



ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL
PLANO EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO

Ángel Leandro Romero Santiago

Código: 10542016325

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Facultad de Educación

Bogotá, Colombia

2021

ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL
PLANO EN ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO

Ángel Leandro Romero Santiago

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Magíster en Educación Matemática

Director:

Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Líneas de investigación:

Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.

Uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Facultad de Educación

Bogotá, Colombia

2021

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. diciembre 07 de 2021

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo agradecer a Dios por permitirme llegar hasta este día, al igual que por la oportunidad que he tenido de aprender, mejorar y crecer junto a personas especiales que me animaron para lograr uno más de mis sueños.

Agradecimiento especial para mí asesor de tesis Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, por su constante apoyo en el desarrollo de dicha investigación. De la misma manera deseo expresar mis agradecimientos a los profesores de la Universidad Antonio Nariño por su atención, amabilidad y apoyo en todo lo referente a mi formación como estudiante de este gran programa académico.

A los estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario del municipio de Funza por su dedicación, apoyo y entusiasmo en la en el desarrollo del trabajo realizado de investigación, sin ellos no sería una realidad este proyecto.

A todos los compañeros, amigos y familiares por compartir los momentos de dificultad y gratificación del proceso, a todos ellos muchas gracias.

DEDICATORIA

Este trabajo de investigación se lo dedico en un primer momento a Dios, a mis padres, mis hermanos, mi sobrino y mi hija. Porque ellos me llenaron de ánimo, fuerza y motivación para seguir adelante cada día, con el firme propósito de cumplir mi uno de mis sueños.

SÍNTESIS

La geometría como rama de la matemática posee múltiples aplicaciones y desempeña un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático. A pesar del uso en su proceso de enseñanza aprendizaje de recursos didácticos y nuevas tecnologías, persisten las dificultades en su aprendizaje. Para resolver estas limitaciones, se plantea la enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométricas para robustecer el pensamiento geométrico de los estudiantes. La investigación tiene como objetivo favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría plana a través de las transformaciones en el plano, en los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Departamental Bicentenario de Funza.

Las actividades se encuentran sustentadas en la teoría de la resolución de problemas, en la visualización matemática, uso del material manipulativo y uso de las TIC. En la investigación se utiliza una metodología basada en un enfoque cualitativo, con un diseño de investigación acción. La implementación del sistema de actividades propicia en los estudiantes el desarrollo de habilidades tales como: la observación, el análisis y la argumentación, también fortalece el trabajo individual y grupal generando confianza y seguridad en sus intervenciones y construcciones geométricas. Además, sirve como motivación para el estudio de la geometría, específicamente por investigar temas asociados a las transformaciones geométricas y figuras planas, con el fin de fortalecer el pensamiento geométrico desde la educación primaria.

ABSTRACT

Geometry as a branch of mathematics has multiple uses and plays an important role in the development of mathematical thinking. Despite the use of didactic resources and new technologies in its teaching and learning process, difficulties persist in students' learning. To resolve these limitations, it is proposed geometry teaching and learning through geometric transformations to strengthen students' geometric thinking. The research aims to promote teaching and learning process of plane geometry through transformations in the plane with fifth grade students from the Institución Educativa Departamental Bicentenario in Funza.

The activities are supported by the theory of problem solving, mathematical visualization, the use of manipulative materials and the use of ICT. The investigation follows a methodology based on qualitative approach and action research design. The implementation of the activities leads the development of skills in students such as: observation, analysis and argumentation, it also strengthens individual work and group generating confidence and security in their interventions and geometric constructions. In addition, it contributes to motivation for the study of geometry, specifically for investigating themes associated with geometric transformations and plane figures in order to reinforce geometric thinking from primary education level.

TABLA DE CONTENIDOS PÁG.

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE.....	10
1.1. El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente de las transformaciones geométricas en el plano en congresos y reuniones	10
1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria ...	15
1.2.1. A comparative study on the effectiveness of the computer assisted method and the interactionist approach to teaching geometry shapes to young children	15
1.2.2. New opportunities in geometry education at the primary school	17
1.2.3. Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school	18
1.2.4. The use of ICT in teaching geometry in primary school	20
1.2.5. Shape and Space – Geometry Teaching and Learning	21
1.2.6. Facilitating growth in prospective teachers’ knowledge: teaching geometry in primary schools ...	23
1.2.7. Secuencias didácticas para la enseñanza de la geometría con GeoGebra.....	24
1.3. Investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométrica y la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria.....	26
1.3.1. Primary school students’ structure and levels of abilities in transformational geometry	26
1.3.2. Geometric Transformations - Part 1	28
1.3.3. Geometrical transformations as viewed by prospective teachers.....	29
1.3.4. Early Trajectories in Pre-service Teachers’ Training. The case of Geometric Transformations....	31
1.3.5. Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers’ mathematical knowledge	33
1.3.6. Explorando la geometría en el segundo curso del primer ciclo de educación primaria	34
1.3.7. Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria	35
1.3.8. Geometric transformations I	36
1.3.9. Algunas transformaciones geométricas del plano.....	37
1.3.10. Making space for geometry in primary mathematics	38
1.3.11. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano.....	40
1.3.12. Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría.....	41

1.4. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente a través de las transformaciones geométrica y la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria en Colombia.....	42
1.4.1. Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica	43
1.4.2. La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje.....	44
1.4.3. Formación de habilidades matemáticas en la enseñanza primaria de Colombia	46
1.4.4. Geometría activa y geometría de las transformaciones	47
1.4.5. Realidad Aumentada como herramienta en la enseñanza-aprendizaje de geometría básica	48
1.4.6. Interacciones y relaciones con estudiantes de grado cuarto para la comprensión de las transformaciones geométricas de congruencia	49
1.4.7. Algunas transformaciones geométricas del plano.....	50
1.4.8. Proyecto de aula que contribuye a la formación de docentes en básica primaria a través de la enseñanza de la geometría activa para el desarrollo del pensamiento espacial	51
Conclusiones del capítulo 1	52
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	54
2.1. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores.....	54
2.2. Fundamentos de la visualización Matemática.....	58
2.3. Fundamentos del proceso de representación geométrica de las transformaciones en el plano.....	61
2.4. Fundamentos sobre los recursos didácticos tradicionales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en grado quinto de la escuela primaria	64
2.5. Referentes sobre el uso de la tecnología en el aula.....	67
Conclusiones del capítulo 2.....	71
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	73
3.1. Tipo, enfoque y diseño de investigación	73
3.2. Alcance del estudio	74
3.3. Población y muestra (Unidad de análisis)	74
3.4. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados.....	75
3.5. Fases de la investigación.....	76
Conclusiones del capítulo 3.....	77
CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES	78
4.1. Fundamentos del sistema de actividades desde el marco teórico	78
4.2. Propuesta de actividades.....	79

4.2.1.	Actividad # 1: Un movimiento de traslación en el plano	79
4.2.2.	Actividad # 2: Un movimiento llamado rotación	86
4.2.3.	Actividad # 3: Un movimiento desde la simetría	92
4.2.4.	Actividad # 4: Pensemos desde las transformaciones.....	100
4.2.5.	Actividad # 5: Figuras geométricas en el contexto	107
	Conclusiones del capítulo 4.....	114
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS		115
5.1.	Análisis de los resultados de las encuestas y entrevistas	115
5.2.	Análisis de los resultados de la implementación de las actividades	117
5.2.1.	Actividad # 1: Un movimiento de traslación en el plano	117
5.2.2.	Actividad # 2: Un movimiento llamado rotación	124
5.2.3.	Actividad # 3: Un movimiento desde la simetría	131
5.2.4.	Actividad # 4: Pensando desde las transformaciones	138
5.2.5.	Actividad # 5 Figuras geométricas en el contexto	143
5.3.	Resultados de la encuesta de satisfacción	149
	Conclusiones del capítulo 5.....	152
CONCLUSIONES.....		153
RECOMENDACIONES.....		157
BIBLIOGRAFÍA		158
ANEXOS.....		165
	Anexo 1. Entrevista a especialistas	165
	Anexo 2. Encuesta a docentes área de matemáticas	166
	Anexo 3. Validación de encuesta método Delphi.....	168
	Anexo 4. Pretest (Actividad 0).....	169
	Anexo 5. Evidencias actividad 1.....	173
	Anexo 6. Evidencias actividad 2.....	174
	Anexo 7. Evidencias actividad 3.....	175
	Anexo 8. Evidencias actividad 4.....	176
	Anexo 9. Evidencias actividad 5.....	177
	Anexo 10. Encuesta de satisfacción	178

INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios la matemática ha sido concebida como una herramienta para dilucidar las relaciones cuantitativas que hay en nuestro entorno educativo. Además, ha estado articulada alrededor de la idea de un pensamiento geométrico y principalmente en el pensamiento espacial. Desde este punto de vista, García y López (2008) plantean que se debe enseñar geometría porque: “... *en la actualidad podemos observar en nuestro entorno construcciones que tienen fundamento geométrico y artístico, y también porque sirve en el estudio de otros temas de matemáticas de mayor profundidad...*”¹.

Esta perspectiva se asume desde la importancia que toma la geometría en los diferentes campos del conocimiento de una forma contextualizada para los estudiantes en sus primeros años de la formación académica. Estas ideas expuestas anteriormente, deben tenerse en cuenta en los procesos de enseñanza aprendizaje y no ser sustituidas por procesos de construcción formal y aspectos netamente algorítmicos.

Sinclair y Bruce (2015) destacan la importancia de enseñar la geometría desde la escuela primaria, puesto que allí se evidencia de mejor manera la construcción del concepto basado en el dibujo y los movimientos, desde el papel de la tecnología en los procesos geométricos y la importancia de la geometría transformacional en el plan de estudios como eje transversal de la implementación geométrica en la escuela primaria.

Por otra parte, Hershkowitz (2014) destaca la importancia de la geometría en la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, desde el reconocimiento del espacio que la rodea, con las formas que la componen, sus propiedades y diferentes caracteres que sirven como base del contexto. Freudenthal (1973) en el cual se basan Sinclair y Bruce (2015), indica que: “. . . *la geometría es una de las mejores*

¹ García, S. y López, O. (2008). La enseñanza de la Geometría. *Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación*. México. *Segunda edición*, 2011, p. 174.

oportunidades que existen para aprender a matematizar la realidad"², ratificando la importancia de la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria. Es por ello, que se considera en esta investigación a las transformaciones geométricas como una vía para mejorar su proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes.

El uso de las transformaciones geométricas para el proceso de enseñanza aprendizaje de las figuras planas es una propuesta que surge de la experiencia de la praxis de varios especialistas, de las inquietudes de varios investigadores a nivel nacional e internacional y del docente investigador; al observar el limitado manejo del componente geométrico en los estudiantes de la educación primaria. En este proceso se pretende fortalecer el manejo de las herramientas TIC y material manipulativo, para desarrollar el pensamiento geométrico contextualizado desde los conocimientos previos del estudiante. Es importante destacar en el contexto de la enseñanza aprendizaje de la matemática, el papel crucial que juegan las transformaciones en el campo de la geometría plana y su relación con algunas de las figuras "planas" que allí se presentan. El desarrollo de la presente investigación busca crear en los estudiantes un conocimiento robusto para el dominio teórico-práctico de las transformaciones geométricas, como base del desarrollo del pensamiento geométrico en años posteriores de la educación secundaria, media y superior.

Las transformaciones geométricas y su papel en la enseñanza aprendizaje de la geometría ha sido abordado en congresos y reuniones nacionales e internacionales. Dentro de los congresos y reuniones se destacan principalmente: International Congress on Mathematical Education (ICME), Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), Conference of European Research in Mathematics education (CERME), Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), Encuentros de

² Hershkowitz, R. (2014). *Shape and Space – Geometry Teaching and Learning*. Springer, S. Lerman, p. 407.

Geometría y sus Aplicaciones (EGA) entre otros. En estos congresos se proponen metodologías, modelos y estrategias para mejorar la enseñanza aprendizaje de la geometría de la escuela primaria.

En el ICME se resalta la importancia del papel que juega las transformaciones geométricas en la educación y principalmente en la educación primaria. En el ICME 13 y 14, en el Topic Study Group (TSG) 12 y 8 respectivamente, se precisa la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, el cual genera una serie de subtemas, donde se observa el papel de las transformaciones geométricas en el aprendizaje y enseñanza de la geometría (subtema 8 en ambos documentos).

En el CIBEM se plantea una enseñanza aprendizaje de la geometría enfocada en el desarrollo de habilidades para la visualización, manejo de contextos virtuales y la resolución de problemas. El congreso analiza el desarrollo de las habilidades matemáticas y principalmente el desarrollo del pensamiento espacial, desde las herramientas tecnológicas que apoyan el quehacer matemático.

El CERME desde su postura europea, abre un espacio para el impacto en la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela. En los últimos años en su working group teams (TWG) 4, se discuten sobre: el uso de habilidades espaciales en niños para resolver problema geométrico, evolución de la comprensión de las formas geométricas en niños y los entornos tecnológicos para la geometría en los primeros años de la educación formal.

Algunos encuentros colombianos como el ECME y EGA, resaltan el papel de la geometría en el desarrollo de habilidades matemáticas en los niños y niñas. Dentro de estos grupos investigativos se destaca la importancia de la enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométricas, el uso de herramientas tecnológicas y su relación con el uso de material manipulativos en el desarrollo del pensamiento espacial. El desarrollo del pensamiento geométrico en las figuras planas a través de las transformaciones geométricas contribuye a desplegar potencialidades tales como: el uso de un vocabulario correcto y técnico dentro de un contexto geométrico, y un dominio de la base conceptual formal relacionada con la

geometría (conocimientos previos). Además, permite la apropiación directa del contenido geométrico y sus aplicaciones en el contexto socioeducativo de los estudiantes, lo cual propicia una mejora significativa en resultados de las pruebas aplicadas a nivel nacional e internacional.

Chase (1908) y Williford (1972) enfatizan sobre la importancia que ha tomado la enseñanza de la geometría en los últimos años en la escuela primaria. Estos autores destacan el aporte indiscutible que tiene para el desarrollo de la matemática concebir un proceso basado en la capacidad de visualización, abstracción, creación y desarrollo del pensamiento matemático de manera formal dentro de una etapa inicial.

Black (1967) y Roldán (2008) resaltan la enseñanza de la geometría plana para la escuela primaria desde un enfoque dinámico basado en los softwares. Desde su perspectiva, los investigadores buscan contextualizar situaciones problemas donde sea posible su representación por medio de herramientas tecnológicas, que le permita al estudiante evidenciar los diferentes movimientos de las formas y figuras. Acosta (2010) dentro de su investigación muestra el uso de la tecnología como herramienta principal en el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométricas, vista desde el campo de la geometría dinámica, movimientos, invarianza, varianzas y construcciones geométricas. Lo anterior, es enmarcado en la construcción propia del conocimiento por parte del estudiante y dirigido por el docente de manera continua.

Desde la visión del contexto escolar, la geometría se ha desarrollado de una forma tradicional, memorística, poco contextualizada al entorno de los estudiantes. Además, este proceso se ha concebido con grandes vacíos en el manejo de las TIC como ente mediador de la enseñanza aprendizaje de la geometría en general y principalmente en la geometría plana, como base de los procesos geométricos robustos en el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otra parte, es de destacar el papel de la geometría en el contexto de la escuela primaria, la cual, a través del tiempo ha sido relegada como un “complemento” a los procesos de formación matemático que se enseñan al finalizar cada periodo “en una semana” o al finalizar el año. Esta forma de concebir la geometría conlleva a no desarrollar las habilidades propuestas para la temática por temas de tiempo y otras actividades que afectan los espacios establecidos para tal fin dentro de la institución educativa.

La presente investigación propone un sistema de actividades que genera la motivación e interés por los procesos geométricos desde las TIC y material didáctico manipulativo con el fin de favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades mediante las transformaciones geométricas.

A través de aplicación de métodos empíricos e instrumentos, tales como: entrevistas (ver Anexo 1), encuesta (ver Anexo 2), pretest (ver Anexo 4), la revisión del estado del arte y la experiencia del investigador, se pudo constatar algunas oportunidades de mejora sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría plana en el grado quinto. Estas oportunidades son producto de la triangulación del estado del arte, de encuestas y entrevistas realizadas a investigadores y especialistas del tema, y de la propia experiencia del investigador:

- Base conceptual de los conocimientos geométricos previos de los estudiantes.
- Desarrollo de habilidades para la representación de figuras geométricas planas por parte de los estudiantes.
- Reconocimiento de las propiedades en las figuras planas.
- Interés y motivación de los estudiantes por los temas geométricos.
- Enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de la resolución problema.
- El uso TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría dentro del aula regular.

El estudio epistemológico realizado y las apreciaciones anteriores permiten orientar el camino hacia el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano propicia un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza?

Se presenta dentro de la investigación como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en escuela primaria. Se deriva como **objetivo general** favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano para propiciar un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza.

Por otra parte, se presentan los siguientes **objetivos específicos**:

- Diagnosticar el estado actual de las competencias geométricas de los estudiantes de grado quinto de primaria de la institución educativa tomada como muestra.
- Analizar los resultados del diagnóstico realizado a la población estudiantil para la identificación de las variables, eje central para el diseño de un sistema de actividades que se proyecta hacia las deficiencias halladas en la institución.
- Evaluar los aprendizajes de los estudiantes a través de los instrumentos de valoración y detallar algunas categorías que inciden de acuerdo con las habilidades desarrolladas por el estudiante.

En relación con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométrica y la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria.

Después de la búsqueda del objetivo y el campo de acción, para guiar la investigación se presentan las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Qué investigaciones contribuyen de manera directa a la identificación de actividades geométricas en diferentes contextos y específicamente en el campo de la resolución de problemas y las TIC?

- ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?
- ¿Cómo concebir un sistema de actividades desde las transformaciones geométricas con un enfoque basado en la resolución de problemas, las TIC y uso de material manipulativo que propicie la enseñanza aprendizaje de la geometría para el grado quinto de la escuela primaria?
- ¿Cómo analizar viabilidad del estudio de las figuras planas desde las transformaciones geométricas como un diseño de actividades para el aula regular?

En consecuencia, de lo estipulado anteriormente, se presentan las **tareas de investigación**, con el fin de alcanzar el objetivo y lograr resolver el problema planteado en la investigación:

- Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente sobre las transformaciones en el plano en estudiantes de grado quinto de primaria.
- Determinar los fundamentos teóricos sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente sobre las transformaciones en el plano en estudiantes de grado quinto de primaria.
- Elaborar un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano para que se propicia un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza.
- Analizar la viabilidad del sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano para propiciar un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza.
- Analizar los resultados de las actividades aplicadas.

De igual manera, el **aporte práctico** radica en un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano, para que propicie un robusto conocimiento geométrico en estudiantes del grado quinto de la institución educativa tomada para la investigación.

El trabajo de investigación consta de introducción, cinco capítulos con sus respectivos epígrafes, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos, la cual se sitúa bajo el interés actual de una comunidad investigativa nacional e internacional.

Dentro del capítulo 1 se aborda el estado del arte en cuatro epígrafes: el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente de las transformaciones geométricas en el plano en congresos y reuniones, las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria, las investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométrica desde la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria y por último, las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente a través de las transformaciones geométricas y la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria en Colombia. Como cierre del capítulo se presentan unas conclusiones que permiten mostrar el aporte a la presente investigación.

El capítulo 2 se centra en el marco teórico desde seis ejes: la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en particular transformaciones geométricas en el plano, las teorías para la resolución de problemas, la visualización matemática, el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y el uso del material manipulativo. Este capítulo se finaliza con unas conclusiones que muestran el aporte teórico a la presenta investigación.

Los siguientes tres capítulos muestran la metodología de investigación utilizada, el sistema de actividades elaborado e implementado en la investigación y el análisis de resultados como eje central de la presente investigación. Por último, se relacionan las conclusiones generales, las recomendaciones, la bibliografía y los anexos que dan el cierre a la estructura general de la investigación.

Dentro de la investigación se quiere evidenciar el desarrollo del pensamiento geométrico a través de la geometría mediante las TIC y el uso de materiales manipulativo en el contexto de la resolución de problemas retadores para los estudiantes de grado quinto de la escuela primaria.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se presentan estudios relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones en el plano, problemática que con el tiempo ha ganado un espacio importante en los investigadores a nivel mundial durante los últimos años. Los trabajos desarrollados se han publicado en revistas del área, además se han presentados en reuniones y congresos nacionales e internacionales. Estos resultados han fortalecido día a día el desarrollo teórico y práctico en la educación matemática, en particular de la geometría en la escuela primaria. A continuación, se realiza un análisis de algunas de estas investigaciones.

1.1. El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente de las transformaciones geométricas en el plano en congresos y reuniones

El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, en particular sobre las transformaciones en el plano en la escuela primaria, ha sido abordado en diferentes reuniones, eventos y congresos como:

- International Congress on Mathematical Education (ICME)
- Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)
- Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)
- Reuniones latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME)
- Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME)
- Encuentros de Geometría y sus Aplicaciones (EGA)

A continuación, se realiza un análisis de la temática en los anteriores congresos y reuniones:

En un primer momento, los cuatro últimos eventos del ICME han evidenciado año tras año de forma clara la importancia de caminar por el sendero de la geometría y principalmente de las transformaciones geométricas en la educación primaria. En el 2008 en Monterrey, México, con el ICME 11 se focaliza un Topic Study Group (TSG) en la línea de investigación y desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de la

geometría. En dicho TSG, se fortalecen los estudios en las habilidades espaciales y los razonamientos geométricos sobre formas bidimensionales y tridimensionales.

Los resultados de estos trabajos presentados en el ICME 11, contribuyen a crear una puerta para que en el ICME 12, desarrollado en Seúl, Korea, en el 2012, le brinde un espacio al estudio de las transformaciones geométricas en la escuela primaria desde el uso de herramientas y tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En el ICME 13 de Hamburgo, Alemania, en el 2016, se desarrolla el TSG 12, enmarcado en el cambio de ideas tempranas en geometría desde la manipulación mental y el razonamiento dinámico de la geometría para el desarrollo de problemas, lo cual, conlleva a concluir que los estudiantes de nivel primaria tienen la capacidad de generar transformaciones mentales de objetos e interpretaciones dinámicas de las imágenes estáticas.

De los criterios dados en el en el TSG 12 del ICME 13, se puede evidenciar la importancia y curiosidad que ha generado las transformaciones y su impacto en la educación primaria. En el ICME 14 desarrollado en Shanghái, China, en el 2021, en el TSG 8 se aborda la enseñanza y aprendizaje de la geometría a nivel primaria, el cual prioriza las cuestiones teóricas, empíricas o en desarrollo. En este TSG 8 en el subtema ocho, puntualmente se tiene el papel de las transformaciones geométricas en el aprendizaje y enseñanza de la geometría.

En el VII CIBEM realizado en Montevideo, Uruguay en año 2013 dentro de las actas de estudios se exponen temas relacionados con el pensamiento espacial, habilidades de visualización, importancia de los entornos virtuales en el contexto educativo y la resolución de problemas en geometría dentro de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Estos elementos abordados en el congreso son base para el tratamiento de las transformaciones geométricas en el aula.

En el VIII CIBEM realizado en Madrid, España, en el 2017, orienta los esfuerzos a la geometría espacial, principalmente a la integración tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de la geometría como

herramienta para la solución de problemas con figuras geométricas. Además, se trabaja el fortalecimiento del pensamiento geométrico desde una mirada diferente para el desarrollo de competencias matemáticas. Por otra parte, se abre un espacio importante al programa GeoGebra como apoyo de los estudiantes para sus construcciones, sus conjeturaciones y verificación de algunas propiedades geométricas.

El CERME desarrolla dentro de sus Thematic Working Group Teams (TWG) espacios relacionados con el estudio de la geometría y su impacto en los procesos de enseñanza aprendizaje de los docentes y estudiantes de la escuela regular. En el CERME 8 de Antalya, Turquía, en el 2013, el grupo TWG 4, dentro de sus discusiones académicas presentan cuatro competencias geométricas: razonamiento, figurativo, operacional y visual, los cuales se deben potenciar en los estudiantes para promover de forma efectiva el desarrollo del pensamiento espacial. En este TWG, se enfocan los esfuerzos investigativos en las dificultades de enseñanza aprendizaje de la geometría, la orientación y diseño de los planes de estudio.

Para el 2015, se lleva a cabo el CERME 9, en el grupo TWG 4, se enfocan los esfuerzos en procesos investigativos que contribuyen de forma directa a la formación geometría relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas. También se valoran los procesos de comprensión de las transformaciones geométricas, la estructuración espacial y visualización de objetos geométricos del plano al espacio, lo cual contribuye al proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes en su formación académica.

Dentro del CERME 10 realizado en el 2017 en Dublín, Irlanda, en su grupo de trabajo TWG 4, se enmarca la enseñanza y aprendizaje de la geometría en las TIC para construcciones y movimientos de figuras geométricas en el plano como una estrategia de enseñanza y aprendizaje para facilitar la aprensión del conocimiento en la geometría. Por otra parte, se hace un gran esfuerzo en el análisis, manejo y solución

de problemas geométricos en entornos dinámicos proporcionados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento geométrico.

El CERME 11 es realizado en Utrecht 2019 en los Países Bajos. El TWG 4 se fortalece en varios temas tales como: el uso de habilidades espaciales para resolver tareas, resolución de problemas geométricos, evolución de la comprensión de las formas geométricas y entornos tecnológicos para la geometría, en estudiantes de primaria. Este grupo de estudio se focaliza principalmente en los procesos de aprendizaje y conceptualización geométrica en los primeros años de la educación formal.

El CERME 12, se llevará a cabo en Bolzano, Italia en el 2021, dentro de sus grupos de trabajo temáticos continua el TWG 4, para el cual se orientan las investigaciones en la enseñanza y aprendizaje de la geometría; se quiere unir esfuerzos para entre otras temáticas destacar la parte tecnológica, la geometría en los primeros años de la educación, al igual, que la importancia de la resolución de problemas geométrico.

Desde 1987 hasta el día de hoy, se han desarrollado los congresos o Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), en los años 2017, 2018 y 2019 se realizan las reuniones en Colombia, Panamá y Cuba respectivamente. En esta reunión se busca fomentar la investigación, actualización y profesionalización en el desarrollo científico, enmarcado en unos enfoques temáticos generales tales como: propuestas para la enseñanza de las matemáticas y el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En estos enfoques se abre un espacio importante en el estudio de la geometría y principalmente en los estudiantes de los primeros años escolares. En dicha reunión, se hace un trabajo vital en la construcción de figuras y análisis de sus propiedades desde la geometría plana; concluyendo que el aprendizaje de la geometría comienza desde niveles intuitivos para llegar a una estructura formal de los conceptos.

Dentro del RELME se resalta que el pensamiento espacial se desarrolla desde los primeros años escolares y que la base de la geometría está apoyada en la visualización y representación para lograr un mejor aprendizaje del conocimiento. En este pensamiento, cabe resaltar la importancia de las situaciones problemas en su contexto, formulación, solución y nivel de complejidad, donde la manipulación dinámica de GeoGebra permite dinamizar los objetos geométricos y se ha teorizado acerca de la “*transformación continua en tiempo real, a menudo llamada arrastre*”³.

Por último, y no menos importante, se tienen algunas contribuciones colombianas como el ECME y la Revista Colombiana de Matemática Educativa (RECME) que alianza con la Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME), destacan de forma significativa los encuentros para el estudio de la geometría. En los años 2013, 2015 y 2017, se desarrollan dichos encuentros con el fin de fortalecer a nivel matemático a los estudiantes y docentes pertenecientes a los distintos niveles académicos a partir de experiencias e ideas en temáticas relacionadas con la geometría; su historia, su didáctica, sus aplicaciones y en general la transversalidad con otras ramas del conocimiento.

El ECME destaca la importancia de la geometría en la escuela a través de la manipulación de material, el desarrollo de la visualización espacial y la geometría dinámica. Dentro del análisis de dichos estudios, se resalta la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a partir del aprovechamiento y aplicación de herramientas tecnológicas, el uso de materiales didácticos tanto manipulables como visuales, la relación de teorías en geometría con el área de matemáticas que orientan y brindan la oportunidad de mejorar las habilidades espaciales, el razonamiento y la argumentación para el mejoramiento de la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria.

³ Goldenberg, E. (1998). What is Dynamic Geometry. *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, pp. 351-367.

La Universidad Pedagógica Nacional (UPN) desarrolla el EGA. En este evento se destaca la importancia de la geometría en los primeros años de formación académica, al igual que la importancia de la tecnología en el desarrollo del pensamiento geométrico. En los EGA se puede evidenciar el papel que juega las transformaciones geométricas a partir de la semejanza y congruencia, la trayectoria del GeoGebra para la enseñanza de las transformaciones de translación y el papel del profesor en la enseñanza de las transformaciones en el plano.

En estos encuentros de geometría aplicada, se dedica un espacio importante a orientar la investigación en semejanzas, congruencias y transformaciones geométricas, lo cual ayuda a que el estudiante desarrolle procesos de visualización y ubicación en su plano o espacio para el mejoramiento de la enseñanza aprendizaje de la geometría a temprana edad.

Estos temas abordados anteriormente son la base para el desarrollo de las habilidades requeridas en el aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones en el plano.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria

El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la educación primaria, como parte de la formación académica ha atravesado constantes cambios significativos a través del tiempo, lo que ha obligado a cambiar las prácticas del docente en el aula regular. A continuación, se referencian algunas investigaciones respecto a este proceso de formación matemática en los grados de primaria.

1.2.1. A comparative study on the effectiveness of the computer assisted method and the interactionist approach to teaching geometry shapes to young children⁴

⁴ Zaranis, N. y Synodi, E. (2016). A comparative study on the effectiveness of the computer assisted method and the interactionist approach to teaching geometry shapes to young children. *Educ Inf Technol*, 22, p.1377–1393.

Zaranis y Synodi (2016) el propósito principal es evaluar el proceso de enseñanza aprendizaje asistido por computadora en 139 niños desde el concepto geométrico de las figuras planas. Estos autores, en su investigación experimental, realizan tres grupos, los cuales son dirigidos por docentes de la universidad de Creta con un buen grado de experiencia en el campo educativo. Estos tres grupos enfocan las prácticas en: los procesos de enseñanza por las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), los procesos interaccionistas y los procesos tradicionales.

Estos autores se basan en la teoría de Van den Heuvel-Panhuizen y Buys (2008): Realistic Mathematics Education (RME), en la cual presentan cinco características principales para comprender los conceptos de geometría:

- *“Presentar un problema usando un contexto realista.*
- *Identificar los principales objetos del problema.*
- *Usar la interacción social apropiada y la intervención del maestro para refinar los modelos del problema.*
- *Alentar el proceso de reinención a medida que se desarrolla el problema.*
- *Enfocarse en las conexiones y aspectos de las matemáticas en general”⁵.*

Estos cinco pasos son presentados desde las TIC para el primer grupo, los dos grupos restantes asumen una enseñanza por manipulación de objetos y los procesos tradicionales respectivamente. Dentro de los resultados de la investigación, se muestra que los tres grupos (TIC, interaccionista, control o tradicional) estaban en niveles significativamente diferentes, presentando una ganancia entre los puntajes previos y posterior a la prueba.

⁵ Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2008). Realistic Mathematics Education. S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*.

Los resultados de esta investigación avalan un impacto positivo del software educativo utilizado en un entorno computarizado como herramienta para la visualización de la lógica matemática, junto con actividades especialmente diseñadas para el nivel educativo correspondiente.

Zaranis y Synodi (2016) en su investigación aportan y afianzan de forma significativa aspectos tales como: la importancia de la geometría en la educación primaria, el papel de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje, la teoría de RME, el trabajo con las figuras bidimensionales y sus propiedades. Estos elementos se consideran de vital importancia para el desarrollo de la presente tesis.

1.2.2. New opportunities in geometry education at the primary school⁶

Sinclair y Bruce (2015) enfocan sus esfuerzos en la investigación del razonamiento espacial en el contexto particular de la geometría; la construcción del concepto basado en el dibujo, el papel de la tecnología en los procesos geométricos y la importancia de la geometría transformacional en el plan de estudios.

El trabajo desarrollado por los investigadores promueve el análisis desde la perspectiva de la educación primaria, donde la muestra utilizada en la investigación se basa en estudiantes que oscilan en un rango de edades de cuatro a ocho años de edad en su gran mayoría. Se destaca el énfasis en el desarrollo del vocabulario (nombrar y clasificar formas por sus propiedades) para lograr un trabajo con la composición, descomposición, clasificación, comparación y manipulación mental de figuras bidimensionales y tridimensionales.

González y Herbst (2006) presentan cuatro objetivos esenciales para el discurso de la geometría euclidiana en el siglo XX. Estos objetivos se enfocan en experimentar la elaboración y prueba de conjeturas en matemáticas, desarrollar un razonamiento lógico en los estudiantes, dominar un idioma que

⁶ Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*. 47, p. 319–329.

les permita modelar el mundo real desde la matemática y adquirir herramientas para la implementación en trabajos no matemáticos.

Los objetivos planteados anteriormente se enfocan en la formación y contexto de la educación primaria desde los pilares propuesto por los investigadores (razonamiento espacial, construcción del conocimiento, el papel de la tecnología y la geometría transformacional).

Los autores destacan el crecimiento potencial de la geometría en la escuela primaria gracias a las diferentes tendencias, entre las cuales se destaca el modelo de Van Hiele, el cual da como prioridad la visualización y el descriptivo/analítico. Diferentes estudios e investigaciones han demostrado que este primer nivel se toma sin problema hasta el grado quinto de la escuela primaria.

Dentro del trabajo teórico de los investigadores se destacan Clements y Battista (1992) quienes muestran que los estudiantes tienden a confundir imágenes prototípicas de formas, incluso a un nivel secundario. Dentro de dicho aporte, se sugiere el apoyo de un software de geometría dinámica para el manejo e identificación los diferentes tipos de triángulos, lo anterior con el fin de empujar los límites típicos de los niños como lo afirman los autores en su artículo.

1.2.3. Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school⁷

Dentro de este proyecto de investigación desarrollado por Voltoline (2018), se destaca principalmente el complemento entre el aporte tecnológico y el material didáctico tradicional. Este “dúo de artefactos” entre la tecnología y el material como es denominado por el autor, busca el engranaje complementario en el fortalecimiento de los procesos de aprendizaje de la geometría en la educación primaria.

⁷ Voltoline, A. (2018). *Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school*. Springer, Cham. Cap. 5, p. 83-99.

El objetivo principal de esta investigación es diseñar y evaluar un software que permite el aprendizaje de las matemáticas y principalmente de la geometría en la escuela primaria. Dicho software consiste en un enfoque experimental que busca jugar con representación de objetos y la vinculación de los mismos con objetos reales. Es base para el autor, la vinculación de material concreto para estimular en el estudiante el descubrimiento de conceptos matemáticos principalmente geométricos.

Cabe resaltar que los investigadores realizaron este trabajo dual durante tres años con más de 130 estudiantes franceses (38 en el año 2014, 50 en el 2015 y 44 en el 2016) de la educación primaria, lo cual les permitió hacer cambios significativos cada año desde la observación a los estudiantes y los comentarios de los profesores que han trabajado de forma activa en la investigación propuesta.

Como lo indicaba Brouillard y Vivet (1994): las herramientas solo tienen significado cuando se relacionan con situaciones en las que se usan, lo que lleva al autor a relacionar los entornos digitales con el lápiz y papel, es decir, la articulación entre las herramientas digitales y el uso de una herramienta de material concreto basado en un análisis epistemológico y cognitivo del artefacto material y el artefacto digital. De allí nacen situaciones que requieren la utilización del artefacto material articulado con el artefacto digital y viceversa en la que se enmarca el trabajo en dúo de los artefactos.

Los autores dentro de su investigación cuestionan el efecto adicional y cómo se ha dado en el aula el aporte tecnológico en el área de geometría, en relación al comparativo de la construcción con regla y compás de figuras geométricas planas como los triángulos. Por otra parte, destacan la importancia del trabajo en dúo para fomentarla construcción del conocimiento individual por parte de los alumnos.

Brouillard y Vivet (1994), destacan el trabajo dual entre la tecnología y el material concreto para la construcción de figuras planas como los triángulos y la conservación de sus propiedades a pesar de los movimientos realizados de translación y rotación, lo cual aporta directamente a la investigación propuesta para este proyecto y ayuda a clarificar conceptos y estrategias que serán la base de futuras

investigaciones desde el trabajo articulado de la tecnología y la manipulación de material como lo proponen los autores.

