DESARROLLO DEL PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ÁMBITOS DE INCERTIDUMBRE EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magíster en Educación Matemática

YOBANA PINEDA GARZÓN
Código: 10542012136

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
Bogotá D.C.

2021

# DESARROLLO DEL PENSAMIENTO PROBABILÍSTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ÁMBITOS DE INCERTIDUMBRE EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Yobana Pineda Garzón

Director de tesis: Dra. Mary Falk de Losada
Dra. Diana Carolina Pérez Duarte

Líneas de investigación:

Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.

Desarrollo del pensamiento matemático y avances en su caracterización.

UNIVERSIDA ANTONIO NARIÑO
Bogotá D.C.

2021

Nota de aceptación:

Firma del Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre del 2021

## AGRADECIMIENTOS

Primero a Dios por su infinita misericordia y bondad por haberme guiado y sostenido en los momentos más duros de esta Maestría.

A mi familia siempre incondicional y dispuesta para mí, Dumar, Inés, Rosa, Liz, Omar, Elizabeth y mi bella madre Cleo que ya no está físicamente en este mundo y demás seres amados.

A la Dra. Diana, quien sin conocerme siempre guio mis pasos, me escuchó y ayudó incondicionalmente.

A la Dra. Mary Falk de Losada, por su dedicación, entrega, apoyo y asesoría en la validación de las actividades, así mismo, por las sugerencias y correcciones de los problemas que se encuentran en cada sesión.

A mis queridos amigos Cata, William, Anita, Vivi y Leandro por darme ánimo y apoyo cuando más lo necesité.

A ti, que ya no estás en mi vida, pero fuiste por quien empecé a estudiar, para que estuvieras orgulloso de mi.

Al Colegio del Bosque Bilingüe por confiar y apoyarme en todas mis metas.

A la Señora Esmeralda que se convirtió en una madre adoptiva, por sus consejos y oraciones a cada instante de mi vida.

## DEDICATORIA

Primero a Dios, pues sin Él no soy nada.

A mi amado hijo Jeffrey Santiago, fuente de inspiración en mi vida. Decirle que en la vida siempre van a existir dificultades, la decisión de seguir adelante o quedarse estancado, depende de cada meta que se proponga.

Además, quiero decirte que el conocimiento es importante, pero el ser una persona integral, con valores, honesta y con el buen ejemplo cultivado desde casa, habla más de ti como persona.

A mi amada madre que vio cuando empecé este sueño, pero los designios de Dios no permitieron verlos terminados.

**SÍNTESIS**

El propósito de esta investigación es el desarrollo del pensamiento probabilístico evidenciado por los estudiantes de grado tercero del Colegio Bosque Bilingüe, al construir el concepto y resolver problemas de experimentos determinísticos - aleatorios, espacio muestral – suceso y formar combinaciones en situaciones de la vida real.

Las actividades se diseñaron para que el estudiante justificara cada una de sus afirmaciones a partir de elementos básicos de la probabilidad; estas justificaciones debían estar relacionadas con el planteamiento y resolución de problemas.

La implementación de cada actividad y los resultados obtenidos permitió evidenciar los procesos mentales que utilizaron los estudiantes para desarrollar cada actividad, así como su entendimiento en la solución de cada problema propuesto, lo que a su vez permitió identificar elementos del pensamiento probabilístico que desarrollaron.

## ABSTRACT

The purpose of this investigation is the development of probabilistic thinking, shown by the students of third grade of Colegio Bosque Bilingüe while constructing the concept of deterministic and aleatory experiments, sample space and events, and making combinations in real life situations through solving problem.

The activities were designed to make the student justify each of the affirmations using basic elements of probability, and these justifications must be related to the approach in the solving problem.

The implementation of each activity and the results obtained enabled the author to show the mental processes that the students used to develop each activity, and how they understood each problem that had been proposed, which in turn allowed the author to identify the elements of probabilistic thinking that they had developed.

**Tabla de Contenido**

# INTRODUCCIÓN

Las competencias y conocimientos para desarrollar el pensamiento probabilístico son hoy necesarios para adaptarse a una sociedad que cambia rápidamente, donde la información sobre fenómenos aleatorios se ha expandido a todos los ámbitos de la actividad humana. En consecuencia, para funcionar adecuadamente en estos tiempos, los ciudadanos necesitan adaptar su pensamiento determinista y tener presente el concepto del azar e incertidumbre en diferentes entornos. Al mismo tiempo, necesitan adquirir estrategias y formas de razonamiento que les ayude a tomar decisiones adecuadas en la vida diaria.

Las probabilidades de la ocurrencia de fenómenos posibles, imposibles y seguros, durante los últimos años, se ha ido incorporando fuertemente en los currículos de matemáticas a nivel de preescolar, básica, media y superior. En gran parte de los países desarrollados y a partir del uso de diferentes materiales y estrategias, el estudiante, a través de la experimentación, puede llegar a conclusiones que le permite desarrollar su capacidad de clasificar las ocurrencias de sucesos en el ámbito en el que se desenvuelve una persona.

Algunos de los principales motivos para incorporar la probabilidad en los currículos son su utilidad y presencia en numerosas situaciones de la vida diaria, así como aquellas situaciones en las que es necesario promover el desarrollo de un razonamiento crítico que permita analizar, interpretar, inferir, explicar, evaluar y comunicar distintos tipos de información, además del vínculo con otras ciencias.

Enseñar estadística y probabilidad de ocurrencia de fenómenos en primaria solía verse como una tarea sencilla, pues curricularmente los contenidos se centraban en la recolección de datos y la representación pictórica de los mismos. Esto no desarrollaba el pensamiento probabilístico y no permitía el desarrollo de competencias en los estudiantes al momento de tomar de decisiones.

Las investigaciones realizadas por Batanero (2004) han demostrado la necesidad de la enseñanza de la probabilidad en los niveles de educación básica primaria. Se hace necesario enfatizar el desarrollo de habilidades que ayuden al estudiante a poder predecir eventos y analizar secuencias de sucesos en espacios muéstrales.

A pesar de todos los esfuerzos que ha hecho la NCTM, como también los ministerios de educación de los diferentes países latinoamericanos, y en Colombia con los lineamientos curriculares, los estándares y los derechos de aprendizaje donde introducen la enseñanza de la probabilidad en la educación básica primaria, no se han diseñado estrategias metodológicas para la enseñanza de los conceptos básicos de la probabilidad de ocurrencia de fenómenos a través de la construcción del significado de los conceptos como experimentos aleatorios, determinísticos y de espacio muestral. Los maestros centran su enseñanza en los modos como se desarrollan al interior de los libros de matemáticas; sólo se observan juegos de dados y cartas, visualizando datos en tablas, a cambio de profundizar en el análisis y la obtención de un razonamiento probabilístico que les sirva a los estudiantes en un futuro.

De acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), y los Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standard Iniciative* (CCSSI, 2021), la probabilidad, debido a sus múltiples aplicaciones en distintas áreas del saber, es parte importante de la matemática, por lo que es necesario que el pensamiento probabilístico se desarrolle desde las primeras edades (nivel párvulo). Para lograr este propósito se indican seis principios que se deben abordar en la educación matemática escolar: Igualdad, Currículo, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación y Tecnología.

Además, los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), exponen distintas formas de adquisición y uso de dichos contenidos como un continuo en el currículo escolar por medio de procesos tales como resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación.

La necesidad de introducir la enseñanza de probabilidad de ocurrencia de fenómenos en la escuela primaria, señala a su vez la urgencia de diseñar estrategias didácticas para abordar la probabilidad de manera que se pueda construir un concepto, mediante preguntas con incertidumbre las cuales los estudiantes deben plantear hipótesis y relacionarlas con otros temas o disciplinas.

Por otra parte, los estudiantes de primaria suelen emocionarse al saber la cantidad de veces que sale “cara” en una moneda, o el número uno (1) en un dado, pero no se indaga más allá para lograr adentrarse en el significado de esos resultados. Esta recolección de datos normalmente se centra en los juegos de azar y simulaciones de probabilidades, tal como ocurre con los juegos en el hipódromo. Sin embargo, la forma en la que se plantean estas actividades no está ayudando a desarrollar el pensamiento probabilístico con relación a la construcción del concepto de probabilidad de ocurrencia de fenómenos posibles, imposibles y seguros, en el marco de la solución de problemas. Estos tienden a quedar implicados en las siguientes técnicas: identificar, contar y visualizar, utilizadas para encontrar todos los posibles resultados que se puedan obtener en un experimento aleatorio.

Desarrollar el pensamiento probabilístico puede contribuir a la búsqueda de la construcción de métodos para encontrar una solución; estos métodos logran inducir una serie de estrategias que pueden ayudar a descubrir las diferentes formas de razonar y que nacen de la intuición del estudiante a través de sus acciones y análisis de lo que él logra interpretar.

Alsina, en sus estudios realizados entre el 2017 y 2018, menciona tres argumentos para incorporar la enseñanza de la probabilidad en la educación infantil. El primero afirma que a los estudiantes se les debe garantizar una educación de calidad que se ajuste a los cambios sociales; el segundo explica la importancia de la estadística y la probabilidad en el desarrollo integral de los niños; y el tercero describe la importancia de la alfabetización probabilística en los estudiantes.

Las argumentaciones que llevan a investigar en este proyecto son la carencia que existe en la enseñanza de la probabilidad de la ocurrencia de fenómenos posibles, imposibles y seguros en la escuela primaria, viéndose reflejadas en la conceptualización y aplicación de la resolución de problemas en diferentes pruebas. Históricamente la enseñanza de la probabilidad de la ocurrencia de fenómenos posibles, imposibles y seguros en el Colegio del Bosque Bilingüe UAN no refleja un aprendizaje significativo; esto se ve reflejado pues los docentes de retoños a tercer grado no enseñan probabilidad ni problemas que desarrollen el pensamiento probabilístico, sólo trabajan estadística como aspecto a destacar del pensamiento matemático.

Una de estas posibles razones es que el docente encargado de trabajar esta asignatura no es licenciado en matemáticas; muchos son licenciados en pedagogía infantil y no cuentan con la capacitación adecuada para trabajar el desarrollo del pensamiento probabilístico. Además, los textos que orientan la asignatura de matemáticas no profundizan en dicho pensamiento. Una estrategia de mejora para el año 2021 fue separar el pensamiento numérico del pensamiento variacional. Se tomó la decisión que estos dos modos de pensamiento se trabajarán a la par y no se dejarán para el final del trimestre. Pero esto tampoco demuestra que se dé importancia al desarrollo del pensamiento probabilístico, pues no se está abriendo un espacio específico para su desarrollo. La decisión sólo se basa en realizar las actividades del libro; el trabajo se resume en llenar tablas y desarrollar algunos ejercicios de espacio muestral donde se trabaja el relacionado con la formación de un conjunto de objetos.

Con respecto a las investigaciones, algunas de estas indican cómo mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de la probabilidad, lo cual también ha sido tratado en numerosos eventos internacionales como grupos de estocástica del International Congress of Mathematics Education (ICME), European Mathematics Education Conferences (CERME), y congresos regionales o nacionales como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) o los Simposios de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM). Asimismo, son de destacar las sesiones dedicadas a mostrar las diferentes investigaciones que se realizan a nivel mundial en estadística en eventos como el International Conference on Teaching Statistics (ICOTS), cuyo objetivo es prestar atención a la educación estadística en la escuela.

El estándar 2000 del NCTM en los Estados Unidos incluye tres recomendaciones relevantes con respecto a comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad dirigidos a los niños de tercero a quinto grado. Las recomendaciones son: (a) describir eventos posibles o improbables y discutir los grados de probabilidad usando palabras; (b) predecir la probabilidad de un resultado experimental simple y probarlo; (c) entender que el tamaño de la probabilidad de un evento puede ser representado por números entre 0 y 1.

Además, hay varios resultados de investigación en otros países. Basado en los resultados de investigación y en los estándares 2000 NCTM en los Estados Unidos, se llega a la conclusión que desarrollar el pensamiento probabilístico de los estudiantes de la escuela primaria (SD) es muy importante, especialmente para que los niños se den cuenta de que exista diferencia entre eventos cuyo resultado es determinista y los que pueden presentar incertidumbre.

Por otro lado, autores como Borovnick y Peard (1996, p. 240), afirman “hay dos razones principales para legitimar la probabilidad en el currículo en cualquier nivel. Una es la formación de una manera específica de pensar, un pensamiento probabilístico. La segunda es la necesidad de su conocimiento para múltiples aplicaciones.” Posteriormente en The 18th ICMI Study realizado en 2008, se señala que: (a) la probabilidad es indispensable para la comprensión de los métodos en la estadística Inferencial; (b) la probabilidad ofrece una herramienta para la modelación y/o “creación” de la realidad; y (c) la probabilidad ofrece un tipo de pensamiento con el que se puede reflejar la realidad.

La escuela primaria corresponde al nivel en el cual los niños comienzan a construir significado para algunos conceptos en matemáticas, porque en el nivel elemental el desarrollo del pensamiento de los niños se encuentra en una etapa concreta e incluso semiformal. La capacidad de anticipar la probabilidad con que ocurrirán los eventos se puede realizar a través de una serie de actividades de matemáticas, que buscan construir el significado de los conceptos de azar y probabilidad. Esto se debe al hecho de que la probabilidad es la ciencia de la incertidumbre y la posibilidad (Halpern, en Hirsch y O'Donnell, 2001).

Hidayati y Afifah (2020) indican que el pensamiento probabilístico de los estudiantes de primaria da solución a problemas geométricos en el que interviene la probabilidad a través de tres niveles de pensamiento probabilístico denominados informal estadístico, transicional y cuantitativo.

Jan y Amit (2009, p. 268) también afirmaron que hay cuatro categorías en la observación del pensamiento probabilístico de los estudiantes, a saber: (a) tipos de estrategias; (b) representación; (c) uso de lenguaje probabilístico; (d) la naturaleza del obstáculo cognitivo o la inhibición cognitiva. El lenguaje probabilista, indica el autor, es una representación, está hace referencia a una expresión del pensamiento de alguien que puede ser en forma escrita o verbal. Mientras tanto, la cuarta categoría denominada obstáculo cognitivo está relacionada con las concepciones y conceptos erróneos del pensamiento probabilístico. Por otro lado, el autor relaciona el pensamiento probabilístico a través de dos aspectos: la estrategia y la representación.

Hay muchos estudios y autores definen el pensamiento probabilístico. Pfannkuch y Brown (1996) definen el pensamiento probabilista como una nueva forma de procesar información cuando la visión del mundo cambia sobre la realidad. Lau y Ranyard (1999) definen el pensamiento probabilístico como la tendencia a describir el mundo en términos de incertidumbre, considerando las diferencias en los grados de confianza verbalmente o como probabilidades numéricas. Jones y colegas (1999) utilizan en su investigación el término pensamiento probabilístico para describir el pensamiento de los niños en respuesta a situaciones de probabilidad. Ellos explican que una situación de probabilidad, o una situación que implica incertidumbre, se refiere a una actividad o experimento aleatorio en el que hay varios resultados posibles; es decir, los resultados reales de antemano no se pueden determinar con precisión. Lamprianou y Afantiti Lamprianou (2002) definen el pensamiento probabilístico como un modo de razonamiento que intenta medir la incertidumbre como una herramienta para la toma de decisiones. Para Jolliffe (2005), el pensamiento probabilístico implica comprender cómo se utilizan los modelos para simular fenómenos aleatorios, cómo se generan los datos para estimar probabilidades, y cómo las simetrías y otras propiedades de las situaciones permiten la determinación de probabilidades.

De otro lado, Savard (2014) explica el razonamiento probabilístico, incluido el razonamiento bajo incertidumbre. Este razonamiento posee dos componentes importantes, a saber: la variabilidad de los resultados y las cosas aleatorias.

Además, Savard (2014) afirma que los resultados se "seleccionan" de manera arbitraria y aleatoria; esto significa que no hay correlación entre los resultados y lo que sucedió antes. De hecho, las cosas aleatorias son inciertas, independientes, sin correlación y no se pueden predecir con certeza.

Batanero y col. definen características importantes con respecto a los fenómenos aleatorios de la siguiente manera: (1) en una determinada situación hay más de un resultado posible; (2) el resultado real que ocurrirá es impredecible; (3) hay una posibilidad al menos en la imaginación de repetir muchas veces el experimento (u observación); (4) el orden de los resultados obtenidos a través de la repetición no tiene un patrón sobre el cual el sujeto pueda controlar o predecir (Savard, 2014, p. 288).

Por otro lado, en los últimos años la resolución de problemas ha tomado importancia en la educación matemática; recibiendo mayor atención desde la perspectiva curricular, pedagógica y de investigación, como lo demuestran publicaciones tales como: “Planteamiento de problemas matemáticos: De la investigación a la práctica efectiva”, de Singer, Ellerton y Cai (2015); y “Planteamiento y resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas nuevas”, de Felmer, Pehkonen y Kilpatrik (2016).

Polya (1945) establece que la resolución de problemas es una característica esencial que distingue a la naturaleza humana y cataloga al hombre como "el animal que resuelve problemas". Siendo un matemático productivo, se preocupó por el mal desempeño de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente al resolver problemas.

Schoenfeld (1985) profundiza y complementa el trabajo de Polya. Incorpora y justifica la dimensión metacognitiva en el proceso de resolución de problemas. Llama metacognitivos a los procesos de reflexión que están asociados a las acciones mentales de monitoreo y control que actúan implícita y continuamente mientras se resuelven problemas; esta es una habilidad que se va desarrollando y ayuda a identificar desviaciones y contradicciones que se cometen en el camino de solución. Para Schoenfeld, las indicaciones que permiten avanzar en el método propuesto por Polya equivalen a hacer un inventario de lo que el estudiante sabe y de la manera en la que adquirió los conocimientos. Para la presente investigación es importante desarrollar el pensamiento probabilístico a través de la resolución de problemas por medio de la matemática realista, donde la idea fundamental es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder, y la mejor manera de aprenderla es haciéndola y practicándola en diferentes contextos.

Las valoraciones anteriores conducen al siguiente problema de investigación: ¿Cómo desarrollar el pensamiento probabilístico en ámbitos de incertidumbre con estudiantes de grado tercero en el Colegio del Bosque Bilingüe?

Se precisa como objeto de estudio el proceso de enseñanza aprendizaje para comenzar la construcción del significado del concepto de probabilidad, identificando sucesos posibles, imposibles y seguros.

El objetivo general es el de favorecer el desarrollo del pensamiento probabilístico en ámbitos de incertidumbre en estudiantes de grado tercero en el Colegio del Bosque Bilingüe.

El campo de acción de esta investigación es la construcción del significado de sucesos en experimentos aleatorios en ámbitos de incertidumbre a través de la resolución de problemas.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema se presentan las siguientes preguntas científicas:

- ¿Qué investigaciones se han realizado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la probabilidad; sucesos posibles, imposibles y seguros?
- ¿Qué presupuestos teóricos sustentan el desarrollo del pensamiento estadístico relacionado con el concepto de la probabilidad de la ocurrencia de fenómenos?
- ¿Cómo estructurar una secuencia de experiencias para poder desarrollar el pensamiento probabilístico en estudiantes de grado tercero en el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de probabilidad?
- ¿En qué contextos deben desarrollarse las experiencias estructuradas?
- ¿Cómo analizar la eficacia y el impacto de la secuencia de experiencias diseñadas para desarrollar el pensamiento probabilístico en estudiantes de grado tercero al comenzar el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de probabilidad?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, se proponen las siguientes tareas de investigación:

- Fundamentar teóricamente el problema. Revisar teorías propuestas e investigaciones realizadas en el diseño de actividades en probabilidad; sucesos posibles, imposibles y seguros.
- Construir el estado del arte de la presente temática para asegurar su novedad y definir su grado de actualidad.
- Valorar los resultados de la implementación del sistema de actividades.

- Proponer una serie de actividades que involucre la construcción de significado del concepto de probabilidad; sucesos posibles, imposibles y seguros en estudiantes de grado tercero, desarrollando su pensamiento estadístico.

- Contrastar los fundamentos teóricos que intervienen en los procesos estadísticos en ámbitos de incertidumbre en grado tercero.

El aporte práctico de la presente investigación radica en un conjunto de actividades que ayuden al proceso del desarrollo del pensamiento probabilístico basada en la resolución de problemas para estudiantes de grado tercero de primaria.

Esta tesis está estructurada en la introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

# CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se presenta el análisis de la literatura seleccionada y que se constituye en referente para esta investigación a nivel práctico. Con esta revisión se busca tener un panorama de lo que se ha investigado a nivel nacional e internacional sobre el objeto de estudio y el campo que se aborda en esta investigación, los aspectos metodológicos que se han empleado, los resultados obtenidos y las recomendaciones. Estos aspectos a considerar son importantes para el diseño mismo de la investigación, especialmente de los instrumentos llevados a cabo, así como para el análisis y contraste de los resultados de este estudio.

Diversas son las investigaciones que han trabajado la construcción de significado del concepto de probabilidad de la ocurrencia de fenómenos en la escuela primaria, llegando a una aproximación de cómo desarrollar este pensamiento, lo cual implica identificar diferentes formas de pensamiento relacionadas con la probabilidad (resolver problemas, plantear problemas, predecir los diferentes resultados posibles correspondientes a experimentos aleatorios, posibles estrategias y formas de representación, entre otros).

A continuación, se presenta una parte seleccionada de la literatura revisada relacionada a la construcción del concepto de probabilidad, su enseñanza y aprendizaje. Esta descripción se dividirá en cinco categorías, en las cuales, se puntualizarán investigaciones que se han desarrollado en cada categoría.

1. La enseñanza de la probabilidad (en forma general, cómo es enseñada).
2. La enseñanza de la probabilidad en primaria y la probabilidad de la ocurrencia de fenómenos incluyendo categorías como seguro, posible, imposible.

3. Construcción de experimentos aleatorios o determinísticos y el correspondiente espacio muestral.

4. La resolución de problemas en la enseñanza de probabilidad en la ocurrencia de fenómenos.

## 1.1. La enseñanza de la probabilidad (en forma general como es enseñada)

### 1.1.1. Conocimiento base para la enseñanza: un marco aplicable en la didáctica de la probabilidad[1]

En este artículo los autores plantean la importancia de que el docente tenga conocimientos de probabilidad para que pueda enseñarla a estudiantes de niveles preuniversitarios de una forma eficiente. Los autores plantean tres tipos de conocimientos que deben tener los profesores, y de esa manera poderlos abordar con sus estudiantes, estos conocimientos son: conocimiento del contenido a enseñar, conocimiento pedagógico y conocimiento didáctico del contenido.

Los autores indican que a través del análisis y la investigación de diferentes fuentes se pueden plantear varios modelos de conocimiento que puedan ser adaptados para orientar el aprendizaje de la probabilidad.

La enseñanza de la probabilidad y la introducción a los conceptos estocásticos ha sido una necesidad apremiante en la educación preuniversitaria; debido a esto, el docente debe integrar de una manera pertinente el conocimiento y las formas de aprender de

[1]Burbano-Pantoja, V. M. A., Valdivieso-Miranda, M. A., & Aldana-Bermúdez, E. (2017) "Conocimiento base para la enseñanza: un marco aplicable en la didáctica de la probabilidad." *Revista Investigación, Desarrollo, Innovación*, 7(2), 269-285. doi: 10.19053/20278306.v7. n. 2.2017.6070

los estudiantes en procura de aumentar su comprensión hacia los fenómenos aleatorios y el procesamiento de información.

En los contextos internacionales y nacionales, se han identificado dificultades en la enseñanza de la probabilidad en los colegios y se estima que esto se debe a dos causas: la primera, a la falta de formación de los docentes que la enseñan al igual que al poco conocimiento de ella; el segundo, se debe a deficiencias pedagógicas que se asocian a los conceptos de la probabilidad tal y como los docentes lo entienden, y su comprensión de los fenómenos aleatorios en que basan sus enseñanzas, así como la manera de aprender de los estudiantes a través de los recursos didácticos y los factores socioeconómicos (Batanero 2002; Pinto 2010; Burbano 2013).

Con base en estos y otros modelos, se impulsa al docente para mejorar su proceso de enseñanza, promoviendo las relaciones interpersonales en el salón de clases y concibiendo la importancia de la interacción entre estudiante-docente.

Luego de analizar los diferentes modelos de conocimiento, los autores afirman que la mayoría de los docentes en Colombia carecen de una formación pertinente para la enseñanza en el conocimiento disciplinar como en el didáctico, lo cual se evidencia en el poco conocimiento de probabilidad que los jóvenes estudiantes reciben en sus colegios.

Para mejorar esto, los autores sugieren realizar planes de capacitación y actualización a los profesores con respecto a los modelos de conocimiento de enseñanza. Al implementar estas mejoras el docente lograría fortalecer el conocimiento del contenido, el conocimiento de estrategias y el conocimiento de las formas de aprender del estudiante, logrando un aprendizaje más efectivo de la probabilidad.

Este artículo es útil para comprender los conocimientos que los docentes deben tener para enseñar la probabilidad a estudiantes en niveles preuniversitarios.

### 1.1.2. A study on mathematical activity with a focus on linking the theorical and experimental approaches to probability[2]

El autor propone en este artículo un método para que los estudiantes comprendan la probabilidad mediante experimentos y desde allí puedan entender en qué momento la probabilidad estadística es diferente a la probabilidad matemática y en qué momento es igual, además de entender la teoría de los números grandes.

Este autor propone que, a través de la investigación de la probabilidad de jugar piedra, papel o tijera, los estudiantes logren conectar la probabilidad y la estadística. Para lograr esto, se plantean tres puntos; el primero afirma que según la ley de los números grandes la probabilidad empírica converge a la probabilidad estadística; el segundo punto señala que, aunque la forma de elegir un signo de mano está sesgada, la distribución de las posibilidades de un empate se convierte en una distribución binomial; el tercer punto da cuenta de que, cuando las posibilidades de que ocurran los sucesos elementales no sean iguales, la probabilidad estadística puede que no sea igual a la matemática.

El plan que se utiliza para realizar el experimento es el siguiente: 1. Realizar la predicción; 2. Encontrar la probabilidad estadística con base en los resultados de los experimentos; 3. Compartir las probabilidades estadísticas con cada grupo en la clase

[2] Takayama Takuma, Shimoda Junior High School, Tokyo, Japan "A study on mathematical activity with a focus on linking the theorical and experimental approaches to probability". ICOTS 10, Kyoto Japon 2018, descargable 8 de noviembre de 2020 en la URL: http://iase-web.org/icots/10/proceedings/pdfs/ICOTS10_6E3.pdf?1531364280

y después combinarlas; 4. Calcular la probabilidad matemática usando el diagrama del árbol y revisar los resultados de los experimentos; 5. Discutir los resultados.

El objetivo de esta investigación es observar si los estudiantes son capaces de darse cuenta de los siguientes tres puntos: la probabilidad empírica no siempre es igual a la probabilidad matemática; si los eventos tienen la misma probabilidad, sus frecuencias relativas convergen en la probabilidad matemática cuando el número de ensayos crece; cuando tres personas juegan piedra, papel o tijera, la distribución binomial de la probabilidad de un ensayo se acerca a la distribución normal cuando el número de ensayos aumenta. Lo anterior es posible observando el trabajo de los estudiantes y el diálogo en la clase.

