agudo $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ como sigue.

$\operatorname{sen} 30° = sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



Ángulo de elevación: se forma con la línea de visión arriba del observador y la línea horizontal del observador, el lugar observado está situado arriba del observador.

Ángulo de depresión: se forma con la línea de visión abajo del observador y la línea horizontal del observador, el lugar observado está situado abajo del observador.



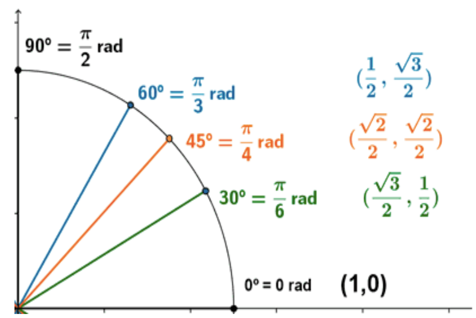
Fuente:https://rea.ceibal.edu.uy/elp/aplicando_la_trigonometr_a/ngulo_de_elevacin_y_de_depresin.html

FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES
• Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los enunciados de los problemas permitiéndoles hacer conjeturas, además aplican las definiciones para resolver problemas. • Los estudiantes relacionan de forma lógica funciones trigonométricas con las razones trigonométricas usando las gráficas de la circunferencia unitaria con la gráfica de los triángulos rectángulos. • El estudiante utiliza un lenguaje verbal, algebraico y gráfico sobre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para aplicarlas en la resolución de problemas.

2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

Actividad 1: Valor de las funciones trigonométricas para ángulos notables en el primer cuadrante: Teniendo en cuenta la gráfica, observa los ángulos en posición normal

$\theta = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $P(\theta) = P(x, y)$ es el punto de intersección del lado terminal del ángulo de θ con el círculo unitario. El valor de las tres funciones trigonométricas para el ángulo θ, se definen por:



$$\text{sen}\,\theta = y \quad \cos\theta = x \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

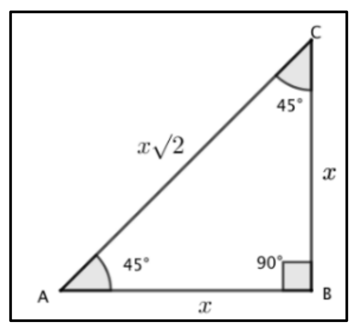
De acuerdo con la información anterior completa la tabla de las funciones trigonométricas para los ángulos notables del primer cuadrante.

$\boldsymbol{\theta}$	**0**	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$
sen (θ)					
cos (θ)					
tan (θ)					

Actividad 2: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo isósceles para el ángulo agudo de $45° = \frac{\pi}{4}$. Construyendo un triángulo rectángulo isósceles semejante al construido sobre la circunferencia unitaria y aplicando las definiciones de las razones trigonométricas

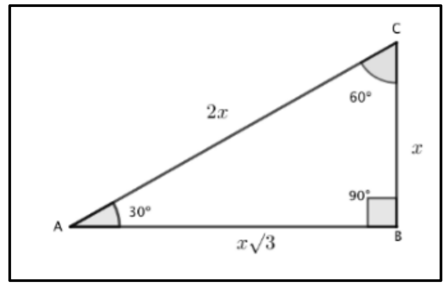
$\text{sen}\,\theta = \frac{co}{h}$ $\cos\theta = \frac{ca}{h}$ y $\tan\theta = \frac{co}{ca}$

Demuestre que



$$\text{sen}\,45° = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Actividad 3: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo escaleno con ángulos agudos de $30° = \frac{\pi}{6}$ y $60° = \frac{\pi}{3}$. Construyendo un triángulo rectángulo escaleno semejante al construido sobre la circunferencia unitaria con los ángulos agudos de 30º y 60º.



Demuestre que

$$\text{sen } 30° = \text{sen }\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \text{sen }\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

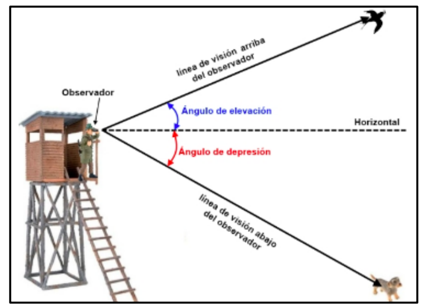
$$\tan 30° = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60° = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

- ¿Explique por qué $sen\ 30° = cos\ 60°\ y\ sen\ 60° = cos\ 30°$?

Para tener en cuenta:

Definición 1. Ángulo de elevación: Se forma con la línea de visión arriba del observador y la línea horizontal del observador, el lugar observado está situado arriba del observador.

Definición 2. Ángulo de depresión: Se forma con la línea de visión abajo del observador y la línea horizontal del observador, el lugar observado está situado abajo del observador.



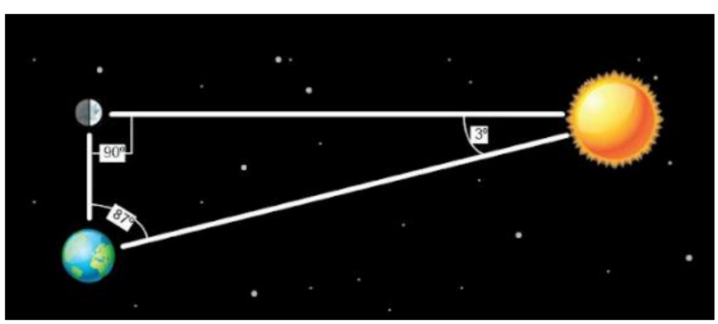
3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

Un aparte de la historia: Aristarco y las razones trigonométricas en el campo de la astronomía.

Aristarco de Samos, astrónomo y matemático, nacido en Samos Grecia, fue la primera persona conocida que propuso el modelo heliocéntrico del Sistema Solar. Esta propuesta la hizo después de estudiar la distancia al sol y el tamaño del Sol, determinando que el Sol era mucho más grande que la Tierra.

Aristarco planteó el siguiente razonamiento, la Luna no emite luz propia, sino que reflejaba la del Sol; por tanto, en cuarto creciente o menguante, cuando justo la mitad del satélite es visible, el ángulo que forman la Luna, el Sol y la Tierra es de $90°$.

En uno de esos días, durante los momentos en el que el Sol y la Luna son visibles a la vez, estableció que el ángulo que separa Luna y Tierra, desde el Sol, es de $3°$.



Modelo de Aristarco para calcular las distancias relativas entre Tierra, Sol y Luna.
Fuente: http://licenciahistorica.blogspot.com.co/2016/04/hasta-que-altura-volo-icaro.html

Este modelo se puede representar mediante un triángulo rectángulo, la luna como vértice donde se forma un ángulo de $90°$, es decir que el $\text{sen}\ (3°)\ =\ \text{TL}/\text{TS}$ donde TL es la distancia de la Tierra a la Luna y TS la distancia Tierra Sol.

Con la participación activa del estudiante y el docente como mediador del conocimiento de proponen y se resuelven los siguientes problemas.

Problema 1: Una escalera de $12\ m$, está recostada sobre un poste como se observa en la imagen El poste con el piso forman un ángulo recto, el piso y la escalera forman un ángulo de $60°$.

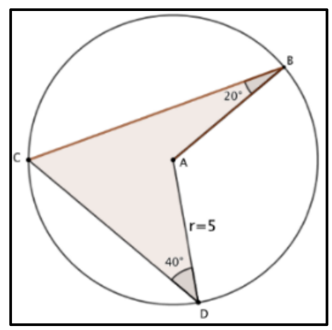
- ¿A qué distancia se encuentra la base de la escalera con el poste?
- Si la escalera alcanza la altura de la base de la bombilla ¿Qué altura tiene el poste hasta este punto?

Proponer 2 soluciones diferentes al problema.

Problema 2: Dos edificios están situados uno frente al otro en las dos orillas de una calle. Un edificio mide $40\ m$ de altura, el ángulo de depresión desde la parte más alta de este edificio hasta la base del otro edificio es de $60°$ y el ángulo de depresión hasta la parte más alta es de $30°$.

- ¿Cuál es la distancia que separa a los dos edificios?
- ¿Cuál es la altura del segundo edificio?

Problema 3: El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia de radio $r = 5$. Figura 7.

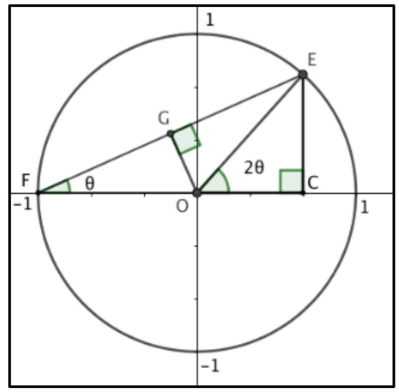


- ¿Cuál es la medida del ángulo $\sphericalangle BCD$?
- ¿Cuál es la longitud de la cuerda $\overline{BC}$?
- ¿Cuál es la longitud del cuerda $\overline{CD}$?
- ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?
- Realiza la gráfica en GeoGebra y compara las respuestas.

Problema 4: Un topógrafo necesita medir la altura de una montaña. Para esto, mide el ángulo de elevación desde dos puntos diferentes sobre una horizontal respecto a la base de la montaña. Desde el primer punto, el ángulo de elevación es de $25°$, avanza $500\ m$ en dirección a la montaña y desde este nuevo punto el ángulo de elevación aumenta en $5°$.

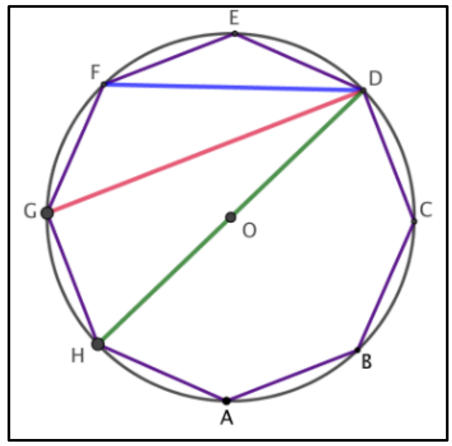
- ¿Cuál es la altura de la montaña?
- ¿Cuál es la distancia desde el primer punto hasta la cúspide de la montaña?
- ¿Cuál es la distancia desde el segundo punto hasta la base de la montaña?

Problema 5: Observa la imagen construida sobre una circunferencia unitaria.



- Si la medida del ángulo $\theta = 20°$, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{EC}$ y del segmento $\overline{EF}$?
- Demuestre que $\operatorname{sen}(2\theta) = \overline{FE} \cdot \operatorname{sen}\ \theta$
- Demuestre que el segmento $\overline{FE} = 2 \cdot \cos\theta$

Problema 6: Un octágono inscrito en una circunferencia de radio $r = 5\ cm.$



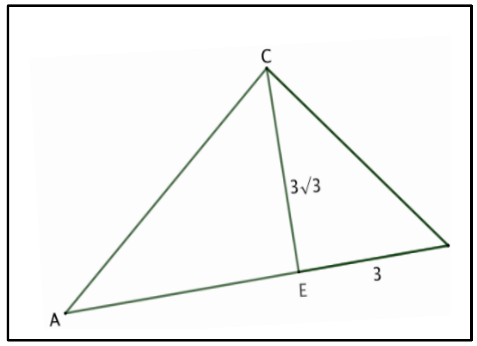
- ¿Cuál es la longitud del lado del octágono?
- ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{HD}$?
- ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{GD}$?
- ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{FD}$?
- Realiza la gráfica en GeoGebra y compara los resultados.

Archivo: Gráfica Problema 6.ggb

Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL ESTUDIANTE
Actividad No. 4

1. MOTIVACIÓN

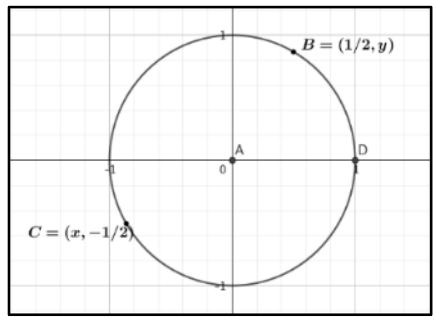
Problema 1. El triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo en C, el segmento $\overline{EC}$ es la altura del triángulo respecto al lado $\overline{AD}$. Si $\overline{ED} = 3$, $\overline{CE} = 3\sqrt{3}$, $\overline{ED} = \frac{1}{3}\overline{AE}$.



De acuerdo con la información anterior resuelve:

- ¿Cuál es longitud del segmento $\overline{CA}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AD}$?
- Si el ángulo $\measuredangle ACE = \theta$ y el ángulo $\measuredangle EDC = \alpha$ ¿Cuáles son los valores del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$?
- ¿Qué puedes concluir respecto a los resultados obtenidos del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$?

Problema 2. Observa los puntos B, C y D sobre la circunferencia unitaria.



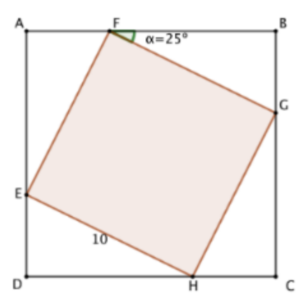
- Sea $B = \left(\frac{1}{2}, y\right)$, un punto que pertenece a la circunferencia unitaria, ¿cuál es el valor de la coordenada y?
- Sea $C = \left(x, -\frac{1}{2}\right)$, un punto que pertenece a la circunferencia unitaria, ¿cuál es el valor de la coordenada x?
- Si el ángulo $\measuredangle DAB = \theta$ y el ángulo $\measuredangle DAC = \alpha$, trazar los segmentos que representan del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y escribe estos valores con un decimal de aproximación.
- Si el ángulo $\measuredangle DAB = \theta$ y $\measuredangle DAC = \alpha$, realiza una construcción auxiliar del triángulo rectángulo para cada ángulo. ¿Cuáles son los valores de las razones trigonométricas del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$?

2. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA

Problema 1: Un árbol de $7\ m$ de alto proyecta una sombra, el ángulo de elevación entre la sombra y el rayo del sol es de $75°$.

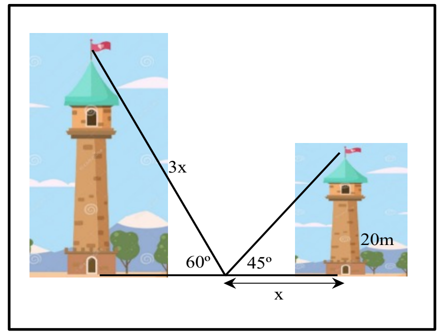
- ¿Cuál es la longitud de la sombra?
- ¿Qué distancia separa la cúspide del árbol con el punto final de la sombra?
  Proponer 2 soluciones diferentes al problema.

Problema 2: Observa los cuadrados $ABCD$ y $EFGH$, la medida del ángulo $\measuredangle GFB = \alpha = 25°$ y lado del cuadrado $EFGH$ es 10.



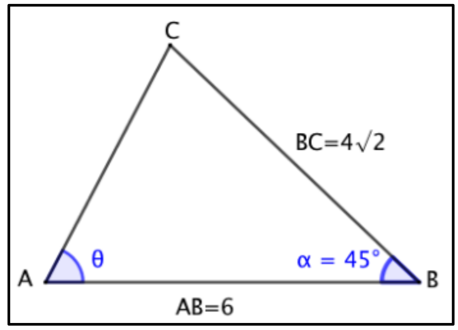
- ¿Cuál es longitud del lado del cuadrado $ABCD$?
- ¿Cuál es el área de color blanco de la figura 3?
- Construye la figura en GeoGebra y compara las respuestas.

Problema 3: Dos torres están separadas como se muestra en la imagen.



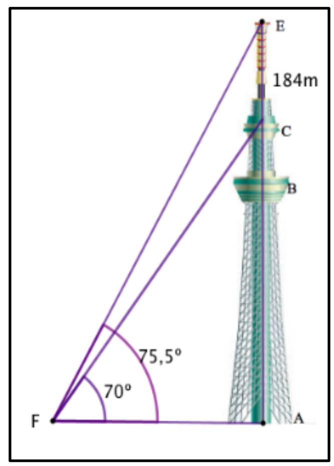
- ¿Cuál es la distancia que separa a las dos torres?
- ¿Cuál es la altura de la segunda torre?

Problema 4: En el triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$, las medidas de los ángulos $\measuredangle ABC = 45°$ y $\measuredangle BAC = \theta$. Figura 5.



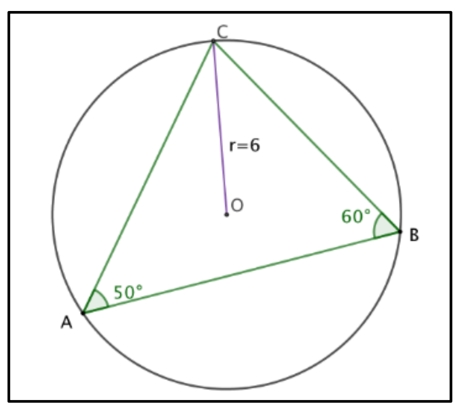
- ¿Cuál es la altura *h* del triángulo $\triangle ABC$ construida sobre el lado $\overline{AB}$?
- Si $\overline{AC}$= *2h* ¿cuál es valor del $\operatorname{sen}\theta$?
- ¿Cuál es valor del $\cos\theta$?
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle\theta$?
- Construye el triángulo en GeoGebra y compara los resultados.

Problema 5: La siguiente imagen muestra la torre de Tokyo Skytree. En el punto A se encuentra el lobby de entrada, en el punto B el primer observatorio, en el punto C el segundo observatorio, E es el punto final de la torre y el segmento $\overline{CE}$ representa la altura de la antena de televisión digital, que tiene una altura de $184\ m$.



- ¿Cuál es la altura de la torre Tokyo Skytree?
- ¿Cuál es la distancia entre la base de la torre y punto de observación F?
- ¿A qué altura de la torre se encuentra en segundo observatorio?

Problema 6: El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia de radio $r = 6$.



- ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulos $\triangle ABC$?
- ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$?
- Construye la gráfica en GeoGebra y compara las respuestas.

3.4.6. Actividad No.4 “Un paso de las funciones trigonométricas a la solución de triángulos oblicuángulos”.

Instituto Técnico Nueva Familia

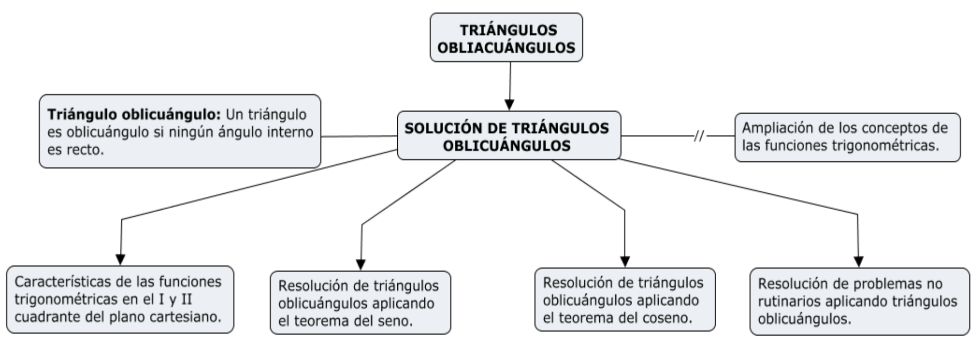
GUÍA DEL DOCENTE

Actividad No. 5

Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema 5:	Solución de triángulos oblicuángulos
Título:	Un paso de las funciones trigonométricas a la solución de triángulos oblicuángulos.
Tiempo estimado:	4,5 horas (3 sesiones de 1,5 horas
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando los conceptos fundamentales de la trigonometría.
Objetivos de los estudiantes:	1. Resolver problemas que involucran la aplicación de los teoremas del seno y coseno. 2. Hacer conexiones entre las gráficas de las funciones seno y coseno, los teoremas del seno y coseno, para resolver problemas.

1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre resolución de triángulos oblicuángulos.

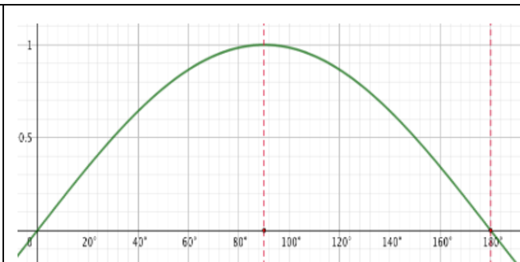


FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES

Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.

Características fundamentales de las funciones trigonométricas seno y coseno en el I y II cuadrante:

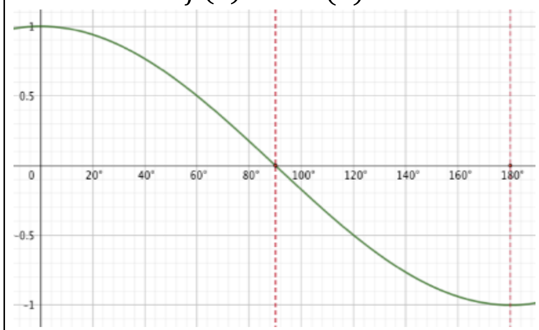
$f(x) = sen\ x$
La función es positiva en el I y II cuadrante. La función crece en el intervalo $(0°, 90°)$ o $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. La función decrece de $(90°, 180°)$ o $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Para $x = 0$ y $x = 180° = \pi$ los valores del $sen\ 0^{\circ} = 0$ y $sen\ 180^{\circ} = 0$. Para $x = 90° = \pi/2$ los valores del $sen\ 90° = 1$.



$f(x) = sen(x)$

$f(x) = \cos x$
La función es positiva en el I cuadrante. La función es negativa en el II cuadrante. La función decrece en el intervalo $(0°, 180°)$ o $(0, \pi)$ Para $x = 0$ el valor del $cos\ 0° = 1$. Para $x = 90° = \pi/2$ el valor del $cos\ 90° = 0$. Para $x = 180° = \pi$ el valor del $cos\ 180° = -1$.

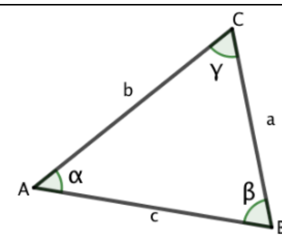
$f(x) = cos(x)$



Teorema del seno: Para cualquier triángulo △ABC se satisface que

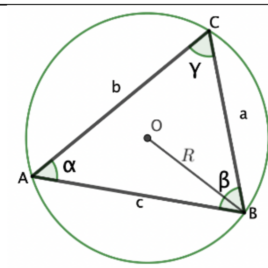
$$\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}$$

El lado que se opone al ángulo α es a.
El lado que se opone al ángulo β es b.
El lado que se opone al ángulo γ es c.



Teorema del seno extendido: Para cualquier triángulo △ABC, inscrito en una circunferencia con radio R se satisface que

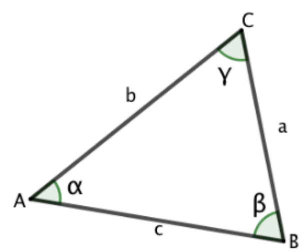
$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma} = 2R$$



Teorema del coseno: Para cualquier triángulo △ABC se satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

El lado que se opone al ángulo α es a.
El lado que se opone al ángulo β es b.
El lado que se opone al ángulo γ es c.

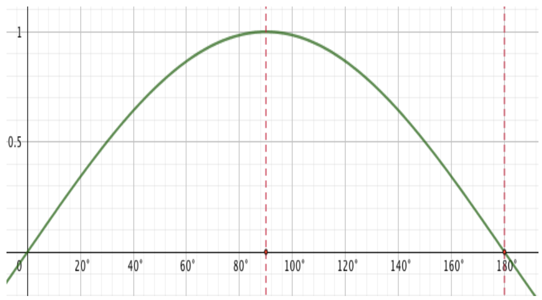


FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES
Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los enunciados de los problemas, hacen conjeturas, aplican las definiciones y teoremas para resolver problemas. Los estudiantes relacionan de forma lógica las funciones trigonométricas, usan las gráficas para hallar los valores de las funciones trigonométricas y los aplican en la resolución de triángulos oblicuángulos. Los estudiantes utilizan un lenguaje verbal, algebraico y gráfico sobre la teoría de triángulos oblicuángulos para aplicarlo en la resolución de problemas.

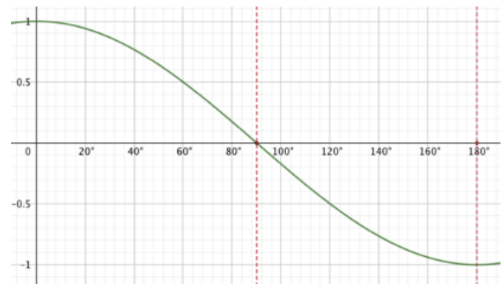
2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

Actividad 1: Valor de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo en el I y II cuadrante.
A continuación, se presentan las gráficas del seno y coseno en GeoGebra para el I y II cuadrante.

$f(x) = sen(x)$



$f(x) = cos(x)$



Las funciones $f(x) = sen\ x$ y $f(x) = cos\ x$ son positivas (+), si para cualquier ángulo (x), respectivamente el $sen\ x > 0$ y $cos\ x > 0$.
Las funciones $f(x) = sen\ x$ y $f(x) = cos\ x$ son negativa (-), si para cualquier ángulo (x), respectivamente el $sen\ x < 0$ y $cos\ x < 0$.

De acuerdo con la información anterior resuelve los siguientes problemas:

Problema 1: Observa la gráfica de las funciones seno y coseno, identifica si las funciones son positivas (+) o negativas (-) en los cuadrantes I y II. Completa la siguiente tabla.

	$f(x) = sen\ x$	$f(x) = cos\ x$
Cuadrante I		
Cuadrante II		

Problema 2: Teniendo en cuenta las gráficas de las funciones trigonométricas del seno y coseno que se presentan en GeoGebra, completa las siguientes tablas con los valores respectivos.

(Se trazan líneas perpendiculares respecto al eje x para hallar los valores de las funciones trigonométricas del seno y coseno, de forma similar se trazan líneas perpendiculares respecto al eje y, para hallar los valores del ángulo x, a partir de los puntos de intersección con las gráficas).

x	$sen\ x$	$cos\ x$
0º		
40º		
90º		

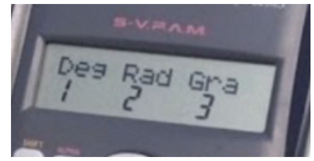
$sen\ x$	x
0	
0,3	
0,5	

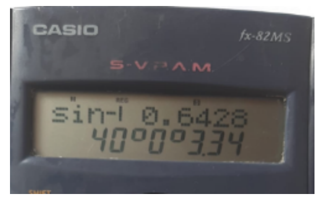
$cos\ x$	x
0	
0,3	
0,8	

140º		
160º		

0,8	
1	

1	
-0,8	





Haciendo uso de la calculadora: hallar nuevamente los resultados obtenidos en las tablas con la calculadora y comparar.

Recuerda: Para el uso de la calculadora debe tener en cuenta el sistema en que se encuentra el ángulo:

Deg: grados

Rad: radianes

Gra: Gradianes (grados centesimales)

Ejemplo:

- Si $\measuredangle x = 40°$

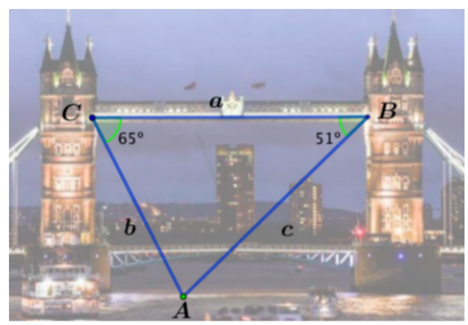
$sen\ 40° \approx 0{,}6428 \quad cos\ 40° \approx 0{,}7660$

- Cuando $sen\ x \approx 0{,}6427$ y $cos\ x \approx 0{,}7660$

$\measuredangle x = sen^{-1}\ 0{,}6427 \approx 40° \quad \measuredangle x = cos^{-1} 0{,}7660 \approx 40°$

Actividad 2: A partir de la solución del siguiente problema, aplicando razones trigonométricas, se hace la introducción a la solución de triángulos oblicuángulos y el teorema del seno.

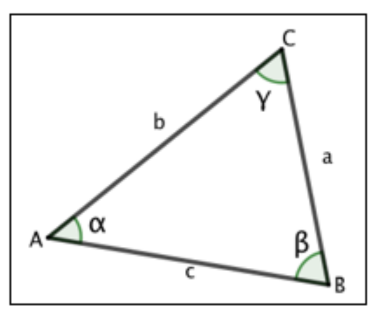
Problema 3: El puente de la Torre (en inglés, Tower Bridge) es un puente basculante y colgante que se encuentra en Londres y fue construido entre 1886 y 1894, que cruza el río Támesis cerca de la Torre de Londres.



Un observador se ubica en el C y observa el punto A con un ángulo de depresión de 65º y a una distancia de 72 m, otro observador se ubica en el B y observa el punto A con un ángulo de depresión de 51º.

- ¿Cuál es la longitud del puente desde el punto C hasta el punto B?
- ¿A qué altura se encuentra el puente tomando como de referencia el punto A?
- ¿A qué distancia se encuentra el segundo observador respecto al punto A?

Problema 4: Demuestre que para cualquier triángulo △ABC se satisface que



$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{a}} = \frac{\text{sen}\ \beta}{\text{b}} = \frac{\text{sen}\ \gamma}{\text{c}}$$

El lado que se opone al ángulo α es a.

El lado que se opone al ángulo β es b.

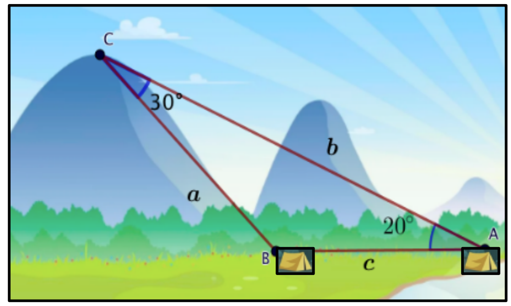
El lado que se opone al ángulo γ es c.

Ayuda: A partir de construcciones auxiliares de las alturas, convierta el triángulo oblicuángulo en triángulos rectángulos.

Conclusión: La expresión anterior se conoce como el Teorema del seno.

Problema 5: Dos escaladores se encuentran sobre la cima de una montaña, los campamentos de sus compañeros se encuentran cerca de la base de la montaña.

El campamento A se encuentra a una distancia de $10\ km$ del campamento B.

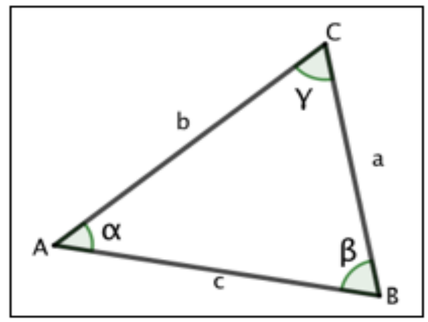


- Las estaciones de comunicación se encuentran en los dos campamentos. Si la estación que se encuentra en campamento A tiene un alcance de 15 km y la del campamento B tiene un alcance de 5 km. ¿Pueden los escaladores comunicarse con sus compañeros?

Problema 6: Demuestre que para cualquier triángulo △ABC se satisface que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

El lado que se opone al ángulo α es a.
El lado que se opone al ángulo β es b.
El lado que se opone al ángulo γ es c.



Ayuda: *A partir de la construcción auxiliar de la altura respecto al lado c, convierta el triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos.*

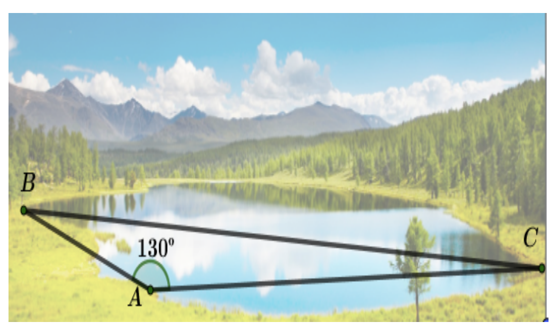
- De forma análoga demuestre que

$$\mathrm{b}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{ac}\cos\beta$$

$$\mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 - 2\mathrm{ab}\cos\gamma$$

Conclusión: Las expresiones anteriores se conocen como el Teorema del coseno.

Problema 7: Un topógrafo necesita hallar la medida del ancho de un lago. Se ubica en un punto A sobre la orilla del lago, localiza con el teodolito un punto B que se encuentra a una distancia de 300 m y un segundo punto C que se encuentra a una distancia 900 m, la amplitud del ángulo con el que ubica los dos puntos es de 130º.

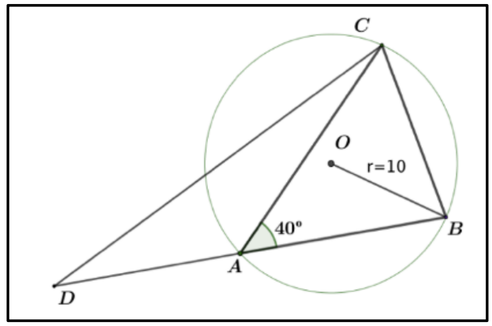


Gráfica de fondo tomada de https://www.goconqr.com/p/8484764--que-linda-eres-colombia--mind_maps

- Si el ancho del lago está determinado por el segmento $\overline{BC}$ ¿cuál es su longitud?
- Al unir los tres puntos se forma el △ABC ¿cuál es la amplitud de los ángulos sobre los vértices B y C?

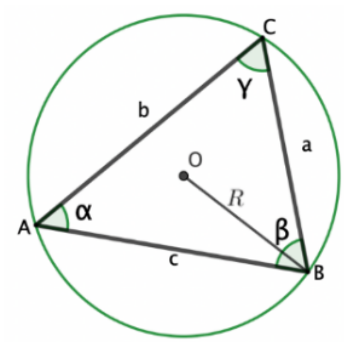
3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

Problema 1: El triángulo △ABC está inscrito en una circunferencia del $r = 10$, el ángulo $\measuredangle BAC = 40°$, el $\measuredangle CBA = 2(\measuredangle BAC)$.



- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle BCA$?
- Si el segmento $\overline{DB} = 2(\overline{AB})$¿cuál es la longitud del segmento $\overline{DB}$?
- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{DC}$?
- ¿Cuál es la medida de los ángulo $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle CDA$?

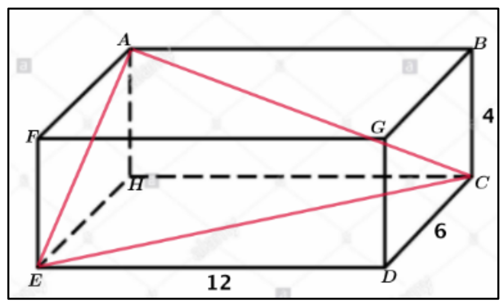
Problema 2: Demuestre que para cualquier triángulo △ABC, cuando se inscribe en una circunferencia de radio R se satisface que:



$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma} = 2\text{R}$$

Ayuda: Aplica el algoritmo para hallar la longitud de una cuerda.

Problema 3: Una caja tiene forma de prisma rectangular. Dentro de la caja hay una lámina plana en forma el triángulo △ACE.



- ¿Cuál es el perímetro de la lámina triangular?
- ¿Cuál es el área de la lámina triangular?
- ¿Cuáles son las medidas de los ángulos internos de la lámina triangular?