1.2.4. The use of ICT in teaching geometry in primary school⁸

Arvanitaki y Zaranis (2019) utilizan la tecnología de la información y las comunicaciones (TIC) como una herramienta de apoyo en la comprensión geométrica principalmente en los sólidos y el despliegue de los mismos dentro de una educación tradicional en la escuela primaria.

Dentro de la investigación, se realiza un comparativo entre dos muestras tomadas del grado cuarto de la educación primaria en Grecia. En el primer grupo de 19 estudiantes “grupo de control” se enseña geometría de una forma tradicional y en el segundo grupo compuesto por 27 estudiantes “grupo experimental” se aplica la estrategia de realidad aumentada (RA), para fomentar un proceso interactivo en los estudiantes.

Arvanitaki y Zaranis (2019) desarrollan la investigación en tres fases: en la primera y tercera fase, se realiza una prueba diagnóstica a los grupos focalizados, al igual que la prueba posterior para realizar un análisis de los resultados obtenidos. En la segunda fase, se realiza la intervención del docente al grupo experimental, que los investigadores toman como referente para tal fin.

Cabe resaltar que las actividades del grupo experimental se dividen en los dos primeros niveles de Van Hiele (visualización y análisis). Arvanitaki y Zaranis (2019) establecen que: *“Los estudiantes de primer nivel reconocen las figuras por su apariencia, a menudo comparándolas con un prototipo conocido. En el segundo nivel, ven a las figuras como portadores de sus propiedades ... las habilidades que esperamos que tengan los estudiantes en estos dos niveles, según la teoría de Hoffer”⁹.*

⁸ Arvanitaki, M. y Zaranis, N. (2019). The use of ICT in teaching geometry in primary school. Springer. *Education and Information Technologies*.

⁹ Arvanitaki, M. & Zaranis, N. (2019). The use of ICT in teaching geometry in primary school. Springer. *Education and Information Technologies*. p. 52.

Se destaca en ese análisis el desarrollo de habilidades tales como: óptica, verbal, diseño del dibujo, lógica y aplicación a los sólidos geométricos, las cuales permiten desarrollar el pensamiento matemático principalmente geométrico en los últimos años de la educación primaria.

Los resultados obtenidos con los dos grupos (control y experimental), muestran diferencias significativas en la prueba de la fase tres. Se evidencia que el grupo experimental obtuvo mejores resultados que los estudiantes del grupo de control, lo cual permite revelar el impacto de las TIC en el proceso de formación.

Los estudiantes a los que se les enseña con la intervención de las aplicaciones de TIC y RA tienen una mejora significativa posterior a la prueba de sólidos y sus propiedades. La investigación resalta la contribución de las TIC al desarrollo del pensamiento geométrico.

Se evidencia una investigación que aporta de forma directa a la comprensión del concepto de figura geométrica desde el contexto de las TIC, lo cual permite que el estudiante tenga un proceso significativo en la aprensión del conocimiento geométrico medido por un modelo base de Van Hiele y Alan Hoffer. Por otra parte, aporta directamente a la presente investigación desde una base teórica de las figuras geométricas y modelos para encapsular los procesos desarrollados en la actual investigación.

1.2.5. Shape and Space – Geometry Teaching and Learning¹⁰

Hershkowitz (2014), presenta la importancia de la geometría en el área de matemáticas indicando que: la geometría está relacionada con el espacio que nos rodea, con las formas en el espacio, sus propiedades y diferentes "patrones" que sirven como base del contexto. Lo anteriormente relacionado por el autor es respaldado por Freudenthal (1973), el cual declara que: *“La geometría solo puede ser significativa si*

¹⁰ Hershkowitz, R. (2014). Shape and Space – Geometry Teaching and Learning. *Springer, S. Lerman*, pp. 542-547.

explora la relación de la geometría con el espacio experimentado. . . La geometría es una de las mejores oportunidades que existen para aprender a matematizar la realidad”¹¹.

Siempre buscando la relación del contexto con la geometría euclidiana desde las formas de las figuras y sus atributos. El autor, en un primer momento busca destacar los elementos de la matemática formal, en un segundo momento se establece la representación, descripción y comunicación desde la visualización con el fin de comprender conceptos, procesos y fenómenos meramente matemáticos.

El autor hace su enfoque en la educación primaria, en al cual se destaca la interacción con la forma y el espacio. Esta relación principal que se presenta en el aprendizaje de geometría en primaria tiene como objetivo la construcción del conocimiento sobre figuras geométricas planas básicas y relaciones simples entre ellos, objetivos que son resaltados por el autor es su artículo.

Por otra parte, el autor cita a autores como Laborde (1993) quien resalta el uso del dibujo como herramienta en el proceso de formación geométrica basado en los atributos y propiedades de los dibujos vistos como figuras geométricas desde lo visual. Por otra parte, se referencia a Yerushalmi y Chazan (1990), quienes destacan los softwares de geometría dinámica ya que permite a los estudiantes trabajar lo mencionado anteriormente, es decir que los softwares de geometría dinámica pueden capitalizar la ambigüedad de los dibujos en el aprendizaje de conceptos geométricos.

Dentro del artículo, se muestra la importancia de profundizar en esta investigación planteada desde la geometría bidimensional, la visualización y la utilización de las TIC en la formación y construcción de conceptos matemáticos principalmente de los conceptos geométricos en la formación académica de la educación primaria.

¹¹ Hershkowitz, R. (2014). Shape and Space – Geometry Teaching and Learning. *Springer, S. Lerman*, p. 407.

1.2.6. Facilitating growth in prospective teachers' knowledge: teaching geometry in primary schools¹²

Nanson, Chalmers y Yeh (2012) muestran un estudio centrado en la enseñanza de la geometría por un grupo de futuros docentes, enmarcado en el aprendizaje colaborativo asistido por computadora (CSCL). Este estudio tiene como fin lograr que los futuros docentes creen entornos de aprendizaje donde los estudiantes generen una participación activa en la co-construcción de conocimiento matemático. Se debe tener un repertorio sólido de los procesos pedagógicos por parte de los futuros docentes.

Esta investigación utiliza una metodología de experimento de enseñanza desde de Steffe (1991) y el estudio del plan de lección de Berenson (2003). Donde se busca que los futuros maestros diseñaran en colaboración planes de lecciones para la enseñanza de la geometría dentro del contexto de una comunidad de CSCL.

Los participantes en este estudio son un grupo de tutoría de veintiún futuros maestros de escuela primaria enfocados en matemáticas e inscritos en una Licenciatura en Educación (Primaria) de un semestre de tercer año. Los veintiún futuros maestros se forman en siete equipos de tres, a cada equipo se le asignó un tema de geometría de la escuela primaria: simetría, transformaciones y formas 3D. Se asignan niveles de grado distintos para generar un plan de lección de los temas asignados para cada nivel.

Dentro de la investigación, los autores asumen la propuesta de las comunidades de formación de conocimientos de futuros profesores como un medio para abordar las limitaciones de muchos programas actuales de formación de futuros profesores como lo muestra Brett A. (2002), Scardamalia y Bereiter (2006). Los autores, muestran como las comunidades de construcción de conocimiento científico podrían

¹² Nanson, R, Chalmers, C. y Yeh, A. (2012). Facilitating growth in prospective teachers' knowledge: teaching geometry in primary schools. *J Math Teacher Educ.* pp. 227–249.

adoptarse en contextos educativos, en la investigación se desarrolla un modelo de construcción de conocimiento para la educación que sugiere una forma de organizar la instrucción por parte del docente. Se puede evidenciar dentro del estudio realizado y desde el aspecto pedagógico el papel que presenta la planificación de lecciones, los procesos, los andamiajes de los componentes y campos virtuales para los procesos de enseñanza aprendizaje.

La investigación revela que los siete equipos no solo comparten información, se involucran en una actividad de construcción de conocimiento y logran fortalecer sus repertorios a nivel pedagógico desde la enseñanza de la matemática en la escuela primaria tanto en sus niveles teóricos como prácticos.

Nanson, Chalmers y Yeh (2012) hacen un trabajo interesante con el aprendizaje colaborativo, generando grandes estrategias de apoyo que aportan a las prácticas docentes forjando cambios considerables en la organización, representación y presentación de los contenidos. Lo cual, aporta directamente a la presente investigación en el manejo de comunidades de aprendizaje y uso de las TIC en la enseñanza aprendizaje de la geometría.

1.2.7. Secuencias didácticas para la enseñanza de la geometría con GeoGebra¹³

Cotic (2016) hace referencia a uno de los grandes desafíos de los docentes en la actualidad, la tecnología en el aula. Para lo cual propone la incorporación de graficadores matemáticos en los que presenta con gran auge al GeoGebra, el cual permite realizar construcciones dinámicas, visualizar, conjeturar y validar lo aprendido en el aula. Por otra parte, se muestra el uso de las TIC como motivador para fortalecer las metodologías y prácticas de aula.

El objetivo principal de la investigación, es presentar algunas estrategias para enseñar geometría de forma dirigida por medio de secuencias didácticas que incorporan a el GeoGebra en distintos niveles de

¹³ Cotic, N. (2016). Secuencias didácticas para la enseñanza de la geometría con Geogebra. *CUREM 6. Institutos de Formación Docente – IGVL – Argentina*. pp. 70-76.

complejidad para distintos niveles educativos. El trabajo de los participantes está enfocado en construcciones dinámicas de figuras planas como polígonos y figuras circulares a las que aplican transformaciones puntuales para incorporar nuevos conocimientos.

Cotic (2016) sustenta su trabajo en los aportes de la didáctica de la matemática de la escuela francesa, utilizando el modelo del conocimiento técnico pedagógico del contenido (TPACK), donde su creadora Judi Harris (2012) afirma que al integrar las TIC en nuestras clases cotidianas implica no solamente conocer las herramientas, sino también reflexionar sobre nuestras prácticas, revisar y resignificar los conocimientos pedagógicos y disciplinares cuando incluimos tecnologías. Sin embargo, es importante determinar el contexto, el grupo específico y la realidad concreta en la que se encuentra enmarcado cada docente.

El autor busca hacer la incorporación directa del recurso "GeoGebra", buscando una mayor motivación de sus estudiantes cuando trabajan solamente en sus cuadernos y promover las prácticas propias del pensamiento geométrico tales como: la anticipación, elaboración de conjeturas, exploración dinámica, cuestionamiento de conocimientos anteriores, argumentación, explicación y comunicación, validación y la institucionalización con el fin de optimizar el procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas con los recursos brindados por las TIC.

Los resultados de la investigación han sido muy alentadores por dos factores fundamentales: por la asistencia continuada de los docentes y por el interés que han demostrado por producir materiales adaptados a las TIC y el deseo de pertenecer a grupos de trabajo colaborativo y de intercambio de experiencias.

Se puede ver que el trabajo anteriormente mencionado impacta directamente a la presente investigación en dos aspectos fundamentales como son: el trabajo colaborativo como una comunidad de aprendizaje y el uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana desde distintos enfoques.

1.3. Investigaciones sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométrica y la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria.

Uno de los componentes primordiales de la educación geométrica son las transformaciones, la cuales ha sido relegada en varios momentos de la formación académica y principalmente en la educación primaria. A continuación, se relacionan algunas investigaciones que resaltan un trabajo importante sobre las transformaciones geométricas y su papel en la enseñanza de la geometría y principalmente en los primeros años de educación de educación formal.

1.3.1. Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry¹⁴

Xistouri, Pitta y Gagatsis (2014) enfocan su investigación en los factores y la estructura de las habilidades para los conceptos geométricos transformacionales. La investigación se basa en las tres transformaciones geométricas: traslación, reflexión y rotación, utilizando un análisis de RASCH para crear una escala de ítems de factores relacionados y basa su desarrollo del pensamiento geométrico en la visualización.

Los autores, muestra la geometría transformacional (TG) referida a una transformación mental o física de las formas. En el cual, se hace un análisis factorial confirmatorio para investigar los factores y las estructuras de las habilidades desarrolladas para los conceptos de la geometría transformacional a la luz de cinco niveles establecidos por los autores desde su marco teórico basado en Van Hiele.

Xistouri, Pitta y Gagatsis (2014) en su investigación cuentan con 166 estudiantes de primaria, donde buscan estudiar más ampliamente el desarrollo de las habilidades para TG en grados cuarto, quinto y

¹⁴ Xistouri, X, Pitta, D. y Gagatsis, A. (2014). Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17.

sexto con 52, 53 y 61 estudiantes respectivamente. Dichos estudiantes se enmarcan en una educación regular y tradicional.

Dentro de la investigación, los autores toman como instrumento de estudio una prueba TG basada en una traslación, una reflexión y otra en rotación. Cada sección contaba con cuatro tipos diferentes de tarea: 1. reconocer la imagen, 2. reconocer una TG en un contexto dado, 3. definir los parámetros para ser la TG y 4. construir la imagen para la TG analizada. Dentro de las tareas se presentan al menos una posición vertical, una horizontal y una diagonal que permita al estudiante el análisis en diferentes perspectivas visuales.

Los autores muestran el análisis RASCH para investigar el desarrollo del conocimiento y la comprensión de las TG. Este estudio utiliza el modelo dicotómico de RASCH, que predice la probabilidad condicional de un resultado binario (correcto / incorrecto) como lo afirma el autor en su texto. Por lo tanto, para este análisis, los datos se recodifican como 1 punto para respuestas correctas y 0 para respuestas incorrectas o parcialmente correctas en las tareas propuestas por los investigadores.

Con respecto al objetivo, los hallazgos confirman la posición de Kidder (1976): *“la habilidad TG es multifacética. Parece que las tres transformaciones geométricas están compuestas por factores similares, a saber: reconocimiento de imagen, reconocimiento de transformación, identificación de parámetros y construcción de imagen”*¹⁵.

Dentro de la investigación, se pudo determinar que los estudiantes conciben relaciones simples de arriba, abajo, lejos y cerca en relación a la figura. Pero no se comprende ni las propiedades de la transformación ni las figuras geométricas representadas en cada caso. Se puede evidenciar que el enfoque no está en lo que representan las formas, sino en su posición como parte de una figura global, es decir, pueden

¹⁵ Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, Vol. 7, pp. 40-52.

visualizar la figura del avión y los objetos como una imagen completa, como una fotografía realista en el mundo físico plano.

Es importante ver el aporte teórico desde diferentes puntos de vistas para la enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométricas y la estructura analítica que nos presenta los autores en su texto. Sin embargo, presenta unas actividades tradicionales y poco retadoras para los estudiantes, lo cual no permite generar mayor interacción y motivación para este tipo de población estudiantil que requiere más atención y motivación.

1.3.2. Geometric Transformations - Part 1¹⁶

Eddins S, Maxwell E. y Stanislaus F. (1994) presenta en su investigación una guía para el maestro, en la cual, busca que el estudiante en un primer momento modele situaciones utilizando métodos orales, escritos, concretos y gráficos desde el papel de la definición. En un segundo momento, los estudiantes deben tener la oportunidad de desarrollar el lenguaje y la simbología para comunicarse matemáticamente de forma oral y escrita.

Los autores dentro de su investigación brindan a los docentes una serie de actividades que tienen como objetivo principal no solo involucrar a los estudiantes como participantes activos, sino mostrar diferentes senderos para solucionar situaciones determinadas con transformaciones geométricas principalmente con: translación, reflexión de líneas y rotación alrededor de un punto con un ángulo determinado.

Dentro del trabajo realizado por los autores, un eje principal es la mejora del discurso matemático por parte del docente y el uso de modelos concretos, imágenes, diagramas, tablas y símbolos tanto inventados como convencionales. Por otra parte, dentro de la investigación se establece que el maestro

¹⁶ Eddins, S, Maxwell, E. y Stanislaus, F. (1994). Geometric Transformations - part 1. *The Mathematics Teacher*, Vol. 87, No. 3.

de matemáticas debe crear entornos de aprendizajes que fortalezcan y fomenten el desarrollo del dominio matemático de cada estudiante en cuatro pilares fundamentales que son:

1. Proporcionar y estructurar el tiempo necesario para explorar las matemáticas y problemas importantes.
2. Respetar y valorar las ideas desarrolladas por cada estudiante y su progreso matemático.
3. Motivar a los estudiantes para el trabajo individual y colaborativo para la producción matemática.
4. Promover los riesgos intelectuales al plantear preguntas y conjeturas.

Lo anterior va directamente relacionado con el desarrollo del pensamiento geométrico desde las transformaciones geométricas y puestas en un espacio diseñado como lo es una hoja cuadriculada.

Eddins, Maxwell. y Stanislaus (1994) en sus actividades muestran comportamientos en hojas cuadriculadas para mostrar claramente el cambio de coordenadas en cada una de las actividades propuestas. Es decir, cuando los estudiantes vislumbran el cambio de coordenadas, tendrán una comprensión más amplia de las transformaciones geométricas básicas de translación, reflexión, rotación y sus propiedades.

El anterior trabajo, muestra la necesidad de incluir las coordenadas cartesianas como herramienta fundamental en los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría desde las transformaciones geométricas. Sin embargo, aunque no se trabaje con las TIC, pueden jugar un papel importante en dichos procesos de formación matemática.

1.3.3. Geometrical transformations as viewed by prospective teachers¹⁷

Thaqi, Giménez y Rosich (2011) dentro de la investigación, muestran un estudio empírico para lograr encontrar los atributos a las transformaciones geométricas con futuros profesores de primaria formados

¹⁷ Thaqi, X, Giménez, J. y Rosich, N. (2011). *Geometrical transformations as viewed by prospective teachers*. Universidad de Prishtina; Universidad de Barcelona.

en España y Kosovo. Donde su principal eje de desarrollo son los conocimientos previos de los estudiantes formados.

Thaqi, Giménez y Rosich (2011) muestran que existen muchas investigaciones sobre el conocimiento y uso de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria, pero se han realizado menos estudios para las escuelas primarias a nivel mundial. Los autores basados en Yanik y Flores (2009) determinan que: *“las dificultades en las conceptualizaciones de los alumnos de Primaria dependen de un conocimiento débil de los profesores, en particular de las transformaciones geométricas”*¹⁸.

La investigación se realiza desde un estudio etnográfico con dos grupos separados de futuros profesores, el primero de la universidad de Barcelona (UB) en España y el otro grupo tomado de la universidad de Prishtina (UP) en Kosovo. Dichos grupos cuentan con un curso previo de geometría euclidiana clásica, pero sin tomar una formación clásica previa. En estos dos grupos se aplican dos cuestionarios con el fin de analizar creencias, significados y prototipos en los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Debido a los resultados recopilados en los dos grupos se dividen en tres grandes categorías: la primera se enmarca en los significados y el uso de transformaciones geométricas como objeto matemático y ejemplos asociados, el segundo se basa en las definiciones y estructuras conceptuales. Por último, se tienen las representaciones y transformaciones no isométricas. Para lo cual, los bajos resultados comunes de los dos grupos están directamente relacionados con los conocimientos previos, no solo enfocado a la falta de conocimientos matemáticos, sino por falta de un contraste de las tareas

¹⁸ Yanik, H. y Flores, A. (2009). Comprensión de las transformaciones geométricas rígidas: la ruta de aprendizaje de Jeff para la traducción. *El diario de comportamiento matemático, Volumen 28, 2009*, pp. 41-57.

principalmente de las transformaciones geométricas las cuales juegan un papel casi nulo en la escuela primaria.

La investigación anterior, solifica el proceso de socialización y trabajo colaborativo, el cual permite una interacción entre los estudiantes con el fin de fortalecer los conocimientos previos en el contexto de la geometría y principalmente en el de las transformaciones geométricas a nivel de primaria donde se evidencia de forma clara las falencias en dichas temáticas fundamentales. Por otra parte, se destaca el papel del docente y las falencias que se han presentado a través del tiempo por el bajo dominio conceptual en el área de matemáticas y principalmente de la geometría.

1.3.4. Early Trajectories in Pre-service Teachers' Training. The case of Geometric Transformations¹⁹

Thaqi y Giménez (2014) desarrollan la investigación dentro de las trayectorias iniciales presentadas en la formación de profesores y el desarrollo e implementación de las transformaciones geométricas desde una variedad cultural en un nuevo espacio europeo de educación superior. Los autores, unen sus esfuerzos desde el análisis de las prácticas matemáticas a nivel internacional gracias a las oportunidades que presentan los intercambios, inmigraciones y las globalizaciones educativas.

El presente artículo nos muestra como eje principal el análisis de las buenas prácticas situadas para la enseñanza de las transformaciones dentro de un marco de intercambio didáctico. Este intercambio didáctico, se presenta entre varios países incluso entre países tan diferentes como Kosova y España a nivel educativo y cultural.

Thaqi y Giménez (2014) deciden orientar su investigación basado en dos componentes principalmente:

1. Supuesto inicial de significados institucionales en el contexto cultural

¹⁹ Thaqi, X y Giménez, J. (2014). Early Trajectories in Pre-service Teachers' Training. The case of Geometric Transformations. *REDIMAT*, Vol. 3, pp. 253-275.

El desarrollado en este primer componente brinda un análisis profundo por parte de los autores, los cuales presenta tres categorías: la primera corresponde a las transformaciones y currículum en primaria, la segunda es un análisis de significados en los libros de texto escolares utilizados en cada institución educativa y tercero las observaciones sobre las transformaciones en currículos de formación docente.

2. Análisis epistémico-cognitivo

Este segundo componente se basa en las respuestas presentadas por los estudiantes, en las cuales se indican tres apartados iniciales: en un primer momento se tienen los estudiantes que se refieren al uso de terminología, expresiones de objeto transformación y asociación de ejemplos, el segundo indicador se genera respecto a la caracterización de propiedades y razonamientos asociados y por último las representaciones asociadas a la idea de transformación. Estos tres elementos forman parte de lo que es denominado análisis de la configuración inicial de la trayectoria de formación.

Sin lugar a duda, la investigación muestra el bajo nivel de conocimiento e implementación de las transformaciones geométricas en la escuela primaria, el dominio de la memorización de propiedades y construcciones tradicionales. Sin embargo, se destaca de forma imperativa el papel de la visualización en los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría.

La presente investigación hace un aporte significativo desde los diferentes contextos educativos, en la cual se involucran directamente las prácticas educativas en matemáticas desde el docente netamente de primaria con el fin de fortalecer los procesos de formación de los estudiantes, del currículum y los textos que contribuyen a mejorar los procesos desarrollados dentro y fuera del aula escolar en cada uno de los diferentes contextos.

1.3.5. Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge²⁰

Llana y Atara (2010) en su estudio exploran los cambios que sufren en su perspectiva los futuros docentes de primaria con respecto a sus conocimientos en el área de matemáticas y principalmente en el desarrollo del pensamiento geométrico. El grupo de docentes tomado como muestra, participan en una actividad de planteamiento de problemas donde se utiliza una forma para fortalecer los conceptos desde la pregunta: ¿y si no? Lo anterior es parte de un trabajo donde se busca involucrar la computación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

En el presente estudio participan veinticinco futuros profesores (8 hombres y 17 mujeres) de una universidad académica israelí y que profundizan sus estudios en el área de matemáticas. Sus procesos de formación para este curso de método están basados en el planteamiento de problemas desde las perspectivas de la geometría dinámica.

Los autores, describen en su investigación la experiencia que tienen los docentes en formación a cerca de la presentación de problemas por el método WIN “¿y si no?” presentado por Brown y Walter (1990) como parte del compromiso de un enfoque de enseñanza innovadora. Mediante este método, se da la oportunidad de discutir una amplia gama de ideas, significados y características de un problema en vez de centrar la atención solo en su resultado. Dicha estrategia permite la incorporación de problemas ya resueltos mediante el uso de software dinámicos al igual que el trabajo con lápiz y papel para creación de conjeturas estructurales.

Dentro del análisis de resultados, revelan que participar en las actividades planteadas mejora sus conocimientos matemáticos y metamatemáticos. Por otra parte, se fortalecen los conceptos y formas

²⁰ Llana, L. y Atara, S. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *ELSERVIER. Journal of Mathematical Behavior* 29, 2010.

geométricas involucradas en el estudio dentro de un proceso de creación de problemas, verificación de su validez y solución del mismo.

En el anterior artículo, Llana y Atara (2010) defienden la importancia de trabajar con la resolución de problemas en el campo matemático, respaldando los procesos desarrollados con un componente tecnológico y un componente manipulativo que me permita evidenciar de forma clara el impacto en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

1.3.6. Explorando la geometría en el segundo curso del primer ciclo de educación primaria²¹

Sedó (2016) creo una propuesta de actividades lúdicas con el propósito de mejorar el razonamiento geométrico mediante proyectos, juegos y talleres contextualizados. Las actividades están basadas en la resolución de problemas con el fin de potencializar el razonamiento geométrico, la motivación, la cooperación y el aprendizaje activo en los procesos de enseñanza aprendizaje de los estudiantes de primaria.

Para ello, se trabaja con alumnos de segundo curso mediante una prueba inicial que fomentaba el trabajo individual y por parejas, en el cual, se ve reflejadas las falencias a nivel geométrico y la falta de motivación en los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela.

Sedó (2016) enriquece el pensamiento geométrico de los alumnos desde la mejora de los procesos y habilidades para solucionar problemas cotidianos, los cuales muestran de forma clara y continua la necesidad del manejo geométrico dentro del contexto no académico. Por lo anterior, es importante seguir las tendencias más relevantes de la didáctica como: el juego y el trabajo por proyectos, en los cuales se apoyando directamente a la resolución de problemas cotidianos.

²¹ Sedó, M. (2016). *Explorando la geometría en el segundo curso del primer ciclo de educación primaria*. Universidad Internacional de la Rioja, UNIR. Barcelona, España.

El autor en su investigación muestra la inseguridad de los estudiantes por el manejo de los temas geométricos contextualizados y no contextualizados. Por otra parte, se evidencia el impacto positivo de la aplicación de las actividades en el grupo focalizado con respecto a las habilidades desarrolladas en el campo geométrico.

Dos aspectos importantes a destacar en la investigación de Sedó (2016) y que aporta a la presente investigación es el impacto de la resolución de problemas en el pensamiento geométrico y el campo de estudio tan amplio que la geometría en la educación primaria. Sin embargo, veo vacíos en el contexto tecnológico que se asume hoy en día como la realidad inmediata de los estudiantes.

1.3.7. Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria²²

León (2008) dentro de su trabajo de grado, expone los resultados de un estudio histórico lógico de la geometría como ciencia y su impacto a nivel nacional e internacional en la educación primaria. Su estudio se centra en la geometría dinámica, donde se analizan las potencialidades como fundamento del enfoque dinámico para el manejo del contenido geométrico y tecnológico aplicado al contenido matemático.

El autor tiene como propósito dentro de la investigación generar orientaciones metodológicas para la implementación de un sistema de tareas, dichas tareas brindan los medios adecuados para favorecer el aprendizaje de la geometría en condiciones cualitativas desde los nuevos enfoques. Dentro de estos nuevos enfoques, se prioriza las nuevas tecnologías y la resolución de problemas como medio para alcanzar la formación de nuevas habilidades en el desarrollo del pensamiento geométrico de la escuela primaria.

²² León, T. (2008). Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria (Doctorado). *Instituto Central de Ciencias Pedagógicas*. La Habana, Cuba.

León (2008) muestra el papel de la computadora en los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría en el área de primaria. Sin embargo, se evidencia las falencias teóricas prácticas de los docentes que implementan el área de matemáticas en la institución, en el manejo de los software geométrico y conceptos puntuales que se deben manejar en dichos procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Cabe destacar en la presente investigación el aporte que se debe dar en la actualización de conceptos y manejos de habilidades geométricas desde los softwares y la resolución de problemas. Por otra parte, es de destacar la mirada que se les da a los docentes de primaria, que usualmente no son especialistas en matemáticas, pero cumplen con el ejercicio de formación en el aula regular.

1.3.8. Geometric transformations I ²³

Yaglob (1975) desarrolla su investigación en transformaciones geométricas desde dos puntos tres puntos importantes; el primero relacionado directamente con los desplazamientos, el segundo se relaciona con la simetría y el tercero se expone desde la resolución de problemas con una única solución.

El trabajo desarrollado, que consta de tres partes, se basa en la geometría elemental. La cual busca desarrollar una gran cantidad de material básico durante el siglo XIX. El objetivo del presente trabajo no es familiarizar al lector con una serie de teoremas que en su gran mayoría deben ser nuevos para él, sino una serie de monografías dedicadas especialmente a la geometría elemental e ir más allá de los teoremas elementales de la geometría.

Se trabaja bajo los parámetros del método deductivo y la base axiomática de la geometría transformacional. Esta metodología ha sido muy fructífera, en la cual se desarrollan habilidades geométricas desde la perspectiva de los conocimientos previos básicos y los procesos deductivos del

²³ Yaglom, M. (1975). Geometric transformations I. The Mathematical Association of America. *Editorial Committee*. Vol. 8. pp. 15-60.

lector; las conjeturas, la descripción de ideas y la representación de las mismas a la hora de solucionar problemas basados en la geometría transformacional es el eje central del presente trabajo.

El autor ha sacrificado a un grupo de lectores, el lector bien preparado, el trabajo se esforzó en la sencillez y la claridad más que por el rigor matemático. Yaglob (1975) señala la importancia de presentar un trabajo dedicado a los “principiantes” para genera bases importantes, sólidas y significativas en la formación geométrica del lector desde la solución de problemas con papel y lápiz de una manera tradicional.

Yaglob (1975) ratifica dos puntos importantes de la formación geométrica; el primero es la importancia de la deducción de contenidos para llegar a tocar la formalidad del mismo. En segundo lugar, y no menos importante, es iniciar desde la construcción de bases sólida y significativas para la comunidad que se encuentra en formación desde sus primeros años por medio de la resolución de problemas.

1.3.9. Algunas transformaciones geométricas del plano²⁴

Fonseca y Sánchez (2007) apuestan principalmente al uso del material concreto, por medio de actividades aplicadas en talleres, donde se busca construir las nociones correspondientes a isometrías del plano. Se proponen actividades donde se permite concluir de forma visual la transformación resultante al componer dos isometrías, para luego ser formalizado. Se destaca el trabajo de aprender desde el error en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría transformacional.

El autor dentro de su implementación presenta sus objetivos claros en el desarrollo de las actividades, entre las cuales se tienen:

- Reconocer invariantes de las figuras por transformaciones rígidas del plano.
- Reconocer y realizar los diferentes movimientos a partir propiedades o aspectos visuales de las transformaciones.

²⁴ Fonseca, J. & Sánchez, B. (2007). *Algunas transformaciones geométricas del plano*. Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. pp. 25-37.

- Identificar elementos de transformaciones a partir de imágenes y preimágenes.
- Descubrir y emplear propiedades de transformaciones a partir de casos particulares.
- Aplicar composición de transformaciones realizando movimientos sucesivos.
- Resolver problemas en los que intervenga el uso de transformaciones geométricas.

Dichos objetivos enfocan sus esfuerzos no solo en la parte matemática sino en los procesos de enseñanza aprendizaje desde el análisis de los errores cometidos.

Fonseca y Sánchez (2007) en la implementación del taller muestran el fortalecimiento de las transformaciones rígidas en el plano (traslaciones, reflexiones sobre puntos, rotaciones, reflexiones sobre rectas y composición) y el tratamiento dado a la resolución de problemas. En la cual, se muestra la importancia de la geometría transformacional para encontrar regularidades y para describir situaciones concretas.

1.3.10. Making space for geometry in primary mathematics²⁵

Jones y Mooney (2003) destacan en su investigación la importancia de la geometría en imágenes y producciones animadas que han tenido gran impacto a nivel social-cultural. Imágenes como el museo británico: clásico y moderno, que utiliza la geometría combinada como eje central de su creación y los personajes de “Toy History” creados en 1995 por computadora, los cuales están basados en figuras geométricas simples para producir cada personaje final. Estos dos referentes son la base de del desarrollo geométrico a nivel tecnológico “desde las formas básicas”.

El objetivo de este capítulo es el desarrollo del pensamiento espacial en la educación primaria, con el fin de darle sentido al mundo desde las medidas, formas y movimientos de forma contextualizada como lo indica Freudenthal (1973): *“La geometría es captar el espacio. . . ese espacio en el que el niño vive,*

²⁵ Jones, K. y Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. *Enhancing Primary Mathematics*. London: Open University Press. pp. 3- 15.

*respira y se mueve. El espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar, conquistar, para poder vivir, respirar y moverse mejor en él*²⁶.

Por otra parte, la geometría, como lo dice el reconocido matemático británico Atiyah M. (2001): *“La intuición espacial o percepción espacial es una herramienta enormemente poderosa y es por eso que la geometría es en realidad una parte tan poderosa de las matemáticas, no solo para las cosas que son obviamente geométricas, sino incluso para las que no lo son. Tratamos de ponerlos en forma geométrica porque eso nos permite usar nuestra intuición. Nuestra intuición es nuestra herramienta más poderosa”*²⁷.

Estos puntos de vista son considerados en la Estrategia Nacional de Aritmética (NNS), la cual coloca su postura en Piaget y Van Hiele. Desde la investigación Piagetiana se presenta que las relaciones progresivas de las ideas geométricas en los niños siguen un orden definido y este ordenes más experiencial que un entorno histórico de la geometría. En segundo lugar, Van Hiele (1986) es tomado desde los cuatro niveles (visual, descriptivo, abstracto y formal), sin embargo, la investigación expone la necesidad de incluir la visualización en todos los niveles y no solo en el más bajo.

El trabajo realizado describe la naturaleza empobrecida de la geometría escolar en el nivel primario en los EE. UU. Y señala que el bajo rendimiento de los alumnos de la educación primaria en geometría se debe, en gran parte, al plan de estudios de geometría escolar, que se enfoca en reconocer y nombrar formas geométricas y aprender a escribir el simbolismo apropiado para conceptos geométricos simples de forma memorística. Para atacar dicha situación, indican que la geometría en la primaria se debe basar en el estudio de objetos, movimientos y relaciones en un entorno espacial contextualizado. Lo que debe buscar que las primeras experiencias de los alumnos con la geometría deben enfatizar el estudio informal de las formas y sus propiedades para desarrollar el concepto intuitivo de trabajo espacial.

²⁶ Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. *Dordrecht: Reidel*. p. 68.

²⁷ Atiyah, M. (2001) Mathematics in the 20th century: geometry versus algebra, *Mathematics Today*, 37. pp. 46–53.

Esta investigación lleva a reflexionar sobre el papel de la geometría en los componentes curriculares nacionales y principalmente en el desarrollo curricular de las instituciones educativas públicas con el fin de fortalecer el papel de la geometría en la educación primaria desde la resolución de problemas contextualizados.

1.3.11. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano²⁸

Lima (2019) dentro de su investigación tiene como fin principal caracterizar el conocimiento del docente en la enseñanza de las transformaciones en el plano. A partir de ello, diseñar y aplicar una propuesta en la cual su eje principal es el desarrollo de diferentes pensamientos matemáticos en los docentes tomados. El autor, basa en Chamorro (2003) afirma que: “... *la enseñanza de la geometría en la escuela primaria y las propuestas curriculares que destacan la necesidad de desarrollar distintos pensamientos matemáticos, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela aún se centra en el desarrollo del pensamiento y los sistemas numéricos...*”²⁹.

Lo que muestra que el estudio de la geometría es relegado al último reglón de algunos planes de estudio y diseños curriculares en la escuela primaria como ha pasado con la probabilidad y estadística a través del tiempo.

A través de un estudio de caso, el autor analiza las prácticas del docente dentro del aula y hace un ejercicio colaborativo entre el docente e investigador. Dentro del presente estudio de caso se conlleva a reconocer el saber del docente para enfrentar la enseñanza, la cual fue el objeto de análisis dentro de la

²⁸ Lima, I. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano. *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Vol. 24. pp. 197-204.

²⁹ Lima, I. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano. *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Vol. 24. p. 197.

investigación para saber las razones de actuar como lo hace, qué moldea la práctica docente y qué desajustes se presentan en la clase.

Lima (2019) en su estudio enfoca sus esfuerzos en analizar el conocimiento especializado del docente de matemáticas, visto como el conocimiento que se pone en juego cuando se tiene la intencionalidad de enseñar un contenido matemático y principalmente geométrico para este caso. Sus caracterizaciones se basan en seis componentes tales como: enseñanza de la matemática, características del aprendizaje de la matemática, estándares de aprendizaje de la matemática, práctica matemática, estructura matemática y temas.

Desde la presente investigación se presenta una oportunidad de mejora debido a que los docentes no cuentan con los suficientes elementos para colocar la enseñanza de la geometría como eje transversal del desarrollo de diferentes pensamientos matemáticos. Por tanto, se muestra un camino valioso y significativo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría como un aporte de la presente investigación.