Este artículo permite comprender una metodología para enseñar a los estudiantes conceptos de probabilidad como lo son: la probabilidad estadística, la probabilidad matemática y la teoría de los números grandes, a partir de experimentos sencillos como jugar a piedra, papel o tijera los niños comienzan a apropiarse de estos conceptos.

### 1.1.3. Teaching probability: Using levels of dialogue and proportional reasoning[3]

En el artículo se introduce la necesidad de que los docentes hagan un acercamiento de la probabilidad y la puedan comprender, para esto, el autor propone dos metodologías; la primera, que el docente entable un diálogo con el estudiante teniendo

[3] Hay Ian, University of Tasmania, Australia, "Teaching probability: Using levels of dialogue and proportional reasoning". ICOTS 10, Kyoto Japon 2018, descargable 8 de noviembre de 2020 en la URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6B2_HAY.pdf?1405041660

en cuenta el entendimiento que poseen los niños; la segunda, es extender el entendimiento por medio de la conceptualización.

Ian (2018) expone en su artículo que entender la probabilidad es un aspecto importante de los programas de estadística. Sin embargo, muchos estudiantes presentan problemas para entender estos conceptos. Por ello plantea la necesidad de explorar la estadística de tal manera que los estudiantes capten lo que se les está diciendo. El autor propone dos diferentes perspectivas para el entendimiento de la probabilidad; el primero se basa en la noción de que los estudiantes son capaces de construir su entendimiento de probabilidad cuando los docentes entablan un diálogo con ellos; la segunda aproximación para que los estudiantes entiendan la probabilidad, es extender su entendimiento del razonamiento proporcional y su habilidad de conceptualizar cómo un valor numérico se puede expresar de formas diferentes.

La primera perspectiva denominada orientación lingüística sugiere a los docentes trabajar en los nuevos razonamientos de los estudiantes, referentes al significado y la aplicación de la probabilidad. Esa construcción de conocimiento se desarrolla a través la práctica y el diálogo entre el estudiante y el docente. La segunda perspectiva se denomina razonamiento proporcional, donde se involucran los pensamientos individuales acerca de las relaciones y se comparan con las cantidades y los valores.

Este artículo es útil para esta investigación en la medida en que muestra dos formas posibles para acercar a los estudiantes a la probabilidad; la construcción del conocimiento se puede generar a través de la práctica y el diálogo, así como entre la interacción entre docente y estudiante.

### 1.1.4. Teachers and students: From an intuitive approach to a rational evaluation of probability[4]

Los autores plantean en este artículo un programa que fue utilizado para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad. Ellos parten del principio de que los docentes de matemáticas no están totalmente instruidos para enseñar probabilidad y estadística, haciendo que los estudiantes solo tengan conceptos básicos de estas asignaturas. Este programa es una herramienta que parte del concepto enseñanza – aprendizaje basado en diferentes principios.

Los investigadores exponen en su artículo un estudio conducido en colegios italianos y conectada al proyecto de M@t.abel para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, encontrando que los docentes tienen un pobre entendimiento e insuficiente preparación para dictar conceptos estadísticos. Los docentes fueron entrenados en una forma tradicional con un vago enfoque en probabilidad y estadística. Como resultado, la mayoría de los docentes tienden a enfocarse en los aspectos procedimentales de la probabilidad y la estadística, en vez del entendimiento conceptual de estos conceptos; esto causa que los profesores no sean capaces de detectar los conceptos erróneos de los estudiantes. Por lo tanto, hay una discrepancia entre el currículo que se debe seguir y lo que realmente se enseña en los salones.

Los autores presentan el programa M@t.abel, que contiene actividades para las bases de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a partir de tres aspectos; el primero

[4] Maria Pia Perelli D'Argenzio, University of Trrieste, Italy, Silio Rigatti-Luchini, Department of Statistical Science, University of Padua, Italy, Teachers, and students: "From an intuitive approach to a rational evaluation of probability", ICOTS 9 2014, Flagstaff, Arizona, Estados Unidos, descargable octubre 24 del 2020 en la URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6F1_PERELLIDARGENZIO.pdf?1405041683

es la necesidad de resolver problemas; el segundo se ocupa de las situaciones y contextos en los cuales los problemas son planteados; el tercero son los procesos que los estudiantes deben utilizar para resolver los problemas.

Los datos obtenidos del proyecto M@t.abel consideraron los diferentes estilos de enseñanza de los docentes y aprendizaje de los estudiantes. A pesar de que los profesores son los primeros en recibir un entrenamiento, son usados como un medio para transferir el conocimiento a los estudiantes. La importancia de estos resultados se observa en que los logros de los estudiantes están ligados a un cambio en la práctica docente, donde el profesor desarrolla su conocimiento de la asignatura. La segunda consideración se relaciona con el hecho de que, al estar los docentes mejor preparados para enseñar probabilidad, son capaces de asistir a los estudiantes en una forma más efectiva.

Se concluye que esta investigación propone una serie de actividades basados en tres principios: la resolución de problemas, el análisis del contexto del problema y el proceso del estudiante que debe utilizar para resolver el problema. por lo cual se brindan las pautas para hacerlo.

#### 1.1.5. Chance and necessity: The languages of probability and mathematics[5]

El Autor presenta la importancia del aprendizaje de la probabilidad para poder entender la relación que tiene con el mundo exterior, para esto propone dos métodos: el primero

[5] Kapadia Ramesh, Institute of Education, University of London, England, “Chance and necessity: The languages of probability and mathematics”, ICOTS 8 2010, LJubljana, Eslovenia, descargable noviembre 8 de 2020 URL: http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_3F1_KAPADIA.pdf?1402524970

relaciona los problemas inherentes y el segundo aborda los problemas de manera subjetiva.

Ramesh y Kapadia (2010) mencionan en su artículo que concebir las matemáticas como un lenguaje de comunicación ayuda a que esta pueda influir en otras disciplinas, explicando las similitudes y diferencias de la probabilidad y las matemáticas.

Con respecto a la probabilidad, mencionan que es una disciplina diferente a las matemáticas; surgió cuando los científicos Fermat y Pascal, en el siglo XVII, lograron establecer que se originan de los juegos de azar, encontrando: (a) la incertidumbre es parte de la vida, pero no es fácil de detectar para una situación en particular; (b) no está claro si se deben asignar probabilidades iguales o diferentes para eventos subyacentes ; (c) no se tiene una certeza de qué patrones en el pasado pueden continuar en el futuro, por consiguiente, se debe mirar un evento con una perspectiva individual y no grupal. De esta manera para comprender la probabilidad hay dos aproximaciones; la primera es experimental y se basa en frecuencias previas de un fenómeno ya estudiado; la otra aproximación es un enfoque subjetivo, basado en una variedad de experiencias previas, con frecuencias incluidas, pero no exclusivas.

Por otro lado, los autores plantean que los planes curriculares en los colegios deben abarcar los conceptos matemáticos y de probabilidad según los enfoques expuestos anteriormente. La probabilidad permite el uso de ejemplos de la vida real, sin embargo, en muy pocos casos se ejecuta y se utilizan; el contexto se olvida cuando las ideas de probabilidad se empiezan a desarrollar. Las dos disciplinas deben ser vistas como modelos para ver el mundo; el pensamiento matemático es preciso y lógico, mientras que el pensamiento probabilístico se puede presentar en términos de reglas básicas.

Es de criterio de la autora de esta tesis que este artículo brinda herramientas a los docentes para llevar a cabo la enseñanza de la probabilidad abordando tanto los problemas inherentes de la vida como los problemas subjetivos. Esto permite que los estudiantes apliquen la probabilidad a la vida real creando un razonamiento probabilístico.

### 1.1.6. A visual approach in the teaching of statistics and probability[6]

Los autores exponen en su artículo las diferentes dificultades que se presentan para explicar los temas de estadística y probabilidad, así como el hecho de que estos sean asimilados por los estudiantes. Ellos utilizan una herramienta tecnológica denominada CalEst, que ayuda con el proceso de aprendizaje y enseñanza, está herramienta genera información de una manera dinámica que mejora el entendimiento de los conceptos de probabilidad.

La herramienta CalEst se enfoca en dos componentes: (a) educacional, la cual desarrolla una serie de ideas para la enseñanza que facilita la presentación y el entendimiento de la probabilidad; (b) operacional, tiene como objetivo evaluar el nivel de comprensión del concepto de la probabilidad.

La aplicación de estos dos componentes permite al docente trabajar con los temas propuestos en las mallas curriculares de estadística y probabilidad para las escuelas primarias, secundarias e incluso para niveles superiores.

[6] Jorge Dominguez-Dominguez, CIMAT Mathematics Research Center, Mexico, J.A Dominguez-Lopez, Conteck, Mexico, “A visual approach in the teaching of statistics and probability”, ICOTS 8 2010, LJubljana, Eslovenia, descargable noviembre 8 de 2020 URL: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_9C2_DOMINGUEZ.pdf?1402524972

Esta herramienta además contiene un paquete educacional con efectos de animación y simulaciones que permite a los estudiantes aprender la probabilidad con la idea de jugar y “hazlo tú mismo”. El proyecto incorpora una serie de animaciones de los juegos clásicos de probabilidad como son: lanzar monedas, dados, ruletas, cartas, etc., que son usados para presentar de una manera clara los conceptos de densidad de probabilidad y funciones de distribución acumulativa. Las animaciones y la posibilidad de simular situaciones motivan a los estudiantes a incrementar su interés por la probabilidad, buscando nuevas ideas a través de la interacción con el material.

Este artículo presenta una herramienta tecnológica que es útil para los docentes, ya que por medio de juegos y actividades de “hazlo tú mismo”, los estudiantes pueden tener un primer acercamiento a la probabilidad y a la estadística. Esta herramienta se vuelve una guía para el docente, permitiendo que este ayude al estudiante a explorar la probabilidad, aprendiendo sus conceptos básicos.

### 1.1.7. Understanding randomness: Challenges for research and teaching[7]

El artículo expone la importancia de entender los fenómenos aleatorios y su relación con el mundo real, esto crea la importancia de la enseñanza de la probabilidad desde la primera infancia. Además, la autora menciona algunas maneras en las que se debe realizar un acercamiento a los estudiantes a los primeros conceptos de la probabilidad como sus diferentes aplicaciones.

[7] Batanero Carmen, Universidad de Granada, Granada, España, “Understanding randomness: Challenges for research and teaching”, octubre 30 CERME 9 Feb 2015, Praga, Republica Checa, descargable octubre 24 del 2020 en la URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287071/document

Batanero (2015) expone que la necesidad de entender los fenómenos aleatorios para lograr tomar decisiones correctas ha hecho que muchos países incluyan la enseñanza de la probabilidad en sus currículos escolares, desde la educación primaria hasta la universidad. La física, en el siglo XX, descubrió que el mundo no es completamente determinístico, sino que también tiene causalidad en él. La aleatoriedad es un buen ejemplo de este, creciendo así la necesidad de que sea enseñada a cada niño pequeño, teniendo en cuenta la manera adecuada para que sea introducida a cada estudiante de diferentes edades.

De acuerdo con Hacking (1975), el concepto de la probabilidad se complementa mediante dos perspectivas; la primera, como una creencia de los eventos aleatorios; la segunda, como un método para encontrar reglas matemáticas a través de datos y experimentos. Estos puntos de vista se desarrollan en múltiples perspectivas para describir eventos aleatorios y para asignarle a cada uno su respectiva probabilidad.

Las aplicaciones de la probabilidad en la enseñanza de los colegios se han limitado a los juegos de azar, lo que ha hecho que muchos docentes la consideren como parte recreacional de las matemáticas, reduciendo con esto su enseñanza.

Por otro lado, debido a la tecnología, ahora se usa la visión frecuentista para introducir la probabilidad como el límite de frecuencias relativas en una larga serie de ensayos. Esto implica un cambio de solo plantear formulas, se debe dar importancia a enfatizar en las experiencias probabilísticas, permitiendo así que los niños pequeños logren realizar experimentos y simulaciones de aleatoriedad, además de formular preguntas o predicciones de los resultados en una serie de experimentos.

En primaria se les enseña a los niños a discriminar algunos eventos posibles e imposibles en diferentes contextos, y así utilizar el lenguaje de incertidumbre, empezando con materiales como dados o monedas, los niños pueden comparar sus predicciones con análisis previos y recolectar los datos repitiendo los experimentos para estimar la probabilidad.

Como conclusión, en este artículo la autora expresa la importancia de enseñar la probabilidad a los niños desde los primeros cursos, para que así puedan aplicar de una manera correcta los conceptos aprendidos.

## 1.2. La enseñanza de la probabilidad en primaria y probabilidad de la ocurrencia de fenómenos incluyendo categorías como seguro, posible, imposible

### 1.2.1. Una experiencia sobre enseñanza de la estadística y la probabilidad en el aula infantil[8]

El autor menciona la importancia de realizar un diagnóstico de los conocimientos previos que poseen los estudiantes, además, se debe analizar qué temas realmente se deben enseñar de la probabilidad y la estadística para que sea significativa.

La investigación se realiza con niños de 4 y 5 años, donde observa las expresiones orales, símbolos y representaciones que usan cuando los estudiantes inician con el entendimiento de las primeras nociones de estadística y probabilidad. La conclusión a

[8] Alsina, Ángel; Vásquez, Claudia (2017). Una experiencia sobre enseñanza de la estadística y la probabilidad en el aula de infantil. En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 268-276). Madrid, España: FESPM.

la que llega el autor, es que los estudiantes construyen conceptos estadísticos a través de materiales de manipulación, juegos o herramientas interactivas.

Esta investigación es útil para comprender cuáles son los conocimientos previos que poseen los estudiantes, además de visualizar qué herramientas lúdicas utilizan los docentes para enseñar a los estudiantes la probabilidad.

### 1.2.2. La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza[9]

En este artículo los autores exponen la importancia de la educación matemática en el ámbito social, ayudando a los estudiantes con herramientas que les permita comprender e interpretar los datos. Plantean que los docentes deben introducir tanto la estadística como la probabilidad con ejemplos cotidianos para que la aprendan de manera intuitiva.

Asimismo, los autores presentan la importancia de incorporar la estadística en la educación infantil, para que construyan conceptos relacionados en comprender e interpretar datos. Igualmente, proporciona a los estudiantes herramientas que les ayuda a responder preguntas que requieren cierto análisis y situaciones con incertidumbre, generando así ciudadanos con pensamiento lógico. Para esto se plantea la importancia de formar personas que desde su educación temprana aprendan a usar los análisis matemáticos en contextos cotidianos.

[9] Ángel Alsina, Universidad de Girona, Monograph, “La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza.” En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística 2019, Descargable el 5 de mayo del 2020 en la URL https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/ponencias/alsina.pdf

Los autores proponen trabajar los contenidos estadísticos a través de contextos de la vida cotidiana, lo que permite que los estudiantes comprendan la utilidad de las matemáticas en la vida real, de esta manera incrementando el interés de los alumnos por las matemáticas, despertando la creatividad y el razonamiento en los estudiantes, y actuando como mediadora en una situación concreta.

Para llevar a cabo la planeación de la clase según estos parámetros, se deben conocer los intereses de los estudiantes. Una vez conocidos esos intereses se plantean preguntas en forma de retos para que empiecen a desarrollar sus conocimientos estadísticos: la recolección de datos, la organización de datos, la representación e interpretación de estos. El docente debe guiar a los estudiantes durante todo el proceso estadístico y fomentarlos a la discusión para llegar a una buena interpretación de dichos datos.

En conclusión, este artículo es una herramienta que ayuda a observar las pautas necesarias para abordar tanto la enseñanza de la estadística como la de la probabilidad para estudiantes de primaria, y la forma en la que el docente debe estimular a los niños para que aprendan la probabilidad y entiendan la forma en que se debe aplicar a la vida cotidiana.

### 1.2.3. Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil[10]

Los autores plantean la importancia de desarrollar la alfabetización estadística en la educación infantil y la manera en que ésta se debe abordar para que los estudiantes

[10] Claudia Vásquez Ortiz, (Pontificia Universidad Católica de Chile – PUC, Villarrica, Chile, Danilo Díaz-Levicoy, Universidad de Granada – UGR, Granada, España, Claudia Coronata, (Pontificia Universidad Católica de Chile – PUC, Villarrica, Chile, Ángel Alsina, Universidad de Granada – UGR, Granada,

logren utilizarla como una herramienta para la toma de investigaciones. Para lograr este objetivo los docentes deben enfocar la enseñanza en métodos investigativos para que los niños desarrollen su pensamiento y lo apliquen en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Estos autores indagan cómo desde la educación infantil se desarrolla la alfabetización estadística. Se analizan las expectativas de aprendizaje explícitas en los currículos americanos y chilenos para dicho nivel educativo, comparándolos con los componentes cognitivos y de disposición presentes en el modelo de alfabetización estadística. Tomando en cuenta los nuevos conceptos para la enseñanza de la estadística, donde ésta debe ser enseñada de una manera eficaz (e.g. Godino; Batanero; Cañizares, 1987; NCTM, 2003; Batanero; Godino, 2004).

Además, indican que los estudiantes deben comprender que la estadística es un proceso de resolución de problemas y de toma de decisiones; que es una herramienta para la investigación estadística. Los docentes deben enfocar la enseñanza de la estadística para que los estudiantes logren responder preguntas que exijan la investigación y la exploración, lo que permite desarrollar el pensamiento y los métodos estadísticos.

Se requiere considerar que, desde las primeras edades de los estudiantes, estos deben desarrollar una habilidad para reconocer, organizar, representar e interpretar datos. Estos planteamientos coinciden plenamente con las recomendaciones centrales del documento Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education

España, "Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo" desde la Educación Infantil., En el cadernos cenpec | São Paulo | v.8 | n.1 | p.154-179 | jan./jul. 2018, Descargable el 5 de mayo del 2020 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/12478/1/393-707-1-SM.pdf

(GAISE, 2016), señalan: a) enseñar pensamiento estadístico; b) centrarse en la comprensión conceptual; c) integrar datos reales con un contexto y un propósito; d) fomentar el aprendizaje activo; e) usar la tecnología para explorar conceptos y analizar datos; y f) usar evaluaciones para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Al analizar estos parámetros se sugiere que la enseñanza de la estadística debe ser un proceso de investigación para la resolución de problemas ya que este proceso permite desarrollar en los individuos una toma de decisiones acertadas. Por otro lado, los autores también sugieren que los docentes deben preparar a los estudiantes para resolver problemas que les exija investigar, lo cual les ayudará a valorar el pensamiento estadístico. En definitiva, se trata de ofrecer a los estudiantes herramientas para contestar a preguntas cuyas respuestas no son inmediatas, a la vez que les faciliten la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

La aplicación de la estadística en diferentes áreas del saber hace que ésta se enseñe desde las primeras edades, para lograr un adecuado desarrollo del pensamiento estadístico. El objetivo de esta enseñanza en todos los niveles educativos es entregar a los estudiantes las herramientas necesarias para desarrollar una alfabetización estadística que facilite la generación de un pensamiento crítico útil para la comprensión y análisis de diferentes situaciones reales. Uno de los conceptos más usados para el desarrollo de la alfabetización estadística es la elaboración de gráficas, ya que estas permiten la conexión entre disciplinas y contextos de la vida cotidiana. Además, la utilización de gráficas permite potenciar los conceptos de número, conteo y operaciones, desarrollando las competencias matemáticas.

Los autores sugieren que la enseñanza de la estadística debe plantearse a partir de situaciones contextualizadas que permita que los conceptos se aprendan de una forma inductiva, impulsando así la interconexión con las experiencias vividas (Alsina, 2012). Este análisis sugiere que la mejor forma para aprender los conocimientos estadísticos es involucrar a los estudiantes en investigaciones estadísticas (recogida, organización, representación e interpretación de datos), para que estos se familiaricen con los datos y a partir de ahí puedan sacar conclusiones.

Como conclusión, este artículo explica la enseñanza de la probabilidad y la estadística a través de métodos investigativos, para que los estudiantes aprendan de forma inductiva y así lograr aplicarla a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

### 1.2.4. La estadística y la probabilidad en educación infantil: Conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales[11]

El autor desarrolla una metodología para la enseñanza de la estadística y la probabilidad basados en estudios anteriores. En las referencias que utilizó el autor plantea que, para tener un aprendizaje eficaz de la estadística y la probabilidad, se deben abordar desde la primera infancia, ya que en esta etapa los niños aprenden por métodos inductivos contribuyendo así al entendimiento de la estadística y la probabilidad.

[11] Ángel Alsina, Universidad de Girona, “La estadística y la probabilidad en educación infantil: Conocimientos diciplinares, didácticos y experienciales”, *Revista de Didácticas Específicas*, nº 7, PP. 4-22, 2012, Descargable el 5 de mayo del 2020 en la URL: https://revistas.uam.es/didacticasespecificas/article/view/7700/7976

El autor aborda la estadística como los conocimientos que se refieren a datos, y su análisis lo que la vuelve útil para la vida diaria, fomentando un razonamiento crítico basado en la valoración de la evidencia objetiva.

Existen algunas herramientas que deben enseñar los docentes a los estudiantes para el desarrollo del pensamiento estadístico; algunas son: desarrollar proyectos sencillos en los que tengan que recoger sus propios datos a partir de la observación; ayudar a que los estudiantes sean conscientes de que cada dato aislado hace parte de un todo; explicarles a los estudiantes las tendencias y la variabilidad de los datos y cómo estas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos y poder representarlos mediante gráficas.

El estudio concluyó que a partir de los referentes teóricos analizados se pueden extraer tres ideas: a) la adquisición de conocimientos de estadística y probabilidad se inicia con las matemáticas informales; b) su enseñanza formal, en la escuela, se sitúa a partir de los 3-4 años (2º ciclo de Educación Infantil); y c) los contenidos de estadística y probabilidad se adquieren y comprenden a través de los distintos procesos matemáticos. Basado en esta propuesta se desarrolla un plan para que los docentes fomenten la identificación y operación en los estudiantes (Alsina 2006, 2011), estas orientaciones se basan en que el conocimiento matemático durante las primeras edades debería trabajarse a partir de contextos de aprendizaje de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, entre otros, de esta manera, favoreciendo así el desarrollo del razonamiento estadístico.

### 1.2.5. Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado[12]

En este artículo los autores basaron su investigación en los parámetros mencionados por el NCTM (2013). Para lograr un aprendizaje adecuado de esta asignatura se sugiere que los estudiantes reconozcan y lleven a cabo los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación, para que así obtengan el desarrollo de los conceptos básicos de la probabilidad.

Asimismo, los autores mencionan en su artículo que en los últimos años se ha incorporado la enseñanza de la probabilidad en los currículos escolares de muchos países, convirtiéndose en un desafío tanto para las instituciones como para los docentes. Indican que las instituciones educativas deben contar con profesores bien preparados que logren que sus estudiantes comprendan y entiendan estos nuevos requerimientos. Esta transformación curricular ha generado en las instituciones formadoras un nuevo desafío, ya que la mayoría de los docentes no contaron en su formación inicial con materias que le aproximaran a una enseñanza correcta de la probabilidad. Es basado en esta necesidad que los autores buscan analizar el conocimiento que los docentes de primaria necesitan para la enseñanza de la probabilidad.

[12] Ángel Alsina, Universidad de Girona, Claudia Vásquez, Pontificia Universidad Católica de Chile, "Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado", *Revista Números*, volumen 85, marzo 2014, pgs 5 – 23, descargable octubre 24 del 2020 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/3677/1/V%C3%A1squez2014Ense%C3%B1anzaNumeros85.pdf

Basados en los estándares internacionales, los autores plantean diferentes fases para construir conceptos básicos de la probabilidad. La primera fase se inicia introduciendo el vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad por medio de las experiencias vividas por los estudiantes, llevándolos a responder preguntas con términos como: probable, poco probable e improbable. En la segunda fase, se lleva a cabo la realización de experimentos aleatorios con materiales como bolitas, cartas, entre otros y así aprender a cuantificar la probabilidad de un evento. En la tercera fase, se enseña a los estudiantes a realizar cálculos simples de probabilidades de sucesos compuestos sencillos.

El planteamiento de los autores es hacer visibles los procesos que un estudiante de probabilidad debe realizar y la forma en que plantean diferentes fases para que estos procesos que se desarrollen sean de gran ayuda para los docentes, ya que brindan herramientas y estrategias para plasmarlos en el aula de clase y simplificar la comprensión de este.

#### 1.2.6. Rolling the dice – exploring different approaches to probability with primary school students[13]

En este artículo el investigador plantea un proyecto en el cual los estudiantes de primaria pueden tener un primer acercamiento a la probabilidad mediante el lanzamiento de un dado. Este experimento permite que los alumnos desarrollen dos enfoques para el entendimiento de esta asignatura; el subjetivo y el frecuentista.

[13] Markus Helmerich, “Rolling the dice – exploring different approaches to probability with primary school students”, CERME 9 Feb 2015, Praga, Republica Checa, descargable octubre 24 del 2020 en la URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287071/document

El autor menciona en su artículo un proyecto por medio del cual los estudiantes de primaria pueden desarrollar el pensamiento probabilístico acorde a diferentes acercamientos de la probabilidad. El proyecto explora el lanzamiento del número impar de un dado, realizando este experimento los estudiantes logran tener diferentes acercamientos a la probabilidad, especialmente a los enfoques subjetivos y frecuentista.

El enfoque subjetivo de la probabilidad se caracteriza por las experiencias vividas y preferencias personales de las creencias como los números de la suerte. Los estudiantes tienen ciertas ideas y concepciones con las cuales los docentes deben lidiar para generar un correcto pensamiento estocástico.

El enfoque frecuentista de la probabilidad ayuda a una comprensión más amplia de los procesos probabilísticos. Esto define a la probabilidad de un evento como el límite de su frecuencia relativa en una cantidad larga de intentos, acorde a la ley de números grandes. En primaria, lo que se enseña es a contar la frecuencia absoluta en relación con un número fijo de intentos. Este enfoque empírico se articula bien con los ambientes activos de enseñanza, en el cual los estudiantes son capaces de determinar probabilidades a través de experimentos aleatorios.

Este artículo muestra un proyecto aplicado en el aula de clase que ayuda a comprender cómo una actividad de lanzar un dado permite a los estudiantes relacionarse con la probabilidad y entender los conceptos básicos de ésta, de una manera más sencilla y cercana a los niños.

### 1.2.7. Where is your evidence? Challenging young students' equiprobability bias through argumentation[14]

El autor del artículo plantea que los estudiantes logran llegar a los conocimientos de la probabilidad por medio de conocimientos previos, muchas veces adquiridos por prácticas experimentales que realizaron a una temprana edad por medio de juegos. Sin embargo, es necesario que los estudiantes tengan acercamiento a eventos donde la probabilidad de ocurrencia no sea la misma para eventos similares, así el estudiante es capaz de enfrentarse a problemas probabilísticos en la vida real.