Problema 4: Un topógrafo necesita medir la altura de una montaña. Para esto, mide el ángulo de elevación desde dos puntos diferentes sobre una horizontal respecto a la base de la montaña. Desde el primer punto, el ángulo de elevación es de 25º, avanza $500\ m$ en dirección a la montaña y desde este nuevo punto el ángulo de elevación aumenta en 5º.

- ¿Cuál es la altura de la montaña?
- ¿Cuál es la distancia desde el primer punto hasta la cúspide de la montaña?
- ¿Cuál es la distancia desde el segundo punto hasta la base de la montaña?

3. MOTIVACIÓN

Problema 1. Los globos aerostáticos de pasajeros habitualmente alcanzan una altura entre 300 y 500 metros.

Dos personas están ubicadas en los puntos A y B, observan el globo con ángulos de elevación de 30º y 35º respectivamente.

Si el observador B está ubicado a una distancia de 450 m respecto al globo

- ¿A qué distancia se encuentran los dos observadores?
- ¿A qué altura se encuentra el globo?

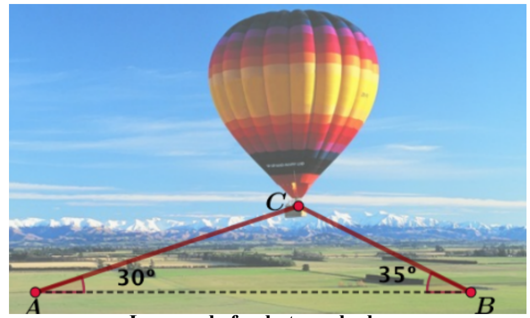
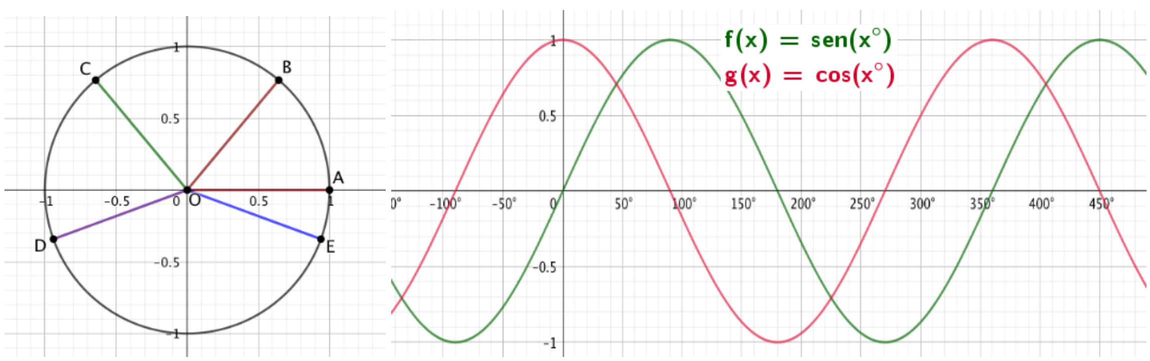


Imagen de fondo tomada de https://www.private-tours.info/espanol/experiencias-extraordinarias/globo-aerostatico/

Problema 2: Observa las gráficas de la circunferencia unitaria y las funciones trigonométricas del seno y coseno.



- En la circunferencia unitaria se encuentran los ángulos $\measuredangle AOB = 50°$, $\measuredangle AOC = 130°$, $\measuredangle AOD = 200°$ y $\measuredangle AOE = 340°$ en posición estándar ¿Cuál es el valor del seno y coseno con dos decimales de aproximación para cada ángulo?

Ángulo	$sen\ \theta$	$cos\ \theta$
50º		
130º		
200º		
340º		

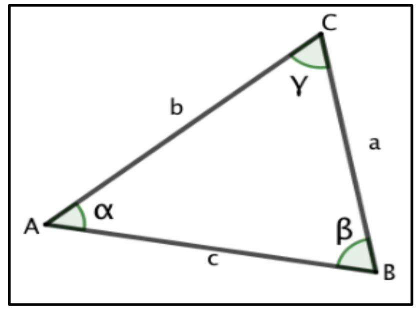
- Observa las gráficas del seno y coseno ¿cuál es el valor del seno y coseno con dos decimales de aproximación para cada ángulo?

Ángulo	$sen\ \theta$	$cos\ \theta$
50º		
130º		
200º		
340º		

- Observa las gráficas del seno y coseno ¿cuál es el valor del ángulo(s) aproximadamente para cada uno de las valores de la función seno y coseno?

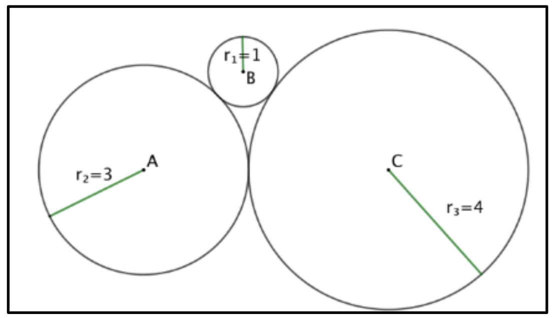
$sen\ \theta$	θ	$cos\ \theta$	θ
0,25		0,25	
0,70		0,70	
-0,65		-0,65	
-1		-1	

2. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA



Problema 1: En el triángulo △ABC se tiene que $a = 6$, las medidas de los ángulos $\measuredangle A = 45°$ y $\measuredangle B = 65°$.

- ¿Cuál es la medida de los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{AC}$?
- ¿Cuál es el área del triángulo △ABC?

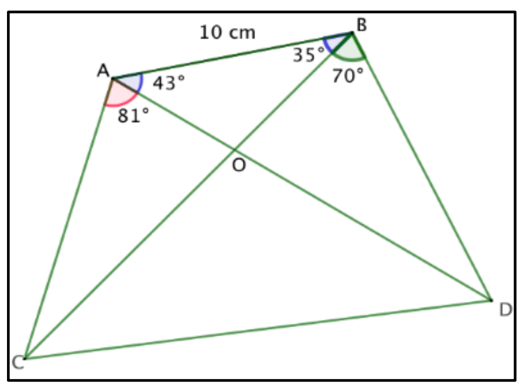


Problema 2: Tres circunferencias tangentes entre sí, con radios $r_1 = 1, r_2 = 3\ y\ r_3 = 4$.

- Resolver el triángulo △ABC que se forma con los centros de las tres circunferencias.
- ¿Cuál es el área del triángulo △ABC?
- Realiza la gráfica en GeoGebra y compara los resultados.

Problema 3: Dos barcos parten de un puerto con direcciones lineales distintas, formando un ángulo de ángulo de 120º. Cuando ha transcurrido 2 horas el primer barco ha recorrido 70 km y el segundo barco 50 km.

- ¿Qué distancia separa los dos barcos después de 5 horas de partir del puerto?
- Si el puerto y la posición de los dos barcos formas un triángulo ¿Cuál es la medida de los tres ángulos internos?



Problema 4: Sobre el cuadrilátero ABCD, se trazan las diagonales AD y CB. De acuerdo con los datos que muestra la imagen.

- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle ADB$?
- ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{CB}$?
- ¿Cuál es la longitud de la diagonal $\overline{AD}$?
- ¿ Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle DCO$?
- ¿ Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle CDO$?
- ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{CD}$?

Problema 5. Los globos aerostáticos de pasajeros habitualmente alcanzan una altura entre 300 y 500 metros.

Dos personas están ubicadas en los puntos A y B, observan el globo con ángulos de elevación de 30º y 35º respectivamente.

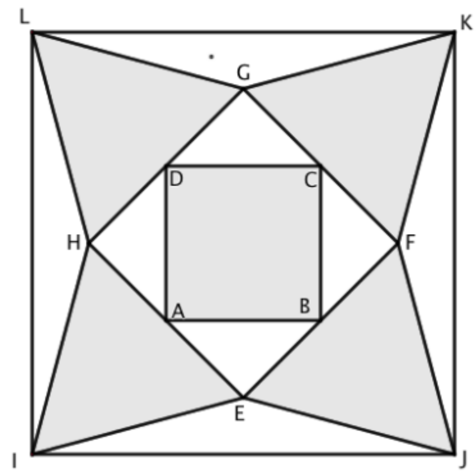
Si el observador B está ubicado a una distancia de 450 m respecto al globo

- ¿A qué distancia se encuentran los dos observadores?
- ¿A qué altura se encuentra el globo?

Imagen de fondo tomada de https://www.private-tours.info/espanol/experiencias-extraordinarias/globo-aerostatico/

Problema 6: El cuadrado ABCD tiene un área de $4\ cm^2$. Sobre el cuadrado ABCD se construye el cuadrado EFGH. Sobre los lados del cuadrado EFGH se construyen cuatro triángulos equiláteros. Finalmente, con los vértices externos de los triángulos equiláteros se construye el cuadrado IJKL.

- ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado EFGH?
- ¿Cuál es el área del cuadrado EFGH?
- ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle LGK$?
- ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado IJKL?
- ¿Cuál es el área del cuadrado IJKL?
- Realiza la gráfica en GeoGebra y compara y compara los resultados.



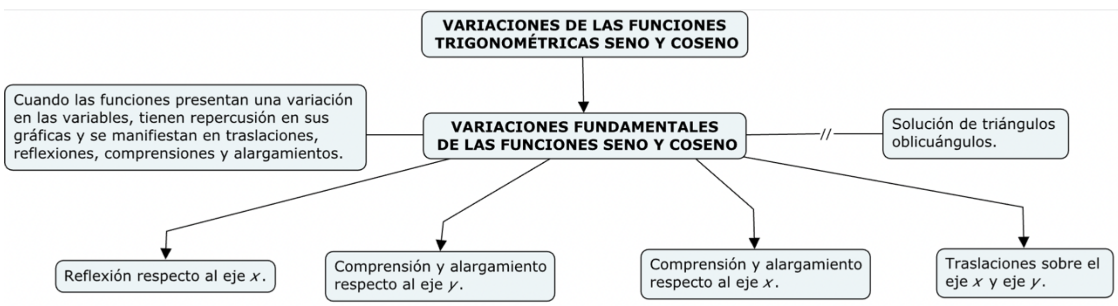
3.4.7. Actividad No.4 “La importancia de la trigonometría en la física”.

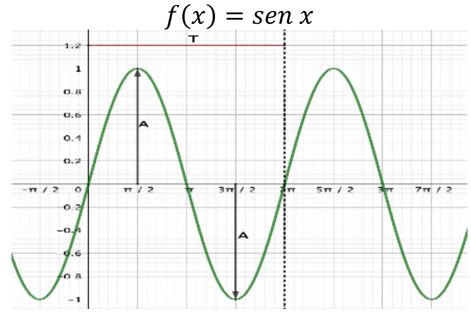
Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL DOCENTE
Actividad No. 6

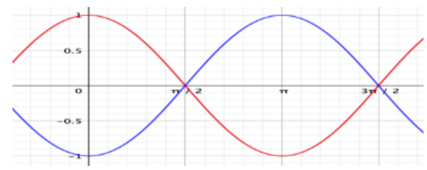
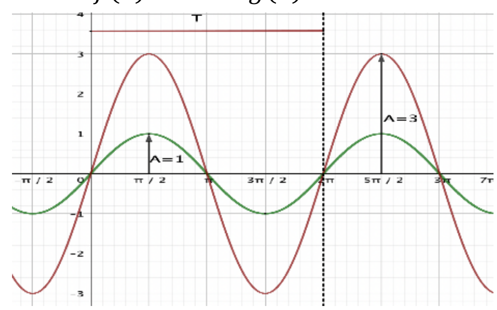
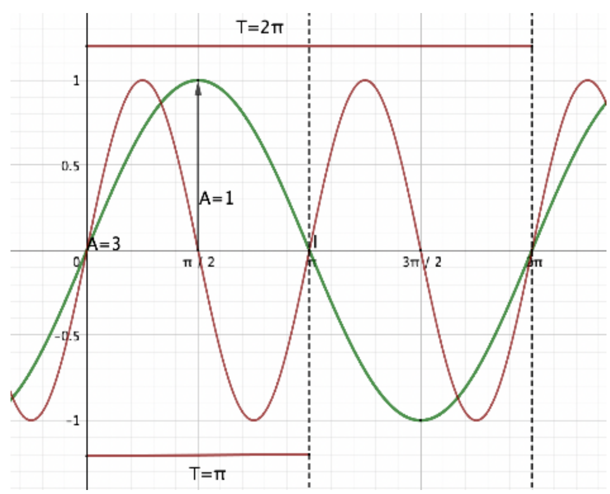
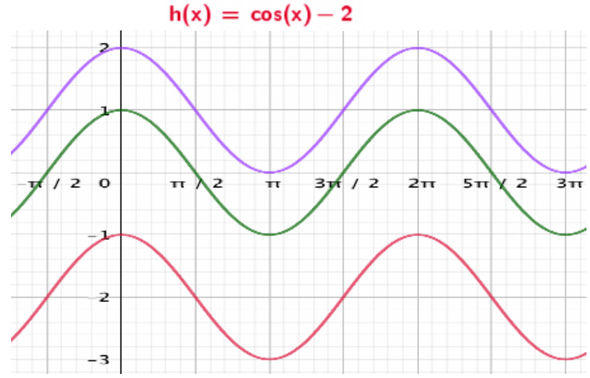
Área:	Matemáticas
Docente:	Margarita Pinzón Cardozo
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema 2:	Variaciones de las funciones trigonométricas
Título:	La importancia de la trigonometría en la física
Tiempo estimado:	4,5 horas (3 sesiones de 1,5 horas)
Objetivo del profesor:	Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando conceptos sobre las variaciones fundamentales de las funciones trigonométricas.
Objetivos de los estudiantes:	Resolver problemas que involucran la aplicación de las variaciones fundamentales de las funciones trigonométricas seno y coseno. Hacer conexiones entre las gráficas, propiedades de las funciones trigonométricas y sus variaciones para resolver problemas.

1. TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PREVISTA POR EL DOCENTE

El siguiente esquema conceptual ilustra los conceptos preliminares sobre las variaciones fundamentales de las funciones trigonométricas seno y coseno.

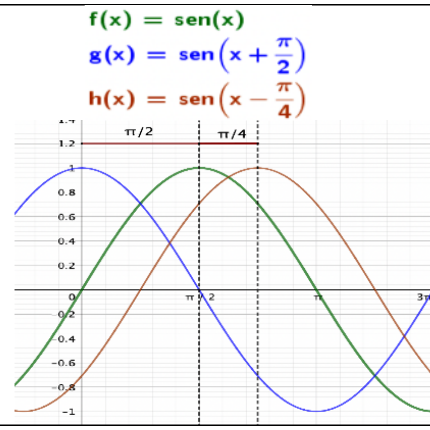


FORMAS DE ENTENDER ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES	
Conceptos y teoremas que debe adquirir el estudiante: los estudiantes estructuran los conceptos y teoremas para aplicarlos de forma correcta y cuando sea necesario para resolver problemas o realizar demostraciones.	
Características fundamentales de la función seno: Observa la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$. • Amplitud: $A = 1\ u$ • Período: $T = 2\pi$ ó $T = 360°$ • Punto máximo: 1 • Punto mínimo: -1 • Dominio: $\mathbb{R}$ • Rango o recorrido: $[-1, 1]$	$f(x) = sen\ x$ 

Reflexión sobre el eje x: Cuando la función $f(x) = sen\, x$ o $f(x) = cos\, x$, se multiplica -1, se produce una reflexión de la función sobre el eje x. **Conclusión:** la función $f(x)$ presenta una variación en los intervalos donde crece y decrece la función.	$f(x) = \cos x$ $g(x) = -\cos x$ 
Comprensión y alargamiento sobre el eje y: Cuando la función $f(x) = sen\, x$ o $f(x) = cos\, x$, se multiplica por una constante a, se produce una comprensión o alargamiento vertical, dependiendo del valor de la constante a. Si $f(x) = asen\, x$ o $f(x) = acos\, x$ • Si $a > 1$ se produce un alargamiento vertical de la función $f(x)$. • Si $0 < a < 1$ se produce una comprensión vertical $f(x)$. **Conclusión:** la función $g(x)$ presenta una variación en su amplitud. Obteniendo que la A=$\|a\| = \|3\| = 3$	$f(x) = sen\, x$ $g(x) = 3sen\, x$ 
Comprensión y alargamiento sobre el eje x: Cuando en la función $f(x) = sen\, x$ o $f(x) = cos\, x$, se multiplica la variables independiente por una constante b, se produce una comprensión o alargamiento horizontal, dependiendo del valor de la constante b. Para $f(x) = sen\, (bx)$ o $f(x) = cos\, (bx)$ se tiene que • Si b> 1 se produce una comprensión horizontal de la función $f(x)$. • Si $0 < \mathrm{b} < 1$ se produce un alargamiento horizontal de la $f(x)$. **Conclusión:** la función $g(x)$ presenta una variación en su período. Obteniendo que la T=$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.	$f(x) = sen\, x$ $g(x) = sen\, (2x)$ 
Traslación sobre el eje y: Cuando la función $f(x) = sen\, x$ o $f(x) = cos\, x$, se le suma una constante c, la función se traslada verticalmente c unidades. Para $f(x) = sen\,(x) + c$ o $f(x) = cos\,(x) + c$ se tiene que • Si $c > 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia arriba c unidades. • Si $c < 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia abajo c unidades.	$\mathbf{f(x) = cos(x)}$ $\mathbf{g(x) = cos(x) + 1}$ $\mathbf{h(x) = cos(x) - 2}$ 

Traslación sobre el eje x: Cuando la función $f(x) = sen\, x$ o $f(x) = cos\, x$, se le suma una constante c a variable independiente, la función se traslada horizontalmente c unidades. Para $f(x) = sen\,(x + c)$ o $f(x) = cos\,(x + c)$ se tiene que

- Si $c > 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia la izquierda c unidades.
- Si $c < 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia derecha c unidades.



De forma general: Para una función trigonométrica de la forma:

$$f(x) = asen(bx - c) + d$$
$$f(x) = acos(bx - c) + d$$

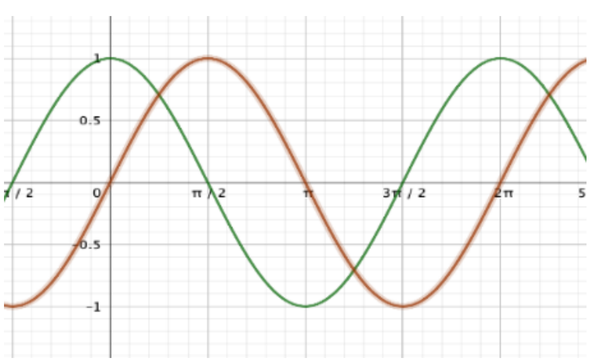
- Amplitud: $A = |a|$
- Período: T=$\frac{2\pi}{b}$
- Desplazamiento sobre el eje horizontal denominado desfase: $D = \frac{c}{b}$
- Traslación sobre el eje vertical: d unidades.

FORMAS DE PENSAR ESPERADAS EN LOS ESTUDIANTES

- Los estudiantes usan gráficos o esquemas de los problemas permitiéndoles hacer conjeturas, además aplican las definiciones para resolver problemas y realizar demostraciones.
- Los estudiantes identifican las propiedades elementales de las funciones trigonométricas seno y coseno, luego las relacionan de forma correcta cuando realizan variaciones a la función hallando las nuevas propiedades.
- Los estudiantes utilizan un lenguaje verbal, algebraico y gráfico de las funciones trigonométricas seno y coseno cuando aplican las variaciones de las funciones en la resolución de problemas en otros contextos del conocimiento.

2. INTERVENCIÓN DEL DOCENTE

Actividad 1: Observa las gráficas de las función y ---$f(x) = sen\ x$ y ---$f(x) = cos\ x$, identificar las siguientes propiedades elementales:



	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$h(x) = \cos x$
Amplitud		
Período		
Punto máximo		
Punto mínimo		
Dominio		
Rango o recorrido		

Actividad 2: Observa las gráficas de las siguientes funciones en GeoGebra

$$f(x) = sen\ x \text{ y } g(x) = -sen\ x$$

- Describe los cambios que observa cuando la función seno o la función coseno se multiplican por -1.

Conclusión: Si $f(x) = sen\ x$ o $f(x) = cos\ x$ se multiplica por -1, se produce una reflexión de la función sobre el eje x.

Actividad 3: Observa las gráficas de las siguientes funciones en GeoGebra

$$f(x) = sen\ x\ y\ g(x) = asen\ x$$

- Describe los cambios que observa cuando la función seno o la función coseno se multiplican por a

Conclusión: Si $g(x) = asen\ x$, la función $f(x)$ presenta una variación en su amplitud. Obteniendo que la A=$|a|$, por lo tanto:

- Si $a > 1$ se produce un alargamiento vertical de la función $f(x)$.
- Si $0 < a < 1$ se produce una comprensión vertical $f(x)$.

Problema 1: La función $g(x) = -2cos\ x$ y $k(x) = \frac{1}{2}senx$

- Realiza un bosquejo de las gráficas $f(x) = cos\ x$ y $g(x) = -2cos\ x$ con lápiz y papel.
- Realiza un bosquejo de las gráficas $h(x) = sen\ x$ y $k(x) = \frac{1}{2}sen\ x$ con lápiz y papel.
- Realiza las gráficas en GeoGebra y compara.
- Identifica las siguientes propiedades de cada función:

	$f(x) = \cos x$	$g(x) = -2cos\ x$	$h(x) = sen\ x$	$k(x) = \frac{1}{2}senx$
Amplitud				
Período				
Punto máximo				
Punto mínimo				

Actividad 4: Observa las gráficas de las siguientes funciones en GeoGebra

$$f(x) = cos\ x \text{ y } g(x) = cos\ (bx)$$

- Describe los cambios que observa en la función seno o coseno cuando se multiplica la variable independiente por la constante b.

Conclusión: Si $g(x) = cos\ (bx)$, la función $f(x)$ presenta una variación en el período. Por lo tanto:

- Si $b > 1$ se produce una comprensión horizontal de la función $f(x)$.
- Si $0 < b < 1$ se produce un alargamiento horizontal de la función $f(x)$.

Obteniendo que el período de la función $g(x) = cos\ (bx)$ es $T = \frac{2\pi}{b}$

Problema 2: La función $g(x) = -2cos\ (2x)$ y $k(x) = \frac{1}{2}sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

- Describe las variaciones que se presentan sobre las dos funciones a partir de las funciones elementales $f(x) = \cos x$ y $h(x) = sen\ x$.
- ¿Cuál es la amplitud y período de cada función?

- Realiza las gráficas en GeoGebra y verifica las respuestas anteriores

	$f(x) = \cos x$	$g(x) = -2cos\,(2x)$	$h(x) = sen\ x$	$k(x) = \frac{1}{2}sen\left(\frac{1}{2}x\right)$
Amplitud				
Período				
Punto máximo				
Punto mínimo				

Actividad 5: Observa las gráficas de las siguientes funciones en GeoGebra

$f(x) = sen\ x$ y $g(x) = sen\ (x + c)$

Describe los cambios que observa cuando en la función seno o coseno se le suma la constante c a la variable independiente.

Conclusión: Cuando la función $f(x) = sen\ x$ se le suma la constante c a la variable independiente se obtiene $g(x) = sen\ (x + c)$, la función $f(x)$ se traslada horizontalmente c unidades así:

- Si $c > 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia la izquierda c unidades.
- Si $c < 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia derecha c unidades.

Actividad 6: Observa las gráficas de las siguientes funciones en GeoGebra

$$f(x) = sen\ x \text{ y } g(x) = sen\ (x) + d$$

- Describe los cambios que observa cuando en la función seno o coseno se le suma la constante d a la función.

Conclusión: Cuando la función $f(x) = sen\ x$ se le suma la constante d, se obtiene $g(x) = sen\ (x) + d$, la función $f(x)$ se traslada verticalmente d unidades así:

- Si $d > 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia arriba d unidades.
- Si $d < 0$ se la función $f(x)$ se traslada hacia abajo d unidades.

Conclusión final: Para una función trigonométrica de la forma

$$f(x) = asen(bx - c) + d$$
$$f(x) = acos(bx - c) + d$$

Se tiene

- Amplitud: $A = |a|$
- Período: T=$\frac{2\pi}{b}$
- Desplazamiento sobre el eje horizontal denominado desfase: $D = \frac{c}{b}$
- Traslación sobre el eje vertical: d unidades.
- Si $a < 0$, la función se refleja sobre el eje x.

3. INTERIORIZA EL CONOCIMIENTO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA REPETICIÓN

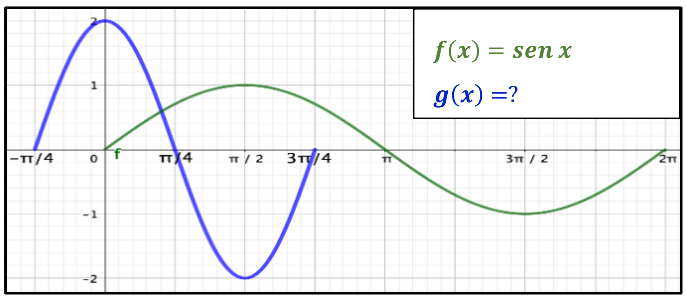
Las gráficas de las funciones seno y coseno del ángulo se consideran ondas sinusoidales porque poseen propiedades matemáticas anteriormente estudiadas como son: la amplitud, el período y el desfase entre otras.

Una de las aplicaciones de la trigonometría es el uso de las funciones trigonométricas es el campo de la física en la modelación fenómenos periódicos como el movimiento circular uniforme y movimiento armónico simple. Lo anterior le permite al estudiante explorar fenómenos periódicos del mundo real en fenómenos naturales.

Problema 1: La función $g(x) = 3cos\ (2x - \pi) - 2$

- Describe las variaciones que se presentan en la función $g(x)$ a partir de las función elemental $f(x) = \cos x$.
- ¿Cuál es la amplitud, el período y desfase de la función $g(x)$?
- Realiza el bosquejo con lápiz y papel de las funciones $f(x)$ y $g(x)$
- Realiza las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en GeoGebra y verifica las respuesta anteriores.

Problema 2: La siguiente gráfica representa la $g(x)$ con algunas variaciones respecto a la función elemental $f(x) = sen\ x$. De acuerdo con la información que se brinda en la gráfica, resuelve:

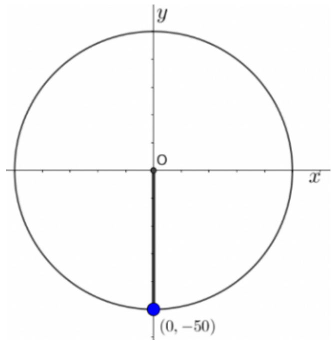


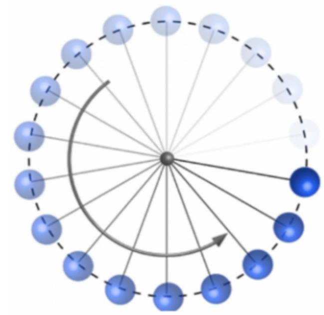
- Si la función elemental $f(x) = sen\ x,$ ¿cuáles variaciones se realizaron para obtener la nueva función $g(x)$?
- ¿Cuál es el período, la amplitud y el desfase de la función $g(x)$?
- Encuentra una ecuación de la forma $g(x) = \ asen(\ bx - c) + d$ que modele la curva.
- Realiza la gráfica de las dos funciones en GeoGebra para verificar la solución.

Movimiento Circular Uniforme: El Movimiento Circular Uniforme (MCU) es aquel en el que el desplazamiento lleva una trayectoria circular a una velocidad constante.
Las proyecciones que realizan el MCU, determinan las coordenadas del objeto respecto al eje x y el eje y en un instante de tiempo. Estas posiciones están determinadas por las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = Rcos(wt + \varphi)$$
$$y(t) = Rsen(wt + \varphi)$$

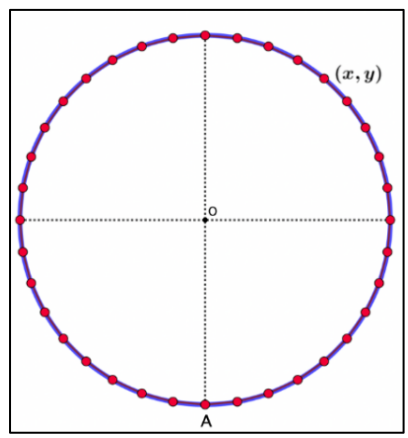
$x(t)$: posición de la partícula u objeto respecto al eje x en determinado instante de tiempo.
$y(t)$: posición de la partícula u objeto respecto al eje y en determinado instante de tiempo.
R: radio de la trayectoria circular que describe el cuerpo o la partícula.
w: velocidad angular, indica el ángulo de barrido θ del cuerpo o la partícula respecto al tiempo t, por lo tanto $\left(w = \frac{\theta}{t}\right)$.
φ: ángulo de fase (ángulo en posición normal donde inicia la partícula o el cuerpo el movimiento).
De acuerdo con la información anterior resuelve el siguiente el problema 3.
Problema 3: Una esfera se mueve sobre una circunferencia de $50\ cm$ de radio con una velocidad constante de $25\ cm/s$. En el instante $t = 0\ s$ la esfera se encuentra en la posición $(0, -50)$. Figura 1.





- Escribir la ecuación del MCU que resulta de proyectar la posición de la esfera sobre el eje x en función del tiempo.
- Escribir la ecuación del MCU que resulta de proyectar la posición de la esfera sobre el eje y en función del tiempo.
- Realizar la gráfica de las dos ecuaciones anteriores en GeoGebra y verificar que para el $t = 0\ s$, la posición de la esfera sobre el eje $x = 0$ y sobre el eje $y = -50$.
- ¿Cuáles son las coordenadas de la posición de la esfera cuando han transcurrido $15\ s$ y $20\ s$?, verifica las posiciones de la esfera con la gráfica obtenida en GeoGebra.

Problema 4: Recodemos la Noria de China sin radios



La noria cuenta con 36 cabinas, un diámetro de 125m y tarda aproximadamente 30 minutos en dar una vuelta.

El punto O es el centro de la noria y representa el origen del plano del cartesiano, la pareja ordenada (x, y) sobre la circunferencia representa la posición de la cabina donde se encuentra el pasajero, tenga en cuenta que cualquier cabina parte desde el punto A y gira hacia la derecha.

- Escribir la ecuación del MCU que resulta de proyectar la posición de la cabina sobre el eje x en función del tiempo,
- Escribir la ecuación del MCU que resulta de proyectar la posición de la cabina sobre el eje y en función del tiempo.
- Realizar la gráfica de las dos ecuaciones anteriores en GeoGebra y verificar que para el $t = 0\ s$, la posición de la cabina sobre el eje $x = 0$ y sobre el eje $y = 125$.
- ¿Cuáles son las coordenadas de la posición de la cabina cuando han transcurrido $5\ min$ y $22{,}5\ min$?, verifica las posiciones de la cabina con la gráficas obtenidas en GeoGebra.

Instituto Técnico Nueva Familia
GUÍA DEL ESTUDIANTE
Actividad No. 6

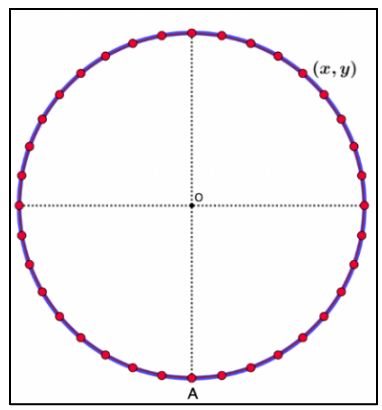
1. MOTIVACIÓN

Vista frontal de la noria sin radios de China
Fuente: https://i.blogs.es/a23bcc/bailang-river-bridge-ferris-wheel-designboom-05-18-2017-818-001/450_1000.jpg

Noria sin radios de China

La particularidad de esta nueva creación se encuentra en su estructura sin radios. Toda la estructura en forma de malla, que los arquitectos han decidido bautizar como "columna del dragón".

La noria cuenta con 36 cabinas, un diámetro de 125m y tarda aproximadamente 30 minutos en dar una vuelta.



Un profesor de física representa la gran Noria mediante la siguiente gráfica y les informa que para el ingreso a la Noria siempre lo hacen cuando la cabina se encuentre en el punto A. El punto O es el centro de la noria y representa el origen del plano del cartesiano, la pareja ordenada (x, y) sobre la circunferencia representa la posición de la cabina donde se encuentra el pasajero.

Luego el profesor les propone las siguientes preguntas a sus estudiantes, ayúdale a resolverlas:

- ¿Cuál es la velocidad de las cabinas de la Noria?
- ¿Cuántos grados recorre una cabina en un minuto)
- ¿Cuál es la posición del pasajero cuando han transcurrido 20 min y qué ángulo ha recorrido?
- Si un turista hace el ingreso a la Noria ¿Cuánto tiempo tarda recorrer un ángulo de $\frac{10}{9}\pi$ y cuál es la posición del pasajero?

3. REPETICIÓN DE FORMA AUTÓNOMA

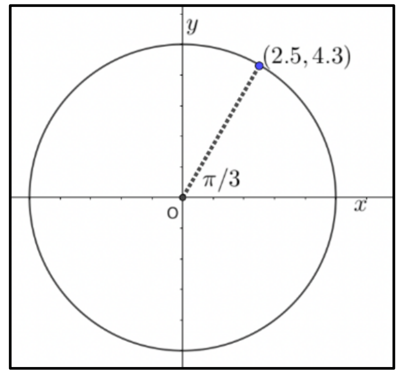
Problema 1: La función $g(x) = \frac{1}{2}cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$

- ¿Cuál es la amplitud, el período y desfase de la función $g(x)$?
- Describe las variaciones que se presentan en la función $g(x)$ a partir de las función elemental $f(x) = \cos x$?
- Realiza el bosquejo con lápiz y papel de las funciones $f(x)$ y $g(x)$
- Realiza las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en GeoGebra y verifica las respuesta anteriores.

Problema 2: La función $g(x) = -3sen\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$

- ¿Cuál es la amplitud, el período y desfase de la función $g(x)$?

- Describe las variaciones que se presentan en la función $g(x)$ a partir de las función elemental $f(x) = \operatorname{sen} x$?
- Realiza el bosquejo con lápiz y papel de las funciones $f(x)$ y $g(x)$
- Realiza las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en GeoGebra y verifica las respuesta anteriores.



Problema 3: Una cuerpo se mueve siguiendo una trayectoria circular de radio $5\ \mathrm{m}$ y con velocidad de $8\ \mathrm{m/s}$. En el instante $\mathrm{t} = 0\ \mathrm{s}$, el cuerpo se encuentra en la posición $(2.5, 4.3)\ \mathrm{m}$. Como se muestra en la figura.