1.3.12. Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría³⁰

Galindo (1996) muestra en su investigación los aspectos generales del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría básica desde las tablas de habilidades de Hoffer (1990), esta tabla muestra las habilidades que son pertinentes desarrollar en geometría relacionando los niveles de Van Hiele. Por medio de un ejemplo muestra como utiliza la tabla en la construcción de actividades para enseñar un tema de manera puntual, la rotación, a un grupo de alumnos que finalizan la primaria e inician los estudios de secundaria.

³⁰ Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría. *Revista EMA*. Vol. 2.

Dentro de su proyecto el investigador tiene como objetivo dominar las transformaciones geométricas y aplicarlas en la construcción de teselados. Se tienen en cuenta temas prerequisites tales como: conceptos de geometría euclidiana (punto, recta y plano), manejo del transportador, concepto y clasificación de ángulos, paralelismo y perpendicularidad, polígono y región poligonal, triángulo, cuadrilátero, translación, rotación, reflexión y aplicaciones de las transformaciones en los mosaicos.

Galindo diseñó una serie de talleres con base en la tabla básica para el aprendizaje de la geometría según Hoffer (1990). Las actividades expuestas en los talleres parten de la manipulación de material concreto y avanza hasta el ordenamiento de las propiedades captadas por el estudiante en dichas actividades. De esta manera se busca que el estudiante vaya del nivel 1 (reconocimiento) hasta el nivel 3 (ordenamiento) en búsqueda del objetivo en cada nivel y buscar hasta donde ha llegado el alumno en su comprensión según el modelo establecido por Van Hiele.

Es importante destacar el papel del material manipulativo en la elaboración de las actividades y el fortalecimiento en el dominio de los conceptos geométricos. Por otra parte, se destaca la base de las actividades el modelo de Hoffer (1990) y Van Hiele, las cuales, permite un análisis más profundo del pensamiento geométrico en los estudiantes.

1.4. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente a través de las transformaciones geométrica y la resolución de problemas en grado quinto de la escuela primaria en Colombia

Dentro del presente epígrafe se relacionan las investigaciones más relevantes en Colombia con relación a la enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades a través de las transformaciones geométricas. Por lo anterior, se valora un análisis general de los trabajos realizados dentro del país y su impacto a nivel nacional e internacional de los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática desde el campo geométrico.

1.4.1. Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica³¹

Acosta (2010) dentro de su investigación muestra el uso de la tecnología como una herramienta principal en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en el modernismo. Dicha herramienta es el eje principal de atracción en los procesos de enseñanza aprendizaje de las nuevas generaciones. Por tanto, el autor invita a la comunidad educativa a realizar una crítica constructiva entorno a la formación matemática principalmente con preguntas orientadoras tales como:

- ¿Es necesario el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuáles son las ventajas del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuáles son los efectos del uso de la tecnología en el aprendizaje?
- ¿Cómo debe transformarse la práctica de la enseñanza para poder aprovechar las ventajas de la tecnología?
- ¿Es viable un uso esporádico de la tecnología?
- ¿El sistema educativo (macro y micro) está en capacidad de garantizar un uso intensivo de la tecnología?

Basados en las preguntas anteriores, el autor busca examinar el uso de la tecnología principalmente un software de geometría dinámica desde la teoría de las situaciones didácticas. Dicha teoría ha contribuido directamente a la formación matemática de una forma científica a través de los tiempos y ha contribuido en los últimos tiempos a ver el rol de la tecnología en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la escuela tradicional.

³¹ Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Universidad Industrial de Santander.

Dentro de su investigación, Acosta (2010) utiliza el aprendizaje por adaptación como el concepto alrededor del cual construye la teoría de las situaciones didácticas. La tecnología, es el medio que utiliza el investigador para los procesos de enseñanza aprendizaje sobre el cual el estudiante puede realizar acciones y recibir realimentaciones que le permitan la validación de los procesos desarrollados dentro de su formación.

El autor dentro de su investigación logra uno de los propósitos más importantes, dicho propósito era ilustrar de manera clara cómo la teoría de las situaciones didácticas provee de un modelo de aprendizaje en el que el software de geometría dinámica puede considerarse como un medio adecuado para la interacción de los estudiantes. Lo anterior está expuesto en un campo de la geometría dinámica y principalmente en las transformaciones geométricas.

El artículo anterior orienta de forma clara el rol de la tecnología en los tiempos actuales y el papel fundamental que tienen los softwares de geometría dinámica en la presente investigación. Por otra parte, es importante destacar los componentes teóricos de las situaciones didácticas desde la presentación de problemas contextualizados como los denota Acosta (2010) en su investigación.

1.4.2. La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje³²

Marmolejo y Vega (2005) presentan la importancia de las figuras geométricas como un soporte intuitivo para el desarrollo de las actividades geométricas. Por otra parte, no es obvio ni espontaneo que los docentes y estudiantes apliquen en la resolución de problemas elementos claves para realizar exploraciones heurísticas, algunos autores muestran la dificultad de tal aprovechamiento para la enseñanza aprendizaje de un conocimiento específico en el área de matemáticas y principalmente en la geometría.

³² Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: Visualización, figuras y áreas. *XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética. Bogotá, Colombia. Vol. II. pp. 661-693.*

Dentro de los procesos desarrollados en la presente investigación, los autores apoyados en Duval (2003) muestran que la visualización posee características diferentes según el tipo de representación semiótica. Los autores recaen la investigación en la visualización asociada a las figuras geométricas de naturaleza bidimensional y apoyadas en dos actividades cognitivas: uno, la acción de entender una figura geométrica inicial (figura de partida) y las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada); y dos, los cambios de focalización aplicados sobre la figura que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta como lo determinan los autores en su investigación.

Marmolejo y Vega (2005) presentan una investigación de carácter cualitativo, puesto que el eje principal se centra en los criterios de cada uno de los investigadores. Por ello, el propósito principal es comparar, describir y explicar los procesamientos cognitivo de los estudiantes que participan en dos grupos diferentes, con 150 estudiantes de primaria en Santiago de Cali (Colombia). La recolección, selección y análisis de datos se realiza de forma inductiva, es decir, las categorías de análisis implementadas en la investigación se toman en base a la producción de los estudiantes.

Dentro de la investigación, se presenta una convergencia en la preocupación del papel de la geometría en los currículos e investigaciones a través de la historia en las escuelas primarias. La geometría se ha visto relegada a un segundo plano en los primeros años escolares y no se evidencia el papel de la visualización como una herramienta para el proceso de enseñanza aprendizaje de las figuras planas desde las transformaciones y sus procesos heurísticos desarrollados en cada una de las situaciones planteadas.

La visualización, la heurística y la comparación en situaciones geométricas trabajadas por Marmolejo y Vega (2005) en la investigación, aportan directamente al presente trabajo en el fortalecimiento de las actividades posteriormente planteadas e involucra su desarrollo directo con el papel de las

transformaciones geométricas en los procesos de enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades.

1.4.3. Formación de habilidades matemáticas en la enseñanza primaria de Colombia³³

Maturana, Prieto y Curbeira (2018) dentro de su artículo muestran las debilidades que presenta la educación matemática en Colombia y principalmente en la geometría. Los autores basan su investigación en los componentes curriculares de Colombia, las brechas que se presentan en los proyectos educativos autónomos y el bajo desempeño en las pruebas nacionales de grado quinto.

La investigación realizada por los autores centra su atención en los estudiantes de grado cuarto y quinto de básica primaria de la institución educativa Ciudad Córdoba con un promedio de 40 estudiantes por salón. Dichos estudiantes cuentan con unas edades que oscilan entre 9 y 11 años con un 51% de mujeres y un 49% de hombres.

Maturana, Prieto y Curbeira (2018) asumen una postura de observación directa a los docentes focalizados con el fin de determinar su relación con los componentes curriculares expuestos en los Lineamientos curriculares, competencias básicas de aprendizaje o principalmente en los derechos básicos de aprendizaje. Lo anterior desde los tres factores esenciales para la formación matemática según el Ministerio de Educación Nacional (MEN): la educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social de la matemática y el papel de la matemática en la consolidación de los valores democráticos. La investigación muestra un análisis desde los elementos, las operaciones y las relaciones que conforman el sistema geométrico correspondiente al grado cuarto y quinto desde los aspectos de forma y posición. Los docentes, abordan el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula de forma correcta, sin embargo, no se determina claramente, cuáles son las acciones y operaciones que el docente tienen en cuenta para

³³ Maturana, H., Prieto, J. y Curbeira, D. (2018). *Formación de habilidades matemáticas en la enseñanza primaria de Colombia*. Acalán 35. Universidad Autónoma del Carmen. México.

la formación de habilidades espaciales en los estudiantes. Es decir, no se presenta una claridad de los componentes curriculares por parte de los docentes que imparten la clase.

La investigación anterior aporta un análisis directo a los componentes curriculares y sus aplicaciones en el contexto colombiano, por otra parte, analiza el papel del docente “no especialista” en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en Colombia.

1.4.4. Geometría activa y geometría de las transformaciones³⁴

Vasco (1992) propone dentro del artículo un objetivo base, el cual, es contrastar la geometría activa vista desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN), la geometría del llamado “programa de Erlangen” de Félix Klein, y con la geometría de las Transformaciones. El autor, presenta un enfoque desde la geometría como una exploración activa del espacio y de los modos de representación geométrica en la imaginación y en el plano del dibujo.

Vasco (1992) enfatiza en la profundización del tema en su libro titulado: un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas, en el cual, en un primer momento define el desarrollo e importancia de la geometría activa desde el manejo mental y gráfico. En un segundo momento se tiene el programa de Erlangen, donde se tiene la oportunidad de trabajar en la diferencia del sistema métrico y sistema geométrico como herramienta de formación matemática.

Por otra parte, el autor enfoca su estudio en la geometría de las transformaciones, para lo cual basa su importancia en la geometría activa para trasladar, rotar objetos, reflejarlos por medio del dibujo, de los espejos y de la imaginación. La base de la propuesta de geometría de las transformaciones, como se denomina, es constatar que los tres tipos de isometrías del plano son definibles en términos de uno solo:

³⁴ Vasco, C. (1992). Geometría activa y geometría de las transformaciones. *Tecné episteme y didaxis. Universidad Nacional de Colombia.*

las reflexiones. Reflexiones sobre líneas paralelas generan traslaciones y sobre líneas que se cruzan generan rotaciones.

Es de destacar la postura del autor desde la necesidad de recuperar la geometría en la escuela primaria y secundaria, en la cual se ha realizado un buen ejercicio de propagación y aceptación, pero se pueden mejorar los procesos de formación a docentes y estudiantes.

Este artículo, muestra a la presente investigación un camino claro desde los lineamientos expuestos por el MEN para Colombia a nivel de la formación geométrica, el cual permite un proceso de formación que aporte directamente al sistema educativo nacional y su calidad educativa.

1.4.5. Realidad Aumentada como herramienta en la enseñanza-aprendizaje de geometría básica³⁵

Céspedes, Valencia y Santacruz (2012) presentan dentro de su investigación la implementación de la realidad aumentada (RA) como herramienta dinamizadora en los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría básica, dichos procesos son dirigidos por el semillero de investigación GEMA en la Universidad Católica de Pereira. Los autores tienen como objetivo descubrir las variables y factores a tener en cuenta en el desarrollo del software educativo que utilice esta tecnología

La investigación se maneja con un carácter exploratorio descriptivo; desde el componente exploratorio se diseña una herramienta para la posterior aplicación (software RA) y descriptiva porque muestra conductas concretas de acuerdo a características puntuales que muestran los estudiantes de primaria y básica de la ciudad de Pereira.

Los autores dentro de sus resultados muestran la implementación de la RA en los procesos de enseñanza aprendizaje, la cual generan un mayor interés en los estudiantes. Es necesario enfatizar no solo en las

³⁵ Céspedes, G., Valencia, B. y Santacruz, S. (2012). *Realidad Aumentada como herramienta en la enseñanza-aprendizaje de geometría básica*. Bogotá, Colombia. PANORAMA.

figuras plana si no en las 3D para generar mayor atención en los estudiantes. Siempre se debe contar con un material impreso de la RA como herramienta de apoyo y mayor análisis para los estudiantes.

La herramienta de la RA en la presente investigación es de gran valor, sin embargo, la presencia de las figuras geométricas 3D son vitales en el proceso de enseñanza aprendizaje por medio de la herramienta propuesta, como lo afirma el autor en su artículo. Lo anterior conlleva a centrar la atención en otros procesos de formación distintos a la presente investigación.

1.4.6. Interacciones y relaciones con estudiantes de grado cuarto para la comprensión de las transformaciones geométricas de congruencia³⁶

Claros, Huertas y Castro (2015) presentan una propuesta investigativa desde la aplicación de una secuencia de actividades a estudiantes de los últimos años de educación primaria principalmente de grado cuarto. Dentro de la investigación se estudia el impacto de las situaciones problema como herramienta emergente de los procesos de enseñanza aprendizaje en el aula regular.

Dentro del desarrollo de las actividades de la investigación se presentan tres momentos importantes: en primer lugar, se relaciona con situaciones de movimiento, donde el cuerpo geométrico es una herramienta para comprender el tema. En segundo lugar, se presenta la manipulación de material tangible y como tercero, se ostenta la noción de transformaciones geométricas y la caracterización de algunos movimientos rígidos en el plano.

La implementación de las actividades de aula, tiene como objetivo principal que los estudiantes caractericen los movimientos isométricos y la comprensión del significado de congruencia. De allí, se busca que cada movimiento pase por tres momentos principales: uso de movimientos corporales, movimiento con objetos y la relación con el movimiento presente en el plano cartesiano.

³⁶ Claros, X., Huertas, Y. y Castro, C. (2015). Interacciones y relaciones con estudiantes de grado cuarto para la comprensión de las transformaciones geométricas de congruencia. *Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. RECME.*

Claros, Huertas y Castro (2015) mediante sus actividades logran que los estudiantes exploren los recursos, exploren las situaciones, realicen inferencias y conjeturas. En razón a lo anterior, logran que los estudiantes caractericen las transformaciones geométricas de congruencia, sus elementos, aspectos y características puntuales.

Los autores dentro de su implantación logran mostrar la importancia del material manipulativo en el proceso de enseñanza aprendizaje y la oportunidad que tienen los estudiantes de interactuar con nuevas herramientas, que para la presente investigación serian tecnológicas.

1.4.7. Algunas transformaciones geométricas del plano³⁷

Fonseca y Sánchez (2007) apuestan principalmente al uso del material concreto, por medio de actividades aplicadas en talleres, donde se busca construir las nociones correspondientes a isometrías del plano. Se proponen actividades donde se permite concluir de forma visual la transformación resultante al componer dos isometrías, para luego ser formalizado. Se destaca el trabajo de aprender desde el error en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría transformacional.

El autor dentro de su implementación presenta sus objetivos claros en el desarrollo de las actividades, entre las cuales se tienen:

- Reconocer invariantes de las figuras por transformaciones rígidas del plano.
- Reconocer y realizar los diferentes movimientos a partir propiedades o aspectos visuales de las transformaciones.
- Identificar elementos de transformaciones a partir de imágenes y preimágenes.
- Descubrir y emplear propiedades de transformaciones a partir de casos particulares.
- Aplicar composición de transformaciones realizando movimientos sucesivos.

³⁷ Fonseca, J. & Sánchez, B. (2007). *Algunas transformaciones geométricas del plano*. Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. pp. 25-37.

- Resolver problemas en los que intervenga el uso de transformaciones geométricas.

Dichos objetivos enfocan sus esfuerzos no solo en la parte matemática sino en los procesos de enseñanza aprendizaje desde el análisis de los errores cometidos.

Fonseca y Sánchez (2007) en la implementación del taller muestran el fortalecimiento de las transformaciones rígidas en el plano (traslaciones, reflexiones sobre puntos, rotaciones, reflexiones sobre rectas y composición) y el tratamiento dado a la resolución de problemas. En la cual, se muestra la importancia de la geometría transformacional para encontrar regularidades y para describir situaciones concretas.

1.4.8. Proyecto de aula que contribuye a la formación de docentes en básica primaria a través de la enseñanza de la geometría activa para el desarrollo del pensamiento espacial³⁸

Grimaldy (2017) presenta una metodología de proyecto de aula relacionada con la formación de docentes de básica primaria desde la enseñanza de la geometría activa para el desarrollo del pensamiento espacial. Su objetivo principal, se centra en contribuir al quehacer pedagógico para la enseñanza de la geometría en la educación primaria en el aula regular.

El autor busca en su investigación capacitar y formar en las habilidades geométricas a los docentes de la I.E. Real de Mares en la ciudad de Barrancabermeja, Sur de Santander. Por otra parte, el autor centra su pregunta de investigación en cinco aspectos importantes:

- a. La apatía por parte de los estudiantes.
- b. Descontextualización de la temática.
- c. Enseñanza tradicional de forma deductiva sin apoyo experimental.
- d. Bajo dominio teórico de los docentes.

³⁸ Grimaldy, L. (2017). *Proyecto de aula que contribuye a la formación de docentes en básica primaria a través de la enseñanza de la geometría activa para el desarrollo del pensamiento espacial*. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

e. Resistencia a la actualización en la enseñanza aprendizaje de la geometría.

De allí la importancia de buscar estrategias para la implementación de nuevas metodologías de enseñanza en el aula regular.

Grimaldy (2017) presenta en su investigación una reestructuración importante en la planeación docente y genera grandes inquietudes en el análisis del PEI y en el currículo de matemáticas en el área de primaria. Dentro de las actividades propuestas para los docentes, se tiene una estructura motivacional para la capacitación docente en el área de matemáticas al no contar con especialistas en el área.

Es un trabajo importante que presenta el autor dentro de su investigación, sin embargo, no aporta directamente a la presente investigación. Cabe resaltar el papel de las actividades propuestas y aplicadas a los estudiantes desde la postura metodológica del docente titular.

Conclusiones del capítulo 1

La revisión de la literatura del estado del arte de esta investigación permite constatar tres tendencias principales, las cuales se enriquecen con los resultados de los instrumentos aplicados a especialistas. Estas tendencias hacen énfasis en: el papel del material manipulativo como herramienta en el proceso de enseñanza aprendizaje; el uso de las TIC, jugando un papel importante en la educación actual como herramienta proyectiva de la enseñanza de la matemática y principalmente de la geometría. Por último, se tiene el papel de la resolución de problemas como una estrategia formadora del conocimiento matemático en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la educación primaria.

En la primera tendencia los autores buscan captar el espacio a través de las formas, posiciones y movimientos, para enriquecer el pensamiento geométrico desde lo tangible, visual y cotidiano de los estudiantes (Voltoline, 2018; Jones y Mooney, 2003; Eddins, Maxwell y Stanislaus, 1994; Hershkowitz, 2014; Alape, 2013; Claros, Huertas y Castro, 2015; Galindo 1996; Fonseca y Sánchez, 2007).

En segundo lugar, se tiene una tendencia relacionada con el uso de las TIC en el desarrollo del pensamiento geométrico con herramientas como geoplano virtual y GeoGebra. Se establece que dichos softwares permiten desarrollar construcciones dinámicas, visualizar, conjeturar y validar los procesos geométricos a desarrollar en las actividades (Zaranis y Synodi, 2016; Arvanitaki y Zaranis, 2019; Voltoline, 2018; Nason, Chalmers y Yeh, 2012; Sinclair y Bruce, 2015; Hershkowitz, 2014; Acosta, 2010; Cotic, 2016; Jones y Mooney, 2003 y León, 2008).

Por último, la tercera tendencia relaciona a la resolución de problemas como herramienta fortalecedora de los procesos cognitivos y metacognitivos desde la contextualización y reconocimiento del entorno inmediato del estudiante (Claros, Huertas y Castro, 2015; Marmolejo y Vega, 2005; Sedó, 2016; Grimaldy, 2017; Yana y Atara, 2010; Yaglob, 1975; Leal Y Bong, 2015).

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Como antecedentes bibliográficos, se toman todas aquellas fuentes de consulta que para esta investigación han aportado a la temática abordada, hoy en día la educación tradicional, las TIC, el material manipulativo y la resolución de problemas han creado entornos de aprendizaje más llamativos, enriquecedores y actualizados. Desde estos entornos educativos se busca generar en el estudiante una mayor motivación e interés por la adquisición de nuevos conocimientos desde un campo más contextualizado para el estudiante. Es por ello, que este capítulo se enmarca en la resolución de problemas retadores, el papel de la visualización matemática y su significado, el uso de materiales didácticos y tecnológicos en el desarrollo del pensamiento geométrico.

2.1. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

El estudio formal de la matemática se inicia desde los primeros años de la educación primaria, en el cual juega un papel importante el pensamiento geométrico. En nuestro contexto educativo, los componentes curriculares presentados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) respaldan la formación geométrica y resolución de problemas desde los primeros años de formación académica. Lo cual, responde a inquietudes prácticas en su nivel más elemental desde el contexto directo.

Especialistas en tema han abordado la solución de problemas dentro de sus investigaciones como una estrategia didáctica y pedagógica para fortalecer el pensamiento matemático (Pólya, 1965; Fridman, 1972; Krulik Y Rudnik, 1980; Martínez, 1981; Schoenfeld, 1985; Mayer, 1986; Sánchez, 1994; Garret, 1995; Rizo 1996; Álvarez, 1996; Kilpatrick, 1998; Sriraman, 2010 y Bong y Leal 2015).

La definición o interpretación de problema no es tan trivial como se cree, sin embargo, se tiene el aporte de varios especialistas e investigadores. Dichas definiciones se canalizan de forma general como una situación, la cual presenta una o varias dificultades que no muestran solución directa o inmediata.

Krulik y Rudnik (1987) dentro de su perspectiva establecen que un problema es: “... una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”³⁹, haciendo relación a una situación que no muestra una solución inmediata dentro del contexto.

Por otra parte, Schoenfeld, el cual es citado por Sriraman (2010), destaca la importancia de la resolución de problemas. La manipulación de este recurso didáctico, desarrolla en los estudiantes una habilidad para crear estrategias que lo vinculen al contexto, creando en los estudiantes procesos meta-cognitivas aplicados al contenido matemático.

Desde la perspectiva de Bong y Leal (2015) se presenta la resolución de problemas como un proceso cognitivo, es decir, una parte integral del aprendizaje matemático incluyendo la geometría desde: una estrategia, una forma de enseñar matemática; un contenido conceptual, procedimental y actitudinal con identidad propia del contexto.

Desde el punto de vista de la educación primaria, la resolución de problemas permite no sólo aprender matemática, sino también desarrollar el pensamiento lógico de los estudiantes en sus primeros años de educación formal. No obstante, la práctica cotidiana en el aula, en un intento por fomentar esta resolución, se ha limitado a la ejercitación repetitiva de procedimientos o a la aplicación de fórmulas para finalizar los contenidos programados.

Esta perspectiva, es apoyada por grandes teóricos de la resolución de problemas como Pólya (1981), el cual es la base de la presente investigación. Dicho autor plantea que tener un problema: “... significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no

³⁹ Krulik, S. & Rudnik, J. (1980). Problem solving: a handbook for teachers. *Boston: Allyn and Bacon*. p. 4.

alcanzable de forma inmediata”⁴⁰. Para ello, Pólya establece unas fases mínimas para solucionar dichos problemas en las cuales se tienen:

- Comprensión del problema: para poder comprender el problema hay que leerlo, interpretarlo, analizarlo y entender los datos presentados. Se debe leer y comprender de manera clara. Con el fin de lograr una mejor comprensión del problema, se recomienda al docente realizar preguntas heurísticas tales como: ¿cuál es la incógnita?, ¿qué datos se tienen?, ¿qué condiciones se presentan?, ¿qué relación se presenta entre la incógnita y las condiciones, serán suficientes?, entre otras.
- Planificación de los pasos a seguir: aunque haya varias alternativas para resolver el problema, hay que elegir un plan. Existen varias estrategias entre ellas: ensayo- error, resolver un problema más sencillo, buscar un patrón, entre otros. En este punto, se recomienda al docente realizar preguntas heurísticas tales como: ¿ha visto el mismo problema planteado o alguno similar?, ¿conoce alguna estrategia que le pueda aportar a la solución del problema?, ¿le haría falta incluir algunos elementos de apoyo?, ¿puede imaginarse un problema similar que sea más sencillo?, ¿puede resolver una parte del problema planteado?, entre otras.
- Ejecución del plan: cuando haya comprendido el problema y pensado en un plan, se debe ejecutar la estrategia establecida para resolver el problema. Para lograr una interacción y claridad mayor en los procesos desarrollados por los estudiantes, el docente debe realizar preguntas tales como: ¿es posible comprobar cada uno de los pasos planteados al ejecutar su plan?, ¿evidencia de forma clara que el paso desarrollado es correcto o incorrecto?, ¿es posible demostrar lo que se ha desarrollado en cada paso?, entre otras.

⁴⁰ Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons, p. 117.

- Vista retrospectiva: se debe verificar el resultado y que responda al problema planteado. En este punto, es importante que el docente formule a sus estudiantes preguntas como: ¿es posible que se verifiquen los resultados obtenidos?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿es posible obtener el resultado de formas distintas?, ¿se puede emplear el método en algún otro problema planteado?, entre otras.

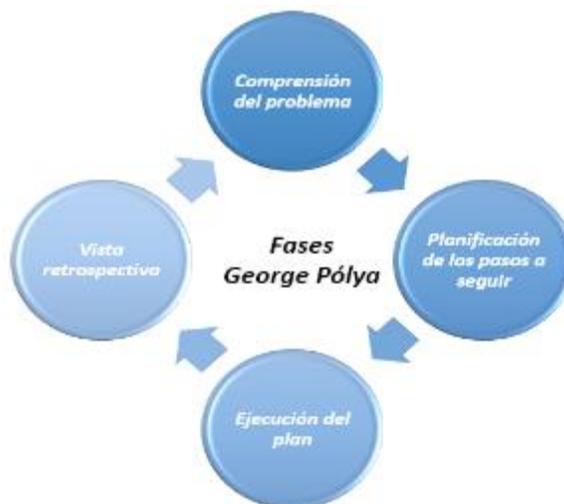


Figura 1. Fases de Pólya para la solución de problemas.

Estas fases (ver Figura 1), fortalecen los procesos heurísticos para la solución de problemas con el fin de beneficiar al desarrollo mental desde la contribución al fortalecimiento de habilidades geométricas en el estudiante. La utilización de cada fase del método de Pólya genera una nueva perspectiva a los estudiantes desde los primeros años de educación formal.

Falk (2001) plantea que un problema retador: *“... exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos. Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el*

*desarrollo del pensamiento matemático en sí*⁴¹. Los problemas retadores han mostrado el fortalecimiento de los procesos mentales como eje principal del pensamiento matemático dentro del contexto educativo. Es indispensable trabajar de forma continua con los estudiantes la resolución de problemas retadores y no ejercicios que ameritan seguir pasos rutinarios. La resolución de dichos problemas conduce a los estudiantes a buscar información, reflexionar, conjeturar y probar dentro de la integración de conceptos, procedimientos y actitudes.

2.2. Fundamentos de la visualización Matemática

Dentro del proceso de formación teórica, se ha centrado el interés en la visualización enfocada a la semiótica de las figuras, en particular de las figuras geométricas planas, puesto que son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado el aprendizaje de la geometría desde la primaria hasta la educación profesional.

La definición de visualización matemática ha sido propuesta por varios investigadores, los cuales aportan directamente a la construcción de los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática (Presmeg, 1986; Zimmermann y Cunningham, 1991; Guzmán, 1996; Duval, 1999; Arcavi, 2003; entre otros). Estos autores han investigado sobre la importancia de la visualización en la educación matemática y como esta puede favorecer el aprendizaje en el aula de matemática.

Dentro de la presente investigación se asume la postura de Arcavi (2003), el cual define la visualización como: *“... la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente*

⁴¹ Falk, M. (2001). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones*. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

*desconocidas y avanzar en la comprensión*⁴². Según el autor, el proceso de visualización constituye un recurso para la comprensión de los conceptos matemáticos y para comunicar ideas matemáticas especialmente relacionadas con una estructura mental creada.

Sin embargo, Arcavi centra parte de su mirada en Hershkowitz (1989) que define: *"La visualización generalmente se refiere a la capacidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual"*⁴³. Lo anterior es visto como un componente principal del aprendizaje de conceptos geométricos desde su relación mental inmediata, de allí Arcavi se sustenta en Fischbein (1987), el cual indica que: *"La visualización es un factor esencial para crear el sentimiento de evidencia propia e inmediatez"*⁴⁴, siendo estos últimos los ejes principales para la postura tomada por Arcavi.

Por otra parte, las representaciones de las figuras son las que permiten la conducta de abducción como lo indica Duval (1999). No obstante, se pone en evidencia que hacer de las figuras geométricas herramientas heurísticas potentes para la comprensión y la resolución de problemas geométricos, está lejos de ser obvio y espontáneo (Duval, 1999; Padilla, 1992). Por el contrario, es necesario aprender a discriminar entre diferentes formas, con el fin de ver para reconocer las que son pertinentes y potentes para la resolución de la actividad matemática planteada desde la resolución de problemas.

Para ello, es importante no solo detectar la herramienta sino aprovechar y utilizar, según sea el caso. Un aspecto importante es generar la presencia de espacios que permiten relacionar las figura, sub-figuras o sub-configuraciones que aporten significativamente a la resolución del problema planteado.

⁴² Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, p. 217.

⁴³ Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, p.25.

⁴⁴ Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, p.25.

Dentro de la focalización del plano bidimensional como herramienta de visualización, Marmolejo y González (2011) indican que: *“No basta con la discriminación de operaciones que han de realizarse sobre una figura y las transformaciones que se generan en ella, para describir la visualización asociada a las figuras bidimensionales que subyace al desarrollo y comprensión de tareas de áreas de regiones poligonales. Es necesario considerar, además, los cambios en la manera de ver en la figura que ha de medirse, centrados en unidades visuales 2D...”*⁴⁵.

Se busca centrar la atención no solo en las características globales de las figuras trabajadas, sino hacerlo en sus partes y de forma simultánea con las figuras presentadas en el momento de la resolución de problemas estipulados para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Como se ha visto, la visualización matemática se sustenta en representaciones e imágenes visuales para la construcción mental de algunas relaciones y conceptos. Según Guzmán (1996) en la escuela regular la imagen visual se caracteriza principalmente por:

- Generar una relación para construir conceptos matemáticos y principalmente geométricos.
- Motivar en la creación y solución de problemas de interés con objetos de la teoría matemática.
- Generar relaciones de conceptos y procedimientos de manera indirecta, con el fin de construir estrategias viables para la resolución de los problemas matemáticos.
- Ser un canal fiable de transmisión de las ideas geométricas como herramienta de solución.

Por último, es de destacar la construcción de imágenes mentales como apoyo a la visualización matemática. Según Presmeg (1986), se pueden identificar cinco tipos de imágenes mentales principalmente:

⁴⁵ Marmolejo, G. y González, M. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto. *Conferencia presentada en Asocolme 12*. Armenia, Colombia, p. 14.

- *“Imágenes concretas pictóricas. Son imágenes figurativas de objetos físicos.*
- *Imágenes de fórmulas. Son la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería.*
- *Imágenes de patrones. Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas o representaciones gráficas.*
- *Imágenes cinéticas. Son imágenes parte físicas y parte mentales.*
- *Imágenes dinámicas. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan”⁴⁶.*

Adicionalmente, Presmeg (1997) concibe la visualización como *“el proceso implicado en la construcción y transformación de imágenes mentales”⁴⁷*, buscando la relación del concepto y la interiorización del mismo por parte de los estudiantes desde los primeros años de educación.

El trabajo continuo desde la visualización en geometría, fortalece los procesos mentales de los estudiantes desde su reconocimiento inmediato al igual que el uso de sus conocimientos previos. El buen uso de la visualización matemática conduce a los estudiantes a identificar y construir; conjeturas, procesos, conceptos y actitudes para los procesos de enseñanza aprendizaje.

2.3. Fundamentos del proceso de representación geométrica de las transformaciones en el plano

Partiendo del concepto que: una figura geométrica en el plano sufre una transformación cuando cambia de posición, sin analizar ni su tamaño ni su forma, es decir, en este aspecto son invariantes. De allí que

⁴⁶ Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical gittedness. *Educational studies in Mathematics*, pp. 297-311.

⁴⁷ Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English, *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning*, p. 299.

las transformaciones en el plano se conocen también como movimientos de superficie donde puede cambiar la posición de la figura geométrica.

Autores como Godino & Ruiz (2002) definen las transformaciones geométricas y los tipos de transformaciones de simetría y semejanza como: *“Una transformación del plano se dice que es un movimiento rígido si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación, esto es, $PQ = P'Q'$, para todo par de puntos P y Q ”*⁴⁸. Los autores enmarcan sus esfuerzos en combinar los movimientos rígidos en el plano como: traslación, rotación y simetría. De lo cual se concluye que: la nueva figura es isométrica a la inicial debido a que conserva sus propiedades, aunque se tenga en una posición distinta.

Sin duda alguna, son distintas las situaciones en las cuales se pueden evidenciar y aplicar las transformaciones en el plano desde lo visual; es claro que la visualización no garantiza la validación de las propiedades geométricas de las figuras, pero si permite razonar lógicamente acerca de las imágenes analizadas en cada caso de manera particular como se debe desarrollar el pensamiento geométrico en los primeros años de la educación formal.

Dentro de la secuencia de actividades aplicadas a estudiantes de grado quinto para el fortalecimiento del componente geométrico, se encuentran actividades relacionadas con traslaciones, rotaciones y simetrías, perteneciendo estas a las transformaciones isométricas en el plano. Una transformación en el plano es una aplicación que hace corresponder a cada punto del plano, otro punto del mismo, desde esta perspectiva Enrich, Creus, & Carnicero (2013) indican que: *“Las transformaciones son operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura a partir de la primitivamente dada”*⁴⁹.

⁴⁸ Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. p. 530.

⁴⁹ Enrich, C. y Carnicero, L. (2013). *Transformaciones Geométricas*. Recuperado de: https://matematicaecc.files.wordpress.com/2013/04/010-00-apu-e_transformaciones1.pdf

Las transformaciones en el plano se pueden clasificar según las propiedades que conservan en isometrías o isomorfismos (ver Figura 2).

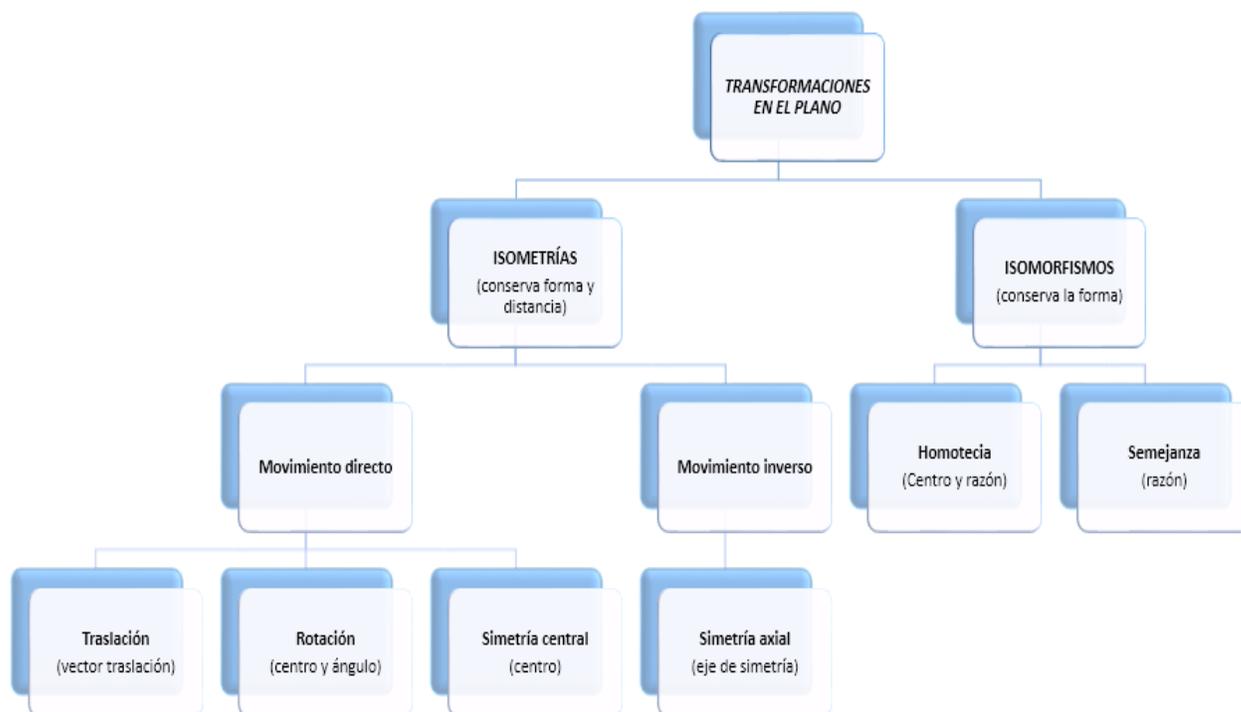


Figura 2. Transformaciones en el plano.