Este estudio se implementó a un grupo de estudiantes de 3° grado que son expuestos a un problema de investigación, el cual los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir, a los estudiantes se les presenta el siguiente interrogante: ¿Cuál es el mejor cartón de bingo? La argumentación fue empleada como un enfoque pedagógico que reta las creencias equiprobables de los estudiantes para que estos desarrollen un argumento basado en la evidencia.

Los autores evidenciaron que las creencias de los niños, su lenguaje y sus experiencias de la enseñanza formal pueden permitir la construcción de los conceptos informales de la probabilidad. En el caso de los niños pequeños estas experiencias se generan a través de los juegos, en los que se involucra la aleatoriedad; por ejemplo, cartas, dados o ruletas, y otras actividades de azar similares; usualmente los eventos tienen probabilidades iguales de suceder. Esto suele repetirse en el aula de clase, por

---

[14] Jill Fielding-Wells, Universidad de Tanzania, Australia, "WHERE'S YOUR EVIDENCE? CHALLENGING YOUNG STUDENTS' EQUIPROBABILITY BIAS THROUGH ARGUMENTATION", ICOTS 9 2014, Flagstaff, Arizona, Estados Unidos, descargable octubre 24 del 2020 en la URL: https://icots.info/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_2B2_FIELDINGWELLS.pdf

lo que se crea una necesidad de generar actividades a través de las cuales los estudiantes tengan una exposición temprana a eventos equiprobables.

El autor describe la argumentación como una herramienta pedagógica en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. La argumentación se describe como un proceso y un producto: el contenido y la estructura de la argumentación y el acto de presentar discursivamente el producto, ya sea de forma oral o escrita.

Los resultados a los que llegó el autor fueron los siguientes: la literatura sugiere que los cambios de conceptos probabilísticos pueden facilitarse creando un desequilibrio cognitivo inicial y manteniendo dicho desequilibrio lo suficiente para que los conocimientos preexistentes puedan ser reemplazados por unos conceptos más maduros. El estudio describe que el desequilibrio inicial provee una oportunidad a los estudiantes de probar los resultados probables y los resultados obtenidos a través de la experimentación. Los desafíos que los estudiantes encontraron mientras buscaban refinar sus tarjetas, desarrollar evidencia y convencer a otros de su evidencia y razonamiento, sirvieron para mantener el desequilibrio y hacer que los estudiantes buscaran mejores modelos.

En este artículo se presenta un caso aplicado en el aula de clase donde los estudiantes tienen un acercamiento a la probabilidad mediante un juego de bingo sumado, estos tipos de juego ayudan al docente a comprender los conocimientos de los estudiantes acerca de la probabilidad.

### 1.2.8. Marco teórico para la creación de situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana en la enseñanza del concepto de probabilidad[15]

Esta investigación está dirigida a docentes de primaria en ejercicio, con el objetivo de capacitarlos e indicarles cómo pueden construir el concepto de probabilidad con sus estudiantes.

El autor propone introducir el concepto de probabilidad a través de la creación de situaciones de incertidumbre a partir de contextos de la vida cotidiana bajo escenarios aleatorios. El investigador define una situación de incertidumbre como aquella que al observarla no permite conocer el resultado exacto antes de que la acción concluya.

La propuesta de trabajo que implementa el autor la realiza a través de dos niveles: (1) se le presenta a los participantes de la investigación situaciones de incertidumbre y se les pide analizar y encontrar conceptos de probabilidad; (2) el profesor debe tener la capacidad de definir una situación cotidiana, permitiendo así que el participante tenga la capacidad de crear una situación que permita un planteamiento de problemas para los estudiantes.

En los cursos de primaria se trabajan dos tipos de determinada situación de incertidumbre, los sucesos posibles y los imposibles. Para lograr este objetivo, los estudiantes deben intentar definir el experimento sobre situaciones de incertidumbre y no sobre situaciones determinadas, como sacar un chocolate de una caja de chocolates.

[15] Osorio Gonzalez Augusta, Pontificia Universidad Católica de Perú, "Marco teórico para la creación de situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana en la enseñanza del concepto de probabilidad", Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística. 129, 2019, descargable de la URL en octubre 5 de 2021: https://digibug.ugr.es/handle/10481/25938

Los resultados obtenidos de esta investigación señalan el cambio de visión que se tiene entre los docentes, ya que se evidencia la nueva forma de analizar las situaciones propuestas y la manera en que se aplican los conceptos de la probabilidad.

### 1.2.9. Sample space and the structure of probability combinations in preschoolers[16]

El objetivo de este artículo es investigar cómo los niños pequeños son capaces de determinar combinaciones con diferentes sucesos. La metodología para realizar el análisis fue seleccionar dos grupos de preescolar de un colegio de Atenas, para determinar si eran capaces de entender combinaciones de 2, 3 o 4 eventos.

La primera pregunta que se les realiza a los dos grupos se orienta a partir de la muestra de una ruleta con 4 espacios, tres de ellos rojos y uno verde. Para el primer grupo, se realizan tres experimentos; en el primer experimento se les muestra una ruleta de cuatro espacios; hay dos verdes y dos rojos, y se les pregunta qué color es más factible que salga al hacer rodar la flecha. En el segundo experimento el círculo se divide en seis; dos partes son rojas, dos verdes y dos azules, y se ponen los colores seguidos; y en el tercer experimento se divide en ocho, dos rojos, dos azules, dos verdes y dos cafés, los colores deben ir seguidos. Para el segundo grupo los experimentos son iguales, sólo que los colores están mezclados en la ruleta.

Los resultados obtenidos por los autores mostraron que, en la primera pregunta, 15 niños de 20 respondieron correctamente. Para la pregunta de la ruleta, los niños

[16] Z. Nikiforidou, J. Pange, "Laboratory of New Technologies and Distance Learning", Department of Early Childhood Education University of Ioannina-Greece, CERME 5, 2007, Descargable de la URL Oct 5, 2021: https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/Didaktik_der_Mathematik/BiehlerRolf/WG5.pdf#page=99

responden de manera intuitiva, diciendo unos que la flecha caerá en el rojo y otros en el verde. Para la tercera pregunta, la ruleta tiene seis espacios; el color que más escogieron fue el azul ya que este tiene un poder de atracción mayor hacia los niños. Cuando los colores se mezclaron, los niños tuvieron mayor dificultad en responder. En el momento de añadir un color más, los niños empezaron a perder la concentración y no lograron dar una respuesta acertada.

Además, los resultados de la investigación indican que la estructura del espacio muestral afecta las respuestas de los niños, favoreciendo las ruletas cuyos colores estaban en parejas; cuando los colores se encontraban de forma desordenada los niños respondieron intuitivamente o utilizando el azar. Este experimento reafirma la idea que los niños pequeños responden intuitivamente a los estímulos visuales.

Este trabajo ofrece ideas para la presente investigación bajo que contextos se puede construir el concepto de espacio muestral.

## 1.3. Construcción de experimentos aleatorios – determinísticos y espacio muestral

### 1.3.1. De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: Elementos para su caracterización y desarrollo[17]

Los autores señalan en el artículo una orientación a los docentes de básica primaria frente a la manera de desarrollar el pensamiento probabilístico a través de tareas que impliquen situaciones de la vida real. Está investigación, se dividió en dos partes, la

[17] Alsina Ángel, Vásquez Ortiz Claudia, "De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: Elementos para su caracterización y desarrollo", *UNIÓN Revista Iberoamericana de educación matemática* Número 48, diciembre 2016, páginas 41 – 58, Descargable en la URL Nov 1 2021: http://funes.uniandes.edu.co/17082/1/Alsina2016De.pdf

primera parte explican las competencias matemáticas y las probabilísticas, y en la segunda parte describen tareas basadas en circunstancias reales, donde se desarrolla la alfabetización matemática en el estudiante.

Los autores señalan que las principales dificultades para la enseñanza aprendizaje de la probabilidad se presentan en la educación Infantil y Primaria, ya que muchas veces los docentes no están capacitados para enseñar este concepto, la mayoría de ellos lo que hacen es presentar este concepto como está establecido en los libros de texto dando solo importancia a encontrar un resultado.

Teniendo en cuenta este punto de vista, el objetivo del artículo es brindar a los docentes de básica primaria metodologías didácticas, que les permita desarrollar las habilidades probabilísticas de los estudiantes con tareas que simulen situaciones a través de experimentos que se presentan en el mundo real, de esta manera los estudiantes adquieran competencias y logren aplicar los conocimientos obtenidos de probabilidad, y no se reduzcan a una aplicación de fórmulas que conviertan los problemas en ejercicios de aritmética.

### 1.3.2. La experimentación aleatoria y su simulación en el aula: Estrategias para la reconstrucción histórica del concepto de probabilidad[18]

La probabilidad y la estadística a través de los siglos ha hecho que los docentes replanteen la manera en que estas asignaturas son enseñadas, debido a que la educación en la actualidad está exigiendo desarrollar pensamiento matemático y para

[18] Pereira Alicia, Yedig Das Neves, "La experimentación aleatoria y su simulación en el aula: Estrategias para la reconstrucción histórica del concepto de probabilidad", CUREM 5, septiembre 2015, Montevideo, Uruguay, Descargable en la URL en noviembre 1 de 2021: http://funes.uniandes.edu.co/17785/1/Pereira2015La.pdf

este caso pensamiento probabilístico, de esta manera, logrando formar ciudadanos críticos que sean capaces de tomar decisiones en diferentes contextos que se les pueda presentar.

El concepto de probabilidad se define como la frecuencia relativa con la que ocurre un suceso, para esto se plantea analizar la tendencia a largo plazo de las frecuencias relativas a medida que se incrementan los intentos. Para esto, los autores sugieren buscar ejemplos actuales a través de los cuales se desea conocer los resultados de algún experimento. La frecuencia relativa con la que ha ocurrido un suceso permite compararla con la de otros sucesos para lograr encontrar un valor medio y así convertir el experimento en una variable cuantitativa.

Es criterio de la autora de esta tesis, que la investigación indica la importancia de buscar ejemplos actuales y en contexto para encontrar resultados de experimentos aleatorios, pero no mencionan de qué forma podría ser un aprendizaje significativo para el estudiante.

### 1.3.3. Construcción de espacios muéstrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria[19]

El objetivo de esta investigación es la construcción del espacio muestral, para esto, los autores analizan las respuestas de 55 estudiantes costarricenses de grado quinto de

[19] Hernández-Solís Luis Armando, Universidad Estatal a Distancia-Costa Rica, Batanero Carmen, Gea María M, Álvarez-Arroyo Rocío, Universidad de Granada, "Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria", Educación Matemática, vol. 33, núm. 1, abril de 2021, descargable 8 octubre de 2021 en URL: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol33/1/07_REM_33-1.pdf

primaria. Con respecto a la metodología implementada en este estudio, utilizaron dos experimentos, el primero con la utilización de urnas y el segundo un juego con ruletas.

Para el desarrollo de estas actividades, los autores les piden a los estudiantes que construyan el espacio muestral con la descripción de un suceso seguro, posible e imposible. Los resultados fueron clasificados de acuerdo con la construcción de los espacios muéstrales, descubriendo que para los estudiantes era más fácil construir un espacio muestral con el concepto de posible y mucho más difícil para seguro e imposible.

Debido a la dificultad que tuvieron algunos estudiantes en la primera actividad, los autores proponen otros problemas para que los estudiantes identifiquen las diferencias de un suceso posible, seguro e imposible. Para esto, les plantean a los estudiantes que identifiquen sinónimo para las palabras posible, imposible, seguro. A partir de ahí se les pide construir el espacio muestral con un número pequeño de sucesos. Esto se realiza con el objetivo comprender las estrategias que ellos utilizan para llevar a cabo la resolución de problemas.

Los autores concluyen que el lenguaje influye en el conocimiento informal de las matemáticas, donde las ambigüedades pueden llevar a la formación de conocimientos equivocados. Por lo cual es importante que los docentes dediquen tiempo para afianzar los términos más importantes de probabilidad y que los estudiantes cuando tengan que aplicarlos no lleguen a cometer errores.

En esta investigación se evidencia que no tienen en cuenta qué otras actividades podrían construir los conceptos de sucesos posible, imposible y seguro como es el planteamiento de problemas no rutinarios.

## 1.4. La resolución de problemas en la enseñanza de la probabilidad

### 1.4.1. Can grade 3 students learn about variation?[20]

Los autores del artículo mencionan la importancia de la enseñanza de la variación de los datos a estudiantes de primaria para que cuando lleguen a cursos más avanzados tengan más herramientas para afrontar casos de probabilidad.

Jane M. Watson y Ben A. Kelly, explican en su artículo la investigación que realizaron al observar la manera de enseñar incertidumbre, con el énfasis de entender qué rol juega la variación en los procesos asociados con la media de la aleatoriedad, la recolección y análisis de los datos. El interés de la investigación no sólo se basa en el aprendizaje de la probabilidad básica y el tratamiento de los datos, también incluye el desarrollo de la comprensión de la influencia que tiene la variación en los resultados en relación con la observación de un patrón.

A menudo el concepto de variación es poco enseñado en la educación primaria debido a su complejidad, por lo cual los estudiantes no tienen un conocimiento adecuado de esto. La variación es un elemento importante para entender la estadística y la aleatoriedad; por lo tanto, si se introduce a los estudiantes a través de materiales y actividades, estos logran obtener una apreciación realista de la variación.

### 1.4.2. The Teaching of Probability Theory as a New Trend in Greek Primary Education[21]

[20] Watson Jane M., Kelly Ben A., “Can grade 3 students learn about variation?”, ICOTS 6, Cape Town SudAfrica, descargable noviembre 5 de 2020 en la URL: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2a1_wats.pdf

[21] Chrisanthi Skoumpourdi, “The Teaching of Probability Theory as a New Trend in Greek Primary Education”, ICME 10, Dinamarca, 2004, descargable Marzo 5 del 2021 en la URL; https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/44061716/6.3.1.4.pdf?1458816103=&response-content-

En el artículo los autores explican la importancia de la introducción de la probabilidad en los currículos escolares, ya que es importante trabajar este concepto para poder hacer predicciones y tomar decisiones bajo situaciones de incertidumbre. La probabilidad es importante puesto que les brinda a los estudiantes oportunidades para interesarse en las actividades de aprendizaje sin importar el grado o la edad del estudiante.

El autor analiza diferentes currículos de todo el mundo, descubriendo que: en Estados Unidos, Canadá, Inglaterra y Chipre, tienen un poco más desarrollada su tendencia de incorporar la probabilidad a estudiantes de primaria. En Grecia, la probabilidad se ha introducido en los currículos como objetivo, pero los libros de texto y los docentes no lo han implementado.

Con respecto a Grecia, los textos introducen desde el cuarto año de primaria y las situaciones de la vida real están unidas a las matemáticas a través de ejemplos, que muchas veces no son claros y sus conceptos probabilísticos tampoco. En general, el capítulo de probabilidad en los libros se encuentra al final y muy pocas veces es bien enseñado por los docentes, ya que pueden tener malinterpretaciones de los conceptos o ejemplos utilizados.

Es de criterio de la autora de la presente tesis, que Grecia se puede comparar con lo que ocurre en Colombia, ya que generalmente se enseña al final del año y lo explican

---

disposition=inline%3B+filename%3DSkoumpourdi_C_2004_The_Teaching_of_Proba.pdf&Expires=1615661409&Signature=aDLpWQJiomiXQAOklA7DnrZdj0OrPOEEfo~vGG0zVAEtJ4PQIIHWJhj-3qY6b6pcNpgP~TdrNiEi0Ajkmp53bA-05ABPnEp5fp5t3PAdJpj3Ix7yOOC880e2SRxIY~vsQP~YZymudPyqvsNpigYJAJw2LBsGh3Kqim9fCbFRSfCDRiCx4QE22YNhb9v-v4IGrczt5OoEYZiIWe8BHFAd0iPXkl3mtuNOpw7wHVW3FfTeJD~C2d8~A0WIstx7YfATfljP1zrlrnFQWXr8FBAeXG125Hd~TFH1iyoHxAQoZRpON--IfdF1Y-N7ZAIZrk9oA7~EXiCd-Srcxg4OjRR-sw__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA

de una manera superficial presentando más atención a temas que intervienen en el pensamiento numérico.

### 1.4.3. ¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad? Un primer análisis desde el currículo de Educación Primaria[22]

Los autores analizan el nivel de exigencia cognitiva de los docentes y de los estudiantes en relación con la enseñanza de la probabilidad, en la educación primaria de Chile. Esto permite que las instituciones logren desarrollar de una mejor manera los currículos para la enseñanza de la probabilidad, los investigadores indican que se debe generar un mayor énfasis en fomentar la comprensión de los conceptos probabilísticos.

Los investigadores, proponen actividades con el fin de evaluar el tipo de tareas que dejan los docentes y que sirven como guía para que estos diseñen sus propias actividades. Para lograr este objetivo, los docentes deben tener el conocimiento para asignar tareas que estimulen el razonamiento y la resolución de problemas, además de desarrollar un pensamiento probabilístico.

Los resultados de estas actividades son analizados a través de los niveles planteados por Smith y Stein (1998), donde clasifica la exigencia cognitiva en cuatro niveles que son: (1) memorización. Los estudiantes reproducen de memoria las fórmulas y reglas expuestas en clase; (2) procedimientos sin conexiones. Los estudiantes usan algoritmos a partir de procedimientos la cual no requieren explicaciones ya que sólo obtienen respuestas correctas; (3) procedimientos con conexiones. Allí los estudiantes

[22] Claudia Vásquez Ortiz, Universidad de Girona, Nataly Pincheira Hauck, Pontificia Universidad Católica de Chile, Danilo Díaz-Levicoy, Universidad de Granada, España, Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.3, 1165-1182, 2016 Descargable el 5 de marzo del 2021 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/8696/1/V%C3%A1squez%2C_Pincheira_y_D%C3%ADaz-Levicoy.pdf

utilizan los procedimientos para desarrollar niveles más profundos de comprensión y para solucionar los problemas que necesitan de cierto grado de esfuerzo cognitivo; (4) construcción de las matemáticas. Para la resolución de problemas se requiere un pensamiento complejo y que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos y procesos matemáticos. Además, que lleven a cabo un análisis de cada pregunta y logren entender la naturaleza impredecible de los procesos de solución.

Los autores encuentran un bajo nivel asignado para la probabilidad, y muy pocos tiene el nivel tres o nivel cuatro de exigencia cognitivo. Por lo que es necesario complementar las tareas sobre la probabilidad con los niveles altos de exigencia cognitiva para permitir un desarrollo profundo de comprensión y un pensamiento probabilístico más complejo.

El artículo permite a los docentes comprender los diferentes niveles de exigencia cognitiva que pueden tener las tareas matemáticas, específicamente las de probabilidad, esto permite enfocar las tareas de una forma que permita a los niños desarrollar sus conocimientos y ponerlos a prueba para que crean un pensamiento probabilístico útil en su vida diaria.

### 1.4.4. Probability in Primary School[23]

Los autores plantean la importancia de introducir la probabilidad a estudiantes de primaria, ya que este se vuelve una herramienta indispensable para comprender las situaciones de la vida real, las cuales involucran eventos de probabilidad y

[23] Maja Zobenica, Universidad de Novi Sad, Sofija Sudzukovic, Universidad de Novi Sad, Ljubica Oparnica, Universidad de Novi Sad, Conference: “Education and the Social Challenges at the Beginning of the 21st Century” At: University of Novi Sad, Faculty of Education in Sombor Volume: 1, noviembre 2016 Descargable en marzo 5 del 2021 en la URL: https://www.researchgate.net/publication/312161777

aleatoriedad. Si se introduce la probabilidad a los niños en las edades tempranas, es más fácil que los estudiantes de niveles más altos logren aplicar estos conceptos de una manera más eficaz.

Los autores proponen dos experimentos sencillos para introducir a los estudiantes al concepto de probabilidad, estos son: rodar una ruleta y lanzar un dado. Al iniciar con cada experimento, los investigadores les piden a los estudiantes que indiquen la probabilidad para cada suceso propuesto sin realizar ningún cálculo matemático. Además, plantean otra actividad en la cual se introduce una línea con las palabras, que son: probable, improbable y poco probable.

Los resultados de la investigación demostraron que los estudiantes de primaria logran entender conceptos básicos de probabilidad y problemas sencillos donde tienen que encontrar sucesos probables, improbables y poco probables, de esta manera, los autores de la investigación evidencian que la enseñanza con niños de primaria permite la construcción de conceptos de probabilidad para dar solución a problemas.

### 1.4.5. Simulating the risk without gambling: Can student conceptions generate critical thinking about probability?[24]

La autora del articulo introduce la importancia de desarrollar el pensamiento probabilístico a partir del pensamiento determinístico, esto se logra utilizando actividades sencillas como simular el giro de la ruleta y analizar cada uno de los resultados. El experimento se desarrolla con 27 estudiantes de cuarto grado de

[24] Annie Savard, MacGill University, Canada, "Simulating the risk without gambling: Can student conceptions generate critical thinking about probability?", Contributed Paper, ICOTS 8 Ljubljana, Eslovenia, 2010, Descargable el 5 de marzo del 2021 en la URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.205.1120

Quebec (Canadá), mostrando que los niños de primaria pueden entender conceptos básicos de probabilidad.

En este experimento, los estudiantes deber simular el giro de una ruleta y luego analizar sus resultados. El objetivo de esta actividad, es hallar la probabilidad de sacar un determinado color en la ruleta, esta posee cinco colores, el experimento lo realizan cien veces. Los estudiantes después de realizar estos intentos tienen las herramientas para evaluar si las probabilidades de sacar un determinado color son equiprobables o si tienen probabilidades diferentes. Al analizar cada uno de los resultados, los estudiantes empiezan a desarrollar su pensamiento probabilístico, ya que deben ir más allá de sus conocimientos y analizar frecuencias para tomar la decisión de jugar o no.

Las conclusiones a las que llega son que las simulaciones de juegos de azar, en este caso, la ruleta, desarrolla el pensamiento probabilístico, cuándo el estudiante compara sus resultados con la predicción, puede observar la variación, generando así un pensamiento crítico. Este pensamiento se vuelve importante para la probabilidad ya que ayuda a los estudiantes a evaluar la veracidad de la simulación.

Para la autora de la presente tesis, considera que, a través de implementación de actividades sencillas se puede desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes.

#### 1.4.6. The teaching of statistics and probability in mathematics undergraduate courses[25]

[25] Lori Viali, Departamento of statistics, PUCRS/UFRGS, Brasil, "The teaching of statistics and probability in mathematics undergraduate courses" Contributed Paper, ICOTS 8 Ljubljana, Eslovenia, 2010, Descargable el 5 de marzo del 2021 en la URL: http://icots.info/icots/8/cd/pdfs/contributed/ICOTS8_C177_VIALI.pdf

La investigadora analiza los currículos de primaria en Brasil con respecto a las asignaturas de estadística y probabilidad. Se muestra un especial interés en estas asignaturas ya que el mundo en el que vivimos es un mundo cambiante; razón por la cual, es necesario tener herramientas para poder entender toda la información que llega a nuestras manos al igual que analizarla.

Los currículos en Brasil sugieren que ejercicios de incertidumbre deben ser introducidos desde los grados de primaria, así como los primeros conceptos de probabilidad y estadística. En este artículo, señala si realmente estos conceptos están siendo enseñados en la primaria, y para evaluarlo, la autora analiza los currículos de formación docente, para evidenciar si cuentan con las competencias suficientes para enseñar conceptos estadísticos en primaria.

Al analizar los resultados la autora indica que la mayoría de los currículos dedican poco tiempo para enseñar probabilidad y la estadística, a pesar de ser una herramienta fundamental para entender el mundo no determinístico y ser un complemento tanto para las ciencias exactas como para las ciencias sociales. Muchos de los docentes no comprenden la importancia de enseñar estas asignaturas en primaria y otros cuantos no la comprenden bien por lo cual no la imparten.

Debido a la falta de instrucción de los docentes y a las falencias en sus conocimientos con respecto a la probabilidad y la estadística, los estudiantes de primaria están lejos de recibir una educación de calidad con respecto a estos temas. A pesar de los cambios curriculares en las mallas de los cursos de primaria, donde se introduce la probabilidad y la estadística, no se asegura el correcto conocimiento del docente para que esto sea enseñado de una manera correcta.

Este artículo muestra la importancia de realizar modificaciones en los currículos de la enseñanza en la formación docente, pues la autora de la investigación indica que, si no se hace esta modificación, no es posible brindar las herramientas necesarias a los alumnos de primaria para que comprendan y sepan utilizar la probabilidad en casos de la vida real.

### 1.4.7. Step-by-step activities in the classroom preparing to teach the frequentisti definition of probability[26]

La autora menciona la importancia de tener actividades que introduzcan en los docentes y estudiantes el concepto de probabilidad, por medio de frecuencias relativas y frecuencias acumuladas. Se debe iniciar con experimentos sencillos como lanzar una moneda, para pasar de un análisis cualitativo a uno cuantitativo.

En el artículo exponen una actividad que permite explicar la definición frecuentista de la probabilidad, esto se realiza a través de lanzar una moneda, pero en vez de decir si cae cara o sello, se le asigna el valor de 1 y 0 a los lanzamientos.

El primer paso para llevar a cabo la actividad es que los estudiantes con ayuda del docente, discutan las diferentes respuestas al problema planteado. Ellos deben iniciar con anotar los resultados de cada lanzamiento por 30 veces, estos deben ser registrados en una tabla, donde deben indicar para “cara” el número 1, y para “sello”, el número 0. Luego deben hallar la frecuencia acumulada como la relativa para analizar

[26] Lisbeth K Cordani, University of Sao Paulo, Brazil, “Step-by-step activities in the classroom preparing to teach the frequentisti definition of probability”, ICOTS 9, Flagstaff, Arizona, USA, 2014, Descargable el 5 de marzo 2021 en la URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6D1_CORDANI.pdf?1405041676

los resultados obtenidos. A partir de los resultados se puede presentar la definición de probabilidad, a través de casos posibles y casos totales.

Para la autora de la investigación concluye que este tipo de activadas son una herramienta útil para que los docentes realicen una clase más dinámica y proactiva, además, hacen que los estudiantes se interesen más en la materia, así mismo, de retroalimentar los conceptos de probabilidad para aquellos estudiantes que presenten ciertas dificultades.

Este artículo brinda una actividad útil para aplicar en el aula de clase y así poder trabajar con los estudiantes conceptos como frecuencia relativa, la frecuencia absoluta y la probabilidad de números grandes. Además, ayuda a evaluar las dificultades que puedan presentar los alumnos en el entendimiento de ciertos conceptos.

### 1.4.8. Learning and teaching probability in the 21st century[27]

Los autores durante el articulo plantean la importancia de utilizar herramientas tecnológicas para realizar un acercamiento de la probabilidad a los estudiantes, y que los docentes con estas ayudas replanteen sus clases para la integración de dichas tecnologías creando una dinámica diferente en el aula de clase, de este modo el docente y el estudiante puedan interactuar más.