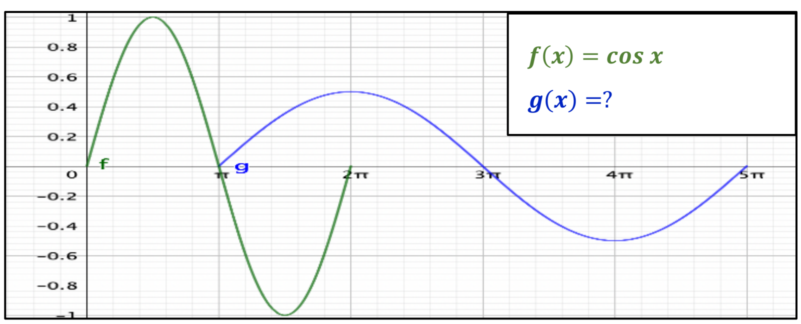
- Escribir la ecuación del MCU que resulta de proyectar la posición de la esfera sobre el eje x en función del tiempo.
- Escribir la ecuación del MCU que resulta de proyectar la posición de la esfera sobre el eje y en función del tiempo.
- Realizar la gráfica de las dos ecuaciones anteriores en GeoGebra y verificar que para el $\mathrm{t} = 0\ \mathrm{s}$, la posición de la esfera sobre el eje $\mathrm{x} = 2{,}5$ y sobre el eje $\mathrm{y} = 4{,}3$.
- ¿Cuáles son las coordenadas de la posición del cuerpo cuando han transcurrido $10\ \mathrm{s}$ y $15\ \mathrm{s}$?, verifica las posiciones de la esfera con la gráfica obtenida en GeoGebra.

Recuerde: Las coordenadas de la posición de un cuerpo en MCU están determinadas por las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = Rcos(wt + \varphi)$$

$$y(t) = Rsen(wt + \varphi)$$

Problema 4: La siguiente gráfica representa la $\mathrm{g(x)}$ con algunas variaciones respecto a la función elemental $\mathrm{f(x)} = \cos \mathrm{x}$. De acuerdo con la información que se brinda en la gráfica, resuelve:



- ¿Cuál es la amplitud, el período y el desfase de la función $\mathrm{g(x)}$?
- Teniendo en cuenta la función elemental $\mathrm{f(x)} = \cos \mathrm{x}$, ¿cuáles variaciones se realizaron para obtener la nueva función $\mathrm{g(x)}$?
- Encuentra una ecuación de la forma $\mathrm{g(x)} = \mathrm{asen(bx - c) + d}$ que modele la curva.
- Realiza la gráfica de las dos funciones en GeoGebra para verificar la solución.

CAPÍTULO 4. IMPLEMENTACIÓN DEL DISEÑO INSTRUCCIONAL Y DESCRIPCIÓN DE LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

En el presente capítulo se presentará con detalle la implementación del diseño instruccional, basado en el modelo NDR (Necesidades psicológica e intelectual, dualidad y razonamiento repetido), que ofrezca experiencias de aprendizaje de los conceptos, teoremas y resolución de problemas del componente de la trigonometría. Además, se caracterizarán los procesos que siguen los estudiantes a través de niveles de desempeño cuando realizan procesos de modelación y procesos de abstracción al resolver problemas de trigonometría en el marco del diseño instruccional presentado.

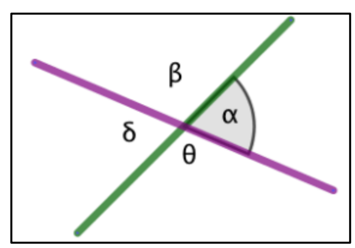
4.1. Análisis de resultados y conclusiones de la Prueba de Entrada

4.1.1. Análisis de resultados de la prueba de entrada

Para realizar el análisis de la prueba de entrada, en cada problema se pretende evidenciar definiciones o teoremas que es estudiante debe conocer para aplicarlos de forma correcta en la resolución de problemas.

Para ejemplificar el análisis se presentará un esbozo de los resultados obtenidos en cuatro de los ocho problemas propuestos y las conclusiones generales sobre las condiciones iniciales del grupo.

Problema 1. Observa la imagen, el ángulo $\measuredangle\alpha = 63°$ ¿Cuál es la medida de los ángulos $\measuredangle\delta, \measuredangle\beta\ y\ \measuredangle\theta$?



En el primer problema se pretende evidenciar dos aspectos:

1) Reconocer que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

2) Reconocer que los ángulos suplementarios forman 2 ángulos rectos.

La mayoría de los estudiantes observa la gráfica y por intuición responde que el $\measuredangle\delta = 63^{\circ}$ porque son iguales, de esta forma justifican la medida del ángulo pedido. Ningún estudiante respondió que los ángulos eran iguales por ser opuestos por el vértice. De igual forma, la respuesta de la mayoría de los estudiantes por impresión visual escribe que el $\measuredangle\beta$ es el doble del $\measuredangle\alpha$, la justificación que dieron los estudiantes es que en la gráfica se observa que es el doble del ángulo menor. Sin embargo, un estudiante propuso que los cuatro ángulos sumaban 360º y de esta forma obtuvo que el $\measuredangle\beta = 117°$.

A continuación, se muestra la resolución del problema 1 propuesta por tres estudiantes. (ver figura 1).

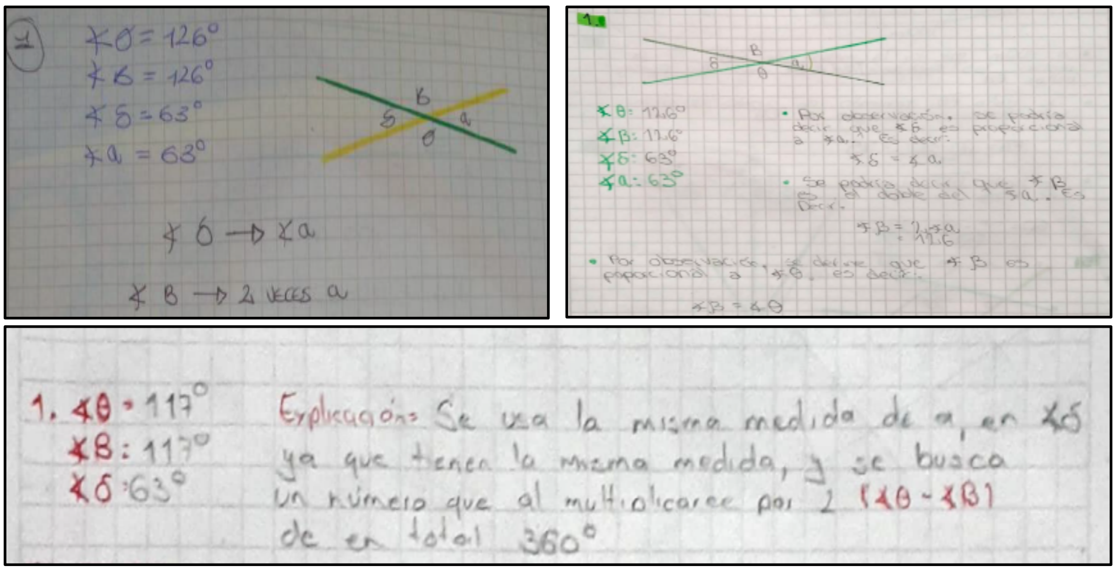
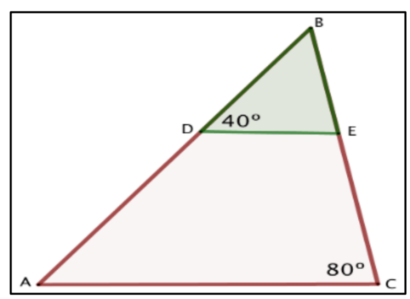


Figura 1. Resolución del problema 1.

Problema 2. En la figura de la derecha $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, $\overline{BC} = 12\ cm$, $\overline{AD} = 9\ cm$, $\overline{DB} = 6\ cm$.

¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle CBA$? ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{CE}$?



En el segundo problema se pretende evidenciar tres aspectos en los estudiantes:

1) Reconocer que, si dos triángulos son semejantes, sus ángulos internos son congruentes uno a uno.

2) Reconocer que, en todo triángulo, la suma de sus ángulos internos es igual a 180º.

3) Reconocer que, si dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales.

Todos los estudiantes responden de forma incorrecta, algunas respuestas de los estudiantes son: el $\measuredangle CBA = 40^{\circ}$, porque en la gráfica se observa que es igual al ángulo $\measuredangle BD$, además se observa que los estudiantes escriben con una notación incorrecta. En la entrevista con los estudiantes se observa que no manejan la notación de ángulo, además confunden la medida de los lados con la medida de los ángulos internos del triángulo. Cabe resaltar que los estudiantes recuerdan que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a 180º, pero no saben por qué esto es cierto. Respecto a los criterios de semejanza entre dos triángulos, todos los estudiantes coinciden que no saben cómo identificar cuándo dos triángulos son semejantes. A continuación, se muestra la resolución del segundo problema propuesta por tres estudiantes. (ver Figura 2).

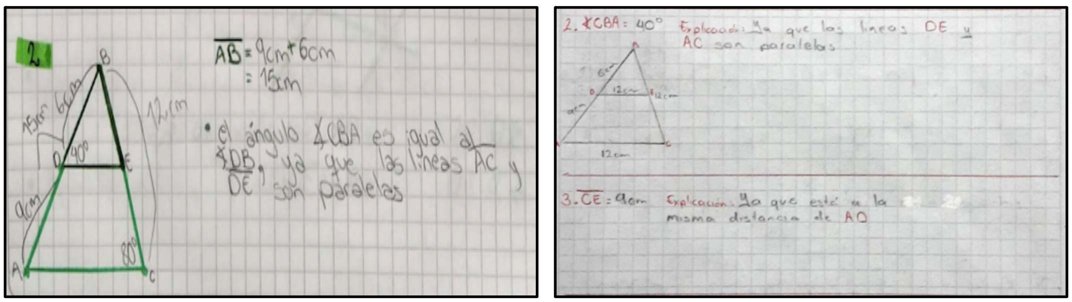
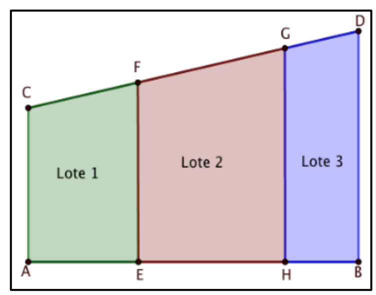


***Figura 2*. Resolución del problema 2.**

Problema 4. Observa la siguiente figura que representa la división de un terreno. Donde $\overline{AB} = 100\ m$, $\overline{AE} = 40\ m$, $\overline{CF} = 60\ m$, $\overline{HB} = 10\ m$ y $\overline{AC} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{HG} \parallel \overline{BD}$.

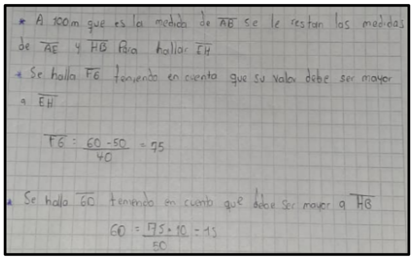


Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H representan los postes. ¿Cuál es la distancia del poste C al poste D?

En el cuarto problema se pretende evidenciar un aspecto en los estudiantes:

1) Reconocer el Teorema de Tales y aplicarlo de forma correcta.

La mayoría de los estudiantes realiza operaciones aritméticas para hallar la distancia entre el poste C y el poste D. En la entrevista los estudiantes explican que era fácil calcular la distancia aplicando una regla de tres directa, argumentando que el gráfica se observa que las distancias de los postes es la parte superior del terreno son mayores. Ningún estudiante comentó sobre el Teorema de Tales y sus aplicaciones. A continuación, se muestra la resolución del problema propuesta por dos estudiantes (ver Figura 3).



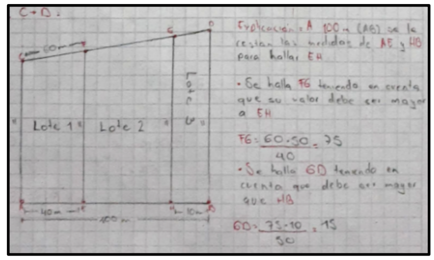
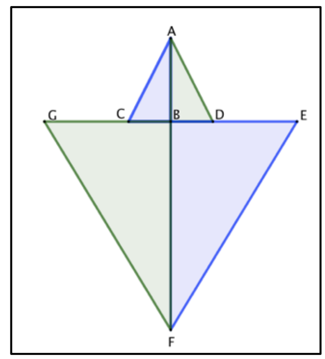


Figura 3. **Resolución del problema 3.**

Problema 8. Los estudiantes en la clase de artística diseñaron la siguiente cometa, como se muestra en la figura en la parte inferior.



$$\overline{GB} = 90\ cm, \overline{AB} = 40\ cm, \overline{EF} = 150\ cm \text{ y } \overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{GB}$$
$$\Delta ABC \cong \Delta ABD \text{ y } \Delta GBF \cong \Delta EBF.$$

Para la construcción de la cometa se necesitan dos palos de longitud $\overline{AF}$ y longitud $\overline{GE}$.

¿Cuál es la longitud de los dos palos en cm?

En este problema se pretende evidenciar dos aspectos en los estudiantes:

1) Reconocer criterios de semejanza entre dos triángulos

2) Reconocer el Teorema de Pitágoras y aplicarlo.

La mayoría de los estudiantes identifica que $\overline{GE} = 2\overline{GB}$, escriben $\overline{AF} = 180 + 40 = 220$ y que $\overline{GE} = \overline{GF}$ no dan explicaciones. En la entrevista se les preguntó a los estudiantes que explicaran lo anterior y argumentaron que en la gráfica se observa que $\overline{GE} = \overline{GF}$, por lo tanto era fácil calcular la longitud $\overline{AF}$. Ningún estudiante comentó sobre los criterios de semejanza entre dos triángulos. Cabe resaltar que los estudiantes conocen el Teorema de Pitágoras, pero no saben cómo aplicarlo en problemas no son rutinarios. A continuación, se muestra la resolución del problema propuesta por tres estudiantes (ver Figura 4).

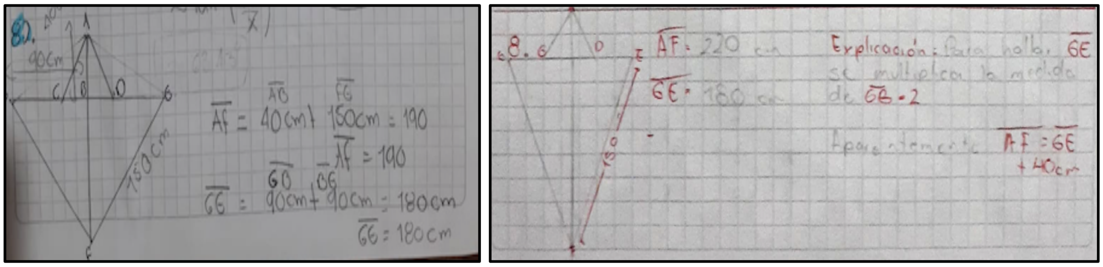


Figura 4. **Resolución del problema 4.**

4.1.2. Conclusiones generales de la prueba de entrada

1) Se observa que la mayoría de los estudiantes resuelve los problemas propuestos por impresión visual o por intuición. Cabe resaltar, que las gráficas son el medio principal que utilizan los estudiantes para resolver los problemas de geometría y con frecuencia usan términos como en la gráfica se observa que son: *"iguales", "es el doble de", "equivale a la suma de*".
2) Uso de lenguaje y notación inapropiados para realizar conjeturas o para explicar la solución de los problemas.
3) Dificultad para aplicar las expresiones algebraicas y sus operaciones básicas, que son necesarias en la resolución de problemas de tipo geométrico.
4) La mayoría de los estudiantes no identifica qué conceptos de la geometría deben usar cuando resuelven problemas no rutinarios, como son: Generalidades de los ángulos, ángulos en el triángulo, desigualdad triangular, teorema de Tales, criterios de semejanza entre dos triángulos y teorema de Pitágoras, entre otros.

4.2. Análisis de resultados de las actividades

La aplicación del diseño instruccional se implementó en el Instituto Técnico Nueva Familia de la ciudad de Duitama, con diez (10) estudiantes de grado décimo. Las edades oscilan entre 15 y 16 años.

Para la presentación de resultados y seguimiento de los estudiantes durante la aplicación de las actividades se establecen códigos para nombrar a los estudiantes:

Códigos para nombrar a los estudiantes									
AS	KE	KP	LC	SP	AU	CC	DM	JM	JP

Para la aplicación de las actividades, se tuvo en cuenta las tres fases propuestos en el Diseño Instruccional: 1) Motivación, 2) Intervención del docente y 3) Trabajo autónomo a través del razonamiento repetido.

La presentación de los resultados obtenidos después de la aplicación de las actividades, tanto en la fase motivacional como en la fase de razonamiento repetido autónomo, permiten avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico y se desarrollará del siguiente modo:

1. Creación de códigos: Para la creación de códigos en cada actividad se tiene en cuenta el número del problema propuesto y las definiciones o teoremas que debe utilizar el estudiante para resolverlo. (Ej. P1T1: Problema 1 y temática 1).

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño: Después de observar las soluciones propuestas por los estudiantes, se proponen cinco (5) niveles de desempeño, cada nivel se identifica con un color y con indicadores de desempeño.

3. Observaciones sobre las soluciones propuestas por los estudiantes: Se presentará el esbozo de los resultados obtenidos en problemas propuestos y algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes del grupo.

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional: De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identifican:

- Recursos con los que cuentan los estudiantes.
- Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

4.3.1. Análisis de la actividad No. 0 “Un recorrido de 360º”

4.3.1.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

Para identificar las definiciones o teoremas que debe utilizar el estudiante para resolver los problemas planteados, se usarán los siguientes códigos:

P1T1: Aplica la suma de ángulos internos del triángulo para hallar los ángulos internos de un pentágono.

P1T2: Aplica la suma de ángulos internos de un triángulo para hallar los ángulos internos de un cuadrilátero isósceles.

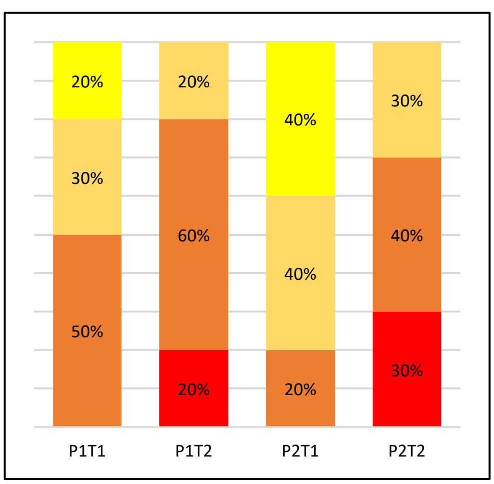
P2T1: Aplica las propiedades de un triángulo isósceles para resolver problemas.

P2T2: Reconoce que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.

3. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la solución de los problemas propuestas por los estudiantes en la fase motivacional, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 1.)

Gráfica 1. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase motivacional.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

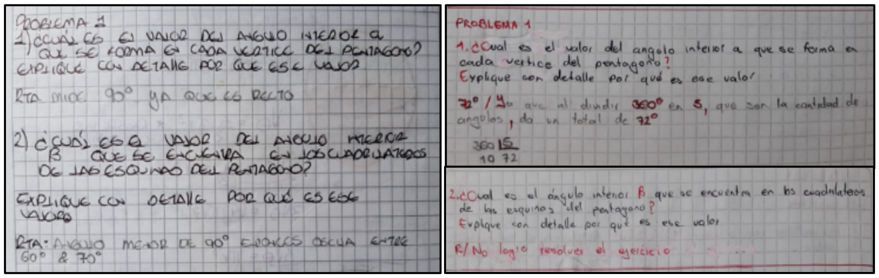


Figura 1. **Soluciones propuestas por los estudiantes AS y JP.**

Observaciones: La mayoría de los estudiantes no observa la imagen para hacer conjeturas, ni aplica el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo para hallar los ángulos internos de un pentágono regular. En el encuentro, los estudiantes comentaron que consultaron en internet que la medida de cada ángulo interno del pentágono regular es de 108º. A partir de la consulta se observa que realizan operaciones como 360º/3= 108º con el fin obtener la respuesta correcta. De igual forma no aplican el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo para hallar los ángulos internos del cuadrilátero. (ver Figura 1.)

Problema 2.

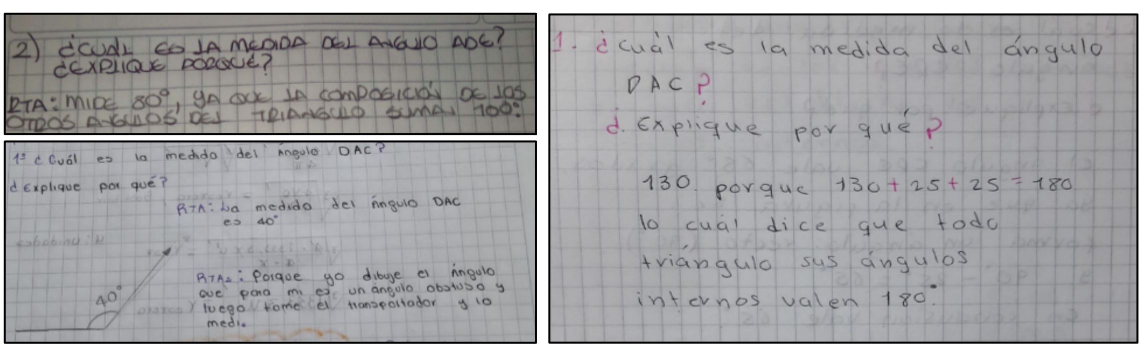


Figura 2. **Soluciones propuestas por los estudiantes AS, LC y KP**

Observaciones: En la figura 2 se evidencia que algunos estudiantes no observan la imagen para hacer conjeturas sobre las propiedades de los triángulos isósceles. Los estudiantes que resuelven el problema de forma correcta no explican con detalle la solución. En las operaciones que realizan algunos estudiantes, se evidencia que aplican el teorema de la suma de ángulos internos de un triángulo y las propiedades de los triángulos isósceles.

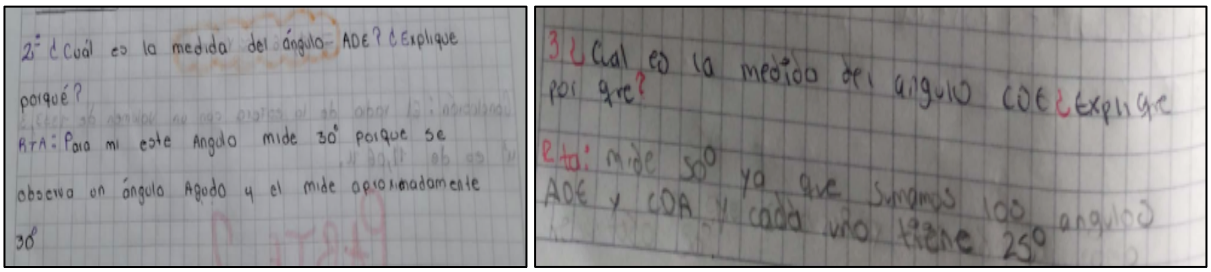


Figura 3. **Soluciones propuestas por los estudiantes LP y DM**

Observaciones: Todos los estudiantes resuelven el problema de manera incorrecta, en la figura 3 se evidencia que los estudiantes no observan la imagen para hacer conjeturas sobre las propiedades de los triángulos isósceles. Sin embargo, conocen el teorema de la suma de los ángulos internos, pero no logran aplicarlo de forma correcta para resolver el problema. Algunos estudiantes tratan de resolver el problema por inspección visual sin hacer conjeturas.

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 1. *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
• **Teorema:** La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º.	• Aplicación de teorema de la suma de ángulos internos para hallar los ángulos internos de un pentágono regular. • Aplicación del teorema de la suma de ángulos internos para hallar los ángulos internos de un cuadrilátero. • Propiedades de los triángulos isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes. • Propiedades de los ángulos en la circunferencia.

4.3.1.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: Aplica la suma de ángulos internos de un triángulo y las propiedades de los triángulos isósceles.

P1T2: Aplica las propiedades de los ángulos internos de un triángulo isósceles, para establecer generalizaciones como, $\beta = 180 - 2\alpha$ donde α se define como la medida de los ángulos congruentes.

P2T1: Plantea y resuelve ecuaciones lineales con una variable para hallar los ángulos internos de un triángulo, además reconoce que un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos internos es recto.

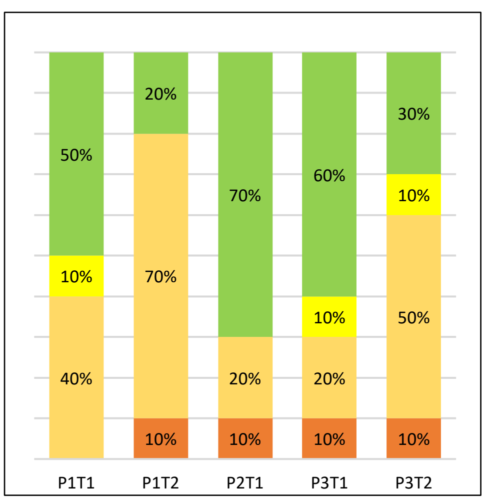
P3T1: Los ángulos sobre una recta forman dos ángulos rectos.

P3T2: Aplica la suma de ángulos internos de un triángulo y la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero, para hallar los ángulos internos de triángulos y cuadriláteros.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 2.)

Gráfica 2. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de razonamiento repetido autónomo.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

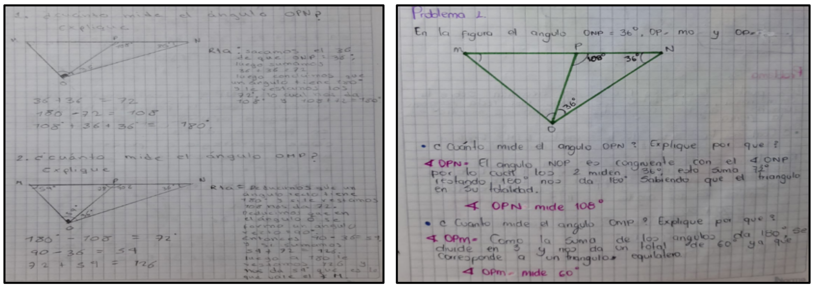


Figura 4. **Soluciones propuestas por los estudiantes KP y LC.**

Observaciones: EL 50% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, explica con detalle la solución, se evidencia que conocen las propiedades de los triángulos isósceles y el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo. El otro 50% de los estudiantes conoce las propiedades de los triángulos isósceles, sin embargo, en el momento de aplicarlas en la resolución del problema se les dificulta. (ver Figura 4.)

Problema 2.

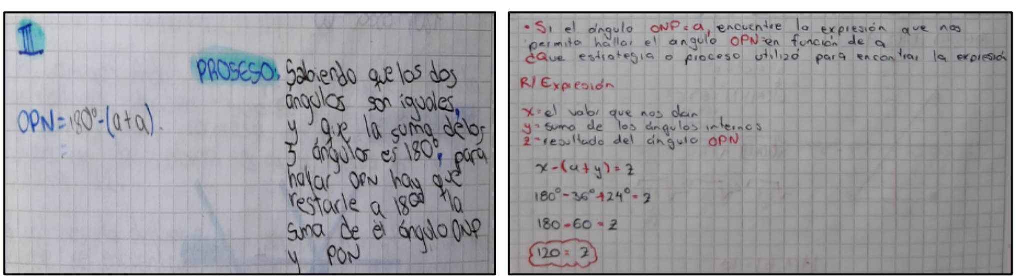


Figura 5. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y JP.**

Observaciones: EL 80% de los estudiantes se les dificulta plantear expresiones algebraicas para expresar la suma de ángulos internos de un triángulo isósceles, como se observa en la figura 6 en la imagen de la derecha. La estudiante KE resuelve el problema de forma correcta, identifica que a partir de la suma de los ángulos internos y los ángulos congruentes se puede expresar el tercer ángulo en función de un ángulo conocido. Cabe resaltar que cuando se entrevistaron a los estudiantes todos entendieron la solución del problema. (ver Figura 5).

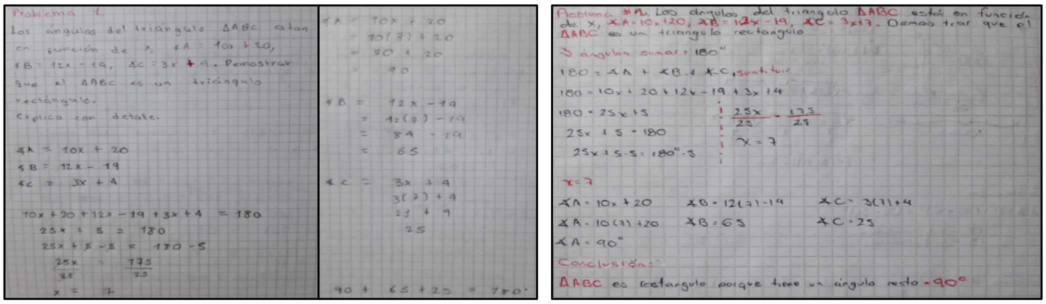


Figura 6. **Soluciones propuestas por KP y JP.**

Observaciones: A partir de la definición de la suma de los ángulos internos, el 70% de los estudiantes plantea una ecuación lineal con las expresiones que representan los ángulos internos del triángulo, resuelven la ecuación de forma correcta, finalmente concluyen que el triángulo es rectángulo porque un ángulo interno mide 90º. Los demás estudiantes plantean de forma correcta la ecuación lineal aplicando la definición de suma de ángulos internos de un triángulo, resuelven la ecuación de forma incorrecta y de acuerdo con la solución concluyen que el triángulo no es rectángulo. (ver Figura 6).

Problema 3.

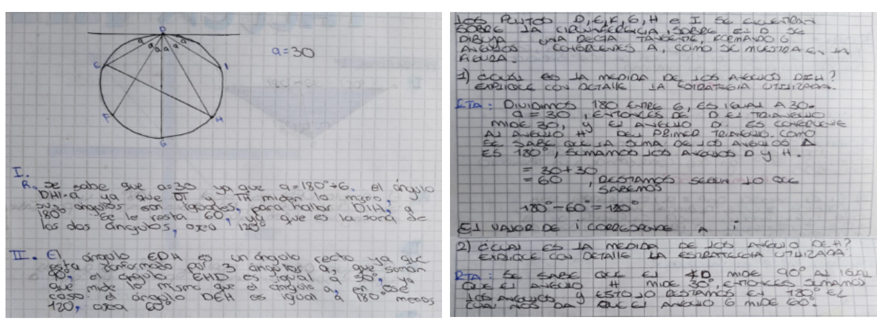


Figura 7. **Soluciones propuestas por KE y AS.**

Observaciones: EL 70% de los estudiantes a partir de la visualización y la definición de los ángulos sobre una recta y las propiedades de los triángulos isósceles halla la medida de los ángulos internos del hexágono regular. Un estudiante a partir de la inspección visual y con la aplicación de las definiciones determina las medidas del hexágono regular, no describe los procesos, solo coloca las medidas sobre la gráfica, en la entrevista explicó cómo resolvió el problema. EL 40% de los estudiantes usa la visualización, la definición de la suma de los ángulos internos del triángulo y resuelve el problema de forma correcta (ver Figura 7).

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identifican los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes después de la intervención docente cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 2

Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA

Recursos con los cuentan los estudiantes	**Fortalezas presentadas en los estudiantes**	**Dificultades presentadas en los estudiantes**
1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º.	La mayoría de los estudiantes aplica este teorema cuando: • Los problemas geométricos propuestos sobre triángulos, contienen datos numéricos. • Tienen que hallar los ángulos internos de polígonos regulares o irregulares.	A la mayoría de los estudiantes se les dificulta aplicar este teorema cuando: • Deben realizar generalizaciones de los ángulos internos de los triángulos isósceles o equiláteros. • Deben aplicar el teorema para realizar demostraciones.
2. En un triángulo isósceles los dos ángulos opuestos a los lados congruentes, son congruentes.	La mayoría de los estudiantes conoce las propiedades de los ángulos internos de un triángulo respecto a sus lados opuestos. • Los estudiantes aplican estas propiedades cuando los problemas son de tipo numérico.	A la mayoría de los estudiantes se les dificulta aplicar este teorema cuando: • En los problemas tienen que calcular la longitud de los ángulos internos a partir de la longitud de los lados. • Debe establecer generalizaciones para determinar los ángulos internos de un triángulo isósceles, donde $\beta = 180 - 2\alpha$ y α es la medida de los ángulos internos congruentes.
3. Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos internos es recto.	• Todos los estudiantes conocen la definición de triángulo rectángulo y resuelven problemas de tipo rutinario. • La mayoría de los estudiantes plantea y resuelve ecuaciones lineales con el fin de hallar los ángulos internos de un triángulo y clasificarlo según sus ángulos internos.	• Algunos estudiantes se les dificulta plantear y resolver ecuaciones lineales que le permiten resolver problemas de tipo geométrico.

4. Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta, suman 180º.	• Todos los estudiantes identifican que los ángulos consecutivos que están al lado de una recta forman un ángulo llano o de 180º y lo aplican en la resolución de problemas rutinarios. • La mayoría de los estudiantes plantea y resuelve ecuaciones lineales para hallar los ángulos consecutivos al lado de recta y clasificarlos según su medida.	• Algunos estudiantes se les dificulta plantear y resolver ecuaciones lineales con los ángulos consecutivos que están al lado de una recta para hallar la medida.

4.3.2. Análisis de la actividad No.1 "Tales y Pitágoras"

4.3.2.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

P1T1: Identifica que un triángulo es rectángulo porque posee un ángulo recto.

P1T2: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar una cuerda de 90º.

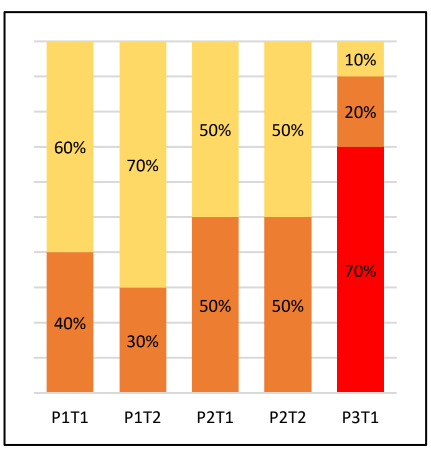
P2T1: Reconoce que dos triángulos son semejantes a partir del criterio AAA.

P2T2: Aplica el teorema de Tales para hallar los lados de un triángulo semejante.

P3T1: Realiza conjeturas a partir de las propiedades de los triángulos equiláteros, para deducir que la longitud de una cuerda de 60º es igual al radio de la circunferencia.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Gráfica 3. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase motivacional.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 3.)

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1

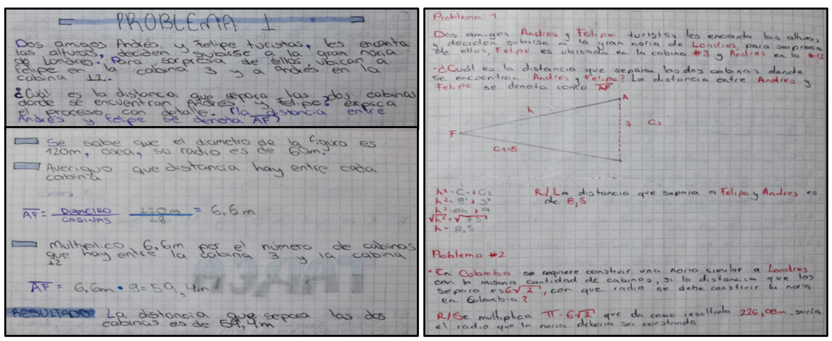


Figura 8. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y JP.**

Observaciones: El 40% de los estudiantes conoce la definición de distancia entre dos puntos, el 60% confunde el término distancia entre dos puntos con la longitud del arco. En las soluciones propuestas, ningún construyó que el triángulo rectángulo con el centro y los puntos que representan las dos cabinas, para hallar esta distancia aplicando el teorema de Pitágoras. El 60% de los estudiantes halla la longitud del arco entre las dos cabinas, donde se evidencia que confunden longitud del arco con la distancia entre dos puntos. (ver Figura 8).