Para la presente investigación se enfoca en las transformaciones isométricas con el fin de dar inicio a una cultura geométrica desde la escuela primaria. Enrich, Creus, & Carnicero (2013) definen las isometrías como un movimiento que: *“Sólo cambia la posición de las figuras conservando su forma y su tamaño, es decir sus relaciones métricas, de ahí su nombre”*⁵⁰. Lo cual determina los autores como un movimiento directo de la figura geométrica en el plano.

Desde un contexto geométrico se presentan las definiciones de cada transformación isométrica trabajada en la presente investigación en base a Enrich, Creus, & Carnicero (2013):

⁵⁰ Enrich, C. y Carnicero, L. (2013). Transformaciones Geométricas. Recuperado de: https://matematicaecc.files.wordpress.com/2013/04/010-00-apu-e_transformaciones1.pdf

“Traslación: dado un vector u , se llama traslación según u de un punto A del plano al punto A' , al movimiento que resulta de aplicar en el punto A un vector idéntico a u , cuyo extremo es A' .

Rotación: la rotación es un movimiento por el cual un punto del plano y su homólogo equidistan de un punto llamado centro de la rotación y determinan con él un ángulo fijo que es la amplitud de la rotación. Puede tener dos sentidos de giro, horario o antihorario.

Reflexión: Dos puntos A y A' son simétricos con respecto a una recta, llamada eje de, si se verifica que ambos pertenecen a la misma recta perpendicular al eje, están en distintos semiplanos con respecto a él y equidistan del mismo”⁵¹.

Las definiciones presentadas destacan las definiciones presentadas desde las transformaciones isométricas, es decir, desde la invarianza de las propiedades de las mismas.

La presente investigación centra sus estudios en el papel de las transformaciones geométricas isométricas principalmente. Dentro de la investigación se busca estudiar las figuras geométricas planas y sus propiedades desde los distintos movimientos en el plano, es decir, construir contenidos geométricos desde las transformaciones por medio de la visualización, uso de las TIC, uso del material manipulativo y la resolución de problemas en el último grado de la educación primaria.

2.4. Fundamentos sobre los recursos didácticos tradicionales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en grado quinto de la escuela primaria

Dentro del desarrollo del pensamiento geométrico se destaca los materiales y recursos utilizados. Cabe destacar, principalmente, el material manipulativo donde los estudiantes trabajan los contenidos matemáticos en situaciones significativas y de manera activa.

⁵¹ Enrich, C. y Carnicero, L. (2013). Transformaciones Geométricas. Recuperado de: https://matematicaecc.files.wordpress.com/2013/04/010-00-apu-e_transformaciones1.pdf

Varios autores sustentan distintas definiciones entre las que se tiene a Alsina, Burgués y Fortuny (1988), los cuales consideran sólo la noción de material: “*son todos los objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos matemáticos*”⁵², estos autores la importancia de ver el material desde distintas perspectivas enfocadas a la construcción del pensamiento matemático.

Además, Hernán y Carrillo (1988) sustentan la consideración de las nociones de materiales y recursos, aunque admiten que los recursos contemplan los materiales, es decir, los materiales hacen parte de un conjunto puntual de los recursos. Desde el punto de vista de Coriat (1997) hace una diferencia significativa entre recursos y materiales. Para el investigador, los recursos son todos los materiales que no son elaborados para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje, por otra parte, el material “didáctico” nace con un fin específico dentro del campo educativo y es el de enseñar, aunque en ocasiones se dan usos distintos.

Según Cascallana (1988) los materiales se clasifican en dos grandes grupos, los estructurados que hacen referencia directamente a la enseñanza de matemática y requieren de un mayor análisis y abstracción para su implementación. Por otra parte, está el material no estructurado, el cual es manipulado por el estudiante sin fines matemáticos como pueden ser los “juguetes”. Cabe destacar que el autor refiere la palabra manipulativo, a una primera fase para la adquisición de conceptos matemáticos en donde el estudiante tiene la posibilidad de ver resultados en sus acciones realizadas.

En base a las definiciones y perspectivas presentadas anteriormente, para la presente investigación se define material manipulativo como: aquellos objetos físicos con un fin estructurado y didáctico, que permita al estudiante una relación directa y la modificación del mismo cuando se requiera.

⁵² Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Editorial Síntesis S.A. p.75.

Según Rodríguez, Parcerisa y Área (2010) el material manipulativo facilita los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría puesto que los estudiantes experimentan situaciones de manera tangible y ello, les permite conocer, descubrir, relacionar e interiorizar conceptos, relaciones y construcciones para el desarrollo de habilidades geométricas.

Por otra parte, los autores afirman que: *“En la tarea de aprender nadie le puede sustituir: tiene que implicarse y esforzarse y tiene que aprender a autorregular su propio proceso de aprendizaje (aprender a aprender). La función del docente es ayudarle en este proceso de aprendizaje, acompañándole y tomando las decisiones necesarias y poniendo todos los recursos posibles, entre ellos los materiales didácticos”*⁵³. En este sentido, el autor busca desarrollar la autonomía de los estudiantes en el desarrollo de sus habilidades a través de los sentidos como eje central del aprendizaje.

Tomando la postura dada por Castro (2007), el cual señala que: *“en la enseñanza de la geometría los materiales didácticos proporcionan al alumno la oportunidad de manipular, experimentar e investigar, ayudándole a desarrollar gradualmente la visualización espacial”*⁵⁴. El autor, apoyado en Alsina, Burgués y Fortuny, concluye de manera radical que: el material didáctico en geometría es base para la asimilación de conceptos, relaciones y métodos, ya que se proporciona un aprendizaje activo de acuerdo con los ritmos intelectuales del estudiante.

⁵³ Rodríguez, J., Parcerisa, A. y Área, M. (2010). Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios. *Ed: Grao*, p.16.

⁵⁴ Castro, E. (2007). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Síntesis.

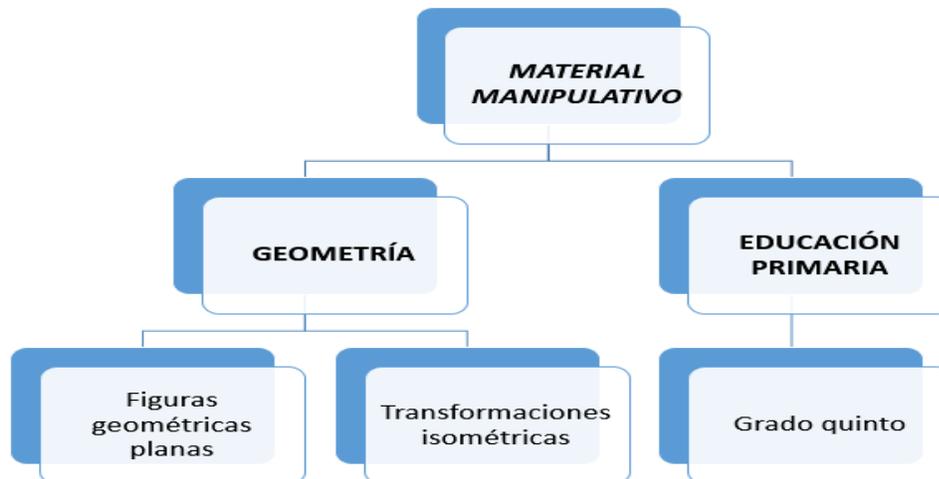


Figura 3. Transformaciones en el plano.

Basado en lo expuesto anteriormente, la presente investigación se centra en el desarrollo de las habilidades geométricas desde (ver Figura 3): la geometría plana, tomado el uso de del material manipulativo en transformaciones isométricas en el plano. Por otra parte, se determina el contexto para el nivel educativo, en este caso se enmarca el trabajo del material manipulativo en el último año de la educación primaria.

2.5. Referentes sobre el uso de la tecnología en el aula

En todos los niveles educativos, la formación continua debe enfrentar el uso de las tecnologías como herramientas pedagógicas en un marco de formación actual, con el fin de desarrollar estrategias que le sirvan para enfrentar y solucionar las necesidades de la sociedad presente y futura en los tiempos actuales en que la tecnología paso de ser una opción a una necesidad.

El uso de las TIC permite jugar diferentes papeles en la práctica de la enseñanza aprendizaje, especialmente en el desarrollo de habilidades como: cálculo, análisis e interpretación para generar soluciones de situaciones problema dentro de un contexto determinado, además de generar y presentar

herramientas más impactantes para los estudiantes lo que conduce a alcanzar un mayor grado de comprensión para la construcción de su propio conocimiento.

La presente investigación toma como eje central a la postura de Gutiérrez (2005), el cual señala que: “... poseen la característica de mantener las propiedades matemáticas de una figura cuando, con la ayuda del ratón, se desplazan sobre la pantalla los objetos (puntos, rectas, etcétera). Así, es posible recorrer de manera instantánea una infinitud de posiciones y configuraciones diferentes de una figura geométrica, logrando una visión dinámica de esa figura mucho más rica, interesante y atractiva que la obtenida en el contexto tradicional de la pizarra o el papel”⁵⁵, en este punto el autor hace referencia al proceso dinámico que presenta el uso de las TIC en el campo educativo y principalmente geométrico.

Por otra parte, el autor evidencia algunas fortalezas en el uso de las TIC a nivel general:

- Permite que los estudiantes estructuren conceptos mentales más generales y abstractos de las figuras geométricas y su relación entre ellos desde sus propiedades.
- Favorece la relación de las figuras planas a una representación mental y física, pasando por la realidad, los modelos y los objetos geométricos formales.
- Fortalece los procesos heurísticos de solución desde los procesos desarrollados de la geometría dinámica.
- Permita la relación de las propiedades básicas de las figuras planas desde una perspectiva invariante.
- Potencia la visualización geométrica, no solo de las figuras y sus propiedades sino la invarianza al dinamizar los objetos.

⁵⁵ Gutiérrez, A. (2005). *Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos*. Módulo optativo del Plan de Estudios de Maestro. Curso 2005-06. Universidad de Valencia. Departamento de Matemática. p. 2.

- Contribuye al desarrollo de la imaginación y representación geométrica de los estudiantes. Se pueden proyectar algunas transformaciones isométricas, en un primer momento, de las figuras geométricas identificadas.

Basados en lo expuesto anteriormente, otro de los grandes cambios en la educación es la búsqueda y adopción de nuevas formas de enseñar acordes con la generación de estudiantes presentes en las aulas de clase, que respondan y satisfagan las nuevas formas de enseñar dentro y fuera del aula escolar regular.

Todos estos elementos que se han desarrollado como mecanismos de cambio, llevan a pensar en las nuevas formas de enseñar, como algunos autores lo han señalado desde hace varias décadas atrás, en la necesidad de transformación los sistemas educativos, las políticas educativas flexible, innovadoras y abiertas a las posibilidades y necesidades de cambio como lo exige nuestro medio educativo actual.

Los procesos de enseñanza aprendizaje deben desarrollar habilidades para el uso de las TIC dentro de la práctica pedagógica en el aula. Es decir, las TIC muestran un gran potencial para entrar en el campo educativo de una manera actualizada y contextualizada dentro de una nueva realidad. En este proceso de enseñanza es importante la participación y trabajo conjunto como lo indica Lugo (2008): *“La introducción de las TIC en las aulas pone en evidencia la necesidad de una nueva definición de roles, especialmente, para los alumnos y docentes. Los primeros, gracias a estas nuevas herramientas, pueden adquirir mayor autonomía y responsabilidad en el proceso de aprendizaje, lo que obliga al docente a salir de su rol clásico como única fuente de conocimiento. Esto genera incertidumbres, tensiones y temores; realidad que obliga a una readecuación creativa de la institución escolar”*⁵⁶.

⁵⁶ Lugo, M. (2008). Las políticas tic en la educación de américa latina. tendencias y experiencias. *Revista fuentes*. p. 54.

La enseñanza ya no es la misma cuando se encuentra soportada sobre las TIC, la socialización del proceso de formación académica se presenta de una forma pedagógica y comunicativa. Ahora bien, las TIC juegan un papel fundamental dentro de la enseñanza aprendizaje de la geometría, ya que permite acercar a los docentes a una realidad más exigente propuesta por los estudiantes y a la vez más comprometida en la formación de competencias que estén más acordes con las necesidades de los estudiantes y del contexto actual.

Mirar tales exigencias, también permite ver que muchos docentes que sin duda aún están en el ejercicio de “impartir” conocimientos, se encuentran ajenos a estas nuevas herramientas tecnológicas que facilitan y fortalecen los procesos de enseñanza aprendizaje. Los docentes deben vivir en constante capacitación como se asegura Tatalchá (2013), indica que el docente no debe caer en el error de llevar al fracaso a la educación al quitarle la vista a la investigación e innovación, principalmente a nivel tecnológico.

La tecnología ha ido evolucionando y se ha ido incorporando a la sociedad paso a paso con más fuerza y principalmente en el ámbito educativo. Aunque en los primeros años de formación académica se ha ido incorporando muy lentamente por diversos factores, como pueden ser: el dominio tecnológico por parte de los profesores o por falta de recursos económicos en las instituciones educativas. En este contexto Pizarro (2009) afirma que: *“En uno de los puntos que más se ha notado su implantación ha sido en el área de las matemáticas, primero fue la calculadora y con el paso de la evolución tecnológica, se han ido implantando los ordenadores y el Internet para esta área, para poder ver con mayor precisión figuras geométricas, para tener más ejercicios, ampliar conocimientos sobre ciertas materias...”*⁵⁷.

Muchos de los programas van dirigidos a la formación geométrica, entre los cuales se tiene:

⁵⁷ Pizarro, R. (2009). *Las TIC en la enseñanza de las matemáticas. Aplicación al caso de los Métodos Numéricos*. Universidad Nacional de la Plata. Recuperado de http://postgrado.info.unlp.edu.ar/Carreras/Magisters/Tecnologia_Informatica_Aplicada_en_Educacion/Tesis/Pizarro.pdf. p. 53.

- GeoGebra: es un software interactivo que nos permite trabajar y construir formas geométricas, medir ángulos, ver longitudes, entre otros. Es una herramienta bastante generosa con los procesos de construcción conceptual de los estudiantes. Aunque esta herramienta es proyectada para niveles básicos de secundaria, los alumnos de primaria podrían utilizarla sin ningún problema. Cabe resaltar que se presenta un software transversal a los primeros años de formación geométrica como lo es el Geogebra prim.
- Aplicación de geoplano: es un tablero geométrico digital, en el que se señalan con puntos las intersecciones de la cuadrícula según su tamaño, y allí se seleccionan puntos para unir con ligas y formar figuras geométricas planas. Esta aplicación se puede desarrollar en el computador, tablet o celulares.

Los usos de estas herramientas, permiten aportar positivamente los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría en la educación primaria, desde los primeros años de educación formal, permitiendo la incorporación de las tecnologías, en especial de las TIC al proceso de enseñanza aprendizaje, a través de software diseñados para aprender geometría (programas o aplicaciones) de manera dinámica y didáctica.

Conclusiones del capítulo 2

Este capítulo contiene un análisis de distintos referentes teóricos que sustentan la presente investigación. Dentro del análisis realizado se asume en un primer momento los referentes con respecto a la resolución de problemas y problemas retadores, en el cual se tiene a Pólya (1965) y Falk (2001), como una teoría transversal a la investigación y a las habilidades geométricas desarrolladas por los estudiantes.

La enseñanza de la geometría por medio de la resolución de problemas es una estrategia que permite fortalecer los conocimientos previos del estudiante y desarrollar nuevas habilidades en el pensamiento geométrico. Dicha estrategia permite relacionar a los estudiantes con las figuras planas y sus propiedades

por medio de las transformaciones geométricas (movimientos isométricos en el plano), además permite el fortalecimiento de conceptos, habilidades de análisis y razonamiento geométrico. Por otra parte, se generan grandes oportunidades de mejora como:

- Cambiar los paradigmas de los estudiantes con respecto a la matemática y principalmente a la geometría.
- Generar en el estudiante motivación, interés y seguridad en los a la hora de generar sus propias conjeturas o conceptos.

La visualización matemática tienen un papel facilitador en el pensamiento geométrico, se destaca la postura de Arcavi (2003) la cual, centra su postura en Hershkowitz (1989) como el desarrollo de las habilidades para representar, transformar, comunicar, documentar, crear y reflexionar sobre la información visual que pueden tener los estudiantes.

Se abre un espacio a los recursos didácticos y principalmente del material manipulativo, para apoyar el proceso de la resolución de problemas. La implementación de estos recursos didácticos tiene como objetivo motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de las figuras geométricas desde las distintas transformaciones. Tomando la postura de Rodríguez, Parcerisa y Área (2010); el cual considera las posiciones de Cascallana, (1988); Hernán y Carrillo, (1988); Burgués y Fortuny, (1988); Castro, (2007); entre otros, la manipulación de los materiales fortalece y facilita el proceso de enseñanza aprendizaje en geometría, dicha experiencia permite a los estudiantes reconocer y experimentar de manera tangible.

Desde la postura de Gutiérrez (2005) se trabaja con la implementación de las TIC dentro de la resolución de problemas. Dicha implementación permite desarrollar en los estudiantes conceptos mentales más generales y abstractos de las figuras planas y sus propiedades de manera dinámica principalmente.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En la Institución Educativa Departamental Bicentenario de Funza se presentan dificultades en la enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades. Estas dificultades limitan un desarrollo vigoroso del pensamiento geométrico por parte de los estudiantes. Con el fin de alcanzar los objetivos propuestos en la presente investigación se presenta el siguiente diseño de la metodológico:

3.1. Tipo, enfoque y diseño de investigación

Dentro de la presente investigación se asume un paradigma cualitativo, con un enfoque netamente cualitativo. La presente investigación enfoca sus esfuerzos en las acciones y el motivo de las mismas, buscando siempre explicar lo captado en el contexto del estudiante. Desde la perspectiva de Báez y Pérez (2009) es importante implementar el enfoque de investigación cualitativa porque: “...se desea conocer las razones por la que los individuos (aisladamente o en grupo) actúan en la forma en que lo hacen, tanto en lo cotidiano, como cuando un suceso irrumpe de forma tal que puede dar lugar a cambios en la percepción que tienen las cosas”⁵⁸.

Por otra parte, el enfoque de investigación cualitativo “... se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados”⁵⁹. Estas ideas expuestas anteriormente, se presentan en los procesos desarrollados en la presente investigación, con el fin de analizar la realidad de los estudiantes desde su contexto natural y centrando su atención en el desarrollo del pensamiento geométrico, basados en las figuras planas desde el papel de las transformaciones geométricas.

⁵⁸ Báez, J. y Pérez, T. (2009). La Investigación cualitativa. Madrid. *Segunda edición, 2009, ESIC*. p. 24.

⁵⁹ Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 358.

En la investigación se asume un diseño de investigación acción. Este diseño “... constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría”⁶⁰.

La implementación de un diseño de investigación acción propicia contextos donde se permite explorar, buscar, identificar y conjeturar en el campo de la geometría. Este diseño permite contribuir al favorecimiento del proceso de enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades a través de las transformaciones en el plano, en los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Departamental Bicentenario de Funza, para generar un robusto conocimiento en el campo del pensamiento geométrico.

3.2. Alcance del estudio

La presente investigación pretende principalmente brindar un aporte práctico que contribuya a la enseñanza aprendizaje de la geometría plana a través de las transformaciones geométricas en la Institución Educativa Departamental Bicentenario. Este aporte práctico se basa principalmente en un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana en estudiantes de grado quinto. Este sistema busca que los estudiantes sean capaces de resolver problemas en contexto por medio de las TIC y de material manipulativo.

3.3. Población y muestra (Unidad de análisis)

La población tomada para la presente investigación se enmarca en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Departamental Bicentenario del municipio de Funza. La muestra de la investigación está conformada por 18 estudiantes de grado quinientos uno pertenecientes a la sede San Andrés.

⁶⁰ Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

3.4. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados

En la presente investigación se combinan técnicas y métodos de investigación científica dentro de un sustento teórico y empírico. En un primer momento se tienen los métodos teóricos tales como:

Análisis de fuentes: para construir el estado del arte y el marco teórico que sustentan la investigación.

Histórico-lógico: valorar el desarrollo y evolución de los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría plana en el último año de la formación académica en la escuela primaria.

Análisis-síntesis: para determinar las tendencias actuales en la enseñanza aprendizaje de las de la geometría plana a través de las transformaciones geométricas, para elaborar el estado del arte. Por último, se destaca el papel en el desarrollo de los sustentos teóricos y el análisis de resultados presentados en la implementación de las actividades diseñadas con el fin de favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana a través de las transformaciones. Además, permite generar un análisis más profundo de los hechos y con ello generar los ajustes, recomendaciones y conclusiones que permitan mayor solides de la presente investigación.

Por otra parte, es importante destacar el papel desarrollado en el procesamiento de los resultados de las entrevista y encuestas aplicadas a especialistas e investigadores, en la cual, se va presentando y afianzando la solides de la ruta investigativa en la presente investigación.

En un segundo momento se destacan los métodos empíricos, entre los cuales se emplean:

Observación participante: se permite la observación de clase con el fin de recopilar información del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana en los últimos grados de la escuela primaria en la Institución Educativa Departamental Bicentenario.

Encuesta: se realiza a los docentes que enseñan las matemáticas, principalmente la asignatura de geometría en el último año de la escuela primaria. También, se aplica una encuesta de satisfacción de

las actividades aplicadas en el desarrollo de la investigación, a los estudiantes focalizados para tal fin.

Entrevista: se realiza a expertos que han investigado por varios años sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria y principalmente en los últimos años de dicho ciclo escolar.

3.5. Fases de la investigación

La presente investigación se consolida en cuatro fases principales:

Fase uno: diagnóstico del tema. En esta fase se desarrollan las acciones:

1. Diseño de instrumentos: observación participante, encuesta a docentes y entrevista a especialistas.
2. Aplicación de instrumentos.
3. Recopilación de datos suministrados por los instrumentos aplicados.
4. Planteamiento inicial del problema de investigación y el objetivo general.

Fase dos: revisión de la literatura y construcción del marco teórico. Primero se hace una búsqueda detallada del estado del arte con el fin de confirmar, ratificar y fortalecer el problema de investigación, el objetivo general y las tendencias actuales que se tienen para la enseñanza aprendizaje de la geometría plana a través de las transformaciones geométricas en los últimos años de la educación primaria.

En esta fase se construye el marco teórico, basado en los siguientes referentes como base teórica de la presente investigación:

1. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas retadores.
2. Fundamentos de la visualización Matemática.
3. Referentes sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométrica en grado quinto de la escuela primaria.
4. Fundamentos sobre el trabajo con materiales manipulativos en el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométrica en grado quinto de la escuela primaria.
5. Referentes sobre el uso de la tecnología en el aula.

Es de destacar que en esta fase se ajusta el problema de investigación y el objetivo general de la tesis.

Fase tres: diseño. En esta fase de la presente investigación se diseña, elabora y se hace un análisis retrospectivo de las actividades propuestas en el capítulo número cuatro.

Fase cuatro: implementación de actividades y análisis de resultados. Esta fase considera:

1. Aplicación de las actividades propuestas.
2. Recolección de información presentada en el desarrollo de las actividades.
3. Aplicación de la encuesta de satisfacción a estudiantes.
4. Construcción y realimentación del documento final de la investigación.
5. Socialización en congresos y publicación de los resultados obtenidos en la presente investigación.

Conclusiones del capítulo 3

La presente investigación se enmarca en un paradigma cualitativo, con un enfoque cualitativo y un diseño de investigación acción. Dentro de la investigación se utilizan métodos histórico lógicos y análisis síntesis a nivel teórico, por otra parte, se implementan la observación participante, la entrevista y la encuesta como métodos del nivel empírico en la investigación.

La metodología asumida en la investigación, permite un análisis profundo de los resultados obtenidos de las actividades relacionadas con el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana y sus propiedades a través de las transformaciones geométrica. Además, permite la elaboración de unas conclusiones sólidas, unas recomendaciones alcanzables y el alcance total de los objetivos propuestos en la investigación.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES

En este capítulo se presenta un sistema de actividades para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades a través de las transformaciones geométricas en aras de propiciar un robusto conocimiento geométrico. Dichas actividades se enmarcan en la visualización, manejo de material manipulativo, uso de las TIC y la resolución de problemas.

4.1. Fundamentos del sistema de actividades desde el marco teórico

La presente investigación se desarrolla en la I.E.D. Bicentenario del municipio de Funza. Dando cumplimiento a los protocolos de bioseguridad, se realiza un trabajo principalmente individual y en algunos casos puntuales grupos de trabajo de dos y máximo tres personas conservando los respectivos protocolos de bioseguridad presentados por el establecimiento educativo.

Los problemas propuestos en las actividades se sustentan en la resolución de problemas, la visualización matemática, las transformaciones geométricas, los recursos didácticos y uso de las TIC. La interacción y relación entre estos componentes favorece el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométricas (ver Figura 4). Este proceso propicia un conocimiento robusto del contenido geométrico, lo cual le permite a los estudiantes resolver problemas intramatemático y extramatemáticos en el contexto.

La caracterización del pensamiento geométrico de los estudiantes se realiza por medio del análisis de las estrategias de solución, sus intervenciones de manera grupal y principalmente de forma individual, en la cual se evidencia la construcción de un conocimiento robusto y significativo sobre las figuras planas y sus propiedades desde las transformaciones geométricas isométricas.



Figura 4. Base del conocimiento geométrico.

Las actividades buscan involucrar a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento geométrico desde que se presenta el primer problema. Con el fin de observar los puntos de vista y comparación de las soluciones presentadas, los estudiantes individualmente comparten sus respuestas, métodos, procedimientos y conjeturas con los compañeros de manera general, generando realimentaciones de los procesos desarrollados.

4.2. Propuesta de actividades

A continuación, se presentan las actividades planteadas para el aporte práctico en la presente investigación. Cada una de las actividades se compone de: un título, un objetivo, una metodología de aplicación, materiales para la actividad y los problemas planteados que se enmarcan en la visualización, manejo de material manipulativo y uso de las TIC.

4.2.1. Actividad # 1: Un movimiento de traslación en el plano

Objetivo: Identificar las propiedades básicas en algunas figuras geométricas planas y el papel de la traslación desde la visualización y el material manipulativo.

Metodología de la actividad: Se relaciona la guía de trabajo a cada grupo formado de la actividad # 1. Desde los debidos protocolos de bioseguridad, se estructuran grupos máximo de tres estudiantes para el desarrollo de las actividades. Por otra parte, el docente tiene un espacio por sesión de 120 minutos para la implementación de la actividad propuesta.

Los problemas planteados para la actividad #1, principalmente, busca un trabajo individual con el fin de identificar las habilidades geométricas que posee cada uno de los estudiantes desde la traslación de figuras. El docente, se encuentra en constante observación para solucionar de forma inmediata las preguntas o inquietudes que puede presentar el estudiante en el desarrollo de la actividad planteada.

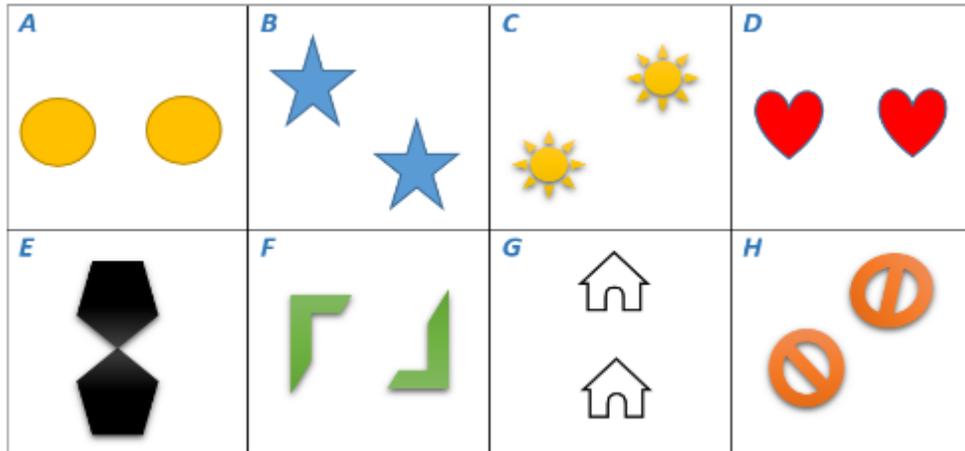
Con los problemas orientadores, se busca que los estudiantes compartan sus experiencias en el desarrollo de la actividad. Dentro de estas experiencias el docente identifica los contenidos y las habilidades que el estudiante posee en los contenidos geométricos desde la visualización y manipulación de material concreto.

La evaluación se lleva a cabo por el docente a través de la observación continua de la actividad, la socialización de experiencias y la autoevaluación realizada por el estudiante.

Materiales para la actividad: impresión de anexo 1, tijeras, regla, lápiz, esfero, colores y dispositivo electrónico con internet.

Desarrollo de la actividad:

1. Observe las siguientes imágenes e imagine que transformación geométrica se presenta en cada caso:



Después de observar detenidamente, responder los siguientes problemas:

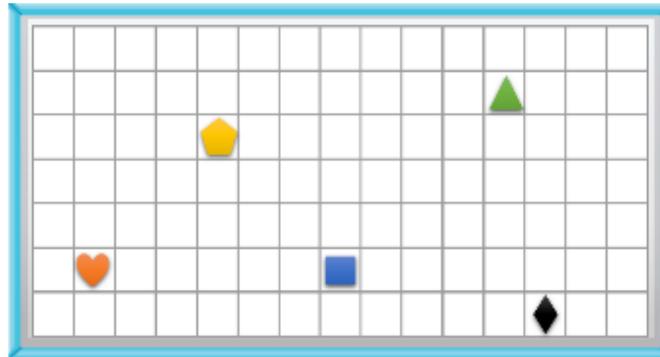
- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma y tamaño de cada una de las figuras al sufrir las transformaciones dadas en cada caso?

- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada una de las casillas?

- ¿Cuáles de las casillas no indican una traslación? Justifica tu respuesta en cada caso.

- Basados en las imágenes ¿Qué características tiene el movimiento de traslación con respecto a cada una de las figuras presentadas en las imágenes?

2. Para esta actividad, debe recortar las imágenes (anexo 1). Ubica cada imagen sobre la cuadrícula de acuerdo a las traslaciones indicadas por el docente en cada caso.
- a. Traslada las figuras ubicándolas en la posición final basados en las indicaciones dadas para cada caso.



 5 unidades arriba y 5 a la derecha.

 3 unidades abajo y 5 a la izquierda.

 2 unidades abajo y 5 a la derecha.

 1 unidades abajo y 7 a la izquierda.

 3 unidades arriba y 6 a la izquierda.

- b. Después de las traslaciones indicadas sobre la cuadrícula, responder los siguientes problemas:
- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada una de las transformaciones?

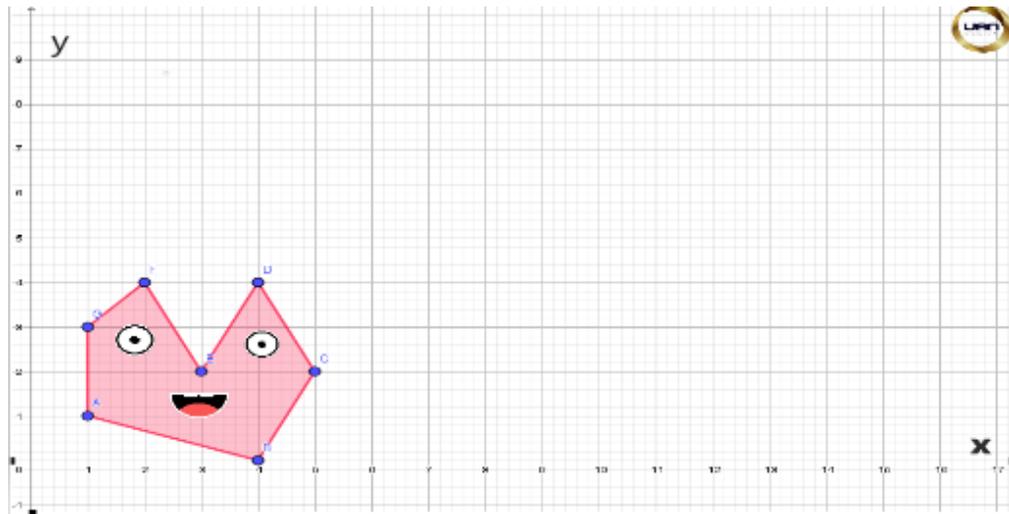
- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, tamaño y propiedades de cada una de las figuras al sufrir la traslación dada en cada caso?

- ¿Cuál de las figuras geométricas regulares tubo una mayor traslación? Justifica tu respuesta.

3. Al realizar una traslación en el plano se debe tener en cuenta el vector indicado (x,y) para su transformación geométrica. Completar la siguiente tabla de traslación aplicando el vector $(2,4)$ a la figura geométrica dada, aplica la traslación y construye la figura generada de un color distinto en el plano cartesiano.

$(x, y) \xrightarrow{t} (x + 2, y + 4)$	
A = (1, 1)	A' = (,)
B = (4, 0)	B' = (,)
C = (5, 2)	C' = (,)
D = (4, 4)	D' = (,)
E = (3, 2)	E' = (,)
F = (2, 4)	F' = (,)
G = (1, 3)	G' = (,)

Plano cartesiano



Con el fin de reforzar los contenidos trabajados, responder los siguientes problemas:

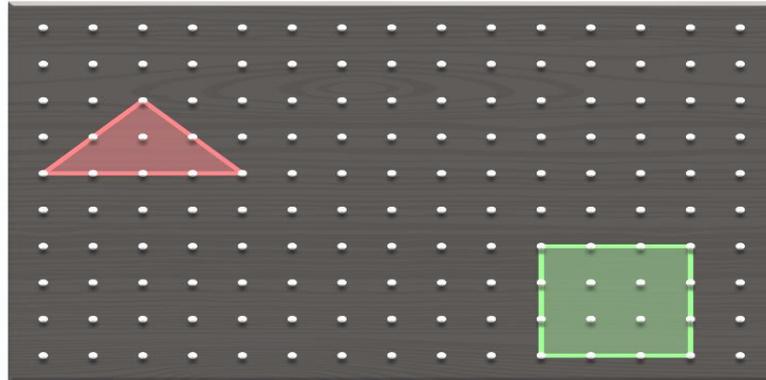
- ¿Qué significa para usted aplicar el vector traslación y como lo aplicó a la figura geométrica dada?

- ¿Cuáles fueron los pasos para aplicar la traslación? Enumera las respuestas.

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, tamaño y propiedades de la figura al aplicar la traslación? Indica algunas características de la figura dada.

4. Ingrese al Geoboard⁶¹, construya un triángulo y un cuadrado como se muestra en la siguiente imagen del geoplano. A cada figura realizarle una traslación e indicarlo con una liga de distinto color.

⁶¹ Link del geoboard: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>



Basados en el ejercicio realizado, responder los problemas planteados a continuación:

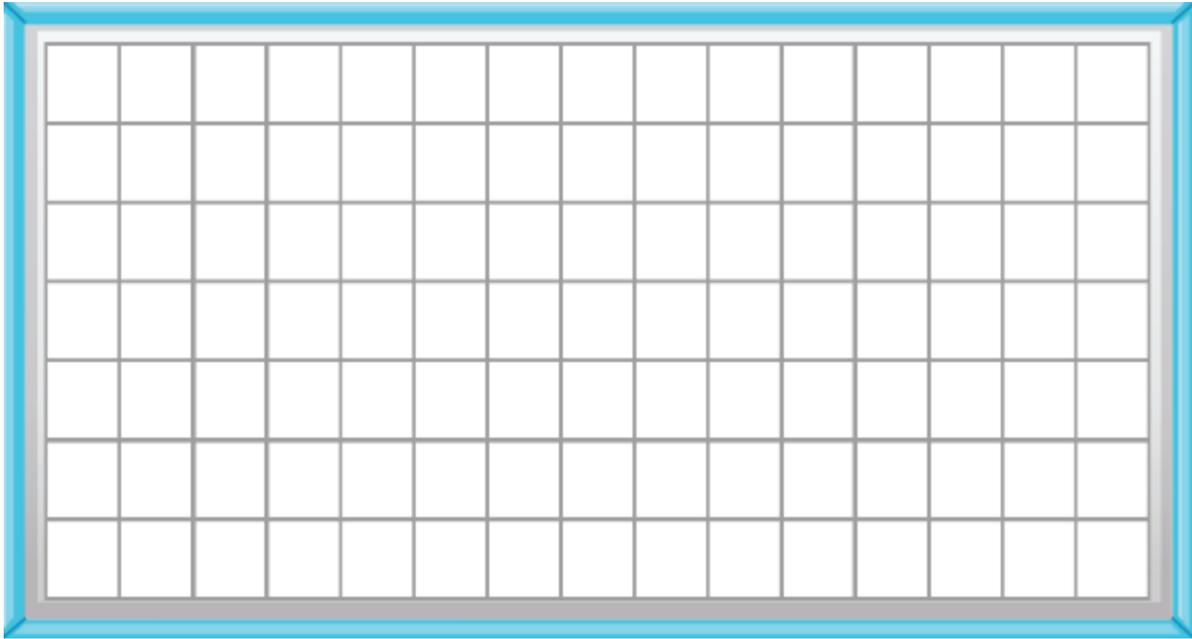
- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, longitud de los lados, número de vértices y medida de los ángulos de la figura al aplicar la traslación?