Los autores indican como la utilización de herramientas digitales como lo son los libros virtuales y celulares, así como la integración de imágenes, videos y animaciones, permiten la manipulación de problemas interactivos.

[27] Maurizio Manuguerra, Macquarie University, NSW Australia, Peter Petocz, Macquarie University, NSW Australia “Learning and teaching probability in the 21st century”, ICOTS 9, Flagstaff, Arizona, USA, 2014, Descargable el 5 de marzo 2021 en la URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6D2_MANUGUERRA.pdf?1405041677

En la probabilidad, los docentes deben escoger su estrategia educativa de una manera correcta, para que no haya insatisfacción en los estudiantes o dificultades con las actividades de aprendizaje. Por lo cual se presentan ejemplos del uso de la tecnología contemporánea como herramienta para mejorar la enseñanza de los estudiantes. El primer ejemplo es presentar un video acerca del tema que se va a introducir a los estudiantes, manteniendo así la atención de estos. Esto permite que el educador modere el curso de tal manera que el contenido se vuelva más fácil de navegar e integrar, haciendo que el estudiante comprenda los contenidos de manera eficiente.

Otra herramienta que puede ser útil para la enseñanza de la probabilidad es la introducción de animaciones que permitan la explicación más sencilla de un tema en específico. También el uso de imágenes ayuda en la interacción de los estudiantes con la asignatura. Sin embargo, se debe medir el uso de las herramientas tecnológicas para que la enseñanza de la probabilidad no pierda su enfoque. Para evitar esto se pueden incluir juegos que apliquen la probabilidad y la incertidumbre.

Al analizar las reacciones que tuvieron los estudiantes cuando se les presentó la materia de probabilidad en una forma más interactiva, fueron favorables, teniendo una mejor recepción hacia la asignatura, facilitando así su aprendizaje y comprensión de los conceptos. Además, fomentaron una mejor relación entre el docente y el estudiante.

Este artículo brinda un acercamiento de cómo se puede utilizar las herramientas digitales para trabajar el concepto de probabilidad para que los estudiantes logren un aprendizaje significativo y un mayor interés por este tipo de asignaturas.

### 1.4.9. Experimental Probability in Elementary School[28]

La autora en su artículo muestra diferentes experimentos que se pueden abordar para comprender la probabilidad, y cómo a partir de estos los estudiantes logran entender y hallar la probabilidad teórica aplicándola en eventos en que involucren la incertidumbre.

La definición de probabilidad según la autora indica que es la forma de predecir un resultado por medio de la experimentación, por lo cual se plantea un ejercicio de clase para entender mejor esta definición. Si se tiene un cubo amarillo, dos rojos, dos verdes y cinco azules en una bolsa, al sacar un cubo de la bolsa y anotar su color para luego volverlo a guardar, y repetir este experimento cincuenta veces con el fin de observar cuál es el color que más se repite, la autora indica que este experimento es una forma obvia de encontrar la probabilidad pues se sabe que el color azul es el que más se repite.

La investigadora sugiere otro tipo de experimento que consiste en lanzar un vaso al aire y observar en qué posición cae; puede caer parado hacia arriba, parado hacia abajo o de lado. Para saber la probabilidad de cada una de las posiciones se debe repetir el experimento unas cincuenta veces, porque no hay manera de calcular la probabilidad teórica sin realizar el experimento.

La autora menciona que entender la probabilidad experimental le permite al estudiante comprender el significado real de la probabilidad, además, de comprender la diferencia

---

[28] Lane Andrew, Arapahoe Community College, Littleton, Colorado, Usa, “Experimental Probability in Elementary School, Teaching Statistics”, Volume 31, Issue 2, pgs 34 -36, Summer 2009, Descargable el 5 de Marzo 2021, en la URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9639.2009.00362.x

entre los elementos de la muestra y los resultados de los lanzamientos, de esta manera, los estudiantes logran comparar la probabilidad experimental con la teórica. Con cada experimento se permite a los alumnos tener una discusión acerca de las posibles probabilidades que pueden ocurrir.

Así mismo, al trabajar la probabilidad por medio de experimentos, los estudiantes pueden descubrir que ésta no depende del azar o de la persona que lo desarrolla, ellos entienden que la probabilidad es objetiva y que no se afecta por la emoción o la suerte, permitiendo el acercamiento a los estudiantes para que entiendan el concepto de la probabilidad teórica y comprender los fundamentos principales de la aleatoriedad.

Este artículo muestra la importancia de trabajar la probabilidad experimental para conseguir que los estudiantes tengan su primer acercamiento con la probabilidad.

### 1.4.10. Changing the understanding of probability in talented children[29]

Los autores plantean en este artículo la importancia de enseñar probabilidad a niños de primaria, y la manera en que su aprendizaje debe ser evaluado mediante respuestas argumentadas a preguntas de situaciones en las que la aleatoriedad está presente.

Soledad Estrella y Raimundo Olfos exponen en su artículo la efectividad de una secuencia de clases de probabilidad dictada a estudiantes entre 11 y 13 años; se les enseña a contextualizar situaciones que envuelven decisiones de incertidumbre y la

[29] Soledad Estrella, Institute of Mathematis, Pontifical Catholic University of Valparaiso, Chile, Raimundo Olfos, Institute of Mathematis, Pontifical Catholic University of Valparaiso, Chile, “Changing the understanding of probability in talented children”, Contributed paper, ICOTS 8 2010, LJubljana, Eslovenia, descargable el 5 de marzo en la URL: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C256_ESTRELLA.pdf?1402524974

confrontación de la intuición con la probabilidad experimental. Además, se introduce los conceptos de equiprobable, no equiprobable, dependiente e independiente, esto se trabaja en parejas por medio de la experimentación y la discusión en el aula de clase.

En Chile el desarrollo de la educación ha sido una prioridad para formar seres humanos con pensamiento crítico, es por esto, que la Universidad Católica de Valparaíso desarrolló un programa denominado BETA PUCV, que ayuda a los niños talentos de los estratos más bajos a acceder a educación de calidad. La probabilidad fue introducida en los currículos de primaria desde 2009, creando un desafío para los docentes que deben enseñar esta asignatura, ya que muchos de ellos, no tienen los conocimientos suficientes o las herramientas necesarias para enseñar este concepto. Es por lo que se sugiere presentar una situación problema a grupos de estudiantes y fomentar la discusión en clase para que los niños logren llegar a las respuestas de las situaciones planteadas a través de sus pares, generando en ellos nuevas estrategias y argumentaciones. Esta forma de presentar la probabilidad genera en los estudiantes un pensamiento más independiente y desarrolla en ellos habilidades comunicativas que antes no poseían.

Para analizar la situación, la investigadora toma 22 estudiantes de grado quinto y sexto; participan 14 niños y 8 niñas, con el objetivo de que estos adquieran conocimientos de probabilidad y combinatoria realizando experimentos aleatorios que les permite iniciar con un lenguaje de aleatoriedad. Se realiza una prueba de conocimientos antes de llevar a cabo la actividad y una prueba después de seis semanas, para observar cuáles fueron los conocimientos aprendidos.

En los resultados se observó que los estudiantes después de las seis semanas de actividades podían comprender la diferencia entre eventos dependientes e independientes, así como expresar la probabilidad por medio de fracciones. De estos resultados, se concluye que los estudiantes al final del curso mejoran su argumentación acerca de la probabilidad de los eventos aleatorios, lo que permite a los alumnos generar un pensamiento probabilístico a partir de los conceptos.

Este artículo muestra las pautas para evaluar los conceptos de probabilidad que deben aprender los estudiantes en un curso de esta materia. Esto se logra mediante la mejora en la argumentación de las preguntas planteadas en situaciones que involucran eventos aleatorios. Además, brinda una pauta para tener una enseñanza efectiva de la probabilidad en estudiantes que no habían visto esta asignatura antes.

## Conclusiones del capítulo 1

Las investigaciones anteriores muestran diferentes metodologías para introducir el concepto de probabilidad, su enseñanza aprendizaje y la práctica que desarrollan. En los trabajos investigativos expuestos anteriormente se evidencia que, para introducir este concepto, los estudiantes deben repetir varias veces un suceso aleatorio y anotar sus resultados para evidenciar el concepto de probable, poco probable y no probable, pero no indican cómo estás metodologías ayudan a desarrollar el pensamiento probabilístico.

Por otro lado, estos trabajos no hacen referencia a cómo construir el concepto de probabilidad de la ocurrencia de fenómenos a través de la resolución de problemas para desarrollar el pensamiento probabilístico de los estudiantes, por lo que se ve la necesidad de seguir indagando el cómo desarrollar este pensamiento a través de la resolución de problemas, en busca que los estudiantes encuentren su propia estrategia de solución a través problemas planteados y de esta forma analizar las diferentes soluciones que puede brindar el estudiante mediante diferentes acciones que ayudan a construir procesos de interiorización, de modo que logre abstraer el concepto y desarrollar este pensamiento.

# CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene como objetivo situar al lector de la presente investigación en la perspectiva conceptual utilizada en ella.

El marco teórico está dividido en tres partes: primero, se exponen los orígenes de la probabilidad; aquí se detalla y se destacan algunos matemáticos y definiciones para tomar argumentos que ayuden al diseño de las actividades con el objetivo de desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes.

Segundo, se revisa la teoría de Schoenfeld en la resolución de problemas. De esta manera se analiza de qué manera los estudiantes dan solución a una serie de problemas relacionados en la construcción de probabilidad en la ocurrencia de fenómenos posibles, imposibles y seguros. Por último, se describirá la educación matemática realista (EMR), trabajo de Hans Freudenthal, quien indica que las matemáticas son una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero también es una actividad de organizar un objeto de estudio.

## 2.1. Orígenes de la Probabilidad

La palabra *probabilidad* llegó a través del francés antiguo y proviene del latín. Designa la verosimilitud de la ocurrencia de algún acontecimiento y se vincula con lo incierto.

Originalmente, se refería más a la aceptación de algún hecho verosímil por parte de los hombres o incluso como demostrable. La palabra adquirió su significado definitivo durante el siglo XVII con los primeros trabajos matemáticos sobre el azar y, más precisamente, sobre el funcionamiento de los juegos del azar.

La palabra *aleatorio*, proviene del latín y se usaba para designar los juegos de dados. Se especula que el origen de esta palabra puede ser el nombre de un hueso, ya que los primeros dados estaban construidos con huesos. Esta palabra es famosa en la frase de Julio César “Alea iacta est” (“la suerte está echada”), que pronunció al cruzar con su ejército las aguas del Rubicón, hecho que inició la guerra civil contra Pompeya.

La palabra azar, desciende del árabe que significa “dado”. Curiosamente, está última proviene del nombre de la flor blanca del naranjo y del limón, azahar o flor de azahar. Este vínculo proviene de un dado antiguo con dos caras, una de las cuales se marcaba con el motivo de la flor de naranjo y marcaba la suerte. Hasta hoy en día, la palabra *azar* en árabe se refiere a la suerte y no tanto a la incertidumbre. En inglés, esta palabra adquirió el significado de “peligro”.

La palabra *probable* tiene cierta connotación positiva. Algo probable tiene cierto grado positivo de verosimilitud.

Los griegos, grandes geómetras, desarrollaron todo tipo de matemáticas, pero no parecen haber llegado a grandes conclusiones respecto a probabilidades. Un obstáculo mayor para esta tarea consistió en la creencia en que lo que se percibía como azar era una manifestación de alguna entidad oculta y poderosa. Suerte, casualidad, coincidencia, destino son solo algunos de los conceptos que se invocan para referirse a los hechos inciertos. Los primeros en medir o cuantificar el azar fueron apostadores que buscaban sacar provecho de los juegos de azar.

Para medir un evento azaroso, se le asigna una probabilidad, un numero entre 0 y 1, donde 0 significa que el evento no ocurra, y 1 que ocurra con la máxima certeza.

Existen al menos dos formas de definir la probabilidad, la primera es a través de la frecuencia. Al observar un fenómeno repetidas veces, la frecuencia es el cociente entre el número de veces en que ocurrió y el número total de observaciones. Por ejemplo, si tiramos una moneda 100 veces y salió cara 49 veces, la frecuencia de caras es 49/100.

Otra forma de asignar una probabilidad es intentando cuantificar nuestra confianza en que cierto evento ocurrirá, es decir la apreciación subjetiva de la probabilidad de algún evento. De este modo, se puede dar sentido a oraciones como "*la probabilidad de que los senadores voten a favor de cierta ley es del 75%*". No es posible repetir la votación un gran número de veces y calcular su frecuencia, pues la votación ocurre solo una vez.

Durante mucho tiempo, los jugadores solo podían valerse de su intuición y experiencia, y no contaban con métodos sólidos para optimizar sus probabilidades de éxito. El concepto de probabilidad como se entiende hoy en día demoró siglos en llegar a los diccionarios. En la Grecia antigua, el término *probable* se refería a "*aquello que es admitido por todos los hombres designados como sabios o personas ilustres*". La noción de probabilidad que hay hoy en día y su relación con lo incierto parece haberse asentado durante la Edad Media y el Renacimiento.

El primer estudio moderno de las probabilidades del que se sabe hoy en día es un tratado de Girolamo Cardano (1501 – 1576), escrito alrededor de 1563 y publicado de forma póstuma en 1663. En este trabajo, Cardano estudia juegos de uno, dos y tres dados e introduce la idea de equiprobable, es decir, que todos los sucesos tienen la misma oportunidad de ocurrir.

Sin embargo, los verdaderos orígenes de la teoría de probabilidad se encuentran en las inquietudes de Antoine Gombaud (1607 – 1684), conocido como el Chevalier de Mére, escritor y gran aficionado de los juegos de azar. Este autor se interesó en dos problemas. El primero, conocido como el *problema de los puntos*, consiste en determinar cómo se debe repartir el pozo de un juego que ha sido interrumpido tras algunas jugadas. El segundo consistía en calcular la probabilidad de ganar en cierto juego de dados.

En su afán por resolver estos problemas, De Meré contacto al matemático Blaise Pascal, quien inició una extensa correspondencia con su colega Pierre de Fermat. Los matemáticos dieron con una solución a ambos problemas en 1654, iniciando un estudio sistemático del cálculo de probabilidades. Estas ideas fueron posteriormente recogidas por Huygens, que publica en 1655 el primer tratado sobre la naciente teoría de probabilidades.

Muchas ideas modernas de esta teoría surgieron durante el siglo XVIII de la mano de matemáticos Abraham de Moivre, Jacques, Nicolás y Daniel Bernoulli, Euler, Laplace, LaGrange y Fourier entre otros. Algunos de los teoremas centrales de las probabilidades como la ley de los números grandes y el teorema central del límite, fueron descubiertos de alguna forma elemental durante esta época.

Como todas las teorías matemáticas, la teoría de probabilidades se formula con base en axiomas, un conjunto pequeño de conceptos fundamentales sobre los cuales se construyen todos los razonamientos posteriores. En probabilidades, esta formulación fue dada por el matemático Andreï Kolmogorov (1903 – 1987) en el año 1933, y a pesar de ser extraordinariamente sencilla, sentó las bases conceptuales de esta teoría.

La teoría de probabilidades es un campo de investigación intensamente activo. Las investigaciones teóricas y aplicaciones florecieron en la segunda mitad del siglo XX y siguen siendo el objeto de un sin número de publicaciones científicas.

Al examinar la historia de la probabilidad se destacan algunos casos que son de interés para la presente investigación y que se indican a continuación.

**2.1.1. Historia de la probabilidad en la Edad Moderna**

En el año 1654 Blas Pascal (1623 – 1662) Matemático Francés, viajaba con el caballero Meré, un jugador de dados que creyó hallar una falsedad en dicho juego indicaba que el comportamiento de los dados era diferente cuando se utilizaba un dado, que cuando se utilizaban dos. Esta falsedad partía de una comparación errónea entre las probabilidades de sacar seis con un dado y sacar seis con los dos dados. Para Pascal, debía existir una relación proporcional entre el número de jugadas necesarias de este modo conseguir el efecto deseado en uno y otro caso. Sin embargo, el segundo caso se debe analizar como probabilidad compuesta, donde las probabilidades se deben calcular multiplicativamente. Con base en esto, tanto Pascal como Pierre de Fermat (1601 – 1665), empezaron a formalizar la teoría de las probabilidades, probando el desacuerdo con el caballero de Meré; el cálculo que había efectuado era erróneo, ya que se equivocó al considerar equiprobables eventos que no lo eran, y sólo cuando los casos son equiparables tiene sentido utilizar la definición de probabilidad dada por el caballero Meré.

Pascal y Fermat no escribieron sus resultados sobre la definición de la probabilidad, pero en 1657 Christian Huygens, físico y matemático holandés (1629 – 1695), publicó un tratado titulado "*De Ratiocinnis in ludo alea*" (sobre los razonamientos relativos a los juegos de los dados), inspirado entre la correspondencia entre Pascal y Fermat. Por otro lado, el suizo Jacob Bernoulli (1654 – 1705) obtiene el teorema que se conoce con su nombre y permite estructurar el cálculo de las probabilidades como una disciplina.

#### 2.1.2. La probabilidad en la Ilustración

Abraham de Moivre (1667 – 1754) observo que cuando se medía una distancia astronómica se cometían errores por exceso o por defecto a pesar de la exactitud del instrumento de medición. Al graficar estos errores se distribuían en forma de campana, ideando así a partir de los errores la función probabilística normal. En 1718 publicó "*The Doctrine of chance*", trabajo que fue considerado como la clave para el principio del origen de la historia de la probabilidad, en el cual aparece las primeras indicaciones de la distribución normal. En 1730 hace su demostración del teorema del límite central.

Nicolás Bernoulli (1695 – 1726) sobrino de Jacob se dedica a trabajar en el área de las probabilidades estudiando la distribución binomial y la teoría que se utiliza para esta distribución en la expresión matemática de la probabilidad de las frecuencias relativas. El inglés Thomas Bayes (1702 – 1761), el cual era reverendo, contribuye en sus estudios al análisis del teorema para probabilidades condicionales, abordando el problema de las causas a través de los efectos observados. Su trabajo se publica en 1764, en la Philosophical Transactions of the Royal Society de Londres, y titulado, "Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance".

El italiano Joseph LaGrange (1736 – 1813), unificó con Thomas Bayes todas las ideas que sobre la probabilidad existían hasta el momento, creando así la primera teoría general de las probabilidades.

Así mismo, el francés Pierre Simón Laplace (1749 – 1827), recopila las ideas de Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Thomas Bayes y Joseph LaGrange, donde en 1812, publica en París su Théorie Analytique des Probabilités, haciendo un análisis riguroso de la aplicación de la probabilidad a problemas demográficos, jurídicos, sociales y astronómicos. En esta obra escribe: "en el fondo de la teoría de las probabilidades es sólo sentido común expresado en números." Sus obras permiten considerar el cálculo de las probabilidades como una parte autónoma de las matemáticas, permitiendo tomar el desarrollo teórico que ahora posee.

Con Laplace, el cálculo de las probabilidades y la estadística se fusionan haciendo que las probabilidades sean la base matemática de la estadística, permitiendo el desarrollo de la teoría de probabilidades la cual se fundamentó en el análisis combinatorio, iniciado por Leibniz y Jacob Bernoulli, posteriormente se introdujo la teoría de límites.

### 2.1.3. La probabilidad en el siglo XIX

El Alemán Carl Friedrich Gauss (1777 – 1885) considerado como el más grande matemático del siglo XIX, desarrolla la teoría de los errores, que juntamente con Bessel y Laplace, llegaron a establecer el método de los mínimos cuadrados, como procedimiento fundamental para resolver el problema fundamental de la teoría de los errores.

El francés Simeón Denis Poisson (1781 1840), descubrió la distribución probabilística que es aplicable a fenómenos poco comunes o extraños, sin embargo, al tener éxito sus aplicaciones, tuvo distractores a la definición clásica de probabilidad que exigían saber que todos los eventos eran igualmente posibles, con base en estos estudios se debe tener en cuenta, que en ciertos casos es imposible aplicar la definición clásica de la probabilidad, como sucede en el cálculo actuarial.

### 2.1.4. La probabilidad en el siglo XX

A comienzos del siglo veinte la probabilidad empezó a tener utilidad en los campos de la física y la genética. En 1901 se publicó la obra “Gibbs Elementary Principles in Statistical Mechanics”, y se funda la revista “Biometrika”, por el inglés Karl Pearson (1857 – 1936). En el año 1900 se popularizó la utilización de la distribución chi cuadrado en vez de la gamma. El ruso Andrei Andreyevich Markov (1856 – 1922) inicia el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados (1906 – 1907), donde la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, esto se confirma por Laurent Schuwrtz (1915), de la universidad de París, que generaliza el concepto de diferenciación mediante su teoría de distribuciones, expuesta en 1951.

Los avances en el área del análisis matemático se incrementaron con la creación de la teoría de la medida. Borel en 1909 mediante su obra “Elements de la Theorie des Probabilités” expone la demostración de la ley de los grandes números. El norteamericano Norbert Wiener (1894 – 1964), desarrolló una medida de las probabilidades para conjuntos de trayectorias que no son diferenciables en ningún punto, asociando una probabilidad a cada conjunto de trayectorias, construyendo así, una probabilidad que permitía describir el fenómeno en términos matemáticos en lo que se refería a la trayectoria y posición de las partículas a través del tiempo, ayudando al desarrollo de la ciencia y explicando el “movimiento Browniano”.

El ruso Andrei Nicolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) realizó su primer trabajo evaluando los estudios sobre probabilidades efectuados entre los siglos XV y XVI, teniendo como referencia los trabajos de Bayes.

En 1924 comenzó su interés en la teoría de la probabilidad publicando su primer artículo "Uber konbergenz Von Reiher, deren Glieder durch den Zufall Bestimmt Weerden". En 1927 completó sus investigaciones sobre suficiencia y condiciones necesarias de la ley débil de los grandes números, comenzada por Jacob Bernoulli, en el año 1930, obtiene la ley fuerte de los grandes números. En 1950 completó el trabajo “Estimadores insesgados”, dando solución a una parte del sexto problema de Hilbert.

Paul Lévy (1886 – 1971) en 1919 se incursionó en el ámbito de la probabilidad, él investigo la ley Gaussiana y el teorema de límite central, lo que lo llevó a plantear formas más generales de estos teoremas.

Norbert Wiener (1894 – 1964), realizó aportes a la teoría de predicción.

Kyosi Itô (1915 – 2008) trabajo temas sobre el cálculo estocástico, creando la fórmula de Itô que es la más usada para el análisis estocástico.

Durante el período de 1923 a 1950 se formaron varias escuelas probabilísticas alrededor del mundo, destacándose:

1. La rusa dirigida principalmente por Kolmogorov y Khintchin.

2. La estadounidense creada por Feller y Doob.

3. La francesa

### 2.1.5. La probabilidad a finales del siglo XX y comienzos del siglo XXI

En 1948 se crea el Instituto Internacional de Estadística, (ISI) por sus siglas en inglés, como parte de una serie de cambios constitucionales, con el objetivo de emprender actividades educativas en estadística y colaborar a tal efecto con la UNESCO y otras agencias de la ONU. Desde su creación se distinguen dos periodos en el siglo XX, el primero va desde (1949 – 1976); donde en 1949 se realiza la primera reunión y durante este periodo se aumenta la oferta del personal estadístico para el gobierno. Durante el segundo periodo (1976 – 1993) su objetivo era promover la estadística y la probabilidad en colegios y universidades. En agosto de 1993 en Perugia (Italia), se reunió por primera vez la Asociación Internacional de Educación Estadística (IASE), formando un amplio cuerpo profesional de la educación científica y matemática.

### 2.1.6. Razonamiento y pensamiento probabilístico

Para esta tesis, desde el aspecto cognitivo, se tomarán los trabajos de Piaget (1975), que buscan dar una respuesta a la pregunta sobre la construcción del conocimiento. Sus investigaciones sobre el pensamiento permitieron determinar que éste se desarrolla a lo largo de la vida pasando por distintas etapas.

Piaget propone tres postulados: organización interna, funciones invariantes e interacción entre el organismo y el entorno. El desarrollo cognitivo no es el resultado sólo de la maduración del individuo ni de la influencia del entorno, sino la interacción de los dos, que a medida que se desarrolla el proceso cognitivo, cambia desde lo instintivo a través de lo sensorio motor a la estructura operativa del pensamiento del adulto.

Para Piaget el desarrollo del conocimiento está enmarcado por una serie de etapas cuyo orden es invariable, aunque el tiempo de su inicio y su terminación pueden cambiar, pero cada etapa representa un modo diferente por parte del individuo, de enfrentarse con un aspecto particular del entorno, y por esto ha de esperarse que la mayor parte de la actividad pensante del individuo se caracterice a la etapa en la que se encuentra.

El desarrollo cognoscitivo comienza cuando el individuo va realizando un equilibrio interno entre la acomodación, el medio que lo rodea y la asimilación de esta realidad con sus estructuras. El individuo al irse relacionando con su medio ambiente va incorporando las nuevas experiencias a su propio ser y las reajusta con las experiencias adquiridas anteriormente. Para que esto se lleve a cabo debe de presentarse el proceso de equilibrio, lo que permite el balance entre el medio externo y las estructuras internas de pensamiento.

El nuevo conocimiento no es una reproducción de lo real, porque se lleva a cabo un proceso de asimilación a estructuras previas. En otras palabras, la asimilación maneja dos elementos: lo que se acaba de ver y lo que significa dentro del contexto del individuo. Por lo tanto, el aprendizaje no consiste en adquirir una realidad, sino en actuar en esta y transformarla. Por lo que los elementos del proceso de enseñanza y aprendizaje deben centrarse en los intereses y aptitudes del estudiante.

Un investigador sobre el desarrollo del razonamiento probabilístico es Fischbein (1975), quien concluyó que los niños poseen conceptos probabilísticos desde tempranas edades, presentes en las intuiciones a través de los componentes de la inteligencia que provienen de acciones mentales y presentan ciertas características como: surgen de forma espontánea y vayan más allá de un caso particular; esto tiene un carácter teórico y permite explorar y realizar predicciones, lo cual estructura el razonamiento. Estas instrucciones se obtienen de la experiencia o como consecuencia de un proceso educativo.

Esto lleva a que un individuo desarrolle un pensamiento probabilístico y lo utilice cuando se toman decisiones en situaciones de incertidumbre. Este pensamiento se caracteriza por su carga de inferencia y permite al individuo pronosticar comportamientos o hechos, apoyados en sucesos conocidos. Esto contribuye a la construcción de modelos mentales que les permite dar solución a problemas.

Estos modelos mentales se van construyendo y fortaleciendo por cada conocimiento que adquiere el individuo, asimilándolo e incorporándolo a su estructura mental, lo que permite al individuo tener un nivel superior en el desarrollo de pensamiento.

Principios fundamentales que se tendrán en cuenta en la presente tesis. Se partirá de conceptos básicos que asimilarán e incorporarán los estudiantes en su estructura mental, lo cual permite un desarrollo de pensamiento probabilístico.