Problema 2

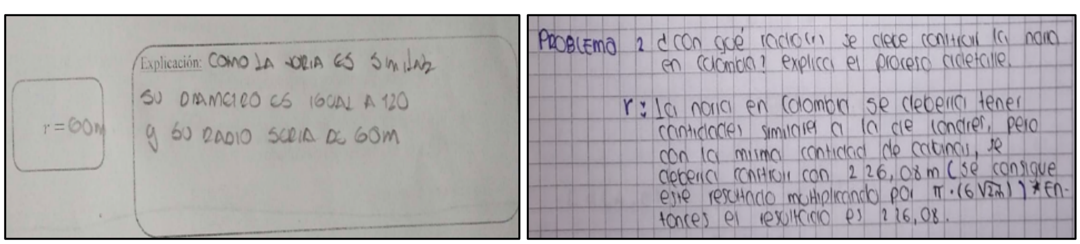


Figura 9. **Soluciones propuestas por los estudiantes LC y KP.**

Observaciones: Todos los estudiantes resuelven el problema de forma incorrecta. El 40% de los estudiantes afirma que para construir una noria similar a la de Londres en Colombia debe ser del mismo tamaño, por lo tanto, el radio no cambia. El 60% halla el semiperímetro del círculo y concluye que este resultado es el radio con el que se debe construir la noria en Colombia. (ver Figura 9).

Problema 3.

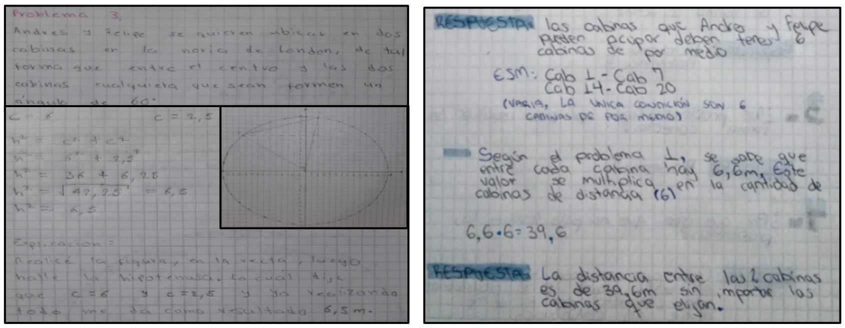


Figura 10. **Soluciones propuestas por los estudiantes KP Y KE.**

Observaciones: El 70% de los estudiantes no propone una solución al problema y los demás proponen soluciones incorrectas, se observa que realizan la gráfica de forma correcta e identifican la distancia entre las dos cabinas, pero no logran deducir que el triángulo que se forma con el centro y las dos cabinas es equilátero, además que la distancia entre las dos cabinas es igual al radio. Algunos estudiantes dividen el diámetro entre 18 y multiplican por 6, afirmando que esta es la distancia. (ver Figura 10).

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 3: *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
Triángulos rectángulos: un triángulo es rectángulo si posee un ángulo de 90º. **Teorema de Pitágoras:** en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	• Realizar diagramas que se permiten identificar triángulos rectángulos. • Aplicación del teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda que forma un ángulo de 90º. • Criterios de semejanza entre dos triángulos. • Realizar diagramas que se permiten identificar las propiedades de los triángulos equiláteros. • Aplicar las propiedades del triángulo equilátero para hallar la longitud de una cuerda que forma un ángulo de 60º.

4.3.2.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la diagonal del cuadrado.

P1T2: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar los catetos de un triángulo rectángulo.

P2T1: Aplica el teorema de Tales para hallar los lados de un triángulo semejante.

P3T1: Aplica razón de proporcionalidad para hallar los lados de un triángulo semejante.

P3T2: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo rectángulo.

P3T3: Utiliza una fórmula adecuada para hallar el área del triángulo rectángulo.

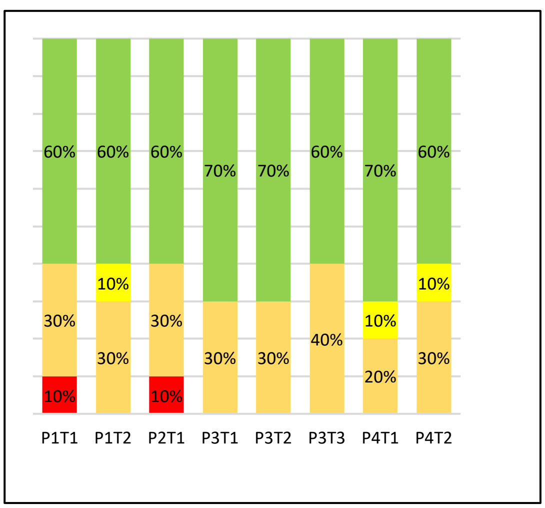
P4T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de los lados de un triángulo sobre el plano cartesiano y demuestra que un triángulo es rectángulo a partir de las ternas pitagóricas.

P4T2: Aplica los criterios de semejanza para demostrar que dos triángulos son semejantes.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestos por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 4.)

Gráfica 4. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de razonamiento repetido autónomo.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

4. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1

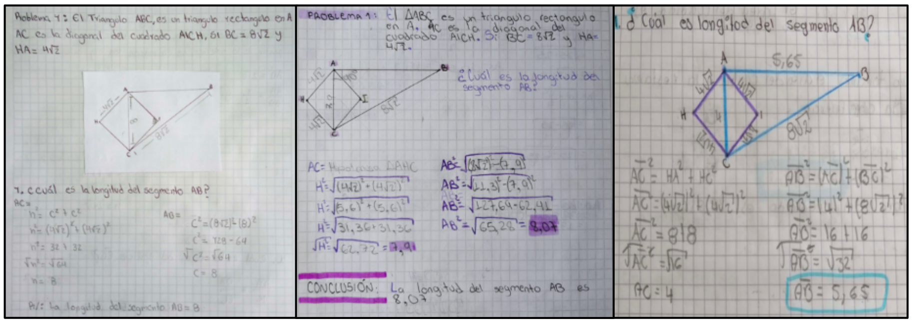


Figura 11. **Soluciones correctas propuestas por AU, KE y solución incorrecta propuesta por CC.**

Observaciones: EL 60% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, explica con detalle la solución, se evidencia que aplica el Teorema de Pitágoras de forma correcta cuando hallan la hipotenusa o un cateto. El otro 40% de los estudiantes conoce el Teorema de Pitágoras, lo aplica de forma correcta pero realiza de forma incorrecta las operaciones, como se evidencia en la solución propuesta por el estudiante CC. (ver Figura 11).

Problema 2.

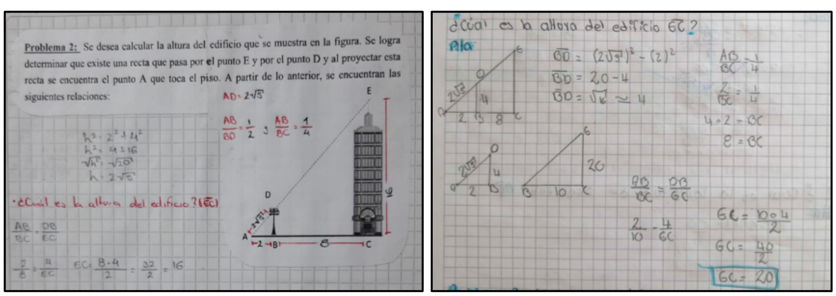


Figura 12. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y CC.**

Observaciones: EL 60% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, explica con detalle la solución, se evidencia que aplica de forma correcta el teorema de Pitágoras cuando implica un lado del triángulo rectángulo y el teorema de Tales para hallar los lados de un triángulo semejante. El otro 40%

aplica de forma correcta el teorema de Pitágoras, sin embargo, conoce el teorema de Tales, pero lo aplica de forma incorrecta para hallar los lados de un triángulo semejante, como se evidencia en la solución propuesta por el estudiante JP. (ver Figura 12).

Problema 3.

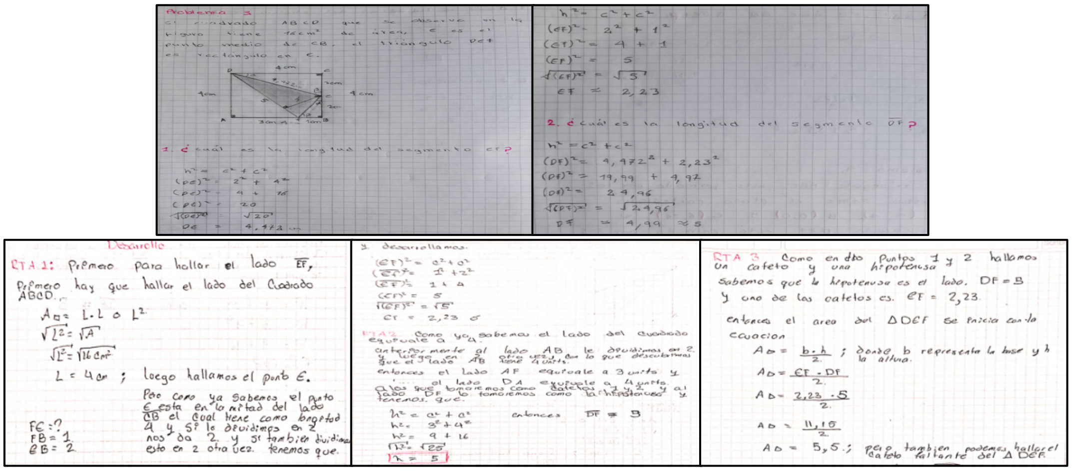


Figura 13. **Soluciones propuestas por los estudiantes KP y JM.**

Observaciones: EL 70% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, explica con detalle la solución. Se evidencia que aplica de forma correcta los criterios de semejanza entre dos triángulos y el teorema de Pitágoras para hallar los lados del triángulo rectángulo. En la tercera pregunta del problema todos saben el algoritmo de área del triángulo, sin embargo, algunos no identifican correctamente la base y la altura del triángulo, por lo tanto la solución es incorrecta. (ver Figura 13).

Problema 4.

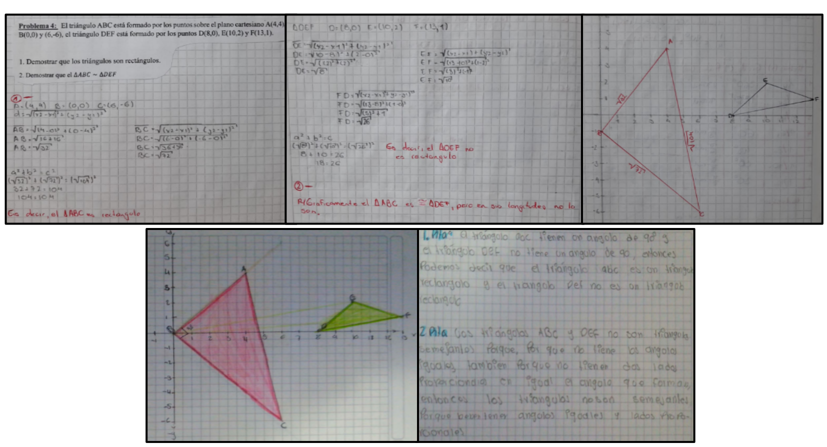


Figura 14. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y CC.**

Observaciones: EL 60% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, aplica la distancia entre dos puntos para hallar los lados de los triángulos y demuestra que solo un triángulo es rectángulo porque satisface el teorema de Pitágoras, y concluye que no son semejantes. Otros estudiantes realizan las gráficas de los triángulos y por impresión visual afirman que los dos triángulos no son semejantes porque no tienen la misma forma. (ver Figura 14).

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identificaron los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 4: *Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA*

Recursos con los cuentan los estudiantes	Fortalezas presentadas en los estudiantes	Dificultades presentadas en los estudiantes
1. Teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	La mayoría de los estudiantes • Reconoce los triángulos rectángulos en cualquier posición, identifican la hipotenusa y los catetos. • Reconoce cuando un problema se puede resolver aplicando triángulos rectángulos. • Aplica de forma correcta el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa o un cateto.	A la mayoría de los estudiantes se les dificulta aplicar este teorema cuando: • Deben demostrar que un triángulo es rectángulo a partir de la longitud de sus lados.
2. Triángulos semejantes: dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales.	La mayoría de los estudiantes • Deduce que dos triángulos son semejantes a partir de los criterios de semejanza. • Identifica que sí sobre un triángulo se traza una recta paralela sobre cualquiera de sus lados se forman dos triángulos semejantes.	Algunos estudiantes tienen dificulta para demostrar que dos triángulos son semejantes a partir de los criterios de semejanza.
3. Teorema de Tales: si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.	La mayoría de los estudiantes • Aplica el teorema de Tales para hallar los lados de un triángulo semejante o para hallar segmentos que se forman cuando se trazan líneas paralelas a cualquier lados del triángulo.	A algunos estudiantes se les dificulta • Plantear de forma correcta el teorema de Tales para hallar los lados o segmentos de un triángulo semejante. • Reconocer el teorema de Tales para resolver el problema, por lo tanto, *escriben "aplicando regla de tres"*, obtienen una solución correcta a los problemas.

4.3.3. Análisis de la actividad No.2 “Siguiendo a los griegos”

4.3.3.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

P1T1: Halla el perímetro del círculo y determina la razón de proporcionalidad entre el perímetro del círculo y el radio.

P1T2: Halla el área del círculo y determina la razón de proporcionalidad entre el área del círculo y el radio.

P2T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del lado del cuadrado inscrito en una circunferencia.

P2T2: Aplica fórmulas adecuadas para hallar el áreas sombreadas.

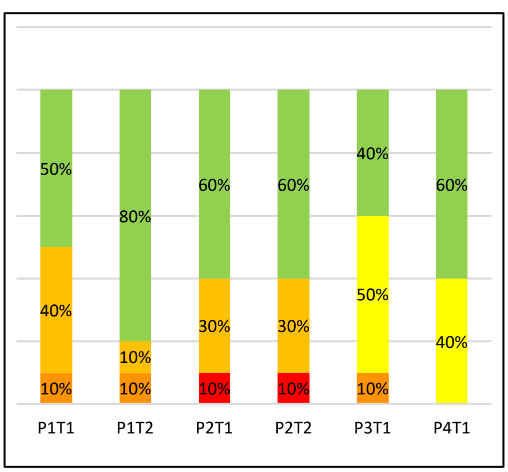
P3T1: Aplica los conceptos fundamentales sobre ángulos para resolver problemas.

P4T1: Plantea y resuelve ecuaciones lineales con una variable para hallar las medidas de los ángulos que forman una recta.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes en la fase motivacional, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 5.)

Gráfica 5. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase motivacional.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

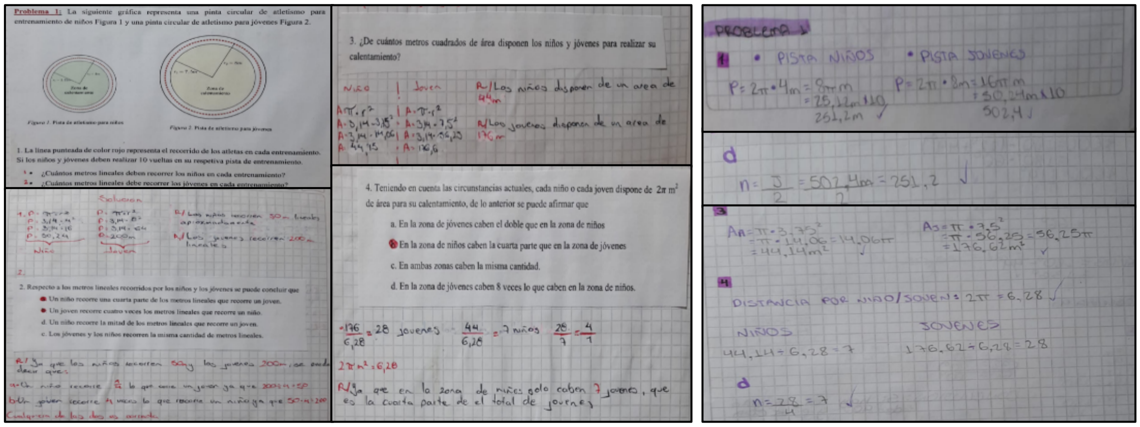


Figura 15. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y KE.**

Observaciones: El 50% de los estudiantes confunde el algoritmo de perímetro del círculo con el algoritmo del área del círculo, la solución que propone es incorrecta y este error no les permite establecer una relación de proporcionalidad correcta entre el perímetro y el radio del círculo. El 80% de los estudiantes conoce el algoritmo para calcular el área del círculo, lo aplica de forma correcta y establece una relación de proporcionalidad entre el área y el radio del círculo, explicando con detalle la solución del problema. (ver Figura 15).

Problema 2.

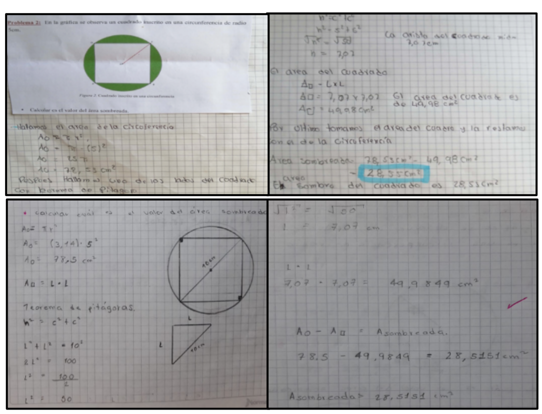


Figura 16. **Soluciones propuestas por los estudiantes CC y KP.**

Observaciones: Todos los estudiantes conocen el teorema de Pitágoras, sin embargo, solo el 60% lo aplica de forma correcta y de diferentes formas para hallar la longitud del lado del cuadrado inscrito en la circunferencia que representa la longitud de una cuerda de 90º. De igual forma halla el área sombreada entre el círculo y el cuadrado inscrito explicando con detalle la solución del problema. (ver Figura 16).

Problema 3.

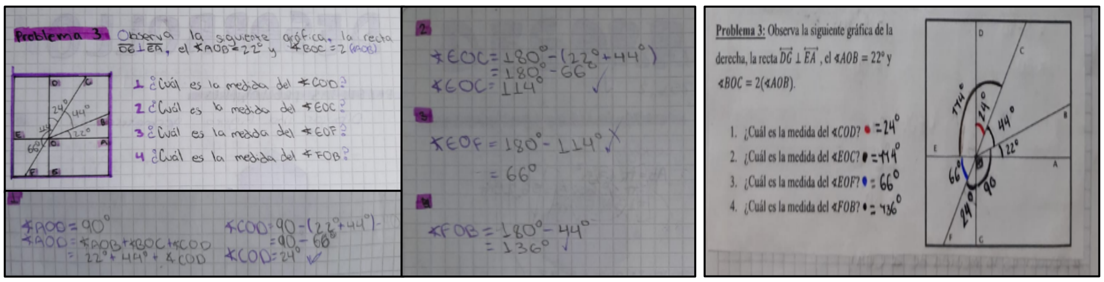


Figura 17. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y AU .**

Observaciones: EL 90% de los estudiantes conoce los conceptos fundamentales sobre ángulos y los aplica de diferentes formas. El 40% de los estudiantes escribe el proceso con detalle de la solución del problema, como lo propone la estudiante KE. El 50% utiliza la gráfica para hacer conjeturas, resuelve el problema de forma correcta y realiza los cálculos de forma mental, como lo muestra el estudiante AU. (ver Figura 17).

Problema 4

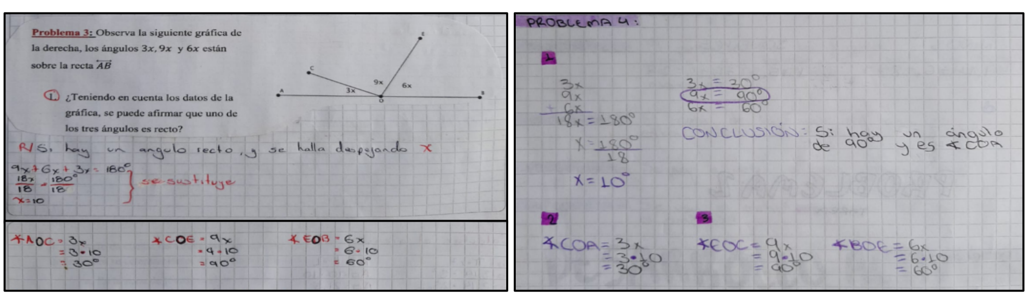


Figura 18. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y KE.**

Observaciones: Todos los estudiantes identifican que los ángulos que están sobre una recta forman dos ángulos rectos, plantean y resuelven de forma correcta la ecuación para hallar los ángulos. Se encuentra similitud en los procesos. Algunos estudiantes resuelven el problema por ensayo y error, sustituyen la variable x y obtienen que la suma de los tres ángulos es igual a 180º. (ver Figura 18).

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 5: *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
• Área del círculo y relación de proporcionalidad entre el área del círculo y el radio • Ángulos entre rectas perpendiculares y ángulos complementarios. • Aplicación del Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda de 90º. • Ángulos adyacentes, ángulos opuestos por el vértice, ángulos complementarios, ángulos suplementarios. • Ángulos sobre una recta forman un ángulo de 180º. • Planteamiento y solución de ecuaciones lineales con una variable para resolver problemas que involucran ángulos.	• Perímetro del círculo y relación de proporcionalidad entre el perímetro del círculo y el radio, porque algunos estudiantes confunden perímetro con área. • Cuando no es evidente el triángulo rectángulo para la solución del problema, algunos estudiantes se les dificulta realizar construcciones auxiliares para obtener el triángulo rectángulo y a través del teorema de Pitágoras resolver el problema, como es el caso de una cuerda que forma un ángulo recto. • Algunos estudiantes resuelven de forma correcta los problemas cuando deben aplicar las generalidades de los ángulos, pero presentan dificultad para explicar qué conceptos aplicaron.

4.3.3.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: Aplica la conversión de ángulos en grados, radianes y vueltas con el propósito de realizar comparaciones.

P1T2: Aplica la longitud de arcos para resolver problemas.

P2T1: Realiza conjeturas a partir de las propiedades de los triángulos equiláteros, para deducir que la longitud de una cuerda de 60º es igual al radio de la circunferencia.

P2T2: Construye arcos y cuerdas para un ángulo de 60º en GeoGebra, con el propósito de verificar resultados obtenidos con lápiz y papel.

P3T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda de 30º en función del radio r.

P3T2: Construye arcos y cuerdas para un ángulo de 30º en GeoGebra, con el propósito de verificar resultados obtenidos con lápiz y papel.

P4T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar las coordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria para ángulos con medidas que son múltiplos de 30º.

P4T2: Ubica puntos sobre la circunferencia que forman ángulos en posición estándar que son múltiplos de 30º en GeoGebra, con el propósito de verificar resultados obtenidos con lápiz y papel.

P5T1: Para todo punto (x, y) que pertenece a la circunferencia unitaria se cumple que $x^2 + y^2 = 1$ o $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, aplica la anterior definición para determinar sin un punto pertenece a la circunferencia.

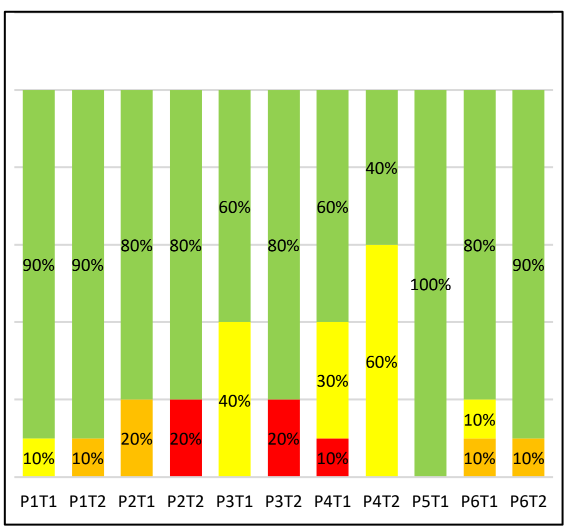
P6T1: Aplica el Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda a partir del diámetro o radio y la distancia entre el centro y la cuerda.

P6T2: Construye cuerdas en GeoGebra a partir del radio y la distancia entre el centro y la cuerda.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 6.)

Gráfica 6. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de razonamiento repetido autónomo.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

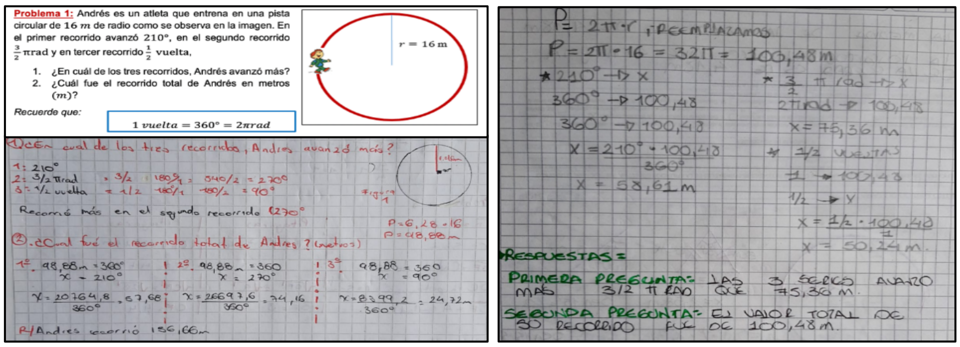


Figura 19. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y KE.**

Observaciones: Todos los estudiantes realizan conversiones de ángulos en grados, radianes y vueltas, aplican sistemas de conversión o regla de tres simple directa para hallar la longitud de un arco a partir de la longitud de la circunferencia, además identifican y explican en cuál de los tres recorridos logró avanzar más el atleta a partir de la longitud de un arco. En la segunda pregunta del problema el 20% de los estudiantes confunde el recorrido total que realizó Andrés con el perímetro de la circunferencia, como se evidencia en la solución propuesta por la estudiante KE. (ver Figura 19).

Problema 2.

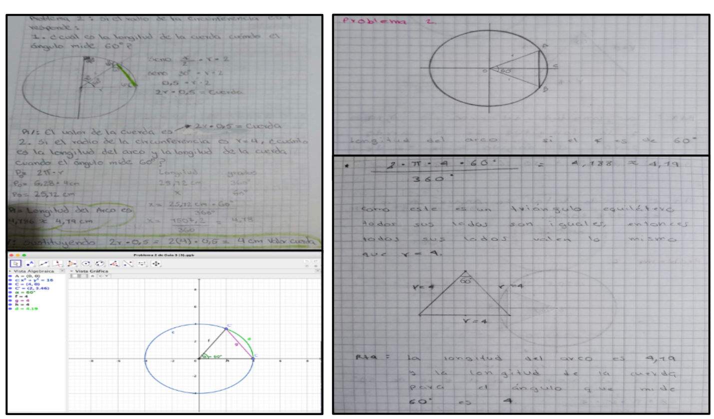


Figura 20. **Soluciones propuestas por los estudiantes AU y KP.**

Observaciones: EL 80% de los estudiantes soluciona el problema de forma correcta, en las soluciones se observa los siguientes procesos: para hallar la forma general de una cuerda con un ángulo de $60°$ aplican la razón trigonométrica seno para hallar la mitad de la cuerda y luego multiplican por 2. Otros estudiantes construyen un triángulo con los dos radios y la cuerda, a partir de las propiedades de los triángulos equiláteros obtienen que la longitud de una cuerda de $60°$ es igual al radio de la circunferencia. Luego los estudiantes aplican este algoritmo para hallar la longitud de una cuerda para cualquier radio y hallan la longitud del arco para un ángulo de $60°$. Finalmente realizan las gráficas en GeoGebra para comparar los resultados obtenidos con lápiz y papel. (ver Figura 20).

Problema 3.

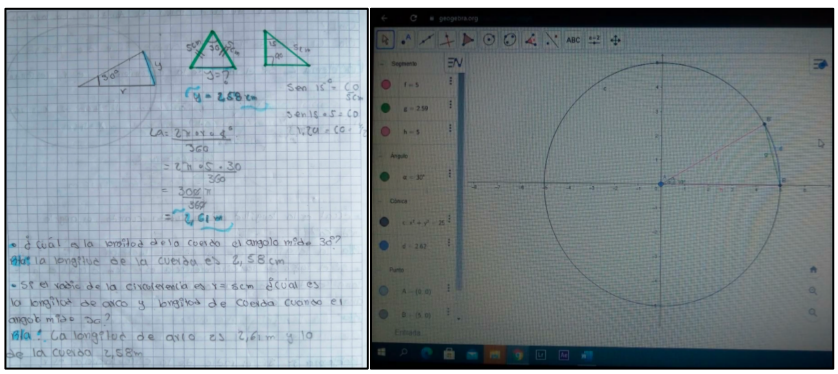


Figura 21. **Solución propuesta por el estudiante CC**

Observaciones: La mayoría de los estudiantes consulta cómo hallar la longitud de una cuerda para un ángulo de 30º a partir de las razones trigonométricas. Para los estudiantes no es fácil realizar la generalización de la longitud de la cuerda de 30º a partir del Teorema de Pitágoras. La pregunta de la mayoría de los estudiantes fue: *¿cuál es el radio para hallar la longitud de la cuerda?*, todos los estudiantes hallan la longitud de la cuerda y el arco con el radio $r = 5cm$, que corresponde a la pregunta 2 del problema. Finalmente realizan la gráfica en GeoGebra y verifican que las respuestas obtenidas con lápiz y papel son correctas. (ver Figura 21).

Problema 4.

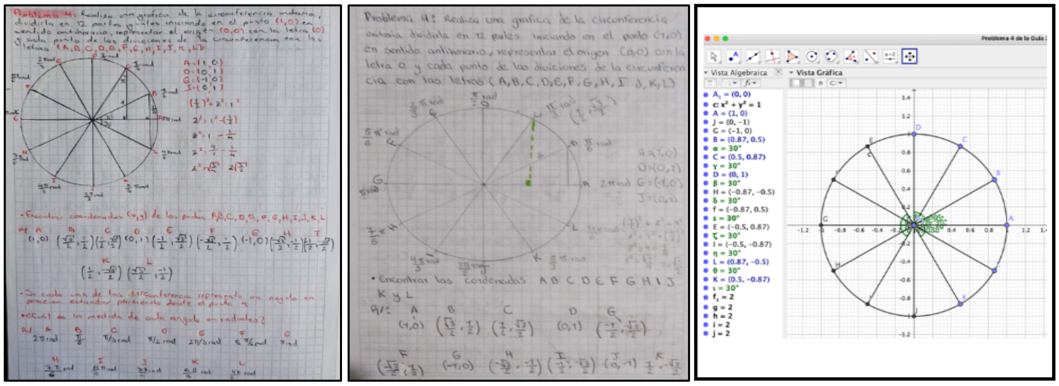


Figura 22. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y AU.**

Observaciones: El 70% de los estudiantes realiza una construcción auxiliar del triángulo rectángulo con un ángulo de 30º para hallar las coordenadas del punto B, el cateto menor representaba la coordenada $y = \frac{1}{2}$, el cateto mayor lo halla aplicando el teorema de Pitágoras y representa la coordenada $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, en la gráfica observa que las coordenadas del punto C para el ángulo de 60º se invierte respecto al punto B. Para hallar las coordenadas de los demás puntos, observan que tienen los mismos valores de los puntos del primer cuadrante y determinaron los signos de acuerdo con el número de cuadrante. Realizan la gráfica en GeoGebra y verifican con las coordenadas que hallaron con lápiz y papel. Para hallar la medida en radianes de los ángulos en posición estándar que se forma en cada punto, utilizan el ángulo de $30° = \frac{\pi}{6}$, multiplican y simplifican así: para el ángulo de $60° = 2(30°) = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$ y de forma similar lo hacen para los demás ángulos. (ver Figura 22).

Problema 5.

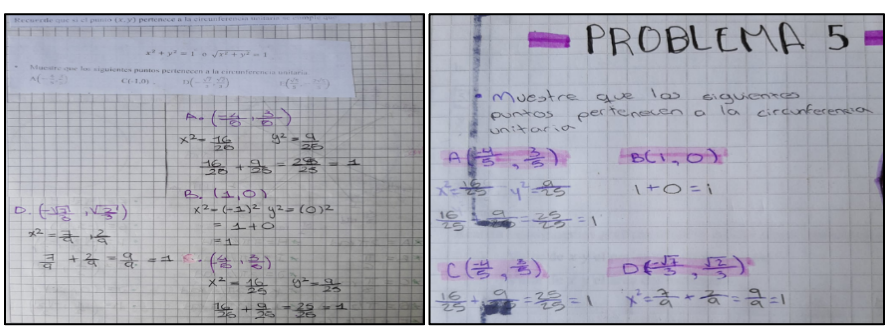


Figura 23. **Soluciones propuestas por los estudiantes AS y KE.**

Observaciones: Todos los estudiantes aplican de forma correcta el algoritmo para mostrar si un punto del plano cartesiano pertenece a la circunferencia unitaria, se observa que sustituyen las coordenadas de cada punto para mostrar si se cumple la igualdad. Ningún estudiante explicó que como se cumple la igualdad el punto pertenece a la circunferencia unitaria. En el encuentro sincrónico comentaron que como x y y representan los catetos del triángulo rectángulo y el radio representa la hipotenusa, entonces si un punto (x, y) pertenece a la circunferencia debe satisfacer la igualdad. Además, se les preguntó: si no se cumple la igualdad qué pasa con ese punto, respondieron que el punto puede estar dentro o fuera de la circunferencia unitaria. (ver Figura 23).

Problema 6.

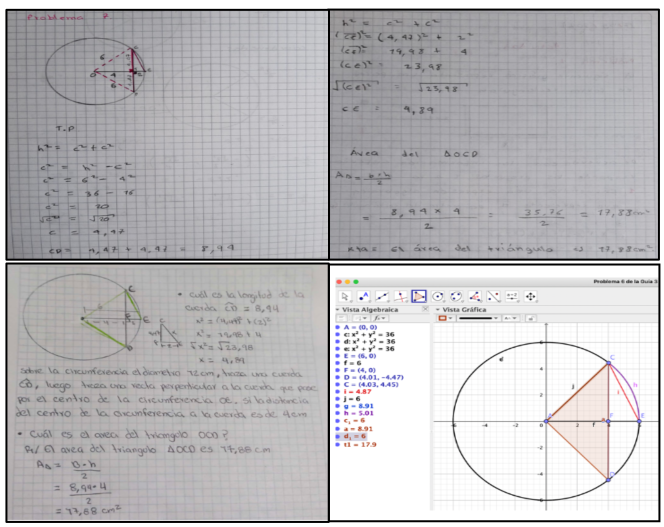


Figura 24. **Soluciones propuestas por los estudiantes KP y AU.**

Observaciones: El 90% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del segmento $\overline{FC}$ que representa la mitad del cuerda $\overline{CD}$. Para hallar la longitud de la cuerda $\overline{EC}$ utiliza la longitud del la cuerda $\overline{CD}$ y aplica nuevamente el teorema de Pitágoras. Finalmente para hallar el área del triángulo ΔOCD, identifican que una base del triángulo es la cuerda $\overline{CD} \approx 8{,}94\ cm$ y la altura el segmento $\overline{OF} = 4\ cm$. Realizaron la gráfica en GeoGebra y verificaron que los resultados obtenidos con lápiz y papel eran correctos. (ver Figura 24).