- ¿Por qué realizó esa traslación a cada figura geométrica? ¿Qué otra posibilidad de traslación se puede tener para el triángulo y el cuadrado dado?

- ¿Cuál de las figuras geométricas dadas le dio una mayor traslación? Justifica tu respuesta.

ANEXO

Anexo 1



4.2.2. Actividad # 2: Un movimiento llamado rotación

Objetivo: Identificar el papel de la rotación para el análisis de las propiedades básicas en algunas figuras geométricas planas.

Metodología de la actividad: manteniendo los debidos protocolos de bioseguridad, se estructuran grupos máximo de tres estudiantes para el desarrollo de las actividades # 2. Por otra parte, se cuenta con un espacio de 120 minutos para la implementación de la actividad propuesta de manera presencial.

La actividad # 2 busca un trabajo en el desarrollo de las habilidades geométricas de manera individual.

El docente se encuentra en constante observación y monitoreo para solucionar de forma inmediata las preguntas o inquietudes que puede presentar el estudiante en el desarrollo de la actividad planteada.

Con las preguntas orientadoras, se busca que los estudiantes reconozcan sus conocimientos previos, sus habilidades para el razonamiento geométrico y su capacidad para comunicar sus conjeturas.

La evaluación se lleva a cabo por el docente a través de la observación directa y continua de la actividad, la socialización de experiencias, sus argumentaciones y la autoevaluación realizada por el estudiante.

Materiales para la actividad: impresión de anexo 1, tijeras, regla, lápiz, esfero y dispositivo electrónico con internet.

ACTIVIDADES PROPUESTAS:

1. Los estudiantes se deben poner de pie mirando al tablero y realizar los giros que se propone a continuación:

- Un giro a la derecha.
- Dos giros a la izquierda.
- Medio giro a la derecha.
- Un cuarto de giro a la izquierda.
- Dos giros a la derecha.



En base al ejercicio anterior responder los siguientes problemas:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma y tamaño de cada uno de nosotros y nuestros compañeros después de hacer los giros (rotación)?

- Basados en el trabajo realizado ¿Qué características cree que tiene el movimiento de rotación si se aplica a una figura geométrica plana cualquiera?

-
-
- ¿Qué significa girar (rotar) a la izquierda o a la derecha y cómo cree que se relaciona con los ángulos?

Justifica tu respuesta.

2. Observa la imagen detenidamente y relaciona los giros (rotaciones) que se presentan en cada imagen, ten en cuenta las figuras geométricas relacionadas a la imagen.



- a. Completa la oración según lo visto en la imagen anterior.

Algunos objetos como las puertas y _____ giran al abrirlas o _____, estos objetos tienen formas geométricas tales como: _____ y _____.

Si abrimos o _____ la puertas y ventanas, ellas _____ alrededor de una parte _____ donde sus tamaños y formas no _____.

- b. Después de observar la imagen detenidamente, resolver los siguientes problemas:

- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada una de las imágenes? ¿Por qué lo asocia con esas figuras geométricas?

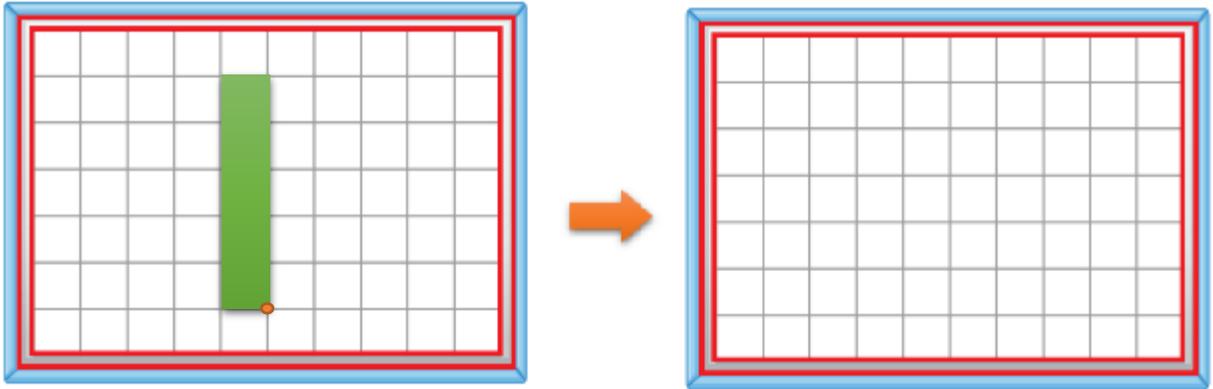
- Basados en las imágenes ¿Qué características tiene el movimiento de rotación con respecto a cada una de las figuras presentadas en las imágenes?

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma y tamaño de cada una de las figuras al sufrir la transformación de rotación dada en cada caso?

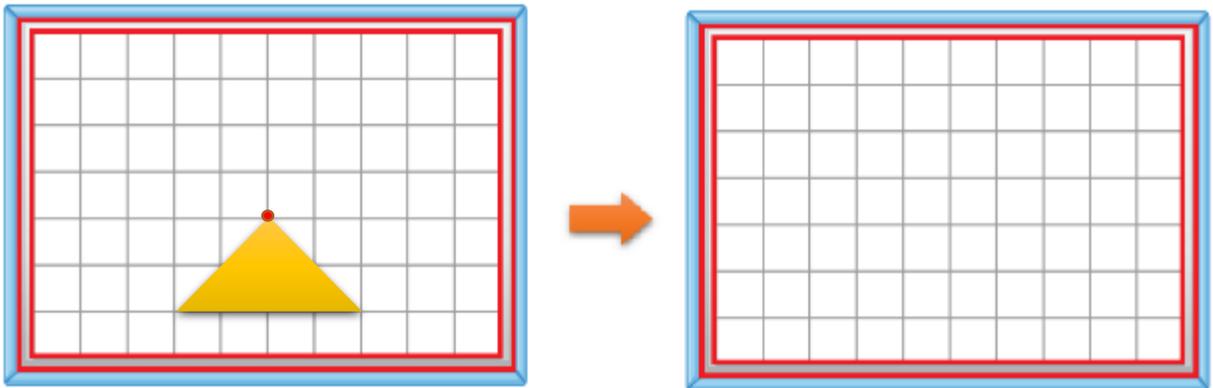
- Dar mínimo dos ejemplos de objetos que se pueden ver rotar y se asocian con una figura geométrica, indicar porque se asocia a esa figura geométrica en cada caso.

3. Recorta las figuras del anexo 1 para trabajar sobre la cuadrícula. Rota la figura como se indique en cada caso según su centro de rotación. Compara la respuesta con tus compañeros.

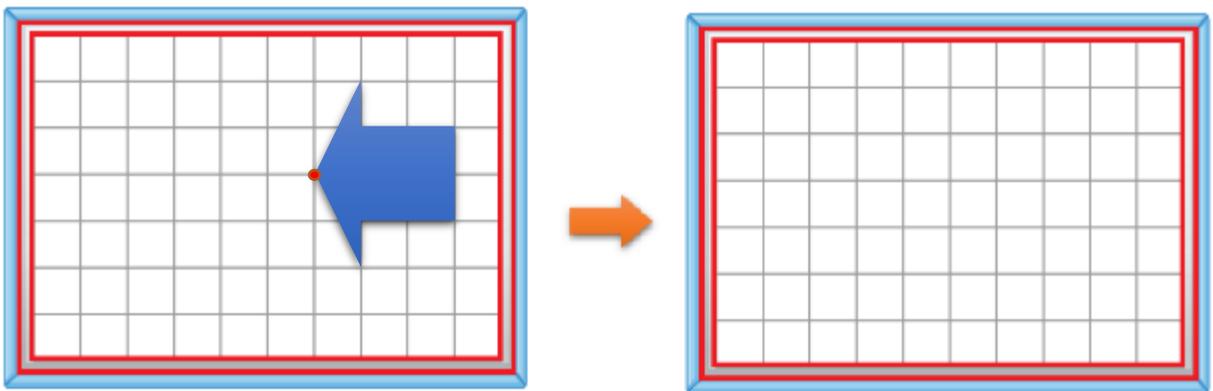
- a. Rota la figura a la derecha 90° sobre el eje de rotación, recuerda trabajar sobre el material dado en el anexo 1 y la plantilla de la cuadrícula.



b. Rota la figura a la izquierda 180° sobre el eje de rotación, recuerda trabajar sobre el material dado en el anexo 1 y la plantilla de la cuadrícula.



c. Rota la figura a la derecha 180° sobre el eje de rotación indicado, recuerda trabajar sobre el material dado en el anexo 1 y la plantilla de la cuadrícula.



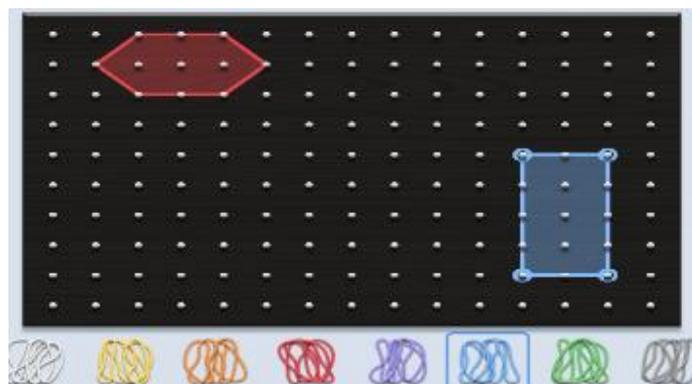
Basado en el trabajo anterior solucionar los siguientes problemas propuestos:

- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada una de las imágenes? ¿Qué caracteriza a cada una de esas figuras geométricas?

- Cuando se realiza la rotación sobre la figura geométrica, ¿Qué se puede observar en relación a su tamaño, forma y posición?

- ¿Qué papel juega el eje de rotación en la figura y qué relación tiene con los grados que se roto la figura? Justifica la respuesta.

4. Ingrese al Geoboard⁶², construya un hexágono y un rectángulo como se muestra en la siguiente imagen del geoplano. A cada figura realizarle una rotación e indicarlo con una liga de distinto color la posición final (recuerda elegir el centro de rotación).



⁶² Link del geoboard: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

En base al ejercicio realizado, responder los problemas planteados a continuación:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, longitud de los lados, número de vértices, medida de los ángulos y posición de la figura al aplicar la rotación?

- ¿Por qué realizó esa rotación a cada figura geométrica? ¿Qué otra posibilidad de rotación se puede tener para el rectángulo?

- ¿A cuál de las figuras geométricas dadas le dio una mayor rotación? Justifica tu respuesta e indica los grados rotados.

ANEXOS

Anexo 1



4.2.3. Actividad # 3: Un movimiento desde la simetría

Objetivo: Identificar la simetría como herramienta de análisis geométrico para el fortalecimiento de las propiedades básicas en algunas figuras geométricas planas.

Metodología de la actividad: manteniendo los debidos protocolos de bioseguridad, se estructuran grupos máximo de tres estudiantes para el desarrollo de las actividades # 3. Para la aplicación de la presente actividad se cuenta con sesiones de 120 minutos para la implementación de manera presencial. La actividad # 3 busca un trabajo en el desarrollo de las habilidades geométricas de manera individual y grupal. El docente se encuentra en constante observación y monitoreo para solucionar de forma inmediata las preguntas o inquietudes que puede presentar el estudiante en el desarrollo de la actividad planteada a continuación.

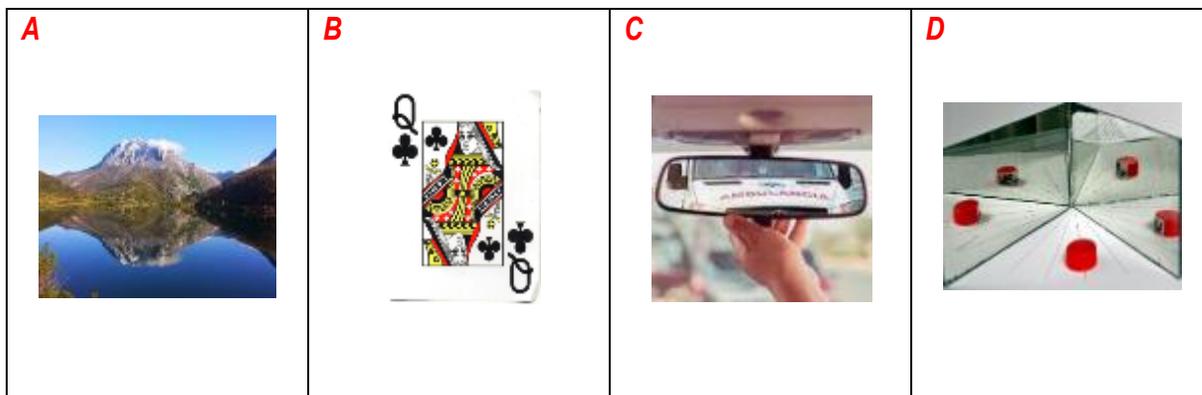
Con la solución de una serie de problemas, se busca que los estudiantes reconozcan sus conocimientos previos, sus habilidades para el razonamiento geométrico y su capacidad para comunicar sus conjeturas dentro de un entorno manipulativo y tecnológico.

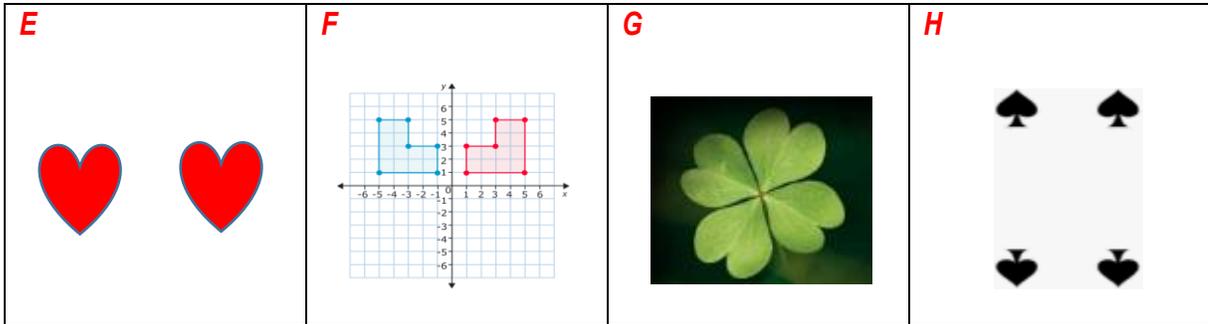
La evaluación se lleva a cabo por el docente a través de la observación directa y continua de la actividad, la socialización de experiencias, sus argumentaciones y la autoevaluación realizada por el estudiante.

Materiales para la actividad: impresión de anexo 1, tijeras, regla, lápiz, esfero y dispositivo electrónico con internet.

ACTIVIDADES PROPUESTAS:

1. Observa detenidamente las siguientes imágenes y determina dónde se puede ver una reflexión trazar o indicar el eje de simetría según el caso:





En base al ejercicio anterior responder los siguientes problemas planteados:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma y tamaño de cada uno de las reflexiones realizadas en cada caso?

- Basados en el trabajo realizado ¿Qué características puede tener el movimiento de reflexión si se aplica a una figura geométrica plana de las que se conocen?

- ¿Para qué el eje de simetría y qué función cumple? Justifica tu respuesta.

2. Para esta actividad, debe recortar los cuadrados dados (anexo 1). Después de tener el cuadrado con la imagen dada, dobla la hoja por el eje de simetría indicado en verde y recorta la silueta de la imagen. Despliega la hoja de la silueta recortada y completa la imagen en cada caso.

Después de realizar el ejercicio planteado anteriormente, resolver los siguientes problemas:

- Identifica por lo menos dos figuras geométricas en cada imagen e indica qué propiedades tiene cada una de ellas.

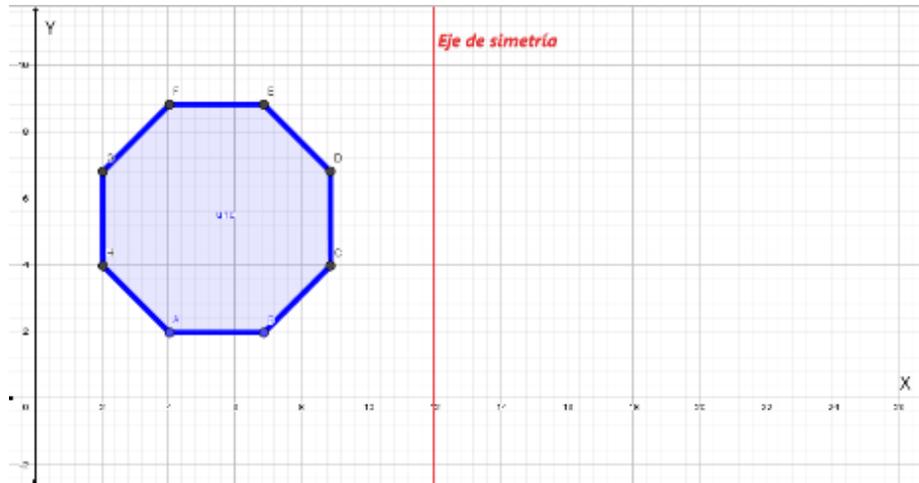
-
-
- Basados en las imágenes recortadas, ¿qué imágenes identifica en cada caso al desplegar el papel después de recortar la silueta?

-
-
- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, tamaño y ubicación de cada una de las figuras al sufrir la transformación de reflexión dada en cada caso?

-
-
- Según el trabajo realizado desde la manipulación y observación, ¿qué significado tiene el doble realizado a cada una de las imágenes? Justifica la respuesta.

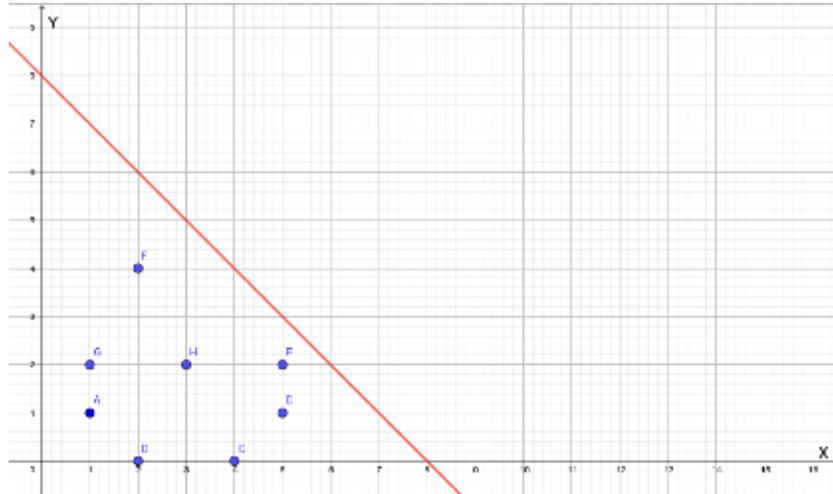
3. Basados en las imágenes presentadas en cada uno de los siguientes planos, realizar la reflexión de las figuras geométricas respecto al eje de simetría dado en cada caso. Indicar las coordenadas iniciales y las coordenadas de la reflexión como se muestra en cada tabla.

- a. Observe la siguiente figura geométrica e identifique las coordenadas de reflexión respecto al eje de simetría dado y las coordenadas para el octágono dado (uno).



COORDENADAS	
Iniciales	Reflexión
A = (,)	A' = (,)
B = (,)	B' = (,)
C = (,)	C' = (,)
D = (,)	D' = (,)
E = (,)	E' = (,)
F = (,)	F' = (,)
G = (,)	G' = (,)
H = (,)	H' = (,)

b. Observe y una con segmentos los puntos dados en el plano para formar una figura geométrica, identifique las coordenadas de reflexión respecto al eje de simetría dado.



COORDENADAS	
Iniciales	Reflexión
A = (,)	A' = (,)
B = (,)	B' = (,)
C = (,)	C' = (,)
D = (,)	D' = (,)
E = (,)	E' = (,)
F = (,)	F' = (,)
G = (,)	G' = (,)
H = (,)	H' = (,)

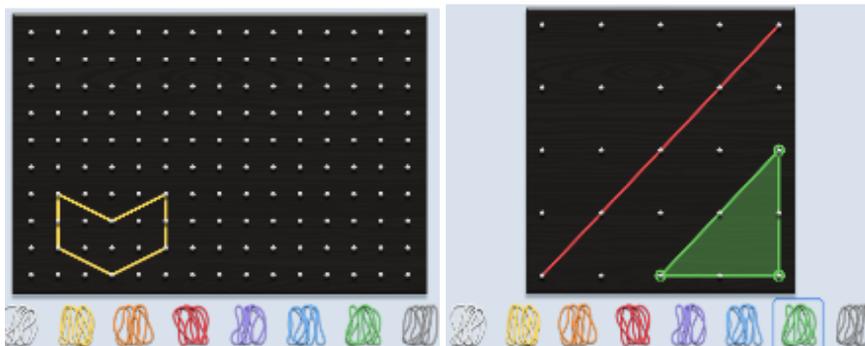
Basado en el trabajo anterior solucionar los siguientes problemas:

- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada uno de los planos? ¿Qué caracteriza a cada una de esas figuras geométricas?

- Cuando se realiza la reflexión sobre la figura geométrica en el plano, ¿Qué se puede observar en relación a su tamaño, forma y posición?

- ¿Qué papel juega el eje de simetría en la figura y qué relación tiene con vértices (puntos) dados? Justifica la respuesta.

4. Ingrese al Geoboard⁶³, construya un hexágono y un triángulo como se muestra en la siguiente imagen del geoplano de manera individual. A cada figura realizarle una reflexión e indicarlo con una liga de distinto color la posición final (tener en cuenta la liga roja como eje de simetría).



En base al ejercicio realizado, responder los problemas planteados a continuación:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, longitud de los lados, número de vértices, medida de los ángulos y posición de la figura al aplicar la reflexión?

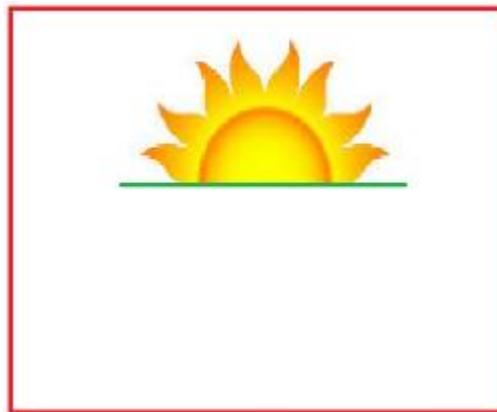
⁶³ Link del geoboard: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

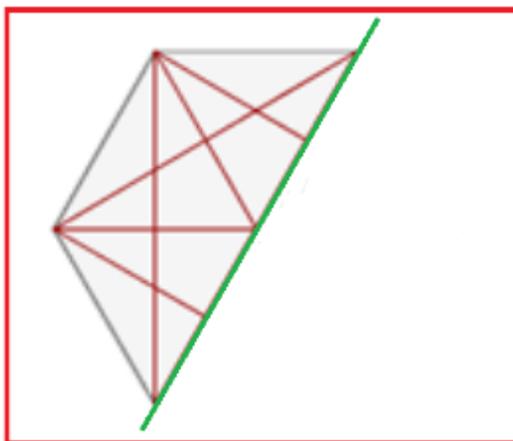
- ¿Por qué realizó esa reflexión a cada figura geométrica dada? ¿Qué otra posibilidad de rotación se puede tener para los dos casos planteados?

- ¿Qué indica el eje de simetría en las dos imágenes presentadas? Justifica tu respuesta.

ANEXOS

Anexo 1





4.2.4. Actividad # 4: Pensemos desde las transformaciones

Objetivo: Identificar las transformaciones isométricas como herramienta de análisis geométrico para el fortalecimiento de las propiedades básicas en algunas figuras geométricas planas.

Metodología de la actividad: manteniendo los debidos protocolos de bioseguridad, se estructuran grupos máximo de tres estudiantes para el desarrollo de las actividades # 4. Para la aplicación de la presente actividad se cuenta con sesiones de 120 minutos para la implementación de manera presencial. La actividad # 4 busca un trabajo en el desarrollo de las habilidades geométricas de manera individual y grupal desde la implementación de las transformaciones isométricas. El docente se encuentra en constante observación y monitoreo para solucionar de forma inmediata las preguntas o inquietudes que puede presentar el estudiante en el desarrollo de la actividad planteada a continuación.

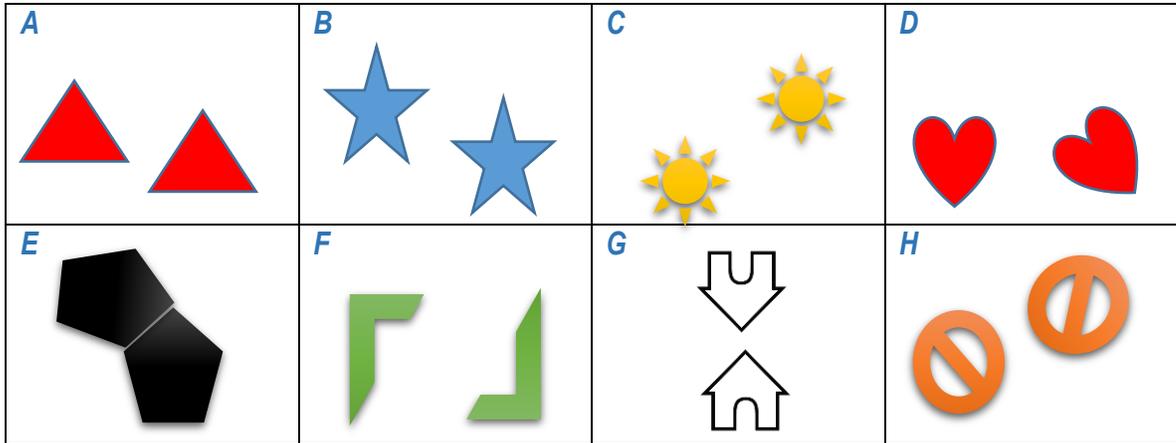
Con la solución de una serie de problemas, se busca que los estudiantes reconozcan sus conocimientos previos, sus habilidades para el razonamiento geométrico y su capacidad para comunicar sus conjeturas dentro de un entorno manipulativo y tecnológico.

La evaluación se lleva a cabo por el docente a través de la observación directa y continua de la actividad, la socialización de experiencias, sus argumentaciones y la autoevaluación realizada por el estudiante.

Materiales para la actividad: impresión de anexo 1, tijeras, regla, lápiz, pegante, esfero y dispositivo electrónico con internet.

Desarrollo de la actividad:

1. Observe las siguientes imágenes e identifique que transformación geométrica isométrica se presenta en cada caso (analiza por separado):



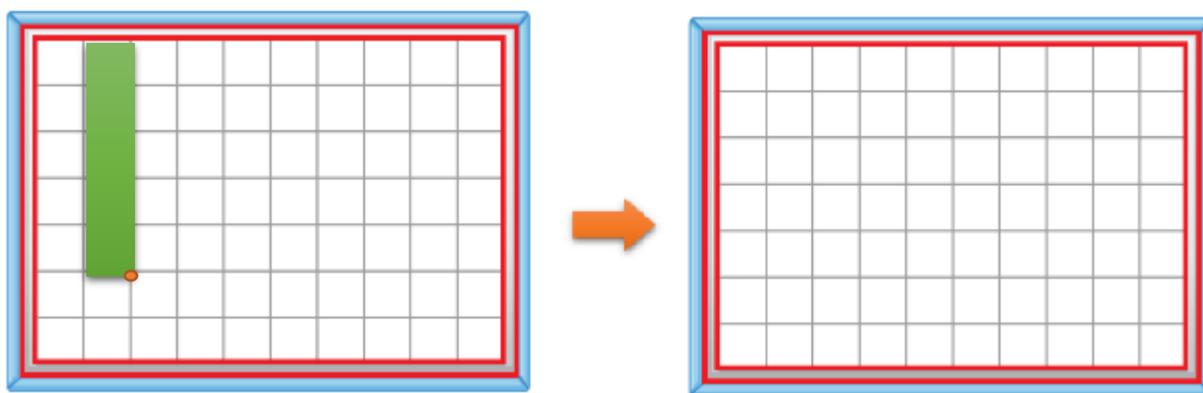
Después de observar detenidamente las imágenes presentadas en cada uno de las casillas, responder los siguientes problemas:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, tamaño y posición de cada una de las figuras al sufrir alguna transformación? ¿Qué transformaciones se identifica en las imágenes presentadas en las casillas?

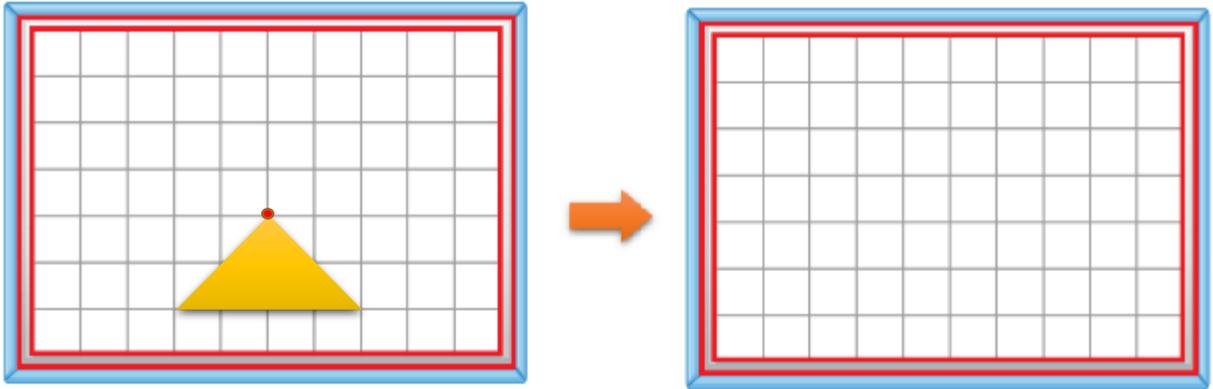
- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada una de las casillas? ¿Qué propiedades posee cada una de las figuras identificadas?

- Basados en las imágenes ¿Qué características tiene el movimiento de traslación, rotación y simetría con respecto a cada una de las figuras presentadas?

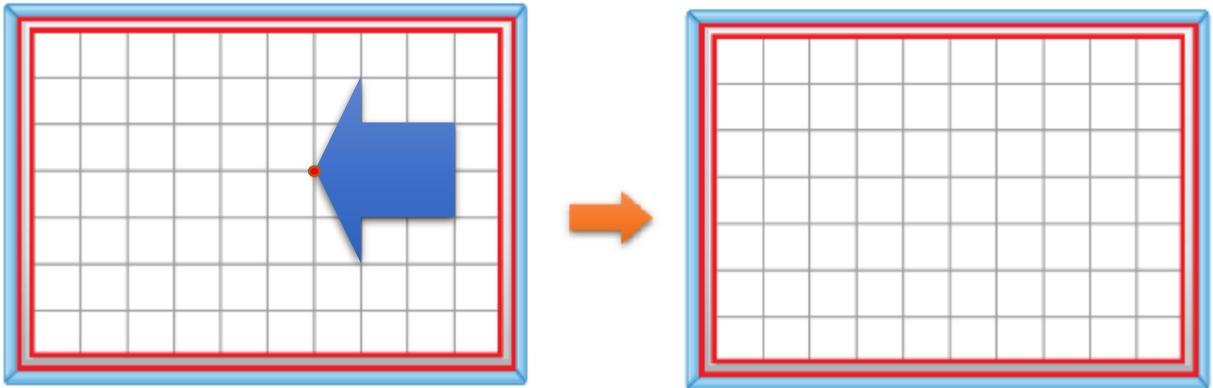
2. Recorta las figuras del anexo 1 para trabajar sobre la cuadrícula dada a continuación. Realiza las transformaciones isométricas que se indique en cada caso. Compara la respuesta con tus compañeros.
 - a. Rota la figura a la derecha 90° sobre el eje de rotación y traslada 3 unidades hacia arriba, recuerda trabajar sobre el material dado en el anexo 1 y la plantilla de la cuadrícula.



Rota la figura a la 180° sobre el eje de rotación y realiza la reflexión respecto a un eje de simetría que pase por el punto de rotación, recuerda trabajar sobre el material dado en el anexo 1 y la plantilla de la cuadrícula.



- b. Rota la figura a la derecha 180° sobre el eje de rotación indicado y traslada la figura 4 unidades a la derecha, recuerda trabajar sobre el material dado en el anexo 1 y la plantilla de la cuadrícula.



Basado en el trabajo anterior solucionar los siguientes problemas propuestos:

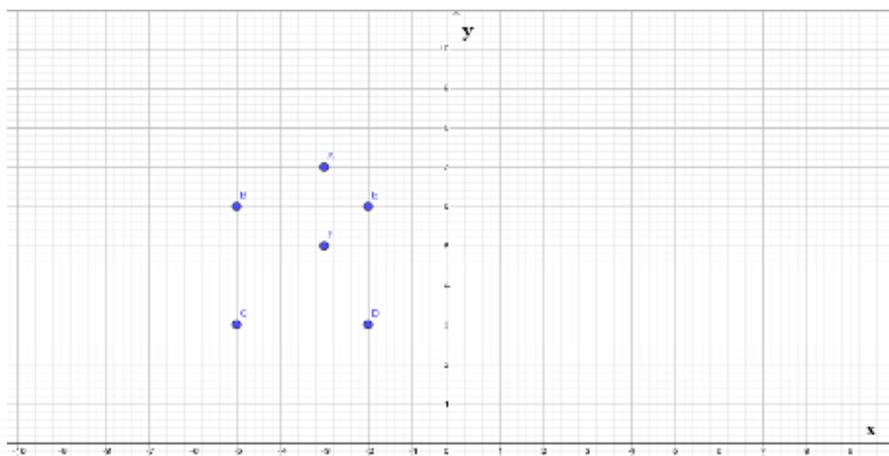
- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en cada una de las imágenes? Indique mínimo tres propiedades de cada figura dada.

- Al realizar las transformaciones dadas en cada caso para las figuras ¿Qué propiedades cambian y por qué?

-
-
- ¿Qué papel juega el eje de rotación y el eje de simetría en cada caso? ¿Cómo se utiliza en cada aplicación de la transformación? Justifica la respuesta.
-
-

3. Basado en las coordenadas dados en la tabla y el plano cartesiano presentado a continuación, realizar los siguientes pasos:

- Ubique los puntos A,B,C,D,E y F en el plano.
- Una con segmentos los puntos dados iniciando por A y finalizando en A de manera ordenada alfabéticamente.
- Realizar una reflexión de la figura obtenida respecto al eje y .
- Tomando la reflexión obtenida, aplicar el vector traslación $(2,0)$ a la figura geométrica dada.
- Completar los nuevos puntos (vértices) en la tabla para las transformaciones realizadas en cada caso.