## 2.2. Definiciones

### 2.2.1. Experimento Determinístico

Para Valdivieso (2010) es aquel en donde se tiene la certeza de cuál será el resultado del experimento.

### 2.2.2. Experimento Aleatorio

Para Valdivieso (2010) es aquel en el que se conocen todos los resultados posibles, pero sin tener la certeza de cuál será un resultado particular.

### 2.2.3. Espacio Muestral

Para Narro (2016), éste se conceptúa como “un conjunto de todos los resultados posibles mediante la ejecución de un experimento aleatorio. El resultado es impredecible.

### 2.2.4. Suceso

“Se denomina evento o suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral formado por sucesos elementales” (Zegers, 2015, p.174).

Un suceso es seguro si está constituido por todos los posibles resultados de la experiencia, es decir, concuerda con el espacio muestral; por lo tanto, siempre sucede al realizar el experimento.

Un suceso posible, se refiere al grado de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso.

Un suceso imposible se refiere al suceso de ocurrencia nula, es decir no hay posibilidad de ocurrencia.

Las actividades que forman parte de esta investigación, se inspiran en los diferentes enfoques que con llevan a la construcción del concepto de probabilidad, específicamente en la ocurrencia de fenómenos a través del conocimiento previos de experimentos, espacio muestral y sucesos.

## 2.3. Educación Matemática Realista

### 2.3.1. La Educación matemática realista

La Educación de la Matemática Realista (EMR) nace en los años 60 en Holanda gracias a las ideas de Hans Freudenthal (1905-1990), quien fue un propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática, fundador del grupo internacional de Psicología y Educación, quien manifestaba su oposición a las corrientes pedagógicas-didácticas y a las innovaciones en la enseñanza de mediados del siglo pasado. Está teoría se fundamentó en su conocimiento de las matemáticas y su experiencia en las aulas.

La Educación Matemática Realista tiene sus bases en la Universidad de Utrech, conocido hoy como instituto Freudenthal, que fundó con otros colaboradores en el año 1970. Desde el enfoque de esta teoría, la matemática no es una conexión de temas separados o aislados, sino que presenta un valor educativo en cuanto el estudiante comprenda, participa y critica los modos en que esta disciplina organiza los diferentes niveles de los entornos sociales y naturales.

En sus inicios la EMR consistió en ideas básicas centradas en el cómo y en el qué de la enseñanza matemática. Freudenthal decide matematizar la realidad considerando las siguientes características: (1) los contextos se convierten en generadores de la actividad matematizadora de los estudiantes; (2) el uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar el contexto de cada problema, así como la situación; (3) centralizar la producción de los estudiantes en el proceso de enseñanza/aprendizaje; (4) el papel que juega el docente como guía para el estudiante en el proceso de la enseñanza de las matemáticas; (5) la interacción entre el estudiante y el docente y entre los estudiantes y (6) la interrelación de los ejes curriculares de la matemática.

La matematización se refiere a los conocimientos que adquieren los estudiantes a partir de situaciones problemáticas realistas. Una situación es realista si el sujeto al que se le presenta es capaz de imaginarla. El objetivo de la EMR es matematizar el mundo que nos rodea, en la cual es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, que involucra generalizar y formalizar conceptos matemáticos. Teniendo en cuenta este significado podemos deducir que las matemáticas se pueden aprender haciendo matemáticas en contextos reales, que incluyan problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los estudiantes.

### 2.3.2. La investigación y la EMR

Freudenthal a partir de su teoría tiene una visión de currículo como proceso y lo denomina desarrollo educativo. Este desarrollo educativo es mucho más que un diseño instruccional; es una innovación estratégica que está fundamentada en una filosofía e incorpora el desarrollo de la investigación. La retroalimentación de la experiencia práctica con las experiencias pensadas debe interactuar para permitir el desarrollo y la investigación.

El desarrollo de la investigación en EMR permitió que la palabra didáctica se refiriera a los procesos correctos de enseñanza y aprendizaje partiendo de la realidad. Situaciones que deben ser seleccionadas, de modo que puedan ser organizadas por los objetivos matemáticos que los estudiantes deben comprender. Si se ve la matemática como una forma práctica de resolver problemas es razonable encontrar esos procesos en las aplicaciones actuales.

### 2.3.3. Proyecto matemáticos realistas (PMR)

Los proyectos matemáticos realistas parten de la idea de la matematización de las situaciones cotidianas.

Estos proyectos le brindan al estudiante la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la supervisión del docente en lugar de intentar transmitirles una matemática preconcebida, permitiendo así que construyan su propio conocimiento.

## 2.4. Resolución de problemas

### 2.4.1. Resolución de problemas a través de la historia

La presente investigación considera que la resolución de problemas en las matemáticas es de gran importancia ya que esto implica considerar situaciones donde la reflexión, la búsqueda y la investigación estén presentes.

Este enfoque es utilizado como una herramienta didáctica, cuyo objetivo es considerar el aprendizaje como una construcción social que incluye las conjeturas, pruebas y refutaciones con base al proceso creativo y generativo que puede obtener el estudiante. Cuando el docente desea enseñar desde este punto de vista, plantea actividades cuya resolución requiere un análisis previo al problema, el planteamiento de una hipótesis, reflexionar las ideas, confrontar y argumentar las respuestas, así como comunicar los resultados. Esto permite que los estudiantes sean independientes, generando una interacción entre el mundo que los rodea y su conocimiento para así construir un nuevo pensamiento.

La importancia de la resolución de problemas es volverla una competencia, en la que se ponga de manifiesto la habilidad del estudiante y el grado de desarrollo de sus destrezas, que precisan una planificación de las acciones que se deben llevar a cabo para situar y utilizar adecuadamente los conocimientos adquiridos. Para abordar un problema de este tipo al estudiante se le debe dotar con las estrategias y técnicas adecuadas, así como verbalizar el pensamiento y contrastar la respuesta con otras personas.

El proceso de la enseñanza de la resolución de problemas se debe realizar a través de modelos, utilizando ejemplos adecuados, asegurándose de que los alumnos adquieran las destrezas y hábitos correctos. La interiorización de estos procesos se logra con la aplicación de cada uno de ellos en diferentes situaciones, teniendo en cuenta que es en la educación primaria donde se deben asentar estas bases para que los estudiantes tengan un mayor éxito en este tipo de actividades.

### 2.4.2. Resolución de Problemas de Schoenfeld

Alan Schoenfeld hace parte fundamental en el proceso de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, fundamentando su propuesta en un ambiente adecuado para que los estudiantes sean motivados para desarrollar las matemáticas de manera similar a los matemáticos. Schoenfeld en sus estudios comparó el comportamiento del experto y de estudiantes, al enfrentarte a casos en los que se requería resolución de problemas, descubriendo que los estudiantes que poseían el conocimiento para hallar la solución del problema tenían dificultades para llegar a ella, mientras que un matemático que trabaja en un área que no era de su interés mostraba una serie de estrategias que le ayudaron a recordar el problema y consecuentemente a solucionarlo. En este estudio, Schoenfeld argumenta que la claridad en el entendimiento del problema es la clave en el proceso de resolución de este. En la fase del acercamiento del problema es importante reflexionar en preguntas como las que está pidiendo el enunciado; qué datos se poseen o a dónde se quiere llegar.

Encontrando así que los matemáticos dedicaban más tiempo en la fase del entendimiento que los estudiantes, repercutiendo en el éxito al intentar resolverlo.

Schoenfeld, a diferencia de Pólya, expone que los estudiantes logran resolver problemas exitosamente en la medida que ellos resuelven una gran cantidad de problemas, sin embargo, este método tiene sus limitaciones ya que algunos estudiantes logran resolver problemas en el mismo contexto, pero en el momento en que se cambia el contexto presentan dificultades. Es por esta razón que Schoenfeld, menciona que el proceso para resolver problemas matemáticos y poder crear ciertas pautas para solucionarlos debe tener en cuenta la disciplina, la dinámica del salón de clase, el aprendizaje y el proceso de pensar. Es importante considerar el proceso utilizado por los matemáticos para resolver los problemas, diseñando actividades que permitan identificar el uso de una estrategia en particular, discutir la estrategia con suficiente detalle, de manera descriptiva y dando a los estudiantes un apropiado entretenimiento para su uso.

Luego de analizar muchos estudiantes Schoenfeld descubrió que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de la resolución de problemas, el primero es el dominio del conocimiento, que incluye las definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático. La segunda dimensión son las estrategias cognoscitivas que incluyen la descomposición de problemas en casos más simples; establecer metas para la resolución y elaboración de diagramas. La tercera dimensión son las estrategias metacognoscitivas; se escoge el proceso de selección para la resolución de problemas. La última dimensión es el sistema de creencias; las ideas que los estudiantes tienen de la matemática y cómo resolver los problemas.

Además, sugiere que el principal objetivo de la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos, incorporando estrategias para leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos. Incluyendo otra dimensión denominada las actividades de aprendizaje; los estudiantes son expuestos a estrategias que les permiten leer y comprender argumentos matemáticos, convirtiendo así a las matemáticas en una actividad dinámica cuyo espacio ayuda para un nuevo desarrollo por parte de los estudiantes.

Allan Schoenfeld adicionó tres factores que consideró de gran importancia para la resolución de problemas: el primero son los recursos referidos a los conocimientos previos que poseen los estudiantes, en los que se incluyen las fórmulas y los conceptos; además el profesor debe tener en cuenta cuáles son los conocimientos y las herramientas con las que cuenta el estudiante. La segunda es la heurística, considerando que cada tipo de problema necesita de ciertas heurísticas particulares, ya que cada uno de ellos tiene una característica diferente. La tercera es el control, aquí se observa cómo el estudiante controla su trabajo, y se puede descubrir si en algún momento de la resolución del problema se cometió un error en la selección del método.

Se entiende que el proceso de resolución de problemas no es lineal, sino que supone varios caminos, proponiendo cuatro fases: la primera, el análisis, donde se traza un diagrama si es posible y se intenta simplificar el problema. En la segunda fase, la exploratoria, se examinan problemas equivalentes que permitan sustituir unas variables por otras, recombinando los elementos del problema. La tercera fase, la ejecución, realiza el plan de acción para la resolución del problema. La cuarta fase, la comprobación de la solución obtenida.

**Conclusiones Capítulo 2**

Se abordan los principales orígenes y definiciones de la probabilidad que ubican a la investigación en la importancia de construir el concepto de este con respecto en la ocurrencia de fenómenos posibles, imposibles y seguros, de igual manera se han indicado los principales autores que han trabajado en esta área. Para esta investigación se tendrán en cuenta los principios fundamentales señalados por Piaget & Fischbein (1975), donde se partirá de conceptos básicos que asimilarán e incorporarán los estudiantes en su estructura mental, lo cual permite un desarrollo de pensamiento probabilístico para la ocurrencia de fenómenos y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, permitiendo el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Para la presente investigación se confirma la necesidad del aprendizaje desde la resolución de problemas como una prioridad en el desarrollo del pensamiento probabilístico. Se concreta cada una de las acciones dispuestos para ser desarrolladas en el análisis de las actividades por los estudiantes.

Para el diseño de cada una de las actividades que ayudan a desarrollar el pensamiento probabilístico, se tiene en cuenta la Educación Matemática Realista (EMR), que encuentra el contexto de la situación para que los estudiantes a medida que dan solución a los problemas planteados exploren y reflexionen para luego encontrar estrategias que den solución a la situación planteada.

# CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO Y DE ACTIVIDADES

En este capítulo se describe la metodología de la investigación, se indica la población en la que se realizará el trabajo, el tipo de investigación y alcance.

## 3.1. Enfoque de la Investigación

La presente investigación está enmarcada en un enfoque de Diseño (DBR), el cual se enmarca en un contexto educativo real para aportar validez a la investigación y se orienta a resolver problemas de la vida práctica para generar conocimiento. Estos resultados pueden ser utilizados eficazmente para informar, evaluar, mejorar la práctica, al menos en el contexto donde se ha llevado a cabo el estudio. Está diseñada específicamente para superar algún problema o crear una mejora en la práctica local.

Es por esto por lo que el tipo de investigación que se adapta es la investigación cualitativa, ya que se analizan sujetos concretos, sujetos productores de lo que se está observando y resolviendo. Se buscará interpretar los significados de las acciones de los estudiantes. Al finalizar, se analizarán los resultados de la aplicación de las actividades encaminado a evidenciar de qué forma se desarrolló el pensamiento probabilístico.

La investigación del diseño combina el diseño instruccional (cuyo objetivo es desarrollar disposiciones de enseñanza-aprendizaje para las aulas) y la investigación educativa (cuyo objetivo es investigar y comprender los procesos de enseñanza aprendizaje iniciados, y lo que provoca este proceso). En lugar de ejecutar esas actividades de forma secuencial, los investigadores de diseño realizan ambas simultáneamente y las entrelazan en varios ciclos para alcanzar el doble objetivo (Cobb et al. 2003; Kelly et al. 2008; Van den Akker et al. 2006).

Este enfoque de investigación, comparte cinco características comunes (Cobb et al. 2003; Prediger et al. 2015). Estas son:

(1) intervencionista, es decir, la intención de la investigación de diseño es crear y estudiar nuevas formas de instrucción, en este sentido, debe estar destinada a intervenir en las prácticas del aula (intervencionista) en lugar de sólo involucrar la observación de las prácticas regulares del aula (naturalística);

(2) teoría generativa, es decir, el objetivo de la investigación en diseño es generar teorías sobre el proceso de aprendizaje y los medios para apoyar ese aprendizaje, generar teorías aquí significa tanto desarrollar como reformular teorías en términos de inventar categorías y generar hipótesis (pero rara vez 'probar hipótesis' en el sentido estricto de la psicología experimental);

(3) prospectivo y reflexivo, es decir, los experimentos de diseño crean condiciones para desarrollar la teoría (prospectivo), sin embargo, estas teorías son a su vez objeto de examen crítico (reflexivo);

(4) iterativo, es decir, la teoría se desarrolla en una iteración de ciclos de conjeturas, pruebas y revisiones;

(5) las raíces pragmáticas y las teorías humildes, es decir, los experimentos de diseño aceptan la complejidad del aula como un entorno de investigación, y las teorías son

específicas de dominio o incluso de tema, y están destinadas a tener implicaciones prácticas.[30] (Prediger, Koeno Gravemeijer and Susanne, 2016)

El presente trabajo investigativo a través de los aportes de este enfoque, trata de generar nuevos procedimientos e intervenciones pedagógicas como lo es el desarrollar el pensamiento probabilístico con respecto a la ocurrencia de fenómenos por medio de experimentos y solución de problemas en el contexto.

Desde el rol como investigadores se debe tener presente que la interacción con el grupo de personas escogido debe estar enmarcado en la empatía, las buenas relaciones interpersonales y comunicativas, para lograr interpretar su contexto, cultura y aprendizajes continuos. Por último, es importante mencionar que la técnica que se emplea es recolectar la información con la observación directa, estudio de documentos.

### 3.2. Método de Investigación

El método investigativo empleado en el presente trabajo es Metodología basada en diseño (DBR) ya que los educandos trabajan a través de sus propias prácticas, sigue un espiral de ciclos de planificación acción, observación y reflexión. Además, es un proceso sistemático de aprendizaje orientado a la praxis, implica registrar, recopilar, analizar nuestros propios juicios reacciones e impresiones en torno a lo que ocurre.

Para esta investigación se realizarán las actividades en dos grupos 3A y 3B. El grupo con el que se van a realizar las actividades finales es el grupo 3A.

---

[30] Gravemeijer K, Prediger S. "Compendium for Early Career Researchers in Matematics Education". Chapter 2, Topic-Specific Design Research: An Introducción. Springer Open 2016

La metodología basada en diseño señala tres tipos de actividad:

(1) Preparar: el profesor diseña o selecciona las actividades de enseñanza teniendo en cuenta los objetivos de aprendizaje.

(2) Enacting: las actividades de enseñanza se representan y el profesor observa las acciones y expresiones de los alumnos con la vista puesta en el proceso de aprendizaje previsto.

(3) Al reflexionar: el profesor analiza lo que ha sucedido en el aula, lo contrasta con lo previsto y revisa o adapta las actividades de enseñanza.

Referente a la actividad de preparar, se realizan:

- Una prueba de entrada cuyo objetivo es determinar los conocimientos previos que tienen los estudiantes con respecto a la percepción de la ocurrencia de fenómenos, a través de la construcción del significado de los conceptos de experimentos aleatorios-determinísticos, espacio muestral, además de predecir sucesos posibles, imposibles y seguros.
- Actividad 1, cuyo objetivo es construir significado para el concepto de aleatoriedad y determinístico a través de experimentos, estableciendo la relación entre ellos a través de diferentes problemas del contexto.
- Actividad 2: su objetivo es construir el significado de espacio muestral y sucesos a través de diferentes experimentos.
- Actividad 3: su objetivo es predecir eventos: posibles, imposibles y seguros en diferentes contextos.

- Actividad 4: su objetivo es fortalecer el significado de espacio muestral a través de las combinaciones que se pueden obtener en un suceso mediante diferentes problemas del diario vivir.
- Prueba final: el objetivo es evidenciar si los estudiantes desarrollaron su pensamiento probabilístico a través de la construcción de los conceptos propuestos en la investigación.

Para llevar a cabo los procesos de Enacting - reflexionar, se presentan las actividades al grupo 3B para saber si las preguntas de las actividades son claras.

### 3.3. Alcance del estudio

Mediante esta investigación se pretende llegar a desarrollar el pensamiento probabilístico observado con un enfoque de Diseño.

### 3.4. Línea de Investigación

La presente investigación se encuentra en las siguientes líneas de investigación del programa:

Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.

Desarrollo del pensamiento matemático y avances en su caracterización.

### 3.5. Población y Muestra

La población en la que se aplicarán las actividades corresponde a nueve estudiantes de grado tercero A del Colegio del Bosque Bilingüe de Bogotá. Se selecciona esta población que de acuerdo con Piaget & Fischbein (1975), allí se hace visible que la construcción de conocimiento no es el resultado de la maduración del individuo ni la influencia del entorno sino la interacción de los dos; por lo tanto, el aprendizaje no consiste en adquirir una realidad, sino en actuar sobre esta y transformarla. De esta forma, se observará cómo los estudiantes construyen y justifican cada problema planteado.

## 3.6. Diseño y Aplicación de las Actividades

### 3.6.1. Diseño de las Actividades

A continuación, se presenta la descripción de cada una de las actividades. Las actividades completas se encuentran en los anexos.

**Actividad 1: Experimentos de aleatoriedad y determinísticos.**

Esta actividad tiene como objetivo introducir los conceptos de experimentos aleatorios y determinísticos. Se les pide a los estudiantes que lean la actividad y con sus palabras expliquen qué toca realizar en cada punto

**Estructura:** En esta actividad se realizan seis experimentos, en tres de ellos se desarrolla el concepto de experimento aleatorio, y en los otros tres desarrolla el concepto de experimento determinístico. Hay seis problemas, los dos primeros son de escogencia múltiple; deben determinar si el evento presentado es determinístico o aleatorio, y las otras cuatro preguntas son de respuesta abierta, desarrollando así el concepto de experimento aleatorio o determinístico.

**Metodología:** Para esta actividad se hace llegar a cada casa los experimentos (pimpones, dados, gomitas y la guía), puesto que todos los estudiantes estaban en virtualidad. La prueba se desarrolla de manera individual; deben responder las preguntas planteadas. Se tuvo en cuenta el método basado en diseño, adaptada a un contexto sencillo mediante la resolución de problemas, donde se esperaba que los estudiantes construyeran el concepto de experimentos aleatorios y determinísticos.

**Finalidad de la actividad:** los estudiantes observaron cada uno de los experimentos y problemas planteados en la actividad y de esta forma construyeron el concepto de experimentos aleatorios y determinísticos.

**Actividad 2:** Espacio muestral

Los estudiantes en esta prueba empezarán a relacionarse con el concepto de espacio muestral

**Estructura:** En esta actividad se realizan cuatro experimentos en los cuales se debe determinar el espacio muestral de un determinado evento. Adicional, se realizan cuatro problemas de preguntas abiertas en las cuales se debe hallar el espacio muestral y las combinaciones de sucesos cotidianos.

**Metodología:** La actividad se realiza de forma individual con estudiantes virtuales y en prespecialidad. Esta se divide en dos partes, la primera parte consta de cuatro experimentos cuyos resultados serán discutidos en el salón de clase. En la segunda parte, los estudiantes resuelven las preguntas planteadas. Se tuvo en cuenta el método basado en diseño, y adaptado a un contexto sencillo mediante la resolución de problemas; se esperaba que los estudiantes construyeran el concepto de espacio muestral y sucesos a través de diferentes experimentos y solución de problemas en contexto.

**Finalidad de la actividad:** los estudiantes observaron cada uno de los experimentos y problemas planteados en la actividad y de esta forma construyeron el concepto de espacio muestral y sucesos.

**Actividad 3:** Posible, imposible y seguro

Los estudiantes en esta actividad empezarán a relacionarse con los conceptos de posible, seguro e improbable.

**Estructura:** En esta actividad se realizan tres sucesos que plantean varias situaciones de la vida cotidiana, en las que los estudiantes deben responder con qué posibilidad sucede dicha circunstancia. Hay un experimento a través del cual se debe determinar la ocurrencia en cada uno de los casos que se ilustra en las imágenes.

**Metodología:** La actividad se realiza de forma individual con estudiantes virtuales y en presencialidad y está dividida en tres partes. La primera parte, consta de tres sucesos; deben llenar una tabla con eventos cotidianos, en los cuales se responde la ocurrencia de estos. Un experimento que consiste en escribir la posibilidad de ciertos eventos y discutirlos con el grupo. Cuatro problemas, en los cuales se responde a unas preguntas acerca de situaciones cotidianas y su recurrencia. Para esta actividad, se tuvo en cuenta el método basado en diseño, adaptada a un contexto sencillo mediante la resolución de problemas. Con esto se esperaba que los estudiantes construyan el concepto de sucesos posible, imposible y seguro a través de diferentes contextos.

**Finalidad de la actividad:** Los estudiantes observaron cada uno de los experimentos y problemas planteados en la actividad y de esta forma construyeron el concepto de suceso posible, imposible y seguro.

**Actividad 4:** Espacio muestral con combinaciones.

Los estudiantes en esta prueba empezarán a aplicar los conceptos de espacio muestral y sus combinaciones respectivas.

**Estructura:** En esta actividad se realizan cinco problemas; se plantean circunstancias de la vida cotidiana en las cuales tienen que hallar el espacio muestral o las combinaciones.

**Metodología:** La actividad se realiza de forma individual con estudiantes virtuales y en presencialidad, donde deben responder las preguntas planteadas. Se tuvo en cuenta el método basado en diseño, adaptado a un contexto sencillo mediante la resolución de problemas; se esperaba que los estudiantes fortalecieran el concepto de espacio muestral a través de las combinaciones en diferentes contextos.

**Finalidad de la actividad:** los estudiantes observaron cada uno de los experimentos y problemas planteados en la actividad y de esta forma fortalecieron el concepto de espacio muestral a través de las combinaciones en diferentes contextos.

**Actividad 5: Prueba final**

Los estudiantes en esta prueba deben poder aplicar todos los conceptos de experimentos aleatorios-determinísticos para predecir sucesos posibles, imposibles, seguros, y el espacio muestral vistos durante las actividades.

**Estructura:** En esta se realizan siete problemas; los estudiantes tienen que aplicar todos los conceptos vistos.

**Metodología:** La prueba se desarrolla de manera individual con estudiantes virtuales y en presencialidad; deben responder las preguntas planteadas. Se tuvo en cuenta el método basado en diseño, adaptado a un contexto sencillo mediante la resolución de problemas; se esperaba que los estudiantes construyeran los conceptos de experimentos aleatorios- determinísticos para predecir sucesos posibles, imposibles y seguros y espacio muestral.

**Finalidad de la actividad:** los estudiantes observaron cada uno de los experimentos y problemas planteados en la actividad y de esta forma se busca evidenciar si los estudiantes construyeron los conceptos de experimentos aleatorios- determinísticos para predecir sucesos posibles, imposibles y seguros y espacio muestral a través de las combinaciones en diferentes contextos, además de evidenciar si desarrollaron el pensamiento probabilístico.

## 3.7. Corrección de las actividades

Se tomó el grupo 3B compuesto por diez estudiantes. Se realizaron las correcciones de todas las actividades que se iban a implementar en la propuesta metodológica para la investigación, la cual se encontró:

### Prueba de entrada

En esta prueba se evidenció que todas las preguntas fueron entendidas por los niños; por lo tanto, no se les hizo ninguna corrección a las preguntas.

Figura 1. Presentación prueba de entrada.

### Actividad 1: Experimentos de aleatoriedad y determinísticos

Para la siguiente actividad no hubo ningún inconveniente para que los niños desarrollaran cada uno de los problemas propuestos, por lo cual se concluye que se deja la actividad tal como se propuso al grupo de investigación.

**Actividad 2: Espacio muestral**

Para la siguiente actividad se reformularon los problemas 2 y 3, pues estos no fueron claros para los estudiantes. Se realizan cambios de redacción.

Figura 2. Estructuración del punto 2.

Figura 3. Estructuración del punto 3.

**Actividad 3: Posible, imposible y seguro**

En esta actividad todas las preguntas fueron claras para los estudiantes y se concluye que esta actividad se deja igual para ser aplicada al grupo de investigación.

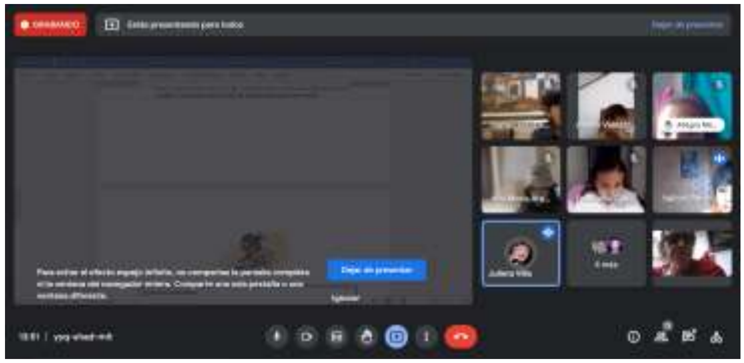


Figura 4. Evidencia del trabajo con el grupo 3B.

### Actividad 4: Espacio muestral con combinaciones

Para la siguiente actividad no hubo ningún inconveniente para que los niños desarrollaran cada uno de los problemas propuestos, por lo cual se concluye que se deja la actividad tal como se propuso al grupo de investigación.

### Actividad 5: Prueba final

Para esta última actividad no hubo ningún inconveniente para que los niños desarrollaran cada uno de los problemas propuestos, por lo cual se concluye que se deja la actividad tal como se propuso al grupo de investigación.

### Conclusiones Capítulo 3

La investigación se sustenta con un enfoque de investigación basado en Diseño (DBR), el cual tiene como fin estar en un ambiente educativo real para aportar validez a la investigación y se orienta a resolver problemas de la vida práctica y así generar conocimiento, en los estudiantes de grado tercero del Colegio Del Bosque Bilingüe UAN.