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identificaron los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 6: *Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA*

Recursos con los cuentan los estudiantes	Fortalezas presentadas en los estudiantes	Dificultades presentadas en los estudiantes
1. Medición de ángulos **Grado sexagesimal:** Un grado es la amplitud del ángulo que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales y tomar una de ellas, la notación utilizada es 1º. **Medición de un ángulo en radianes** Un ***radián*** (1 rad) es el ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de igual longitud que el radio de la misma.	La mayoría de los estudiantes • Reconoce que un ángulo puede ser expresado en diferentes sistemas de medición como: grados, radianes y vueltas. • Establece que $2\pi\ rad$ significa una vuelta completa. Es decir: $1\ vuelta = 360^o = 2\pi\ rad$ • Realiza conversiones de ángulos entre los tres sistemas para aplicarlo en la resolución de problemas • Comprende que la medida en radianes de un ángulo es equivalente a la longitud del arco en el círculo unitario subtendido por el ángulo y se puede determinar por $L = r \cdot \alpha$ r: radio de la circunferencia. α: ángulo en radianes • Realiza gráficas de ángulos y arcos en GeoGebra.	A algunos de los estudiantes • Se les dificulta aplicar el sistema de conversión para expresar los ángulos en otros sistemas.
2. Cuerda: Es un segmento con sus extremos sobre dicha curva. **Longitud de una cuerda en la circunferencia:** Distancia en línea recta entre dos puntos en un círculo. $Cuerda\ \overline{BC}$	La mayoría de los estudiantes • Reconoce que para hallar la longitud de una cuerda cuando el ángulo es de 90°, se puede aplicar el teorema de Pitágoras. Además demuestran que la longitud de la cuerda en forma general es $\overline{AB} = \sqrt{2}r$, a partir del teorema de Pitágoras. • Demuestra que para hallar la longitud de una cuerda cuando el ángulo es de 45°, es igual $\overline{AB} = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, aplicando el teorema de Pitágoras y la longitud de la cuerda de 90º. • Realiza gráficas de arcos y cuerdas en GeoGebra para comparar las respuestas de los problemas realizados con lápiz y papel. Todos los estudiantes • Aplican el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda a partir del radio y la distancia entre el centro y la cuerda.	A la mayoría de los estudiantes se les dificulta • Demostrar que la longitud de una cuerda cuando el ángulo es de 30°, es igual $\overline{AB} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Algunos de los estudiantes • Confunden longitud de arco con longitud de una cuerda, por lo tanto, cuando resuelven problemas la solución que proponen es incorrecta.

<u>Circunferencia unitaria:</u> Circunferencia centrada en el origen del plano cartesiano $(0,0)$ y radio de una unidad (1 u). Para todo punto (x,y) que pertenece a la circunferencia unitaria, se cumple que $$x^2+y^2=1$$	La mayoría de los estudiantes • Conoce la definición de circunferencia unitaria, realiza la gráfica con lápiz y papel y en GeoGebra. • Demuestra a partir del teorema de Pitágoras para todo punto (x,y) que pertenece a la circunferencia unitaria, se cumple que $$x^2+y^2=1$$ Todos los estudiantes • Muestran que un punto (x,y) pertenece a la circunferencia si satisface la igualdad $$x^2+y^2=1$$ • Verifican en GeoGebra realizando la gráfica de la circunferencia unitaria y ubicando determinado punto.	Algunos de los estudiantes • Se les dificulta comprender para todo punto (x,y) que pertenece a la circunferencia unitaria, se cumple que $$x^2+y^2=1$$ es un caso particular del teorema de Pitágoras.

4.3.4. Análisis de la actividad No.3 Los árabes: “De la circunferencia unitaria a las funciones trigonométricas”

4.3.4.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

P1T1: Emplea las expresiones algebraicas y sus operaciones para representar el perímetro de un rectángulo.

P1T2: Identifica cuándo expresión algebraica representa una función lineal.

P1T3: Emplea las expresiones algebraicas para representar el perímetro de un rectángulo.

P1T4: Identifica cuándo expresión algebraica representa una función cuadrática.

P1T5: Evalúa funciones y las representa mediante una gráfica sobre el plano cartesiano.

P1T6: Identifica las propiedades fundamentales de las funciones lineales y cuadráticas.

P2T1: Aplica las generalidades de los ángulos para hallar los ángulos internos de un pentágono regular.

P2T2: Halla la longitud del arco que se forma entre dos puntas del pentágono regular inscrito en una circunferencia.

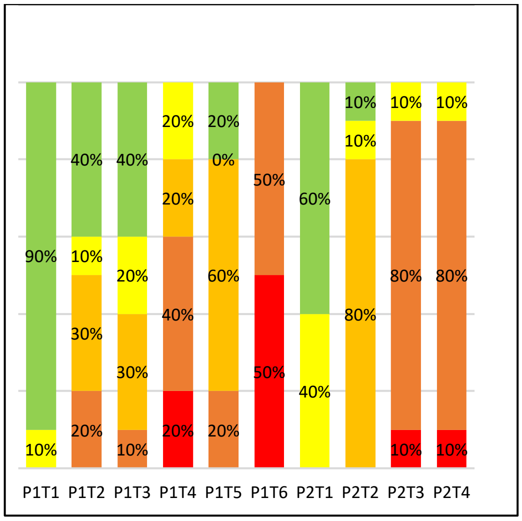
P2T3: Halla la longitud del lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1u

P2T4: Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud del lado del pentágono inscrito en una circunferencia con un radio mayor a la unidad.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestos por los estudiantes en la fase motivacional, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 7.)

Gráfica 7. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de razonamiento repetido autónomo.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

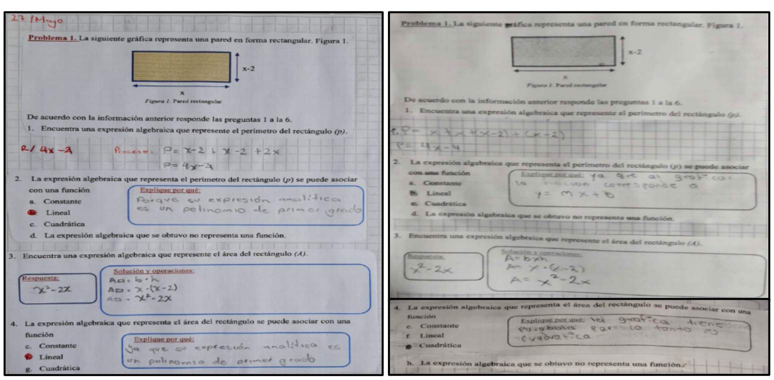
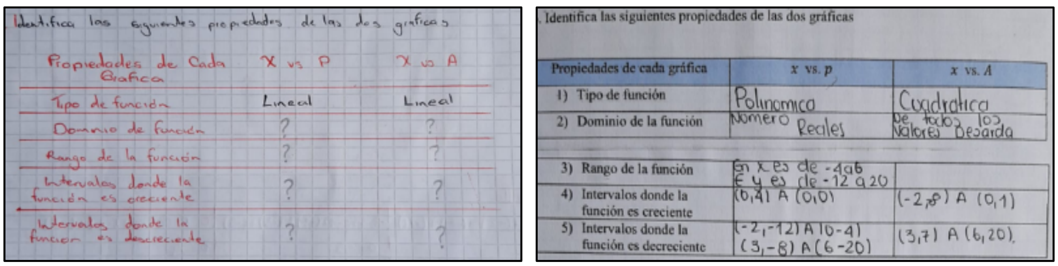


Figura 25. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y DM.**

Observaciones: EL 90% de los estudiantes halla la expresión algebraica que representa el perímetro del rectángulo, pero solo el 40% asocia la expresión algebraica con una función lineal afirmando que es de la forma $y = mx + b$ o porque es un polinomio de primer grado. Por otro lado, el 80% de los estudiantes halla una expresión que representa el área del rectángulo, pero solo el 20% la asocia con una función cuadrática porque la gráfica es una parábola o un polinomio de segundo grado. Los demás estudiantes conocen los algoritmos de perímetro y área, pero presentan dificultad cuando tienen que sustituir y realizar las operaciones algebraicas, (ver Figura 25).


Identifica las siguientes propiedades de las dos gráficas

Propiedades de Cada Gráfica	X vs P	X vs A
Tipo de función	Lineal	Lineal
Dominio de función	?	?
Rango de la función	?	?
Intervalos donde la función es creciente	?	?
Intervalos donde la función es decreciente	?	?

Identifica las siguientes propiedades de las dos gráficas

Propiedades de cada gráfica	x vs. p	x vs. A
1) Tipo de función	Polinomica	Cuadratica
2) Dominio de la función	Número Reales	De todos los Valores
3) Rango de la función	En X es de -4 a 6 E y es de -12 a 20	
4) Intervalos donde la función es creciente	(0,4) A (0,0)	(-2,8) A (0,1)
5) Intervalos donde la función es decreciente	(-2,-12) A (0,-4) (3,-8) A (6-20)	(3,7) A (6,20)

Figura 26. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y LC.**

Por otra parte, los estudiantes no conocen las propiedades fundamentales de una función cómo es tipo de función, dominio, rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Los estudiantes que escriben las propiedades, en el encuentro sincrónico comentan que consultaron en la internet pero no entendieron cómo resolver la pregunta de forma correcta. (ver Figura 26).

Problema 2.

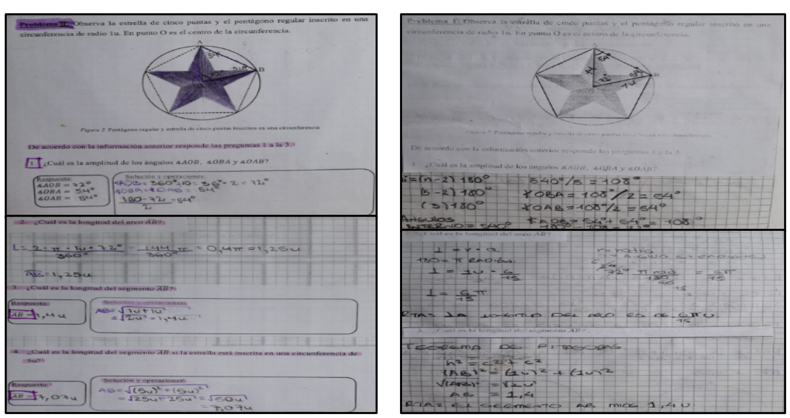


Figura 27. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y AS.**

Observaciones: Todos los estudiantes hallan correctamente los ángulos que se encuentran en el polígono estrellado y calculan el arco que se forma entre dos puntas consecutivas de la estrella. Se evidencia que aplican las generalidades de los ángulos y a partir de la longitud de la circunferencia calculan la longitud del arco para el ángulo de $72°$, la mayoría explica con detalle el proceso.

Por otro lado, el 90% de los estudiantes propone soluciones incorrectas para hallar la longitud del lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia unitaria, se observa que aplica el teorema Pitágoras asumiendo que los catetos son radios de la circunferencia sin tener en cuenta que el triángulo ΔAOB no es un triángulo rectángulo. (ver Figura 27).

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 7. *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
• **Expresiones algebraicas y operaciones:** aplican las expresiones algebraicas y sus operaciones para representar el perímetro y área de un rectángulo. • **Generalidades de los ángulos:** aplican las generalidades de los ángulos para resolver problemas. • **Longitud de arco de circunferencia:** resuelven problemas donde implica hallar la longitud de arco de circunferencia para cualquier ángulo.	• **Funciones lineales y cuadráticas:** identificar las propiedades fundamentales de las funciones lineales y cuadráticas. • Calcular la longitud de una cuerda para cualquier ángulo y radio.

4.3.4.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar el radio de la circunferencia a partir de las coordenadas de un punto.

P1T2: Aplica las razones trigonométricas para hallar el valor del $\sin\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ cuando se conoce el radio y un punto de la circunferencia.

P1T3: Demuestra que para el ángulo θ el $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

P2T1: Utiliza las líneas notables del coseno para construir la gráfica de la función coseno.

P2T2: Identifica las propiedades fundamentales de la función coseno a partir de la gráfica construida con en lápiz y papel y en GeoGebra.

P3T1: Aplica las razones trigonométricas para hallar la longitud de una cuerda cuando se conoce el ángulo central y el radio de la circunferencia.

P3T2: Construye cuerdas en GeoGebra cuando se conoce el radio y el ángulo central, con el propósito de verificar resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel.

P4T1: Demuestra que la longitud de una cuerda $\overline{AB}$ con radio r y ángulo central θ es $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

P5T1: Aplica la generalización de la cuerda $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ o razones trigonométrica para hallar la longitud de una cuerda.

P5T2: Aplica razones trigonométricas o el teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre el centro de la circunferencia y la cuerda.

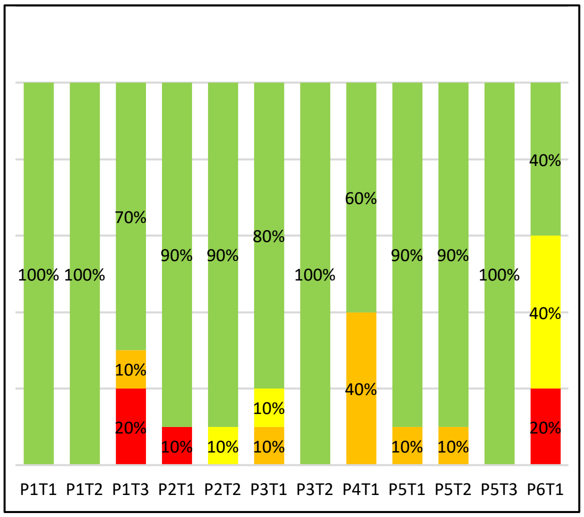
P5T3 Construye cuerdas en GeoGebra cuando se conoce el radio y el ángulo central, con el propósito de verificar resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel.

P6T1: Aplica la longitud de la cuerda y el área de la circunferencia para resolver problemas que implican realizar demostraciones.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 8.)

Gráfica 8. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de razonamiento repetido autónomo.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

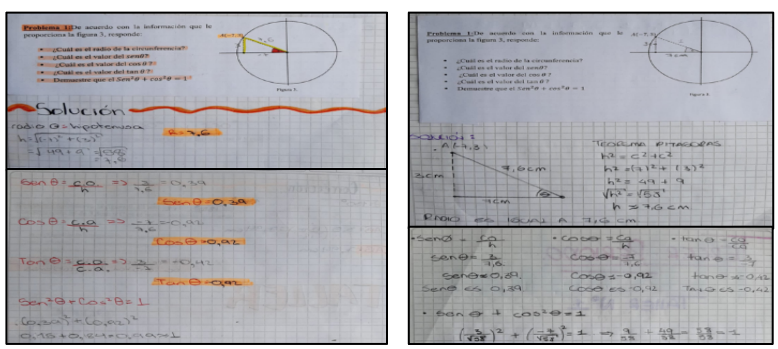
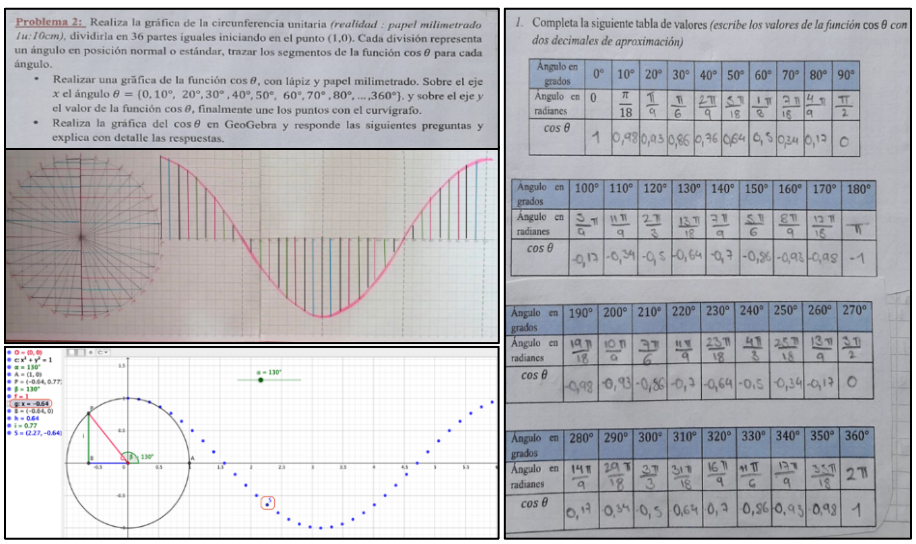


Figura 28. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y AS.**

Observaciones: Todos los estudiantes aplican de forma correcta el teorema de Pitágoras para hallar el radio de la circunferencia, determinan que las coordenadas del punto $A(-7,3)$ representan los catetos y el radio de la circunferencia la hipotenusa, en la gráfica identifican el cateto opuesto y cateto adyacente respecto al ángulo θ y hallan el valor del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

El 70% de los estudiantes demuestra que para el ángulo θ el $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$. Se evidencia que sustituye los valores del $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, obtenidos en la primera parte del problema, realiza las operaciones y el resultado es 1. En esta parte del problema, la mayoría de los estudiantes obtiene una aproximación cercana a 1, porque utiliza números expresados en forma decimal, los demás estudiantes realizan las operaciones con números racionales e irracionales y demostran que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$. (ver Figura 28).

Problema 2. (Parte 1)



Problema 2: Realiza la gráfica de la circunferencia unitaria *(realidad : papel milimetrado 1u:10cm)*, dividirla en 36 partes iguales iniciando en el punto (1,0). Cada división representa un ángulo en posición normal o estándar, trazar los segmentos de la función $\cos\theta$ para cada ángulo.

- Realizar una gráfica de la función $\cos\theta$, con lápiz y papel milimetrado. Sobre el eje x el ángulo $\theta = \{0, 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, \ldots, 360°\}$. y sobre el eje y el valor de la función $\cos\theta$, finalmente une los puntos con el curvígrafo.
- Realiza la gráfica del $\cos\theta$ en GeoGebra y responde las siguientes preguntas y explica con detalle las respuestas.

1. Completa la siguiente tabla de valores *(escribe los valores de la función* $\cos\theta$ *con dos decimales de aproximación)*

Ángulo en grados	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Ángulo en radianes	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{1\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	0,98	0,93	0,86	0,76	0,64	0,5	0,34	0,17	0

Ángulo en grados	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
Ángulo en radianes	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{18}$	π
$\cos\theta$	-0,17	-0,34	-0,5	-0,64	-0,7	-0,86	-0,93	-0,98	-1

Ángulo en grados	190°	200°	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°
Ángulo en radianes	$\frac{19\pi}{18}$	$\frac{10\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{9}$	$\frac{23\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{25\pi}{18}$	$\frac{13\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos\theta$	-0,98	-0,93	-0,86	-0,7	-0,64	-0,5	-0,34	-0,17	0

Ángulo en grados	280°	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
Ángulo en radianes	$\frac{14\pi}{9}$	$\frac{29\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{31\pi}{18}$	$\frac{16\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{9}$	$\frac{35\pi}{18}$	2π
$\cos\theta$	0,17	0,34	0,5	0,64	0,7	0,86	0,93	0,98	1

Figura 29. **Solución propuesta por el estudiante LC.**

Observaciones: Todos los estudiantes realizan la gráfica con lápiz y en papel milimetrado, sobre la circunferencia unitaria $(10cm = 1u)$ construyen las líneas notables del coseno para cada uno de los ángulos múltiplos de 10º de 0º hasta 360º, trasladan estos segmentos sobre el eje x y finalmente con la ayuda del curvígrafo unien los puntos obteniendo la gráfica de la función coseno. Luego realizan la gráfica en GeoGebra para los ángulos múltiplos de 10º de 0º hasta 360º constatando que las dos gráficas eran iguales. Con la información de las gráficas, completan la tabla de valores de la función coseno para cada uno de los ángulos de forma correcta. (ver Figura 29).

Problema 2. (Parte 2)

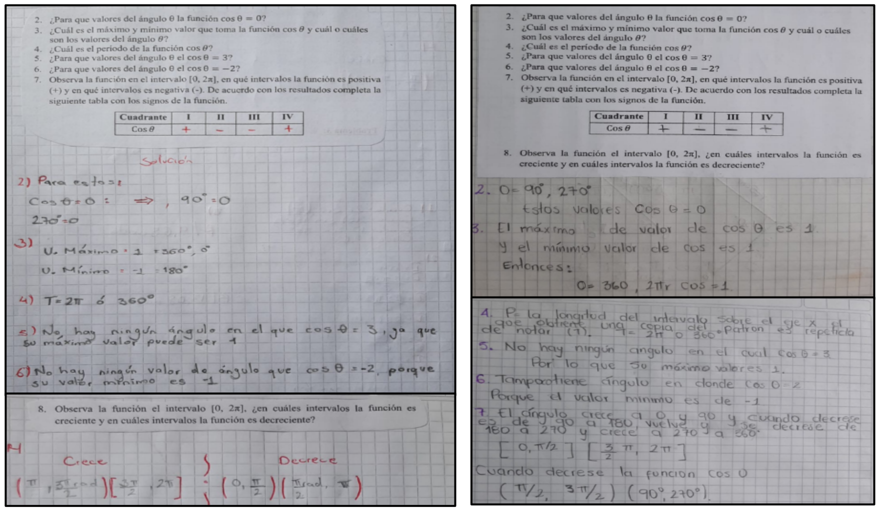


Figura 30. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y JM.**

Observaciones: Todos los estudiantes observan las dos gráficas e identifican las siguientes propiedades de la función coseno: ángulos donde la función $\cos\theta = 0$, valores máximos y mínimos de la función, período de la función, cuadrantes del plano cartesiano donde la función es positiva y negativa, establecieron que para **ningún** valor de θ la función coseno podía ser mayor que 1 y menor que -1.

La mayoría de los estudiantes no identifica de forma correcta los intervalos donde la función es creciente o decreciente, comentaron que la función es creciente cuando es positiva y es decreciente cuando la función es negativa. (ver Figura 30).

Problema 3.

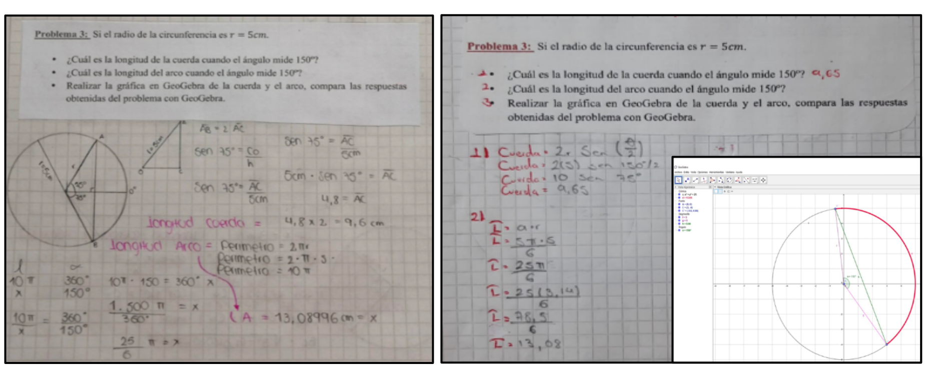
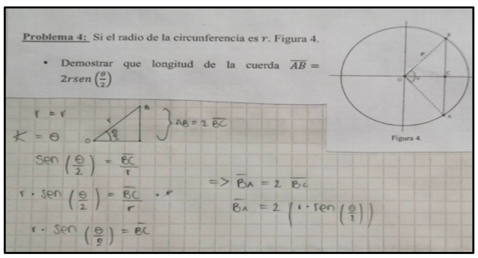


Figura 31. **Soluciones propuestas por los estudiantes LC y JP**

Observaciones: El 90% de los estudiantes halla correctamente la longitud de la cuerda. Algunos utilizan construcciones auxiliares para formar triángulos rectángulos y a partir de la razón trigonométrica seno hallan la mitad de la cuerda y luego la duplican. Otros estudiantes utilizan la expresión general de la cuerda $\overline{AB} = 2rsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Todos los estudiantes calculan la longitud del arco, unos estudiantes aplican la expresión general $L = \theta r$, otros hallan la longitud de la circunferencia y aplican regla tres para hallar la longitud del arco para un ángulo de $150°$. Finalmente realizan la gráfica en GeoGebra y verifican que los resultados obtenidos con lápiz y papel eran correctos. (ver Figura 31).

Problema 4.



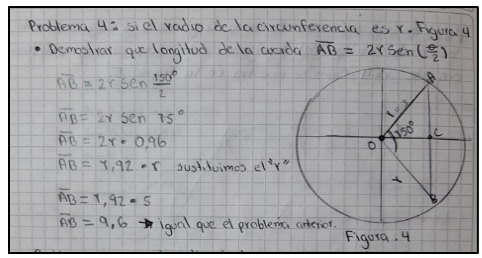


Figura 32. **Soluciones propuestas por los estudiantes LC y AU.**

Observaciones: El 60% de los estudiantes realiza la demostración de forma correcta, utiliza la gráfica y toma el triángulo rectángulo ΔOCB, observa que el segmento $\overline{AC}$ representa la mitad de la cuerda, por lo tanto el ángulo central θ se divide en dos ángulos iguales, aplica la razón trigonométrica seno para el ángulo $\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donde $\overline{BC} = r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y finalmente duplica la longitud del segmento $\overline{BC}$ obteniendo lo que se pedía que $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, como se observa en la solución propuesta por LC.

Los demás estudiantes no realizan la demostración, se evidencia que utilizan $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y sustituyen con los datos del problema 3 para verificar si se obtiene el mismo resultado del problema 3, como se observa en la solución propuesta por AU. (ver Figura 32).

Problema 5.

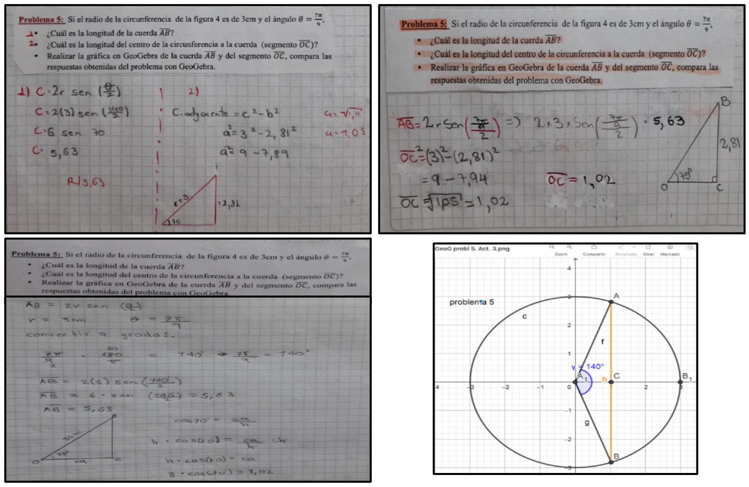


Figura 33. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP, AS y KP.**

Observaciones: El 90% los estudiantes resuelve el problema de forma correcta, veamos algunas soluciones particulares: para hallar la longitud de la cuerda: todos aplican la fórmula general $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, sin embargo la mayoría pasa el ángulo de radianes a grados, los demás trabajan el ángulo en radianes, proceso que no es necesario para resolver el problema. Para hallar la longitud del segmento $\overline{OC}$, algunos estudiantes aplicaron el teorema de Pitágoras y los demás aplicaron la razón trigonométrica coseno. Finalmente realizaron la gráfica en GeoGebra y verificaron que los resultados obtenidos con lápiz y papel eran correctos. (ver Figura 33).

Problema 6.

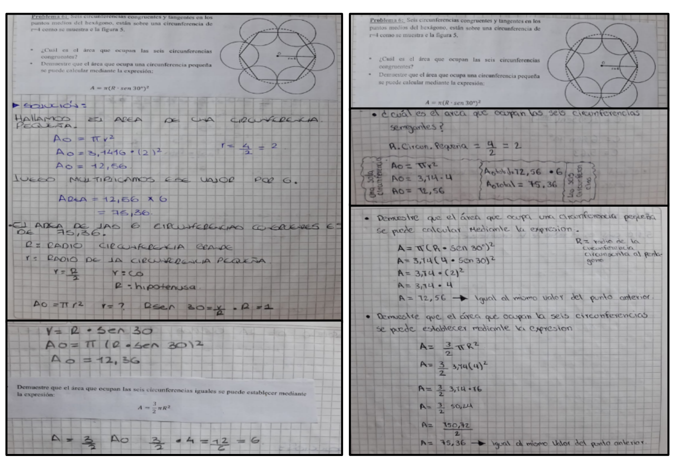


Figura 34. **Soluciones propuestas por los estudiantes AS y AU.**

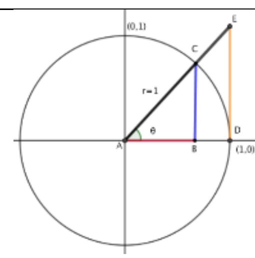
Observaciones: Todos los estudiantes hallan el área que ocupan las 6 circunferencias de forma correcta. A partir del radio de la circunferencia grande y el lado de hexágono establecen que el radio de la circunferencia pequeña es 2, hallan el área de la circunferencia pequeña y luego multiplican por 6.

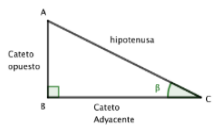
Para la segunda parte del problema el 40% de los estudiantes realiza la demostración de forma correcta, utiliza de la razón trigonométrica seno para el ángulo de 30º y obtiene la expresión $r = R.\operatorname{sen} 30$, luego sustituye el radio por esta expresión en el área del círculo pequeño obteniendo lo que se pedía que $A = \pi(R.\operatorname{sen} 30°)^2$. Otro 40% de los estudiantes no realiza la demostración, se evidencia que toma las ecuaciones sustituye el radio y el ángulo, realiza las operaciones y verifica que el resultados fuera igual que la primera parte del problema. Los demás estudiantes no realizan esta parte del problema porque no entendieron a qué se refería demostrar. (ver Figura 34).

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identificaron los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes después de la intervención docente cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 8. *Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA*

Recursos con los cuentan los estudiantes	Fortalezas presentadas en los estudiantes	Dificultades presentadas en los estudiantes
Líneas trigonométricas: Las líneas trigonométricas para el ángulo θ en posición normal, son los segmentos de recta sobre la circunferencia unitaria.	Todos los estudiantes • Reconocen que un ángulo θ $sen\ \theta = \overline{CB}$ $cos\ \theta = \overline{AB}$ $tan\ \theta = \overline{ED}$  • A partir de los recursos que ofrece la gráfica de las líneas trigonométricas construida en GeoGebra hallan el valor y signo del seno, coseno y tangente para cualquier ángulo. La mayoría de estudiantes	A algunos de los estudiantes • Se dificulta utilizar las líneas trigonométricas sobre las circunferencias unitarias para construir las gráficas de la función seno y coseno sobre papel milimetrado.

	• Utiliza las líneas trigonométricas para cualquier ángulo sobre la circunferencia unitaria para construir las gráficas de las funciones seno y coseno.	
Razones trigonométricas $sen\ \beta = \frac{co}{h}$ $cos\ \beta = \frac{co}{h}$ $tan\ \beta = \frac{co}{ca}$  	Todos los estudiantes • Aplican las razones trigonométricas para hallar el valor del $\sin\theta, \cos\theta$ y $\tan\theta$ cuando se conoce el radio y un punto de la circunferencia. • Aplica las razones trigonométricas para hallar la longitud de una cuerda cuando se conoce el ángulo central y el radio de la circunferencia. La mayoría de los estudiantes • Demuestra que para el ángulo θ el $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$. • Demuestra a partir de la razón trigonométrica seno que la longitud de una cuerda $\overline{AB}$ con radio r y ángulo central θ es $\overline{AB} = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.	A algunos estudiantes • Se les dificulta comprender la demostración que $sen\ \beta = \frac{co}{h}$ | $cos\ \beta = \frac{co}{h}$ Partiendo de las líneas trigonométricas sobre la circunferencia unitaria y el teorema de Tales. • Demostrar a partir de la razón trigonométrica seno que la longitud de una cuerda $\overline{AB}$ con radio r y ángulo central θ es $\overline{AB} = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Longitud de la cuerda: expresión general para hallar la longitud de la cuerda $\overline{AB} = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. r: radio de la circunferencia θ: ángulo central	Todos los estudiantes • Aplican la generalización de la cuerda $\overline{AB} = 2r\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ o razones trigonométrica para hallar la longitud de una cuerda. • Construyen cuerdas en GeoGebra cuando se conoce el radio y el ángulo central, con el propósito de verificar resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel. La mayoría de los estudiantes • Aplica la longitud de la cuerda y el área de la circunferencia para resolver problemas que implica realizar demostraciones.	A algunos estudiantes les cuesta • Resolver problemas donde implica aplicar la longitud de la cuerda o razones trigonométricas para realizar demostraciones. • Comprender que demostrar y verificar son procesos diferentes.
<u>**Función trigonométrica:**</u> $x \longrightarrow f(x) = sen(x)$ Es decir, la función que asocia a cada número real x el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. $x \longrightarrow f(x) = cos(x)$ Es decir, la función que asocia a cada número real x el coseno del ángulo cuya medida en radianes es x.	La mayoría de los estudiantes • Identifica las propiedades fundamentales de las funciones seno y coseno a partir de los recursos que ofrecen las gráficas construidas en papel milimetrado y en el GeoGebra, como: el dominio de la función seno y coseno, recorrido, valores máximos y mínimo, período, intervalos donde las funciones son positivas y negativas e intervalos donde las funciones son crecientes o decrecientes.	A la mayoría de los estudiantes se les dificulta • Identificar los intervalos donde una función crece o decrece a partir de los valores que toma la variable independiente y dependiente. • Comprender que cuando una función es creciente en un intervalo no implica que en ese intervalo la función sea positiva y viceversa.

4.3.5. Análisis de la actividad No.4 “De la trigonometría del círculo a la trigonometría del triángulo”

4.3.5.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

P1T1: Aplica el teorema de Pitágoras para hallar los lados de triángulos rectángulos.

P1T2: Aplica las razones trigonométricas para hallar el valor del seno y coseno.

P1T3: A partir de los valores de las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ en varios triángulos realiza conjeturas.

P2T1: Aplica el teorema de Pitágoras o la expresión $x^2 + y^2 = 1$, para hallar una de las dos coordenadas de un punto que pertenece a la circunferencia unitaria.

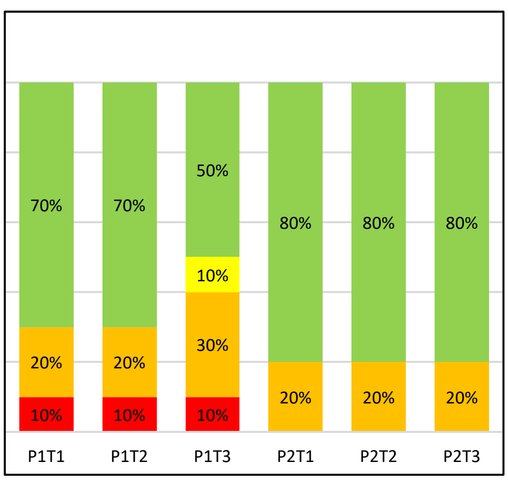
P2T2: Sobre la circunferencia unitaria traza y mide las líneas trigonométricas para hallar el valor del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$.

P2T3: Aplica las razones trigonométricas halla el valor del $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestos por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 9.)

Gráfica 9. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase motivacional.



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

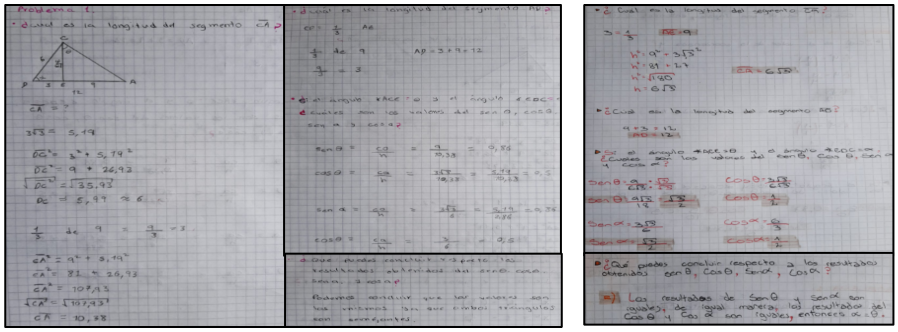


Figura 35. **Soluciones propuestas por los estudiantes KP y KE.**

Observaciones: El 70% de los estudiantes aplica de forma correcta el teorema de Pitágoras para hallar los lados de los triángulos rectángulos y las razones trigonométricas para hallar los valores del seno y coseno de los ángulos agudos. Se observa en las soluciones que algunos estudiantes les gusta trabajar con expresiones decimales, en cambio otros realizar las operaciones con números racionales e irracionales. Por otro lado, el 50% de los estudiantes realiza conjeturas a partir de los valores del seno y coseno de dos triángulos de diferente tamaño son iguales, como: los ángulos de los triángulos son iguales entonces los triángulos son semejante, entre otras. (ver Figura 35).

Problema 2.

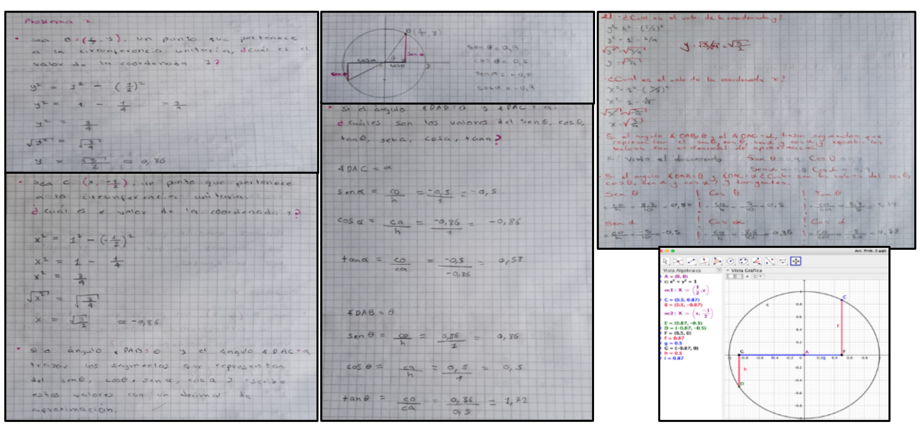


Figura 36. **Soluciones propuestas por los estudiantes KP y JP.**

Observaciones: El 80% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta. Se evidencia que aplica con propiedad el teorema de Pitágoras o la expresión $x^2 + y^2 = 1$ para hallar una de las dos coordenadas de cualquier punto que pertenece a la circunferencia unitaria. Traza y mide los segmentos sobre la gráfica que se les suministró en la actividad para hallar los valores del seno y coseno de dos ángulos en posición estándar. Otros estudiantes realizan la gráfica en GeoGebra y con la información que les brinda el programa obtienen los valores del seno y coseno. Finalmente a partir de las razones trigonométricas, toman como $co = y, ca = x$ y $h = r = 1$, calculan los valores del seno, coseno y tangente de los dos ángulos. (ver Figura 36).

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 9. *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
La mayoría de los estudiantes • **Aplica el teorema de Pitágoras** en resolución de problemas donde implica hallar la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo. • Utiliza la **expresión** $\boldsymbol{x^2 + y^2} = 1$, para hallar una de las dos coordenadas de un punto que pertenece a la circunferencia unitaria. • Traza y mide las **líneas trigonométricas** sobre la circunferencia unitaria con para estimar el valor del seno, coseno y tangente de cualquier ángulo en posición normal. • Aplica las **razones trigonométricas** para calcular el valor del seno, coseno y tangente de cualquier ángulo.	**Algunos estudiantes se les dificulta** • Realizar operaciones con números racionales e irracionales. • Realizar conjeturas a partir de los valores del seno, coseno y tangente obtenidos en dos triángulos. Ejemplo: conjeturar si los triángulos son congruentes o semejantes.

4.3.5.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: Aplica el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas de diferentes formas para resolver problemas sobre triángulos rectángulos.

P2T1: Aplica las razones trigonométricas o teorema de Pitágoras para hallar el lado de un cuadrado circunscrito a partir de datos de un cuadrado inscrito.

P2T2: Halla el área sombreada entre dos cuadrados, uno circunscrito y otro inscrito.

P2T3: Construye en GeoGebra la gráfica que representa un problema con medidas reales.

P3T1: Aplica las razones trigonométricas, triángulos rectángulos especiales o el teorema de Pitágoras para resolver problemas.

P4T1: Aplica las razones trigonométricas, triángulos rectángulos especiales o teorema de Pitágoras para hallar la altura de un triángulo.

P4T2: Aplica las razones trigonométricas para hallar el valor de seno y coseno de un ángulo agudo.

P4T3: Determina la medida de los ángulos notables a partir del valor de seno coseno.

P5T1: Plantea sistemas de ecuaciones con dos variables a partir de las razones trigonométricas para resolver problemas que involucran triángulos oblicuángulos.

P5T2: Aplica razones trigonométricas o el teorema de Pitágoras para resolver problemas que implican hallar el lado de un triángulo rectángulo.

P6T1. Aplica razones trigonométricas o la expresión general de longitud de la cuerda para hallar los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia.

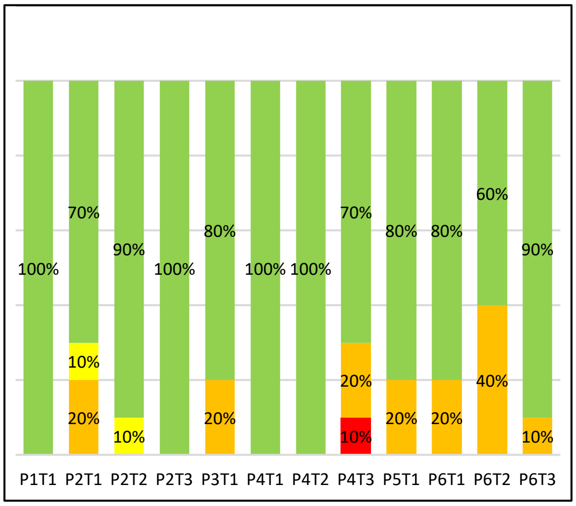
P6T2: Calcula el área de un triángulo inscrito en una circunferencia.

P6T3: Construye en GeoGebra triángulos inscritos en una circunferencia con medidas reales, para verificar resultados obtenidos con lápiz y papel.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 10.)

Gráfica 10. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de RRA



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

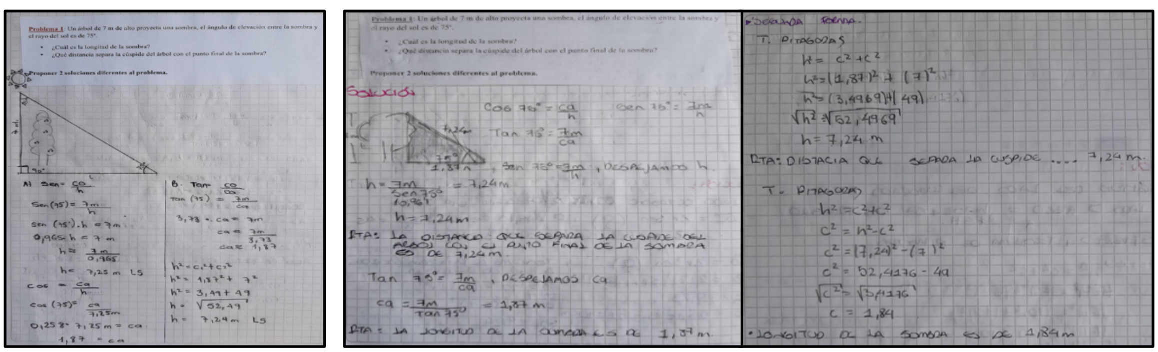


Figura 37. **Soluciones propuestas por los estudiantes LC y AS.**

Observaciones: Todos los estudiantes resuelven de forma correcta el problema. Lo primero que hacen es un bosquejo para representar el enunciado del problema. Se observa que aplican con propiedad y con criterio las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, y el teorema de Pitágoras de acuerdo con los datos que le suministra el problema. Se observa diversidad en los procesos que realizan los estudiantes. (ver Figura 37).

Problema 2.

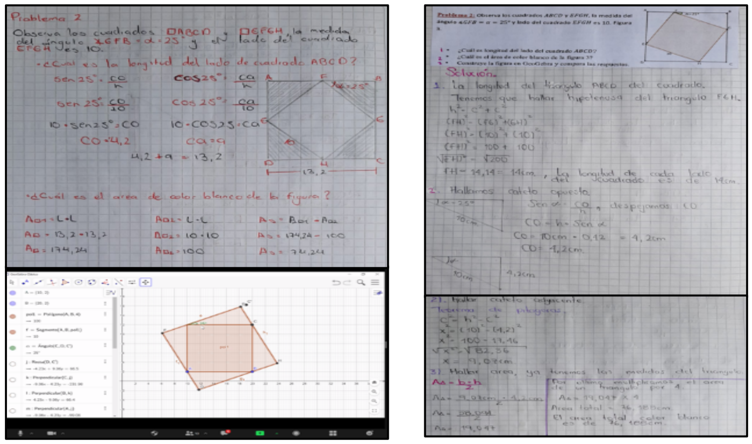


Figura 38. **Solución propuesta por el estudiante JP y SP.**

Observaciones: El 80% de los estudiantes halla de forma correcta la longitud del lado del cuadrado exterior $ABCD$. Aplica las razones trigonométricas para hallar los catetos del triángulo rectángulo que se forma entre los dos cuadrados $EFGH$ y $ABCD$, luego suma los dos catetos porque es equivalente al lado del cuadrado $ABCD$. Los demás resuelven el problema de forma incorrecta, porque hallan la diagonal del cuadrado $EFGH$ y afirman que esta longitud representa el lado del cuadrado $ABCD$. Cabe resaltar que los estudiantes no realizan conjeturas sobre la gráfica, donde les permite determinar que la longitud del lado del cuadrado $ABCD$ es menor que la diagonal del cuadrado $EFGH$.

Todos los estudiantes hallan de forma correcta el área que se forma entre los dos cuadrados. Algunos estudiantes calcularon el área de uno de los triángulos que se forma en las esquinas de la figura y luego multiplican por 4. Otros estudiantes hallan el área de los cuadrados $ABCD$ y $EFGH$ y luego restan.

Finalmente construyeron la gráfica de los dos cuadrados en GeoGebra con las medidas reales, para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel. (ver Figura 38).

Problema 3.

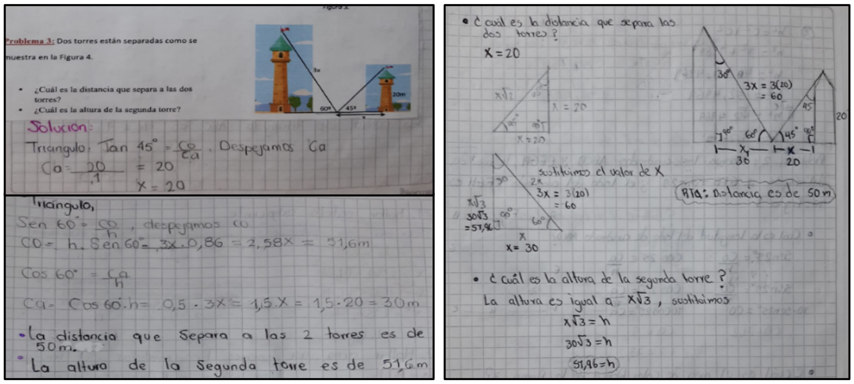


Figura 39. **Soluciones propuestas por los estudiantes SP y AU.**

Observaciones: El 80% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta. Aplica las razones trigonométricas y las propiedades de los triángulos rectángulos especiales. Algunos estudiantes hallan el valor de x, luego trabajan en función de x y finalmente para dar la respuesta de la distancia que separa las dos torres y la altura de la torre más alta sustituyen el valor de x. Otros aplican las razones trigonométricas y las propiedades de los triángulos rectángulos especiales para hallar la distancia que separa las dos torres y la altura de la torre más alta.

Para hallar los catetos del segundo triángulo aplican las propiedades del triángulo rectángulo especial con ángulos agudos de $30°$ y $60°$ porque conocen la hipotenusa. (ver Figura 39).

Problema 4.

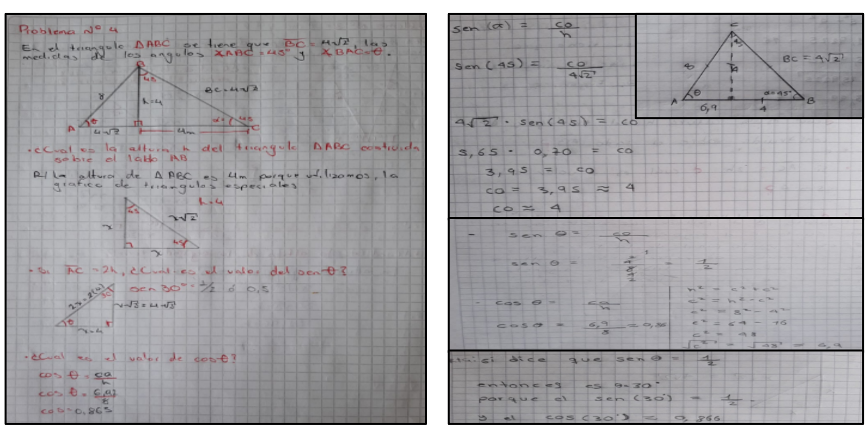


Figura 40. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y KP.**

Observaciones: Todos los estudiantes hallan la altura y los lados del triángulo ABC de forma correcta. Algunos estudiantes aplican razones trigonométricas para el ángulo de $45°$ y el teorema de Pitágoras como se observa en las soluciones propuestas AS y KP, otros estudiantes utilizan las propiedades de los triángulos rectángulos especiales, como se muestra en la solución propuesta por JP.

El 70% de los estudiantes halla de forma correcta la medida del ángulo θ. Se observa que a partir de los valores obtenidos en el $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ o el $\cos\theta \approx 0{,}86$ determina que la medida del ángulo $\theta = 30°$**.** Otros estudiantes consultaron cómo hallar la medida del ángulo usando la calculadora y la expresión $\sin^{-1}(0{,}5) = 30$. (ver Figura 40).

Problema 5.

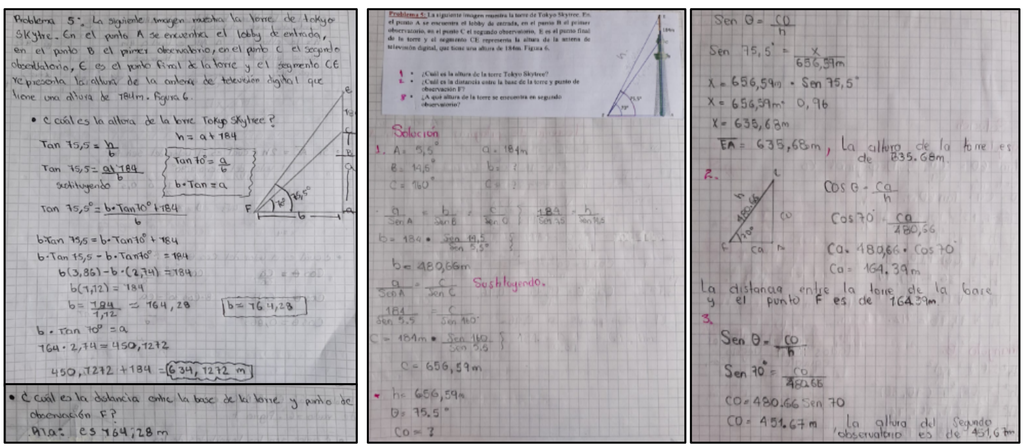


Figura 41. **Soluciones propuestas por los estudiantes AU y SP.**

Observaciones: El 80% los estudiantes resuelve el problema de forma correcta. La mayoría de los estudiantes plantea un sistema de dos ecuaciones utilizando la razón trigonométrica tangente para los triángulos rectángulos ΔFAC y ΔFAE, para la solución del sistema de ecuaciones algunos utilizan el método de sustitución y otros el método de igualación, como se evidencia en las soluciones propuesta por AS y AU. Otros estudiantes consultaron y aplicaron el teorema del seno para hallar la hipotenusa de los triángulos rectángulos ΔFAC y ΔFAE, las longitudes que pedía el problema las calcularon aplicando razones trigonométricas, como se evidencia en la solución de SP. (ver Figura 41).

Problema 6.

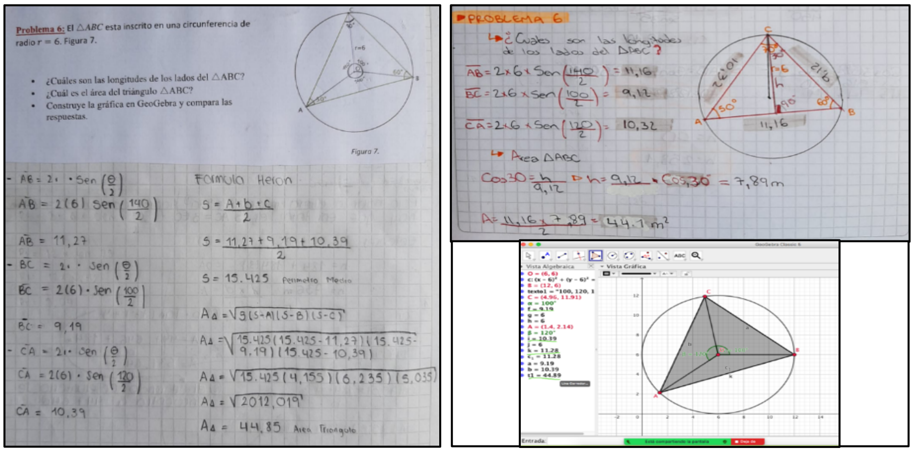


Figura 42. **Soluciones propuestas por los estudiantes LC y AS**

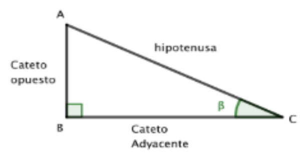
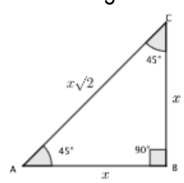
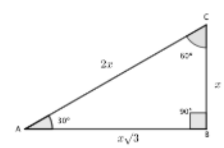
Observaciones: El 80% los estudiantes halla de forma correcta las longitudes de los tres lados del triángulo, cada lado representa una cuerda y aplican la expresión general $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$, para hallar el ángulo central θ duplica cada uno de los tres ángulos internos del triángulo que representa ángulos inscritos en la circunferencia.

El 60% de los estudiantes halla de forma correcta el área del triángulo ABC inscrito en la circunferencia, se observa que la mayoría aplica la expresión general $A = \frac{b \cdot h}{2}$, algunos hallan la altura del triángulo *ABC* a partir de uno de los tres lados del triángulo. Otros dividen el triángulo ABC en tres triángulos, hallan el área de cada uno y luego suman. Los demás hallan el área aplicando la fórmula de Herón, porque conocen los tres lados del triángulo. (ver Figura 42). Sin embargo, el 40% de los estudiantes halló el área de forma incorrecta porque confunde la altura del triángulo con la mediana y otros cometen errores en las operaciones.

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identificaron los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 10. *Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA*

Recursos con los cuentan los estudiantes	Fortalezas presentadas en los estudiantes	Dificultades presentadas en los estudiantes
Teorema de Pitágoras $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ h: hipotenusa c_1, c_2: catetos **Razones trigonométricas** $sen\ \beta = \frac{co}{h}$ $\quad cos\ \beta = \frac{co}{h}$ $tan\ \beta = \frac{co}{ca}$ 	Todos los estudiantes • Aplican las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver problemas que se pueden ilustrar a través de triángulos rectángulos. • Construyen gráficas en GeoGebra, con el propósito de verificar resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel. La mayoría de los estudiantes • Resuelve problemas donde se tiene que plantear y resolver ecuaciones lineales con dos variables utilizando las razones trigonométricas. • Aplicn las razones trigonométricas para hallar la altura de triángulos oblicuángulos.	A algunos estudiantes • Se les dificulta resolver ecuaciones con dos variables que involucran términos trigonométricos.
Razones trigonométricas para los ángulos agudos notables $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} = 45°$ y $60° = \frac{\pi}{3}$	Todos los estudiantes • Hallan los valores del seno, coseno y tangente para los ángulos de 30º, 45º y 60º a partir de las razones trigonométricas utilizando las longitudes de los siguientes triángulos rectángulos especiales.  • Resuelven problemas que se pueden ilustrar a través de triángulos rectángulos especiales. La mayoría de los estudiantes • Determina la medida de los ángulos notables a partir del valor del seno, coseno o tangente.	A algunos estudiantes • Se le dificulta entender que si se conoce el valor del seno y coseno se puede hallar el valor del ángulo utilizando la tabla de los valores del seno y coseno o las gráficas.
Longitud de la cuerda: expresión general para hallar la longitud de la cuerda $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. r: radio de la circunferencia θ: ángulo central	Todos los estudiantes • Aplican la expresión general de la cuerda $\overline{AB} = 2r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ o razones trigonométrica para hallar la longitud de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia. • Construyen cuerdas en GeoGebra cuando se conoce el radio y el ángulo central, con el propósito de verificar resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel. La mayoría de los estudiantes • Halla el área de triángulos inscritos en una circunferencia, utilizando la longitud de la cuerda y la altura del triángulo.	A algunos estudiantes les cuesta • Resolver problemas donde implica aplicar la longitud de la cuerda o razones trigonométricas para realizar demostraciones. • Confunden la mediana con la altura del triángulo.

4.3.6. Análisis de la actividad No.5 "Un paso de las funciones trigonométricas a la solución de triángulos oblicuángulos."

4.3.6.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

P1T1: Aplica las razones trigonométricas y/o el teorema de Pitágoras para resolver problemas que implican hallar la altura de triángulos oblicuángulos.

P1T2: Aplica las razones trigonométricas y/o para resolver problemas.

P2T1: Utiliza la circunferencia unitaria y las líneas trigonométricas para estimar el valor del seno y coseno de cualquier ángulo.

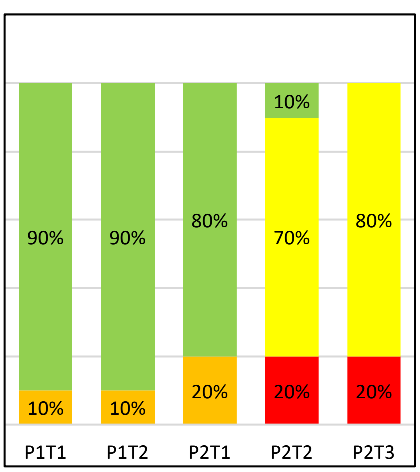
P2T2: Utiliza las grafías de las funciones seno y coseno para estimar el valor del seno y coseno de cualquier ángulo.

P2T3: Utiliza las grafías de las funciones seno y coseno para estimar la medida de un ángulo.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestos por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 11.)

Gráfica 11. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase motivacional



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

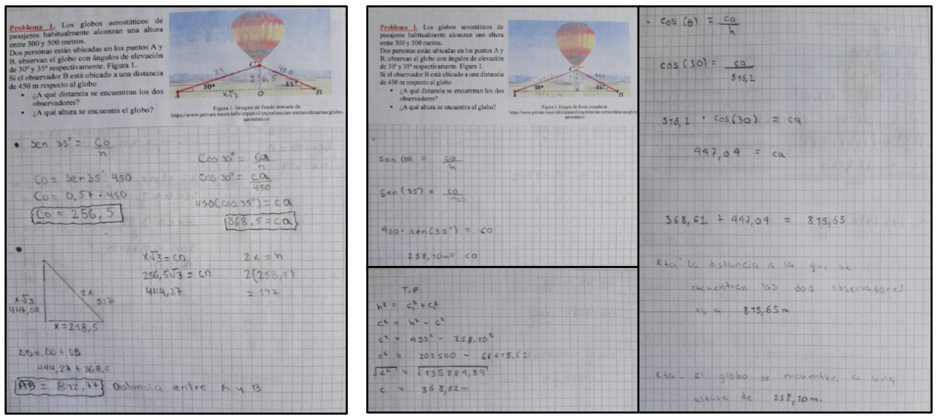


Figura 43. **Soluciones propuestas por los estudiantes AU y KP.**

Observaciones: El 90% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta. Se evidencia que cuando trazan la altura sobre la imagen que ilustra el problema, los estudiantes observan que se forman dos triángulos rectángulos. Se les preguntó a los estudiantes ¿cómo van a abordar el problema?, la mayoría respondió que al tener dos triángulos rectángulos se podía aplicar razones trigonométricas o teorema de Pitágoras.

Algunos estudiantes utilizan únicamente las razones trigonométricas para hallar la altura del globo y los dos catetos adyacentes a los dos ángulos dados para determinar la distancia que separa los dos observadores. Otros utilizan razones trigonométricas para hallar la altura del globo y el cateto adyacente al ángulo de 35º y triángulos especiales para hallar el cateto adyacente al ángulo de 30º, como se evidencia en la solución de AU. Los demás estudiantes utilizan razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, como se evidencia en la solución de KP. (ver Figura 43).

Problema 2.

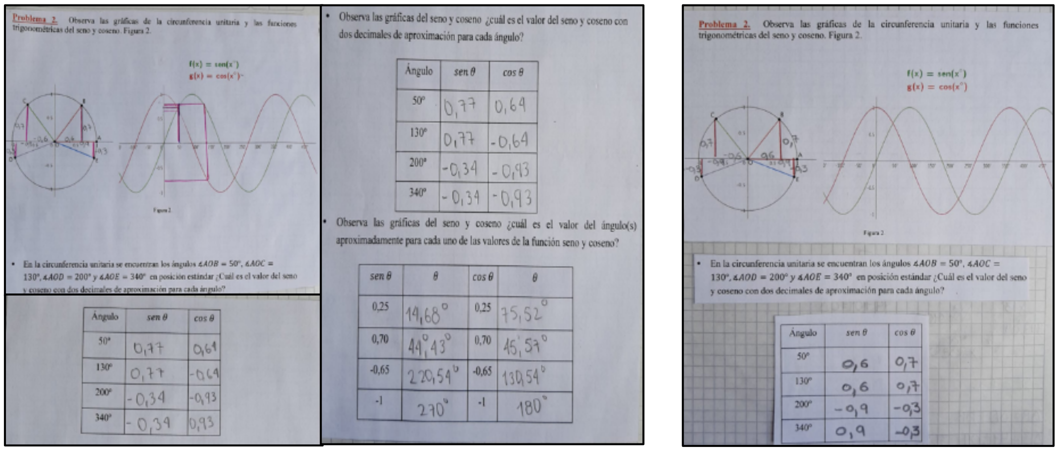


Figura 44. **Soluciones propuestas por los estudiantes SP y AS.**

Observaciones: Todos los estudiantes trazan las líneas trigonométricas sobre la circunferencia unitaria, el 80% escribe los valores del seno y coseno de forma correcta de los cuatro ángulos. Se les preguntó que cómo habían obtenido el valor con dos decimales de aproximación, la mayoría respondió que había obtenido una aproximación en la gráfica con un decimal y luego habían confrontado con la calculadora para escribir en la tabla con los decimales de aproximación. Los demás estudiantes trazan las líneas trigonométricas, cuando escriben los valores en la tabla no identifican con seguridad cuál representa el seno y cuál el coseno.

Cuando se le pide utilizar las gráficas de las funciones seno y coseno para hallar los valores del seno y coseno de cualquier ángulo o para hallar el ángulo a partir de los valores del seno y coseno, la mayoría de los estudiantes no utiliza la gráfica sino la calculadora, de igual forma consultaron cómo hallar el ángulo en la calculadora a partir de los valores del seno y coseno. (ver Figura 44).

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 11. *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
La mayoría de los estudiantes • **Aplica el teorema de Pitágoras** en la resolución de problemas donde implica hallar la longitud de los lados de un triángulo oblicuángulo a partir de la construcción auxiliar para convertirlo en triángulos rectángulos. • **Aplica las razones trigonométricas** en la resolución de problemas donde implica hallar la longitud de los lados de un triángulo oblicuángulo a partir de la construcción auxiliar para convertirlo en triángulos rectángulos. • Traza y mide las **líneas trigonométricas** sobre la circunferencia unitaria para estimar el valor del seno, coseno y de cualquier ángulo en posición normal. • Utiliza la calculadora para estimar el valor del seno y coseno del cualquier ángulo. • Utiliza la calculadora para estimar la media del ángulo cuando se conoce el valor del seno y coseno del ángulo	**La mayoría de los estudiantes** • Se les dificulta utilizar las gráficas de las funciones seno y coseno para estimar el valor del seno y coseno de cualquier ángulo. • Se les dificulta utilizar las gráficas de las funciones seno y coseno para estimar la medida del cualquier ángulo cuando se conoce el valor del seno y coseno. • No comprenden qué representan las expresiones $\sin^{-1}\theta, \cos^{-1}\theta$, que son utilizadas para estimar la medida de un ángulo.

4.3.6.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: Aplica la suma de ángulos internos de un triángulo en la resolución de problemas.

P1T2: Aplica el teorema del seno, teorema del coseno o razones trigonométricas para hallar los lados de un triángulo oblicuángulo.

P1T3: Halla el área de un triángulo oblicuángulo cuando se conoce sus lados.

P2T1: Aplica el teorema del seno y/o teorema del coseno para resolver el triángulo que se forma con los centros de las tres circunferencias tangentes.

P2T2: Halla el área del triángulo que se forma con los centros de las tres circunferencias tangentes.

P2T3: Construye en GeoGebra la gráfica que representa un problema con medidas reales, para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel.

P3T1: Aplica el teorema del seno, teorema del coseno y/o razones trigonométricas para resolver problemas que representan los lados de triángulos oblicuángulos.

P3T2: Aplica el teorema del seno, teorema del coseno y/o razones trigonométricas para resolver problemas que representan los ángulos internos de triángulos oblicuángulos.

P4T1: Aplica el teorema del seno y teorema del coseno para hallar los lados y diagonales de un trapecio.

P4T2: Aplica suma de ángulos internos de un triángulo, teorema del seno y teorema del coseno para hallar ángulos internos que se forman a trazar las diagonales en un trapecio escaleno.

P5T1: Aplica el teorema del seno, teorema del coseno o razones trigonométricas para resolver problemas que implican hallar los lados y la altura de un triángulo oblicuángulo.

P6T1: Aplica teorema de Pitágoras, razones trigonométricas o triángulos rectángulos especiales, para hallar el lado de un cuadrado circunscrito sobre otro cuadrado.

P6T2. Aplica la suma de los ángulos internos de un triángulo y ángulos sobre la circunferencia para resolver problemas de tipo geométrico.

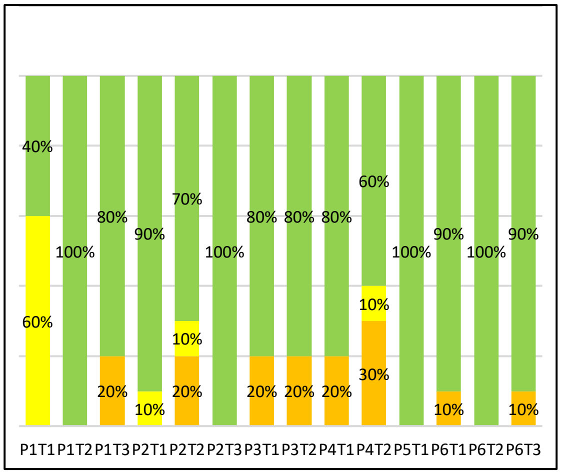
P6T3: Aplica el teorema del seno, teorema del coseno o razones trigonométricas para hallar el lado de un triángulo oblicuángulo que representa el lado de un cuadrado.

P6T4: Construye en GeoGebra la gráfica que representa un problema con medidas reales, para realizar conjeturas y verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes en esta fase, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 10.)

Gráfica 12. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de RRA



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

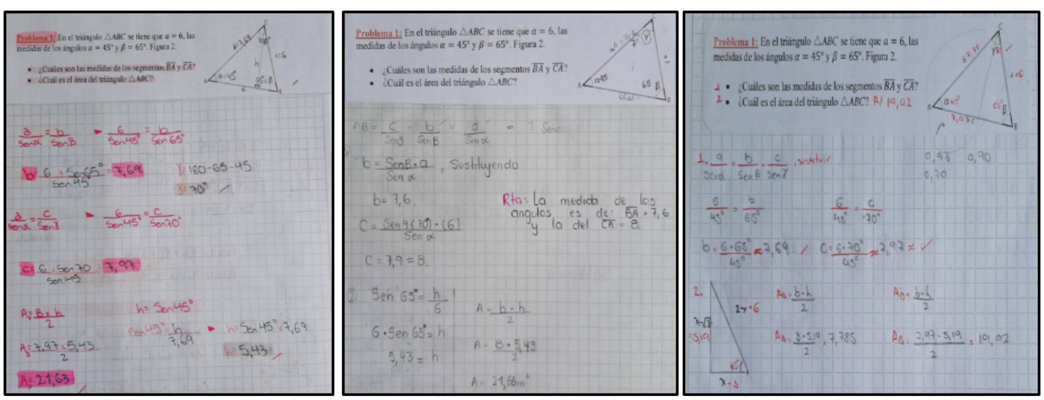


Figura 45. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE, SP y JP.**

Observaciones: Todos los estudiantes aplican la suma de ángulos internos de un triángulo ABC para hallar la medida del ángulo γ, aunque la mayoría no realiza las operaciones en el papel, sobre la gráfica escriben la medida de este ángulo. También identifican que se puede aplicar el teorema del seno para hallar la longitud de los lados b y c del triángulo ABC a partir de los datos suministrados en el problema.

El 80% de los estudiantes calcula de forma correcta el área del triángulo ABC, la mayoría traza la altura respecto al lado c, utiliza uno de los dos triángulos rectángulos que se forman para calcular la altura a partir de las razones trigonométricas y finalmente aplica la expresión general $A = \frac{b \cdot h}{2}$, como se evidencia en las soluciones de KE y SP. Otros estudiantes aplican la fórmula de Herón porque conocen los tres lados del triángulo. Los demás cometen errores en las operaciones o hallan de forma incorrecta la altura del triángulo, porque utilizaron el triángulo rectángulo con el ángulo agudo de 65º como un triángulo rectángulo especial, como se evidencia en la solución de JP. (ver Figura 45).

Problema 2.

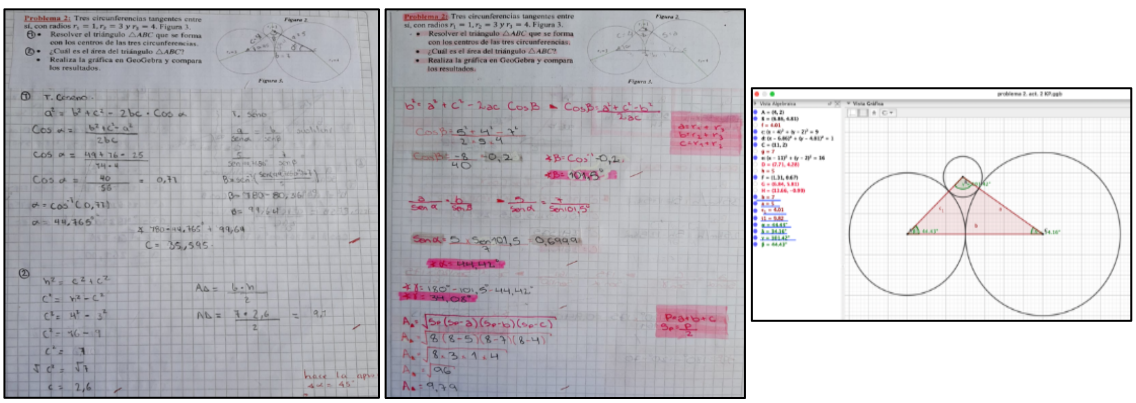


Figura 46. **Solución propuesta por el estudiante AS y AU.**

Observaciones: El 90% de los estudiantes resuelve el triángulo ABC de forma correcta. Todos construyen el triángulo con los centros de las circunferencias tangentes, hallan los lados del triángulo a partir de los radios de las circunferencias. Para hallar los ángulos internos del triángulo realizan conjeturas e identificaron que podían aplicar el teorema del coseno para hallar el primer ángulo interno del triángulo, para hallar el segundo ángulo algunos aplicaron teorema del coseno nuevamente y otros el teorema del seno y finalmente hallaron el tercer ángulo a partir de la suma de los ángulos internos del triángulo.

El 70% de los estudiantes calcula de forma correcta el área del triángulo ABC, la mayoría traza la altura del triángulo respecto al lado b, utiliza uno de los dos triángulos rectángulos que se forma para calcular la altura a partir de las razones trigonométricas o teorema de Pitágoras y finalmente aplica la expresión

$A = \frac{b \cdot h}{2}$, como se evidencia en las soluciones de AS y AU. Otros estudiantes aplican la fórmula de Herón porque conocen los tres lados del triángulo, como se evidencia en la solución de KE. Los demás cometieron errores para calcular la altura del triángulo. Construyeron la gráfica en GeoGebra con las medidas reales para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel (ver Figura 46).

Problema 3.

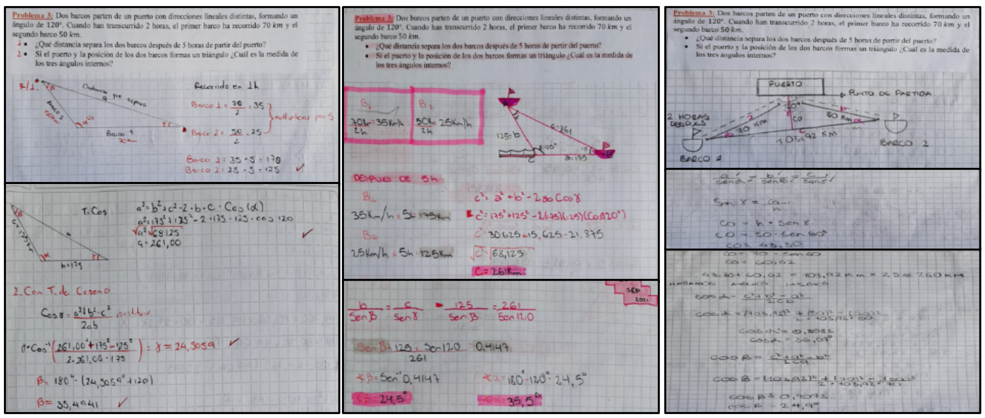


Figura 47. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP, KE y AS**

Observaciones: El 80% de los estudiantes calcula de forma correcta la distancia que separa los dos barcos después de 5 horas de partida. Realiza un bosquejo para representar el problema, identifica que se puede aplicar el teorema del coseno para calcular esta distancia. Para hallar los ángulos internos que se forman entre el puerto y los dos barcos se evidencia variedad en las formas para resolver el problema y propiedad en el manejo de los conceptos adquiridos, como: el teorema del seno, teorema del coseno y suma de los ángulos internos de un triángulo, como se evidencia en las soluciones de JP Y KE.

Otros plantean el teorema del seno y observan que con los datos suministrados en el problema no era posible utilizarlo, procedieron a dividir el triángulo en dos triángulos rectángulos y afirmaron que el ángulo de 120º se divida en dos ángulos de 60º, conjetura que no es correcta, como se evidencia en la solución de AS. (ver Figura 47).

Problema 4.

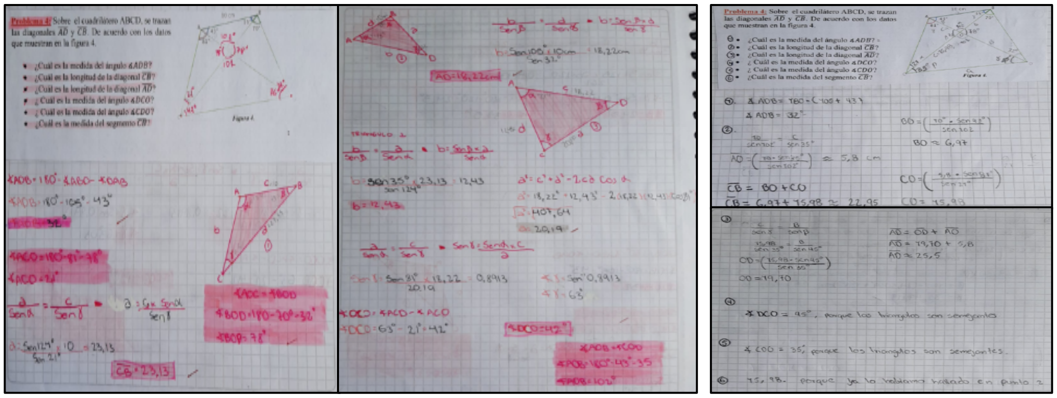


Figura 48. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y KP.**

Observaciones: Todos los estudiantes utilizan la gráfica para hallar los ángulos internos que se forman al trazar las diagonales del trapecio, aplican de forma correcta conceptos como suma de ángulos internos del triángulo, ángulos opuestos por el vértice y ángulos sobre una recta, la mayoría realiza las operaciones de forma mental y coloca los resultados sobre la gráfica, otros explican con detalle las operaciones y colocan los resultados sobre la gráfica.

El 80% de los estudiantes identifica con criterio el teorema que podían aplicar para hallar las diagonales del trapecio, se observa que utiliza los teoremas de diferentes formas para resolver el problema: algunos estudiantes toman el triángulo *ABC*, aplican el teorema del seno y hallan el segmento $\overline{CB}$ que representa una de las diagonales, como se observa en las soluciones propuestas KE y JM. Otros aplican el teorema del seno para hallar los segmentos $\overline{CO}$ y $\overline{OB}$ y finalmente los suman para obtener el segmento $\overline{CB}$, como se observa en las soluciones propuestas AU. De igual forma se evidencia procesos similares para hallar la diagonal $\overline{AD}$. (ver Figura 48).

Problema 5.

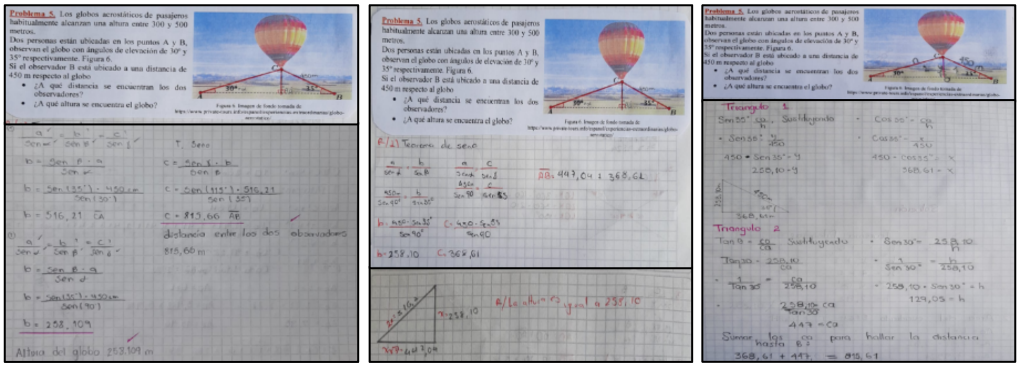


Figura 49. **Soluciones propuestas por los estudiantes LC, JP y SP.**

Observaciones: Todos los estudiantes resuelven el problema de forma correcta. Utilizan con criterio las razones trigonométricas, teorema de Pitágoras, teorema del seno y teorema del coseno para resolver el problema.

Veamos algunas soluciones: los estudiantes utilizan la suma de ángulos internos del triángulo ABC para hallar el tercer ángulo del triángulo, luego aplican teorema del seno para hallar la distancia que separa a los dos observadores y para hallar la altura a la que se encuentra en globo. Otros trazan la altura sobre la gráfica para dividir el triángulo oblicuángulo ABC en dos triángulos rectángulos, aplican el teorema del seno sobre cada triángulo rectángulo para hallar los dos segmentos que se encuentran en la base del triángulo y finalmente suman estos segmentos para determinar la distancia que separa a los dos observadores. Para hallar la altura a la cual se encuentra el globo toman el triángulo rectángulo que posee el ángulo agudo de 30º y aplican triángulos rectángulos especiales.

Los demás estudiantes trazaron la altura sobre la gráfica, dividieron el triángulo ABC en dos triángulos rectángulos, aplicaron razones trigonométricas para hallar la distancia que separa los dos observadores y la altura a la cual se encuentra el globo. (ver Figura 49).

Problema 6.

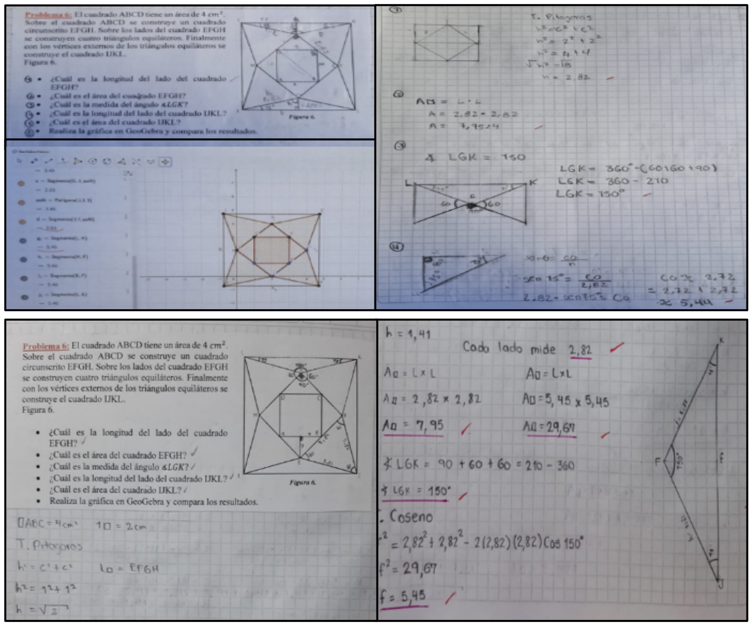


Figura 50. **Soluciones propuestas por los estudiantes AU y LC.**

Observaciones: El 90% de los estudiantes resuelve el problema de forma correcta. Utiliza con propiedad los conceptos y teoremas para resolver problemas que involucran triángulos.

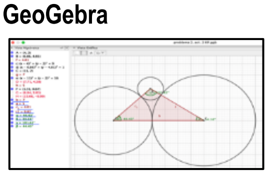
Algunos estudiantes hallan el lado del cuadrado $ABCD$ a partir del área, utilizan construcciones auxiliares de triángulos rectángulos con los cuadrados $ABCD$ y $EFGH$, luego aplican el teorema de Pitágoras o razones trigonométricas para hallar el lado del cuadrado $EFGH$. Para hallar la medida el ángulo LGK, utilizan las propiedades de los ángulos del cuadrado, el triángulo equilátero y el ángulo de 360º. Para calcular el lado del cuadrado IJKL, algunos estudiantes dividen el triángulo oblicuángulo LGK en dos triángulos rectángulos congruentes, utilizan razones trigonométricas para hallar un cateto que representa la mitad del lado del cuadrado. Otros aplicaron el teorema del coseno sobre el triángulo LGK, porque conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. (ver Figura 50).

Los estudiantes que resolvieron el problema de forma incorrecta, cometieron en siguiente el error: cuando hallaron el lado del cuadrado ABCD, dividieron el área entre 4, por lo tanto, confundieron área con perímetro del cuadrado.

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identificaron los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 12. *Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA*

Recursos con los cuentan los estudiantes	Fortalezas presentadas en los estudiantes	Dificultades presentadas en los estudiantes
Teorema de Pitágoras $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ h: hipotenusa c_1, c_2: catetos **Razones trigonométricas** $sen\ \beta = \frac{co}{h}$ $\quad cos\ \beta = \frac{co}{h}$ $tan\ \beta = \frac{co}{ca}$	La mayoría de los estudiantes • Aplica las razones trigonométricas y/o el teorema de Pitágoras para resolver problemas que se pueden ilustrar a través de triángulos rectángulos. • Aplica las razones trigonométricas y/o el teorema de Pitágoras para resolver problemas que se pueden ilustrar a través de triángulos oblicuángulos.	Algunos estudiantes • En ocasiones confunden la mediana del triángulo con la altura, cuando convierten un triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos.
Teorema del seno Para todo triángulo ABC, se cumple que $\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}$ **Teorema del coseno** Para todo triángulo ABC, se cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	Todos los estudiantes • Realizan una gráfica para representar el enunciado del problema, cuando no se le suministra. • Realizan construcciones auxiliares o colocar datos sobre las gráficas, que les permite hacer conjeturas y proponer soluciones. La mayoría de los estudiantes • Aplica de forma correcta y con propiedad los teoremas seno y coseno para resolver problemas que involucran triángulos oblicuángulos o rectángulos. • Aplica de forma correcta y con propiedad los teoremas seno y coseno para resolver problemas que involucran los ángulos internos de triángulos oblicuángulos o rectángulos. • Reconoce que para todos ángulos comprendido entre 0º y 180º el valor del seno oscila en 0 y 1. • Reconocn que para todos ángulos comprendido entre 0º y 90º el valor del coseno oscila en 0 y 1, para ángulos comprendidos entre 90º y 180º el valor del coseno oscila entre -1 y 0.	Algunos estudiantes • Se les dificulta identificar con facilidad los teoremas que se pueden aplicar para resolver problemas que involucran triángulos a partir de los datos suministrados en el problema.
Construcciones en GeoGebra 	Todos los estudiantes • Construyen en GeoGebra las gráficas que representan el enunciado del problema, con el propósito de realizar conjeturas y verificar los resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel.	Algunos estudiantes • No tienen en cuenta todas las herramientas que les brinda el programa GeoGebra para realizar conjeturas y determinan la veracidad de los resultados obtenidos con lápiz y papel.

4.3.7. Análisis de la actividad No.6 “La importancia de la trigonometría en la física.”

4.3.6.1. Resultados de la fase motivacional

1. Creación de códigos

P1T1: Aplica la expresión general de velocidad $v = x/t$ para hallar el espacio que recorre un cuerpo en movimiento circular uniforma (MCU).

P1T2: Identifica el período de un cuerpo en MCU y lo utiliza para hallar el ángulo de barrido del cuerpo en determinado tiempo.

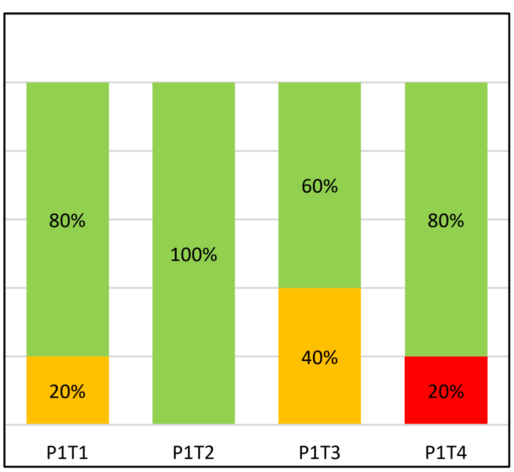
P1T3: Aplica las razones trigonométricas, triángulos especiales y/o teorema de Pitágoras para hallar las coordenadas (x, y) de posición de un cuerpo en MCU en determinado tiempo.

P1T4: Identifica el período de un cuerpo en MCU y lo utiliza para hallar tiempo que gasta en recorrer determinado ángulo.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestos por los estudiantes en la fase motivacional, los resultados se presentan a través de una gráfica donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 11

Gráfica 13. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase motivacional



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase motivacional

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

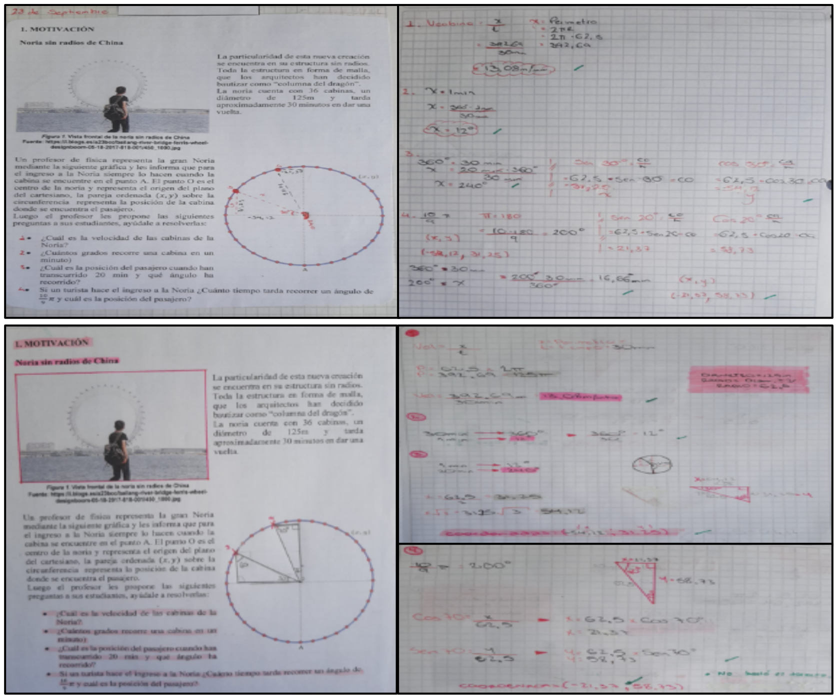


Figura 51. **Soluciones propuestas por los estudiantes JP y KE.**

Observaciones: Todos estudiantes conocen la expresión general velocidad $v = x/t$, el 80% de los estudiantes halla de forma correcta el perímetro de la circunferencia que representa el espacio recorrido por una cabina en 30 minutos y sustituyer en la expresión general, obteniendo la velocidad con la que se desplazan las cabinas de la Noria. Los demás cometieron errores cuando calcularon el perímetro de la Noria, confundieron el radio con el diámetro.

Todos los estudiantes calculan de forma correcta el ángulo de barrido de una cabina para un determinado tiempo, aplican regla de tres directa o el ángulo de barrido en un minuto. Sin embargo, el 60% de los estudiantes halla de forma correcta la posición de la cabina cuando ha transcurrido determinado tiempo, veamos algunos procesos: hallaron el ángulo de barrido en determinado tiempo, luego ubicaron el punto final del ángulo de barrido de la cabina, construyeron un triángulo rectángulo y finalmente aplicaron razones trigonométricas o triángulos rectángulos especiales. Los estudiantes que hallaron de forma incorrecta la posición de la cabina, tomaron como componente rectangular x el radio de la noria, los demás estudiantes confundieron el diámetro con el radio. (ver Figura 51).

4. Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos, se identificaron los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.

Tabla 13. *Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos con los que no cuentan los estudiantes o presentan dificultades.
La mayoría de los estudiantes • Define **movimiento circular uniforme** y conoce la expresión general de velocidad $v = x/t$ que se utiliza para hallar la velocidad de un cuerpo, el espacio recorrido o el tiempo empleado. • Identifica el período de un cuerpo en MCU y lo utiliza para hallar el ángulo de barrido del cuerpo en determinado tiempo y el tiempo que gasta un cuerpo en recorrer un ángulo. • Aplica las razones trigonométricas, triángulos especiales y/o teorema de Pitágoras para hallar las coordenadas (x, y) de la posición de un cuerpo en MCU en determinado instante de tiempo.	**A algunos estudiantes** • Se les dificulta identificar con claridad los datos que le proporciona el problema y con frecuencia cometen errores al confundir el radio con el diámetro de la circunferencia, las coordenadas (x, y) con la hipotenusa.

4.3.7.2. Análisis de los resultados de la fase de razonamiento repetido autónomo

1. Creación de códigos para la fase de razonamiento repetido autónomo

P1T1: En una función de la forma $g(x) = asen(bx - c) + d$ o $g(x) = acos(bx - c) + d$, el estudiante determina la amplitud, el período y el desfase de la función.

P1T2: En una función de la forma $g(x) = acos(bx - c) + d$, el estudiante describe las variaciones que se realizaron a partir de las funciones elementales $f(x) = \cos x$.

P1T3: Construye gráficas de las funciones $g(x) = acos(bx - c) + d$ en GeoGebra para verificar las variaciones presentadas en las funciones con los resultados obtenidos en lápiz y papel.

P2T1: En una función de la forma $g(x) = \ asen(\ bx - c) + d$, el estudiante determina la amplitud, el período y el desfase de la función.

P2T2: En una función de la forma $g(x) = \ asen(\ bx - c) + d$, el estudiante describe las variaciones que se realizaron a partir de las funciones elementales $f(x) = \operatorname{sen} x$.

P2T3: Construye gráficas de las funciones $g(x) = \ asen(\ bx - c) + d$ en GeoGebra para verificar las variaciones presentadas en las funciones con los resultados obtenidos en lápiz y papel

P3T1: Aplica las funciones trigonométricas para escribir ecuaciones de la forma $x(t) = Rcos(wt + \varphi)$ y $y(t) = Rsen(wt + \varphi)$ que determinan las coordenadas de un cuerpo MCU.

P3T2: Utiliza las ecuaciones $x(t) = Rcos(wt + \varphi)$ y $y(t) = Rsen(wt + \varphi)$ para determinar la posición de un cuerpo en MCU en determinado tiempo.

P2T3: Construye gráficas de las ecuaciones $x(t) = Rcos(wt + \varphi)$ y $y(t) = Rsen(wt + \varphi)$ en GeoGebra para estimar la posición de un cuerpo en MCU en determinado tiempo.

P4T1: A partir de la información que le proporciona la gráfica de una función sinusoidal, el estudiante determina la amplitud, el período y el desfase de la función.

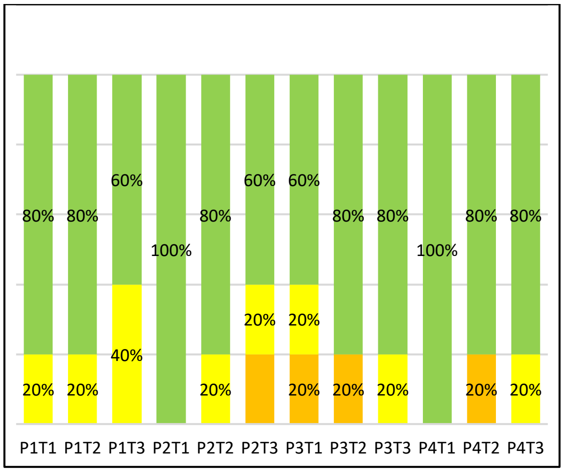
P4T2: A partir de la información que le proporciona la gráfica de una función sinusoidal, el estudiante encuentra una función de la forma $g(x) = \ asen(\ bx - c) + d,$ que modela dicha gráfica.

P4T3: Construye gráficas de las funciones $g(x) = \ asen(\ bx - c) + d$ en GeoGebra.para verificar las variaciones presentadas en las funciones con los resultados obtenidos con lápiz y papel.

2. Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de observar la resolución de los problemas propuestas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo, los resultados se presentan a través de una gráfica y una tabla donde se muestra los niveles de desempeño del grupo en cada uno de los aprendizajes. (ver Gráfica 14.)

Gráfica 14. Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes en la fase de RRA



Niveles	Indicadores de desempeño
1	El estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por percepción visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta pero - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta, pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

3. Observaciones sobre las soluciones presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

A continuación se presenta algunas soluciones representativas propuestas por los estudiantes, se analizan sus respuestas y se exponen observaciones.

Problema 1.

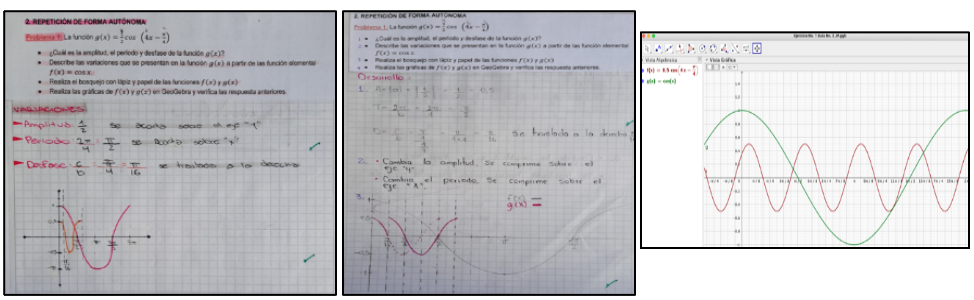


Figura 52. **Soluciones propuestas por los estudiantes KE y SP.**

Observaciones: En la función $g(x) = \frac{1}{2}cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$, todos los estudiantes determinan la amplitud, el período y el desfase de la función, luego describen las variaciones que se presentan en la función $g(x)$ respecto a la función elemental $f(x) = cos\ x$, sin embargo en el momento de realizar el bosquejo de la gráfica con lápiz y papel el 60% lo hace de forma correcta, los demás realizaron el bosquejo correctamente respecto a su amplitud y período pero no tuvieron en cuenta el desfase, es decir no trasladaron la gráfica hacia la derecha $\frac{\pi}{16}$. (ver Figura 52).

Problema 2.

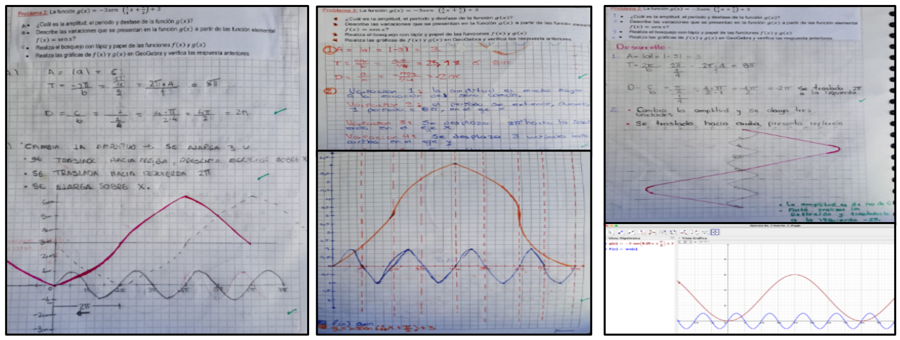


Figura 53. **Soluciones propuestas por los estudiantes AS, JM y SP.**

Observaciones: En la función $g(x) = -3sen\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$, el 80% de los estudiantes describe las cinco variaciones que se presentan en la función $g(x)$ respecto a la función elemental $f(x) = sen\ x$. Los demás estudiantes les faltó describir variaciones como: la reflexión de la función sobre el eje x y la traslación de 2π sobre el eje x. Cuando realizaron el bosquejo de la gráfica con lápiz y papel el 70% lo hizo de forma correcta. Los demás realizaron el bosquejo de forma incorrecta, porque solo tuvieron en cuenta las variaciones que describieron. Cuando realizaron la gráfica en GeoGebra algunos estudiantes se limitaron a observar únicamente si el período y la amplitud coincidían con el bosquejo que realizaron con lápiz y papel, pero no analizaron las variaciones como: reflexión y desfase (ver Figura 53).

Problema 3.

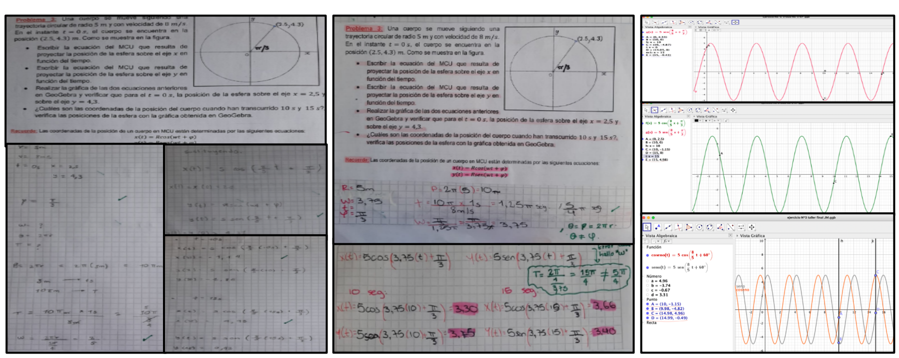


Figura 54. **Soluciones propuestas por los estudiantes SP, KP y KE.**

Observaciones: El 80% de los estudiantes resuelve de forma correcta el problema, calcula el período (T) y la velocidad angular (w), identifica el radio (R) y el ángulo cuando el cuerpo está en reposo (φ), sustituye y encontra las ecuaciones que representan las coordenadas del cuerpo en determinado instante de tiempo $[x(t), y(t)]$.

$$x(t) = 5cos\left(\frac{8}{5}t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad y(t) = 5sen\left(\frac{8}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Calculan las coordenadas cuando el cuerpo está en reposo $(t = 0s)$, y observan que eran iguales a los datos del enunciado del problema. Para hallar las coordenadas de la posición del cuerpo en $10s$ y $15s$, sustituyeron en las dos ecuaciones. Luego realizaron las gráficas en GeoGebra y verificaron que las coordenadas de la posición del cuerpo fueran iguales con los resultados obtenidos con lápiz y papel. Los demás estudiantes asumen que ángulo $\theta = \varphi$, esta afirmación no les permitió calcular de forma correcta la velocidad angular (w) y determinar las ecuaciones que modelan las coordenadas de la posición del cuerpo. Realizaron las gráficas en GeoGebra y observaron que las coordenadas cuando el cuerpo está en reposo eran correctas, pero no observaron que el período de la función no correspondía. (ver Figura 54).

Problema 4.

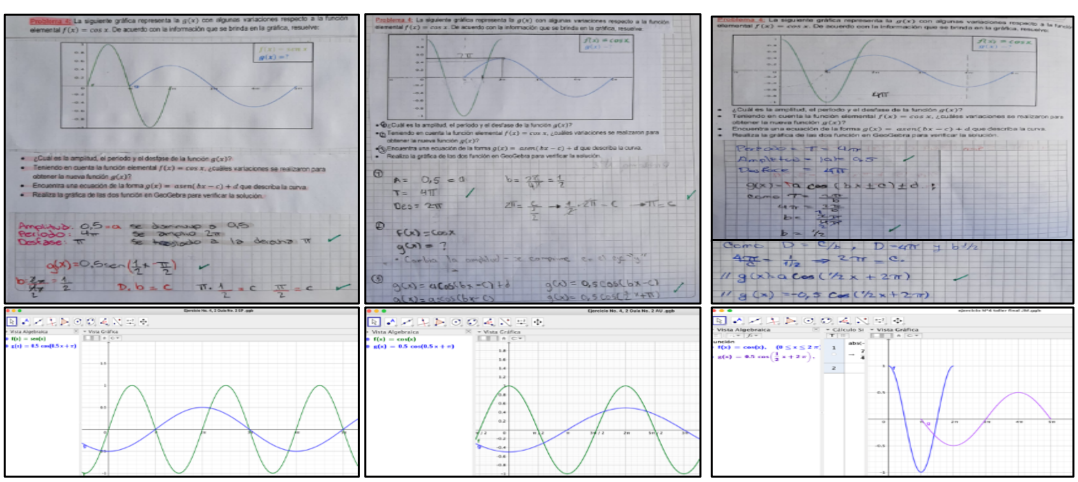


Figura 55. **Soluciones propuestas por los estudiantes AS, AU Y JM.**

Observaciones: Todos los estudiantes observan la gráfica de una función $g(x) = a\sin(bx - c) + d$ ó $g(x) = a\cos(bx - c) + d$ y describen las variaciones que presentan las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $f(x) = \cos x$ para obtener dicha función.

El 80% de los estudiantes obtiene funciones diferentes que modelan la curva de acuerdo con la forma de visualizar el desfase en la gráfica $g(x)$, como: $g(x) = 0{,}5\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = 0{,}5\cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$ y $g(x) = -0{,}5\cos\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right)$, como se observa en las soluciones propuestas por KE, SP, AU y JM. (ver Figura 55).

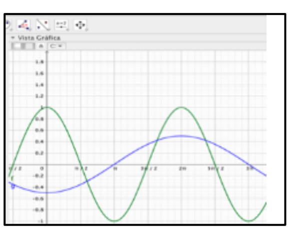
Los demás describen correctamente el desfase y escriben que la función se desplazaba π unidades hacia la derecha, hallan la constante c y sustituyen obteniendo la función $g(x) = 0.5\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + d$, se observa que no tienen en cuenta el signo de la constante c. Realizaron la gráfica en GeoGebra y acomodaron el signo de la función $g(x) = -0.5\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, para obtener la gráfica que se había suministrado en el problema.

4. Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo.

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identificaron los recursos, fortalezas y dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de forma autónoma.

Tabla 14. *Recursos, fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes en la fase de RRA*

Recursos con los cuentan los estudiantes	Fortalezas presentadas en los estudiantes	Dificultades presentadas en los estudiantes
Características fundamentales de las funciones seno y coseno: Observa la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$ $f(x) = cos\ x$	Todos los estudiantes • Identifican las propiedades fundamentales de las funciones seno y coseno, como son: Amplitud, período, puntos máximo, punto mínimo, dominio: $\mathbb{R}$ Rango o recorrido: $[-1, 1]$ Intervalos donde una función es positiva y negativa.	A algunos estudiantes • Se les dificulta identificar los intervalos donde la función es creciente o decreciente, porque los asocian con los intervalos donde la función donde la función es positiva o negativa.

Funciones sinusoidales: para las funciones trigonométricas de la forma: $g(x) = asen(bx - c) + d$ $g(x) = acos(bx - c) + d$ • Amplitud: $\mathrm{A} = \lvert \mathrm{a} \rvert$ • Período: T=$\frac{2\pi}{\mathrm{b}}$ • Desplazamiento sobre el eje horizontal denominado desfase: $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$ • Traslación sobre el eje vertical: d unidades.	Todos los estudiantes En funciones sinusoidales de la forma $g(x) = asen(bx - c) + d$ $g(x) = acos(bx - c) + d$ • Determinan la amplitud, el período y el desfase de la función. • Describen las variaciones que se realizan sobre las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $f(x) = \cos x$ para obtener las funciones sinusoidales $g(x)$. A partir de la información que le proporciona la gráfica de una función sinusoidal, el estudiante determina la amplitud, el período, el desfase y encuentra una función de la forma $g(x) = asen(bx - c) + d$ ó $g(x) = acos(bx - c) + d$ que modela dicha gráfica.	A algunos estudiantes • Se les dificulta encontrar una función de la forma $g(x) = asen(bx - c) + d$ ó $g(x) = acos(bx - c) + d$, a partir de la información que le proporciona la gráfica de una función sinusoidal.
Aplicación de las funciones sinusoidales en el MCU: Funciones sinusoidales que determinan las coordenadas de un cuerpo MCU cuando se proyecta la posición sobre el eje x y sobre el eje y en función del tiempo. $x(t) = Rcos(wt + \varphi)$ y $y(t) = Rsen(wt + \varphi)$	Todos los estudiantes • Identifican las propiedades fundamentales de las funciones sinusoidales en el MCU: Radio : R (radio de la trayectoria circular) Período: T (tiempo que gasta en dar una vuelta) θ: $2\pi R$ (perímetro de la trayectoria circular) Velocidad angular: $w = \frac{\theta}{T}$ t: tiempo φ: ángulo donde inicia el cuerpo el MCU. $x(t)$: posición del cuerpo respecto al eje x. $y(t)$: posición del cuerpo respecto al eje y. La mayoría de los estudiantes • Aplica las funciones sinusoidales para modelar las coordenadas de un cuerpo MCU. • Utiliza las ecuaciones $x(t) = Rcos(wt + \varphi)$ y $y(t) = Rsen(wt + \varphi)$ para determinar la posición de un cuerpo en MCU.	Algunos estudiantes • Confunden el ángulo θ con el ángulo φ, por lo tanto no les permite escribir de forma correcta las ecuaciones que determinan las coordenadas de la posición de un cuerpo en MCU en función del tiempo.
Construcción de gráficas de funciones sinusoidales en GeoGebra 	Todos los estudiantes Construyen en GeoGebra gráficas de funciones sinusoidales que, con el propósito de • Realizar conjeturas sobre las variaciones que se presentan a partir de las funciones elementales $f(x) = sen\ x$ y $f(x) = cos\ x$. • Utilizan las herramientas del programa para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel. Construye gráficas de las ecuaciones $x(t) = Rcos(wt + \varphi)$ y $y(t) = Rsen(wt + \varphi)$ en GeoGebra para estimar la posición de un cuerpo en MCU o para verificar resultados obtenidos con lápiz y papel.	Algunos estudiantes • Construyen en GeoGebra gráficas de funciones sinusoidales que, pero se les dificulta realizar conjeturas sobre todas las variaciones presentadas para verificar los resultados obtenidos de cálculos realizados con lápiz y papel.

CONCLUSIONES

En este aparte se exponen las conclusiones de la investigación. Dentro de los objetivos específicos se estableció: describir los procesos que siguen los estudiantes en el momento que modelan situaciones y realizan procesos de abstracción y de igual forma, cuando resuelven problemas de trigonometría dentro del marco del diseño instruccional presentado.

Los resultados de esta investigación permiten avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico manifestado por los estudiantes de grado décimo de educación media, generando un aporte teórico a partir del análisis los resultados en la fase motivacional, la intervención del docente y en la fase de razonamiento repetido autónomo, como se expuso en el capítulo 4.

1. Elementos descriptivos de la teoría

1.1. Características iniciales de los estudiantes

Los estudiantes cuando ingresaron a grado décimo de educación media presentaron la prueba de entrada sobre conceptos fundamentales de geometría, se realizó el análisis de los resultados encontrando las siguientes tendencias en sus formas de pensar cuando resuelven los problemas.

Leen los problemas, observan las gráficas y proponen la solución donde el elemento o criterio principal es la intuición o la impresión visual, en la mayoría de las soluciones propuestas no aplican los conceptos fundamentales de la geometría. Utilizando expresiones como:

- “Por observación se puede decir $\measuredangle\delta$ es proporcional al $\measuredangle\alpha$, es decir $\measuredangle\delta = \measuredangle\alpha$”.
- “Para el $\measuredangle\delta$ se usa la misma medida $\measuredangle\alpha$”.
- “El $\measuredangle\delta \rightarrow \measuredangle\alpha$”, “por observación se puede decir $\measuredangle\beta = 2\measuredangle\alpha$”, “el $\measuredangle\beta \rightarrow 2\measuredangle\alpha$”.
- “Se halla $\overline{FG}$ teniendo en cuenta que el valor debe mayor $\overline{EH}$”, (la operación que realizó para hallar dicho segmento, corresponde a una regla de tres).

Se encontró que la mayoría de los estudiantes no recuerda los conceptos fundamentales sobre ángulos, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, criterios de semejanza y congruencia entre dos triángulos, entre otros, por lo tanto, no pueden explicar o justificar la solución de los problemas. Además, presentan dificultad con operaciones básicas de tipo aritmético y algebraico, que son necesarias para la resolución de los problemas propuestos en las actividades, lo que conlleva al estudiante a resolver los problemas por impresión visual o realizar operaciones de acuerdo con lo que observan en la gráfica.

Por otro lado, el lenguaje y notación que utilizan no es adecuado para explicar la solución de los problemas, unas muestras de estas expresiones son:

- "El $\measuredangle\beta \rightarrow 2\measuredangle\alpha$", el estudiante utiliza la flecha para indicar que es *"igual*".
- "El estudiante observa y afirma que $\measuredangle\delta$ es proporcional al $\measuredangle\alpha$, dando a entender que $\measuredangle\delta = \measuredangle\alpha$". En este caso utilizan la palabra "*proporcional"* para indicar que es "*igual".*

De lo anterior, se puede inferir que los estudiantes presentan conocimientos incorrectos e insuficientes en cuanto a conceptos fundamentales de geometría y elementos básicos de álgebra.

Los resultados y análisis de la prueba de entrada permiten identifican algunos obstáculos que tienen los estudiantes cuando ingresan a grado décimo, ratificando lo señalado por Gomes (2013), quien afirma que los conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, originan baja comprensión en el aprendizaje de la trigonometría.

Por lo tanto, para el diseño se actividades se tuvo en cuenta los obstáculos que presentaron los estudiantes en la prueba de entrada y se tomó la decisión de iniciar el curso de trigonometría con una actividad No. 0 "Un recorrido de 360º", sobre conceptos fundamentales de geometría.

2. Conclusiones en el proceso de la aplicación de las actividades dentro del diseño instruccional presentado NDR

1. 1. Las características de los estudiantes en la fase motivacional

En el capítulo 4 se presentó la evolución del pensamiento geométrico en los estudiantes a través del análisis de los resultados obtenidos en las actividades propuestas dentro del marco del diseño instruccional NDR.

Para despertar en los estudiantes el interés, la voluntad y el deseo por aprender algo nuevo o para robustecer los conocimientos que posee en el campo de las matemáticas se propuso iniciar cada actividad con la fase motivacional partiendo de problemas no rutinarios que involucran contextos. Esto le permitió al estudiante indagar y profundizar sobre el tema, además lo motivó a resolver este tipo de problemas que posiblemente nunca le habían propuesto. A continuación, se presentan las opiniones acerca de esta fase donde se revela que el estudiante presenta una motivación, creando una necesidad psicológica y una necesidad intelectual.

De acuerdo con las opiniones, el 90% de los estudiantes afirma que los problemas son interesantes, despiertan la voluntad y el deseo por aprender algo nuevo y el 10% opina que casi siempre.

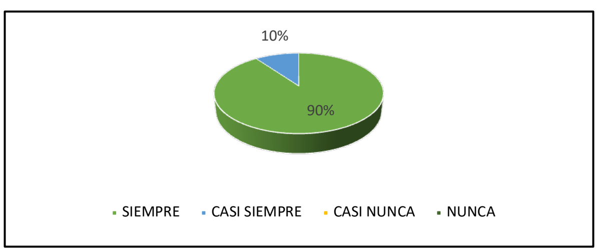


Figura 1. **Resultados de la opinión de los estudiantes.**

Comentarios de forma literal de los estudiantes:

KE: Me gustan porque me hacen pensar de diferentes formas para lograr resolver el problema y a medida que voy resolviéndolos me obsesiono hasta acabarlo.

KP: porque estos son ejercicios interesantes, nos ayudan a recordar aspectos anteriormente vistos, por mi parte me ayudan a mejorar más mis matemáticas, si no están bien me ayuda a corregirlas y aprender (ósea a aprender de mis errores) y me parecen ejercicios chéveres.

CC: Me gustan las matemáticas y la forma como me las enseñan, además los problemas que tengo que resolver son interesantes, me permiten aprenden cosas nuevas, cuando no puedo resolver los problemas consulto, le pregunto a mis compañeros o al profesor.

LC: Los problemas que se presentan en la clase son problemas muy buenos, la verdad pienso que explicar este tipo de problemas es de vital importancia, en los problemas del taller, aunque sepamos la teoría a veces se me dificulta resolverlos, creo que a veces se me dificultad las operaciones algebraicas.

JP: Me gustan las matemáticas porque entiendo y me gusta aprender cada vez más del tema, especialmente cuando iniciamos con este tipo de problemas me permiten salir del confort.

SP: Porque son temas nuevos e interesantes además hacen que me llame más la atención porque nos permiten conocen el mundo a través de las matemáticas.

Esta fase motivacional fue importante para la investigación, porque de acuerdo con las opiniones de los estudiantes es evidente que se produce una necesidad psicológica, el hecho de comenzar leyendo un problema no rutinario que involucra un contexto real, cuando lo ve interesante quiere solucionarlo, se crea una necesidad intelectual ligada a la motivación.

En las primeras actividades se observó que la mayoría de los estudiantes:

- Trata de resolver los problemas por inspección visual sin hacer conjeturas.
- Las imágenes son el medio principal que utiliza para tratar de resolver los problemas.
- Se les dificulta relacionar el enunciado del problema con su gráfica y a partir de esta hacer conjeturas.
- A pesar de que conocen algunos teoremas fundamentales de geometría, se encontró que tienen dificultad para aplicarlos en la solución de determinados problemas.
- Con frecuencia consulta en internet o en libros de texto la temática involucrada con el fin de hallar conceptos o teoremas que les pueda servir para resolver los problemas.

- Cuando se les pide explicar con detalle la solución del problema, los estudiantes no utilizan un lenguaje simbólico propio de la matemática que argumente lo observado en la gráfica o la solución. A lo largo de la aplicación de las actividades los estudiantes lograron: comprender que las matemáticas tienen un lenguaje propio y estandarizado, en ocasiones cuando los estudiantes no sabían cómo escribir lo que estaban pensando de una manera simbólica y formal se abstenían de hacerlo y recurrían al docente.

1. 2. Características de los estudiantes en la fase de intervención del docente

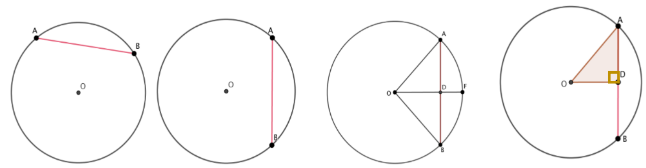
Para la adquisición de nuevos conocimientos, la fase de intervención del docente se realiza a través de la resolución de problemas, además se tuvo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes. En esta fase se observaron las siguientes características en la mayoría de los estudiantes:

- Identifica datos que brinda el enunciado o la gráfica.
- Cada pregunta que se propone en el enunciado se convierte en un problema.
- Se observa que empieza a relacionar sus saberes previos con las preguntas y en ocasiones lograr resolver el problema. Un caso particular: se les pide a los estudiantes hallar la longitud del arco de 90º para cualquier radio, el estudiante halla el perímetro del círculo y luego aplica proporcionalidad directa así:

$$360° \rightarrow 2\pi r$$
$$90° \rightarrow x$$

  Proceso que es evidentemente correcto.

En otras ocasiones se observa que los conocimientos que poseen los estudiantes no son suficientes para resolver el problema propuesto, razón por la cual el docente como mediador del conocimiento imparte nuevos conocimientos que son necesarios para resolver los problemas. Un caso particular: En una circunferencia con radio $r = 5cm$ se le pide al estudiante hallar la longitud de una cuerda de 70º. Se le sugiere al estudiante utilizar construcciones auxiliares para formar triángulos rectángulos, y que observen las gráficas obtenidas, luego verifique si es posible hallar la longitud de la cuerda.



Algunos estudiantes responden que la longitud de la cuerda es igual al doble del cateto $\overline{AD}$. Pero que no lo pueden hallar porque solo conocen la hipotenusa del triángulo ΔAOD y esto no permite aplicar el teorema de Pitágoras. En este caso los estudiantes necesitan de nuevos conocimientos para resolver el problema. Es aquí donde el docente desarrolla su rol de mediador y a partir de la interacción con el estudiante hace que los conocimientos previos sobre el teorema de Tales y la semejanza de triángulos se estructure el nuevo conocimiento, sobre razones trigonométricas. El estudiante utiliza este nuevo concepto de razón trigonométrica $\sin 35°$ para hallar el segmento $\overline{AD}$, duplica este segmento para hallar la longitud de la cuerda $\overline{AB}$.

En consecuencia, los estudiantes empiezan a integrar sus saberes previos con los nuevos conocimientos y comienzan a comprender qué es demostrar o probar. En este tipo de problemas el estudiante participa con sus conocimientos previos y el docente como mediador, muestra que una proposición matemática es verdadera si a partir de la aplicación de definiciones o teoremas conocidos se puede verificar su valor de verdad. Un caso particular:

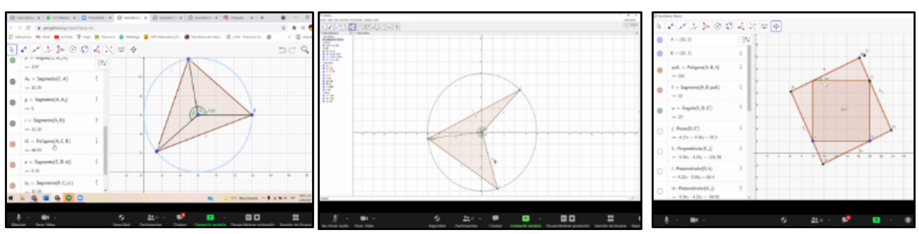
- *(Actividad No.5, guía del docente, problema 2)* En este problema se les propone a los estudiantes demostrar que para cualquier triángulo $\triangle$ABC, cuando se inscribe en una circunferencia de radio R se satisface que: $\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma} = 2\mathrm{R}$. Además, se les proporciona la gráfica.

  Los estudiantes identifican que los lados del triángulo representan tres cuerdas, utilizan la expresión general de la longitud de la cuerda $\overline{AB} = 2Rsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$, a partir de construcciones auxiliares grafican los ángulos centrales, y mediante conjeturas determinan que cada ángulo central es igual al doble de cada ángulo interno del triángulo, es decir para este caso particular $\theta = 2\alpha$, finalmente sustituyen y obtienen que $a = 2Rsen(\alpha)$ ó $\frac{a}{sen(\alpha)} = 2R$, de forma análoga lo hacen para los lados b y c, llegando a la demostración del teorema del seno ampliado propuesto en el problema.

Otro aspecto importante en esta fase es el uso del software GeoGebra, como una herramienta didáctica de apoyo en el aula para la construcción de nuevos conocimientos, hacer construcciones de diferentes gráficas, y a partir de ellas realizar conjeturas y poder resolver determinados problemas. Otra ventaja de esta herramienta es que le permite al estudiante realizar gráficas con medidas reales para probar o verificar los resultados obtenidos en la solución de un problema con lápiz y papel.

Es importante mencionar que los estudiantes no habían interactuado con esta herramienta, convirtiéndose en un elemento motivador e importante en el diseño y desarrollo de las actividades, favoreciendo su aprendizaje en clase y su aprendizaje autónomo.

En esta etapa los estudiantes realizaron sus gráficas y las compartieron sus actividades en los encuentros virtuales.



Fuente. **Autor gráficas compartidas por los estudiantes LC, JP y JM en los encuentros virtuales.**

Lo anterior permite concluir que cuando los estudiantes se enfrentan a determinado problema, deben identificar los conocimientos que poseen o que ha adquirido en el desarrollo del curso para proponer la solución a un problema, luego deben seleccionar cuáles formas de entender puede utilizar para resolver el problema cuando aplican estos conocimientos para resolver los problemas están avanzando hacia las "*formas de pensar*".

1. 3. Características de los estudiantes en la fase de razonamiento repetido autónomo RRA

En esta fase se propuso un conjunto de problemas no rutinarios con mayor grado de dificultad, que fueron pensados para que los estudiantes realicen procesos de razonamiento repetido, aplicando los conceptos de diferentes maneras.

A continuación, se exponen características representativas observadas en la mayoría de los estudiantes, teniendo presente que existen diferencias individuales en los procesos que realizan.

- En la solución de los problemas propuestos en las primeras actividades, se observó que los estudiantes en ocasiones no realizan conjeturas sobre los resultados obtenidos para aceptar o rechazar la solución de un problema.
- A medida que el proceso avanza se observa que los estudiantes empiezan a integrar sus formas de entender con sus formas de pensar cuando resuelven los problemas así: 1) Leen el problema, observan la gráfica que les suministra el problema, 2) Si el problema no les suministra la gráfica, proceden a realizarla, 3) Extraen los datos que del problema, 4) Analizan cada pregunta como un problema, 5) Articulan los saberes previos con los nuevos conocimientos, 6) Cada vez que avanzan los estudiantes proponen soluciones de los problemas que revelan la fluidez para aplicar sus conocimientos, 7) La mayoría realiza la gráfica que representa el problema en GeoGebra para verificar si la solución propuesta con lápiz y papel es correcta y 8) Cuando los resultados no coinciden con los obtenidos con lápiz y papel, revisan las operaciones o proponen una nueva solución.
- En los primeros procesos que realizan los estudiantes cuando se les propone demostrar, se observa que hacen una verificación para determinados valores, concluyendo que efectivamente la igualdad se cumple. Veamos un caso particular:

  (Actividad No.2, guía del estudiante RRA, problema 4) En este problema se les propuso a los estudiantes demostrar que longitud de la cuerda $\overline{AB} = 2rsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$. El proceso que realizó un

estudiante fue el siguiente: utilizó la gráfica y le asignó un valor particular al radio $r = 5$ y para el ángulo central $\theta = 150°$, aplicó la razón trigonométrica $\sin 75°$ y halló el cateto opuesto a este ángulo y duplicó este resultado. Seguidamente utilizó la expresión $\overline{AB} = 2rsen\left(\frac{\theta}{2}\right)$, sustituyó el radio $r = 5$ y el ángulo $\theta = 150°$, finalmente afirmó que como los dos resultados son iguales , esto representaba la demostración solicitada en el problema.

Después de realizar procesos repetidos de aplicar las definiciones y teoremas, el estudiante reconoció las diferencias entre verificar y demostrar una proposición matemática, es importante aclarar que los estudiantes casi siempre realizan primero la verificación de una proposición para algunos casos particulares y si cumple proceden a realizar la demostración.

- Cuando se analizaron las soluciones propuestas a los problemas en esta fase y durante el transcurso de las actividades, se observa que cada estudiante avanza en la estructuración de su pensamiento geométrico, como se puede observar en capítulo 4.

Finalmente Harel (2008) afirma que la aplicación repetida de un concepto es un hábito mental que ayuda a los estudiantes a ser autónomos y espontáneos en el momento de resolver los problemas propuestos. Cuando el docente le propone a los estudiantes diferentes tipos de problemas donde debe aplicar sus conocimientos de distintas formas, se evidencia que el estudiante entiende que un concepto tiene varias interpretaciones, siendo un factor a favor, pues propicia múltiples formas de pensar y múltiples formas de entender los conceptos, obteniendo como resultado la interiorización, la retención y la organización de los conceptos.

A partir de las tres fases propuestas en el diseño instruccional se puede concluir lo siguiente:

1. Los estudiantes no han alcanzado completamente habilidades de pensamiento formal y dependen de la visualización para resolver problemas trigonométricos.

2. La confrontación con retos, las discusiones de clase, la revisión de contenidos geométricos y la utilización de software permiten desarrollar el pensamiento geométrico y resolver los problemas.

3. Cabe destacar que los problemas que se elaboraron en las actividades cumplieron una función importante, lograr integrar la trigonometría circular y la trigonometría del triángulo, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- El problema fundamental que surge de la trigonometría: el cálculo de la longitud de una cuerda.
- La introducción de las funciones trigonométricas de forma natural a partir de la circunferencia unitaria.
- La deducción de las razones trigonométricas utilizando la circunferencia unitaria y las propiedades de los triángulos semejantes.

Lo anterior favoreció en los estudiantes la comprensión de estos dos enfoques de manera articulada muy al estilo de lo que sugiere Bressoud (2010).

4. Diseñar las actividades desde la motivación, proponiendo problemas interesantes que involucren el contexto real, causa en el estudiante: un impulso interno al leerlo, resolverlo o tratar de resolverlo, creando de forma natural una necesidad psicológica y una necesidad intelectual, permitiéndoles avanzar en su proceso de aprendizaje. Además, aumenta su iniciativa, su creatividad, persistencia y favorece su aprendizaje autónomo y espontáneo.

6. Esta investigación respecto a otros estudios como el Challenger (2009) y Chin & Tall (2012), logra avances en la evolución del pensamiento geométrico en la mayoría de los estudiantes de grado décimo de forma natural, en cuanto a la comprensión de las funciones trigonométricas, las razones trigonométricas y su aplicación en la resolución de problemas.

RECOMENDACIONES

El objetivo general de esta investigación es "Avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico, manifestado por los estudiantes de grado décimo de la educación media al resolver problemas de trigonometría".

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la implementación de las actividades dentro del marco del diseño instruccional presentado a partir del modelo NDR, se recomienda seguir avanzando en este tipo de investigaciones porque se observaron aspectos positivos que favorecieron el proceso de aprendizaje de los estudiantes, como por ejemplo los siguientes:

1. Utilizar pruebas de entrada es un recurso que le permite al docente identificar los conocimientos previos que poseen los estudiantes y cómo los aplica, lo cual favorece la planificación de las actividades.
2. Comenzar una actividad con una fase motivacional, produce en el estudiante una mayor disposición y apropiación del conocimiento.
3. Utilizar las TIC como herramienta de apoyo en el aula favorece el aprendizaje autónomo y motiva a los estudiantes a trabajar con mayor disposición.
4. Proponer problemas que integren los dos enfoques trigonométricos, donde apliquen los mismos conceptos de forma diferente, para que los estudiantes desarrollen procesos de repetición de tal forma que le permita interiorizar sus conocimientos, organizarlos, ser autónomos y creativos en el proceso de resolución de problemas.
5. Por último, se recomienda continuar con estos principios de diseño, con el propósito de motivar y mejorar en los estudiantes los procesos de enseñanza y aprendizaje no solamente en el campo de la trigonometría, sino también en otras áreas del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Altman, R. & Kidron, I. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(07), 1048-1060.

Ayala, J., Barreto, C. & Cáceres, L. (2014). De la Geometría a la Trigonometría.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *The Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112.

Challenger, M. (2009). *From triangles to a concept: a phenomenographic study of A-level students' development of the concept of trigonometry*. (Tesis doctotal). Universidad de Warwick, Inglaterra.

Chin, K. & Tall, D. (2012). *Making sense of mathematics through perception, operation & reason: the case of trigonometric functions*. 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Canada.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H. & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*. 102, 435-456.

Falk de Losada, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

Falk de Losada, M. (1994) Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas*; 1(1), 39-59.

Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2016). Topic-Specific Design Research: An Introduction. Kaiser, G. & Presmeg,. *Compendium for Early Career Researcher in Mathematics Education.* 33-57. Hamburgo, Alemania: ICME-13.

Gomes, S. (2013). Teaching trigonometry using an historical approach: an educational product. *Bolema, Boletim de Edecação Matemática,27*(46), 563-577.

Gutiérrez, A. & Fiallo, J. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupturebetween conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics 96*(02), 145-167.

Harel, G. (2010) DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In: Sriraman B., English L. (eds). *Theories of Mathematics Education*. Advances in Mathematics Education. 343-367.

Herberst, P. & Cheah, U. (2017). *Teaching and learning of geometry – secondary level*. ICME 13. Hamburg (2016).

Kaiser, G. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education.* Hamburg.

Kamber, D. & Takaci, D. (2017). On problematic aspects in learning trigonometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(02), 161-175.

Kevin C. Moore, & Kevin R. LaForest. (2014). The Circle Approach to Trigonometry. *The Mathematics Teacher, 107*(08), 616-623.

Kin-Keung, P. (2012). Tour of a simple trigonometry problem. *Department of Mathematics and Information Technology, 43*(01), 205-120.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid, España: Alianza, S.A.

Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(07), 1028-1047.

Man-Keung, S. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (Undergraduate) classroom. Katz, V. Using history to teach mathematics an international perspective. (pp. 3-11). Washintong, DC. Editorial: The Mathematical Association of America.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Thinking mathematically*. Pearson Higher Ed.

McKeague, C. & Turner, M. (2015). *Trigonometry.* Estados Unidos, Boston: Cengage Learning.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(03), 221-278.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.

Moreno, L. (2018). La geometría en el mundo moderno. Revista Praxis, Educación y Pedagogía. 2, 96-123.

Nabie, M.J., Akayuure, P., Ibrahim-Bariham, U.A., & Sofo, S. (2018). Trigonometric Concepts: Pre-Service Teachers' Perceptions and Knowledge. *Journal on Mathematics Education*, 9(2), 169-182.

The National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Recomendations for School Mathematics for the 1980s*, Reston, Virginia., National Council of Teachers of Mathemactics.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. 215 pp.

Post, S. (1994). Teaching the art of problem. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 4*(04), 359-368.

Real, M. (2013*). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Jornadas de Innovación docente. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill.

Sánchez, A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las *TICS. EDUTEC: Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. *31*, 130.

Santaló, L.A. (1981), *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires: Docencia.

Santos, M. & Barrera, F. (2011). High School Teachers' Problem Solving Activities to Review and Extend Their Mathematical and Didactical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 357-372.

Scheiner, T. & Pinto, M. (2019). Emerging perspectives in mathematical cognition: contextualizing, complementizing, and complexifying. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 21*(08), 699-718.

Schroeder, T. & Lester, F. (1989). Developing Wlderstanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed) *New directions for elementary school mathematics*, 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. pp 31-42. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education, 39*(08), 537-551.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

Tanton, J. (2015). *Trigonometry a clever study guide.* T. Washinton: The Mathematical Associati Schoenfeld, A. H. (2010). How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications. Routledge.on of America (MAA).

Torregosa, G. & Quesada, H. (2008). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(01), 275-299.

Vaninsky, A. (2011). Algebraic trigonometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(03), 406-411.

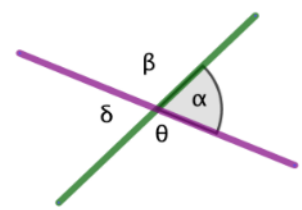
Zengin, Y., Furkan, H. & Kutluca, T. (2014). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences,31*, 183-187.

ANEXOS

Anexo 1. Prueba de entrada

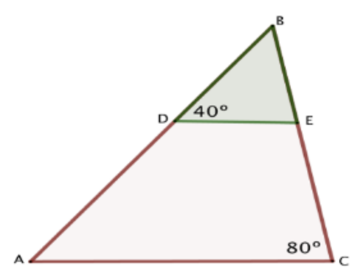
Instituto Técnico Nueva Familia
Prueba de entrada

Área:	Matemáticas
Grado:	Décimo de educación media vocacional
Tema a evaluar:	Conceptos fundamentales de la geometría
Tiempo estimado:	2 horas
Objetivo:	Identificar si los estudiantes que ingresan a grado décimo tienen buen desempeño acerca de los conceptos fundamentales de la geometría sobre: • Generalidades de los ángulos • Teoremas en el triángulo
Descripción de la actividad:	• A cada estudiante se le entregará una copia de la prueba de entrada. • El estudiante debe escribir los procedimientos que utiliza para llegar a la solución de los problemas propuestos.
Justificación:	El propósito de esta actividad es realizar un análisis sobre los conocimientos que poseen los estudiantes cuando ingresan a grado décimo acerca de conceptos fundamentales de la geometría y cómo los aplican en la resolución de problemas.



1. Observa la figura de la derecha, el $\measuredangle\alpha = 63^0$

- ¿Cuál es la medida de $\measuredangle\delta$, $\measuredangle\beta$ y $\measuredangle\theta$?

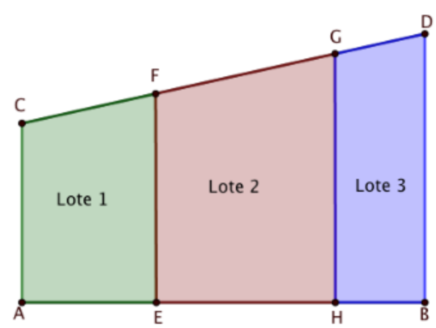


Con base en la siguiente información responde las preguntas 2 y 3.

En la figura de la derecha $\overline{\mathrm{AC}} \parallel \overline{\mathrm{DE}}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 12\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{AD}} = 9\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{DB}} = 6\mathrm{cm}$.

2. ¿Cuánto mide el ángulo CBA? Explique.

3. ¿Cuál es la longitud de los segmento $\overline{\mathrm{CE}}$? Explique.



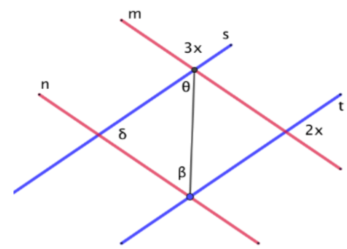
4. Observa la siguiente figura que representa la división de un terreno.

Donde $\overline{\mathrm{AB}} = 100\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{AE}} = 40\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{CF}} = 60\mathrm{m}$, $\overline{\mathrm{HB}} = 10\mathrm{m}$ y $\overline{\mathrm{AC}} \parallel \overline{\mathrm{EF}} \parallel \overline{\mathrm{HG}} \parallel \overline{\mathrm{BD}}$.

Los puntos A, B, C, D, E, F, G, H representan los postes.

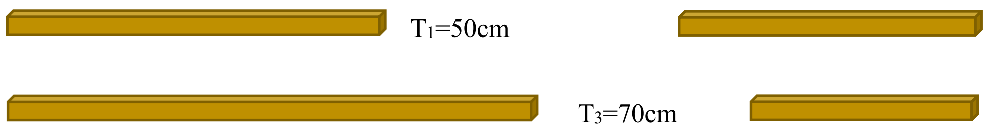
- ¿Cuál es la distancia del poste C al poste D? Explique.

5. En la figura de la derecha$m \parallel n, s \parallel t\ y\ \beta = \theta + 10°$



¿Cuál es la medida de los ángulos θ y β? Explique.

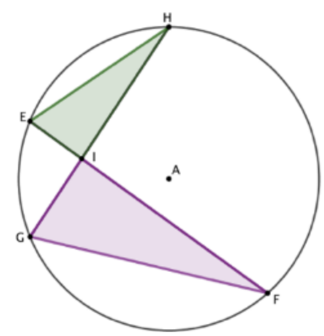
6. Un carpintero desea construir un marco de madera en forma de triángulo. Cuenta con cuatro trozos de madera que no puede cortar, y debe unir los trozos de madera utilizando las puntas.



- El carpintero debe tomar tres trozos de madera para construir el marco. ¿Cuáles trozos de madera puede escoger el carpintero? Explique por qué

7. En la figura de la derecha $\measuredangle EHI = x, \measuredangle GIF = 2x$

- Encuentre un expresión algebraica que represente la medida del $\measuredangle FGI$.



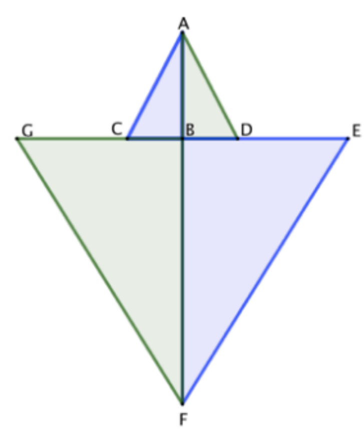
8. Los estudiantes en la clase de artística diseñaron la siguiente cometa, como se muestra en la figura, como se muestra en la parte inferior.

$$\overline{GB} = 90cm, \overline{AB} = 40cm, \overline{EF} = 150cm\ y\ \overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{GB}$$

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD\ y\ \Delta GBF \cong \Delta EBF.$$

Para la construcción de la cometa se necesitan dos palos de longitud $\overline{AF}$ y longitud $\overline{GE}$.

- ¿Cuál es la longitud de los palos en cm.? Explique.



Anexo 2

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Autorización de estudiantes que hacen parte de la investigación de tesis doctoral “Avances en la caracterización del pensamiento geométrico a través de la resolución de problemas trigonométricos no rutinarios”.

Institución Educativa: Ciudad:

Investigadora del proyecto: Margarita Pinzón Cardozo

Yo, ____ padre de familia del estudiante: ____ del Instituto Técnico Nueva Familia, he (hemos) sido informado(s) acerca del proyecto de investigación que tiene como propósito registrar algunas prácticas educativas. Teniendo en cuenta lo anterior, manifiesto que entiendo que el tratamiento de datos comprende la recolección, almacenamiento, uso, circulación, conservación, transferencia y/o transmisión de videoconferencias, imágenes de las actividades, video clases, obtenidas del registro, así mismo y luego de haber sido informado(s), comprendo (comprendemos) que mi participación NO tendrá repercusiones o consecuencias en las actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso derivado de los resultados obtenidos por el educador en la investigación.

No generará ningún gasto, ni remuneración alguna por su participación o realización.
No habrá ninguna sanción en caso de que no se autorice su participación.
No será publicada la identidad de los participantes, así como, los videos, imágenes, sonidos y datos personales registrados durante la investigación.

Los sonidos e imágenes del video se utilizarán únicamente para los propósitos de la investigación y como evidencia de la práctica educativa de los investigadores.

Así mismo entiendo (entendemos) qué:

1. Las imágenes y sonidos registrados en el video de los participantes que sean recolectados serán tratados por el responsable y/o encargado dentro del marco del cumplimiento de la política de protección de datos contemplada en la Ley 1581 de 2012 y su Decreto Reglamentario 1377 de 2013.

2. Las entidades a cargo de realizar la investigación y los investigadores garantizarán la protección y uso adecuado de las imágenes y sonidos registrados en el video de los participantes, de acuerdo con la normativa vigente, durante y posteriormente al proceso de investigación.

3. Los sonidos, imágenes, videos, y datos personales podrán ser usados para temas Los sonidos, imágenes, videos, y datos personales podrán ser usados para temas investigativos y/o académicos propios de la investigación, previa autorización expresa del participante.

En ese orden de ideas, manifiesto que comprendo en su totalidad la información sobre esta actividad y autorizo el uso de los videos, imágenes, sonidos y datos personales, conforme a este consentimiento informado de forma consciente y voluntaria.

[ ] Si autorizo [ ] No autorizo

________________________________ ___________________________________

Firma del padre de familia Firma del estudiante