COORDENADAS		
Iniciales	Reflexión	Traslación
A = (-3,7)	A' = (,)	A'' = (,)
B = (-5,6)	B' = (,)	B'' = (,)
C = (-5,3)	C' = (,)	C'' = (,)
D = (-2,3)	D' = (,)	D'' = (,)
E = (-2,6)	E' = (,)	E'' = (,)
F = (-3,5)	F' = (,)	F'' = (,)

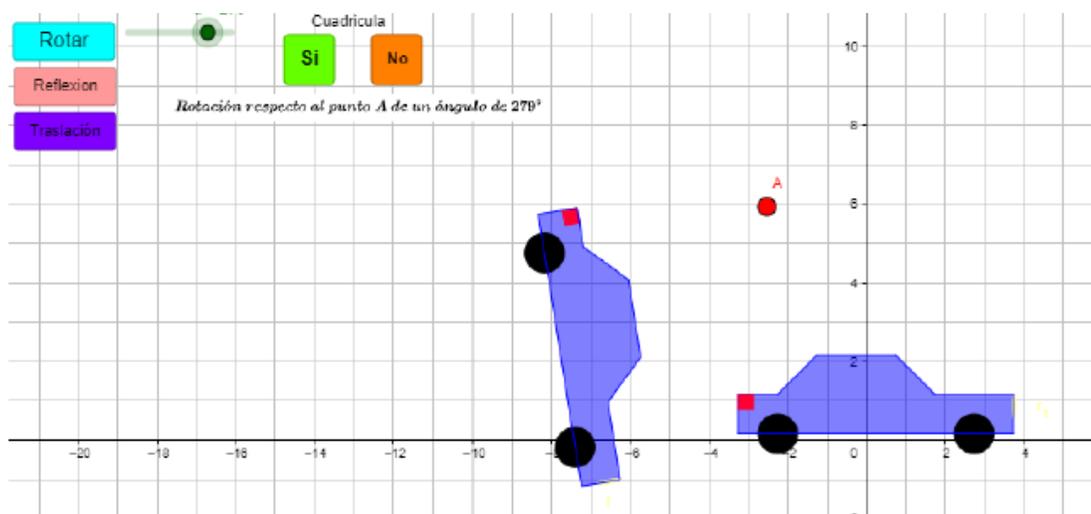
Basado en el trabajo anterior solucionar los siguientes problemas:

- ¿Qué figuras geométricas puede identificar en el plano cartesiano? ¿Qué caracteriza a esta figura geométrica?

- Cuando se realiza la reflexión y traslación sobre la figura geométrica en el plano, ¿Qué se puede observar en relación a su tamaño, forma y posición?

- Según la figura ya reflejada y trasladada ¿Qué rotaciones se le pueden realizar a la figura geométrica? Justifica la respuesta.

4. Ingrese al GeoGebra⁶⁴. Este link lo llevara a interactuar con un ejercicio de manipulación dinámica para las transformaciones isométricas vistas desde la herramienta de GeoGebra.



En base al ejercicio realizado, responder los problemas planteados a continuación:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la relación entre rotación, traslación y simetría?

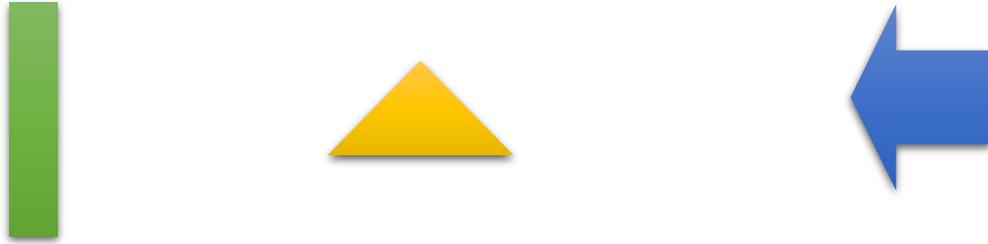
- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, longitud de los lados, número de vértices, medida de los ángulos y posición del carro al aplicar las transformaciones?

- ¿Qué pasa con el carro al mover el punto  y se rota 360°? ¿Qué pasa con el carro al mover el eje de simetría y aplicar la transformación?

⁶⁴ Link del GeoGebra: <https://www.geogebra.org/classic/XpcMpSnR>

ANEXOS

Anexo 1



4.2.5. Actividad # 5: Figuras geométricas en el contexto.

Objetivo: favorecer la enseñanza aprendizaje de las figuras geométricas y sus propiedades a través de las transformaciones geométricas.

Metodología de la actividad: bajo el esquema de bioseguridad presentado por el establecimiento educativo, se estructuran grupos máximo de tres estudiantes para el desarrollo de la actividad # 5. Para la aplicación de la presente actividad se cuenta con sesiones de 120 minutos para la implementación de manera presencial.

La actividad # 5 busca un trabajo en el desarrollo de las habilidades geométricas de manera grupal e individual desde la implementación de las figuras geométricas. El docente se encuentra en constante observación y monitoreo para solucionar de forma inmediata las preguntas o inquietudes que puede presentar el estudiante en el desarrollo de la actividad planteada.

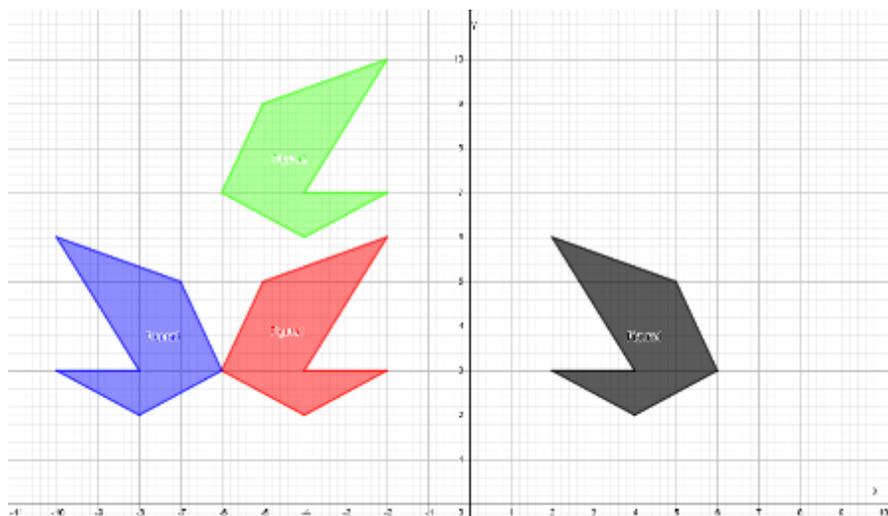
Con la solución de los problemas, los estudiantes buscan reconocer sus conocimientos previos, sus habilidades para el razonamiento geométrico y su capacidad para comunicar sus conjeturas dentro de un entorno manipulativo y tecnológico.

La evaluación se lleva a cabo por el docente a través de la observación directa y continua de la actividad, la socialización de experiencias, las argumentaciones de los estudiantes y la autoevaluación realizada por ellos.

Materiales para la actividad: regla, lápiz, esfero, colores y dispositivo electrónico con internet.

Desarrollo de la actividad:

1. Observe las siguientes imágenes e identifique que figura se presenta y que transformación geométrica isométrica es aplicada en cada caso; recuerde que las cuatro figuras es una sola y cada color representa una transformación de la figura roja (Figura 1).



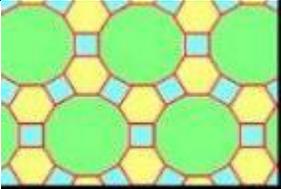
Después de observar detenidamente las imágenes presentadas en el plano cartesiano, responder los siguientes problemas:

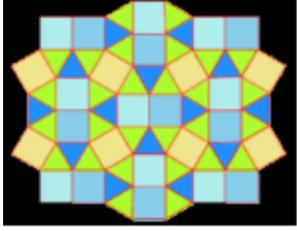
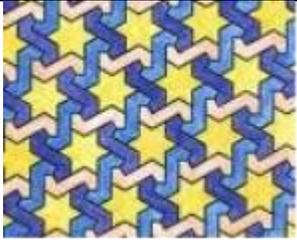
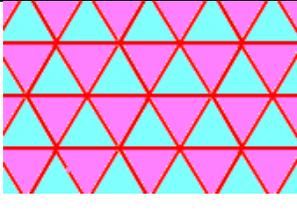
- ¿Qué figura geométrica puede identificar en el plano cartesiano? ¿Qué propiedades posee la figura identificada? Enumerarlas.

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, tamaño y posición de la figura al sufrir alguna transformación? ¿Qué transformaciones se identifica en las imágenes presentadas? Explicar y clasificar según el color, recuerde partir de la figura 1 (roja).

- Basados en las imágenes ¿Qué características tiene el movimiento de traslación, rotación y simetría con respecto a la figura geométrica presentada? ¿Todas las figuras geométricas son iguales? Justificar la respuesta.

2. Completar la siguiente tabla basado en los teselados presentados en cada casilla. Es importante determinar que figuras geométricas componen los teselados.

Teselados	¿Cuáles son las transformaciones geométricas utilizadas para la construcción del teselado?	Determine el número de ejes de simetría (indicar en los teselado)
		

Después de observar y completar la tabla de los teselados, resolver los siguientes problemas según la información obtenida:

- ¿Qué figura geométrica puede identificar en los teselados? ¿Qué propiedades posee las figuras identificadas? Enumerarlas.

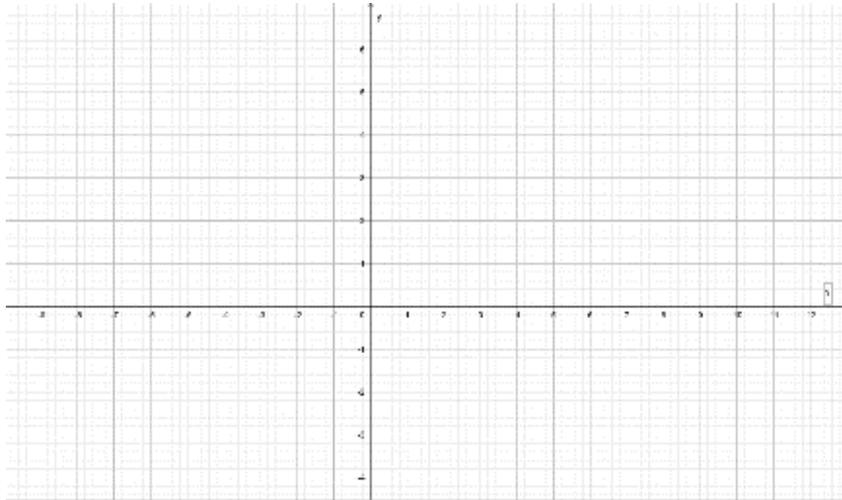
- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, tamaño y posición de la figura en cada uno de los teselados? ¿Qué relación tienen las figuras en los mismos teselados y en teselados distintos? Explica tu respuesta.

- Basados en las imágenes ¿Qué características tiene el movimiento de traslación, rotación y reflexión con respecto a la construcción del teselado?

3. Completar la siguiente tabla y construir la figura geométrica en el plano cartesiano basados en los pasos dados a continuación:

- Ubique los puntos A, B, C y D en el plano de forma arbitraria.
- Una con segmentos los puntos dados iniciando por A y finalizando en A de manera ordenada alfabéticamente.
- Realizar una rotación de 90° a la figura obtenida tomando como eje de rotación el punto C.
- Tomar la rotación realizada y aplicar el vector traslación (1,1) a la figura geométrica obtenida.
- Ubicar los nuevos puntos (vértices) en la tabla para la transformación aplicada en este caso.

COORDENADAS		
Iniciales	Rotación	Traslación
A = (,)	A' = (,)	A'' = (,)
B = (,)	B' = (,)	B'' = (,)
C = (,)	C' = (,)	C'' = (,)
D = (,)	D' = (,)	D'' = (,)



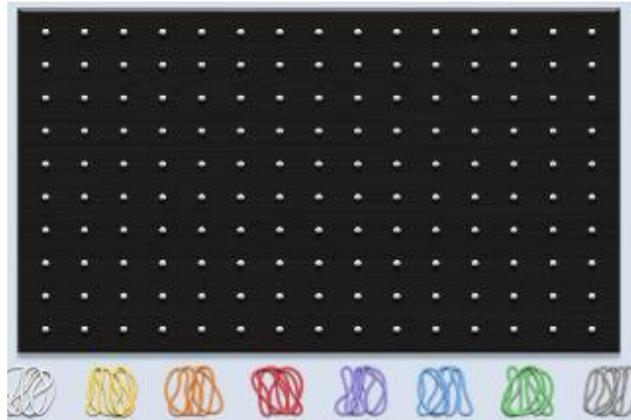
Basado en el trabajo anteriormente desarrollado, solucionar los siguientes problemas:

- ¿Qué figuras geométricas se puede construir con los puntos dados? ¿Qué caracteriza a esta figura geométrica construida?

- Cuando se realiza la rotación y traslación sobre la figura geométrica en el plano, ¿Qué se puede observar en relación a su tamaño, forma y posición?

- Teniendo la figura ya rotada y trasladada, indique una posible reflexión que se le pueda aplicar a la figura geométrica, recuerde indicar los elementos de la reflexión. Justifica la respuesta.

4. Ingrese al Geoboard⁶⁵, construir tres figuras geométricas distintas en la aplicación presentada (las que más le llame la atención), la primera debe mostrar una traslación, la segunda una rotación y la tercera una reflexión. Recuerde resolver el problema en geoplanos distintos.



En base al ejercicio realizado, responder los problemas planteados a continuación:

- ¿Qué se puede observar con respecto a la forma, longitud de los lados, número de vértices, medida de los ángulos y posición de la figura al aplicar cada una de las transformaciones?

- ¿Cómo aplica la rotación a la figura tomada para tal fin? Indicar el paso a paso.

- ¿Qué otras figuras geométricas se pueden tomar para aplicar las transformaciones isométricas trabajadas? Indicar mínimo tres y sus propiedades.

⁶⁵ Link del geoboard: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

Conclusiones del capítulo 4

Se diseñan cinco actividades, las cuales se encuentran dirigidas a estudiantes de grado quinto de primaria. En cada una de las actividades se contempla el uso del material manipulativo, el Geoplano virtual y el GeoGebra, la visualización y la resolución de problemas retadores, con el fin de favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes desde los primeros años de la educación formal. En las actividades se evidencia la transversalidad entre la visualización y la resolución de problemas. Según Arcavi (2003) la visualización matemática constituye un gran recurso para la comprensión de los conceptos matemáticos desde una imagen mental estructurada.

En las actividades se evidencia lo planteado por Falk (2001) sobre la resolución de problemas, en la cual los estudiantes deben establezcan redes conceptuales cada vez más enriquecidas. Por tanto, esto permite una relación directa con el desarrollo del pensamiento matemático, el cual se ve apoyado por el uso del material manipulativo y la tecnología como lo establece Castro (2007) y Gutiérrez (2005) respectivamente.

Una de las estrategias más sólidas para un aprendizaje robusto de la geometría, a partir de las transformaciones geométricas lo constituye la resolución de problemas.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El siguiente capítulo se basa en describir y analizar los principales resultados obtenidos en la implementación de las actividades propuestas, encuestas y entrevistas. Los resultados se analizan desde cuatro aspectos principales: el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, la motivación de los estudiantes, las dificultades presentadas y los logros obtenidos en la implementación.

5.1. Análisis de los resultados de las encuestas y entrevistas

Con el fin de fortalecer los conceptos implicados en este estudio, las oportunidades de mejora, la actualidad de la temática investigada, la pertinencia y los posibles impactos de la presente investigación, se realizan entrevistas y encuestas enfocadas al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana a través de las transformaciones geométricas.

La encuesta realizada a docentes (ver Anexo 1), se realiza a licenciados en matemáticas, licenciados en básica con énfasis en matemáticas, licenciados en primaria e Ingenieros, los cuales han tenido una relación directa con la enseñanza de la geometría en la educación primaria en un 70% del sector público y 30% del sector privado.

Es importante destacar que la encuesta fue validada mediante el método Delphi (ver Anexo 3), dentro del análisis realizado se tiene un buen consenso, el 50% está de acuerdo plenamente y el otro 50% está de acuerdo en un alto grado.

Dentro de la aplicación y análisis de la encuesta se evidencia que más del 50% de los docentes trabajan sobre los conocimientos previos y con material didáctico los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría. Sin embargo, menos del 40% de los docentes trabajan con material manipulativo, con herramientas TIC y la resolución de problemas, lo que permite ver grandes oportunidades de mejora en la enseñanza aprendizaje de la geometría a nivel de la educación primaria.

Por otra parte, se realizan varias entrevistas (ver Anexo 1) a especialistas en matemáticas que han tenido la oportunidad de centrar algunas de sus investigaciones en temas geométricos y poseen una vasta experiencia en el campo del pensamiento matemático.

Entre los especialistas se tienen a los investigadores: Leonor Camargo, Marcel Pochulu, Hermes Nolasco, Ángel Gutiérrez y José Calos Leivas (ver Figura 5), los cuales aportan directamente a la presente investigación desde la concepción del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria. Ellos destacan las dificultades en la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria, el uso del material didáctico en la enseñanza aprendizaje de la geometría, y la pertinencia y actualidad de la presenta investigación en el contexto de la educación matemática.



Figura 5. Entrevistas a especialistas.

A continuación, se presenta el análisis de los resultados obtenidos:

- Motivar el interés y aplicación de la geometría en el contexto.
- El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través de la resolución de problemas.
- Implementar la tecnología como una herramienta base del proceso de enseñanza aprendizaje en la actualidad.
- Fortalecer de manera continua los conocimientos previos de los estudiantes.
- La enseñanza aprendizaje de la geometría no debe estar relegada a una asignatura para complementar el currículo de las instituciones.

Dentro de las entrevistas realizadas se resalta el trabajo enfocado en los niños y niñas de la escuela primaria. Desde los especialistas, dicha investigación debe centrar sus esfuerzos en generar una cultura geométrica en cada uno de los estudiantes desde los primeros años, donde se busque siempre la continuidad de la formación.

5.2. Análisis de los resultados de la implementación de las actividades

Se realiza un análisis de la implementación de las actividades con el fin de enfatizar en las diferentes soluciones que presentan los estudiantes en los problemas propuestos, estos problemas tienen como objetivo robustecer la enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométricas. Cada una de las actividades propuestas cuenta con evidencias fotográficas, bitácora y videos con el fin de constatar las ideas, desempeños y conclusiones a las que llegan de manera individual los estudiantes.

5.2.1. Actividad # 1: Un movimiento de traslación en el plano

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. Al iniciar la implementación de las actividades, los estudiantes muestran gran inquietud y curiosidad por el ejercicio a desarrollar por cada uno de ellos. Por otra parte, se indica la metodología de trabajo y las condiciones de bioseguridad como eje central del proceso de desarrollo de las actividades propuestas.

Se entrega la actividad # 1 y se indica que se debe realizar la lectura del título y el objetivo de la actividad e identificar los problemas propuestos en la guía entregada. Es importante destacar que los estudiantes al ver la guía con una sonrisa en su rostro indican que: “... vamos a trabajar en geometría y con las Tablet del colegio...”⁶⁶, mostrando interés por la asignatura y el trabajo tecnológico que se puede realizar.

⁶⁶ Opiniones de los estudiantes.

La actividad se desarrolla de manera individual con el fin de identificar el impacto en cada uno de los estudiantes respetando el esquema de bioseguridad planteado por la institución. Cada uno de los 14 estudiantes (ver Figura 6) que hacen parte de la burbuja A (primer grupo de estudiantes del grado 501 determinado por el aforo máximo) y conforman la muestra que participan activamente de las actividades planteadas.



Figura 6. Muestra de estudiantes. Figura 7. Reconocimiento de material.

Al inicio de la actividad se relaciona la importancia de la visualización, trabajo con el material manipulativo, el uso adecuado de las tablet y la importancia de analizar, conjeturar y escribir el desarrollo de los problemas planteados en cada guía entregada (ver Figura 7). Por otra parte, se hace referencia a las transformaciones geométricas y su papel en el aprendizaje de las figuras geométricas y sus propiedades. Posteriormente a la entrega de la guía, los estudiantes analizan de manera individual cada problema y se generan interrogantes desde: ¿por qué tantos colores?, ¿qué se debe recortar?, ¿qué se va hacer con las tablet? y ¿cómo se va a contestar sino se tienen valores numéricos?

La actividad # 1 consta de cuatro problemas en los cuales se busca su implementación desde la visualización, material manipulativo, plano cartesiano y uso de las TIC. A continuación, se relacionan las observaciones realizadas en cada uno de dichos problemas de manera particular:

El primer problema, busca identificar la transformación geométrica utilizada e indicar las figuras geométricas presentes en la secuencia de imágenes dada en los ocho casos distintos. El 45% de los estudiantes que desarrollan la actividad no presentan mayores dificultades, realizan un análisis correcto

de las imágenes presentadas desde sus conocimientos previos identificando la transformación geométrica trabajada y el reconocimiento de algunas figuras geométricas utilizadas (ver Figura 8).

Por otra parte, el 55% de los estudiantes, presentan dificultades en la identificación de las figuras geométricas mostradas, por ende, en sus propiedades (ver Figura 9). Los estudiantes no comprenden el papel que tiene la traslación en una imagen determinada como un movimiento, que permite dejar invariante las propiedades de las figuras en general dentro del marco de las transformaciones isométricas. Es importante destacar que en el proceso los estudiantes no interpretan las imágenes como una sola sino como la comparación de dos diferentes que se “parecen”, es decir, presentan dificultad en el análisis de dos figuras congruentes o semejantes.

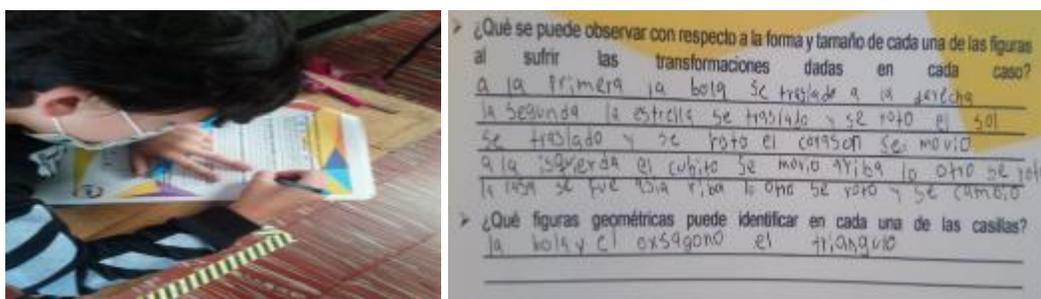


Figura 8. Actividad desde la visualización. Figura 9. Identificación de figuras geométricas.

En el problema dos, se destaca el material manipulativo, se trabaja con cinco figuras sobre la cuadrícula buscando realizar traslaciones en cada una de ellas (ver Figura 10) con el fin de identificar las propiedades de las figuras trabajadas y las características del movimiento de traslación aplicado. El 65% de los estudiantes dan respuesta al problema planteado de la mejor manera y destacan la importancia de recortar, manipular, ubicar y pegar las figuras para aclarar las dudas y dificultades presentadas. Un estudiante plantea “... *profe, es muchísimo más fácil acordarme de las figuras cuando las muevo en los*

cuadros...”⁶⁷, haciendo referencia a los conocimientos previos y motivación por el uso del material manipulativo trabajado.



Figura 10. Actividad con cuadrícula.

El 35% de los estudiantes presentan dificultades al no identificar las figuras geométricas, sus propiedades, la aplicación de traslaciones sencillas (con problemas de lateralidad) e inseguridad en lo desarrollado del problema planteado. Durante el proceso de resolución no logran una generalización de resultados de manera consistente, pues uno de ellos afirma: “... todas las figuras muestran diferentes tamaños, formas pero siempre se pueden trasladar para cualquier lado...”⁶⁸. Además, brindan la prioridad a comparar las figuras entre ellas y no las figuras de manera individual al realizar la traslación dada.

El tercer problema se enmarca en el reconocimiento de un heptágono irregular sobre el plano y su relación con un vector traslación. Para este problema planteado se debe completar una tabla en la cual se pueden identificar los vértices iniciales y los vértices trasladados, por último, tomar la información mostrada por la tabla para realizar la construcción de la figura geométrica sobre el plano (ver Figura 11).

⁶⁷ Opiniones de los estudiantes.

⁶⁸ Opiniones de los estudiantes.

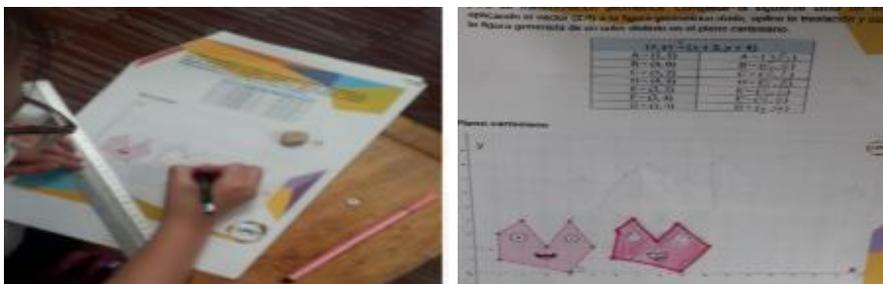


Figura 11. Construcción con datos hallados. Figura 12. Construcción en el plano cartesiano.

En este problema se evidencia el manejo de las operaciones aritméticas para hallar los vértices del heptágono trasladado. Es importante destacar que el 40% de los estudiantes presentan un buen manejo del plano, la ubicación e identificación de las coordenadas iniciales y rotadas, al igual que la construcción de las figuras y algunas propiedades que componen el heptágono irregular presentado en el problema. Dentro del otro 60% de los estudiantes se evidencia de forma clara las dificultades en la manipulación de la información obtenida, es decir en el manejo del plano cartesiano. Aunque los estudiantes no presentan mayor dificultad en el diligenciamiento de la tabla de valores, si presentan gran dificultad en la ubicación del par ordenado (x,y) obtenido, presentando inseguridad en el tratamiento de los datos y su relación con los ejes de coordenadas (ver Figura 12).

En el desarrollo de la actividad, la mayoría de estos estudiantes realizan el traslado de un punto, que normalmente no cumple con las condiciones dadas, y basados en ese punto se construye la figura dada sin identificar los otros vértices de la figura. El estudiante plantea que: *“... ya puse el punto A´ ahora solo es hacer una figura igual a rosada que se ve, perdón al heptágono...”*⁶⁹, lo cual se puede evidenciar que no se piensa en la traslación de cada uno de los vértices sino en un vértice y de allí se duplica la imagen dada (ver Figura 13).

⁶⁹ Opiniones de los estudiantes.



Figura 13. Construcción en base a un punto.

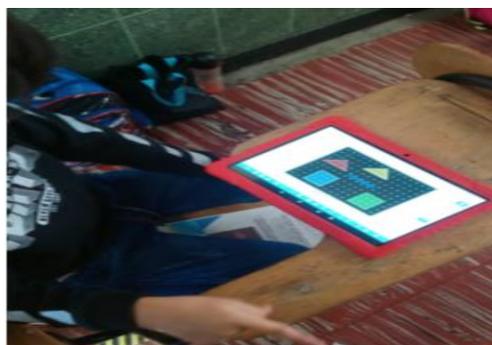


Figura 14. Trabajo con tablet.

Para finalizar la actividad # 1, se presenta el problema número cuatro, en el cual se hace uso de la herramienta del geoplano virtual. En este geoplano se presentan dos figuras geométricas y ellos con los conocimientos adquiridos deben mostrar una traslación con características propias, la cual debe cumplir con las condiciones iniciales.

Los estudiantes muestran interés por la herramienta. El 50% de los estudiantes presentan un dominio en la herramienta y logran ostentar varias soluciones al problema planteado. Un estudiante expresa: *“...profesor, yo puedo mover el triángulo arriba, abajo o a la derecha pero no se puede a la izquierda porque no hay espacio y el cuadro es igual pero no lo puedo mover hacia abajo porque tampoco hay espacio...”*⁷⁰, lo que indica que el estudiante a visualizado posibles soluciones, identifica las figuras geométricas y algunas características del movimiento de traslación. Entre otras participaciones importantes se tiene: *“...pero también podemos hacer que las figuras se muevan en diagonal, ¿cierto?...”*⁷¹, en la cual se puede evidenciar razonamientos más profundos (ver Figura 14).

El 50% de estudiantes presentan dificultades con el manejo de la aplicación, se evidencia un buen uso de la tablet pero falencias en el uso de la aplicación como herramienta de apoyo para el procesos de aprendizaje, se vuelve latente el miedo a experimentar, a caer en el error e ir más allá del problema.

⁷⁰ Opiniones de los estudiantes.

⁷¹ Opiniones de los estudiantes.

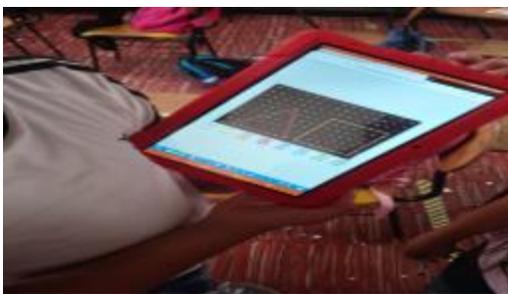


Figura 15. Modificación de propiedades a las figuras dadas.

Los estudiantes no muestran conceptualización en el manejo de figuras invariantes al aplicarles alguna transformación isométrica como la traslación, es decir, que modifican las propiedades de las figuras trabajadas y por ello se pierde la congruencia entre ellas (ver Figura 15). Cabe resaltar la falta de tiempo para esta última actividad debido a los espacios para el reconocimiento y manejo de la aplicación, dicho ejercicio es necesario para la correcta implementación de la herramienta en la solución del problema planteado.

Otras evidencias del trabajo realizado por los estudiantes, en el cual se constata el aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades se muestra en el Anexo 5.

Motivación en el desarrollo de la actividad. Los estudiantes muestran curiosidad, un poco de miedo y preocupación por los problemas planteados al igual que por el uso de las herramientas propuesta en la actividad. Además, presentan interés por compartir sus resultados, hallazgos y conclusiones obtenidas durante el desarrollo de los problemas planteados, es decir, se generó un ambiente de confianza y aprendizaje.

Logros obtenidos en la actividad # 1. Basados en la observación directa, el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes y las intervenciones realizadas, se evidencia que:

- Aproximadamente el 93% de estudiantes realizan un desarrollo de las actividades con agrado, dedicación e interés por el aprendizaje.

- Fortalecimiento en el manejo de las herramientas e instrumentos, al igual que en la metodología implementada.
- Se evidencia una notable mejora en la capacidad de observación, análisis y conjeturación en el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Se fortalece la seguridad, participación y actitud de los estudiantes en la adquisición de las habilidades geométricas.
- El 50% de los estudiantes aproximadamente desarrollan la guía de manera individual, en la cual se presenta un buen desempeño y desarrollo de la misma.

Dificultades obtenidas en la actividad # 1. Dentro de la aplicación de la actividad # 1 se presentan las siguientes dificultades:

- Se presenta dificultad en plasmar las ideas, conjeturas o conclusiones de manera escrita de cada uno de los problemas planteados.
- Dificultad en el reconocimiento de algunas figuras planas y sus propiedades.
- El 50% de los estudiantes presentan una solución al problema planteado, sin embargo, no alcanza el resultado o no identifica los errores presentados.
- Los estudiantes manipulan la parte tecnológica, sin embargo, no es tomado como una herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje.

5.2.2. Actividad # 2: Un movimiento llamado rotación

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. Se da inicio a la actividad de manera ordenada y manteniendo los debidos protocolos de bioseguridad implementados por el establecimiento educativo, Se indica la estructura de la guía, objetivo y metodología a implementar en el desarrollo de la misma.

Los estudiantes se inquietan un poco por los tiempos establecidos debido a las dificultades presentadas en la primera actividad. Cabe resaltar que los estudiantes presentan dificultad en expresar sus ideas y conclusiones de manera oral pero principalmente de manera escrita, lo cual es una causante a la modificación de tiempos.

En un primer momento los estudiantes hacen el reconocimiento de la actividad # 2, la cual se compone de cuatro problemas, generando comentarios en ellos tales como: “...profe nos diste la misma guía de la clase pasada...”⁷² y “vamos a volver a recorta y trabajar en las tablet, sii...”⁷³, lo que indica la motivación, interés e intriga por trabajar con el material propuesto en la presenta actividad.

La actividad # 2 se compone de cuatro problemas basados en la visualización, manejo de material manipulativo, movimientos en el plano y uso de las TIC. A continuación, se relacionan las observaciones realizadas en cada uno de dichos problemas de manera particular:

En el primer problema busca identificar en los estudiantes el concepto de giros laterales con su cuerpo y con los compañeros (trabajando la lateralidad) (ver Figura 15). El 70% de los estudiantes no muestran dificultad, poseen una buena comprensión y seguridad en las indicaciones presentadas por el docente.



Figura 15. Giros sobre un punto fijo.

⁷² Opiniones de los estudiantes.

⁷³ Opiniones de los estudiantes.

Se destaca el análisis que hacen los estudiantes en la invarianza de las propiedades (forma y tamaño) de un objeto o cuerpo al realizar la transformación de rotación para este caso (ver Figura 16) al igual que se identifican algunas características de la rotación al ser aplicada a una figura plana (ver Figura 17), es decir que el estudiante relaciona la transformación geométrica con las propiedades de algunas figuras geométricas conocidas.

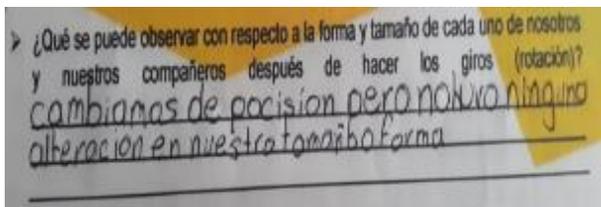


Figura 16. Forma y tamaño del cuerpo.

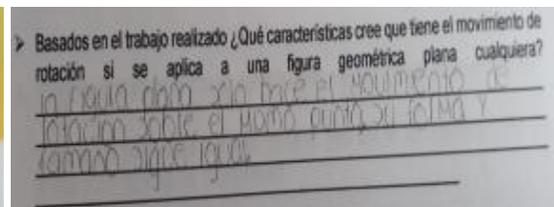


Figura 17. Características de rotación.

El 30% de los estudiantes restantes presentan dificultad con el manejo del giro sobre el puesto, es decir, se equivocan en el movimiento o simplemente esperan que sea ejecutado por un compañero para observar y luego realizar la actividad planteada por el docente, lo cual permite escuchando comentarios tales como: "... me equivoque o través, es para el otro lado y no es tanta vuelta..."⁷⁴, lo que permite identificar no solo la dificultad del giro según su sentido si no también la cantidad rotada o girada (un cuarto, medio, entre otros).

En el problema dos, se trabaja desde las imágenes mentales que puede generar el estudiante para el análisis del problema, es decir, se trabaja desde la visualización de elementos que generan una rotación en el contexto inmediato de los estudiantes. Para este problema se presentan dos incisos, el primero se enmarca en el reconocimiento de la situación para lo cual deben completar un texto desde lo observado en la imagen presentada. En el segundo inciso se debe relacionar figuras geométricas con la imagen dada, ver las características de la rotación y las propiedades de las figuras geométricas identificadas.

⁷⁴ Opiniones de los estudiantes.

Para el primer inciso no se presenta mayor dificultad, sin embargo, cabe destacar que se evidencia interacción de los estudiantes en las ideas para el desarrollo del primer inciso (ver Figura 18).

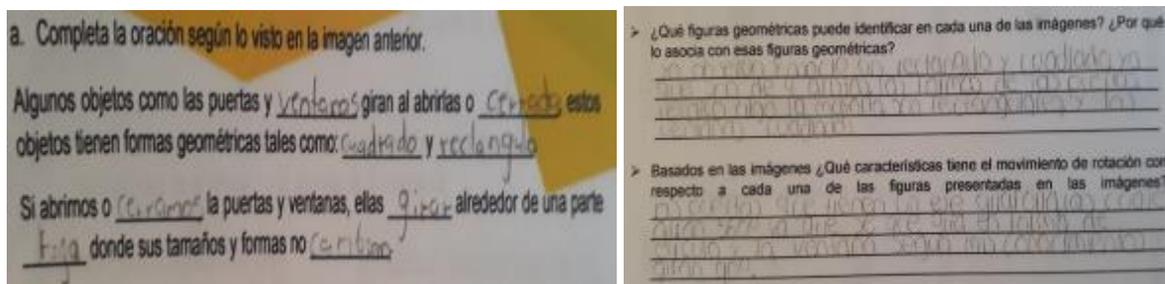


Figura 18. Completar desde lo observado. Figura 19. Características y figuras geométricas.

Es importante destacar que el 65% de los estudiantes identifican de forma clara algunas figuras geométricas y sus principales propiedades, se evidencia la familiarización con las transformaciones geométricas principalmente con la traslación y rotación al igual que el papel que juegan al ser aplicadas a una figura plana (ver Figura 19).