# CAPÍTULO 4. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLÓGICA Y DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS EPISODIOS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO PROBABILISTICO

En el presente capítulo se da a conocer un corto informe de la realización de la investigación señalando algunas condiciones particulares de la misma, alcances y dificultades.

## 4.1. Implementación de la propuesta

La investigación se desarrolló en el Colegio del Bosque Bilingüe UAN en los grados de 3A y 3B de la ciudad de Bogotá. Para el diseño de cada una de las actividades se tuvo en cuenta las definiciones de la probabilidad y su historia, la Educación Matemática Realista (EMR), la teoría de Schoenfeld en la resolución de problemas y por último se tomarán trabajos desarrollados por Piaget & Fischbein (1975) respecto al aspecto cognitivo.

En cada una de las sesiones, se analizó la manera en que cada estudiante busca dar respuesta a cada problema planteado que le permite construir conocimiento y desarrollar su pensamiento probabilístico.

Los problemas que se proponen en cada una de las actividades están diseñados para que se logre el desarrollo del pensamiento probabilístico de ocurrencia de fenómenos posibles – imposibles y seguros, a través de la construcción del significado de los conceptos de experimentos aleatorios - determinísticos, suceso y espacio muestral.

Se utilizó una metodología de diseño, en donde se escoge un grupo piloto para aplicar las pruebas y así saber si estas están planteadas de manera correcta o si es necesario volverlas a construir.

El desarrollo del pensamiento probabilístico que se va desenvolviendo en los estudiantes se hará en el momento que ellos van planteando la solución a cada uno de los problemas, de esta forma evidenciar si son capaces de tomar decisiones en situaciones de incertidumbre en diferentes contextos aleatorios.

Para determinar si los objetivos propuestos por la metodología para el desarrollo del pensamiento involucrado se cumplieron, se aplicó una prueba final.

En cada una de las actividades desarrolladas se motivan a los estudiantes a socializar sus respuestas con el fin que los demás participantes de la clase opinen si están de acuerdo con la solución dada, de esta forma escuchar sus puntos de vista.

La presentación de cada una de las actividades se determina para involucrar a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, desde el primer momento que se presenta la primera actividad. En este proceso, se analiza la solución que presentan los estudiantes y conclusiones a los que llegaron, así como sus procedimientos.

## 4.2. Descripción de algunos episodios en el desarrollo del Pensamiento probabilístico

En esta sección se da un breve informe de la ejecución de la investigación, en donde se señala algunas condiciones particulares de ésta, sus trascendencias y dificultades que se presentaron.

### 4.2.1. Prueba de entrada

Al realizar el análisis de la prueba de entrada con los estudiantes del colegio, se observó que los estudiantes en su mayoría no sabían qué se les estaba preguntando.

Para el primer problema, se encontró: los estudiantes debían responder según las imágenes que evento era aleatorio, 4 de los 9 estudiantes contestaron de forma correcta y cinco tuvieron dificultades para comprender qué imagen mostraba un evento aleatorio. Esto muestra que los estudiantes no tienen nociones del concepto de experimento aleatorio, se evidencia que para las preguntas correctas fueron tomadas al azar por parte de los estudiantes.

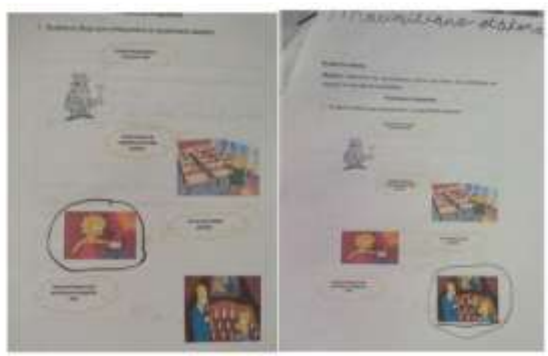


Figura 5. Resolución del problema 1.

Para el problema dos, los estudiantes debían observar la posibilidad con que salía un objeto de una caja, y responder cual era el posible de salir. En este caso todos respondieron de forma correcta, evidenciando que pueden determinar en una situación, cual es el evento más posible que suceda.

Figura 6. Resolución del problema 1.

En el punto tres, los estudiantes debían observar los colores de unos refrescos, y luego de eso responder unas preguntas acerca de la posibilidad de selección dichos objetos.

- Pregunta uno (¿Cuál es el color de refresco más fácil de ser seleccionado?), siete de los nueve estudiantes respondieron de manera correcta, y dos no respondieron de forma acertada.
- Pregunta dos (¿Cuál color de refresco tiene menos posibilidades de salir?), siete de los nueve estudiantes respondieron de manera correcta y dos no respondieron de forma acertada.
- Pregunta tres (¿Qué color de refresco tiene igual de posibilidad de salir que el refresco verde?), siete de los nueve estudiantes respondieron de manera correcta y dos no respondieron de forma acertada.

Es de precisar que algunos de los estudiantes a través de la observación encontraron la respuesta de lo que podría suceder manejando la predicción por casualidad y azar.

Figura 7. Resolución del problema 3.

Para la pregunta cuatro, los estudiantes deben responder a la pregunta ¿Qué fruta es la más posible que salga de un tazón con diferentes frutas?, ocho de los nueve estudiantes respondieron de forma correcta la pregunta, mientras que un estudiante su respuesta no fue correcta. Se evidencia al igual que en la pregunta dos, donde los estudiantes pueden determinar en una situación cual es el evento más posible que suceda.

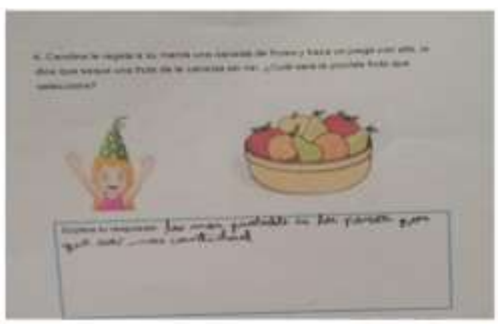


Figura 8. Resolución del problema 4.

Esto mismo sucede para la pregunta seis, observe la siguiente figura.

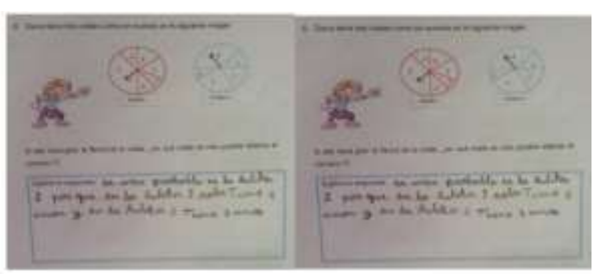


Figura 9. Resolución del problema 6.

**Dificultades.** A continuación, se indica el porcentaje de respuestas correctas que obtuvieron los estudiantes en la prueba de entrada.

| | Preguntas correctas en % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No. de Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Porcentaje % | 44,44 | 100 | 77,78 | 88,89 | 55,55 | 66,67 |

Con base en estos datos se concluye.

**Conclusiones.** Los estudiantes no han desarrollado de manera apropiada su pensamiento probabilístico, lo cual se evidencia en las respuestas dadas. La mayoría de las respuestas fueron contestadas de manera intuitiva, proviniendo de acciones mentales en donde presentan ciertas características que surgen de manera espontánea, permitiéndoles explorar para realizar predicciones y así contestar de acuerdo con las imágenes observadas.

### 4.2.2. Actividad 1: Experimentos de aleatoriedad y determinísticos

Antes de aplicar esta actividad, los estudiantes estaban muy ansiosos pues días antes se les había entregado en cada casa una bolsa con todos los materiales de los experimentos que estaban planteadas en la sesión. Se explicó la metodología a trabajar y el objetivo que se quería llegar con esta actividad. Los estudiantes empezaron a sacar sus materiales para desarrollar cada experimento y escribían los resultados en la guía.

**Descripción de algunos episodios**

La actividad fue de manera individual y virtual. Está sesión se divido en dos partes, la primera parte los estudiantes manipulaban los materiales enviados para poder dar respuesta a cada experimento planteado y con base en el desarrollo de estos se les iba llevando para que construyeran por ellos mismos el concepto de experimentos determinísticos y aleatorios. La segunda parte, se les presento una serie de problemas donde debían determinar cuál pertenecía a cada experimento y por qué.

Para el primer experimento, los estudiantes debían responder a la pregunta, ¿Qué color de pimpón sale de la bolsa?, la cual tiene un pimpón rojo, un pimpón amarillo, un pimpón verde, un pimpón azul y un pimpón blanco. Los niños responden de manera aleatoria y el color que tiene mayor preferencia es el azul.

Al terminar todos los estudiantes este primer experimento, se inicia con la socialización de los resultados por parte de algunos estudiantes, llegando a la conclusión "*que cualquier color del pimpon puede salir, porque hay muchos colores".*[31] Al final debían explicar porque pueden salir diferentes colores, y la mayoría respondió porque no eran los mismos colores.

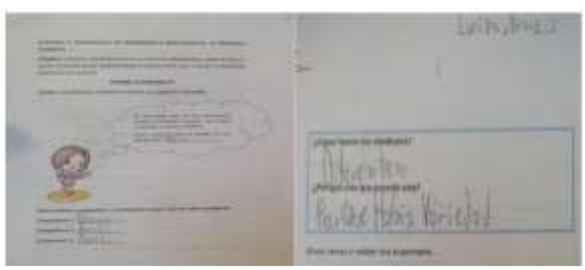


Figura 10. Respuesta de un estudiante.

Para el experimento dos, los estudiantes debían responder que color de pimpón sale de una bolsa de pimpones de colores azules. Todos los estudiantes respondieron

[31] Respuesta de un estudiante perteneciente al colegio de investigación.

diciendo que el pimpón que saldría es de color azul, justificando "*que solo puede salir el color azul, porque es el único que se encuentra en la bolsa".*[32] .

Figura 11. Respuesta de un estudiante.

Al terminar el experimento 1 y 2, se les indica que ahora se les va dar un nombre a los resultados obtenidos en cada uno de los experimentos realizados, determinando cuales reciben el nombre de experimentos aleatorios y determinísticos. Al tener los estudiantes claro este concepto, se les pide que desarrollen los siguientes experimentos y determinen a que experimento pertenecen. Se muestran algunos resultados dados por los estudiantes.

Figura 12. Respuesta de un estudiante.

[32] Respuesta de un estudiante perteneciente al colegio de investigación.

Figura 13. Respuesta de un estudiante.

Al finalizar la exploración de cada experimento, los estudiantes interiorizaron y asimilan la diferencia que existe entre un experimento determinístico y aleatorio, los estudiantes se sentían motivados y entusiasmados por seguir trabajando la actividad planteada. Luego se les pidió que se iba a comenzar a dar solución a cada uno de los problemas planteados en la guía donde debían determinar a qué experimento correspondían.

Para la primera pregunta, debían de seleccionar cuál situación pertenecía a un experimento aleatorio, más del 60% de los estudiantes contestaron de forma correcta.

Figura 14. Respuesta de un estudiante.

Se socializa la respuesta por parte de los estudiantes donde justifican porque de su elección, para los estudiantes que tuvieron el resultado incorrecto despejaron y aclararon sus dudas.

Con respecto al punto dos, donde debían elegir la imagen que correspondía a un experimento determinístico el 100% de los estudiantes determinaron la respuesta correcta.

Figura 15. Respuesta de un estudiante.

**Dificultades.** En el desarrollo de esta actividad algunos de los estudiantes se les dificulto expresar lo que estaban pensando.

**Logros.** Los estudiantes construyen e identifican el concepto de experimentos aleatorios y experimentos determinísticos. Inician con un pensamiento de adaptación, según Piaget para esta etapa el niño comienza con una asimilación a través de la experiencia y con base en ella realiza juicios permitiendo de esta manera asimilar el concepto.

**Conclusiones.** Como se indica en las preguntas correctas de la actividad 1, un gran porcentaje de los estudiantes empezaron a construir el concepto de experimentos aleatorios y determinísticos, esto se evidencia pues más del 70% de los estudiantes lograron identificar y dar solución a los problemas con respecto al concepto trabajado en esta sesión.

Se observa que los estudiantes construyen el concepto de experimentos aleatorios y determinísticos realizando una interacción entre los problemas del contexto que van en el entorno y la socialización de sus compañeros, iniciando la asimilación de estos conceptos a través de dos elementos que son: lo que ve y lo que significa en el contexto del individuo, es de aclarar que la solución de problemas es crucial para que el estudiante sin importar la edad inicie con los procesos de asimilación. Es por esto, que al inicio de la actividad se les solicito a los estudiantes explicar lo desarrollado en la sesión. Teniendo en cuenta, la teoría de Schoenfeld, donde argumenta que la claridad en el entendimiento del problema es la clave en el proceso de resolución de este.

| | Preguntas correctas en % Actividad 1 | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **No. Pregunta** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |
| **Porcentaje %** | a.100 b.89 | a.100 b.89 | a.100 b. 77 | a. 100 b. 100 | 100 | 100 | 78 | 100 | 78 | a.100 b.100 | a.100 b.100 | a.100 b.100 |

### 4.2.3. Actividad 2: Espacio muestral

Al iniciar con esta actividad algunos estudiantes se encontraban en virtualidad y otros en presencialidad, se dio las indicaciones de la actividad y los estudiantes comienzan a trabajar de manera individual. Se les pide a los estudiantes que lean cada pregunta y que digan con sus palabras qué tienen que realizar en cada experimento y problema.

Los dos primeros experimentos tienen como objetivo llevar al estudiante al significado del concepto de espacio muestral y suceso.

**Descripción de algunos episodios**

Para el experimento uno, los estudiantes debían responder los posibles resultados de combinar unas balotas de colores rojo, amarillo y azul con números de 1, 2 y 3. Seis de los nueve estudiantes contestaron de manera correcta y tres respondieron combinaciones diferentes a la esperada (ver resultados de la actividad).

En la solución del primer experimento, se evidencio que los estudiantes generaron dos ideas de solución, que fueron dar su respuesta coloreando y otros solo utilizaron la escritura.

Figura 16. Respuesta de un estudiante.

Para los siguientes experimentos y solución a los problemas planteados, los estudiantes empiezan a inferir en cada uno de los resultados interpretando que significa espacio muestral y suceso. A continuación, se muestra algunos resultados dados por los estudiantes.

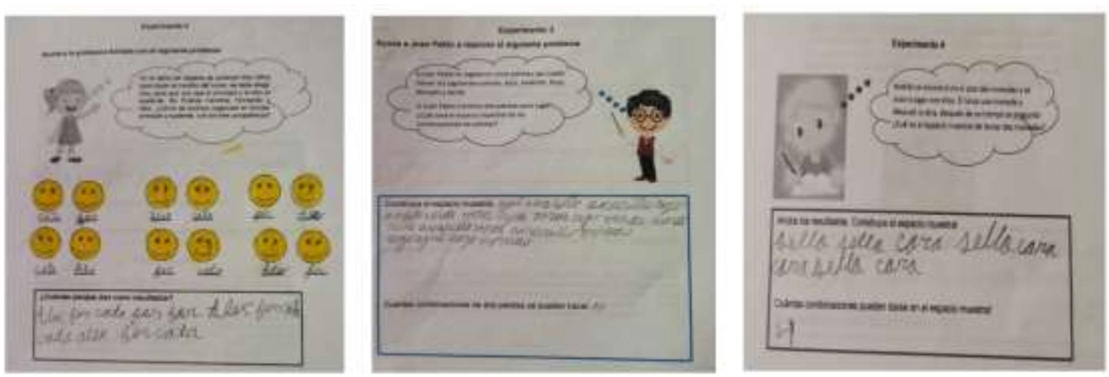


Figura 17. Respuestas de estudiantes.

**Dificultades.** En la solución de cada uno de los problemas se evidencia que a medida que van subiendo de nivel, algunos de los estudiantes se les dificulta llegar a la respuesta correcta, una de las causas sea que aún tiene dificultad en la comprensión lectora.

**Logros.** A partir del experimento tres, los estudiantes comenzaron a realizar las combinaciones necesarias para dar solución a los problemas planteados en la sesión.

A medida que iban avanzando en la actividad los problemas tenían un nivel más de dificultad, lo que permitió que los estudiantes alcanzaran un nivel mayor de concentración e inician a justificar los procedimientos que utilizaron para dar solución a los problemas planteados.

**Conclusiones.** Los estudiantes realizan representaciones para determinar el espacio muestral. Antes de realizar las representaciones se detienen a reflexionar en cada punto y pensar de qué forma podrían encontrar las combinaciones pertinentes, de esta manera, llegar aún mejor entendimiento con respecto a lo que se está preguntando.

Se presenta a continuación los resultados obtenidos en la actividad.

| | Preguntas correctas en % Actividad 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **No. Pregunta** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **Porcentaje %** | a.67<br>b.56 | a.78<br>b.89 | a.67<br>b. 67 | a. 67<br>b. 67 | a.44<br>b.44 | a.56<br>b.56 | a.67<br>b.67 |

### 4.2.4. Actividad 3: Eventos posibles, imposibles y seguros

Al empezar esta actividad algunos estudiantes se encontraban en virtualidad y otros en presencialidad, se dio las indicaciones de la actividad, se trabajó de forma individual. Se les pide a los estudiantes que lean cada pregunta y que digan con sus palabras qué tienen que realizar en cada suceso y problema.

## Descripción de algunos episodios

Al iniciar la actividad los estudiantes se encontraban entusiastas por saber que se iba a trabajar. Esta actividad fue la más fácil para ellos.

Esta actividad inicia con una serie de situaciones donde el estudiante debe interpretar si se encuentra en un suceso posible, imposible o seguro. Para el primer experimento, los estudiantes debían decir que tan posible es que mañana lloverá, todos los niños respondieron que era posible que lloviera, esto muestra que entienden el concepto de posible. A la situación de que posible es mañana jugar con sus amigos, 4 respondieron que era posible, 3 que era imposible y 2 seguro.

Para el suceso, que tan posible es lanzar una moneda y que caigan sello, 6 respondieron que era posible y 3 respondieron que era seguro, al interactuar con ellos y preguntarles el porqué de sus respuestas se encuentra que algunos de los niños creen que un evento seguro es lo mismo que un evento posible (ver figura 18).

Figura 18. Respuesta de un estudiante.

Al preguntar qué tan posible es tener clases un domingo, todos respondieron que era imposible. Para el suceso, que tan posible es que la hora del descanso sea a las 9:10

am, 7 respondieron seguro y 2 que era posible. Se evidencia, que hay unos estudiantes que confunden el suceso seguro con el posible.

En el suceso donde los estudiantes debían decir: que tan posible es que mis clases en el día 1 terminen a las 2:40 pm, todos respondieron que el suceso es seguro. Para esta actividad se evidencia que cuando se pregunta por situaciones que conocen, sus respuestas tienden hacer correctas.

Con respecto a la segunda etapa de esta actividad correspondiente a la solución de problemas, en uno de los puntos se les pide a los estudiantes que creen una situación con un evento posible, seguro e imposible, algunas respuestas dadas para sucesos imposibles fueron, "que *las llantas de la cicla se derritan*"[33], "*que la bicicleta se quede sin gasolina*"[34]. Para este punto, se evidencia la facilidad que tuvieron los estudiantes para resolverlo.

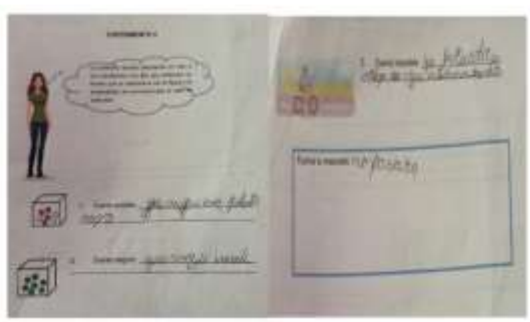


Figura 19. Respuesta de un estudiante.

En esta actividad los estudiantes empiezan a pronosticar los comportamientos de los diferentes sucesos que se presentaron, apoyados en sucesos conocidos

[33] Respuesta dada por un estudiante

[34] Respuesta dada por un estudiante

contribuyendo de esta manera a la construcción de modelos mentales permitiendo dar solución a los problemas. Se muestran algunas respuestas dadas por los estudiantes.

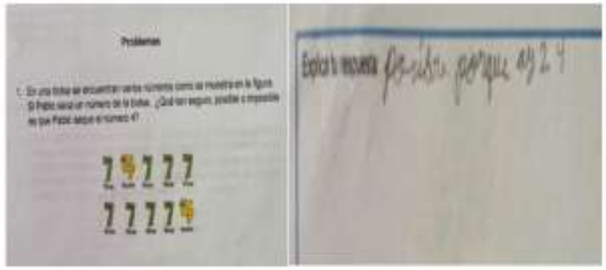


Figura 20. Respuesta de un estudiante

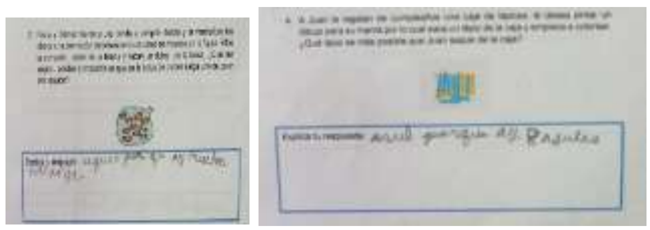


Figura 21. Respuesta de un estudiante

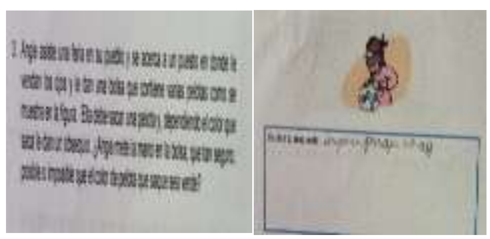


Figura 22. Respuesta de un estudiante

**Dificultad.** Al iniciar la actividad algunos de los estudiantes confunden el concepto de suceso seguro con posible, pues piensan que significan lo mismo.

**Logros.** A medida que los estudiantes interactúan y dan solución a cada uno de los problemas, identifican bajo que contextos un suceso puede ser posible – imposible o seguro.

Los estudiantes exploran cada uno de los experimentos y problemas planteados en la actividad, lo que les permite utilizar su imaginación, proponiendo enunciados para cada suceso.

Los estudiantes construyen significado apropiado para los conceptos de sucesos posible, imposible y seguro.

**Conclusiones.** Para esta actividad los estudiantes expresan fácilmente las heurísticas que realizaban para dar solución a los problemas, esto se evidencio en el momento de dar a conocer sus respuestas el cuál lo realizan con naturalidad y confianza sin temor a equivocarse. En el desarrollo de esta sesión, los estudiantes trabajan el tercer factor que indica Schoenfeld denominado control, donde los estudiantes al resolver los problemas planteados pueden descubrir si cometieron algún error, esto se determinó en el momento que socializaban sus respuestas donde algunos señalaban si podían corregir sus respuestas pues habían cometido un error. A continuación, se indica el porcentaje de respuestas correctas en cada una de las preguntas realizadas en esta actividad.

| | Preguntas correctas en % Actividad 3 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. Pregunta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Porcentaje % | a.100<br>b.45<br>c.67 | a.67<br>b.67<br>C.100 | a.78<br>b. 100<br>C.100 | a. 89 | 56 | 89 | 100 | 100 | 100 | 100 |

### 4.2.5. Actividad 4: Espacio muestral

Al empezar esta actividad algunos estudiantes se encontraban en virtualidad y otros en presencialidad, se dio las indicaciones de la actividad, se trabajó de forma individual. Se les pide a los estudiantes que lean cada pregunta y que digan con sus palabras qué tienen que realizar en cada problema.

**Descripción de algunos episodios.**

Esta actividad fue más fácil para ellos que la actividad 2. El objetivo de esta actividad, fue fortalecer el concepto de espacio muestral a través de situaciones más complejas. Para el problema uno, los estudiantes debían construir las combinaciones de parejas con cuatro collares y tres pares de aretes. Todos los estudiantes respondieron de forma correcta la pregunta, ratificando lo que indica Piaget & Fischbein (1975), donde los modelos mentales que van construyendo a medida que se les va presentando cada actividad lo van incorporando a su estructura mental lo que permite que el estudiante avance en su desarrollo de pensamiento.

Para la actividad dos, se evidencio una dificultad en el desarrollo de algunos problemas y es que los estudiantes a medida que se subía de nivel la pregunta presentaban algunos de ellos alguna dificultad de comprensión para resolverlo, para esta actividad respondían con mayor facilidad sin importar la estructura de la pregunta. Se presenta una solución a la pregunta uno.

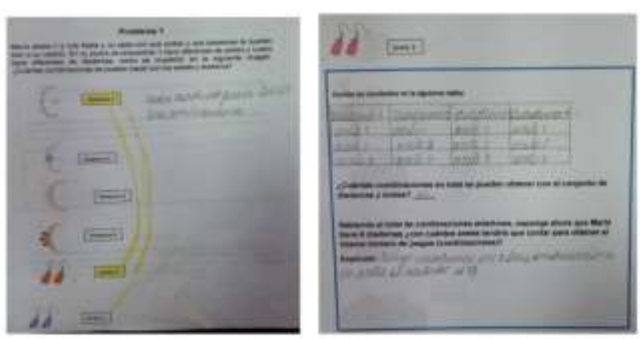


Figura 23. Respuesta de un estudiante.

Para el problema dos, debían hallar el número de motos, habiendo 10 combinaciones y 5 carros. Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta. La mayoría de los estudiantes lo realizaron aplicando el principio de multiplicación, sin saberlo.

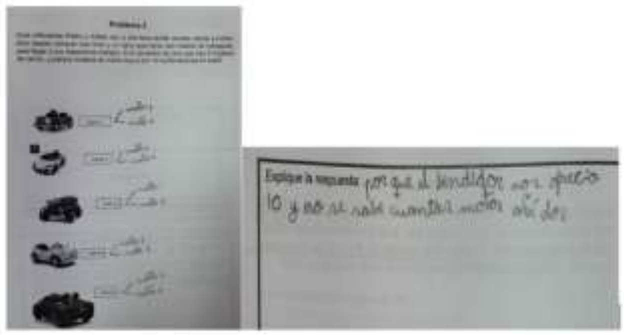


Figura 24. Respuesta de un estudiante.

Para el problema 3, los estudiantes debían hallar el número de frutas y verduras que Camilo puede escoger, habiendo 4 tipos de verduras, las cuales forman 24 combinaciones. Todos los estudiantes contestaron de manera adecuada la respuesta.

Alguna de las estudiantes en este problema dijo "*Miss esto se hace multiplicando*"[35]. Se le pregunto cómo se dio cuenta o cómo fue que lo hizo, la niña les explicó a sus compañeros como obtuvo este procedimiento, sus compañeros curiosos atendieron a su explicación entendiendo iniciaron a trabajar de esta forma y obtener la respuesta de una forma más rápida. Aquí podemos identificar que la estudiante tiene construido el concepto, lo cual le permite proponer nuevos métodos de solución a través de procedimientos algorítmicos. A continuación, se presentan algunas soluciones dadas por los estudiantes.