Por otra parte, el 35% de los estudiantes presentan dificultades en la identificación de las figuras geométricas presentadas en la imagen, por tanto, presentan dificultad en la relación con sus propiedades. Los estudiantes no comprenden el papel que tiene la rotación en una imagen determinada como un movimiento que permite dejar invariante sus propiedades en un contexto geométrico.

Cabe destacar que los estudiantes realizan un buen análisis de las imágenes presentadas, pero no logran llevarlas a un contexto geométrico, mostrando dificultad en el desarrollo de la cultura geométrica necesaria para tal fin.

Para el problema número 3, se presenta un trabajo con el material manipulativo, el 50% de los estudiantes identifican de manera clara las rotaciones indicadas, sin embargo, al pegar la figura geométrica sobre la cuadrícula identifican algunos errores los cuales se corrigen en el transcurso de la actividad (ver Figura 20) mostrando claridad en los conceptos y construcciones presentadas.

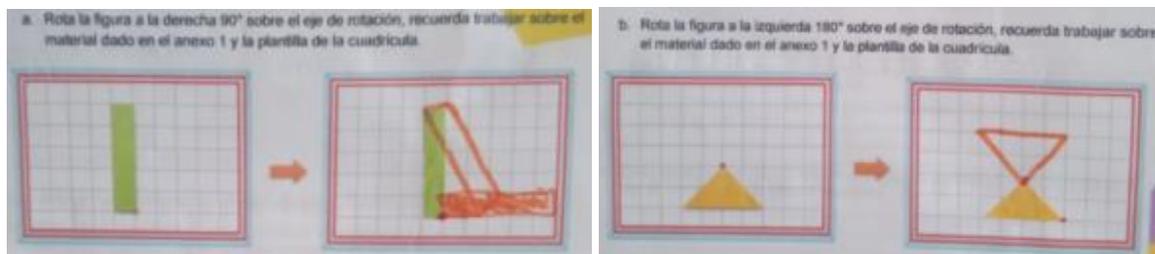


Figura 20. Análisis del error.

El 50% del grupo presento dificultad en la comprensión de la rotación principalmente sobre el eje de rotación (ver Figura 21). Aunque logran comprender que movimiento realiza la rotación, no relacionan las condiciones dadas respecto al sentido de la rotación sobre un eje dado y tampoco los grados de rotación estipulados en cada problema.

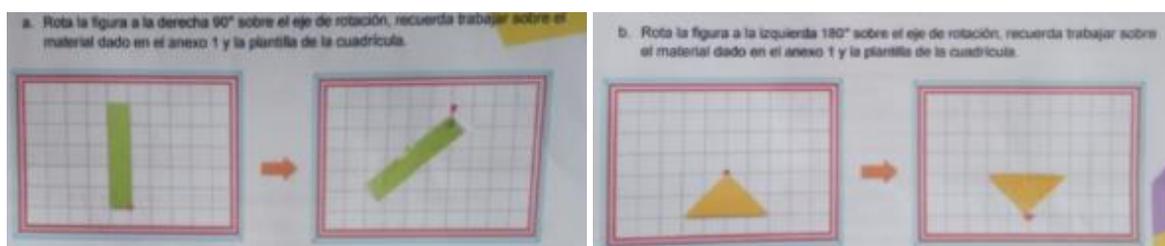


Figura 21. Análisis de rotación.

Lo anterior dificulta generar conclusiones de los resultados obtenidos para la solución correcta de los problemas planteados e inseguridad de los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

El cuarto problema hace uso de la herramienta del geoplano virtual, herramienta ya conocida para ellos.

En este geoplano se presentan dos figuras geométricas (hexágono irregular y rectángulo), con los conocimientos adquiridos los estudiantes deben mostrar una rotación con características propias, la cual debe cumplir con las condiciones iniciales del problema.

Sin duda alguna el uso de los recursos digitales es uno de los espacios más motivadores para los estudiantes. Un 65% de los estudiantes presentan un dominio en la herramienta y logran mostrar soluciones particulares en cada caso. Un estudiante indica: "... Es un problema parecido al de la actividad

anterior y también puedo rotarlo para varios lados como yo quiera, mientras pueda...”⁷⁵, lo que indica la comprensión del estudiante en la solución del problema planteado.

Uno de los aportes más significativos por parte de los estudiantes es: “...el eje de rotación no sé cuál es, ¿puedo colocar el que yo quiera o el profesor me lo da?...”⁷⁶, en esta opinión se evidencian razonamientos más profundos y permite que si el estudiante escoge un eje de rotación inadecuado pueda aprender del error presentado (ver Figura 22).



Figura 22. Rotación en geoplano.

El 35% de estudiantes presentan dificultades con el manejo de la aplicación, nuevamente se evidencia un buen uso de la tablet pero dificultades en el uso de la aplicación como herramienta de apoyo para el procesos de aprendizaje. Aunque se ha evidenciado la pérdida del miedo al manejo de la tablet, los estudiantes no muestran conceptualización de las propiedades de las figuras geométricas trabajadas, es decir, no trabajan los problemas en base al análisis de las características de cada figura dada (ver Figura 23).

⁷⁵ Opiniones de los estudiantes.

⁷⁶ Opiniones de los estudiantes.



Figura 23. Rotación en geoplano.

Cabe resaltar que los tiempos para esta última actividad son un poco ajustados, sin embargo, se logra realizar el análisis y solución del problema de la mejor manera sin dejar aspectos para una siguiente sesión.

Otras evidencias que constata el aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades por parte de los estudiantes se evidencian en el Anexo 6.

Motivación en el desarrollo de la actividad. Los estudiantes muestran gran inquietud e interés por el uso del material manipulativo y principalmente por el uso de las herramientas tecnológicas. Además, presentan interés por compartir sus hallazgos y conclusiones obtenidas durante el desarrollo de los problemas planteados, es decir, se ha perdido en gran parte el miedo a opinar y participar en las actividades de igual manera se he generado un ambiente de confianza dentro del grupo.

Logros obtenidos en la actividad # 2. Basados en la observación directa, el análisis de las soluciones dadas por los estudiantes y las intervenciones realizadas, se evidencia que:

- El 100% de estudiantes realizan un desarrollo de las actividades con agrado, dedicación e interés por el aprendizaje.
- Se fortalece la participación, actitud y confianza de los estudiantes en la adquisición de las habilidades geométricas.

- Fortalecimiento en el manejo de las herramientas TIC y uso del material manipulativo, al igual que en la metodología implementada para el desarrollo de las actividades.
- Se evidencia una mejora en la capacidad de observación, análisis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento geométrico.
- Se observa mayor reconocimiento de las figuras geométricas y sus propiedades dentro del contexto inmediato de los estudiantes.

Dificultades obtenidas en la actividad # 2. Dentro de la aplicación de la actividad # 2 se presentan las siguientes dificultades:

- Se presenta dificultad en plasmar las ideas, conjeturas o conclusiones de manera escrita de cada uno de los problemas planteados.
- Dificultad en el reconocimiento de algunas figuras planas y sus propiedades.
- El 30% de los estudiantes presentan una solución al problema planteado, sin embargo, no alcanza el resultado o no identifica los errores presentados.

Es evidente el manejo de las TIC en las clases tradicionales, sin embargo, para algunos no es tomado como una herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje de la geometría.

5.2.3. Actividad # 3: Un movimiento desde la simetría

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. Manteniendo los debidos protocolos de bioseguridad implementados por el establecimiento educativo se da inicio a la actividad propuesta de manera ordenada. En un primer espacio se indica la estructura de la guía presentada, su objetivo y metodología a implementar la sesión.

Los estudiantes hacen el reconocimiento de la actividad # 3, la cual se compone de cuatro problemas, generando comentarios en ellos tales como: “...hoy vamos a aprender sobre la simetría, debe ser otro

movimiento como la traslación y la rotación...”⁷⁷ y también: “...yo creo que hoy vamos a jugar con las figuras y también las tablet...”⁷⁸, lo cual me permite evidenciar el interés y agrado por trabajar con el material manipulativo y tecnológico propuesto en las actividades.

Dentro del primer problema se busca identificar las reflexiones que se pueden evidenciar de manera directa en un contexto real desde la visualización y análisis de los estudiantes. Se presentan ocho imágenes en las cuales se evidencia la reflexión y se orienta a los estudiantes para definir la forma, tamaño y características de las imágenes presentadas en cada caso. Es importante resaltar que se aclara el concepto y manejo del eje de simetría en una imagen dada.

El 78% de los estudiantes no presentan mayor dificultad con las orientaciones dadas por el problema (ver Anexo 24), expresan muy bien sus ideas de forma oral, ideas tales como: “... el eje de simetría es como si le pusiera un espejo a la imagen, en todas las imágenes veo simetría...”⁷⁹, a lo cual, uno de sus compañeros dice: “... profe, no todos la carta de “naipe” es igual pero aparece al revés, ¿cierto?... ”⁸⁰. Lo que les permite hacer un análisis, una interpretación y unas conjeturas de cada imagen presentada. Es de destacar que los estudiantes visualizan diferentes soluciones e interpretaciones que me permite manipular de maneras distintas el problema dado (ver Anexo 25).

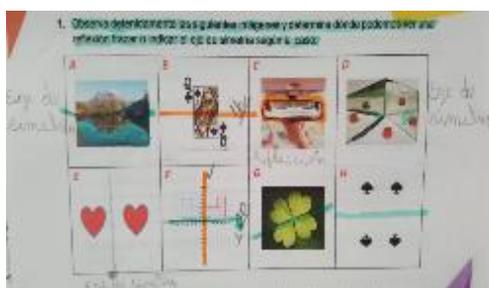


Figura 24. Ejes de simetría.

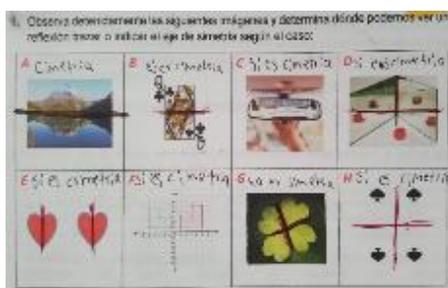


Figura 25. Otros ejes de simetría.

⁷⁷ Opiniones de los estudiantes.

⁷⁸ Opiniones de los estudiantes.

⁷⁹ Opiniones de los estudiantes.

⁸⁰ Opiniones de los estudiantes.

Dentro del desarrollo del problema, los estudiantes identifican las características de la reflexión y como se puede ver dentro de una imagen dada. Los estudiantes tratan de identificar figuras geométricas dentro de cada imagen, aunque no se haya indicado en el problema. “... yo veo cuadrados, círculos, rectángulos y hexágonos, claro que hay irregulares y regules...”⁸¹. Es importante destacar el proceso mental desarrollado por el estudiante en la identificación de figuras planas en su contexto.

El 22% de los estudiantes presentan inseguridad en la ubicación de los ejes de simetría sobre las imágenes presentadas, lo que conlleva a no presentar conclusiones claras para la solución del problema. Por otra parte, aunque se entiende el concepto de transformación simétrica, no se evidencia su aplicación en el problema presentado (ver Anexo 26).

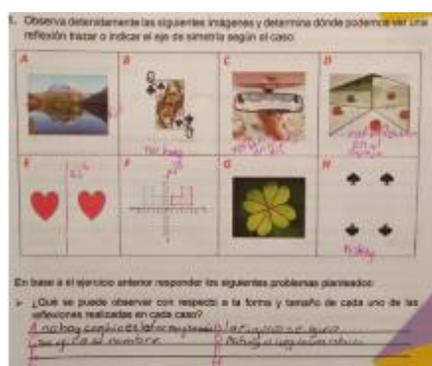


Figura 26. Dificultad en la simetría.

El problema número dos permite identificar las características principales de la reflexión sobre una imagen dada, hallar algunas figuras geométricas y sus propiedades de la misma manera que la invarianza de la simetría sobre una figura y sus principales características. Este trabajo se realiza sobre el contexto del material manipulativo, el cual permite desarrollar las imágenes mentales y completar la sección faltante.

⁸¹ Opiniones de los estudiantes.

En este problema, el 93% de los estudiantes muestran un buen manejo del material y se identifica de manera clara las figuras geométricas que componen la imagen presentada (ver Figura 27). De la misma manera muestran seguridad en la socialización de sus hallazgos (ver Figura 28).



Figura 27. Hallazgo de figuras geométricas. Figura 28. Socialización de actividad.

El 7% de los estudiantes presentan dificultades en la identificación de las figuras geométricas, por tanto, presentan conflicto en identificar sus propiedades. Para este grupo de estudiantes no es claro el papel de la simetría en una imagen determinada y la característica de invarianza para lograr un concepto de congruencia.

El tercer problema se centra en el trabajo sobre el plano cartesiano. Se presentan dos incisos; el primero trabaja sobre un octágono regular y un eje de simetría paralelo al eje “**y**”, el segundo presenta un octágono irregular y con un eje de simetría diagonal al plano presentado.

El 43% de los estudiantes, aunque presentan algunas dificultades, logran solucionar el problema en su totalidad, identifican las figuras geométricas y algunas de sus propiedades. Algunos estudiantes indican que: “...el “**b**” está más difícil porque el eje de simetría no está paralelo a “**x**” o “**y**” y eso lo hace más difícil de ubicar, aunque tengo los puntos...”⁸², este comentario me permite evidenciar el ejercicio mental que ha realizado el estudiante en el desarrollo de la reflexión (ver Figura 29).

⁸² Opiniones de los estudiantes.



Figura 29. Reflexión de hexágono. Figura 30. Construcción del hexágono.

Para el 57% de los estuantes, muestran dificultad al hallar los puntos de reflexión y su respectiva gráfica.

Los estudiantes siempre han mostrado mayor interés por la representación gráfica (ver Figura 30) y no por hallar los puntos “par ordenados prima (A')”. Es de destacar que los estudiantes identifican las figuras planas de manera correcta, pero presentan dificultad con la relación de sus propiedades de manera independiente. Por otra parte, se evidencia la confusión entre el sentido de la traslación y la simetría.

El cuarto problema hace uso de la herramienta del geoplano virtual, herramienta ya manipulada y conocida por los estudiantes. En este problema se muestran dos geoplanos, los cuales presentan dos figuras geométricas (hexágono irregular y triángulo), con los conocimientos adquiridos los estudiantes deben mostrar una reflexión con características propias, la cual debe cumplir con las condiciones iniciales del problema tales como: el eje de simetría y la reflexión que se presenta en basa a él.

Sin duda alguna el uso de los recursos digitales es uno de los espacios más interesantes para los estudiantes. Un 50% de los estudiantes presentan un dominio en la herramienta y logran mostrar algunas soluciones en cada caso. Uno de los estudiantes indica: “... *El primer geoplano no me dice cuál es el eje de simetría, entonces yo voy a colocar el que quiera. El otro geoplano no tiene problema porque si*

tiene...⁸³, lo que indica que el estudiante comprende el papel del eje de simetría en el campo de la aplicación de la transformación geométrica.

Uno de los aportes significativos de los estudiantes fue: “...profesor, en el primer geoplano podemos hacer varias reflexiones pero el segundo nos toca hacer obligatoriamente una...”⁸⁴, en esta comentario se evidencian razonamientos más profundos y permite identificar el papel de los ejes en una reflexión (ver Figura 31).



Figura 31. Reflexiones en geoplano.

El 50% de estudiantes presentan un buen uso de la tablet, pero dificultades en el uso de la aplicación como herramienta de apoyo para el proceso de aprendizaje. Aunque se ha evidenciado mayor seguridad en el manejo de la tablet, los estudiantes no muestran conceptualización de la transformación de simetría, es decir, no comprenden las propiedades de bases para hacer la reflexión de una figura geométrica, sin duda alguna tienden a ver la simetría como una traslación (ver Figura 32).

⁸³ Opiniones de los estudiantes.

⁸⁴ Opiniones de los estudiantes.



Figura 32. Dificultades en las reflexiones en el geoplano.

Los tiempos para esta última actividad son muy ajustados debido a las dificultades presentadas en el desarrollo de la actividad, sin embargo, se logra realizar el análisis y solución del problema de la mejor manera dentro de la sesión. Otras evidencias del trabajo desarrollado por los estudiantes se muestran en el Anexo 7.

Motivación en el desarrollo de la actividad. La socialización de la actividad con material manipulativa genera motivación gracias a la interacción y socialización de saberes entre los compañeros. Además, presentan interés por compartir sus hallazgos y conclusiones obtenidas durante el desarrollo de los problemas planteados perdiendo el miedo a opinar y aprender de los errores cometidos.

Logros obtenidos en la actividad # 3. Las intervenciones realizadas entre los estudiantes, las soluciones presentadas y la observación directa durante la implementación de la actividad, muestra que:

- Se fortalecen las habilidades visuales en el contexto de la resolución de problemas.
- La seguridad y confianza de los estudiantes en la participación de las actividades planteadas.
- Fortalecimiento en el manejo de las herramientas TIC y uso del material manipulativo, realizando un comparativo de herramientas.
- Más del 50% de los estudiantes identifican y comprenden los problemas con el fin de concebir diferentes estrategias de solución.

- Mayor seguridad y confianza al responder las preguntas planteadas por los compañeros y docente.

Dificultades obtenidas en la actividad # 3. Dentro de la aplicación de la actividad se presentan las siguientes dificultades:

- Se presenta dificultad en plasmar las ideas, conjeturas o conclusiones de manera escrita de cada uno de los problemas planteados.
- Dificultad en el reconocimiento de algunas figuras planas y sus propiedades.
- Un alto porcentaje de los estudiantes presentan solución al problema, sin embargo, no alcanzan el resultado para dar solución completa al problema planteado.
- Los estudiantes tienden a plasmar lo realizado o sucedido en la búsqueda de la solución al problema y no logran puntualizar la respuesta.

5.2.4. Actividad # 4: Pensando desde las transformaciones

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. Se da inicio a la actividad # 4 recordados las normas de la clases y protocolos de bioseguridad estipulados por el establecimiento educativo. En un primer momento se presenta la guía de trabajo con la actividad planteada, el objetivo de la misma y la directriz para trabajar de manera grupal.

Al recibir la guía, los estudiantes hacen el reconocimiento de la misma a lo cual aluden que: “...según veo, hoy trabajamos con todas las transformaciones juntas usando las tablet rojas y la cuadrícula como las otras veces...”⁸⁵. En dicho comentario se evidencia la familiarización con la metodología y el desarrollo de la sesión planteada.

El primer problema, busca identificar las transformaciones geométricas que se pueden utilizar e indicar las figuras geométricas presentes en la secuencia de imágenes dadas. El 86% de los estudiantes que

⁸⁵ Opiniones de los estudiantes.

desarrollan la actividad no presentan dificultades relevantes, realizan un análisis correcto de las imágenes desde sus conocimientos previos identificando diferentes transformaciones geométricas aplicadas y el reconocimiento de figuras geométricas utilizadas (ver Figura 33).

Es de destacar que en el proceso los estudiantes ya interpretan las imágenes como una sola, es decir, presentan manejo del concepto de figuras congruentes y semejantes como se evidencia a continuación:

“...esas imágenes son una sola, lo único fue que se trasladó o roto y pues eso es lo que tenemos que ver, lo que hizo...”⁸⁶.

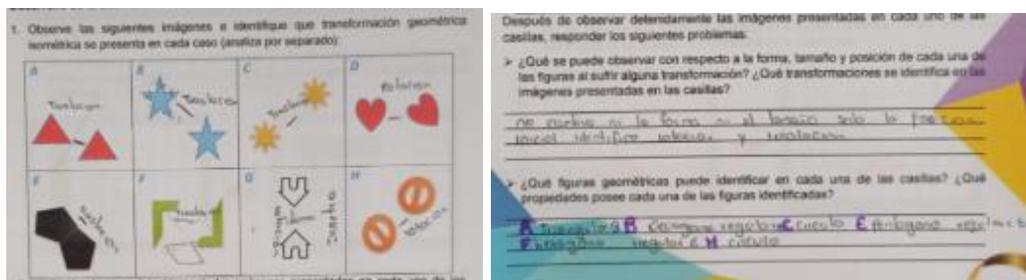


Figura 33. Transformaciones y figuras geométricas.

Por otra parte, el 14% de los estudiantes, presentan dificultades en la identificación de algunas figuras geométricas mostradas, por tanto, en sus propiedades (ver Figura 34). Los estudiantes comprenden el papel que tienen las transformaciones geométricas en una imagen determinada, sin embargo, se presenta inseguridad en la identificación de las figuras trabajadas desde sus propiedades particulares.



Figura 34. Identificación de figuras geométricas.

⁸⁶ Opiniones de los estudiantes.

En el problema dos, se destaca el material manipulativo, se trabaja con tres figuras geométricas sobre la cuadrícula buscando realizar traslaciones, rotaciones y simetrías en cada caso (ver Figuras 35).

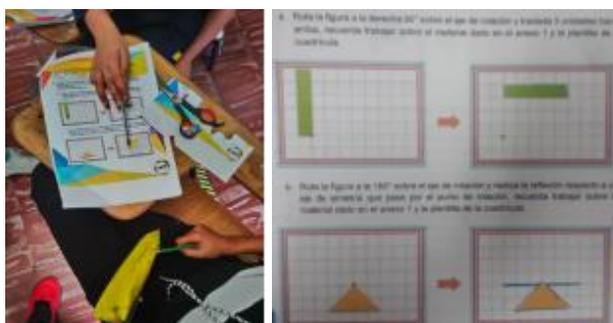


Figura 35. Transformaciones geométricas sobre cuadrícula.

Los estudiantes no presentan inconvenientes con el problema planteado, buscan diferentes estrategias de solución y dentro de los grupos se destacan comentarios como:

- Se debe hacer una de las transformaciones, luego la otra y luego la se pega la figura en la cuadrícula.
- Contando los lados se trabaja con un triángulo, un rectángulo y un heptágono.
- Como son transformaciones isométricas no cambian los ángulos, los lados, las longitudes solamente la posición.
- Se basa la rotación y la reflexión en el eje de rotación y eje de simetría.

Se destaca el dominio conceptual que han tomado los estudiantes y ese fortalecimiento de la cultura geométrica (ver Figura 36).

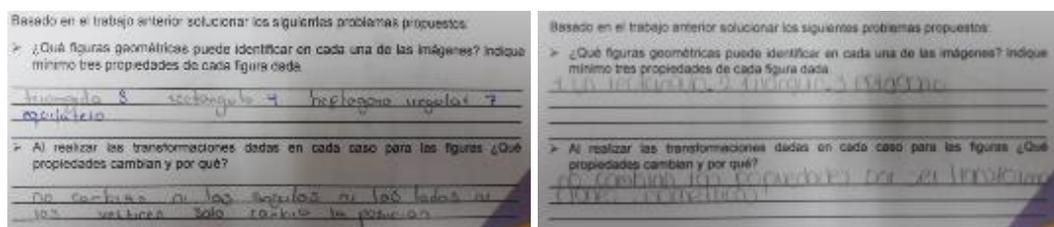


Figura 36. Manejo conceptual.

Para el problema tres los estudiantes no presentan mayor dificultad, pero si muchas inquietudes para lograr una solución sobre el plano cartesiano, preguntas tales como: “... ¿el eje de simetría sería en este caso el eje “y” ?; ... ¿primero hacemos la reflexión y luego la traslación?; ... es un hexágono irregular ¿tiene seis lados diferentes?; ... ¿el lado E prima y D prima son los más cercanos a eje de simetría?; ... ¿el vector traslación me dice que lo debo mover dos pasos a la derecha?; ... ¿se pueden hacer dos figuras congruentes a la derecha del eje “y”?, entre otros”⁸⁷.

Las preguntas anteriores permiten evidenciar de manera clara el fortalecimiento en el reconocimiento de las figuras geométricas y las transformaciones isométricas en el plano (ver Figura 37).

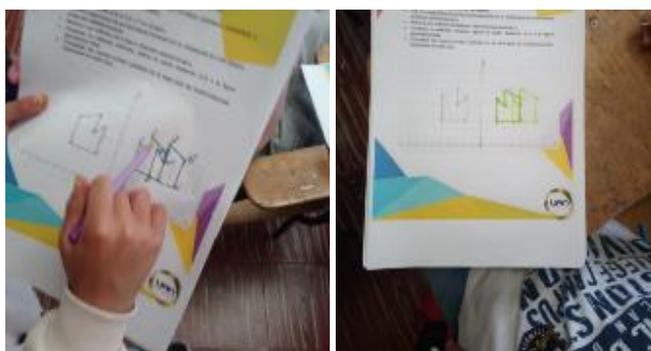


Figura 37. Trabajo sobre el plano cartesiano.

Para el problema cuatro, se trabaja con la herramienta GeoGebra, en la cual le permite al estudiante un trabajo dinámico con transformaciones isométricas (rotación, traslación y simetría) desde la manipulación, visualización y manejo de las TIC.

Para este problema y después del reconocimiento de la aplicación, no se presenta dificultad en su análisis y se presentan comentarios por parte de los estudiantes tales como: “...miren, es un carro y está hecho con solo figuras geométricas...”⁸⁸ y “... en la rotación nos dan el punto donde se rota según los grados

⁸⁷ Preguntas realizadas por algunos estudiantes en sus grupos de trabajo.

⁸⁸ Opiniones de los estudiantes.

que les demos, miren que al comienzo y al final queda en el mismo lugar...”⁸⁹. En este caso se evidencia el reconocimiento de las figuras geométricas de manera visual y prioritaria en la imagen presentada al igual que algunos de los elementos constituyentes de las transformaciones isométricas.

Los estudiantes, en su totalidad, manipulan de manera correcta la herramienta y contribuyen de manera activa a la solución del problema planteado dentro del grupo de trabajo (ver Figura 38). Otras evidencias fotográficas, de las actividades desarrolladas, se presentan dentro del Anexo 8.



Figura 38. Trabajo con GeoGebra dinámico.

Motivación en el desarrollo de la actividad. La socialización de los problemas planteados dentro del grupo de trabajo genera motivación gracias a la interacción, socialización y apoyo conceptual entre compañeros. Además, presentan interés por compartir sus hallazgos, conclusiones durante el desarrollo de toda la actividad propuesta.

Logros obtenidos en la actividad # 4. Las intervenciones, la producción escrita y la observación directa durante la implementación de la actividad evidencian logros como:

- La seguridad, confianza y apoyo en la participación de las actividades planteadas.

⁸⁹ Opiniones de los estudiantes.

- Fortalecimiento en el manejo de nuevas herramientas desde el uso de las TIC.
- Más del 80% de los estudiantes identifican y comprenden los problemas con el fin de socializar diferentes estrategias de solución.
- Se fortalecen las habilidades visuales en el contexto de la resolución de problemas.

Dificultades obtenidas en la actividad # 4. Dentro de la aplicación de la actividad no se presentan mayores dificultades, sin embargo, cabe resaltar el ajuste en el manejo de los tiempos principalmente en la actividad con las TIC debido al reconocimiento de una nueva aplicación como lo fue el GeoGebra.

5.2.5. Actividad # 5 Figuras geométricas en el contexto

Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. En un primer momento se recuerdan las normas de la clases y protocolos de bioseguridad estipulados por el establecimiento educativo como es costumbre antes de dar inicio a la actividad # 5. Presentando la guía de trabajo, el objetivo de la misma y la directriz para trabajar de manera grupal se hace entrega de la actividad para la sesión.

Con agrado, los estudiantes reciben la guía de manera individual para realizar el trabajo en grupos de tres personas con el fin de socializar, discutir y conjeturar resultados obtenidos, a lo cual una estudiante indica: “...profe, ¿hoy trabajamos en grupo como la última vez?, mire que es mejor y podemos ayudarnos cuando no entendemos algo ¿sí?...”⁹⁰. En dicha intervención, se evidencia la familiarización con la metodología, la motivación por la socialización e interés por el trabajo grupal.

El primer problema, busca identificar las transformaciones geométricas que se han utilizado en cada caso y relacionar con la figura geométrica trabajada en el contexto de las invarianza de las propiedades desde la visualización. El 93% de los estudiantes no presentan dificultad en el desarrollo de la actividad, realizan un análisis correcto de la imagen y las transformaciones aplicadas en cada caso. En dicho análisis se

⁹⁰ Opiniones de los estudiantes.

destaca la identificación de la figura en el plano y algunas propiedades, la identificación de invarianza con respecto a la forma y tamaño, y el componente según su posición final. Todo este análisis desde sus conocimientos previos se muestra en la Figura 39.

Se destaca el manejo adecuado de las imágenes respecto a la interpretación del problema, fortaleciendo el concepto de figuras congruentes y semejantes como se evidencia en los comentarios realizados por los estudiantes: "...la figura principal es la roja, lo único que hizo fue que se trasladó, rotó y se hizo la reflexión, ahora miremos cada color con qué transformación la relacionamos..."⁹¹. En este criterio los estudiantes hacen referencia a relacionar la figura geométrica con una transformación realizada en cada caso según su color.

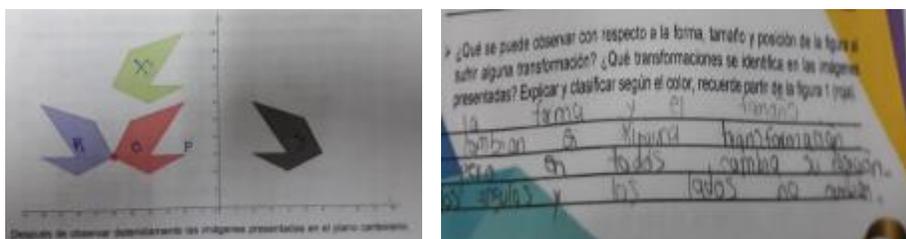


Figura 39. Visualización de las transformaciones y figura geométrica.

Por otra parte, el 7% de los estudiantes presentan alguna dificultad en la relación de las propiedades según la figura geométrica dada para el problema (ver Figura 40). Los estudiantes comprenden el papel que posee las transformaciones geométricas en el plano presentado, sin embargo, muestran inseguridad en la identificación de las figuras trabajadas desde sus propiedades particulares.

⁹¹ Opiniones de los estudiantes.

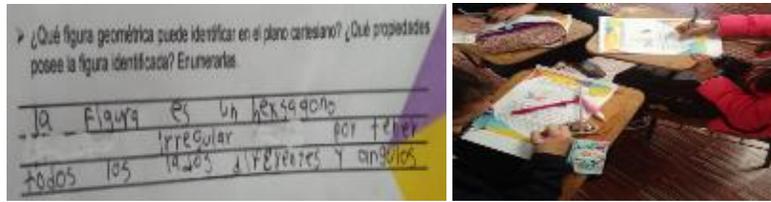


Figura 40. Identificación de las propiedades de la figura geométrica.

En el problema dos se enfatiza el trabajo con los teselados, se identifican las transformaciones geométricas utilizadas para su construcción y la relación de las figuras geométricas dentro del mismo teselado y con teselados distintos (ver Figuras 41).



Figura 41. Trabajo con los teselados.

Los estudiantes no presentan mayores inconvenientes con el problema planteado, en algunos casos identifican algunas dificultades que los llevan a fortalecer los procesos heurísticos para llegar a la solución.

Dentro de los grupos se destacan conjeturas como:

- Primero se escriben las transformaciones que se presentan en cada uno de los teselados.
- Marcar los ejes de simetría con una regla y distintos colores, después se determina la cantidad de ejes por teselado.
- Como son transformaciones isométricas no cambian el tamaño ni la forma solamente la posición. En base a ese cambio de posición se construye el teselado.
- Las figuras geométricas utilizadas en un teselado son iguales, es decir, son figuras congruentes.

- Las figuras geométricas utilizadas en teselado distintos son parecidas puesto que cambia el tamaño, es decir, son figuras semejantes.

Se destaca el dominio conceptual que han adquirido los estudiantes y ese fortalecimiento de la cultura geométrica en el desarrollo de habilidades (ver Figura 42).

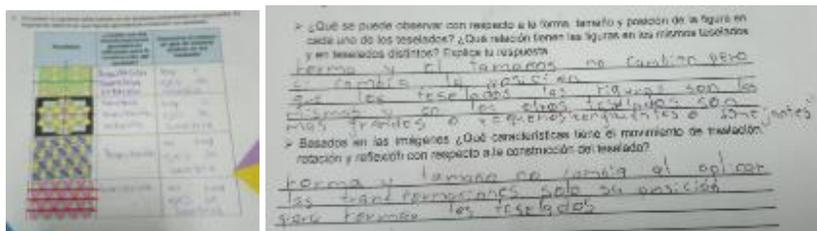


Figura 42. Manejo conceptual y cultura geométrica.

En el tercer problema los estudiantes no presentan dificultad, pero si algunas inquietudes o inseguridades para lograr una solución sobre el plano, evidenciando preguntas tales como: “... ¿yo puedo tomar los puntos que quiera ?; ... ¿solo debo seguir las instrucciones?; ... cuando hagamos la figura ¿todas deben ser iguales?; ... después de hacer la figura en el plano cartesiano ¿puedo llenar la tabla?; ... me confundo, ¿se pueden utilizar varios colores?, entre otros”⁹².

Se evidencia que las preguntas planteadas por los estudiantes son de forma y no de fondo, es decir, se muestra de manera clara el reconocimiento de las figuras geométricas, las transformaciones isométricas en el plano y su relación con el problema planteado desde diferentes perspectivas (ver Figura 43).

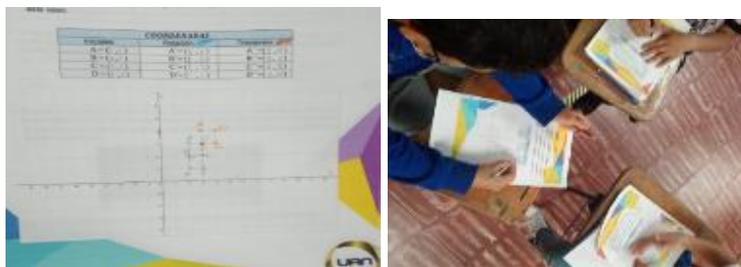


Figura 43. Trabajo sobre el plano cartesiano y tabla de coordenadas.

⁹² Preguntas realizadas por algunos estudiantes en sus grupos de trabajo.

El problema número cuarto se basa en la herramienta del geoplano virtual, herramienta ya trabajada por los estudiantes en distintas actividades. Con los conocimientos adquiridos los estudiantes generan tres planos, en cada plano muestran una figura geométrica distinta con una transformación diferente que ha sido orientada en el cuerpo del problema a trabajar.

Se destaca el uso de los recursos digitales como uno de los espacios más interesantes, llamativos y enriquecedores para los estudiantes. Más del 90% de los estudiantes presentan dominio de la herramienta y logran mostrar distintas soluciones en cada caso dando resoluciones claras al problema. Uno de los estudiantes, demostrando seguridad, indica: “... *primero vamos a construir las tres figuras en planos, todas diferentes, y luego escogemos que transformación le damos a cada una de las figuras hechas, fácil ...*”⁹³, lo que indica que el estudiante evidencia la estructura del problema y muestra seguridad en los conocimientos previos necesarios para la solución del problema planteado bajo el esquema presentado.

Otro de los aportes más significativos de los estudiantes de manera grupal fue: “...*profe, vamos a hacer las tres figuras en un mismo plano y después hacemos los movimientos, es más fácil y no repetimos ni figura ni transformación...*”⁹⁴, dentro de este comentario se genera comparación de las figuras geométricas e identificación de las mismas, por otra parte, se evidencian manejo y comparación entre las distintas transformaciones geométricas trabajadas (ver Figura 44).

⁹³ Opiniones de los estudiantes.

⁹⁴ Opiniones de los estudiantes.



Figura 44. Trabajo con el geoplano virtual.

Por otra parte, los estudiantes identifican las invarianzas de las figuras geométricas desde la longitud de los lados, números de vértices, medidas de los ángulos entre otras. Destacando la forma y tamaño de las figuras, su relación con la posición inicial y final cuando se aplican las distintas transformaciones (ver Figura 45).

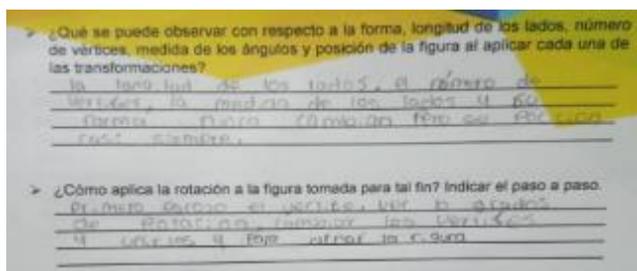


Figura 45. Análisis de las invarianzas en las figuras.

Los tiempos para esta actividad son ajustados debido a lo extenso para la solución de alguno de los problemas planteados, sin embargo, se logra realizar el análisis y solución dentro de la sesión. Otras evidencias del trabajo realizado por los estudiantes se muestran en el Anexo 9.

Motivación en el desarrollo de la actividad. Desde el momento del ingreso del docente al aula, los estudiantes presentan la mejor actitud y energía con el desarrollo de la actividad proyectada. La socialización de los problemas planteados dentro de cada grupo de trabajo genera una responsabilidad

por lo que se puede socializar y compartir entre compañeros. Además, presentan críticas constructivas al compartir sus hallazgos y el de sus compañeros durante todo el desarrollo de la actividad.

Logros obtenidos en la actividad # 5. Dentro de la implementación de la actividad se evidencian grandes logros desde la producción escrita de los estudiantes, suministros fotográficos y la observación directa del docente, logros tales como:

- La mayor parte de los estudiantes comprenden los problemas planteados, lo cual permite socializar diferentes estrategias de solución tanto individuales como grupales.
- Se fortalecen las habilidades visuales y heurísticas en el contexto de la resolución de problemas.
- Se forja confianza y seguridad al generar aportes en la solución de las actividades planteadas.
- Fortalecimiento de las habilidades desarrolladas para el manejo de nuevas herramientas desde el uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Favorecimiento en la construcción de una cultura geométrica desde la escuela primaria.

Dificultades obtenidas en la actividad # 4. En la aplicación de la presente actividad no se presentan un gran número de dificultades, sin embargo, algunas de ellas son:

- El manejo de los tiempos debido a la extensión de la solución en algunos problemas planteados en la actividad.
- Se presenta dificultad en plasmar de manera escrita las conjeturas, ideas u observaciones por parte del estudiante.

5.3. Resultados de la encuesta de satisfacción

Buscando una mayor consolidación de los resultados obtenidos en las actividades se aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes de la muestra (ver Anexo 10). Dicha encuesta se compone de un cuestionario de seis preguntas cerradas, donde los estudiantes muestran la perspectiva desde su opinión

personal con respecto al desarrollo de las actividades implementadas (ver Figura 46). A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la implementación de la encuesta.



Figura 46. Aplicación de la encuesta de satisfacción.

La pregunta número uno, busca identificar la motivación de los estudiantes por el estudio de la geometría desde el desarrollo de las actividades propuestas. El 100% de los estudiantes manifiestan tener motivación por el estudio de la geometría desde la implementación de las actividades propuestas en las clases.

La segunda pregunta se orienta hacia el impacto que tienen las actividades si se implementan con mayor frecuencia en la clase de geometría. En este sentido, el 93% de los estudiantes indican que este tipo de actividades deben ser implementadas con una alta frecuencia, a lo cual un estudiante indica: “...*ojalá nos vuelvan a dictar geometría, pero con actividades bonitas como las que hicimos, son chéveres...*”⁹⁵, en dicha intervención se puede ver la falta de regularidad de las clases y por otra parte, el interés de la estudiante por la asignatura.

El 7% restante siente un poco de temor pues manifiesta que: “...*no había tenido la clase de geometría a parte de las clases de matemáticas y nunca había visto tantos temas...*”⁹⁶, cabe resaltar que el estudiante es nuevo y genero un poco de ansiedad en el desarrollo de las actividades propuestas.

⁹⁵ Opiniones de los estudiantes.

⁹⁶ Opiniones de los estudiantes.

Para la tercera pregunta se presenta una comparación entre reto y dificultad por parte de los estudiantes, para lo cual, el 86% de ellos lo visualizan como un reto que requiere trabajo: “... yo lo vi muy difícil pero poco a poco iba entendiendo, no era tan fácil ...”⁹⁷. Los estudiantes hacen referencia a las actividades como un reto a la hora de su desarrollo y principalmente de manera individual. El 14% restante no lo ven como un reto sino como actividades llamativas que requieren tiempo para su desarrollo.

La pregunta número cuatro y cinco, se caracterizan por el uso de las tablet y el material manipulativo en el estudio de la geometría; con el uso de dichas herramientas se busca solucionar algunos de los problemas planteados en las actividades propuestas. El 100% de los estudiantes manifiestan tener interés por el estudio de la geometría desde la implementación de las tablet y material manipulativo en el desarrollo de las actividades propuestas en las clases.

Respecto al uso de las herramientas, alguno de ellos manifiestan: “... es mejor trabajar con las tablet que escribir, claro que escribir es importante profe...”⁹⁸, por el contrario otro afirmaba que: “... lo mejor de todo es recortar y pintar, yo entiendo muchísimo mejor...”⁹⁹. Lo que permite nuevamente evidenciar la motivación, interés y fortalecimiento del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes.

La quinta pregunta, hace relación a la motivación por el trabajo independiente, en el cual se tiene que el 57% de los estudiantes sienten motivación por el trabajo realizado. Sin embargo, el 43% no se sienten tan seguro, algunos de los comentarios son: “...es mejor trabajar en grupo uno se ayuda más y los compañeros ayudan a corregir...” y “...cuando trabajo solo a veces pienso que me equivoco y eso no me gusta, profe es mejor de a grupitos...”¹⁰⁰. Lo cual permite evidenciar el reto que tienen los estudiantes en relación con la forma de trabajo.

⁹⁷ Opiniones de los estudiantes.

⁹⁸ Opiniones de los estudiantes.

⁹⁹ Opiniones de los estudiantes.

¹⁰⁰ Opiniones de los estudiantes.

A continuación, se presenta la siguiente gráfica (ver Gráfica 1), en la cual se muestran los resultados de manera general de la encuesta de satisfacción desarrollada a los estudiantes.



Gráfica 1. Resultados encuesta de satisfacción.

Conclusiones del capítulo 5

El desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, la motivación por lo aprendido, los logros alcanzados y las dificultades presentadas, establecen el estricto orden del análisis de los resultados obtenidos mediante la implementación de cada una de las actividades propuestas.

La observación directa y el análisis de las actividades desarrolladas por cada uno de los estudiantes, son los pilares para identificar las estrategias, las interacciones y los procesos heurísticos utilizados en la resolución de los problemas planteados en cada actividad.

El uso de instrumentos tecnológicos como la tablet y del material manipulativo como recursos didácticos, es importante para identificar los diferentes procesos geométricos desarrollados en la resolución de los problemas, lo cual favorece el desarrollo del pensamiento geométrico desde los primeros años académicos.

Las transformaciones geométricas son para los estudiantes, un medio de aprender geometría, en la cual se busca identificar los procesos heurísticos del estudiante a través de la resolución de problemas, el uso de material manipulativo y tecnológico, implementado en las actividades.

CONCLUSIONES

La presente investigación propicia favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría plana a través de las transformaciones geométricas, en los estudiantes del grado quinto de primaria, la cual da respuesta al objetivo planteado. A continuación, se presentan los resultados más relevantes de la investigación:

- La revisión de la literatura sobre proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométricas en la escuela primaria, destaca la resolución de problemas desde el uso de las TIC y el material manipulativo en el grado quinto. Se resaltan las investigaciones realizadas por: Voltoline (2018); Jones y Mooney (2003); Eddins, Maxwell y Stanislaus (1994); Hershkowitz (2014); Alape (2013); Claros, Huertas y Castro (2015); Galindo (1996); Fonseca y Sánchez (2007); Zaranis y Synodi (2016); Arvanitaki y Zaranis (2019); Voltoline (2018); Nason, Chalmers y Yeh (2012); Sinclair y Bruce (2015), entre otros. Estos investigadores enfatizan que el desarrollo del pensamiento geométrico se debe fortalecer en los primeros años de formación de los estudiantes, con el apoyo de estas herramientas.
- Galindo (1996); Marmolejo y Vega (2005); Xistouri, Pitta y Gagatsis (2014) y Céspedes, Valencia y Santacruz (2012), entre otros, relacionados en el estado de arte, proponen varios sistemas de actividades, modelos didácticos, estrategias pedagógicas y secuencias didácticas, orientadas a fortalecer el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de primaria. Dichos autores enfocan sus investigaciones en aspectos como: el razonamiento geométrico, la visualización matemática, el uso de las TIC, el uso de materiales didácticos y manipulativos. Es importante indicar que son escasas las investigaciones en Colombia con relación a la enseñanza aprendizaje de la geometría, a partir de las transformaciones geométricas.

- La enseñanza aprendizaje de las figuras planas y sus propiedades a través de las transformaciones geométricas, es un camino para el fortalecimiento y la construcción robusta del conocimiento geométrico, que propicia la búsqueda de los conocimientos, habilidades y genera cultura geométrica.
- La resolución de problemas apoyada en el uso de material manipulativo, las TIC y la visualización matemática de manera articulada, constituyen una estrategia pedagógica pertinente para generar inquietudes y motivaciones, con el fin de brindar una visión llamativa de la geometría en el aula de clase.
- En la implementación de las actividades, se evidencia que los estudiantes presentan falencias en el razonamiento geométrico, entre las que se hace necesario precisar la dificultad a la hora de expresar sus conjeturas, sus observaciones o inquietudes presentadas principalmente de manera individual, debido a la falta del manejo conceptual e implementación regular de actividades geométricas asociadas.
- Después de la implementación de las actividades propuestas, algunos de los resultados generales son:
 - a. Los estudiantes desarrollan habilidades tales como: la observación, el análisis y la argumentación, además fortalecen el trabajo individual y grupal generando confianza y seguridad en sus intervenciones y construcciones geométricas.
 - b. Dentro del avance de las actividades implementadas se evidencia el uso del material manipulativo, contribuyendo directamente a la solución de los distintos problemas planteados dentro de las actividades.
 - c. El desempeño de los estudiantes a nivel tecnológico es relevante, desde el uso y manipulación de las Tablet como herramienta para la solución de los problemas planteados dentro de las actividades propuestas.

- d. El desarrollo de la visualización matemática, es una de las habilidades de mayor progreso e implementación dentro de las actividades propuestas. Los estudiantes muestran inquietud y motivación por los procesos de visualización, lo cual es base para el desarrollo del pensamiento geométrico.
 - e. Los estudiantes muestran motivación por investigar temas asociados a las transformaciones geométricas y figuras planas, pues desarrollan de manera autónoma los temas trabajados en las clases, evidenciando interés por el aprendizaje de la geometría.
 - f. El desarrollo de las actividades de manera individual, permite la observación y orientación del estudiante antes, durante y después de la implementación de las actividades, orientando el acompañamiento en los distintos ritmos de aprendizaje.
 - g. El trabajo grupal permite desarrollar en la mayoría de estudiantes, la seguridad, la confianza y el dinamismo al desarrollar de manera conjunta cada una de las actividades propuestas.
 - h. El 86% de los estudiantes que hacen parte de la muestra, logran alcanzar los objetivos planteados en la investigación.
 - i. El 14% de los estudiantes logran el objetivo de manera parcial, debido a las dificultades presentadas en los conocimientos geométricos previos, los cuales son necesarios para el desarrollo de las actividades.
- Con el fin de fortalecer el proceso y los resultados obtenidos se implementa una encuesta de satisfacción a los estudiantes, en la cual se busca identificar el punto de vista de manera individual y grupal, para contrastarlos con los resultados obtenidos en las actividades implementadas. Dentro de estos resultados se resaltan:

- a. Es motivante y retadora la metodología y estructura implementada en las actividades aplicadas, creando en los estudiantes grandes retos conceptuales dentro del desarrollo de las habilidades geométricas.
- b. El trabajo con las tablet y el material manipulativo permite ver la buena actitud de los estudiantes en el desarrollo de las actividades planteadas.
- c. Se destaca el trabajo grupal de los estudiantes, en el cual se evidencia participación, seguridad en los temas trabajados y una realimentación formativa dentro del grupo.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades relacionadas con la enseñanza aprendizaje de las figuras planas a través de las transformaciones geométricas, la cual sustenta su construcción en la resolución de problemas, la visualización matemática, el uso del material manipulativo y el uso de las TIC, sugiere las siguientes recomendaciones:

- Continuar los estudios de investigación desde el papel de las transformaciones geométricas en la enseñanza de la geometría durante los primeros años de la educación formal.
- Generar más actividades en las cuales se enseñe geometría desde las transformaciones geométricas, es decir, enseñar geometría desde el mismo conocimiento geométrico.
- Fortalecer el trabajo en comunidades de práctica, donde se implemente el uso de materiales manipulativos y tecnológicos, con el fin de lograr conocimientos robustos de los contenidos geométricos.
- Fortalecer el trabajo individual de los estudiantes, generando seguridad en el manejo de los materiales didácticos y autonomía en el desarrollo del pensamiento geométrico.

BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, M. (2010). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. *Experiencias de un curso de formación docente. Tecné, Episteme y Didaxis*, 28.
- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Universidad Industrial de Santander.
- ALME 32 (2019). Acta latinoamericana de matemática educativa, segunda edición [PDF]. México, C. México. CALME.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988). Materiales para construir la geometría. *Editorial Síntesis S.A.*
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*.
- Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.
- Arvanitaki, M. & Zaranis, N. (2019). The use of ICT in teaching geometry in primary school. *Springer. Education and Information Technologies*.
- ASOCOLME (2019). *Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa [Blog]*. ALT24. Recuperada de: <http://asocolme.org/index.php/eventos/anteriores/ecme-13/conferencistas-y-cursillistas/43-publicaciones-asocolme/memorias-ecme>.
- Atiyah, M. (2001) Mathematics in the 20th century: geometry versus algebra. *Mathematics Today*, 37.
- Báez, J. y Pérez, T. (2009). La Investigación cualitativa. Madrid. Segunda edición, 2009, *ESIC*.
- Báez, J. y Pérez, T. (2009). La Investigación cualitativa. Madrid. Segunda edición, 2009, *ESIC*.
- Castro, E. (2007). Didáctica de la matemática en la educación primaria. *Síntesis*.
- CERME 12 (2019). *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Free university of Bozen-Bolzano. Recuperado de: <https://www.cerme12.it/>.

- Céspedes, G., Valencia, B. y Santacruz, S. (2012). Realidad Aumentada como herramienta en la enseñanza-aprendizaje de geometría básica. Bogotá, Colombia. *PANORAMA*.
- Clame (2020). Acta latinoamericana de matemática educativa. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*. Recuperado de: <https://www.clame.org.mx/actas.html>.
- Claros, X., Huertas, Y. y Castro, C. (2015). Interacciones y relaciones con estudiantes de grado cuarto para la comprensión de las transformaciones geométricas de congruencia. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. *RECME*.
- Cotic, N. (2016). Secuencias didácticas para la enseñanza de la geometría con Geogebra. *CUREM 6. Institutos de Formación Docente – IGVL – Argentina*.
- Cuero, G. y Manyoma, A. (2019). Transformaciones geométricas a partir de la semejanza y la congruencia. *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- ECME 14 (2013). Encuentro colombiano de matemática educativa [PDF]. Bogotá D.C, Colombia. *Editorial UD*.
- Eddins, S, Maxwell, E. y Stanislaus, F. (1994). Geometric Transformations - part 1. *The Mathematics Teacher, Vol. 87*.
- Enrich, C. y Carnicero, L. (2013). *Transformaciones Geométricas*. Recuperado de: https://matematicaecc.files.wordpress.com/2013/04/010-00-apu-e_transformaciones1.pdf
- Falk, M. (2001). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones*. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Fonseca, J. & Sánchez, B. (2007). *Algunas transformaciones geométricas del plano. Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.

- Freudenthal, H. (1966). Rola intuicji geometrycznej we współczesnej matematyce [The role of geometric intuition in modern mathematics]. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Wiadomości Matematyczne IX*.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría. *Revista EMA*. Vol. 2.
- García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México. Segunda edición, 2011.
- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. p. 530.
- Goldenberg, E. (1998). What is Dynamic Geometry. *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*.
- Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic Geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.). *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*.
- Grimaldy, L. (2017). *Proyecto de aula que contribuye a la formación de docentes en básica primaria a través de la enseñanza de la geometría activa para el desarrollo del pensamiento espacial*. Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.
- Gutiérrez, A. (2005). *Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos*. Módulo optativo del Plan de Estudios de Maestro. Curso 2005-06. Universidad de Valencia. Departamento de Matemática.
- Hanna, G. (2002). Proof and its classroom role: A survey. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos, *Ensino e aprendizagem da geometria*. Lisboa: SPCE.
- Herbst, P., & Kosko, K. (2014). Mathematical knowledge for teaching and its specificity to high school geometry instruction. In J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education*. New York, NY: Springer.

- Hershkowitz, R. (2014). *Shape and Space – Geometry Teaching and Learning*. Springer, S. Lerman.
- ICME-14 (2019). *14th International Congress on Mathematical Education 2020*. Shanghai, China.
Recuperado de: file:///C:/Users/PC%20SMART/Downloads/15594604187_79095472.pdf.
- IX CIBEM (2018). *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil. Recuperado de: <https://www.pucsp.br/es.cibem2021/programacion>.
- Jones, K. y Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. *Enhancing Primary Mathematics*. London: Open University Press.
- Julio, L. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Khoo, S. (2001). The teaching and learning of geometry. *Unpublished M.Ed dissertation*, Universiti Brunei Darussalam.
- Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, Vol. 7, pp. 40-52.
- Krulik, S. & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.
- Kuzniak, A. (2012). Understanding the Nature of the Geometric Work Through Its Development and Its Transformations. Université Paris Diderot, France. *Springer Open*.
- Lai, M. (2008). *In An exploratory study into Chinese and English children's visual perceptual and their spatial and geometric conceptions in Piagetian tasks (Unpublished doctoral dissertation)*. The University of Hong Kong.
- León, T. (2008). *Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria*. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana, Cuba.
- Lima, I. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano. *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Vol. 24.

- Llana, L. y Atara, S. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. ELSERVIER. *Journal of Mathematical Behavior* 29, 2010.
- Lugo, M. (2008). Las políticas tic en la educación de américa latina. tendencias y experiencias. *Revista fuentes*.
- Marmolejo, G. y González, M. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto. *Conferencia presentada en Asocolme 12*. Armenia, Colombia.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: Visualización, figuras y áreas. *XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética*. Bogotá, Colombia. Vol. II.
- Maturana, H., Prieto, J. y Curbeira, D. (2018). Formación de habilidades matemáticas en la enseñanza primaria de Colombia. *Acalán* 35. Universidad Autónoma del Carmen. México.
- Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.
- Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2018). Transformations in the visual representation of a figural pattern. *Mathematical Thinking and Learning*.
- Nanson, R, Chalmers, C. y Yeh, A. (2012). Facilitating growth in prospective teachers' knowledge: teaching geometry in primary schools. *J Math Teacher Educ*.
- Piaget, J. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. London, United Kingdom: Routledge and Reagan Paul.
- Pizarro, R. (2009). *Las TIC en la enseñanza de las matemáticas. Aplicación al caso de los Métodos Numéricos*. Universidad Nacional de la Plata. Recuperado de

http://postgrado.info.unlp.edu.ar/Carreras/Magisters/Tecnologia_Informatica_Aplicada_en_Educacion/Tesis/Pizarro.pdf. p. 53.

- Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational studies in Mathematics*,.
- Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.). *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning*.
- RECME (2018). Encuentro colombiano de matemática educativa, volumen 3 [PDF]. Bogotá D.C, Colombia. *Editorial Smart math*.
- Rodríguez, J., Parcerisa, A. y Área, M. (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Ed: Grao.
- Samper, C. y Camargo, L. (Eds.) (2019). *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones [PDF]*, 24. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Sedó, M. (2016). *Explorando la geometría en el segundo curso del primer ciclo de educación primaria*. Universidad Internacional de la Rioja, UNIR. Barcelona, España.
- Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*.
- Soldano, C. & Arzarello, F. (2017). Learning with the logic of inquiry: game-activities inside Dynamic Geometry Environments. In T. Dooley & G. Gueudet, Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education. Dublin, Ireland: *DCU Institute of Education and ERME*.
- Swoboda, E., & Vighi p., (2016). Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries. *Hamburg: Springer Open*.

- Thaqi, X y Giménez, J. (2014). Early Trajectories in Pre-service Teachers' Training. The case of Geometric Transformations. *REDIMAT*, Vol. 3.
- Thaqi, X, Giménez, J. y Rosich, N. (2011). *Geometrical transformations as viewed by prospective teachers*. Universidad de Prishtina; Universidad de Barcelona.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2008). *Realistic Mathematics Education*. S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education.
- Vasco, C. (1992). Geometría activa y geometría de las transformaciones. *Tecné episteme y didaxis*. Universidad Nacional de Colombia.
- Voltoline, A. (2018). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school. *Springer, Cham*. Cap. 5.
- Xistouri, X, Pitta, D. y Gagatsis, A. (2014). Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17.
- Yaglom, M. (1975). Geometric transformations I. The Mathematical Association of America. *Editorial Committee*. Vol. 8.
- Yanik, H. y Flores, A. (2009). Comprensión de las transformaciones geométricas rígidas: la ruta de aprendizaje de Jeff para la traducción. *El diario de comportamiento matemático*, Volumen 28, 2009.
- Zaranis, N. y Synodi, E. (2016). A comparative study on the effectiveness of the computer assisted method and the interactionist approach to teaching geometry shapes to young children. *Educ Inf Technol*, 22.

ANEXOS

Anexo 1. Entrevista a especialistas

Objetivo: Contrastar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria en la actualidad.

Fuente: Elaboración propia.

Desarrollo: Estimado doctor, su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para el desarrollo de esta investigación, la cual pretende favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano para propiciar un robusto conocimiento de las figuras bidimensionales y sus propiedades en estudiantes del último año de la educación primaria.

Las siguientes preguntas tienen su enfoque en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la educación primaria. Agradezco su colaboración y atención prestada para el desarrollo de la presente investigación.

Cuestionario

1. ¿Cómo usted concibe la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria en la actualidad?
2. ¿Qué dificultades existen en la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?
3. ¿Qué materiales didácticos utilizó o utiliza en la enseñanza aprendizaje de la geometría en la escuela primaria?
4. En el ICME 13 y en el ICME 14, en el TSG 12 y TSG 8 respectivamente, se habla de las transformaciones en el plano en la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, ¿considera viables estos enfoques de trabajo para desarrollar dentro del aula?
5. Puede sugerir algunas estrategias o actividades para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.

Anexo 2. Encuesta a docentes área de matemáticas

Objetivo: Diagnosticar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela primaria en la actualidad.

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo. Estimados profesores, su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para el desarrollo de esta investigación, la cual pretende favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las figuras bidimensionales y sus propiedades en estudiantes de grado quinto de la educación primaria.

El siguiente cuestionario tiene su enfoque en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la educación primaria. Agradezco su colaboración y atención prestada para el desarrollo de la presente investigación.

1. Datos generales del docente

- a. Posee el título de licenciado en matemáticas: Sí ___ No ___. Si su respuesta es **NO**, indicar el título que posee: _____

En caso de tener posgrado, indique el título otorgado:

- b. Su experiencia como docente orientador del área de matemáticas es de:

0-2 años _____ 2-5 años _____ 5-10 años _____ 10 o más años _____

2. Cuestionario

Valora en una escala del uno "1" al cinco "5", donde, cinco (5) es siempre (máxima calificación), cuatro (4) es casi siempre, tres (3) es algunas veces, dos (2) es rara vez y uno (1) es nunca (mínima calificación), a las siguientes preguntas relacionadas con su práctica docente.

PREGUNTAS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1. ¿Utiliza los conocimientos previos que poseen los estudiantes para la planeación de las clases de geometría?					
2. ¿Utiliza materiales didácticos en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría?					
3. ¿Los estudiantes presentan dificultades en el desarrollo de las actividades propuestas en el área de geometría?					
4. ¿Considera que el uso de herramientas tecnológicas "TIC" en la clase de geometría fomenta el desarrollo conceptual de los estudiantes?					
5. ¿En las clases sus estudiantes trabajan de manera independiente para la búsqueda del conocimiento geométrico?					
6. ¿En su práctica pedagógica brinda un tratamiento adecuado al desarrollo de los contenidos geométricos a través de la resolución de problemas?					

3. Basados en su experiencia, responder las siguientes preguntas

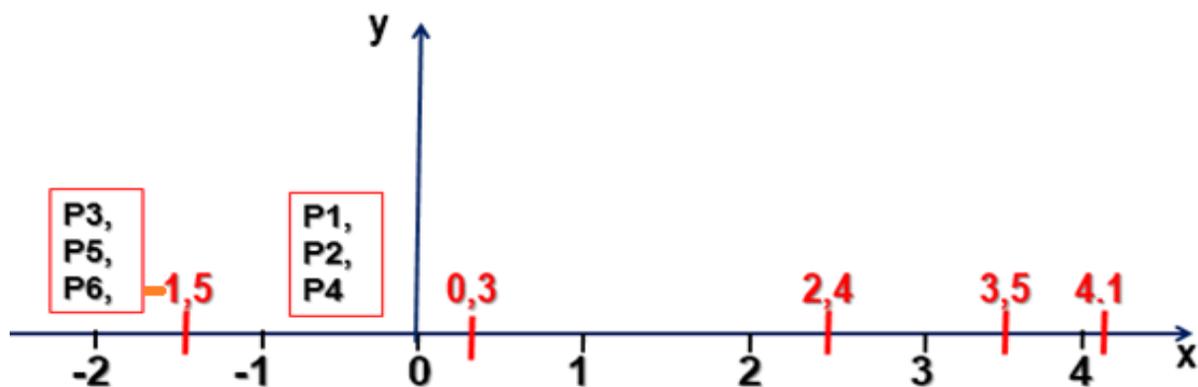
- a. ¿Qué dificultades existen en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en grado quinto en educación primaria?
- b. ¿Qué materiales didácticos usted utiliza o ha utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación primaria?
- c. ¿Qué actividades puede sugerir para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en los últimos años de la educación primaria?

Anexo 3. Validación de encuesta método Delphi

Tabla de validación

FUNCIÓN RECÍPROCA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DE CORTE O LÍMITES								
INDICADORES	A (5)	B (4)	C (3)	D (2)	E (1)	SUMA	PROMEDIO PRM	N - PRM
P1	0,68	1,65	4,09	4,09	4,09	14,6	2,92	-1,2
P2	-4	-0,38	1,04	4,09	4,09	4,84	0,968	-1,0
P3	0	1,04	4,09	4,09	4,09	13,31	2,662	-2,7
P4	-4	-1,03	0	0,68	4,09	-0,26	-0,052	0,1
P5	-0,67	0	4,09	4,09	4,09	11,6	2,32	-2,3
P6	-1,28	0,26	1,04	4,09	4,09	8,2	1,64	-1,6
SUMA	-9,27	1,54	14,35	21,13	24,54	52,29	10,458	
PTO DE CORTE O LÍMITES	-1,5	0,3	2,4	3,5	4,1	8,7		1,7
ROMEDIO DE PROMEDIOS N						1,7		

Gráfica de validación



Anexo 4. Pretest (Actividad 0)

Título: El arte geométrico en casa.

Objetivo: Identificar las propiedades en las figuras planas y el papel de las transformaciones geométricas desde la visualización de su contexto y el material manipulativo.

Metodología de la actividad: Se hace entrega de la guía de trabajo a cada grupo formado. Desde la comunidad práctica de Wenger, se estructuran grupos máximo de tres estudiantes para el desarrollo de las actividades planteadas por el docente. Por otra parte, el docente tiene un espacio de 120 minutos para la implementación de la actividad propuesta.

Los problemas planteados para las actividades, principalmente, busca un trabajo individual con el fin de identificar las habilidades geométricas que posee cada uno de los estudiantes. El docente, se encuentra en constante observación para solucionar de forma inmediata las preguntas o inquietudes que puede presentar el estudiante en el desarrollo de las actividades planteadas.

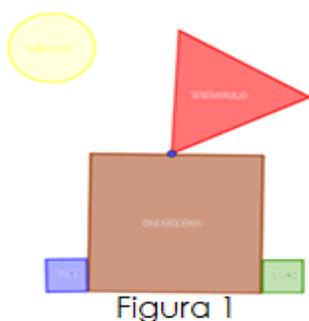
Desde las preguntas orientadoras presentadas por el docente, se busca que los estudiantes compartan sus experiencias en el desarrollo de las actividades. Dentro de estas experiencias el docente identifica los contenidos y las habilidades que el estudiante posee en los contenidos geométricos desde la visualización.

La evaluación se lleva a cabo por el docente a través de la observación continua de la actividad, la socialización de experiencias y la autoevaluación.

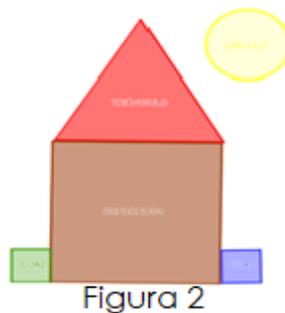
Materiales para la actividad: impresión en hoja de la figura dos, tijeras, hojas blancas, esfero y colores.

ACTIVIDADES PROPUESTAS:

1. Ingrese al Geoboard¹⁰¹, y relaciona cada figura geométrica con sus las propiedades que corresponda en cada caso. Debe dar clic sobre una ficha que indique propiedades y luego sobre una imagen o viceversa. Recuerde que tiene 5 minutos o tres intentos.
2. Para esta actividad, se debe tener impresa la hoja de la figura 1 y en base a las posiciones iniciales mostrar que trasformaciones geométricas se utilizan con cada figura geométrica para lograr la imagen de la figura 2 (contestar las preguntas de acuerdo a la trasformación geométrica utilizada).
 - a. Recorte las siguientes figuras geométricas y ubíquelas en un espacio plano (puede ser sobre la mesa) como aparece en la imagen (figura 1).



- b. Indique con cada una de las cinco figuras geométricas que transformación geométrica aplicó. Es decir, ¿qué hizo con cada una de las figuras geométricas para lograr la imagen de la figura 2?



- c. Conteste las siguientes preguntas indicadas para cada caso.

¹⁰¹ Link del geoboard: <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>

I. ¿Qué se puede hacer con el círculo para ubicarlo en el lugar que indica la figura 1?

II. ¿Qué se debe hacer con el techo de la casa “triángulo”?

III. ¿Qué puedo observar del cuadrado 1 “color café”?

IV. ¿Cuál es la transformación geométrica que se debe aplicar al cuadrado 2 “verde”?

V. ¿Cuál es la transformación geométrica que se debe aplicar al cuadrado 3 “azul”?

3. Observa el siguiente vídeo: Reconozco mi entorno geométrico.

Identificar las imágenes que se forman de figuras bases como el círculo, triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios u otra figura geométrica que nos pueda servir en nuestro estudio. Al final del video, realizamos un comparativo de lo observado en nuestro entorno para contestar las siguientes preguntas:

I. ¿Qué figuras geométrica de las vistas en clase podemos ver a nuestro alrededor?

- II. ¿En algún momento hemos movido esos elementos para otro sitio “de lugar o de posición”? ¿qué le ha pasado a esos elementos al realizar dichos movimientos?

4. Envía evidencia fotográfica de las actividades realizada y comenta la experiencia con el docente.

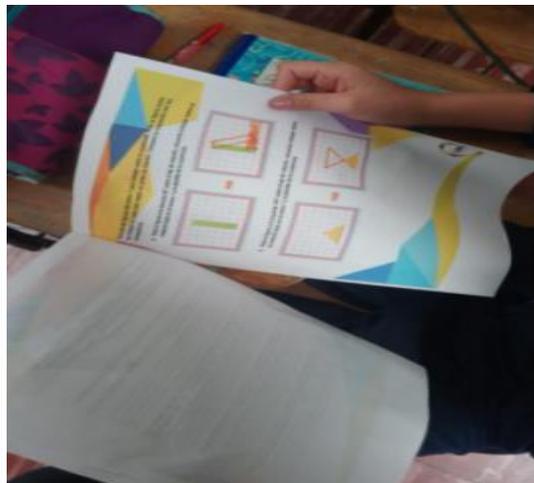
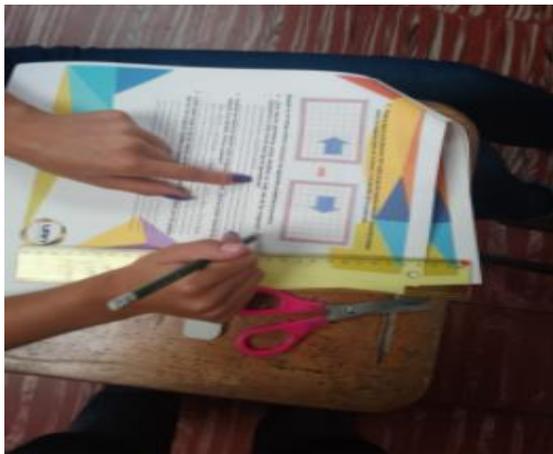
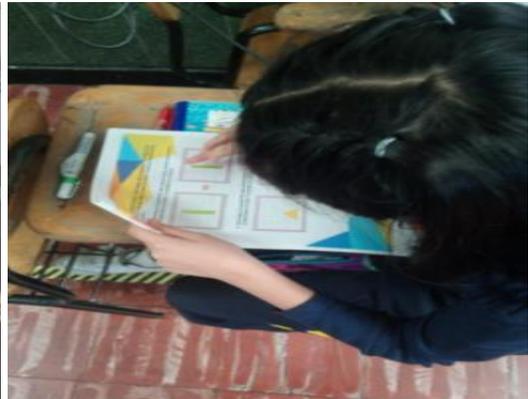
Anexo 5. Evidencias actividad 1

Objetivo: ostentar los registros fotográficos de la implementación de la actividad 1.



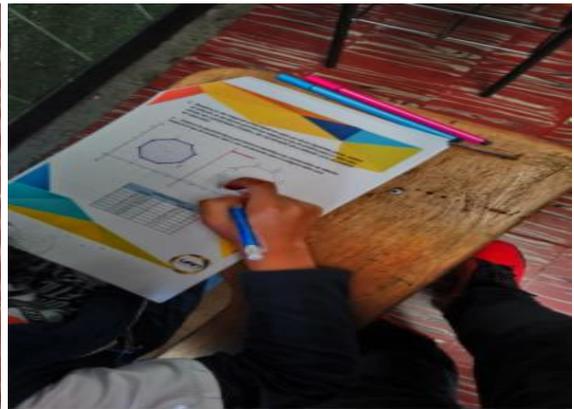
Anexo 6. Evidencias actividad 2

Objetivo: identificar con algún detalle la implementación de la actividad 2.



Anexo 7. Evidencias actividad 3

Objetivo: exponer los registros fotográficos de la implementación de la actividad 3.



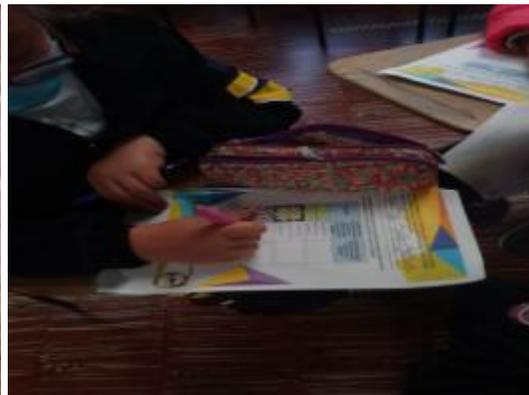
Anexo 8. Evidencias actividad 4

Objetivo: mostrar algunos registros fotográficos del desarrollo de la actividad 4.



Anexo 9. Evidencias actividad 5

Objetivo: mostrar evidencias fotográficas del desarrollo de la actividad 5.



Anexo 10. Encuesta de satisfacción

Objetivo: Identificar la perspectiva de los estudiantes con respecto a las actividades aplicadas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la escuela primaria.

Fuente: Elaboración propia.

Desarrollo. Estimados niños y niñas, su opinión como estudiantes es muy importante para el desarrollo de esta investigación, la cual pretende favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de las transformaciones geométricas.

El siguiente cuestionario, pretende ver su opinión con respecto al desarrollo e implementación de manera general de las actividades aplicadas. Agradezco su colaboración y atención prestada para el desarrollo de la presente encuesta.

Cuestionario

Valora en una escala del uno “1” al cinco “5”, donde, cinco (5) es siempre (máxima calificación), cuatro (4) es casi siempre, tres (3) es algunas veces, dos (2) es rara vez y uno (1) es nunca (mínima calificación), a las siguientes preguntas relacionadas con su desarrollo de las actividades.

PREGUNTAS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1. ¿Considera que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la geometría?					
2. ¿Cree que su desempeño en la asignatura de geometría mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?					
3. ¿Las actividades desarrolladas en clase constituyen un reto para usted?					
4. ¿Considera que el uso de las tablet en las actividades geométricas fortaleció su aprendizaje?					

5. ¿Considera que el uso de material manipulativo “anexos” en las actividades de geometría fortalecen su aprendizaje?					
6. ¿Se sintió usted motivado al desarrollar las actividades propuestas de forma independiente?					