[35] Respuesta dada por un estudiante

Figura 25. Respuesta de un estudiante.

**Dificultades.** Los estudiantes no presentaron dificultad para el desarrollo de esta actividad.

**Logros.** Los estudiantes encontraron otra estrategia para hallar el espacio muestral a través de procedimientos algorítmicos.

**Conclusiones.** En esta actividad se evidencia que los estudiantes desarrollaron su pensamiento probabilístico, demostrando como avanzaron en los procesos de construcción de significado del concepto de probabilidad para la ocurrencia de sucesos, donde proponen diferentes estrategias de solución, iniciando en una etapa de exploración y reflexión de esta forma encontrando diferentes alternativas de solución a un problema en el contexto. Para esta actividad los estudiantes encontraron la solución correcta a todos los problemas planteados como se puede observar.

| | **Preguntas correctas en % Actividad 4** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **No. Pregunta** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **Porcentaje %** | a.100<br>b.100 | 100 | 100 | 100 | a.100<br>b.100 |

### 4.2.6. Prueba final

Para el análisis de cada una de las preguntas presentadas por los estudiantes se encontró lo que se detalla a continuación.

En la pregunta 1, los estudiantes debían hallar el número de combinaciones para un menú compuesto por tres carnes, tres acompañamientos y dos bebidas. Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta.

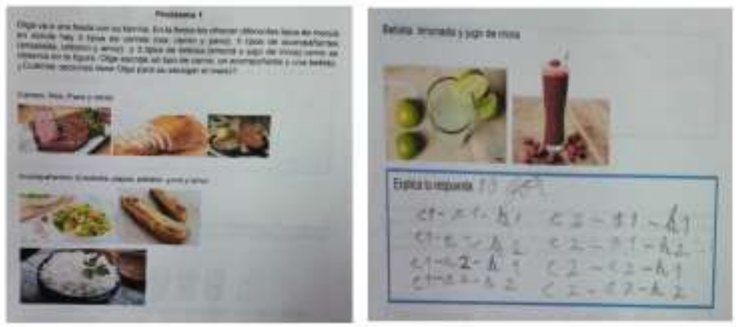


Figura 26. Respuesta por parte de algunos estudiantes.

En la pregunta 2, los estudiantes debían responder que tan posible es que un vendedor sacara un refresco de color anaranjado teniendo solo verde. Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta.

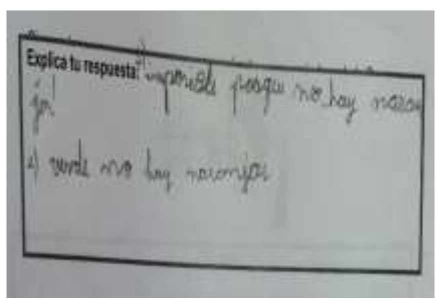



Figura 27. Respuesta por parte de algunos estudiantes.

Para la pregunta 3, los estudiantes debían responder que colores de lápices debe de haber en una cartuchera si el evento es determinístico. Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta.


Figura 28. Respuesta por parte de algunos estudiantes.

Para la pregunta 4, los estudiantes debían responder ¿Qué tan posible es que la abuelita sacara un pimentón de su cesta? Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta. Además, debían responder ¿Qué en la canasta de la abuelita era posible que se diera un evento seguro? Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta.


Figura 29. Respuesta por parte de algunos estudiantes.

Para la pregunta 5, los estudiantes debían responder ¿Qué características deben tener unas paletas que venden en el colegio para que sea un evento determinístico? Todos los estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta.

Figura 30. Respuesta por parte de algunos estudiantes.

Para el problema 6, los estudiantes debían responder las diferentes maneras que tiene Martin para llegar al colegio, 8 de los 9 estudiantes contestaron de manera correcta a la pregunta.

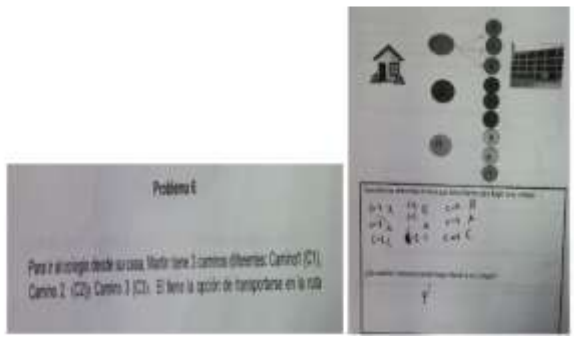


Figura 31. Respuesta por parte de algunos estudiantes.

Para la pregunta 7, los estudiantes debían responder, ¿En qué número puede caer la piedra cuando la lance Anita para que sea un evento posible? Todos los niños contestaron que en cualquier número de la golosa. Se obtuvo más del 80% de respuestas correctas en la prueba de salida, como se muestra en análisis de las respuestas de la prueba final.

| | **Preguntas correctas en % Prueba de salida** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **No. Pregunta** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **Porcentaje %** | 100 | 100 | 100 | a.100<br>b.100 | 100 | a.89<br>b.89 | a.100 |

**Conclusiones Capítulo 4**

Los resultados de cada actividad se precisan sobre la base de su desarrollo, los logros, dificultades y conclusiones para cada sesión. En el desarrollo de las diferentes actividades se socializaron los resultados y se describieron las soluciones de algunos estudiantes. Durante las actividades, los estudiantes avanzaron en el proceso de desarrollo de su pensamiento probabilístico esto se evidencio en los logros y conclusiones que se indicaron para cada sesión.

## CONCLUSIONES

En el proceso de investigación sobre el desarrollo del pensamiento probabilístico en estudiantes de grado tercero de primaria del Colegio Bosque Bilingüe de la ciudad de Bogotá, mostro importantes aspectos a tener en cuenta. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos que permitieron cumplir el objetivo de este trabajo.

A continuación, se dará inicio con responder las preguntas científicas planteadas en esta investigación.

¿Qué investigaciones se han realizado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la probabilidad; sucesos posibles, imposibles y seguros?

La mayoría de literatura que se encontró, plantean la importancia que los docentes tengan conocimientos del concepto de probabilidad para enseñarlo.

Godino y Batanero (1998) presentan la probabilidad como un concepto de significado del objeto que está ligado a las prácticas sobre la solución de problemas (predicción de fenómenos aleatorios análisis).

Shulman (1986) plantea tipos de conocimiento para la enseñanza de la matemática, otras investigaciones proponen unidades didácticas a través de experimentos para que comprendan el concepto de probabilidad la cual deberían realizarse a través del diálogo. En todas las investigaciones encontradas destacan la importancia de la enseñanza de la probabilidad para poder entender la relación que existe con el mundo exterior, se evidencio que es estas investigaciones no concluían de qué forma los estudiantes desarrollaban su pensamiento probabilístico.

Por otro lado, se encontraron autores que dan una definición de pensamiento probabilístico como los son Pfannkuch y Brown (1996), Lau y Ranyard (1999), Jones y col. (1999), Lamprianou (2002), Jolliffe (2005), entre otros, la cual contribuyeron para estructurar las actividades propuestas en esta tesis.

La solución de esta pregunta permitió observar dentro del contexto de la educación matemática cuales son las principales líneas de investigación en el pensamiento probabilístico y sintetizarlo al objeto y campo de esta investigación, lo que le permite al lector ubicarse dentro de las últimas investigaciones y aportes a este pensamiento.

¿Qué presupuestos teóricos sustentan el desarrollo del pensamiento estadístico relacionado con el concepto de la probabilidad de la ocurrencia de fenómenos?

Alsina Ángel (2019) habla sobre la importancia de incorporar la estadística en la educación infantil y así ir desarrollando el concepto de la ocurrencia de fenómenos.

Otros autores como Markus Helmerich (2015) y Jill Fielding-Wells hablan sobre la importancia de la ocurrencia de los fenómenos a través de los experimentos o juegos en el aula para los niños, pues estos permiten el acercamiento al concepto de la probabilidad en la ocurrencia de fenómenos.

Batanero (2005), hace la diferencia entre el objeto de una determinada institución de enseñanza (clase de matemáticas) y el personal (estudiante) y analiza los significados históricos de la probabilidad y como ha incidido en la enseñanza de la probabilidad.

Se tiene en cuenta para los resultados de esta investigación el aspecto cognitivo, de los trabajos realizados por Piaget (1975), encontrando:

- Los estudiantes avanzan en su pensamiento a través de la interacción con una situación en la se le plantea y el entorno donde socializan con sus compañeros sus resultados.

- El desarrollo del pensamiento de los estudiantes no se tiene en cuenta el grado de madurez en el que se encuentra, este está ligado con respecto a las actividades que se les propone para producir conocimiento, con base en ello, van alcanzando un grado de madurez para dar solución a problemas sin importar su edad.
- La forma en que van asimilando un concepto los estudiantes, está relacionado en la forma que se está presentando las actividades para construir conocimiento.
- El pensamiento probabilístico va avanzando a medida que el estudiante se desenvuelve en nuevas experiencias.
- Para la asimilación y la construcción de un concepto, se evidencio que el estudiante actúa sobre cada experimento y problema propuesto a través de la exploración, para luego interpretarla realizar una reflexión y luego transformarla, de esta forma encontraron procedimientos algorítmicos. Esto se evidencio en la actividad 4, donde los estudiantes para encontrar el espacio muestral de los problemas propuestos indujeron el principio de la multiplicación.
- Los estudiantes desarrollan su pensamiento probabilístico siendo capaces de encontrar diferentes alternativas de solución aún problema propuesto.

¿Cómo estructurar una secuencia de experiencias para poder desarrollar el pensamiento probabilístico en estudiantes de grado tercero en el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de probabilidad?, ¿En qué contextos deben desarrollarse las experiencias estructuradas?

Para dar solución a estos cuestionamientos, las actividades se diseñaron con el propósito de avanzar en el pensamiento matemático, es importante que cada actividad que se proponga al estudiante se encuentre en un contexto que el estudiante conozca.

Se debe introducir un tema a través de la exploración ya sea a través de un experimento o una situación, esto promoverá que el estudiante se sienta curioso y motivado por encontrar la solución, introduciéndolo de esta manera al concepto que se quiere trabajar. A medida que vaya avanzando en la solución de las actividades propuestas, se debe subir el nivel de los problemas, donde el estudiante se sienta retado, de esta forma, sienta necesidad de generar estrategias de solución construyendo modelos mentales y promoviendo la creatividad.

Estas evidencias apuntan al saber Ser, Hacer y Conocer y permiten dar evidencia de estas, de cómo el estudiante usa el conocimiento en contextos o situaciones específicas.

Por otro lado, es importante que el profesor esté atento en la construcción de conocimiento del estudiante, no es entregar una guía de trabajo y desentenderse del proceso, es importante que el acompañamiento se de en cada una de las actividades que se propongan y se enfoque en lo que se quiere lograr, esto se puede hacer a través de preguntas.

¿Cómo analizar la eficacia y el impacto de la secuencia de experiencias diseñadas para desarrollar el pensamiento probabilístico en estudiantes de grado tercero al comenzar el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de probabilidad?

La eficacia e impacto de la secuencia de experiencias diseñadas para desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes, se determinó en el avance y procesos de pensamiento que utilizaron para dar solución a cada actividad propuesta. Además, se realizó una prueba inicial y final para evidenciar el cambio que tuvieron los estudiantes con respecto a los conceptos trabajados.

Por otro lado, las actividades propuestas ayudaron a que el estudiante vea los cambios que se produjeron sobre una información que no conocía y ahora conoce. Permite al docente ver los aprendizajes recientes del estudiante, corroborar si ha entendido la información nueva y si es consciente de sus nuevos saberes. El estudiante va fortaleciendo su percepción, la capacidad para seleccionar información pertinente y organizarla, desarrolla la capacidad de evocar sus aprendizajes previos y relacionarlos con los nuevos para generar conexiones significativas del conocimiento.

Al dar respuesta a cada una de las preguntas de investigación, se evidencia que lo propuesto para la investigación cumple y desarrolla el objetivo general que es favorecer el desarrollo del pensamiento probabilístico en ámbitos de incertidumbre en estudiantes de grado tercero en el Colegio del Bosque Bilingüe.

## RECOMENDACIONES

Con base en la experiencia y aprendizaje del autor en la presente investigación y teniendo en cuenta la actitud positiva de los estudiantes durante la aplicación de las actividades y después de ellas, se hacen las siguientes recomendaciones:

- Proponer nuevos problemas de los conceptos trabajados en esta investigación a los estudiantes de tercer grado, teniendo en cuenta la actitud y resultados positivos que generó el desarrollo de las actividades.
- Continuar estructurando actividades que permitan desarrollar el pensamiento probabilístico a partir de problemas retadores.
- Aplicar a otras temáticas que contribuyan con el mismo objetivo con estudiantes de diferentes niveles educativos.
- Socializar la propuesta con los demás profesores de matemáticas para lograr desde edades tempranas desarrollar pensamiento probabilístico y determinar sus bondades en el avance de su pensamiento matemático en los estudiantes.
- A través de la presente investigación y la aplicación de las actividades, se evidencia la necesidad de introducir los conceptos básicos de probabilidad a los estudiantes y que ellos aprendan a aplicarlos, para sí empezar a desarrollar el pensamiento probabilístico. Con este fin los docentes deben aprender a enseñar más allá de los libros, utilizando la resolución de problemas y problemas retadores, logrando una mejor aplicación de los conceptos llevándolos a situaciones de la vida real.
- Entre más pequeños se les introduzcan los conceptos mejor los comprenderán y más adelante tendrán la capacidad de aplicarlos en su vida cotidiana. Se invita a trabajar

en el desarrollo del pensamiento probabilístico desde Grado Retoños en el Colegio del Bosque Bilingüe UAN.

## BIBLIOGRAFÍA


Ángel Alsina. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado, Revista Números, volumen 85, marzo 2014, págs. 5 – 23. Recuperado el octubre 24 del 2020 de URL: http://funes.uniandes.edu.co/3677/1/V%C3%A1squez2014Ense%C3%B1anzaNumeros85.pdf

Alsina, Ángel; Vásquez, Claudia. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado, Revista Números (volumen 85, marzo 2014, pp. 5 – 23). Recuperado el 24 de octubre del 2020 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/3677/1/V%C3%A1squez2014Ense%C3%B1anzaNumeros85.pdf

Alsina, Ángel. (2019). Análisis de una experiencia sobre enseñanza de la estadística y la probabilidad en el aula infantil. La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística 2019. Recuperado el 5 de mayo del 2020 en la URL https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/ponencias/alsina.pdf

Alsina, Ángel. (2012) La estadística y la probabilidad en educación infantil: Conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales, Revista de Didácticas Específicas, nº 7, PP. 4-22, 2012 , Descargable el 5 de Mayo del 2020 en la URL: https://revistas.uam.es/didacticasespecificas/article/view/7700/7976

Alsina Ángel, Vásquez Ortiz Claudia,(2016) De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: Elementos para su caracterización y desarrollo, UNIÓN Revista Iberoamericana de educación matemática Número 48, Diciembre 2016, páginas 41 – 58, Descargable en la URL Nov 1 2021: http://funes.uniandes.edu.co/17082/1/Alsina2016De.pdf

Andrew Lane, Arapahoe Community College, Littleton, Colorado, Usa, Experimental Probability in Elementary School, Teaching Statistics, Volume 31, Issue 2, pgs. 34 - 36, Summer 2009, Descargable el 5 de Marzo 2021, en la URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9639.2009.00362.x

Batanero, Carmen. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching, Octubre 30 CERME 9 Feb 2015. Praga, Republica Checa. Recuperado el 24 de octubre del 2020 en la URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287071/document

Burbano-Pantoja, V. M. A., Valdivieso-Miranda, M. A., & Aldana-Bermúdez, E. (2017). Conocimiento base para la enseñanza: un marco aplicable en la didáctica de la probabilidad. Rev.investig.desarro.innov, 7(2), 269-285. doi: 10.19053/20278306.v7.n.2.2017.6070

Cordani, Lisbeth K. (2014) Step-by-step activities in the classroom preparing to teach the frequentisti definition of probability, ICOTS 9. Flagstaff, Arizona. USA. Recuperado el 5 de Marzo 2021 en la URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6D1_CORDANI.pdf?1405041676

Fielding-Wells, Jill. (2014). Where's Your Evidence? Challenging Young Students' Equiprobability Bias Through Argumentation, Icots 9 2014. Flagstaff, Arizona, Estados Unidos. Recuperado el 24 de octubre del 2020 en la

URL: https://icots.info/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_2B2_FIELDINGWELLS.pdf

Garcia, E (2006). Piaget la formación de la inteligencia. Ciudad Editorial trillas.

Gravemeijer K, Prediger S. Compendium for Early Career Researchers in Matematics Education. Chapter 2, Topic-Specific Design Research: An Introducción. Springer Open 2016

Hay, Ian. (2018).Teaching probability: Using levels of dialogue and proportional reasoning. ICOTS 10. Kyoto, Japon. Recuperado el 8 de noviembre 2020 en la: URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6B2_HAY.pdf?1405041660

Helmerich, Markus. (2015). Rolling the dice – exploring different approaches to probability with primary school students, CERME 9 Feb 2015. Praga, Republica Checa. Recuperado el 24 de octubre del 2020 en la URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01287071/document

Hernández-Solís Luis Armando, Universidad Estatal a Distancia-Costa Rica, Batanero Carmen, Gea María M, Álvarez-Arroyo Rocío, Universidad de Granada, Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria, Educación Matemática, vol. 33, núm. 1, abril de 2021, descargable 8 Octubre de 2021 en URL: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol33/1/07_REM_33-1.pdf

Kapadia Ramesh. (2010). England, Chance and necessity: The languages of probability and mathematics, ICOTS 8 2010. LJubljana, Eslovenia. Recuperado el 8 noviembre de 2020 en la URL: http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_3F1_KAPADIA.pdf?1402524970

Maja Zobenica, Sofija Sudzukovic, Ljubica Oparnica. (2016). Conference: Education and the Social Challenges at the Beginning of the 21st CenturyAt: University of Novi Sad, Faculty of Education in Sombor Volume: 1, Noviembre 2016. Recuperado el 5 de marzo del 2021 en la URL: https://www.researchgate.net/publication/312161777

Manuguerra Maurizio, Macquarie University, NSW Australia, Peter Petocz, Macquarie University, NSW Australia Learning and teaching probability in the 21st century, , ICOTS 9, Flagstaff, Arizona, USA, 2014, Descagable el 5 de Marzo 2021 en la URL: http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6D2_MANUGUERRA.pdf?1405041677

Moreno, G. (2019). Un Paseo Por el Azar. Ciudad: Chile. Dirección Editorial. Arturo infante Reñasco

Pereira Alicia, Yedig Das Neves, La experimentación aleatoria y su simulación en el aula: Estrategias para la reconstrucción histórica del concepto de probabilidad, CUREM 5, Septiembre 2015, Montevideo, Uruguay, Descargable en la URL en Nov 1, 2021: http://funes.uniandes.edu.co/17785/1/Pereira2015La.pdf

Perelli D'Argenzio, Maria Pia; Rigatti-Luchini, Silio. (2014). Teachers and studentes: From an intuitive approach to a rational evaluation of probability. ICOTS 9 2014, Flagstaff. Arizona, Estados Unidos. Recuperado el 24 de octubre del 2020 en la URL:

http://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6F1_PERELLIDARGENZIO.pdf?1405041683

Osorio Gonzalez Augusta. Marco teórico para la creación de situaciones de incertidumbre de la vida cotidiana en la enseñanza del concepto de probabilidad, Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística. 129, 2019, descargable de la URL en Oct 5, 2021: https://digibug.ugr.es/handle/10481/25938

Takayama Takuma, Shimoda. (2018). A study on mathematical activity with a focus on linking the theorical and experimental approaches to probability. ICOTS 10. Kyoto, Japon. Recuperado el 8 de Noviembre 2020 en la URL: http://iase-web.org/icots/10/proceedings/pdfs/ICOTS10_6E3.pdf?1531364280

Savard, Annie. (2010). Simulating the risk without gambling: Can student conceptions generate critical thinking about probability? Contributed Paper, ICOTS 8 Ljubljana, Eslovenia. Recuperado el 5 de Marzo del 2021 en la URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.205.1120

Skoumpourdi, Chrisanthi. (2004). The Teaching of Probability Theory as a New Trend in Greek Primary Education, ICME 10. Dinamarca. Recuperado el 5 de marzo del 2021 en la URL; https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/44061716/6.3.1.4.pdf?1458816103=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DSkoumpourdi_C_2004_The_Teaching_of_Proba.pdf&Expires=1615661409&Signature=aDLpWQJiomiXQAOklA7DnrZdj0OrPOEEfo~vGG0zVAEtJ4PQIIHWJhj-3qY6b6pcNpgP~TdrNiEi0Ajkmp53bA-

05ABPnEp5fp5t3PAdJpj3Ix7yOOC880e2SRxIY~vsQP~YZymudPyqvsNpigYJAJw2LBsGh3Kqim9fCbFRSfCDRiCx4QE22YNhb9v-v4IGrczt5OoEYZiIWe8BHFAd0iPXkl3mtuNOpw7wHVW3FfTeJD~C2d8~A0WIstx7YfATfljP1zrlrnFQWXr8FBAeXG125Hd~TFH1iyoHxAQoZRpON--IfdF1Y-N7ZAIZrk9oA7~EXiCd-Srcxg4OjRR-sw__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA

Soledad Estrella, Institute of Mathematis, Pontifical Catholic University of Valparaiso, Chile, Raimundo Olfos, Institute of Mathematis, Pontifical Catholic University of Valparaiso, Chile, Changing the understanding of probability in talented children, Contributed paper, ICOTS 8 2010, LJubljana, Eslovenia, descargable el 5 de Marzo en la URL: https://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_C256_ESTRELLA.pdf?1402524974

Vásquez Ortiz, Claudia, Nataly Pincheira Hauck, Danilo Díaz-Levicoy. (2016). Educ. Matem. Pesq. v.18, n.3, 1165-1182. São Paulo, Brasil. Reduperado el 5 de Marzo del 2021 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/8696/1/V%C3%A1squez%2C_Pincheira_y_D%C3%ADaz-Levicoy.pdf

Vásquez Ortiz, Claudia. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. Cuadernos Cenpec 8:1, pp.154-179, enero a julio. 2018. Recuperado el 5 de Mayo del 2020 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/12478/1/393-707-1-SM.pdf

Vásquez Ortiz, Claudia, Universidad de Girona, Nataly Pincheira Hauck, Pontificia Universidad Católica de Chile, Danilo Díaz-Levicoy, Universidad de Granada, España, Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.3, 1165-1182, 2016 Desrcagable el 5 de Marzo del 2021 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/8696/1/V%C3%A1squez%2C_Pincheira_y_D%C3%ADaz-Levicoy.pdf

Viali, Lori. (2010). The teaching of statistics and probability in mathematics undergraduate courses Contributed Paper, ICOTS 8. Ljubljana, Eslovenia. Recuperado el 5 de Marzo del 2021 en la URL: http://icots.info/icots/8/cd/pdfs/contributed/ICOTS8_C177_VIALI.pdf

Watson Jane M., Kelly Ben A., Can grade 3 students learn about variation?, ICOTS 6, Cape Town SudAfrica, descargable Nov 5 2020 en la URL: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/2a1_wats.pdf

Z. Nikiforidou, J. Pange, Laboratory of New Technologies and Distance Learning Department of Early Childhood Education University of Ioannina-Greece, CERME 5, 2007, Descargable de la URL Oct 5 2021: https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/Didaktik_der_Mathematik/BiehlerRolf/WG5.pdf#page=99

## ANEXOS

### Anexo 1. Prueba de entrada

Objetivo: determinar los conocimientos previos que tienen los estudiantes con respecto a la percepción de la ocurrencia de fenómenos a través de la construcción del significado de los conceptos de experimentos aleatorios, determinísticos y espacio muestral.

**Problemas Propuestos**

1. Encierra el dibujo que corresponde a un experimento aleatorio

Al lanzar esta moneda me caerá cara o sello

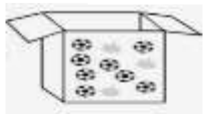
Contar el número de compañeros de mi salón

Lisa sacando la balota ganadora

Observar el tiempo en que tarda Homero en apagar las

2. Ayuda a Pablito a dar solución al siguiente problema.

**Pablito desea sacar un objeto de la siguiente caja**



¿Qué objeto es el más posible que saque Pablito?

| **Explica tu respuesta:** |
|---|
| |

3. Julio y Tomas van al supermercado y necesitan comprar unos refrescos, de los cuales hay 5 de color rojo, 3 de color azul, 7 de color morado y 5 de color verde. Si ellos no pueden escoger el color del refresco y el vendedor da un refresco a cada uno sin mirar. Ayuda a Julio y Tomas a responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es el color del posible refresco que el vendedor de a los niños?

| **Explica tu respuesta:** |
|---|
| |

¿Cuál es el color de refresco que tenga menos posibilidad de ser tomado por el vendedor para alcanzarle a los niños?

| **Explica tu respuesta:** |
|---|
| |

¿Qué color de refresco es igual de probable que les alcance el vendedor a los niños, en comparación con el refresco verde?

| **Explica tu respuesta:** |
|---|
| |

4. Carolina le regala a su mamá una canasta de frutas y hace un juego con ella, le dice que saque una fruta de la canasta sin ver. ¿Cuál será la posible fruta que seleccione?

| **Explica tu respuesta:** |
|---|
| |

5. Santiago tiene en su mesa de estudios un grupo de lápices de diferentes colores, como se muestra en la imagen:

Si escoge sin mira un lápiz al azar ¿Qué posibilidades tiene de sacar uno de color azul? Marca con una X la respuesta.

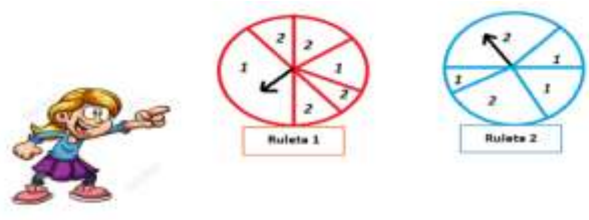
___ Muchas Posibilidades

___ Pocas Posibilidades

___ Algunas Posibilidades

___ Ninguna Posibilidad

6. Diana tiene dos ruletas como se muestra en la siguiente imagen




Si ella hace girar la flecha de la ruleta, ¿en qué ruleta es más posible obtener el número 1?

Explica tu respuesta:

**Anexo 2.** Actividad 1: Experimentos de aleatoriedad y determinísticos en diferentes contextos

**Objetivo:** Construir significado para el concepto de aleatoriedad y determinístico a través de experimentos, estableciendo la relación entre ellos utilizando diferentes problemas del contexto

**PRIMER EXPERIMENTO**

Ayuda a la profesora Josefina a resolver la siguiente situación

En una bolsa que no sea transparente vamos a introducir 1 pimpón rojo, 1 azul, 1 amarillo, 1 verde y 1 blanco.

Ahora vamos a sacar un pimpón sin ver: ¿es de color? ____________________

Ahora vamos a preguntar a 3 compañeros que color le salió el pimpón:

Compañero 1: _______________

Compañero 2: _______________

Compañero 3: _______________

¿Cómo fueron los resultados?

¿Por qué cree que sucedió esto?

Ahora vamos a realizar otro experimento….

## SEGUNDO EXPERIMENTO

Introduce en una bolsa que no sea transparente 4 pimpones azules

1. Saque un pimpón, ¿de qué color es? ______________________

Ahora vamos a preguntar a 3 compañeros que color le salió el pimpón:

Compañero 1: ________________

Compañero 2: ________________

Compañero 3: ________________

| |
|---|
| ¿Cómo fueron los resultados?<br><br>¿Por qué cree que sucedió esto? |

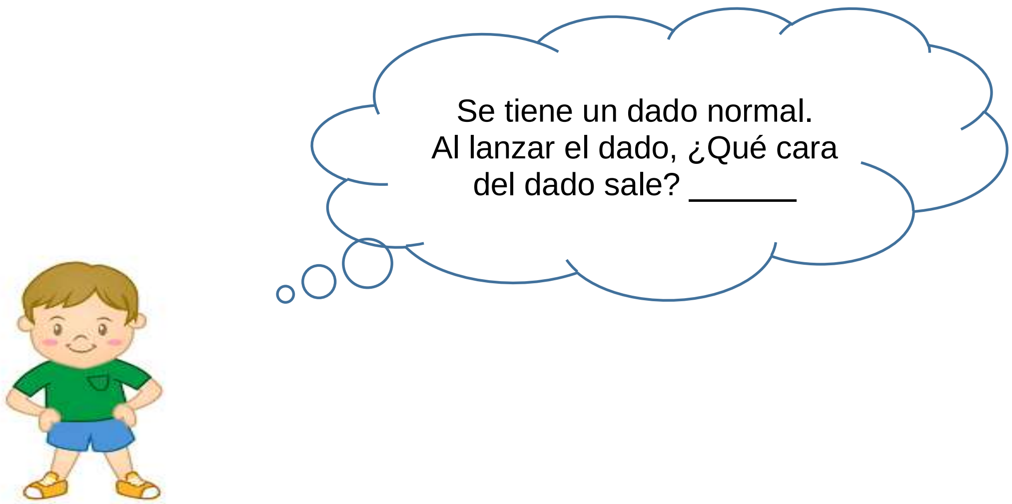
Vamos a darle un nombre al experimento 1 y 2:

El primer experimento donde los resultados fueron ____________ lo llamaremos experimento aleatorio.

Al experimento dos donde los resultados fueron ____________ lo llamaremos experimento deterministico.

**TERCER EXPERIMENTO**

Camilo se encuentra un dado en el piso y se pone a jugar con él, después de un tiempo de estar lanzando el dado le causo seguridad saber qué lado del dado sale más veces, ayúdalo a hallar la respuesta.




Ahora vamos a lanzar el dado diez veces.

Escribe tus resultados en la siguiente tabla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lanzamiento 1 | | Lanzamiento 6 | |
| Lanzamiento 2 | | Lanzamiento 7 | |
| Lanzamiento 3 | | Lanzamiento 8 | |
| Lanzamiento 4 | | Lanzamiento 9 | |
| Lanzamiento 5 | | Lanzamiento 10 | |

Después de lanzarlo 10 veces se les preguntará a 3 compañeros que lado del dado le salió más:

Compañero 1: ________________

Compañero 2: ________________

Compañero 3: ________________

¿Cómo fueron los resultados?

¿Cómo llamaríamos este experimento?

Ahora vamos a realizar otro experimento:

**CUARTO EXPERIMENTO**

Vamos a tomar el dado donde todas sus caras tienen la misma figura

Utiliza un dado en donde todas las caras de este tienen el mismo dibujo

Lanza el dado, que dibujo salió al lanzar el dado: ______________________

Ahora vamos a lanzar el dado 10 veces. Escribe tus resultados en la siguiente tabla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lanzamiento 1 | | Lanzamiento 6 | |
| Lanzamiento 2 | | Lanzamiento 7 | |
| Lanzamiento 3 | | Lanzamiento 8 | |
| Lanzamiento 4 | | Lanzamiento 9 | |
| Lanzamiento 5 | | Lanzamiento 10 | |

Después de lanzarlo 10 veces se les preguntará a 3 compañeros, ¿Que dibujo salió al lanzarlo?:

Compañero 1: _______________

Compañero 2: _______________

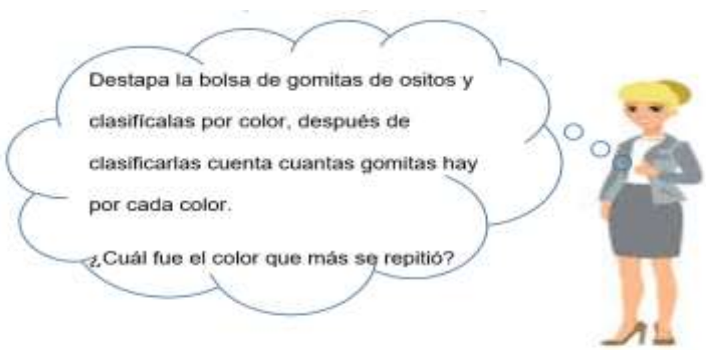
Compañero 3: _______________

¿Cómo fueron los resultados?

¿Cómo llamaríamos este experimento?

**QUINTO EXPERIMENTO**

En una empresa se fabrican diferentes tipos de dulces, entre los cuales se encuentran las gomitas de ositos. El supervisor de la planta quiere saber cual color de gomita es el que más aparece en las bolsas de estos dulces. Ayuda al supervisor a encontrar que color de gomita de osito se repite más en una bolsa.




Ahora se les preguntará a tres compañeros que hubieran realizado el conteo de las gomitas, ¿Cuál fue el color de gomitas que más se repitió en la bolsa?

Compañero 1: _______________

Compañero 2: _______________

Compañero 3: _______________

Que podemos concluir con los resultados obtenidos de los tres compañeros.

**SEXTO EXPERIMENTO**

El supervisor fue a otra parte de la planta en donde se producen gomitas en forma de moritas, este deseaba saber si todas las bolsas tenían en el mismo color, para lo cual cogió una bolsa, el contó todas y observo el color, ¿La bolsa tenía el mismo color de moritas? _______________________

Ahora tres compañeros tendrán una bolsa de moritas y observarán sus colores, ¿Cuántos colores de moritas hay en la bolsa?:

Compañero 1: _______________

Compañero 2: _______________

Compañero 3: _______________

Como fueron los resultados:

**Explica tu respuesta:**

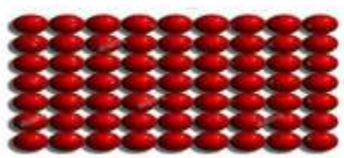
**PROBLEMAS**

Teniendo en cuenta lo realizado en los experimentos, ahora resuelve los siguientes problemas:

1. Determine cuál de los siguientes experimentos es un experimento aleatorio, márquelo con una X

Lanzar una

Hervir agua



Extraer un pimpón

2. Determine cuál de los siguientes experimentos es un experimento determinístico, márquelo con una X

Extraer una pelota de la Piscina

Escoger un helado sin ver

Tomar una fruta

3. En una feria de pueblo hay diez quioscos, a cada quiosco se le entrega una balota con un número determinado, para que al final del día en una rifa el quiosco con el número ganador se lleve un premio. La pelota con el número ganador se saca de la siguiente balotera:

Al sacar la balota ganadora, ¿se puede considerar esta situación como un experimento de tipo determinístico?

**Si __ No__ , Explica tu respuesta:**

4. Leandro tiene una caja de colores para colorear su tarea, la profesora le dice que se debe vendar los ojos y seleccionar un color, y con ese color pintar el dibujo. En la imagen siguiente se observa la actividad que realizo Leandro.

¿Qué color saco Leandro de la caja de colores? _________________

**¿Este es un experimento Aleatorio o determinístico? Explica tu respuesta:**

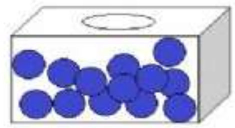
5. Santiago recibió de regalo de cumpleaños, una alcancía con cuatro monedas adentro, un día los amigos de Santiago lo invitaron a comer helado, él decidió sacar de su alcancía una moneda para pagar el helado.

¿Qué número sacara de la alcancía Santiago? _______________

**¿Este experimento es Aleatorio? Si ____ No ___**

**Explica tu respuesta:**

6. Ana y María fueron a una tienda a comprar bolas navideñas para decorar su árbol de navidad, en la tienda el vendedor les acerco una caja de bolas en donde María saco una para revisar que no tuviera ninguna grieta.



¿Qué color de bola navideña sacara María de la caja? _________________

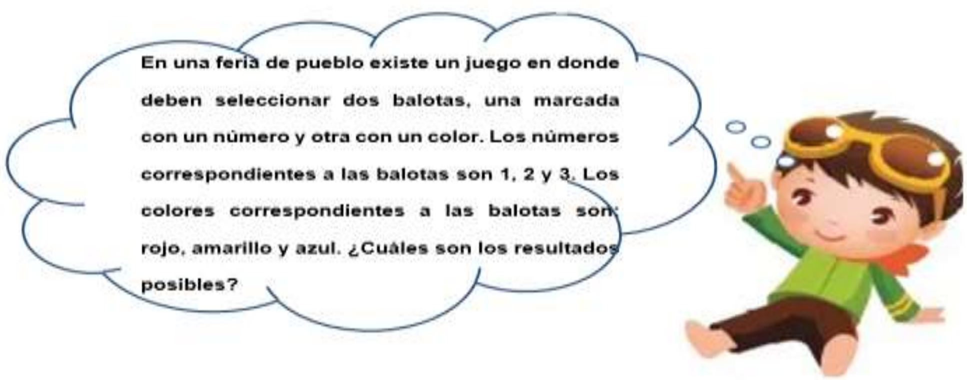
**¿Qué clase de experimento es?**

**Anexo 3 Actividad 2: Espacio muestral y Eventos**

**Objetivo:** Construir el significado de espacio muestral y evento a través de diferentes experimentos.

**Experimento 1**

Ayuda a Pedro a resolver la siguiente situación

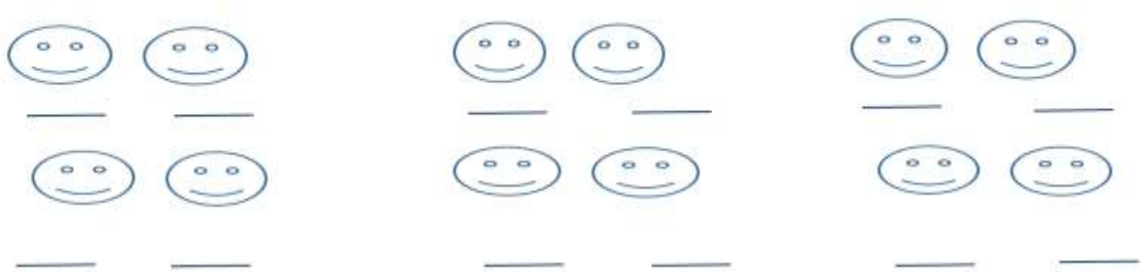


¿Cuántas parejas dan como resultados?

**Experimento 2**

Ayuda a la profesora Adriana con el siguiente problema

**En el salón de Adriana se postulan tres niños para hacer el monitor del curso, se debe elegir dos, para que uno sea el principal y el otro el suplente. Se Postula Carolina, Fernando y Alex. ¿Cómo se podrían organizar el monitor principal y suplente, con los tres compañeros?**



¿Cuántas parejas dan como resultados?

Vamos a darle un nombre al experimento 1 y 2:

A los resultados posibles encontrados en el experimento 1 y 2, lo llamaremos espacio muestral.

A las diferentes parejas que conforman en espacio muestral que se dieron en el experimento 1 y 2, las llamaremos Eventos.

**Experimento 3**

Ayuda a Juan Pablo a resolver el siguiente problema

A Juan Pablo le regalaron cinco pelotas, las cuales tienen los siguientes colores. Azul, Amarillo, Rojo, Morado y verde.
Si Juan Pablo combina dos pelotas para jugar, ¿Cuál será el espacio muestral de las combinaciones de pelotas?

**Construya el espacio muestral.**

**Experimento 4**

Andrés se encontró en el piso dos monedas y se puso a jugar con ellas. Él lanza una moneda y después la otra, después de un tiempo se pregunta ¿Cuál es el espacio muestral de lanzar dos monedas (Cara y cruz)?

| **Escribe los resultados. Construya el espacio muestral** |
|---|
| |

**PROBLEMAS**

Teniendo en cuenta lo realizado en los experimentos, ahora resuelve los siguientes problemas:

1. En un barrio viven cuatro amigos; Camila, Esteban, Pablo y Andrea, los cuales juegan todos los días en la cancha de baloncesto. Un día Camila les dijo a sus amigos que hicieran parejas para realizar un partido, ella se preguntó en cuantas maneras podrían combinarse. ¿Construye el espacio muestral e indique la cantidad de combinaciones que se pueden dar?

| **Construya el espacio muestral:** |
|---|
| |

2. Jacobo y Andrés se fueron de paseo a un bosque, en el cual había rocas de diferentes colores, ellos empezaron a observar esas rocas y descubrieron que tenían dos colores azul y amarillo. De las rocas azules recogieron 5 y de las rocas amarillas recogieron dos. Ellos combinan una roca azul y una amarilla. ¿Construye el espacio muestral e indique la cantidad de combinaciones que se pueden dar?

**Piedras amarillas**


**Piedras azules**


**Construya el espacio muestral:**

**Número de combinaciones que se pueden dar:** ____

3. Tatiana y Pedro se encuentran en un restaurante en donde venden postres de todo tipo. A Tatiana le gustan los postres de chocolate y a Pedro le gustan los postres de limón. En el restaurante hay cuatro tipos de postres de chocolate (Tiramisú, galletas de chocolate, brownies, oreo y tarta de chocolate) y dos tipos de postres de limón (blondies de limón y mousse de limón). ¿Cuál será el espacio muestral de las combinaciones de postres que pudieron haber hecho Tatiana y Pedro?

**Construya el espacio muestral:**

**Anexos 3. Actividad 3: Eventos posibles, imposibles y seguros en diferentes contextos**

**Objetivo:** Predecir eventos: posibles, imposibles y seguros en diferentes contextos

**Primer experimento**

Vamos a ayudar a la profe Pili a marcar qué sucede en cada caso, marcando con una X

| SITUACIÓN | POSIBLE | IMPOSIBLE | SEGURO |
|---|---|---|---|
| Mañana lloverá | | | |
| Mañana jugaré con mis amigos | | | |
| Lanzar una moneda y que salga sello | | | |

**Segundo experimento**

| SITUACIÓN | POSIBLE | IMPOSIBLE | SEGURO |
|---|---|---|---|
| Ganarse el baloto sin haberlo comprado | | | |
| Lanzar el dado y que salga 9 | | | |
| Los domingos tengo clase en el colegio | | | |

**Tercer experimento**

| SITUACIÓN | POSIBLE | IMPOSIBLE | SEGURO |
|---|---|---|---|
| La hora del descanso en el colegio es a las 9:10 am | | | |
| Mis clases terminan los días 1 a las 2:40 pm | | | |
| Si estudio para el examen, lo paso | | | |

Ahora vamos a darle nombre:

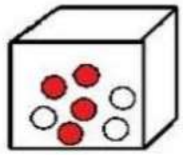
A la situación del primer experimento lo llamaremos *evento posible*, porque es muy probable que suceda.

A la situación del segundo experimento lo llamaremos *evento Imposible,* porque nunca sucederá.

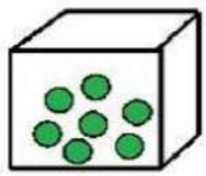
A la tercera situación del tercer experimento lo llamaremos *evento seguro*, porque se cumple sin excepción.

**EXPERIMENTO 4**

**La profesora decidió plantearles un reto a sus estudiantes y les dijo que realizaran un evento que se relacionara con la figura y la probabilidad de ocurrencia que se pide en cada caso.**



1. Evento posible: ______________________________
______________________________________________



2. Evento seguro: ______________________________
______________________________________________

3. Evento imposible: ___________________________
______________________________________________

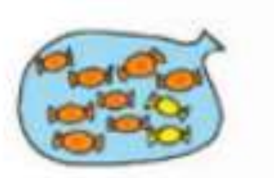
**Explica tu respuesta:**

**Problemas**

1. En una bolsa se encuentran varios números como se muestra en la figura. Si Pablo saca un número de la bolsa, ¿Qué tan seguro, posible o imposible es que Pablo saque el número 4?


**Explica tu respuesta:**

2. Paula y Tomas fueron a una tienda a comprar dulces y la vendedora les ofrece una promoción de bolsas de dulce como se muestra en la figura. Ellos la compran, salen de la tienda y sacan un dulce de la bolsa. ¿Qué tan seguro, posible o imposible es que en la bolsa de dulces salga uno de color anaranjado?



**Explica tu respuesta:**

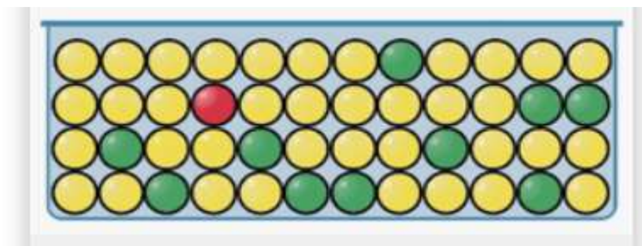
3. Angie asiste una feria en su pueblo y se acerca a un puesto en donde le vendan los ojos y le dan una bolsa que contiene varias pelotas como se muestra en la figura. Ella debe sacar una pelota y, dependiendo el color que saca le dan un obsequio. ¿Angie mete la mano en la bolsa, que tan seguro, posible o imposible que el color de pelota que saque sea verde?

**Explica tu respuesta:**

4. A Juan le regalan de cumpleaños una caja de lápices, él desea pintar un dibujo para su mamá por lo cual saca un lápiz de la caja y empieza a colorear. ¿Qué lápiz es más posible que Juan saque de la caja?

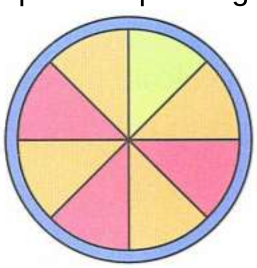
**Explica tu respuesta:**

5. Jenny lleva a su hijo al parque de diversiones en donde se encuentra una piscina de pelotas. Él niño entra a la piscina y juega allí por media hora y al salir coge una pelota para llevársela a su mamá. ¿Qué color de pelota es el más posible que el hijo de Jenny coja en su mano?



**Explica tu respuesta:**

6. Juan llevó al salón una ruleta para jugar en el descanso, ¿qué color es imposible que salga en la ruleta?



**Explica tu respuesta:**

**Anexos 4. Actividad 4: Espacio muestral**

**Objetivo:** Fortalecer el significado de espacio muestral a través de las combinaciones que se pueden obtener en un suceso mediante diferentes problemas del diario vivir.

**Problema 1**

María desea ir a una fiesta y no sabe con qué aretes y qué diademas le quedan bien a su vestido. En su joyero se encuentran 3 tipos diferentes de aretes y cuatro tipos diferentes de diademas, como se muestran en la siguiente imagen. ¿Cuántas combinaciones se pueden hacer con los aretes y diadema?

**Diadema**

**Diadem**

**Diadem**

Diadema

Arete

Arete

Arete

Escribe los resultados en la siguiente tabla:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

¿Cuántas combinaciones en total se pueden obtener con el conjunto de diademas y aretes? _____

Sabiendo el total de combinaciones anteriores, suponga ahora que María tiene 6 diademas ¿con cuántos aretes tendría que contar para obtener el mismo número de juegos (combinaciones)?

## Problema 2

Unos millonarios Pedro y Julieta van a una feria donde venden carros y motos, ellos desean comprar una moto y un carro para tener dos medios de transporte, para llegar a sus respectivos trabajos. Si el vendedor les dice que hay 5 modelos de carros, ¿cuántos modelos de motos hay si son 10 combinaciones en total?

**Carro 1**

**Carro 2**

**Carro**

**Carro**

Carro

Explique la respuesta:

**Problema 3**

Camilo tiene suficiente dinero para comprar las frutas y verduras que él quiere. Se dirige al Fruver a comprarlas. Estando allí observa el surtido que ofrecen. Escoge 4 tipos de verdura y con las frutas que compra obtiene 24 combinaciones en total. ¿Cuántos tipos de fruta compró?

Explica tu respuesta:

**Problema 4**

Para el Show And Tell del colegio, los estudiantes de grado tercero desean mandar a diseñar una camiseta que los identifique en su presentación por equipos. La empresa de estampados les ofrece 2 colores de camisetas, ¿cuántos logos se deben diseñar si los estudiantes del curso quieren quedar divididos en 6 equipos?

**Explica tu respuesta:**

Juan José va a almorzar con sus padres a un restaurante fuera de la ciudad, cuando llegan a él, ven que el menú ofrece: dos platos de entrada: sopa y fruta (como se muestra en la imagen 1), dos platos fuertes: chuleta y pollo (como se muestra en la imagen 2) y dos opciones de postre: leche asada y brevas (como se muestra en la imagen 3)

Entradas:

**Imagen 1**

Plato fuerte

**Imagen 2**

Postre:

**Imagen 3**

**¿Cuántas combinaciones de tres platos, una entrada, un plato fuerte y un postre, se pueden seleccionar para armar el menú? Escríbelas**

**Si se aumenta una entrada más y se ofrece un solo tipo de postre, ¿Cuántas combinaciones saldrían?**

## Anexos 5. Actividad 5: Prueba Final

**Objetivo:** Evaluar los conocimientos adquiridos durante las actividades desarrolladas.

**Problema 1**

Olga va a una fiesta con su familia. En la fiesta les ofrecen diferentes tipos de menús en donde hay 3 tipos de carnes (res, cerdo y pavo), 3 tipos de acompañantes (ensalada, plátano y arroz) y 2 tipos de bebida (limonada y jugo de mora) como se observa en la figura. Olga escoge un tipo de carne, un acompañante y una bebida. ¿Cuántas opciones tiene Olga para su escoger el menú?

Carnes: Res, Pavo y cerdo



Acompañantes: Ensalada, plátano,y arroz


Bebida: limonada y jugo de mora

Explica tu respuesta:

**Problema 2**

Ximena se encuentra en una tienda y quiere comprar una gaseosa. Ella se acerca al vendedor y le dice que él escoja el sabor de gaseosa. En la nevera se encuentran solo estas gaseosas.

¿Qué tan seguro, posible o imposible es que el vendedor le entregue a Ximena una gaseosa de sabor de Naranja?

Si se sabe que es un suceso seguro, ¿qué sabor escogerá el vendedor?

Explica tu respuesta:

## Problema 3

Catalina se encuentra en clase de matemáticas y la profesora les solicita realizar unas multiplicaciones en el cuaderno. Ella le pidió prestado un lápiz a Paula, quien le pasa su cartuchera para que escoja. ¿Cómo son los lápices que debe de haber en la cartuchera de Paula para que sea un experimento determinístico?

| Explica tu respuesta: |
|---|
| |

## Problema 4

Mi abuelita Carmen, recogió coliflor y pimentón rojo en la huerta. En la cesta solo puso los coliflores. A.) ¿Es un suceso seguro sacar de la cesta un pimentón? B) ¿Hay un suceso seguro que puede darse?

| Explica tu respuesta: |
|---|
| **A)** |
| **B)** |

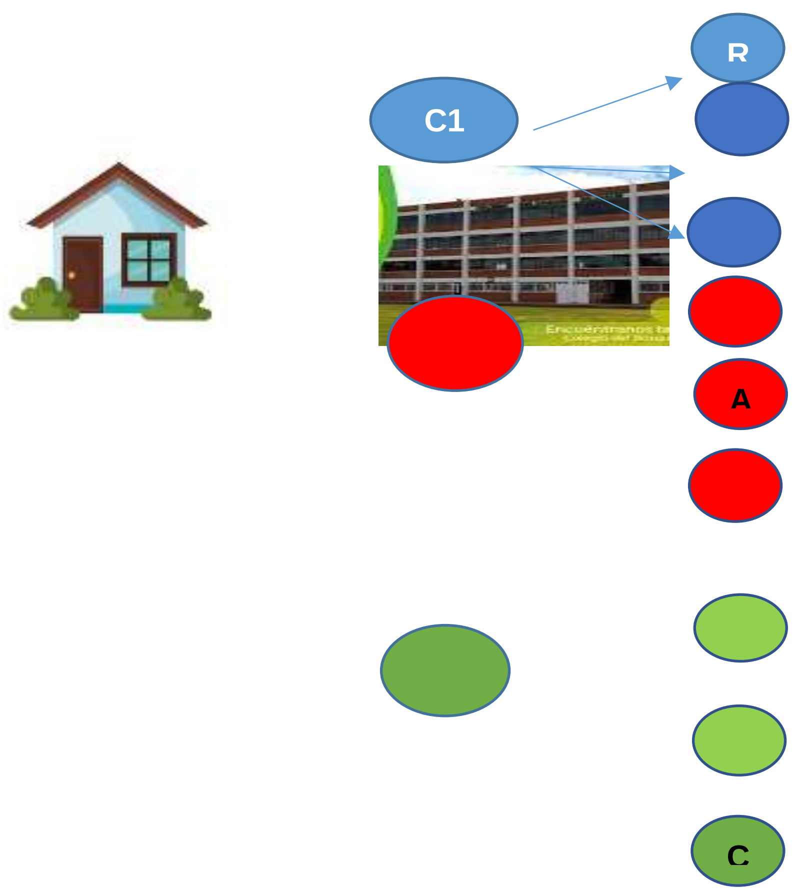
**Problema 5**

En el colegio van a celebrar el día del niño y para celebrar se les dará una paleta como obsequio. ¿Qué características deben tener las paletas para que este sea un experimento aleatorio?

| Explica tu respuesta: |
|---|
| |

**Problema 6**

Para ir al colegio desde su casa, Martín tiene 3 caminos diferentes: Camino1 (C1), Camino 2 (C2) y Camino 3 (C3). Él tiene la opción de transportarse en la ruta escolar (R), en el auto familiar (A) o caminando. (C). Con la información complete el siguiente esquema:



**Describa las diferentes formas que tiene Martín para llegar a su colegio**

**¿De cuántas maneras puede llegar Martín a su Colegio?**

## Problema 7

Anita y Nikoll van a jugar a la golosa en el parque después de haber terminado sus tareas del colegio. Ellas escogen jugar con la golosa que esta dibujada en el piso como se muestra en la figura (con los números del 1 al 10). Nikoll juega primero. Ella lanza la piedra y cae en el número 2. Luego le toca lanzar a Anita.


¿En qué números puede caer cuando lance Anita para que sea un suceso posible?

Explica tu respuesta: