LA GEOMETRÍA PROYECTIVA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

JUAN CAMILO BONILLA BERNAL

Código: 10541912484

Universidad Antonio Nariño

Programa de Maestría en Educación Matemática

Facultad de Educación

Bogotá D.C., Colombia

2021

LA GEOMETRÍA PROYECTIVA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA

JUAN CAMILO BONILLA BERNAL

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación Matemática

Director de tesis:

Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Línea de Investigación:

Generación de un currículo de Matemáticas más retador para todos los estudiantes, consecuente con las necesidades del siglo XXI y/o Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.

Universidad Antonio Nariño

Programa de Maestría en Educación Matemática

Facultad de Educación

Bogotá D.C., Colombia

2021

NOTA DE ACEPTACIÓN

El trabajo de grado titulado

La geometría proyectiva a través de la resolución de problemas retadores en estudiantes de educación media,

Cumple con los requisitos para optar

Al título de Magister en Educación Matemática.

Firma del Tutor

Firma Jurado

Firma Jurado

Bogotá D.C. de **2021**

DEDICATORIA

A mi madre, quien ha estado conmigo de forma incondicional, en todo momento y ha sido una fuerza inagotable de apoyo y amor para alcanzar este logro.

A mis amigos, quienes nunca dejaron de creer en mis capacidades y siempre me recordaron que con esfuerzo y dedicación podría llegar hasta donde estoy.

Y a todos aquellos que permanecieron a mi lado en este proceso y me mostraron siempre el amor a la vida, el sentido de admiración por las pequeñas cosas y la exaltación por haber encontrado un camino que levantara la voluntad de poder con todo aquello que obstaculizó mi camino.

AGRADECIMIENTOS

Estoy muy agradecido con la voluntad de poder del ser humano con tal capacidad manifiesta para sortear las dificultades surgidas todavía en el transcurso de este proceso académico embellecido por la creatividad, enseñanza, conocimiento del ambiente universitario.

Agradezco de forma especial a todas aquellas personas que estuvieron a mi lado acompañándome en este proceso académico; mi madre, Nidia Bernal Ortiz, por su voz de aliento y confianza en el cumplimiento de mis deberes académicos, a mi compañero y amigo Elkin Alejandro Osorio Amaya, quien con su conocimiento, recomendaciones y apoyo incondicional me facilitaron la culminación de este proyecto investigativo.

También, a todos aquellos docentes y compañeros del programa en Maestría en Educación Matemática, en especial al Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, que me ofreció su apoyo y acompañamiento que contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

A todos, muchas gracias.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁGINAS**

LISTA DE FIGURAS ....PÁGINAS

LISTA DE FIGURAS **PÁGINAS**

RESUMEN

El trabajo realizado se puede englobar como un estudio sobre la influencia, en el aprendizaje de la geometría proyectiva de los estudiantes de grado 11 de la institución educativa Santa Juana de Arco, del uso de un conjunto de actividades propuestas basadas en la resolución de problemas retadores con GeoGebra. En la investigación se trabaja con cuatro actividades donde se cubren los temas de razón cruzada, Teorema de Pappus, Pascal y Desargues. Estas actividades se diseñan para que los estudiantes transiten por cinco fases de aprendizaje (información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración). Se usa un diseño instruccional basado en el trabajo individual, el colaborativo y la institucionalización de contenidos. Se busca el desarrollo del pensamiento geométrico y su categorización en cinco niveles según su avance y desempeño (Reconocimiento, Análisis, Deducción Informal, Deducción y Rigor). Al finalizar, se obtuvo que tres se quedan en el primer nivel, cuatro de ellos en el nivel de Análisis, siete en el nivel de Deducción Informal, uno sólo en el nivel de Deducción y ninguno en el de Rigor. Las actividades propuestas fortalecen el desarrollo del conocimiento de la geometría proyectiva, pero no se obtienen los resultados óptimos. Se evidencian fallas ligadas al lenguaje y planteamiento de los axiomas, teoremas y enunciados de los problemas, al igual que con el tiempo para el desarrollo y los conocimientos previos. Se recomienda tener estas consideraciones, además de familiarizar previamente al estudiantado con los softwares que se implementan. **Palabras clave:** geometría proyectiva, enseñanza aprendizaje, pensamiento geométrico, resolución de problemas, GeoGebra, diseño instruccional.

ABSTRACT

The work carried out can be included as a study on the influence, in the learning of projective geometry of the students of grade 11 of the educational institution Santa Juana de Arco, of the use of a set of proposed activities based on the resolution of challenging problems with GeoGebra. The research works with four activities where the topics of crossed ratio, Pappus's Theorem, Pascal and Desargues are covered. These activities are designed so that students go through five learning phases (information, guided orientation, explanation, free orientation and integration). An instructional design based on individual work, collaborative work and the institutionalization of content is used. The development of geometric thinking is sought and its categorization into five levels according to its progress and performance (Recognition, Analysis, Informal Deduction, Deduction and Rigor). At the end, it was obtained that three remain at the first level, four of them at the Analysis level, at the Informal Deduction level, one only at the Deduction level and none at the Rigor level. The proposed activities strengthen the development of the knowledge of projective geometry, but the optimal results are not obtained. Failures linked to the language and approach of the axioms, theorems and statements of the problems are evident, as well as with time for development and previous knowledge. It is recommended to have these considerations, in addition to previously familiarizing the student body with the software that is implemented. **Keywords:** projective geometry, teaching-learning, geometric thinking, problem solving, GeoGebra, instructional design.

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza de la geometría constituye una prioridad para las instituciones educativas según el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), dada la importancia de esta rama de la matemática. El MEN establece en los lineamientos curriculares que la *"La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación"*[1].

Para lograr tales fines se necesita de una geometría activa, capaz de transformar el proceso de enseñanza de la geometría en la escuela. Según el MEN "*La geometría activa es una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio*"[2].

Por otra parte, la geometría es una de las áreas de la Matemática más antiguas. En ésta, al restringirse algunas definiciones rigurosas o formales, se puede decir que su objeto de estudio está íntimamente relacionado con la forma en que se entiende, describe e interpreta la realidad circundante, tanto de forma consiente e inconsciente.

Toda la información recibida de la realidad se procesa de forma primaria bajo términos o expresiones geométricas (Segall, Campbell & Herskovits, 1963). Sin embargo, existen propiedades geométricas del espacio percibido que no dependen del orden o distancia a la que

---

[1]Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas*. *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: MEN, p. 5.
[2]Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas*. *Lineamientos Curriculares*. Bogotá: MEN, p. 38.

se encuentre, que se mantienen a pesar de estar envueltas en transformaciones producto de la proyección. Para entender y analizar estos casos, resulta conveniente la geometría proyectiva.

La geometría proyectiva es aquella que estudia las propiedades de las figuras de un plano que permanecen invariantes, cuando estas son expuestas a transformaciones proyectivas (Rodríguez & Ruiz, 1998). En esta geometría se exponen características geométricas que pueden llevar a una progresión de las apropiaciones cognitivas, que los estudiantes atraviesan a medida que pasan del estudio del espacio físico al estudio y construcción de un modelo del espacio abstracto, a través de diferentes representaciones.

En la enseñanza de la geometría los estilos generalizados poseen un enfoque complejo que solamente se recarga en la traducción material de las nociones fundamentales (Almaida & Gallego, 2019). Este enfoque se desarrolla sin detenerse en las necesidades del estudiante para la comprensión y dominio de estas características geométricas. Así, resulta necesario abarcar estas cuestiones en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría para buscar alternativas que apunten al desarrollo óptimo de los conocimientos del estudiante.

La búsqueda actual de soluciones a las diferentes problemáticas en la enseñanza aprendizaje de la geometría, recaen en algunas investigaciones cuyos enfoques tratan aspectos como: el razonamiento visoespacial, la injerencia de las tecnologías digitales, la enseñanza y aprendizaje de las definiciones, los procesos de prueba, la teoría de los espacios geométricos de trabajo, el uso de geometría dinámica y la construcción de representaciones internas (Hernst, et al, 2018). Estos estudios generan oportunidades para trabajar sobre las potencialidades que distintos tratamientos ofrecen al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área.

En la presente investigación se propone el uso de problemas retadores, que relacionen situaciones de diferentes contextos matemáticos, que potencien el desarrollo del pensamiento geométrico en los temas de proyección y razón cruzada de la geometría proyectiva. Se busca explorar cuestiones como *"la construcción y manipulación de representaciones de objetos en el espacio, visualización (mental y físicamente), razonamiento visoespacial (enfocados en aspectos espaciales) y evaluar que el razonamiento visoespacial en geometría se puede mejorar a través de la experiencia desde la percepción hasta niveles más altos de razonamiento"*[3].

Estas motivaciones, que se enfocan en el desarrollo del pensamiento geométrico, se componen como un tema de estudio o investigación en diferentes congresos y reuniones: los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME), la Conference of European Research in Mathematics Education (CERME), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), los Encuentros de Geometría y sus Aplicaciones (EGA), entre otros.

En el ICME 11, el grupo de debate *Topic Study Group 12* (TSG 12) agrupa su núcleo temático en geometría y hacen énfasis en su enseñanza aprendizaje. Este grupo centra su discusión en el desarrollo visual y habilidades espaciales para la enseñanza de la geometría, características del pensamiento espacial en el alumno, uso de programas dinámicos para la comprensión de la

[3] Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. En G. Keiser, *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13* (pp. 277-287). Hamburgo: Springer Open. p. 282.

geometría y didáctica de la geometría para futuros maestros (Osta, et al. 2008). Estas reflexiones aportan y permiten mejorar el nivel deductivo en los estudiantes y las prácticas de aula.

En el ICME 13 desarrollado en Hamburgo, el TSG 13 aborda la *Enseñanza y aprendizaje de geometría a nivel de secundaria.* En este TSG se consolida un documento denominado *Perspectivas internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en las escuelas secundarias*, donde reúnen los diferentes tópicos tratados en los grupos de trabajo. En forma general, centran la discusión en los siguientes aspectos: conexiones entre teorías de la educación en geometría, prácticas y procesos matemáticos (visualización, figuración e instrumentación, resolución de problemas, argumentación y prueba). Además, los problemas curriculares en geometría, el uso de herramientas y entornos tecnológicos, estos aspectos son fundamentales para mejorar la comprensión geométrica y matemática (Hernst, et al. 2018).

En cuanto a los congresos realizados por el CIBEM, en el acta de comunicación del VII CIBEM Uruguay 2013, se publican temas relacionados con el pensamiento espacial, habilidades de visualización, el uso de entornos virtuales, la caracterización de niveles de razonamiento y la resolución de problemas en geometría (CIBEM, 2013).

En la CERME se presentan investigaciones sobre el pensamiento geométrico, específicamente en el CERME 8 (2013), en el Team Working Group 4 (TWG 4) se presentan en sus discusiones cuatro competencias geométricas (razonamiento, figurativo, operacional y visual), que se deben potenciar en los estudiantes y que promueven el desarrollo del pensamiento espacial (Ubuz, Haser & Mariotti, 2013). También, se tratan temas sobre las dificultades de aprendizaje en geometría, el diseño de los planes de estudio y su implementación en los diferentes contextos educativos.

Por otra parte, los investigadores de los ECME y los EGA proponen el fortalecimiento de la formación de estudiantes y docentes de todos los niveles académicos a partir de experiencias e ideas en temáticas relacionadas con la geometría, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y relaciones con otras ramas de las matemáticas. Principalmente discuten la necesidad de articular los medios semióticos para el desarrollo visual y espacial, pero también integran al análisis la implementación de actividades retadoras que involucren al estudiante en su desarrollo (Andrade & Amorim, 2020).

Estos eventos resaltan la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a partir del aprovechamiento y aplicación de herramientas tecnológicas, del uso de materiales didácticos (manipulables y visuales), de la relación de teorías en geometría con el área de matemáticas; los cuales conllevan y brindan la oportunidad de mejorar habilidades espaciales, de razonamiento y argumentación, en pro de avanzar hacia una comprensión profunda de la geometría.

Esta investigación se centra en la enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva, considerándola no sólo como un subconjunto de la geometría euclidiana, sino como apoyo práctico cuando se trabaja con proyección de objetos euclidianos en planos, transformaciones, invariantes y clasificación de elementos geométricos (Coxeter, 2003).

La revisión del estado del arte y la experiencia de autor permite constatar las oportunidades de mejora que se presentan a continuación:

- Construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio (Gutiérrez, 2005).
- Externalización de las representaciones mentales fundamentales de geometría (Crannell, Frantz & Futamura, 2019).
- Habilidades de representación y de visualización (Duval, 2005).
- Comprensión de las potencialidades que ofrece la geometría proyectiva a través de la resolución de problemas, para el aprendizaje de la geometría en los estudiantes (Crannell, Frantz & Futamura, 2019).

La forma en la que se puede contribuir a las oportunidades de mejora es, en esencia, el **problema de investigación** que se aborda en este trabajo, y se puede sintetizar en: ¿cómo favorecer el pensamiento geométrico en la enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva en los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Santa Juana de Arco?

Se específica que el **objeto de estudio** es el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación media. El **objetivo general** es favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, a través de la resolución de problemas de la geometría proyectiva, que involucran los principios de proyección y razón cruzada en los estudiantes de grado 11 de la I. E. Santa Juana de Arco.

Para alcanzar dicho objetivo, se plantean los siguientes **objetivos específicos**:

- Identificar y describir los conceptos previos que poseen los estudiantes de educación media con respecto a conceptos básicos de geometría.

- Elaborar actividades que permitan la construcción del concepto de razón cruzada y Teoremas como el de: Desargues, Pappus y Pascal, a través de la manipulación de objetos geométricos dinámicos.
- Diseñar e implementar problemas retadores en las actividades elaboradas que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades visuales, de representación mental, razonamiento deductivo y de argumentación lógica.
- Caracterizar el desarrollo del pensamiento geométrico para la comprensión de los conceptos proyectivos en la aplicación de las actividades elaboradas.

Con base en los objetivos específicos, y como guía para el desarrollo de la investigación, se plantean las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes al involucrarse en el aprendizaje de la geometría proyectiva?
- ¿Cómo estructurar actividades sobre el contenido geométrico en cuestión para favorecer el desarrollo del conocimiento del estudiante?
- ¿Cuáles son las características de la geometría dinámica que pueden emplearse en el desarrollo de las actividades para la enseñanza aprendizaje de la geometría proyectiva?
- ¿Cómo se implementa la resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría proyectiva?
- ¿Cómo se caracteriza el pensamiento geométrico de los estudiantes que aprenden las temáticas en cuestión de la geometría proyectiva a través de la resolución de problemas y la geometría dinámica?

En relación con las preguntas planteadas y con el ánimo de cumplir con los objetivos, se establecen las siguientes **tareas de investigación:**

- Construir el estado del arte en los referentes más importantes y directamente relacionados a la Geometría, en particular la Geometría Proyectiva en educación media.
- Determinar los aspectos teóricos que sustentan la Geometría Proyectiva, su enseñanza y aprendizaje, la resolución de problemas y la Geometría Dinámica, para establecer un marco teórico de referencia para el estudio.
- Determinar la metodología para la elaboración del diseño instruccional y la implementación de las actividades de Geometría Proyectiva, con resolución de problemas y geometría dinámica.
- Elaborar un sistema de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en los temas de razón cruzada y los teoremas de Desargues, Pascal y Pappus.
- Analizar y evaluar los resultados obtenidos en la implementación de las actividades aplicadas a los estudiantes.
- Caracterizar el pensamiento geométrico involucrado en la construcción del contenido de principios proyectivos y de la razón cruzada en estudiantes de educación media.

En esta investigación teniendo en cuenta lo extenso que puede ser abarcar todas las temáticas, elementos y teoremas de la geometría proyectiva, se opta por escoger los principios de proyección y la razón cruzada, pues son cuestiones de carácter transversal y con amplias aplicaciones (Coxeter, 2003).

El aporte práctico está enfocado en el desarrollo de un sistema de actividades sobre el contenido geométrico de la razón cruzada y los teoremas de Desargues, Pascal y Pappus, sustentada en la resolución de problemas, la visualización matemática, la manipulación de representaciones mentales y el uso de la geometría dinámica, para favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de grado 11 de educación media.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

Las investigaciones en educación matemática, en particular en el área de geometría, se enfocan en el uso de diversas metodologías para su enseñanza, el análisis de la naturaleza del razonamiento y pensamiento geométrico, el papel de los diagramas, representaciones semióticas, símbolos y gestos, y la función de la geometría dinámica.

A continuación, se presentan algunas investigaciones de este campo enfocadas en las vertientes educativas de la geometría, describiendo metodologías usadas, teorías que fundamentan las propuestas y los resultados más relevantes obtenidos. Con esto se busca sintetizar la investigación realizada sobre la enseñanza de la geometría y en particular sobre las cuestiones proyectivas de interés.

1.1. Enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación media

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, como parte de la Educación Matemática, se presenta con diversas enfoques y técnicas particulares en la práctica docente para esta área. A continuación, se presentan algunas investigaciones respecto a estos procesos en el nivel educativo de educación secundaria.

1.1.1. International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools[4]

Herbst, Cheah, Richard y Jones (2018) exponen en esta monografía los resultados del Topic Study Group 13 que se trabaja en el ICME 13. Los diferentes temas de estudio tratados en esta

[4] Herbst, P.; Cheah, U. H.; Richard, P. R.; Jones, K. (2018). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*. Hamburg: Springer International Publishing AG, part of Springer Nature.

monografía se encuentran recopilados en 21 capítulos, donde se destaca el análisis de los procesos, prácticas y metodologías utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Aunque estos estudios son variados en su forma y fundamento, en este tema todos giran en torno a la adquisición, desarrollo y entendimiento del conocimiento, significado y naturaleza de la geometría. Por ejemplo, las prácticas relacionadas con la escritura de textos guía y desarrollo de materiales para la geometría en el aula, en los cuales, a través de un arduo análisis y trabajo de transposición didáctica, se condensan los conocimientos de las investigaciones realizadas en instrumentos prácticos y de gran utilidad para su uso en el aula.

Junto con esto, se recopilan procesos de formación de docentes para la enseñanza de la geometría para este nivel de formación escolar, enfocándose en la optimización de los resultados de los estudiantes con trabajos individuales o colaborativos, con metodologías basadas en la tecnología, resolución de problemas y aplicaciones de la geometría.

Además, se describen enfoques de enseñanza con geometría dinámica, formas de evaluación de contenidos geométricos, el adecuado uso de las representaciones semióticas, sus procesos de tratamiento y conversión, y la forma en la cual se estructuran los conceptos geométricos aprendidos. Estos aspectos se consideran en este trabajo, pues las actividades que se plantean para la intervención dependen del uso de geometría dinámica, las representaciones semióticas y la estructuración de conceptos geométricos.

1.1.2. The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools: A Modeling Perspective[5]

Herbst, Fujita, Halverscheid y Weiss (2017) proponen una posible forma de pensar sobre los diferentes acontecimientos que se presentan en el estudio de la geometría en las escuelas secundarias cuando se aborda lo que el estudiante está aprendiendo y lo que posiblemente pueda aprender. En este libro, en resumen, se pueden encontrar discusiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría secundaria a través de la historia, las figuras geométricas y sus representaciones, el pensamiento y aprendizaje de los estudiantes en geometría, la práctica docente y el conocimiento del profesorado en la instrucción en Geometría, y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en las aulas de la escuela secundaria.

Todos estos temas se articulan para proponer la modelación como una perspectiva de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este proceso se basa en la construcción de estructuras conceptuales que permitan representar, describir, explicar y predecir el comportamiento de un fenómeno presentado en alguna situación geométrica. Estas estructuras conceptuales son los modelos que surgen del trabajo de modelación geométrica que el estudiante realiza al resolver las actividades planteadas. Al transitar por este proceso, el estudiante adquiere una comprensión profunda acerca de los conceptos que interactúan en el fenómeno analizado.

En la modelación, a diferencia de la resolución de problemas, se pretende que la solución (el modelo hecho) tenga un carácter generalista, es decir, que en dicha construcción se pueda

[5] Herbst, P.; Fujita, T.; Halverscheid, S.; Weiss, M. (2017). *The Learning and teaching of geometry in secondary schools: A modeling perspective.* London and New York: Routledge. Taylos & Francis Group

utilizar otras situaciones similares. En este trabajo, se utiliza la resolución de problemas retadores, donde la solución a pesar de ser única tiene distintas formas de construirse o presentarse. Sin embargo, al igual que con la modelación, en las actividades de resolución de problemas geométricos que se plantean, se enfatiza en la interacción de los elementos, los procesos de transformación y la manipulación de las construcciones.

1.1.3. Implementation of problema-based learning in geometry[6]

Ahanad, et. al (2017) hacen un estudio con un objetivo doble, primero, analizan los efectos en el rendimiento de los estudiantes con el uso de la perspectiva del aprendizaje basado en problemas, con base en ello, y haciendo un estudio en profundidad de esta metodología, buscan determinar los puntos críticos que entorpecen el uso de esta metodología. Se encuentran cuestiones relacionadas con las actitudes de los estudiantes hacia esta metodología en particular, un conjunto de dificultades que los estudiantes enfrentan y el conocimiento o habilidades que los estudiantes creen necesarios para resolver los problemas.

En términos generales, el estudio se desarrolla en educación secundaria, en un curso con 22 estudiantes asiáticos en Brunéi y el diseño metodológico fue mixto, contando con una intervención educativa durante el curso de geometría con un conjunto de actividades basadas en resolución de problemas.

Aunque con el estudio se encuentran influencias positivas en el aprendizaje y retención de conocimientos al implementar el aprendizaje basado en problemas (ABP) en la enseñanza de

[6] Ahamad, S. N. Li, H. C., Shahrill, M., & Prahmana, R. C. I. (2017). Implementation of problem-based learning in geometry lessons. In *Journal of Physics: Conference Series* Vol. 943, No. 1. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/943/1/012008/pdf

la Geometría, las dificultades halladas también son cuestiones importantes para tener en cuenta. Por el lado, de la adquisición de los conocimientos, por ejemplo, la asimilación de la información y la pobre capacidad de toma de decisiones de los estudiantes, impactan negativamente. Esto es sensible para el proyecto que se desarrolla, pues, al considerar todo el trabajo en resolución de problemas de geometría proyectiva, debe asegurarse que la información presentada sea lo más clara posible y, a la vez, que el camino que el estudiante debe tomar en su proceso de resolución no sea enrevesado. Aunque el problema sea retador, su dificultad no debe residir en la confusión del estudiante.

Por el lado de las actitudes, los investigadores resaltan que los estudiantes critican la cantidad de tiempo que lleva el desarrollo de una actividad de este tipo. Usualmente, se describe que los estudiantes ven las actividades como una actividad contrarreloj, pues consideran que la cantidad de trabajo en función del tiempo empleado no está nivelada.

Por otra parte, tienen la creencia de que se requieren profundos conocimientos para poder enfrentarse a las actividades que usualmente no poseen, como los de comunicación e investigación. Estos dos factores, las creencias y actitudes, pueden influir negativamente en el rendimiento de los estudiantes, por ende, han de ser cuidadosamente revisadas para la implementación de las actividades en esta investigación. Tener en cuenta la cantidad de tiempo suficiente y evidenciarles que tanto las habilidades como los conocimientos requeridos en las actividades ya las poseen, puede hacer la diferencia.

1.1.4. Effects of Visual Working Memory Training and Direct Instruction on Geometry Problem Solving in Students with Geometry Difficulties[7]

La memoria de trabajo visual es otro aspecto que en esta investigación se debe considerar. El estudio realizado por Zhang (2017) trabaja con estudiantes que muestran dificultades geométricas, el investigador se enfoca en el papel de este tipo de memoria y en cómo entrenarla directamente puede mejorar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.

En resumen, el investigador trabaja con estudiantes con deficiencias en geometría, utilizando software de entrenamiento computarizado de memoria de trabajo visual (Jaeggi et al., 2011), y luego, con un método más tradicional y un enfoque basado en resolución de problemas, se enfoca en el desarrollo de habilidades para el tránsito entre cuestiones geométricas concretas-representacional-abstractas.

De esta manera, los estudiantes pueden mejorar su rendimiento en tareas generales de geometría cuando resuelven problemas, principalmente, donde se trabajan rotaciones espaciales. El investigador resalta que con esto no hubo mejora en las tareas de resolución de problemas que involucran congruencia triangular. Estas cuestiones resultan pertinentes para el trabajo que se desarrolla en el presente documento, pues dentro de los problemas de geometría proyectiva se usan transformaciones y congruencias.

---

[7] Zhang, D. (2017). Effects of visual working memory training and direct instruction on geometry problem solving in students with geometry difficulties. Learning Disabilities: *A Contemporary Journal*, 15(1), 117-138. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1141989.pdf

La investigación de Zhang (2017) lleva a considerar la memoria visual de trabajo como una variable de la cual depende el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos, por ende, se toma en cuenta al realizar el análisis del desempeño de los estudiantes en las actividades planteadas.

1.1.5. Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving[8]

Buckley, Seery & Canty (2019) consideran que el núcleo del STEM es la resolución de problemas y que una de las habilidades cognitivas más importantes es el razonamiento espacial, se proponen encontrar con su estudio las relaciones entre el alto nivel de habilidad espacial y el rendimiento de los estudiantes en geometría mediante la resolución de problemas. En su investigación, evidencian cómo el bajo nivel en esta habilidad está ligado con el desempeño de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas.

El razonamiento espacial es importante en la geometría en términos generales (Lowrie, Logan & Hegarty, 2019), pero lo es aún más en la geometría proyectiva (Coxeter, 2003). Por ende, considerar los hallazgos de estos investigadores tiene especial relevancia para la investigación que se desarrolla. Además, considerando que la relación que Buckley, Seery & Canty (2019) establecen es con respecto a la resolución de problemas geométricos, cuestión que es la base de las actividades planteadas, no pueden pasar desapercibidas.

En esencia, los investigadores señalan que los niveles bajos de habilidad espacial se corresponden con niveles bajos de capacidad para resolver problemas de geometría. En el

[8] Buckley, J., Seery, N., & Canty, D. (2019). Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving. *International Journal of Technology and Design Education, 29*(2), 341-362.

estudio que hacen se evidencia que el uso de modelos de problemas que poseen facilidades en cuanto al razonamiento espacial (un conjunto de indicadores claros, ayudas visuales o representaciones dinámicas), pueden solventar las dificultades de los estudiantes que no poseen un gran nivel en esta habilidad. Esto último sugiere que, en el caso del trabajo que se desarrolla, las representaciones gráficas en los problemas de razonamiento espacial tengan una presencia.

1.2. Enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva en educación media

Ahora bien, debido a que la asignatura que se trata en esta investigación es la Geometría Proyectiva, resulta indispensable recopilar algunas investigaciones específicamente de este campo. Cabe aclarar que la mayoría, sino todas las investigaciones relacionadas con la geometría proyectiva están enmarcadas en propuestas hechas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en general, lo cual lleva a que esta división por secciones de los antecedentes sea más de forma que de fondo.

1.2.1. Adecuación de los recursos didácticos utilizados en clases de geometría proyectiva a los estilos de aprendizaje de los alumnos[9]

El trabajo de Souza y Andrada (2013) es una muestra de cómo se deben realizar la adecuación de las actividades al perfil de los estudiantes. En este caso, los investigadores reúnen las características de los estilos de aprendizaje de sus estudiantes, categorizan dichos estilos y adaptan las tareas de Geometría Proyectiva para optimizar el proceso.

[9] De Sousa M., S.; Andrada, O. A. (2013). Adecuación de los recursos didácticos utilizados en clases de geometría proyectiva a los estilos de aprendizaje de los alumnos. *Revista Estilos de aprendizaje Vol. 11 No. 12.* p. 1-26.

Aunque el objetivo es reducir las dificultades de aprendizaje de un grupo particular de estudiantes, el trabajo realizado genera un conjunto de materiales, que, aunque consisten en los mismos teoremas, objetos, transformaciones y relaciones, se diferencian metodológicamente, en forma de presentación y en lenguaje, según cada estilo encontrado.

Con esto logran multiplicar su banco de actividades en función de los estilos categorizados (activo, reflexivo, teórico y pragmático). La propuesta se basa en la solución a los problemas ya mencionados en la introducción de este trabajo, los referentes a la forma en la que se lleva esta geometría al aula, su carácter abstracto y el enfoque tradicionalista.

Estas adecuaciones, donde el centro de las modificaciones es el estilo de aprendizaje de los estudiantes, les permite ofrecer variedad en forma y metodología de una misma actividad, haciendo que los estudiantes, en general, aprendan lo mismo, pero en su estilo particular. Aunque en el trabajo que se desarrolla no se hace un análisis exhaustivo para determinar los estilos de aprendizaje y adaptar las actividades a ellos, sí se tiene en cuenta las consideraciones de estos autores para evitar las problemáticas ya conocidas. Esto principalmente se refleja en el diseño instruccional de las actividades, el cual involucra tres momentos donde cada actividad se trabaja de manera diferente, una guiada, otra colaborativa en clase y la última individual en casa, con el fin de favorecer los ritmos propios de los estudiantes.

1.2.2. Video Games for Learning Projective Geometry: Analysis of Virtual Spaces Through the Disciplines of Representation[10]

La investigación de Feriozzi y Olivieri (2018) es particularmente interesante en cuanto a la forma en la que se lleva la geometría proyectiva al aula. Los investigadores proponen el uso de videojuegos como medio para llevar representaciones semióticas de elementos de la geometría proyectiva, a la vez que se plantean actividades externas basadas en el análisis de dichos objetos.

Con base en las reglas de proyección y las representaciones de los objetos tridimensionales en varios videojuegos seleccionados, los investigadores ponen a sus estudiantes a resolver problemas de geometría proyectiva. Los videojuegos son seleccionados en función de las posibilidades que ofrecen en cuanto a cambios de perspectiva, variedad en objetos proyectivos encontrados y el dinamismo que brindan por los movimientos de los personajes.

El uso de la tecnología en forma de videojuegos para llevar al aula de clases algunos objetos de cualquier materia de estudio se denomina gamificación (Blohm & Leimeister, 2013) y es un proceso que se utiliza en multitud de campos de acción, entre ellos, en la educación.

Esta forma en la que se gamifican los objetos de la geometría proyectiva es lo que dio pie, en la elaboración de este trabajo, a plantear las representaciones semióticas hechas en GeoGebra con objetos llamativos y poco usuales, como si de un pequeño videojuego se tratase. Si bien es

[10] Feriozzi, R., & Olivieri, A. (2018). Video Games for Learning Projective Geometry: Analysis of Virtual Spaces Through the Disciplines of Representation. En *International and Interdisciplinary Conference on Digital Environments for Education, Arts and Heritage* (pp. 76-85). Springer, Cham.

cierto que no se obtienen las mismas bondades que con un videojuego, las ventajas del uso de GeoGebra para la manipulación e interacción priman en las consideraciones.

1.2.3. GeoGebra Classroom as a Component for the ICT support of Inquiry-based Mathematics Education in Blended Learning[11]

Como se mencionaba, las bondades de GeoGebra son consideradas para el diseño y desarrollo de las actividades de Geometría Proyectiva de esta investigación. Esto se debe a trabajos como el de Astafieva, Hlushak & Lytvyn (2021), quienes, con el objetivo de potenciar el aprendizaje de las matemáticas y la geometría (en particular la proyectiva), utilizan GeoGebra en una propuesta didáctica.

Los autores se enfocan en las proyecciones generadas a partir de planos de cortes a figuras tridimensionales (principalmente sólidos aquimedianos). Los planos cortaban los sólidos en distintos ángulos y estos lugares geométricos son proyectados sobre planos euclidianos para la discusión sobre sus características, invariables y demás información generada.

En este caso, GeoGebra les permitie a los investigadores la realización de innumerables cortes y proyecciones con simples deslizadores que variaban la altura e inclinación del plano a través del sólido. La interacción y el dinamismo de este software es la principal razón de uso para el estudio que se desarrolla, pues la realización de las construcciones en geometría proyectiva es complicada y puede llevar mucho tiempo que puede ser aprovechado para el análisis de las características.

[11] Astafieva, M., Hlushak, O., & Lytvyn, O. (2021). GeoGebra Classroom as a Component to ICT Support Inquiry Based Mathematics Education in a Blended Learning. *ICTERI-2021 Vol. I Main Conference* (No. 6736).

Tal como destacan los autores, el uso de GeoGebra en clases se puede considerar como una ventaja pedagógica, pues ofrece un apoyo efectivo para la enseñanza de las matemáticas y la geometría. Además, el espacio virtual de práctica que se genera, la posibilidad de variar las representaciones para encontrar características que permanecen invariantes en las transformaciones es ad-hoc a la enseñanza de la geometría proyectiva.

1.2.4. Perspective and Projective Geometry[12]

Quizá el antecedente bibliográfico más destacado en este trabajo es el libro de Crannell, Frantz & Futamura (2019). Tanto en contenido como en forma, este libro comprende todos los aspectos a tener en cuenta al respecto de cómo enseñar y cómo se aprende la geometría proyectiva. Desde la presentación de perspectivas de 1, 2 y 3 puntos, hasta las nociones de colineación de perspectiva, pasando por planos proyectos, teoremas de Desargues, conjuntos armónicos, teorema de Ceva y Menelao, razón cruzada, etc. Estos temas son trabajados a detalle, tanto su fundamentación teórica como las estrategias metodológicas para la enseñanza de estos conceptos.

En cada módulo en el que se divide el libro, se intercalan exposiciones, ejercicios conceptuales, tareas vinculadas al arte y la historia, así como ejemplos y contraejemplos. Además, se hace un esfuerzo especial en el uso de software de representación para el mejor entendimiento de los conceptos trabajados.

Uno de estos softwares sugerido por los autores es GeoGebra. Desde el uso de la herramienta como medio de exploración de los elementos proyectivos, hasta las propias construcciones a

[12] Crannell, A., Frantz, M., & Futamura, F. (2019). *Perspective and Projective Geometry*. Princeton University Press.

papel y lápiz, el uso de las vistas laterales y superiores para determinar puntos de observación, y la aplicación de las opciones dinámicas para la observación de características invariantes; son algunos de los aspectos que remarcan los investigadores.

Es por estas razones que se considera así este antecedente, pues dentro de él se encuentra, en su mayoría, los problemas planteados en las actividades del presente estudio; así como también la metodología y las recomendaciones para el uso del software.

1.2.5. Projective Geometry[13]

Wei (2019) realiza su tesis titulada Geometría Proyectiva, en la cual sintetiza todos los aspectos de la geometría proyectiva en un compendio de teoremas, aplicaciones y demostraciones con estos elementos. Esta tesis, en particular, detalla los teoremas de Pappus y Pascal (los dos incluidos en los problemas retadores implementados en el presente documento).

El libro se enfoca en seis axiomas para la geometría proyectiva de dos dimensiones, con el fin de construir la estructura necesaria para realizar las pruebas a los teoremas que se manejan. Además, el autor detalla el proceso de construcción de cada representación gráfica usada, en GeoGebra, ofreciendo así, sin proponérselo, una guía paso a paso para la fabricación de los applets que pueden llevarse al aula.

Aunque estas representaciones son formales y no incluyen aspectos didácticos, la conjunción de este trabajo con los otros antes reseñados, permiten la elaboración teóricamente fundamentada y didácticamente adecuada.

[13] Wei, W. (2019). *Projective Geometry.* (Degree Thesis). Linnaeus University. Sweden.

1.3. Enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva mediante la razón cruzada y los teoremas de Desargues, Pappus y Pascal en la educación media

Si se afina el filtro de investigaciones relacionadas con la que actualmente se desarrolla, se tienen que buscar cuestiones que alberguen la razón cruzada y los teoremas de Desargues, Pappus y Pascal. En anteriores antecedentes ya ha considerado varios documentos que trabajan dichos temas, pero en este apartado se busca resaltar aquellos cuyo nivel específico haya sido la educación media, pues es el contexto en el que también se desarrolla la presente investigación.

1.3.1. Experiencias en el desarrollo de la visualización de invariantes geométricos en el contexto de la visión 3D por computadora con el apoyo de GeoGebra[14]

En la investigación de Sbitneva, Moreno & Serna (2017) se desarrolla un proceso de formación de estudiantes para facilitar el aprendizaje de conceptos fundamentales de la Geometría Proyectiva, principalmente los enfocados al trabajo con simulaciones en visión 3D artificial. Los autores toman los conceptos de incidencia, razón cruzada, construcción de conjugados armónicos, colineación, homologías y, en general, las transformaciones proyectivas.

Este trabajo es relevante para la presente investigación debido a que los autores usan GeoGebra para aprovechar los beneficios del dinamismo del software y poder ilustrar, desde el proceso de construcción, las características invariantes de las transformaciones proyectivas.

---

[14] Sbitneva, L.; Moreno M., N.; Serna H., L. (2017). Experiencias en el desarrollo de la visualización de invariantes geométricos en el contexto de la visión 3D por computadora con el apoyo de Geogebra. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (p. 1543-1552). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aunque el enfoque de la instrucción y los fundamentos de la cognición de los estudiantes difieren del trabajo que se realiza en el presente estudio (ellos utilizan el enfoque ontosemiótico y aquí se utiliza resolución de problemas y la comprensión geométrica y matemática junto a la visualización), se pueden establecer paralelismo en el proceso de planteamiento de las actividades y del análisis de los resultados.

Por ejemplo, varios de los teoremas que se utilizan en la investigación citada son presentados al estudiante basándose en la construcción de representaciones semióticas, en el estudio que se desarrolla estos teoremas se ejemplifican con representaciones semióticas enmarcadas en contextos artísticos, históricos y en forma de problemas retadores.

El proceder de los estudiantes, en el trabajo de Sbitneva, Moreno y Serna (2017) es analizado en función de las prácticas matemáticas, definidas por el uso del lenguaje, concepto, propiedades, procedimientos y argumentos (Font, Godino y Gallardo, 2013). En este estudio se hace subdividiendo las tareas de los estudiantes para clasificar su dominio en los distintos niveles del pensamiento geométrico descrito por Van Hiele (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Vargas & Araya, 2013).

1.3.2. On the Design of 2D Dynamic Drawings with Euklid DynaGeo[15]

El trabajo de Can (2020) es un esfuerzo más cercano al que se realiza en el presente estudio. El autor, por medio de software de geometría dinámica, describe y caracteriza la información,

[15] Can, E. (2020). On the Design of 2D Dynamic Drawings with Euklid DynaGeo. *Sakarya Üniversity Journal of Sciencie, 24*(4), 615-621.

conocimientos y habilidades necesarias para el entendimiento de ciertos conceptos de la Geometría Proyectiva, uno de ellos, el teorema de Desargues.

Aunque no utiliza GeoGebra (software base para la investigación actual), y se decanta por una alternativa diseñada por la universidad donde realiza la investigación (Euklid DynaGeo), el proceder, instruccionalmente, es con base en la resolución de problemas y, al analizar los datos, lo hace con base en una escala de pensamiento geométrico basada en el modelo de Van Hiele (Vargas & Araya, 2013).

Para trabajar con el Teorema de Desargues, el autor lo propone como un problema de aplicación del análisis de triángulos hecho en sesiones anteriores con el software de geometría dinámica. En esencia, busca que sus estudiantes construyan dos triángulos en perspectiva desde un punto y encuentren que la única forma es que estén proyectivos axialmente (que sean proyectivos desde una recta). Las construcciones se basan en la colinealidad de los puntos de los triángulos que se construyen en el software, además, este software permite mover dichos puntos (que siempre se mantienen sobre las rectas y el punto de proyección, que altera la forma de los triángulos), pero mantiene invariantes las características.

Lo que se describe anteriormente es, en síntesis, lo que se busca que encuentren los estudiantes en los problemas donde se involucra el teorema de Desargues, esas características que permanecen invariantes y cómo, para que se dé una de las dos vías del teorema, hace falta que la otra también se cumpla. En las correspondientes actividades planteadas para este tema, la construcción de los triángulos es dada en GeoGebra, siendo esta la principal diferencia, además del contexto en el que es presentado.

1.3.3. On a family curves of the second class[16]

Zlatanov (2017) en su trabajo plantea un conjunto de tareas de geometría proyectiva para clasificar relaciones entre objetos geométricos e incluso, como lo escribe el autor, encontrar la posibilidad de generar nuevas figuras geométricas. En este caso, como se vuelve habitual en la literatura más actual sobre geometría, se utiliza software de geometría dinámica para trabajar con los teoremas de Pappus y de Desargues.

Estas tareas, son en realidad problemas de demostración en los cuales se ubican distintos objetos geométricos interactuando entre sí y que se resuelven por medio del teorema de Pappus, Desargues o Tales. La forma en la que se implementa el software de geometría dinámica, del cual no se especifica el nombre, es por medio de las herramientas de rastro (una secuencia de lugares geométricos por donde transitan los objetos según se modifiquen distintos parámetros). En este estudio, el autor crea, con base en transformaciones proyectivas, los teoremas de Pappus, Desargues y Tales, las cónicas de segunda clase (Elipses, Hipérboles y pares de rectas no paralelas).

El trabajo de Zlatanov (2017) como los de anteriores referencias, fungen como muestra de las posibilidades del uso de softwares dinámicos como GeoGebra, lo cual justifica más su uso. Particularmente, con la geometría proyectiva, el software ofrece un entorno virtual para la creación de múltiples representaciones generadas a partir de una única construcción, lo que permite otorgar al estudiante varios ejemplos del comportamiento de los objetos proyectivos sin necesidad de invertir todo el tiempo necesario si se hace a papel y lápiz.

---

[16] Zlatanov, B. (2017). On a family curves of the second class. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 6*(2), 91-105.

1.4. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva en Colombia

Si se reduce aún más el filtro hacia las investigaciones realizadas en este campo en Colombia, se encuentra significativamente menos trabajos que se puedan considerar aproximados al que se desarrolla actualmente. Esto es un aliciente que justifica la realización del presente estudio, pues el objeto de estudio, a pesar de su importancia, ha pasado a segundo plano en este país.

1.4.1. El Arte y la Historia de la Construcción en la Geometría Proyectiva[17]

Este artículo de Corredor y Londoño (2019) se puede considerar como parte clave en el enfoque que se toma para el planteamiento de las actividades de resolución de problemas con objetos de la Geometría Proyectiva. Como su nombre lo indica, el estudio realizado es un análisis sociogenético sobre cómo, a través del Arte y la Historia, se construyen los elementos propios de la Geometría Proyectiva.

Los autores, además de presentar históricamente la fundamentación teórica, el desarrollo y el origen desde el arte de la perspectiva, describen cómo la pintura y la geometría proyectiva están en interacción, se condicionan y convergen o divergen según el momento histórico.

El análisis epistemológico y las implicaciones pedagógicas que plantean los autores se consideran como fundamento para la construcción de las actividades, se utilizan imágenes de referencia sobre objetos antiguos que se emplean para realizar las transformaciones proyectivas, situaciones problemas que encuentran los artistas y que solucionan a través del

[17] Corredor, M., & Londoño, C. (2019). El Arte y la Historia de la Construcción en la Geometría Proyectiva. *Saber, Ciencia y Libertad, 14*(2), 295-311.

uso de propiedades de los mismos objetos, y el desarrollo de los teoremas más populares como el de Desargues, Pappus, Pascal y Tales.

Tal como lo sugieren los autores, esta imbricación del arte y la historia en la enseñanza de la geometría proyectiva aporta una visión más amplia y multidisciplinaria de los saberes, cuestión que favorece y facilita el entendimiento de los conceptos y el desarrollo del pensamiento geométrico (Burger & Shaughnessy, 1986).

1.4.2. Potencialidades del uso del cubo soma en la clase de matemáticas[18]

El trabajo de Fuentes, Vanegas y Téllez (2017) es un ejemplo del uso de ciertos objetos, que no son diseñados para la pedagogía, dentro de las clases de geometría. En este caso, los autores muestran cómo el Cubo Soma (un rompecabezas tridimensional en forma de cubo) puede ser empleado para enseñar conceptos básicos de la geometría proyectiva.

En la experiencia que los autores relatan se evidencia el uso de este particular cubo como recurso didáctico para la identificación, caracterización y descripción de partes de sólidos, elementos de construcción, puntos de vista y perspectiva. Además, los conceptos más ligados a los sólidos como el volumen, perímetro, área lateral, entre otros.

En esencia, los autores presentan estos cubos a sus estudiantes, pueden realizar análisis de las características y son orientando a la construcción y réplica, según el punto de observación, del cubo en partes o medio resuelto. Esto les dio la ventaja de ofrecerles a los estudiantes distintas

[18] Fuentes, C., Vanegas, S. y Téllez, S. (2017). Potencialidades del uso del Cubo Soma en la clase de matemáticas. En P. Perry (Ed.), Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 23 (pp. 119-124). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

representaciones del mismo objeto, lo que hace que aparezcan conceptos como la invarianza de ciertas características sin importar el punto de observación.

Además, la manipulación del objeto físico también les permite trabajar con transformaciones simples (rotación, traslación y simetría), familiarizando así a los estudiantes. Esta experiencia se realiza como proceso introductorio y cuenta con un diseño instruccional simple, en el cual los estudiantes, luego de presentárseles el cubo, se disponen a trabajar en la réplica de las observaciones; acto seguido, el docente describe los fenómenos planteados e institucionaliza los conceptos que emergen en la manipulación.

Aunque por otro medio, en el trabajo que se desarrolla también se busca realizar el mismo proceso. El objetivo con el uso del software de geometría dinámica es la manipulación e interacción de los estudiantes con los objetos de geometría proyectiva implicados en las representaciones dadas para cada problema planteado.

1.4.3. GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior[19]

Aunque no es un trabajo en educación media y no es específicamente en geometría proyectiva, Rodríguez (2017) ejemplifica detalladamente lo que se ha mencionado a lo largo de este recorrido en antecedentes bibliográficos, la importancia, capacidad y utilidad de GeoGebra como software de geometría dinámica.

---

[19] Rodríguez, L. A. (2017) *GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior*. (Tesis de Especialización) Universidad Militar Nueva Granada. Colombia.

Sin entrar en detalles del carácter proyectivo de algunos elementos, el autor hace mención a la capacidad del software para ofrecer múltiples representaciones gráficas con una sola construcción. Además, describe la disponibilidad de herramientas para dinamizar el entorno geométrico y la construcción, tales como el movimiento de puntos sobre o con objetos que están ligados o dependen de dichos puntos; el rastro que se puede trazar de lugares geométricos que ocupan los elementos construidos. También, hace referencia a la posibilidad de visualizar un objeto tridimensional en distintas ventanas desde distintos puntos de observación, entre otros.

El trabajo de Rodríguez (2017) funge como una recopilación de características y opciones didácticas que se pueden obtener al emplear GeoGebra, cuestiones que son consideradas para su uso en el desarrollo de las actividades planteadas.

Conclusiones del capítulo 1

Como se observa, durante el recorrido del capítulo, queda claro que la alternativa más explotada hoy en día en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y en particular en la geometría proyectiva, se basa en el uso de software dinámico como GeoGebra. Esto, junto con el claro vínculo existente entre esta geometría y el arte o la historia, dan pie al planteamiento de estudios como el que se desarrolla en el presente documento.

Las metodologías, a pesar de ser variadas, convergen en la solución de una situación que involucra los conceptos geométricos, situación que puede presentarse en forma de problema retador. Con esto se consigue un elaborado proceder por parte del estudiante, evitando pérdidas de tiempo en construcciones y pasando directamente al análisis de éstas, de sus características y de cómo los objetos representados interaccionan entre sí.

Aunque es importante el desarrollo del tema, se observa ausencia de investigaciones en este campo en Colombia, cuestión que profundiza la pertinencia del desarrollo de trabajos como este.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan todas las cuestiones teóricas que fundamentan la investigación realizada. En primera instancia se centra la atención en los fundamentos geométricos y los teoremas que se utilizan en los problemas retadores planteados. Posteriormente se abordan las bases que permiten caracterizar, describir y explicar el desarrollo del pensamiento geométrico, junto con el proceso de visualización matemática. Para finalizar el capítulo se describen las consideraciones que se toman en este trabajo sobre la resolución de problema, pues es el eje fundamental del planteamiento de las actividades propuestas.

2.1. Referentes sobre la Geometría Proyectiva

En términos generales, se denomina geometría proyectiva a la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de incidencia de las figuras geométricas. Sin embargo, estas propiedades no se estudian en concreto, sino mediante la abstracción y la construcción conceptual de la medida (Coxeter, 2003). Esta geometría nace de la necesidad de fundamentar matemáticamente el trabajo de los artistas en el renacimiento, quienes emplearon técnicas de proyección y resultados matemáticos de invarianza de manera artesanal e intuitiva (Crannell, Frantz & Futamura, 2019).

En esta investigación, sólo se trabaja con cuatro resultados de la geometría proyectiva: la Razón Cruzada, el Teorema de Pappus, el Teorema de Pascal y el Teorema de Desargues.

2.1.1. Razón Cruzada

La razón cruzada es un resultado importante de la geometría proyectiva, pues es el único proyectivo invariante de un conjunto de cuatro puntos colineales. Esto significa que, a través de cierto tipo de transformaciones, las proporciones dobles establecidas se mantienen. Esta razón cruzada se define de la siguiente manera:

Dados cuatro puntos colineales $A, B, C\ y\ D$, su relación cruzada se define como

$$(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}\ (1)$$

En cuanto a su relación con la geometría proyectiva, el resultado importante es la invarianza de este tipo de relaciones:

Sean $A, B, C, D\ y\ A', B', C', D'$ puntos relacionados por una transformación proyectiva, por lo cual sus relaciones cruzadas $(A, B; C, D)$ y $(A', B'; C', D')$ son iguales. Esto es

$$(A, B; C, D) = \ (A', B'; C', D') \rightarrow \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'}\ (2)$$

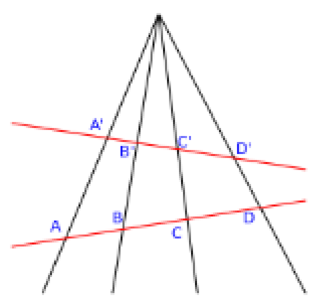


Figura 1. Representación gráfica de la razón cruzada.

2.1.2. Teorema de Pappus

Aunque este teorema puede encontrarse como resultado particular del Teorema de Pascal, se describe específicamente debido a que su definición está formulada puramente con propiedades de incidencia, sin hacer referencia a medidas (Coxeter, 2003).

Si en un par de rectas se escogen tres puntos al azar en cada una y se unen de dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen estarán en una línea recta.

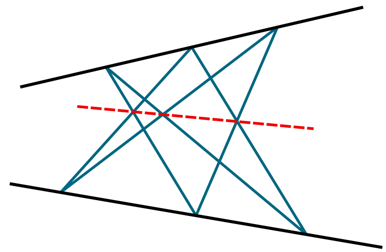


Figura 2. Representación gráfica del Teorema de Pappus

2.1.3. Teorema de Pascal

Como se menciona, el Teorema de Pascal se puede considerar una generalización del de Pappus, pues su afirmación se extiende sobre todas las cónicas. Este teorema también suele ser denominado *Hexagrammum Mysticum Theorem* (Schlenker, 2021) y se define como sigue:

Si en un hexágono arbitrario ABCDEF se encuentra inscrito en una sección cónica, y se extienden los pares de lados opuestos hasta que se cruzan, los tres puntos OPQ en los que se intersecan se encontrarán ubicados sobre una línea recta, denominada la *recta de Pascal* de esta configuración (ver Figura 3).

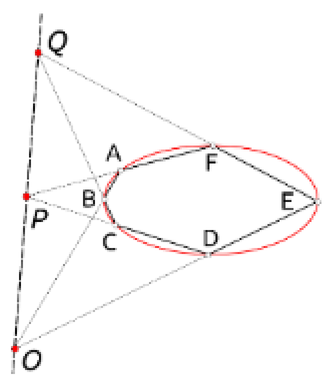


Figura 3. Teorema de Pascal en Hexágono Inscrito en una Elipse.

Sin embargo, esta no es la configuración más clásica que se suele utilizar. Con regularidad, el Teorema de Pascal se representa sobre un hexágono cíclico inscrito en una elipse (aunque el teorema se define que el hexágono es arbitrario, así que el orden de conexión de los puntos es indiferente) (ver Figura 4).

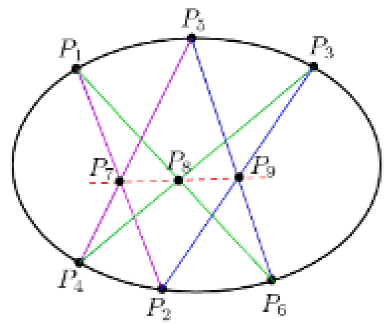


Figura 4. Recta de Pascal en Hexágono Cíclico inscrito en una Elipse.

2.1.4. Teorema de Desargues

Este teorema, a diferencia de los resultados vistos anteriormente, está orientado a definir la proyectividad de dos figuras, en particular, dos triángulos (Lienert, 2018). Se define como sigue:

En el plano proyectivo, dos triángulos son proyectivos desde un punto si y sólo si son proyectivos desde una recta.

Si consideramos dos triángulos ABC y DEF, y un punto O, se dice que son proyectivos si las rectas AD, BE y CF concurren en este punto O. De forma similar, para que dos triángulos sean proyectivos, las rectas que contienen los pares de lados (AB, DE), (AC, DF) y (BC, EF) se cortan respectivamente sobre una misma recta r (ver Figura 5).

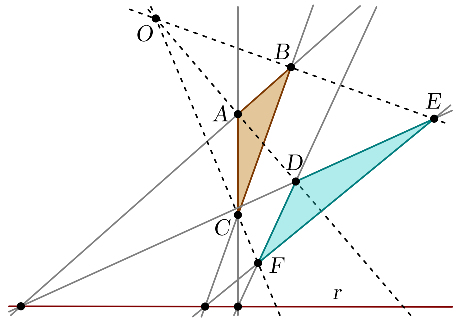


Figura 5. Teorema de Desargues: Dos triángulos proyectivos desde un punto y desde una recta.

2.2. Referentes sobre el pensamiento geométrico

Para describir, entender y explicar el pensamiento geométrico que desarrollan los estudiantes participantes del estudio, se construye un marco teórico para este estudio basado en las perspectivas constructivistas relacionadas al pensamiento geométrico (van Hiele, 1986; Van Hiele, 1999; Fuys et al, 1988).

Múltiples investigaciones han empleado este marco para describir el pensamiento geométrico en diferentes niveles educativos, por ejemplo, Bernabéu, Moreno & Llinares (2018) con estudiantes en primaria; Rizki, Frentika & Wijaya, A. (2018), con estudiantes de secundaria; Erdogan (2020) y, Bashiru & Nyarko (2019), con estudiantes de bachillerato; Fitriyani, Widodo & Hendroanto (2018), con estudiantes universitarios; Armah, Cofie & Okpoti (2018), con profesores en formación. Todos tienen en común su forma de caracterizar el pensamiento geométrico y la forma en la que se plantea el desarrollo de este.

El pensamiento geométrico puede definirse desde los documentos oficiales, por ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional (1998) en los Lineamientos Curriculares para matemáticas plantea que el pensamiento geométrico es *"… el conjunto de los procesos cognitivos mediante* *los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales"*[20].

De manera similar lo describe Gómez (2011) como *"los procesos cognitivos mediante los que se construyen y manipulan representaciones de objetos bidiminesionales y tridimensionales, además de sus características, relaciones y transformaciones. También se refiere a la comprensión del espacio y el plano a través de la observación de patrones y regularidades, así como al razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición a partir de la selección de unidades e instrumentos pertinentes"*[21].

Por su parte, Flórez (1991) plantea que el pensamiento geométrico espacial es el *"...pensamiento matemático que se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional, como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, tiene una fuerte base senso-perceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con su medio y se sistematiza y generaliza con el estudio de los contenidos geométricos en la escuela"*[22].

Según van Hiele (1999) las fases de aprendizaje de los estudiantes: información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración; las cuales se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. *Fases de Aprendizaje de van Hiele.*

Fase	**Descripción**
Información	Interacción entre profesor y estudiante a través de la discusión.

[20] Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. MEN. Bogotá, p. 56.
[21] Gómez, M. (2011). Pensamiento Geométrico y Métrico en las pruebas nacionales. (Tesis de Maestría), Universidad Nacional, Bogotá D.C. p. 33.
[22] Flórez, A. (1991). *Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba*. (Tesis de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana. p. 10.

Orientación guiada	Los estudiantes aprenden geometría explorando y usando actividades guiadas.
Explicación	Los estudiantes pueden explicar y expresar lo su punto de vista sobre las estructuras geométricas observadas.
Orientación libre	Los estudiantes tienen tareas más complejas que involucran múltiples pasos y pueden ser completadas a través de una variedad de formas, incluidas las preguntas abiertas.
Integración	Los estudiantes revisan y hacen un resumen de qué cuestiones aprendieron con el propósito de construir una nueva visión en conjunto de la red de objetos estudiados y así establecer relaciones entre ellos.

Nota: Traducido de Van Hiele (1999, p. 1-3).

Con base en estas fases de aprendizaje se diseñaron las actividades que se implementaron. Se considera en el diseño instruccional el desarrollo de cada momento, de tal manera que se articule el proceso de aprendizaje para alcanzar un alto nivel de pensamiento geométrico.

El desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, durante la implementación de las actividades, se evalúa, coherentemente, en términos de los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele (1999): Reconocimiento o Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción y Rigor. Una descripción de cada nivel puede encontrarse en la Tabla *1*2.

Tabla 2. Niveles de Pensamiento Geométrico van Hiele.

Nivel de Pensamiento	**Descripción**
Reconocimiento o Visualización	El estudiante conoce las formas geométricas tales como triángulo, cuadrado, rectas, círculos, pero no puede entender aún las propiedades en esas construcciones.
Análisis	El estudiante conoce las propiedades de los objetos que observa, se hacen menciones a regularidades contenidas en los objetos geométricos, pero aún no está capacitado para entender las relaciones que vinculan diferentes objetos geométricos entre sí.
Deducción Informal	Los estudiantes, además de las características del nivel anterior, puede organizar figuras de manera lógica y relacionarlas entre sí, pero aún no pueden operar en un sistema matemático asociado a las características o propiedades de las figuras.
Deducción	El estudiante está capacitado para realizar deducciones correctas y satisfactorias para construir cuestiones geométricas en sistemas axiomáticos. Aunque algunos generan cierto tipo de estructuras

	demostrativas, no son realmente demostraciones ni poseen rigor. En este nivel el estudiante es capaz de comprender la estructura de un sistema completo de axiomas, sus definiciones, teoremas, consecuencias y postulados.
Rigor	El estudiante puede trabajar en varios sistemas axiomáticos al mismo tiempo. Si se encuentra en este nivel, se puede decir que es capaz de anticipar deducciones al análisis y exploración. Esto implica que es capaz de realizar demostraciones con esquemas formales y manipulando los elementos de manera matemáticamente apropiada.

Nota: (Van Hiele 1999); (Yudianto, Sugiarti & Trapsilasiwi, 2018).

Por otro lado, existen unas destrezas propias del pensamiento geométrico basadas en el modelo de Van Hiele, las cuales son planteadas por Hoffer (1981)[23]:

- Visualización de imágenes (identificar, observar características, comprender un dibujo, identificar posiciones).
- Lenguaje (uso correcto de la terminología y precisión en el lenguaje para describir los objetos y las relaciones espaciales).
- Construcción de formas (realizar construcciones en 2D y 3D, dibujar figuras semejantes, dibujar figuras simétricas).
- Pensamiento lógico (reconocer criterios para clasificar, formular hipótesis y verificarlas, demostrar).
- Aplicación (aplicar conocimientos aprendidos en la práctica, resolver problemas prácticos utilizando geometría).

Estos referentes son utilizados en este trabajo como sustento para el planteamiento de los objetivos de aprendizaje de cada actividad, pues estos deben articularse para conformar el pensamiento geométrico vinculado con la geometría proyectiva. Además, también como

[23] Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, *74*(1), 11-18.

fundamento del diseño instruccional de las actividades, pues éstas deben asegurar que el estudiante transite por las fases de aprendizaje. Por último, los niveles del pensamiento geométrico fungen en esta investigación como escala para la categorización del desempeño de los estudiantes en las actividades, así, se pueden determinar las fortalezas y debilidades de los participantes, de las actividades y del diseño instruccional utilizado.

2.3. Fundamentos de la resolución de problemas. Problemas retadores

La resolución de problemas es una actividad importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos. Según Pochulu y Rodríguez (2012) *"... el énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas. Al decir esto queremos resaltar el interés en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas, a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido matemático específico"*[24].

La resolución de problemas ha sido investigada por Krulik & Rudnik (1987); Schoenfeld (1985,1992); Cobo & Fortuny (2000); Lesh & Harel (2003), Stacey Burton & Mason (2010); Pochulu y Rodríguez (2012), Campistrous & Rizo (2013); Liljedahl y Santos-Trigo, (2019); entre otros. Estos investigadores han aportado definiciones de problema, estrategias heurísticas, fases o estrategias de la resolución de un problema y sobre el papel de la metacognición.

[24] Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María.

Con respecto a la definición de problemas Polya (1981) plantea que tener un problema *"... significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata*"[25].

Por su parte, Krulik & Rudnik (1987) establece que un problema es *"... una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma*"[26]. Esta es la definición de problema que se asume en la investigación.

Schoenfeld (1985); Campistrous & Rizo (2013); De Guzmán (1996), Stacey Burton & Mason (2010), entre otros investigadores, aportan definiciones de problemas a esta teoría. A pesar de esa variedad de definiciones de problemas, Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) plantean rasgos que distinguen las diferentes definiciones abordadas por los investigadores. Estos rasgos están presentes en cada una de ellas:

- La existencia de condiciones iniciales o finales que exprese la necesidad de transformación.
- La vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida o, al menos, no ha de ser inmediatamente accesible.
- Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, teniendo presente que lo que puede ser un problema para uno puede no serlo para otro.

---

[25] Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons, p. 117.
[26] Krulik, S. y Rudnik, J. (1987). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon, p. 4.

- Que el estudiante disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades y motivación.

En la tesis se aduce lo planteado por Polya (1945) sobre lo que significa resolver un problema, pues expresa que "… *es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"*[27].

Investigadores como Polya (1981), Schoenfeld (1985); Krulik & Rudnik (1987); Campistrous y Rizo (2013); De Guzmán (1996), Stacey, Burton y Mason (2010), entre otros, aportan fases o estrategias de resolución de problemas. En la investigación se asumen las fases propuestas en el modelo de Schoenfeld (1985): analizar y comprender el problema, diseñar y planificar una solución, explorar soluciones, y verificar la solución. A continuación, se explican cada una de estas fases:

- *Analizar y comprender el problema*: es la etapa en la que los estudiantes reflexionan sobre el planteamiento del problema. Se determinan los datos ofrecidos, las cuentas u operaciones efectuadas y el contexto en el que se desarrolla la situación problema.
- *Diseñar y planificar una solución*: el estudiante relaciona los datos ofrecidos por el problema y los requisitos para ser solucionado. Se establece un procedimiento a seguir, un planteamiento inicial que es ejecutado en la siguiente etapa.
- *Explorar soluciones*: el estudiante ejecuta sus planes y comprueba que su proceder es correcto y que se aproxima a la solución.

[27] *Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas*.

- *Verificar la solución*: es la etapa en la que el estudiante verifica la coherencia de los resultados obtenidos al seguir el plan y comprueba que, efectivamente, sus resultados logran dar solución al problema planteado.

Con respecto a estas fases, Schoenfeld (1985) plantea la necesidad de tener en cuenta los conocimientos previos con los que el estudiante cuenta a la hora de resolver el problema, los que denomina *recursos*. Además, el autor establece la importancia de los conceptos de *control* y las *creencias*. Por un lado, el control es la capacidad que tiene el estudiante de verificar su procedimiento y decidir detenerse y tomar una ruta alternativa de solución. Las creencias se definen como las convicciones que tengan los estudiantes frente a las matemáticas en general y al tema trabajado en particular, en esto se incluyen también las actitudes, opiniones y prejuicios.

Con respecto a los problemas retadores Pérez (2004) plantea que estos "… *invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento*"[28]. También afirma que estos problemas "*exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior"*[29].

---

[28] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[29] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Por su parte, Falk (1980) plantea que los problemas retadores constituyen *"... una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata*"[30]. Además, afirma que un problema retador es aquel *"... cuya solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidas. Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático en sí"*[31].

Estos referentes abordados sobre problemas retadores contribuyen al diseño del sistema de actividades que permita el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. Estas actividades se conforman mediante problemas retadores de la geometría proyectiva, donde se involucran los principios de proyección y razón cruzada.

2.4. Referentes de la Visualización Matemática

Investigadores como Zimmermann y Cunningham (1991), De Guzmán (1996), Arcavi (2003), Duval (2005), Presmeg (2006), entre otros, han aportado a la visualización matemática.

Debido a que los objetos geométricos con los que el estudiante trabaja no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata, resulta indispensable el uso de representaciones semióticas (Hitt, 1996). En particular, al estudiar las invarianzas de los objetos en las configuraciones proyectivas, una buena representación gráfica puede ser decisiva en el aprendizaje de los estudiantes (Crannell, Frantz & Futamura, 2019). Sin

---

[30] Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, p.16.

[31] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana*, VIII(1), p. 21.

embargo, por muy buena que sea la representación semiótica o muy variados registros que se utilicen, si el estudiante no es capaz de obtener una imagen amplia de los conceptos representados, explorarlos, encontrar analogías y relaciones entre los objetos, no serán útiles.

Es por esto por lo que la visualización matemática se define como un proceso importante a considerar en este trabajo que se desarrolla. En particular, al no existir un consenso en cuanto a definir este proceso, se tomará el que da Arcavi (2003), pues abarca un amplio conjunto de características: *"La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar. ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados"*[32].

Dentro del proceso de visualización matemática existen dos subprocesos que se conocen como *semiosis* y *noesis*, los cuales son determinantes para la extracción de información de las configuraciones geométricas que se le presentan al estudiante, su comprensión y posterior uso actividades complejas (D'Amore, et al. 2015).

Por un lado, la *semiosis* se puede entender como prácticamente cualquier proceso cognitivo en el cual se le dé sentido y significado a un signo o símbolo (Duval, 2005). En particular, en las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje, la semiosis es el proceso inicial que debe realizar un individuo para comprender una representación dentro de un registro semiótico, antes de estructurar y relacionar dicha información (Duval, 2006; Radford, 2018).

---

[32] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241, p. 217.

Por otro, la *noesis* se corresponde con la construcción del conocimiento obtenido del proceso de semiosis y a través del análisis, estructuración y relación de la información obtenida de una representación en algún registro semiótico (Duval, 2005; 2006). Éste sería el segundo paso en el proceso de visualización matemática, la generación de conocimiento a partir del análisis del significado de los signos y símbolos (Duval, 2017).

Estos subprocesos se pueden entender con un ejemplo. Si en una configuración geométrica se dibujan dos rectas que se cruzan en un punto, un estudiante hace semiosis si le da sentido a esa intersección como un objeto que tiene características de punto y hará noesis cuando comprenda el carácter de unicidad de éste. Estos subprocesos se consideran para asegurar que los estudiantes comprendan los conceptos inmersos en las representaciones semióticas utilizadas en las actividades de geometría proyectiva propuestas.

La visualización se sustenta en representaciones e imágenes visuales. Según De Guzmán (1996), en el contexto escolar la imagen visual se caracteriza por ser:

- Matriz de la que surgen los conceptos y métodos del campo matemático.
- Estimuladora de problemas de interés relacionados con los objetos de la teoría matemática.
- Generadora de relaciones de formas ocultas, capaces de conducir de manera fiable a la resolución de los problemas matemáticos.
- Vehículo eficaz de transmisión rápida de las ideas geométricas.
- Ayuda a la actividad subconsciente en torno a los problemas geométricos.

En la geometría proyectiva las representaciones semióticas son un pilar fundamental. No se puede ignorar el proceso de visualización matemática de estas representaciones, y debe ser potenciado tanto como se pueda. Para esto, se hace el acompañamiento de los problemas retadores con configuraciones gráficas hechas integradas en el texto (junto a los planteamientos) y en GeoGebra, pues el dinamismo de éste permite la manipulación, cuestión que coadyuva la semiosis y noesis.

Lo antes planteado es particularmente útil en la comprensión de características invariantes en las transformaciones y la comprobación de los teoremas de la geometría proyectiva. En este proceso los estudiantes pueden modificar la configuración geométrica, cambiar la ubicación de los puntos, el tamaño de las figuras, la posición de los planos de proyección y demás elementos. Esta manipulación le permite al estudiante entender la forma en la que se construye la representación semiótica, los conceptos involucrados, las características de estos elementos y la relación que guardan entre ellos y con sistemas matemáticos asociados; es decir, realizar el proceso de visualización matemática.

Conclusiones del capítulo 2

Las bases teóricas sobre la geometría proyectiva, cada elemento, resultado y teorema descrito en este capítulo, son el eje central del desarrollo de las actividades propuestas. Aunque se toman ciertas libertades para el planteamiento de los problemas retadores, con el fin de lograr un lenguaje menos abstracto y más cercano a los estudiantes, se conservan las características rigurosas que definen a los objetos, relaciones, resultados y teoremas de la geometría proyectiva.

El pensamiento geométrico, tomándolo como este conjunto de habilidades y conocimientos relacionados con los objetos bidimensionales y tridimensionales, sus características, propiedades y transformaciones; hace parte de la formación integral de los estudiantes. En particular, con las actividades de resolución de problemas retadores de geometría proyectiva, el desarrollo de este pensamiento se basa en el tránsito de los estudiantes a través de las fases de información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración.

En las actividades se integran ciertas representaciones semióticas en el texto y dispuestas en GeoGebra, con el fin de que el estudiante realice el proceso de visualización matemática. Este proceso, en el que subyacen la semiosis y noesis, resulta fundamental para el entendimiento de los conceptos, resultados y teoremas de la geometría proyectiva.

Con base en los referentes teóricos sobre los resultados y teoremas de la geometría proyectiva y el marco teórico de la resolución de problemas, se plantean los problemas retadores. Además, estas actividades se diseñan para promover que los estudiantes transiten, por medio del proceso de visualización matemática, a través de cinco fases de aprendizaje (Información, Orientación guiada, Explicación, Orientación libre, Integración) y los resultados obtenidos se categorizan en función de los niveles de avance del pensamiento geométrico (Reconocimiento o Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción, Rigor).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, además del diseño y el alcance de la investigación, se presentan los aspectos metodológicos del proceso de recolección, organización y análisis de datos, y las cuestiones relacionadas con la población y muestra del estudio, los métodos empíricos e instrumentos aplicados, y las fases de la investigación

3.1. Tipo y Alcance de la Investigación

La investigación es de tipo cualitativa y se enfoca en el análisis descriptivo del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes de secundaria al trabajar con actividades donde la resolución de problemas es el eje central, y en la cual se utiliza GeoGebra para la manipulación de las representaciones semióticas del registro gráfico.

Debe considerarse que la investigación se limite a describir, caracterizar y categorizar el pensamiento geométrico de los estudiantes en cuanto a los conceptos y teoremas de la geometría proyectiva manejados se refiere. Otros estudios más extensos pueden abarcar más temáticas o estudiar en profundidad las características identificadas en esta investigación. Además, en cuanto a la generalización del conocimiento construido en este trabajo, es necesario aclarar que la muestra de estudiantes (15), aunque suficiente para lo que se pretende en este trabajo, resulta pequeña para que los resultados puedan considerarse significativos estadísticamente, lo que, formalmente hablando, puede poner en riesgo la confiabilidad de cualquier generalización hecha.

3.2. Técnicas de Recolección, Organización y Análisis de Datos

Además de los datos recopilados con los resultados de los estudiantes, tanto en físico como en los archivos de GeoGebra, se utilizan herramientas para grabar audio y video de las clases, así como hojas de observación donde se sistematizan las cuestiones más relevantes de la implementación de las actividades.

Este material se digitaliza y se organiza por actividad y estudiante, con el fin de triangular la información sobre el desempeño individual y el avance del pensamiento geométrico.

Con base en la descripción de cada fase de aprendizaje, se analiza si se realiza el tránsito del estudiante en ellas, con el fin de catalogar la eficacia de la actividad planteada. De igual manera, se analiza el desempeño de los estudiantes por problema y por actividad, para identificar las características que permiten ubicar sus productos según el nivel de pensamiento geométrico alcanzado.

3.3. Población y muestra

La población está conformada por los estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Santa Juana de Arco de Santa María, Huila y la muestra la conforman 15 estudiantes del curso.

3.4. Métodos empíricos e instrumentos aplicados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. En el estudio se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Análisis de fuentes: para constatar el estado del arte y sentar las bases teóricas que sustentan la investigación.

Histórico-lógico: para estudiar la evolución y desarrollo que ha tenido la enseñanza aprendizaje de la geometría proyectiva en la escuela.

Análisis-Síntesis: para determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría proyectiva en la escuela. Además, para la construcción de los fundamentos teóricos, para sintetizar los resultados de las actividades y en la elaboración de las conclusiones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La **observación participante**: para obtener información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría proyectiva en la escuela.

Entrevista: a investigadores de Educación Matemática con el fin de determinar sus concepciones sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría proyectiva en la escuela.

Encuesta: para obtener información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría proyectiva en la escuela. También se aplica una encuesta de satisfacción a los estudiantes.

3.5. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se constatan las siguientes fases:

- **Fase 1: diagnóstico.** Esta fase se dedica a la elaboración de instrumentos: observación participante y encuesta a docentes. Además, se realiza la revisión de la literatura, donde se hace una búsqueda exhaustiva del estado del arte, la cual permite confirmar el problema de investigación, restructurar el objetivo general y determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría proyectiva en la escuela.
- **Fase 2: Diseño**. En la fase se concreta el marco teórico de la tesis, además se realiza al diseño y elaboración de cuatro actividades, las cuales se muestran en el capítulo 4.

- **Fase 3: Trabajo de campo**. En esta fase se dirige a la aplicación de instrumentos y recogida de datos arrojados. Además, se realiza la aplicación de las actividades y la recogida de la información.
- **Fase 4. Análisis de resultado**. Se analizan los resultados de la implementación de los instrumentos y de las actividades. Además, se elabora el documento escrito.
- **Fase 5. Informativa.** En esta fase se realiza la sustentación de la tesis, se socializan los resultados de la investigación en congresos que aborden los principales aportes de la investigación.

Conclusiones del capítulo 3

Como se describe, la investigación es de tipo cualitativo y se enfoca en la descripción, caracterización y categorización del pensamiento geométrico exhibido por los estudiantes al desarrollar las actividades de geometría proyectiva planteadas. Estas actividades cuentan con un diseño instruccional que consta de cuatro etapas: introducción, trabajo individual, trabajo colaborativo e integración. Dentro del desarrollo de estas etapas, los estudiantes deben resolver la actividad que se plantea con una estructura que posee: título, objetivo de aprendizaje, sugerencias metodológicas, materiales para utilizar, motivación, problemas retadores y realimentación.

Los datos obtenidos de los estudiantes en la implementación de las actividades se digitalizan y sistematizan de tal manera que se optimice la extracción de resultados relevantes para la descripción, caracterización y categorización del pensamiento geométrico. Se toman, además, notas de observación, grabaciones de audio y video, y el trabajo de los estudiantes en los applets de GeoGebra, para triangulación de los resultados.

CAPÍTULO 4. PROPUESTA DEL SISTEMA DE ACTIVIDADES

En este capítulo se presenta el diseño instruccional con el cual se implementan las actividades, se describe la estructura general de las actividades y se explicita cada actividad planteada.

4.1. Diseño Instruccional de las Actividades

Como se mencionaba en las conclusiones del CAPÍTULO 2, las actividades se diseñan en función de optimizar el proceso de visualización matemática de los estudiantes, con el contribuir al pensamiento geométrico de los estudiantes, a través de la resolución de problemas de la geometría proyectiva, que involucran los principios de proyección y razón cruzada. De esta manera, se busca que los estudiantes transiten por las cinco fases de aprendizaje: Información, Orientación guiada, Explicación, Orientación libre, Integración (Van Hiele, 1999). Este diseño instruccional se elabora con base en el modelo de desarrollo de Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación (ADDIE) (Branch, 2009) y se modifica en función de recomendaciones de expertos.

La estructura del diseño instruccional de las clases, de manera general, es la siguiente:

- **Introducción**: el docente presenta el tema como parte de integral del curso y se especifica la metodología de trabajo, en un primer momento individual, para luego pasar al trabajo colaborativo y finalmente integrar todos los conocimientos en un trabajo en conjunto con el grupo en general.
- **Trabajo individual**: en esta etapa el estudiante debe leer la primera sección de la actividad (introducción, objetivo de aprendizaje y motivación), para luego realizar unas primeras aproximaciones al problema, sin intentar resolverlo. La indicación es

analizar, reflexionar y establecer una serie de procedimientos que podrían servirle para resolver la situación planteada.

- **Trabajo colaborativo**: con los planes hechos individualmente para resolver el problema, se les pide a los estudiantes que se reúnan en grupos pequeños (máximo tres estudiantes), para que discutan sus planteamientos y decidan cómo debe ejecutarse el proceso de resolución. Si hay consenso en los grupos, toman un camino, si no, se les recomienda trabajar en paralelo e ir observando y controlando los resultados obtenidos. Finalmente, deben determinar si una o más de estas soluciones son satisfactorias y preparar un breve resumen para el momento de la integración.
- **Integración e Institucionalización**: con las soluciones presentadas por los estudiantes, el docente integra los conocimientos involucrados y los condensa en una institucionalización de los contenidos. En este proceso, los planteamientos de solución que realicen los estudiantes y que no resulten satisfactorios, deben ser realimentados en función de señalar con precisión las falencias y enfocarse en cómo deben superarse.

4.1.1. Estructura de las actividades

Las actividades implementadas, en términos generales, se organizan en la siguiente estructura:

- **Título:** en el cual se hacía explícito el tema (introducción, elementos, teoremas, etc.).

- **Objetivo de aprendizaje:** en el que se describen las habilidades y conocimientos que se pretenden sean desarrollados y se alcancen por el estudiante al desarrollar la actividad.

- **Sugerencias Metodológicas:** un ítem en el cual se describe, de manera táctica, el proceder metodológico que puede tener el estudiante (una heurística recomendada en función de la situación problema).
- **Materiales para utilizar:** un listado de lo que podría requerir el estudiante para desarrollar a cabalidad la actividad y resolver los problemas planteados.
- **Motivación:** ya sea histórica o de aplicación, se presenta en este apartado una descripción de los conceptos u objetos vinculados a otras áreas o ciencias, de modo que el estudiante encuentre una relación plausible entre lo que aprendería al resolver la actividad y la realidad.
- **Problemas retadores:** es la sección donde se encuentran las situaciones problemas planteadas. Estos vienen acompañados de representaciones gráficas en papel y un applet dinámico de GeoGebra que funge como representación semiótica de la situación.
- **Realimentación:** un espacio en la actividad para que el docente escriba algún detalle puntual de realimentación sobre el procedimiento que realice el estudiante, con el fin de obtener algo de orientación guiada y que facilite el control del estudiante en su proceso de solución.

4.2. Propuesta de actividades

A continuación, se presentan las actividades propuestas para el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes a través de la resolución de problemas.

4.2.1. Actividad 1. Introducción a la Geometría Proyectiva

Objetivo: Motivar a los estudiantes hacia la introducción de algunos elementos de la Geometría Proyectiva

Sugerencias metodológicas: esta actividad se realiza como introducción a la geometría proyectiva, donde se debe considerar los conocimientos previos necesarios, para presentar algunos elementos de esta geometría. Se desarrolla con estudiantes de grado 11 de la I.E. Santa Juana de Arco. La actividad se realiza de forma sincrónica y el trabajo de los estudiantes se proyecta de forma independiente con el apoyo de los recursos tecnológicos y virtuales de aprendizaje.

Para el desarrollo de esta actividad se propone una hora y treinta minutos, en los cuales el docente investigador entrega los detalles de la actividad y aclara dudas de los estudiantes, que se puedan presentar. La observación del docente investigador de los procesos de resolución utilizados por los estudiantes, además del material enviado por estos, se utiliza para el proceso evaluativo de la actividad.

Materiales para utilizar: elementos físicos como: regla, lápiz y papel (sin medida). Además, se utiliza los dispositivos tecnológicos que posean los estudiantes, junto a la guía de la Actividad 1 a desarrollar.

Motivación

En el renacimiento, la representación de los objetos y las cosas tal como se les ve, lleva a diferentes artistas a construir herramientas que constituyen procedimientos, lo más fieles posibles, para trazar la perspectiva de un objeto en un plano, o viceversa. La representación convincente de un sujeto tridimensional en una superficie plana es un problema que los artistas han luchado a lo largo de los siglos.

Existe evidencia, desde la antigüedad, de que la capacidad de crear imágenes que engañen a los ojos o entregan una fuerte sensación del espacio, ha sido muy apreciada durante mucho tiempo. Lo que cambia en el Renacimiento es que los artistas se "obsesionan con las matemáticas" y buscan reglas de perspectiva basadas en principios matemáticos. Las reglas escritas más antiguas para la perspectiva (con las cuales siempre se hace referencia a la perspectiva lineal de un punto), una técnica entre muchas para representar escenas tridimensionales en un plano de imagen, datan de 1435 con la aparición de De Pictura, de León Battista Alberti[33].

A continuación, se presenta la siguiente pregunta que trata como objeto de estudio y de discusión de pintores y matemáticos de la época: ¿cómo crees que se aborda el problema de representar elementos espaciales en una superficie plana? Sigue este enfoque y analiza los siguientes supuestos:

1. Identifique el ojo de un observador como un punto
2. Suponga que la visión ocurre a lo largo de una línea entre el ojo y cada punto visible de un objeto.
3. Las líneas paralelas vistas desde la distancia parecen crecer más juntas.
4. Los objetos vistos en el mismo ángulo se perciben como del mismo tamaño.

[33] Las actividades acá expuestas son tomadas del artículo “Geometry for all” de Meighan Dillon. Todos los derechos a: Dillon, M. (2014). Geometry for all. *The College Mathematics Journal, Vol. 45 (No. 3),* pp. 169-178. http://www.jstor.org/stable/10.4169/college.math.j.45.3.169

5. Los rayos entre el ojo del espectador y un objeto percibido forman un cono con el ojo en el extremo, el objeto en la base.

Ahora bien, después de desarrollado el análisis se trabajan una serie de problemas, que ponen a prueba lo analizado en este enfoque.

Problemas Retadores

Problema 1. ¿Qué elementos de perspectiva se logran identificar en los cinco supuestos mencionados anteriormente? ¿Es posible que estos supuestos no sean adecuados para los principios o elementos de perspectiva?

Problema 2. Lee la siguiente configuración y luego intenta dibujarla. "*Un observador cuyo ojo está en un punto O se para frente a un plano* $\boldsymbol{\pi}$ *de imagen. Hay una escena del mundo real detrás de* $\boldsymbol{\pi}$ *y el problema es representar la escena en* $\boldsymbol{\pi}$ *tal como le parece al observador. El punto O y un punto visible A en el mundo real determinan una línea que se cruza con* $\boldsymbol{\pi}$ *en A'. El artista debe representar el punto del mundo real A en A' en el plano*"[34].

Problema 3. ¿Qué hace cada personaje en la Figura 1? ¿Dónde están los puntos O, A y A'? ¿Cómo logra el artista en la imagen su dibujo en perspectiva?

[34] Dillon, M. (2014). Geometry for all. The College Mathematics Journal, Vol. 45 (No. 3), p. 170.

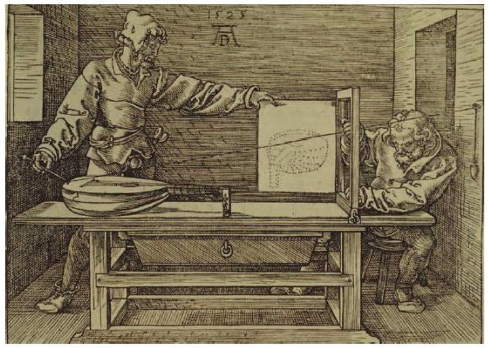


Figura 1

Problema 4. “Ahora suponga que el ojo en O (ver Figura 2) mira el rectángulo horizontal $ABCD$. Las líneas de O a los puntos en los cuatro lados de este rectángulo constituyen una proyección de la cual OA, OB, OC y OD son líneas típicas. Si ahora se interpone un plano entre el ojo y el rectángulo, las líneas de la proyección cortarán a lo largo del plano y marcarán en él, el cuadrilátero $A'B'C'D'$, crea la misma impresión en el ojo que el rectángulo original, es razonable preguntar, como hizo Albertid, ¿qué propiedades geométricas tienen en común la sección y el rectángulo original? (Es intuitivamente evidente que la figura original y la sección no serán congruentes ni similares; ni contendrá la misma área)”[35].

[35] Kline, M. 1990. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Vol. 1. Oxford University Press. Nueva York. p. 287

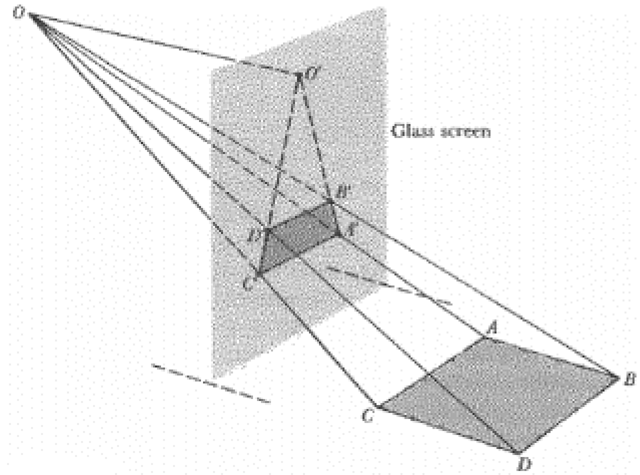


Figura 2

Problema 5. Suponga que “dos secciones diferentes de esta misma proyección están formadas por dos planos diferentes que cortan la proyección en cualquier ángulo. ¿Qué propiedades tendrían en común las dos secciones?

Ahora, suponga que un rectángulo $ABCD$ se ve desde dos ubicaciones diferentes O' y O'' (ver Figura 3). Luego hay dos proyecciones, una determinada por O' y el rectángulo y la segunda determinada por O'' y el rectángulo”[36]. ¿Qué propiedades o relaciones tendrían en común las secciones?

---

[36] Las actividades acá expuestas son tomadas del libro de Kline, M. 1990. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Vol. 1. Oxford University Press. Nueva York. p. 288

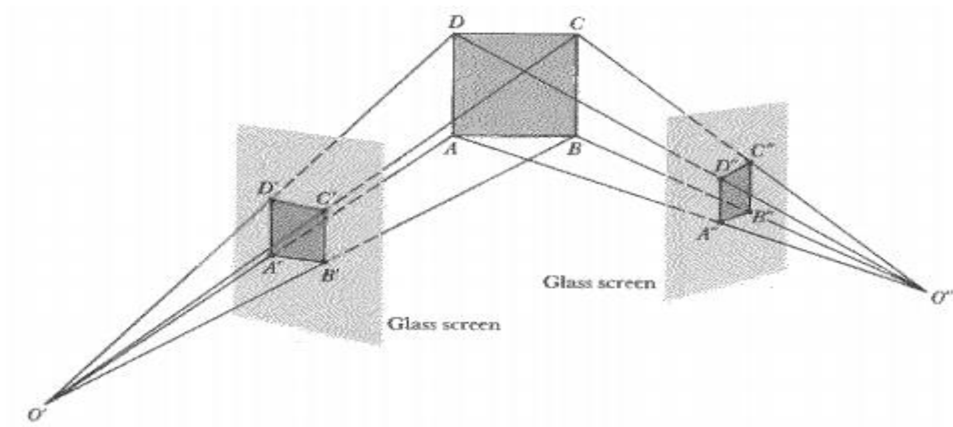


Figura 3

4.2.2. Actividad 2. Elementos de Geometría Proyectiva

Objetivo: motivar a los estudiantes hacia la introducción conceptual de elementos de Geometría Proyectiva utilizando triángulos y cuadrángulos.

Sugerencias metodológicas: en esta actividad se discuten elementos de la geometría proyectiva a partir de la utilización de triángulos, cuadrángulos y sus propiedades. Se desarrolla con estudiantes de grado 11 de la I.E. Santa Juana de Arco. Esta actividad también se realiza de manera sincrónica, permitiéndoles a los estudiantes avanzar de forma independiente en la construcción del contenido geométrico proyectivo, a través de los recursos tecnológicos y virtuales de aprendizaje.

Para la actividad se propone una hora y treinta minutos, en la cual el docente presenta los detalles de la actividad y entrega la guía de trabajo que consta de 4 problemas. En el proceso de resolución de los problemas los estudiantes deben considerar las relaciones entre triángulos, cuadrángulos y sus propiedades. El docente, de ser necesario, les aclara las dudas a los estudiantes que presenten dificultades, proceso que realiza a través de preguntas heurísticas, para lograr que el estudiante construya el conocimiento. La evaluación se lleva a cabo por medio de la observación y del análisis del trabajo enviado por los estudiantes.

Materiales para utilizar: elementos físicos como regla, lápiz y papel (sin medida), dispositivos tecnológicos que poseen los estudiantes y la guía de la Actividad 2 a desarrollar.

Motivación

La geometría a la que comúnmente se encuentran familiarizados los estudiantes puede describirse como aquella que está relacionada con elementos como: círculos, medidas, distancias, ángulos y paralelismo, entre otros. Estos elementos poseen una dependencia para su construcción de las herramientas: regla y compás, y aunque se han hecho descubrimientos en los que no es necesario utilizar al menos una de estas herramientas, resulta demasiado complejo el procedimiento a utilizar en la realidad para la construcción de estos elementos geométricos. De esto surge la pregunta sobre si ¿existe una geometría sin círculos, sin medidas, sin distancias, sin ángulos y sin paralelismo?

Conviene entonces expresar ahora una visión sobre otras geometrías en las que, sobre un intrincado y hermoso sistema de proposiciones, se desarrolle una geometría que no precisa la utilización de los elementos anteriormente mencionados.

Para esto, se consideran los cuadriláteros que en geometría euclidiana son figuras planas de cuatro lados, un cuadrángulo en la geometría proyectiva.

Un cuadrángulo (completo) está determinado por cuatro vértices, es decir, cuatro puntos coplanares, de los cuales no hay tres colineales. Cada par de vértices determina un lado del cuadrángulo. Dos lados de un cuadrángulo que no se cruzan en un vértice son opuestos.

Dado que dos líneas cualesquiera en un plano proyectivo se cruzan, también lo hacen los lados opuestos de un cuadrángulo. Se llama punto diagonal, al punto de intersección de lados opuestos. ¿Cuántos lados tienen un cuadrángulo? Dibuje algunos cuadrángulos usando puntos y líneas euclidianas, teniendo cuidado de organizar los puntos de manera que dos líneas se crucen. Identifica lados opuestos y puntos diagonales[37].

Problemas Retadores

En geometría proyectiva como en cualquier otra rama de las matemáticas, se presenta un desarrollo sobre un número de entidades indefinidas (conceptos primitivos) y proposiciones no probadas (axiomas), así se presentan los siguientes axiomas

Axioma 1. Dos puntos determinan una línea única.

Axioma 2. Dos líneas determinan un punto único, el punto de intersección.

Axioma 3. Hay cuatro puntos, ninguno de los cuales es colineal.

Problema 1. Proporcione demostraciones (lo más completas posible) de las siguientes proposiciones, señalando qué axiomas se utilizan:

(i) Existen al menos cuatro puntos distintos.

(ii) Si a es una línea, existe un punto que no se encuentra en a.

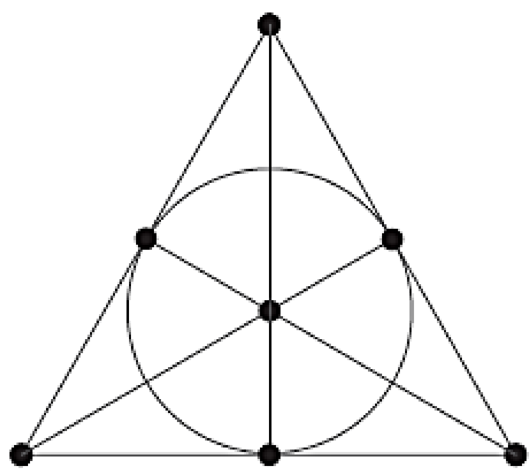
(iii) Si A es un punto, existe una línea que no pasa por A.

(iv) Cada punto se encuentra en al menos tres líneas.

[37] Dillon, M. (2014). Geometry for all. *The College Mathematics Journal*, Vol. 45 (No. 3), p. 175

Problema 2. Dibuja un triángulo equilátero ABC con su círculo DEF, medianas AD, BE, CF y centro G. Observa que la figura tiene 7 puntos, 6 líneas y un círculo. Considere una "geometría", que consta en su totalidad de 7 puntos y 7 líneas, derivada de la figura al llamar al círculo una línea (e ignorar las intersecciones adicionales). ¿Cuál de los axiomas iniciales se niega? [Sugerencia: ¿Dónde están los puntos diagonales de los cuadrángulos $ABCG, AEFG, BCEF$?][38]

Problema 3. Muestre que la siguiente configuración satisface los axiomas 1, 2 y 3. ¿Cuáles son los puntos y las líneas? ¿Por qué no funciona tener una configuración más pequeña que satisfaga 1, 2, y 3?



Problema 4. Dibuja las siguientes configuraciones:

(i) Una figura plana que esté definida por cuatro puntos P, Q, R y S (no tres de ellos alineados) así como de las seis rectas que unen los distintos pares de puntos. Los puntos se llaman los vértices del cuadrángulo y las rectas $x = QR, y = RP, z = PQ, x' = PS, y' = QS$ y $z' = RS$

[38] Coxeter, H. (2003). *Projective Geometry*. Springer Science & Business Media: Toronto, Canadá p. 16

se llaman los lados del cuadránglo. Dos lados que no tienen ningún vértice en común se llaman lados opuestos. Los tres puntos $A = x \cap x', B = y \cap y'$ y $C = x \cap z'$ que son las intersecciones de las parejas de lados opuestos se llaman los puntos diagonales de la figura y definen el triángulo diagonal de esta figura como el ΔABC.

(ii) Una figura plana que esté definida por cuatro rectas p, q, r y s (no tres de ellas concurrentes) así como de los seis puntos que son las intersecciones de los distintos pares de rectas. Los puntos $X = q \cdot r, Y = r \cdot p, X = p \cdot q, X' = p \cdot s, Y' = q \cdot s$ y $Z' = r \cdot s$ se llaman los vértices del cuadrilátero y las rectas se llaman los lados del cuadrilátero. Dos puntos que no estén en el mismo lado se llaman vértices opuestos. Las tres rectas $a = XX'$, $b = YY'$ y $c = ZZ$' que unen las parejas de vértices opuestos se llaman las rectas diagonales de la figura y definen el cuadrilátero diagonal de esta figura como el ΔABC.

Indica en cada una de estas configuraciones su triángulo diagonal y luego responde ¿Qué relaciones comparten estas dos configuraciones? ¿Es posible determinar de cada uno de ellos su dual?

4.2.3. Actividad 3. Teoremas en Geometría Proyectiva

Objetivo: motivar a los estudiantes en los fundamentos de la Geometría Proyectiva, con énfasis en los Teoremas de Desargues, Pappus y Pascal.

Sugerencias metodológicas: en esta actividad se proponen algunos problemas relacionados con los teoremas principales de la geometría proyectiva (Desargues, Pappus y Pascal). Se realiza con estudiantes de grado 11 de la I.E. Santa Juana de Arco. Esta actividad es implementada de forma sincrónica, para que los estudiantes puedan tener un estudio más completo del contenido de los diferentes teoremas propuestos.

Para la realización de esta actividad se estipula una hora y treinta minutos de trabajo, en la que el docente expone los componentes de la guía a trabajar y en caso de ser necesario el mismo docente, apoyado en preguntas heurísticas, soluciona las dudas o inquietudes que poseen los estudiantes. La evaluación del trabajo se obtiene por medio de la observación y el análisis del material enviado por los estudiantes.

Materiales para utilizar: elementos físicos como regla, lápiz y papel (sin medida), dispositivos tecnológicos que poseen los estudiantes y la guía de la Actividad 3 a desarrollar.

Motivación

Considere dos triángulos ABC y $A'B'C'$. Si $A'B'C'$ es una proyección central de ABC, con centro en O, entonces los triángulos están en perspectiva desde el punto O y decimos que O es un punto de perspectiva para los dos triángulos. Ahora suponga que las líneas correspondientes de los triángulos se cruzan. Sea l la recta determinada por los puntos $AB \cap A'B'$ y $AC \cap A'C'$. Si $BC \cap B'C'$ también se encuentra en l, entonces los triángulos son la perspectiva de la línea l, que es entonces el eje de la perspectiva de los dos triángulos. Realiza el dibujo de esta configuración y describe las características proyectivas que ha encontrado.

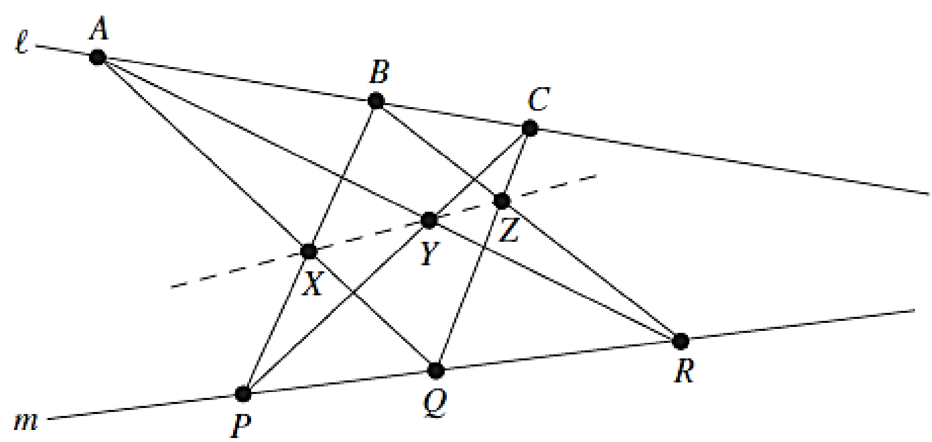
La perspectiva de los objetos desde un punto se relaciona mediante una proyección central. Se entiende esto visualmente al pensar en el punto de perspectividad como un punto donde se puede alinear visualmente los puntos correspondientes de dos objetos para que parezcan superponerse perfectamente. La perspectiva de los objetos desde una línea disfruta de la propiedad dual. ¿Cómo se puede entender eso visualmente?

Problemas Retadores

Problema 1. Suponga que A, B, C son puntos en una línea l, y P, Q, R son puntos en una segunda línea m. Sean $X = AD \cap BP, Y = AR \cap CP$ y $Z = BR \cap CQ$. En particular, suponga que todas las líneas en cuestión se cruzan. Dibuje la configuración que se expresa y luego muestre que X, Y, Z deben ser colineales.

Problema 2. Considere dos triángulos ABC y $A'B'C'$. Si $A'B'C'$ es una proyección central de ABC, con el centro O, entonces los triángulos están en *perspectiva desde el punto O* y se dice que O es un *punto de perspectiva* para los dos triángulos. Ahora suponga que las líneas correspondientes de los triángulos se cruzan. Sea l la recta determinada por los puntos $AB \cap A'B'$ y $AC \cap A'C'$. Si $BC \cap B'C'$ también se encuentra en l, entonces los triángulos son *la perspectiva de la línea l*, que es entonces el eje de la perspectiva de los dos triángulos. Muestre que, si los triángulos están en perspectiva desde un punto, entonces están en perspectiva desde una línea.

Problema 3. En la siguiente configuración:



¿Puede encontrar triángulos que estén en perspectiva desde un punto? ¿Cuál es el punto y el eje de la perspectividad?

Problema 4. Encuentra triángulos en el *plano de Fano* que tengan perspectiva desde un punto. ¿Cuál es su eje de perspectividad?

Problema 5. Dibuje un segmento de línea OC, tome G dos tercios del camino a lo largo de él y E dos quintos del camino de G a C. (Por ejemplo, haga las distancias en centímetros $OG = 10, GE = 2, EC = 3$). Si el segmento OC representa una cuerda estirada, afinada a la nota C, la misma cuerda parada en E o G tocará las otras notas de la tríada mayor. Dibujando un cuadrilátero adecuado, verifique experimentalmente que H(OE, CG)[39].

4.2.4. Actividad 4. Construcción de algunos Teoremas en Geometría Proyectiva a través del uso de GeoGebra

Objetivo: motivar a los estudiantes en los fundamentos de Geometría Proyectiva con la construcción los Teoremas de Desargues, Pappus-Pascal y la razón cruzada a través del uso del software GeoGebra.

Sugerencias metodológicas: para esta actividad se tiene la implementación de recursos informáticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de algunos teoremas de geometría proyectiva donde el trabajo principal se desarrolla con el uso del software GeoGebra. Ésta se implementa con estudiantes de grado 11 de la I.E. Santa Juana de Arco. Se propone que la construcción y desarrollo de los procesos de las actividades se realice de forma sincrónica, para lograr exponer el tratamiento dado por los estudiantes a la hora de solucionar los problemas con la implementación de los recursos digitales.

[39] Ramírez, A. (2008). *Geometría Moderna*. Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT): Guanajuato, México.

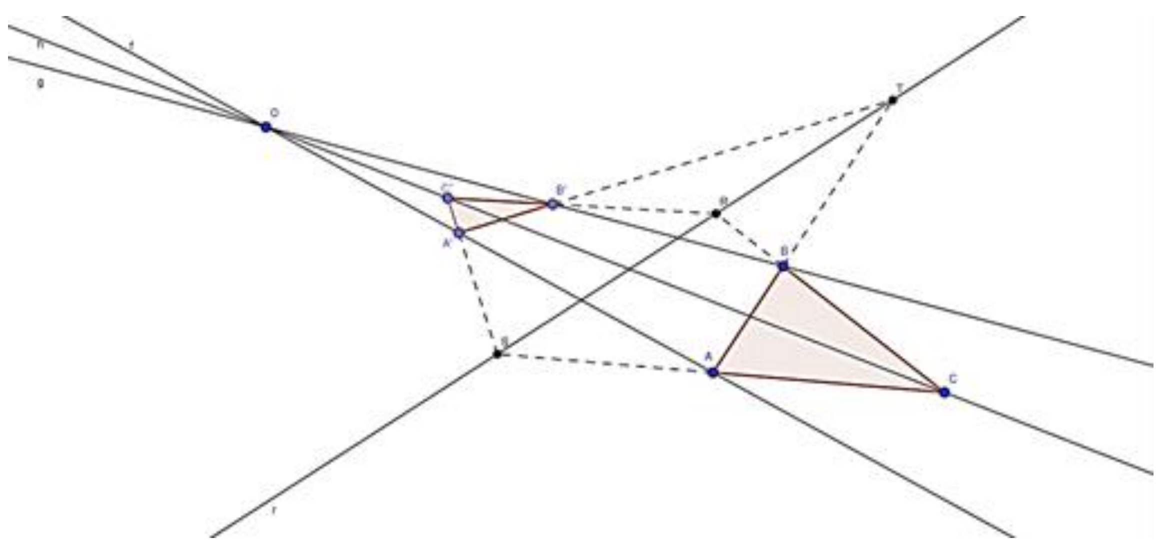
Para el desarrollo de esta actividad se tiene establecido un tiempo de una hora y treinta minutos, en el cual y con la ayuda de las herramientas tecnológicas y el software GeoGebra se explican los elementos que componen a las actividades de la guía y se realiza la evaluación del trabajo que se obtiene de forma exploratoria a través de la observación y el análisis de las actividades y el material entregado por los estudiantes.

Materiales para utilizar: elementos físicos como regla, lápiz y papel (sin medida), dispositivos tecnológicos que poseen los estudiantes y la guía de la Actividad 4 a desarrollar.

Motivación

A continuación, se presenta un ejemplo de los métodos constructivos que se exponen para la construcción en el software GeoGebra de los teoremas de geometría proyectiva.

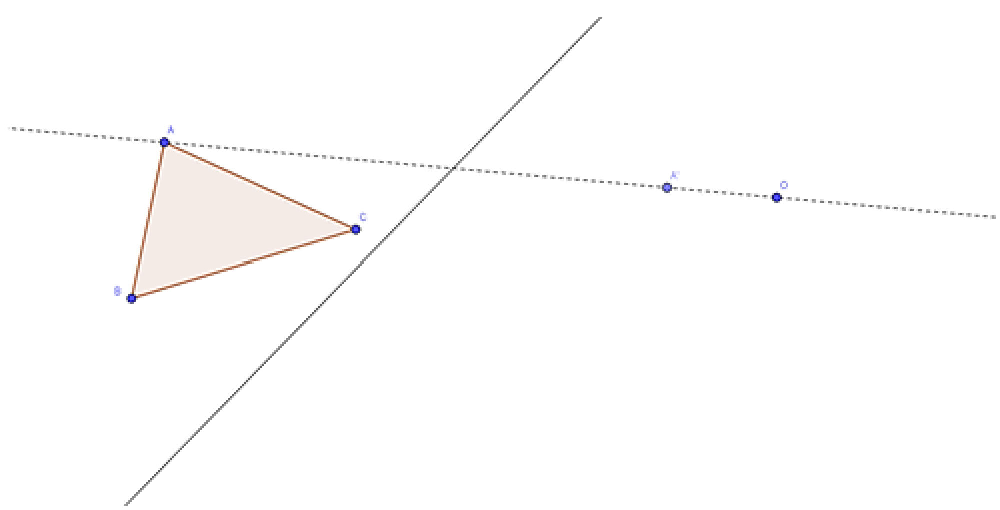
Ejemplo 1. Teorema de Desargues. “Si dos triángulos de un mismo plano, que tienen sus tres pares de vértices correspondientes en rectas que concurren a un mismo punto, entonces tienen sus tres pares de lados correspondientes en rectas que determinan puntos que están alineados”.



En la anterior figura se puede ver que los pares de vértices correspondientes en el plano π (A y A'; B y B'; C y C') están en la misma línea que pasa por "O", tal como se expresa en la hipótesis del Teorema. De modo que, se cumple lo expresado en la tesis que las rectas que contienen pares de lados correspondientes (AB y A'B', AC y A'C', BC y B'B') se cortan en puntos que están sobre la misma recta "r".

De esto, se pueden abstraer algunas operaciones proyectivas como lo son la proyección, por ejemplo, del punto A desde el punto de perspectiva O, es decir, la construcción de OA. Por otra parte, la operación de construcción de los puntos en perspectiva, por ejemplo, de la recta OA, se obtiene el punto de perspectiva A'.

A partir de lo expuesto anteriormente, resuelva lo siguiente: Dado el triángulo ABC, el punto A' que esta en perspectiva con el punto A, el punto de perspectiva O y la recta r que es el eje de la perspectiva. Construir el triángulo A'B'C'.

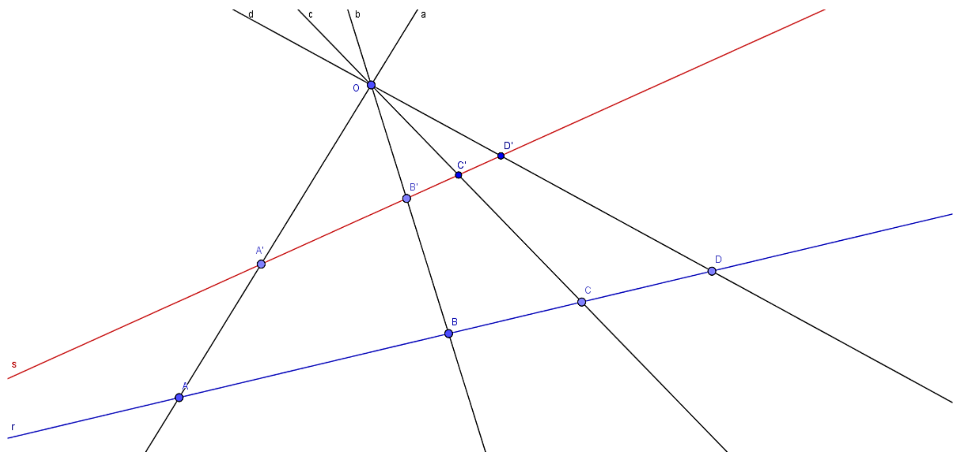


Problemas Retadores

Problema 1. Dada una cónica y los seis puntos de un hexágono sobre esta, muestre que los puntos de corte de los lados opuestos están alineados.

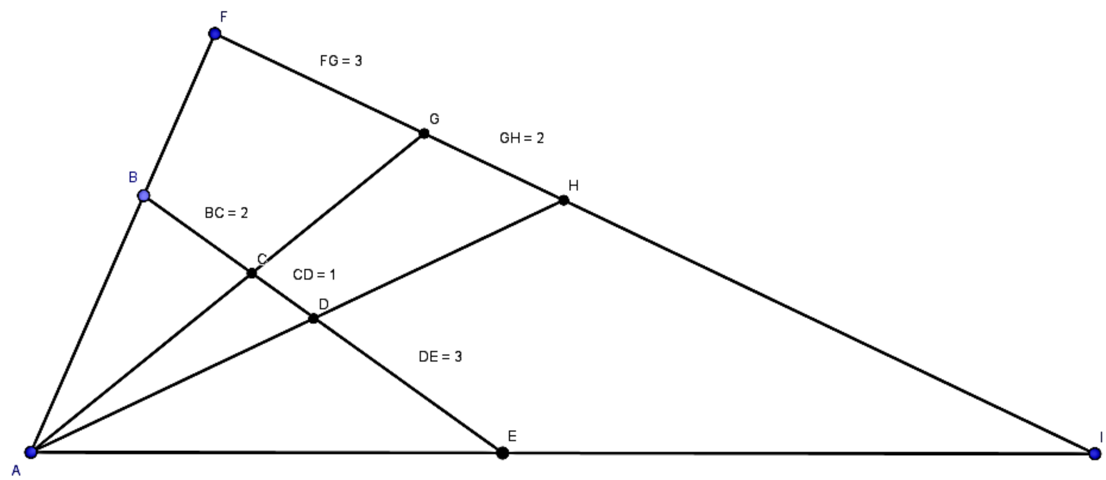
Problema 2. Si un hexágono está circunscrito en una cónica, muestre que las diagonales de los vértices opuestos se cortan en un punto.

Problema 3. En la siguiente figura se muestra una serie de puntos de una recta r que pueden proyectarse en el haz de rectas que los une con un punto O exterior a r. A su vez, se logra ver que un haz de rectas puede cortarse por una recta s que no pasa por el vértice del haz, originando una serie de puntos. De las siguientes series de puntos y haces, muestre que estos son proyectivos entre sí.



Problema 4. Dados tres puntos, A, B, Y en una recta, determinar el punto X tal que la cuaterna (ABXY)=n/m.

Problema 5. Calcule HI en la siguiente figura



Conclusiones del capítulo 4

Las actividades propuestas se diseñan en función de las fases de aprendizaje de los estudiantes. La intención es que se transite por éstas y así desarrollen un nivel alto de pensamiento geométrico. Para esto, las actividades tienen consideradas secciones de trabajo individual, trabajo colaborativo y trabajo de integración en el grupo en general.

Las actividades albergan desde los elementos básicos de la geometría proyectiva, pasando por la conceptualización de axiomas y las transformaciones proyectivas, hasta los resultados y teoremas de Desargues, Pappus y Pascal.

CAPÍTULO 5. ANÁLSIS DE RESULTADOS

El análisis de los resultados obtenidos se presenta por cada actividad. Primero se analiza el tránsito de los estudiantes por las fases de aprendizaje, con esto se establece la eficacia de la actividad y se controlan variables extrañas producidas por el diseño y relacionadas con el desarrollo del pensamiento geométrico. Posteriormente, en cada actividad, se analiza el desempeño de los estudiantes, identificando las características del pensamiento geométrico que exhiben para finalmente categorizarlos según el nivel alcanzado.

5.1. Fases de Aprendizaje en el Sistema de Actividades.

Como se describió, las actividades implementadas se diseñan para que el estudiante transite a través de las cinco fases de aprendizaje descritas en la Sección 2.2 del Capítulo 2. Al analizar el comportamiento de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades se pueden identificar las fases por las que pasaron.

5.1.1. Información

En esta fase los estudiantes interactúan y discuten con el profesor sobre los elementos involucrados en la actividad. Inicialmente, se hace una revisión histórica de lo que significaron estos conceptos, resultados y teoremas. Esto se les explica a los estudiantes a partir de ejemplos relacionados con el arte (pintura y escultura), así como con representaciones gráficas en GeoGebra. En la Figura 6 se pueden observar los estudiantes durante las interacciones y discusiones con el docente.

Figura 6. Fase de Aprendizaje: Información.

5.1.2. Orientación Guiada

En esta fase los estudiantes se centran en aprender el sentido de los elementos de la geometría proyectiva inmersos en la actividad por medio de la exploración y el uso de actividades guiadas. En las actividades, en la sección de sugerencias metodológicas, se presentan listados de acciones puntuales para orientar el aprendizaje en esta fase. Un ejemplo de estos listados, de la Actividad 1, se ve a continuación:

- Identifique el ojo de un observador como un punto.
- Suponga que la visión ocurre a lo largo de una línea entre el ojo y cada punto visible de un objeto.
- Las líneas paralelas vistas desde la distancia parecen crecer más juntas.

- Los objetos vistos en el mismo ángulo se perciben como del mismo tamaño.
- Los rayos entre el ojo del espectador y un objeto percibido forman un cono con el ojo en el extremo, el objeto en la base.

En la Figura 7 se observan a los estudiantes durante esta fase de aprendizaje. La guía se basó en diapositivas proyectadas durante esta etapa.

Figura 7. Fase de Aprendizaje: Orientación Guiada.

5.1.3. Explicación

Durante las actividades, se les ofrecieron espacios a los estudiantes para que interactuaran entre ellos y con el docente. En estos espacios expresaron sus puntos de vista sobre las características de las configuraciones geométricas que se plantean en los problemas. Los estudiantes colaboraron entre sí para plantear heurísticas eficaces para resolver los problemas retadores (ver Figura 8).

Figura 8. Fase de Aprendizaje: Explicación.

5.1.4. Orientación Libre

En esta fase de aprendizaje los estudiantes se enfrentan a tareas más complejas que involucran múltiples pasos. Esto corresponde al trabajo de resolución de problemas. Los estudiantes, después de plantear sus heurísticas, empiezan a ejecutar sus pasos. El docente se encarga de la realimentación y el asesoramiento para el control de sus avances, pero sin intervenir en el proceso de resolución de los problemas. Además, en esta etapa los estudiantes trabajan colaborativamente en grupos de máximo tres estudiantes (ver Figura 9). Esto les permite discutir sus procedimientos, confrontar y contrastar sus resultados previos y prepararse para la etapa final de integración.

Figura 9. Fase de Aprendizaje: Orientación Libre.

5.1.5. Integración

La integración es última fase de aprendizaje manejada en la actividad. Los estudiantes, después de trabajar colaborativamente, condensan, revisan y resumen sus resultados y las cuestiones aprendidas para construir una visión en conjunto de los elementos estudiados. Esto se realiza en la parte final del diseño instruccional, la institucionalización de los contenidos.

Con apoyo del docente, se formalizaron las soluciones a los problemas planteados, se definen completamente los objetos, relaciones, resultados de la geometría proyectiva trabajados (ver Figura 10).

Figura 10. Fase de Aprendizaje: Integración.

5.1.6. Conclusión sobre las Fases de Aprendizaje

Como se describió y se adelantaba en los capítulos de marco teórico y metodológico, las actividades se diseñaron con el fin de que los estudiantes transitaran a través de las fases de aprendizaje de información, orientación guiada, explicación, orientación libre e integración (van Hiele 1999). Esto se pudo observar en cada actividad, los estudiantes exhibieron las características que se relacionan en cada fase. Esto indica que, por lo menos en cuestión de diseño e implementación, las actividades planteadas suponen un recurso suficiente para el desarrollo apropiado del aprendizaje del estudiante.

Las evidencias sobre este tránsito se pueden observar en el Anexo A (capturas de los videos de las sesiones) y en el Anexo B (videos de cada sesión).

5.2. Desarrollo del Pensamiento Geométrico

Para describir y categorizar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, sobre los temas de geometría proyectiva trabajados, se evalúan los resultados de los estudiantes por cada actividad con base en las descripciones de cada nivel de van Hiele (van Hiele, 1999; Yudianto, Sugiarti & Trapsilasiwi, 2018). Por actividad, se presentarán ejemplos de cada nivel de pensamiento geométrico encontrado y al final se resume en una tabla los resultados de todos los estudiantes en la actividad analizada.

5.2.1. Actividad 1 – Introducción de la Geometría Proyectiva

En esta actividad en particular, se puede identificar de inmediato que los estudiantes alcanzaron el primer nivel del pensamiento geométrico de ***Reconocimiento o Visualización***. Como se observa en la Figura 11, los estudiantes, apoyados en la representación gráfica ofrecida en GeoGebra, identifican los elementos involucrados en la configuración ofrecida.

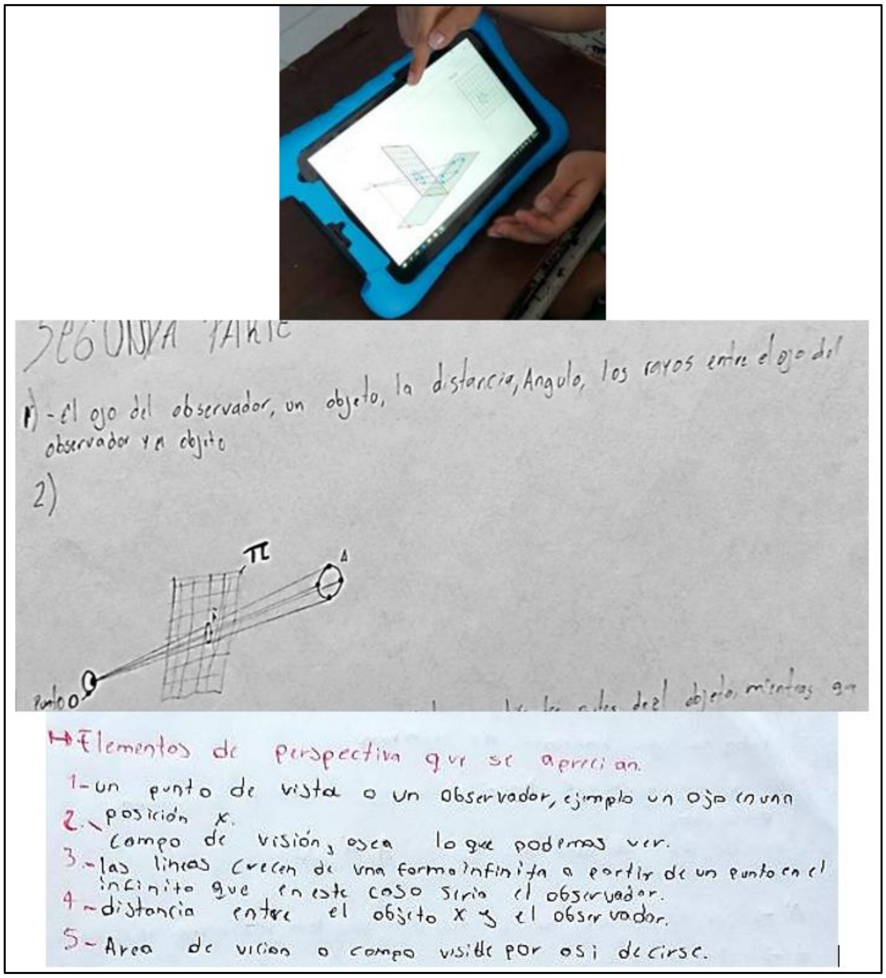
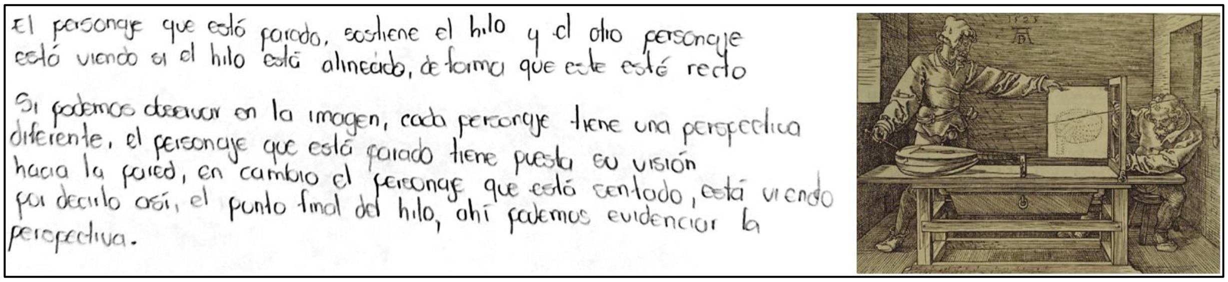


Figura 11. Reconocimiento o Visualización - Actividad 1.

Este nivel estuvo presente en todos los estudiantes participantes del estudio, lo cual es apenas esperable, pues es el nivel más básico de pensamiento geométrico y sólo consiste en la capacidad de identificar los elementos involucrados en la configuración.

Con respecto al nivel de pensamiento geométrico ***Análisis***, se tiene que los estudiantes, a pesar de que identifican algunas propiedades de los elementos (intuitivamente por el momento de la actividad), no los suelen relacionar entre sí, no los vinculan (ver Figura 12).



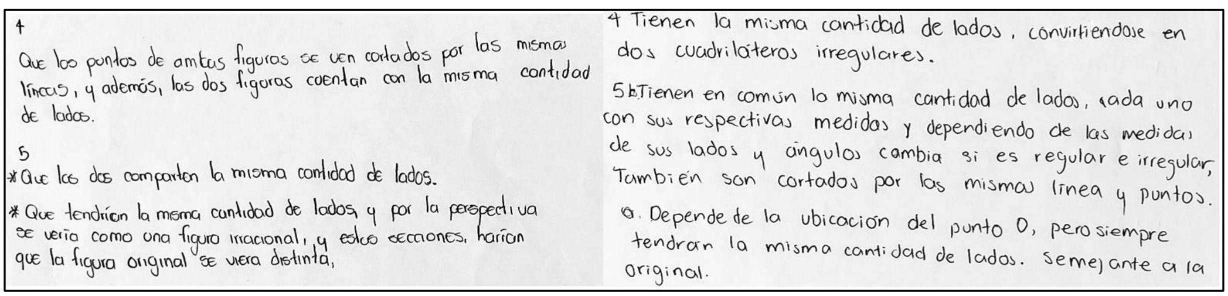
El personaje que está parado, sostiene el hilo y el otro personaje está viendo si el hilo está alineado, de forma que este esté recto

Si podemos observar en la imagen, cada personaje tiene una perspectiva diferente, el personaje que está parado tiene puesta su visión hacia la pared, en cambio el personaje que está sentado, está viendo por decirlo así, el punto final del hilo, ahí podemos evidenciar la perspectiva.

Figura 12. Descripción de elementos de la representación desvinculados entre sí.

Con respecto a las ***Deducciones Informales***, aunque en esta actividad los problemas planteados estaban enfocados en la definición de los elementos básicos de la geometría proyectiva, los últimos dos problemas exigen que se analizaran las relaciones lógicas y establecieran vínculos entre los elementos en función de las características y propiedades.

Algunos ejemplos de este tipo relaciones hechas por los estudiantes pueden observarse en la Figura 13. También, se evidencia que, a pesar de identificar algunas relaciones, los estudiantes se quedan a nivel de informalidad, sin acercarse a ningún sistema de símbolos.



4
Que los pontos de ambas figuras se ven cortados por las mismas líneas, y además, las dos figuras cuentan con la misma cantidad de lados.

5
* Que las dos comparten la misma cantidad de lados.
* Que tendrían la misma cantidad de lados, y por la perspectiva se vería como una figura irracional, y estas secciones, harían que la figura original se viera distinta,

4 Tienen la misma cantidad de lados, convirtiendose en dos cuadriláteros irregulares.

5 b. Tienen en común lo misma cantidad de lados, cada uno con sus respectivas medidas y dependiendo de las medidas de sus lados y ángulos cambia si es regular e irregular, Tambien son cortados por las mismas línea y puntos.

a. Depende de la ubicación del punto O, pero siempre tendran la misma cantidad de lados. Semejante a la original.

Figura 13. Deducciones informales de los estudiantes en la Actividad 1.

En el caso del nivel de ***Deducción*** en el desarrollo del pensamiento geométrico, sólo se encontró un estudiante que se aproximó a las afirmaciones correctas y satisfactorias (ver Figura 14). Las construcciones que hicieron los estudiantes, como se mencionaba anteriormente, se quedaron en la informalidad.

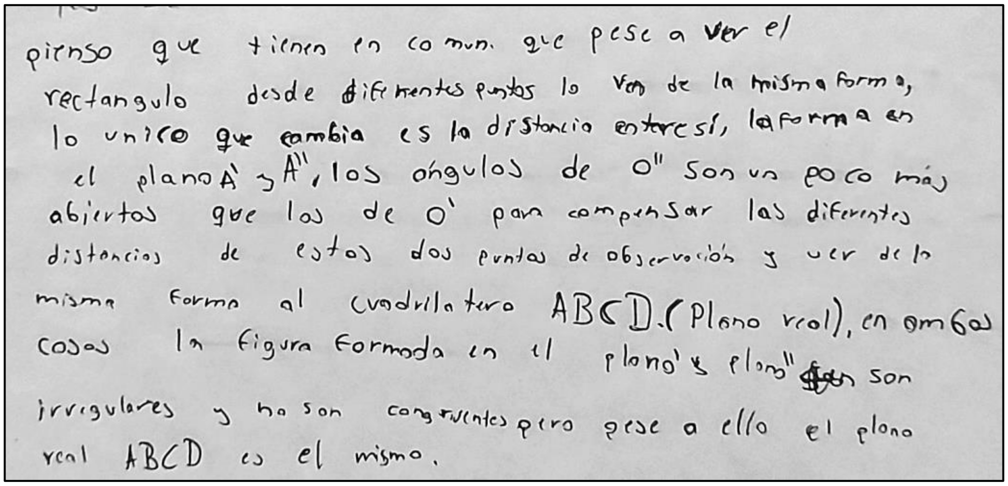


Figura 14. Aproximaciones al nivel de Deducciones en la Actividad 1.

Para esta actividad no se exige un nivel de ***Rigor*** en el pensamiento geométrico, por lo cual no se esperaba recopilar datos que indicaran que algún estudiante habría conseguido trabajar en varios sistemas axiomáticos al mismo tiempo o que anticipara deducciones y realizara demostraciones formales.

En la Figura 15 se categorizan los estudiantes según el nivel de Pensamiento Geométrico alcanzado en la Actividad 1, las respuestas de los estudiantes en esta actividad se ubican en el Anexo C.

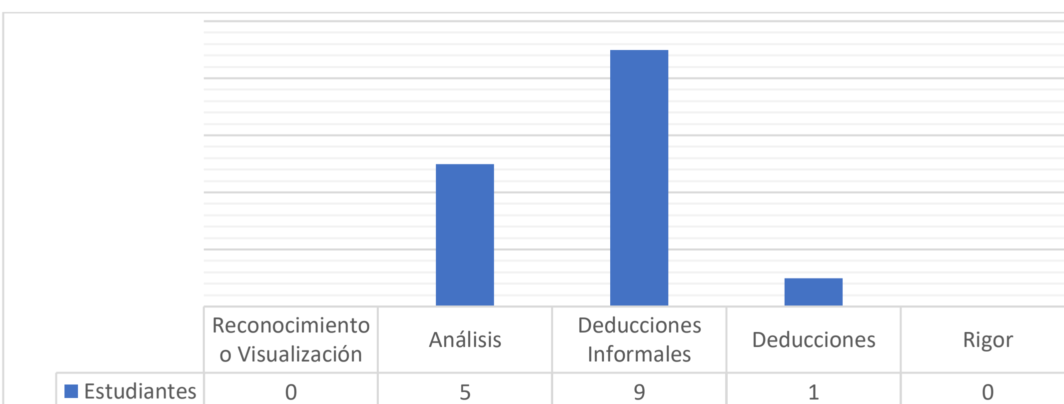


Figura 15. Categorización del Pensamiento Geométrico de los Estudiantes en la Actividad 1.

5.2.2. Actividad 2 – Elementos de Geometría Proyectiva

Con esta actividad se busca que el estudiante se adentrara en el entendimiento conceptual de los elementos de la geometría proyectiva involucrados. Para esto, se usaron triángulos y cuadrángulos. Además, se introdujo el sistema de axiomas fundamentales para la obtención de los principales resultados y teoremas de la geometría proyectiva.

En esta actividad, como se espera mínimamente, se obtuvieron evidencias sobre el logro del nivel de pensamiento geométrico de ***Reconocimiento o Visualización***. Como se observa en el resumen gráfico de la Figura 21 del análisis de esta actividad, muchos de los estudiantes se quedan en el nivel de reconocimiento. En la Figura 16 pueden observarse algunos intentos fallidos de los estudiantes por reconocer o visualizar los elementos. Algunos de ellos utilizan las representaciones ofrecidas en la misma actividad y otros tratan redibujarlas.

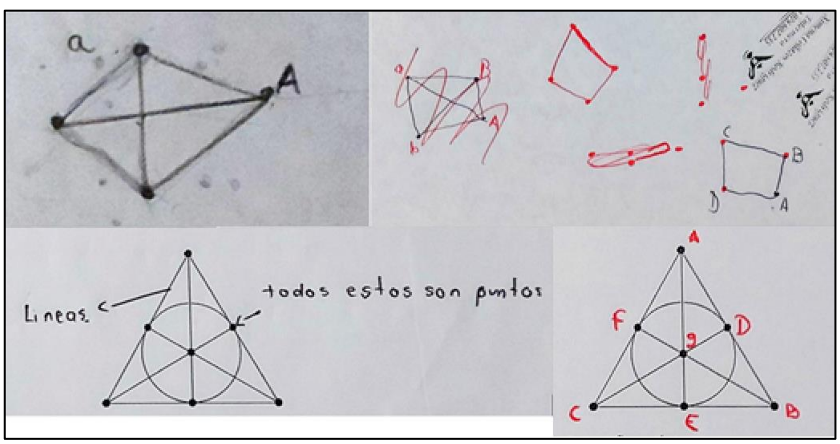


Figura 16. Intentos de Reconocer o Visualizar elementos de la Geometría Proyectiva.

Sin embargo, también hubo algunos estudiantes que se esforzaron en su proceder y alcanzaron el nivel de ***Análisis*** en su pensamiento geométrico. Estos estudiantes son capaces de identificar propiedades y establecer las regularidades contenidas en los objetos geométricos en cuestión. Un ejemplo que funge como evidencia del desarrollo de este nivel de pensamiento se encuentra en la Figura 17, donde se observa cómo dos estudiantes, externalizan gráficamente su comprensión de las definiciones de los axiomas.

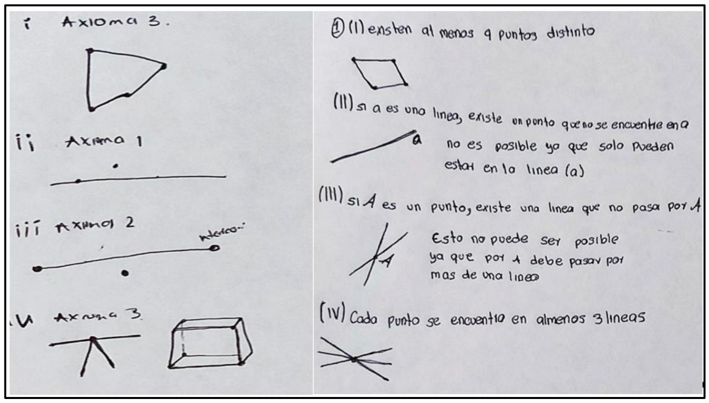


Figura 17. Representación de axiomas por estudiantes Actividad 2.

En el caso del nivel de ***Deducción Informal***, aunque se tienen ciertos esfuerzos de varios estudiantes, sus deducciones no son correctas. Este nivel de pensamiento, aunque considera que las deducciones sean informales, exige que sean correctas. El razonamiento intuitivo de los estudiantes en esta actividad se parece mermado por la complejidad de la presentación de los conceptos, el profesor observa la confusión de los estudiantes ante el uso de axiomas y expresiones formales cuando se definieron los conceptos o cuando se plantearon los problemas. Algunos de los esfuerzos mencionados se presentan en la Figura 18.

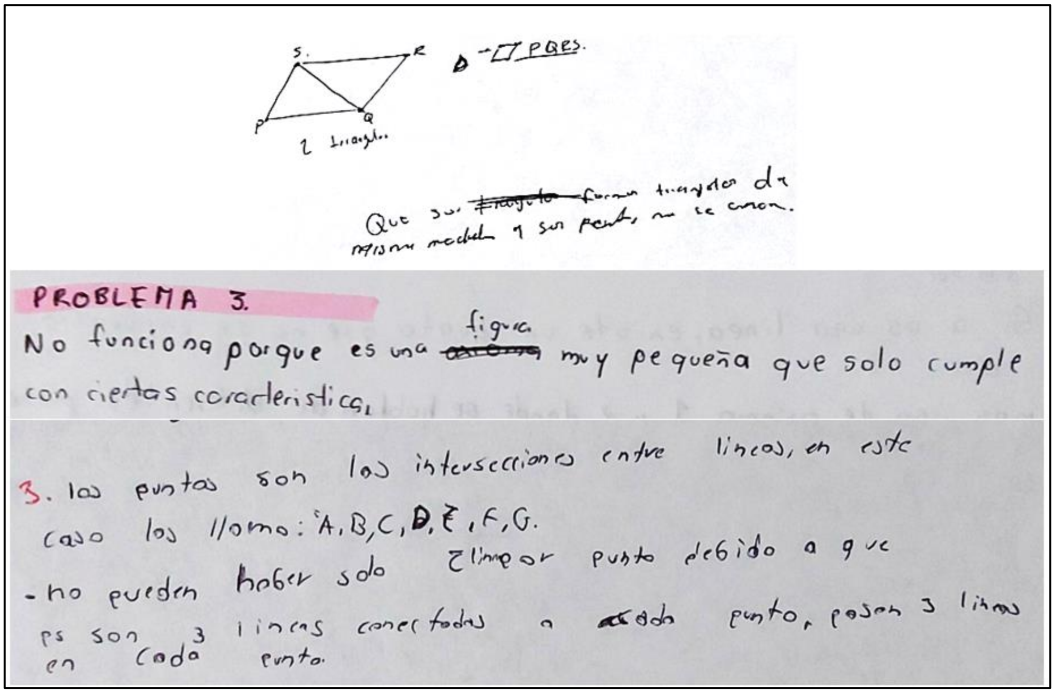
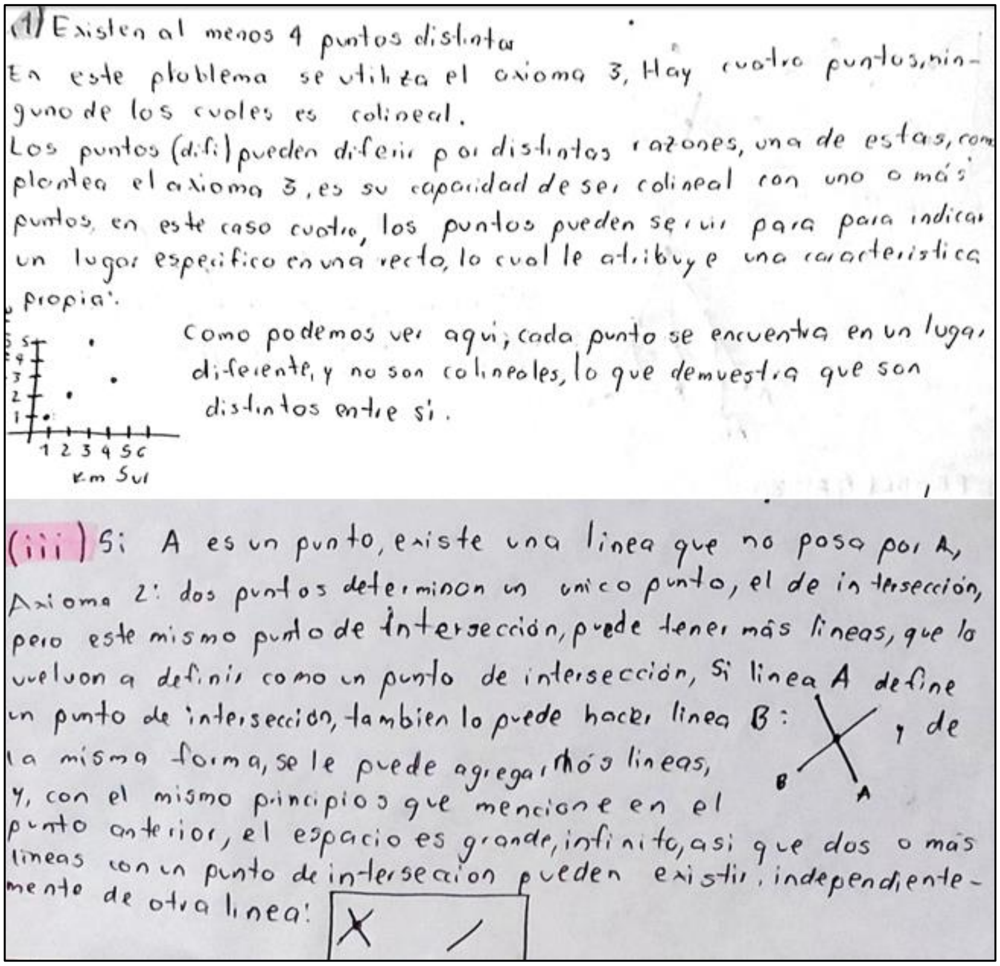


Figura 18. Deducciones informales y aproximaciones de los estudiantes en la Actividad 2.

Por supuesto, a pesar de que la mayoría de los estudiantes se quedaron en un nivel bajo de desarrollo del pensamiento geométrico en esta actividad, también hubo quien se desenvolvió satisfactoriamente con los problemas y alcanzó un nivel de ***Deducción***. Dos estudiantes, por ejemplo, trabajaron en el análisis y deducción formal de características, establecieron relaciones entre los elementos y manejaron los axiomas de manera correcta en la resolución de los problemas (ver Figura 19).


(1) Existen al menos 4 puntos distintos
En este ploblema se utiliza el axioma 3, Hay cuatro puntos, ninguno de los cuales es colineal.
Los puntos (difi) pueden diferir por distintos razones, una de estas, como plantea el axioma 3, es su capacidad de ser colineal con uno o más puntos, en este caso cuatro, los puntos pueden servir para para indicar un lugar especifico en una recta, lo cual le atribuye una caracteristica propia'.
Como podemos ver aquí, cada punto se encuentra en un lugar diferente, y no son colineales, lo que demuestra que son distintos entre sí.

(iii) Si A es un punto, existe una linea que no pasa por A,
Axioma 2: dos puntos determinan un unico punto, el de intersección, pero este mismo punto de intersección, puede tener más lineas, que lo vuelvan a definir como un punto de intersección, Si linea A define un punto de intersección, tambien lo puede hacer linea B: y de la misma forma, se le puede agregar más lineas, y, con el mismo principio que mencione en el punto anterior, el espacio es grande, infinito, así que dos o más lineas con un punto de intersección pueden existir, independientemente de otra linea.

Figura 19. Deducciones formales de los estudiantes y manejo de axiomas en la Actividad 2.

En esta actividad se esperaba que los estudiantes trabajan de manera rigurosa en la solución del cuarto problema (la representación de algunas configuraciones geométricas basado en un conjunto de reglas que ofrecidas en lenguaje simbólico y formal). Sin embargo, a excepción de dos tácitas aproximaciones (ver Figura 20), no se encontró evidencia de que los estudiantes alcancen el nivel de ***Rigor*** en el desarrollo de la actividad.

Esto fue previsto por el investigador al comienzo de la actividad, pues los estudiantes se enfrentaron a diversas dificultades, principalmente ligadas al lenguaje con el que se realizan los planteamientos de los problemas. Esto sugiere dos escenarios de mejora del estudio: en primera instancia, modificar el lenguaje para facilitar el entendimiento de los estudiantes. En segunda, ampliar el tiempo de reflexión y análisis de los problemas por parte de los estudiantes, pues es conocido que, a pesar de contar con las habilidades y conocimientos requeridos para resolver un problema, si el estudiante no comprende el problema, no podrá resolverlo (Schoenfeld, 1985).

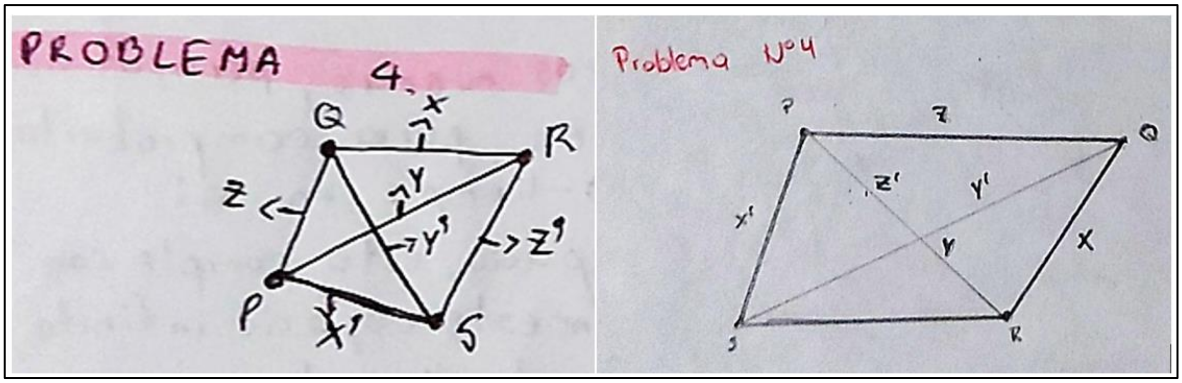


Figura 20. Configuraciones construidas por los estudiantes en la Actividad 2.

En la Figura 21 se puede apreciar cómo se distribuyeron los estudiantes según su nivel de pensamiento geométrico alcanzado en esta actividad. Las respuestas de los estudiantes en esta actividad se ubican en el Anexo D.

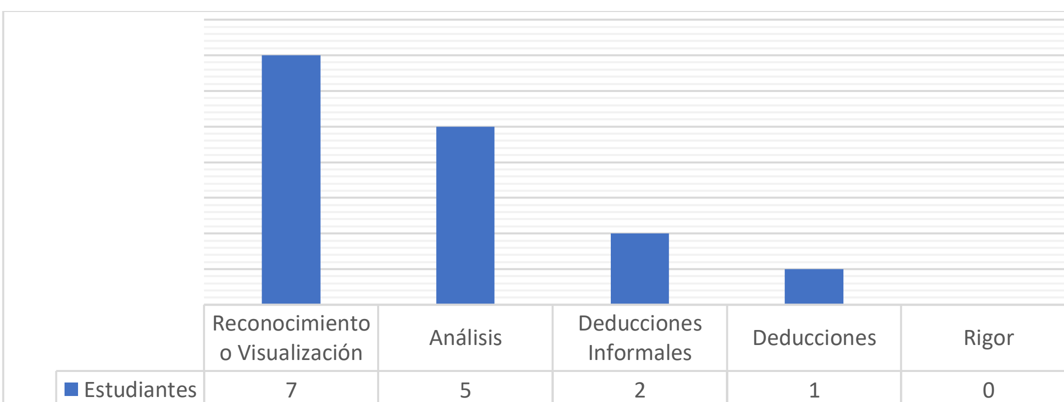


Figura 21. Categorización del Pensamiento Geométrico de los Estudiantes en la Actividad 2.

5.2.3. Actividad 3 – Teoremas en Geometría Proyectiva

En esta actividad se introducen los teoremas de Desargues, Pappus y Pascal. Se trabajó con la construcción de configuraciones, identificación y establecimiento de relaciones, realización de operaciones y transformaciones de los elementos proyectos con miras a la obtención de características invariantes. Los estudiantes, sin dificultades evidenciadas, alcanzan el nivel de pensamiento geométrico de ***Reconocimiento o Visualización*** (ver Figura 22).

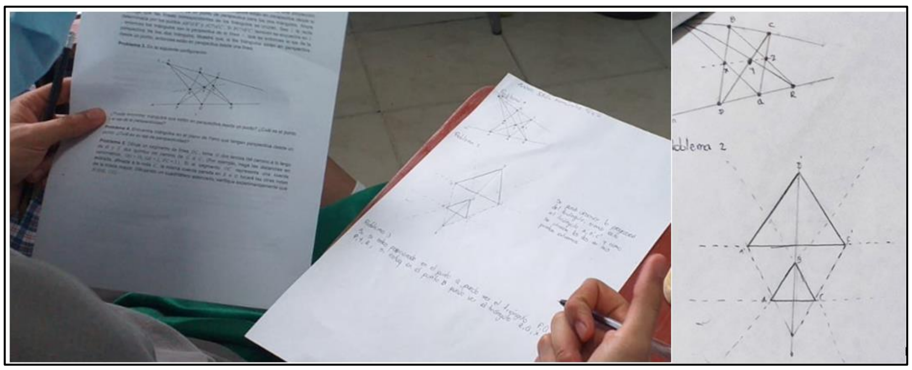


Figura 22. Reconocimiento o visualización en la Actividad 3.

De igual manera, el nivel de ***Análisis*** fue alcanzado por la mayoría. Los estudiantes determinan propiedades y mostraron entendimiento de las condiciones de proyectividad. Esto se observa con claridad en las construcciones elaboradas por los estudiantes (ver Figura 23). Sin embargo, las apreciaciones que realizan sobre las características y propiedades identificadas no son del todo correctas. Por ejemplo, relacionan el tamaño a la proyección “es más grande porque es una proyección”.

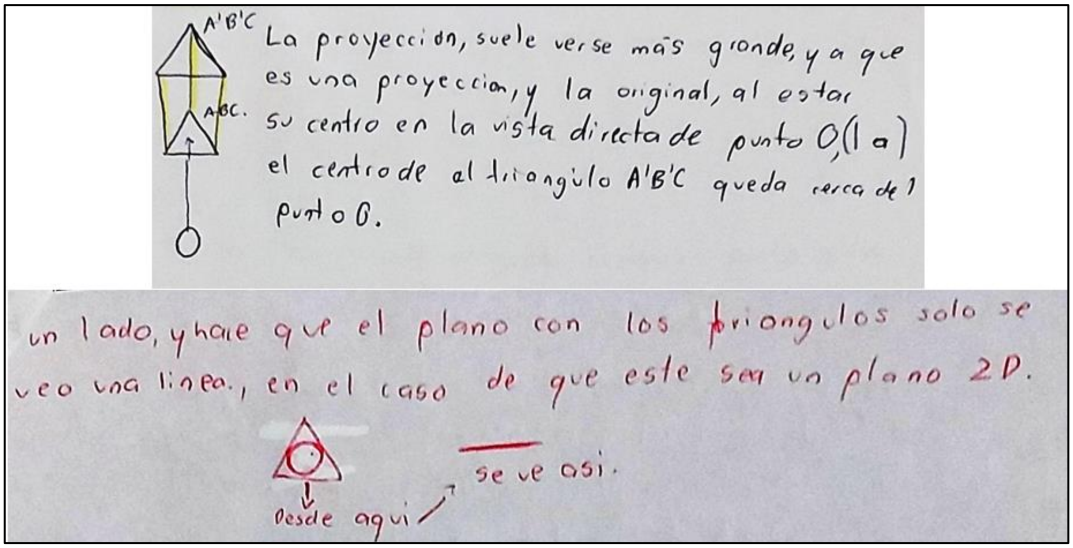


Figura 23. Nivel de Análisis de los estudiantes en la Actividad 3.

En el nivel del pensamiento geométrico de ***Deducciones Informales*** fue donde se ubicaron la mayoría de los estudiantes participantes de esta actividad. Algunas de las aseveraciones de los estudiantes, aunque no totalmente precisas, se aproximan al resultado buscado. En la Figura 24 pueden observar un par de ejemplos de lo mencionado.

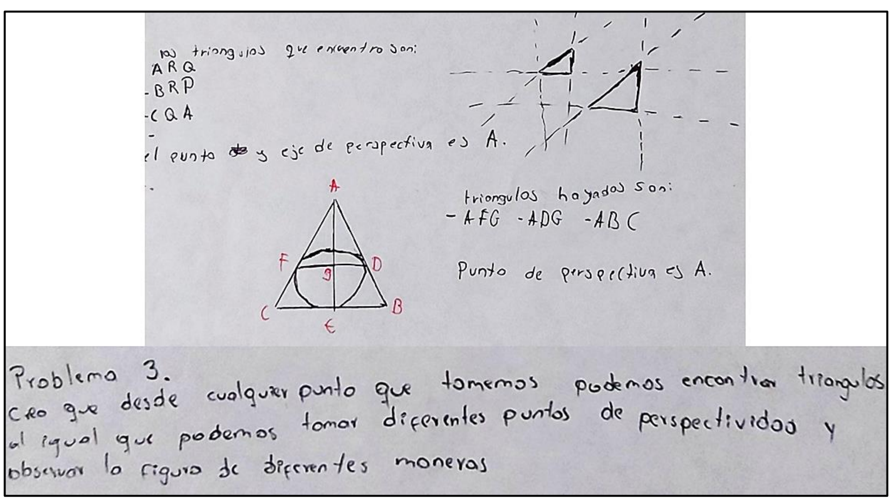


Figura 24. Deducciones informales de los estudiantes en la Actividad 3.

Ejemplos de ***Deducciones Formales*** también fueron encontrados en los productos presentados por los estudiantes en esta actividad. Se podría considerar que los teoremas planteados en esta actividad, al basarse en configuraciones geométricas simples de replicar por los estudiantes, fueron comprendidas por algunos en alto nivel; el uso de triángulos es bastante familiar para ellos, así que los conceptos nuevos pudieron ser artículos con facilidad (ver Figura 25).

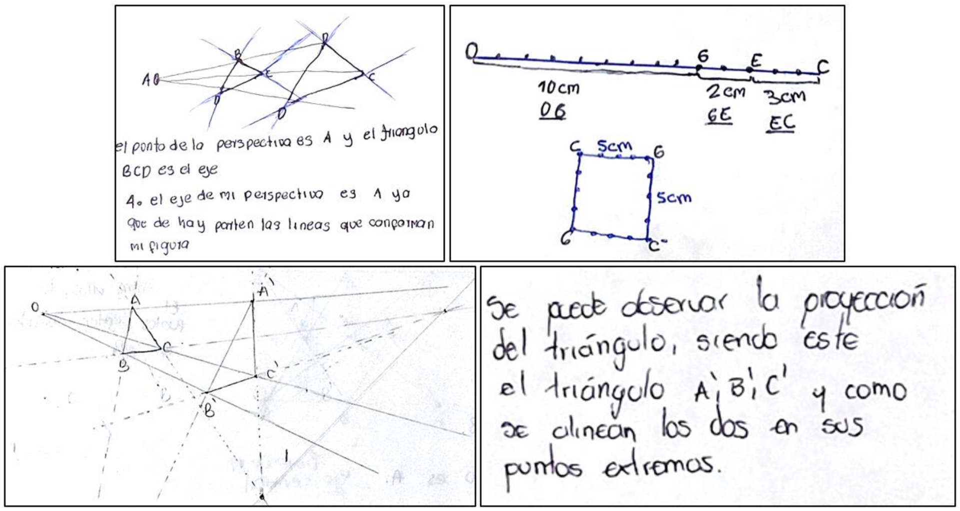


Figura 25. Deducciones formales de los estudiantes en la Actividad 3.

A pesar de observarse algunos intentos y aproximaciones realizadas por los estudiantes, utilizando simbología de distintos sistemas y manipulando las representaciones (ver Figura 26); no se pueden considerar como evidencia del nivel de pensamiento geométrico de ***Rigor***. Estas aproximaciones parecen esfuerzos sin una intención real de abstraer las características y utilizar el sistema simbólico adecuadamente.

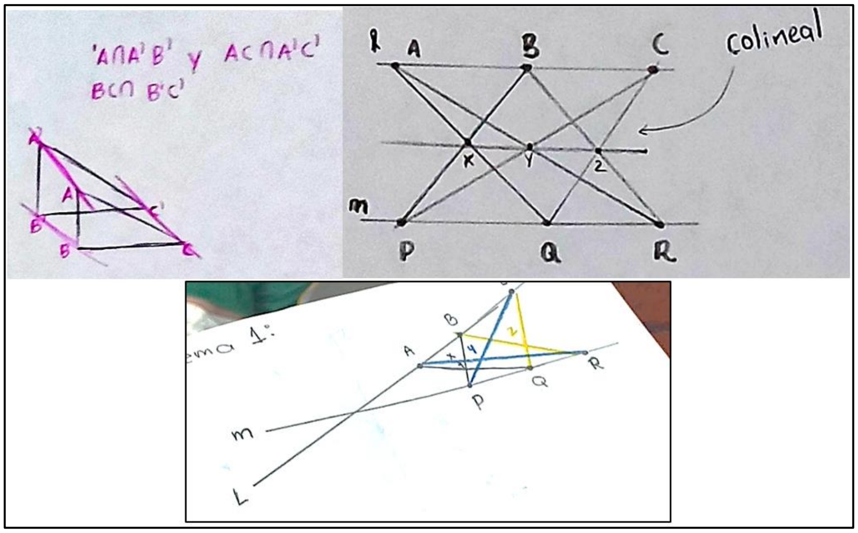


Figura 26. Aproximaciones al nivel de pensamiento de Rigor de los estudiantes en la Actividad 3.

La distribución de los estudiantes según su nivel de pensamiento geométrico puede encontrarse en la Figura 27. El conjunto de todas las respuestas de los estudiantes en esta actividad se ubica en el Anexo E.

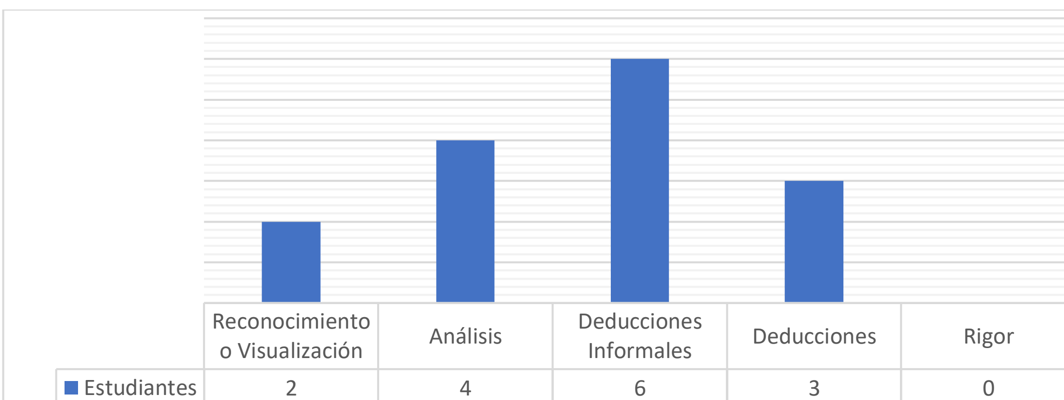


Figura 27. Categorización del Pensamiento Geométrico de los Estudiantes en la Actividad 3.

5.2.4. Actividad 4 – Construcción de algunos Teoremas en Geometría Proyectiva a través del uso de GeoGebra

Los problemas retadores implementados en esta actividad, en prácticamente su totalidad, fueron planteados para ser resueltos en GeoGebra. Las construcciones de los estudiantes en este software especializado dan cuenta del nivel de ***Reconocimiento o Visualización*** del pensamiento geométrico. En la Figura 28 se puede observar la construcción de ejemplo al lado superior izquierdo (dispuesta en la actividad como base de la configuración) y alrededor las construcciones elaboradas por los estudiantes.

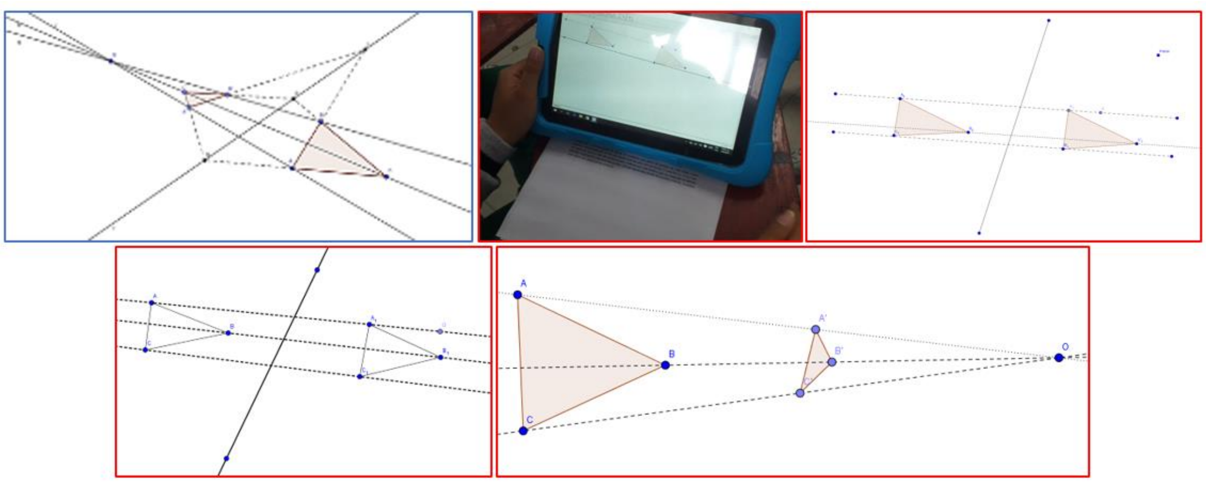


Figura 28. Reconocimiento o visualización de los estudiantes en la Actividad 4.

Con estas actividades propuestas, fue la primera vez que los estudiantes trabajaron en GeoGebra. Se observa una mezcla de confusión, ánimo, ímpetu y entusiasmo. Los estudiantes, en su mayoría, construyen las configuraciones geométricas requeridas para comprobar o rechazar los teoremas, resultados, características, invariantes y relaciones de la geometría proyectiva.

A excepción de dos estudiantes que deciden no avanzar más en el desarrollo de la actividad, en el resto se evidenció también el nivel de ***Análisis*** en cuanto a pensamiento geométrico, pues hacen menciones a regularidades, características y propiedades contenidas en las representaciones utilizadas y elaboradas (ver Figura 29).

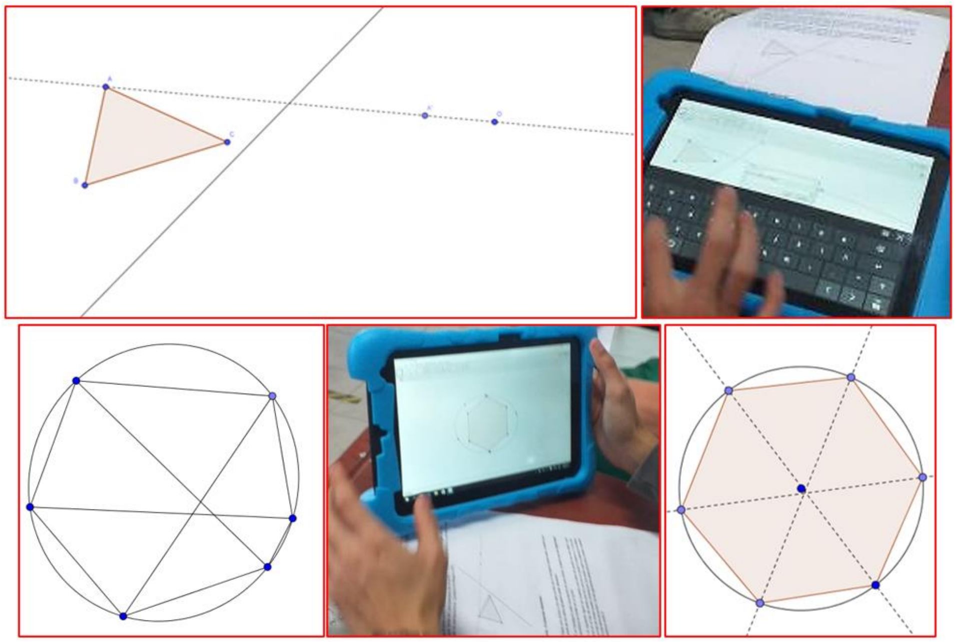


Figura 29. Nivel de pensamiento geométrico: Análisis en la Actividad 4.

Al igual que el análisis, el nivel de pensamiento geométrico de ***Deducción Informal*** fue alcanzado por la mayoría de los estudiantes. Sin embargo, se encuentran confusiones al momento de deducir con base en las representaciones hechas en GeoGebra, optando en diferentes ocasiones por expresar estas verbalmente porque no podían escribir en el software. Esto es entendible pues el dominio de este no se da en un par de sesiones, habría que considerar una capacitación previa del estudiante en el uso del software y su combinación con otros.

Aun así, en la Figura 30 se pueden encontrar algunas de estas deducciones informales elaboradas por los estudiantes cuando resolvían los problemas retadores propuestos en la actividad 4.

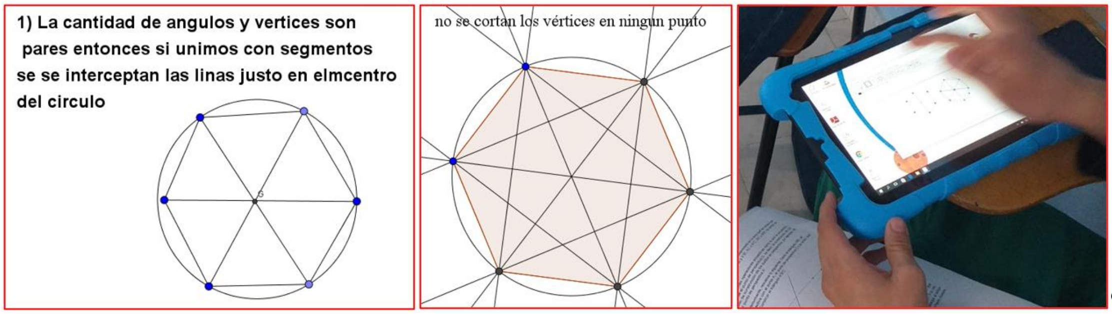


Figura 30. Deducciones Informales de los estudiantes en la Actividad 4.

Lamentablemente, en esta actividad sólo hubo un acercamiento verdadero a las ***Deducciones Formales***, quedando el resto de los estudiantes categorizados en el anterior nivel del pensamiento geométrico. Esto implica que, al igual que con las otras tres actividades, ninguno de los estudiantes alcanzó el nivel de ***Rigor***.

En la Figura 31 se observa la construcción de las cuestiones geométricas involucradas en los problemas retadores 4 y 5 de la actividad 4. La estudiante, con base en el sistema axiomático obtiene las relaciones entre los objetos involucrados, obteniendo así los datos relevantes que le permiten dar solución satisfactoria al problema.

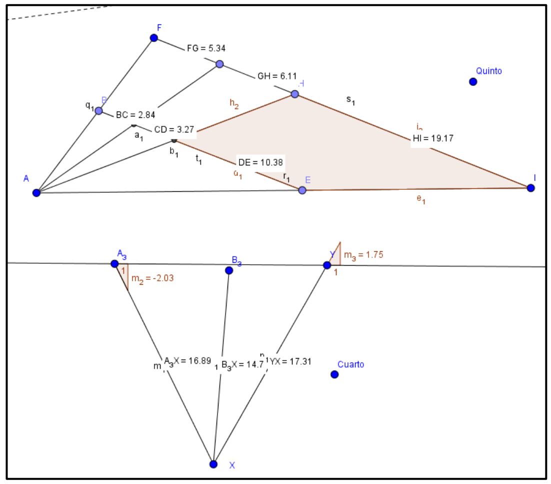


Figura 31. Deducciones formales de la estudiante en la Actividad 4.

Con esto, en la Figura 32 se categorizan los estudiantes según su nivel de pensamiento geométrico en la actividad 4. Todas las respuestas de los estudiantes a los problemas retadores de esta actividad se encuentran en el Anexo F.

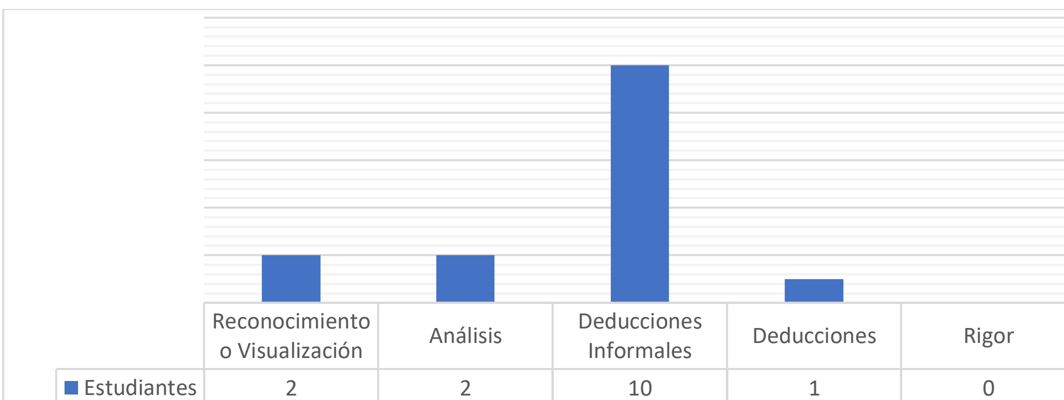
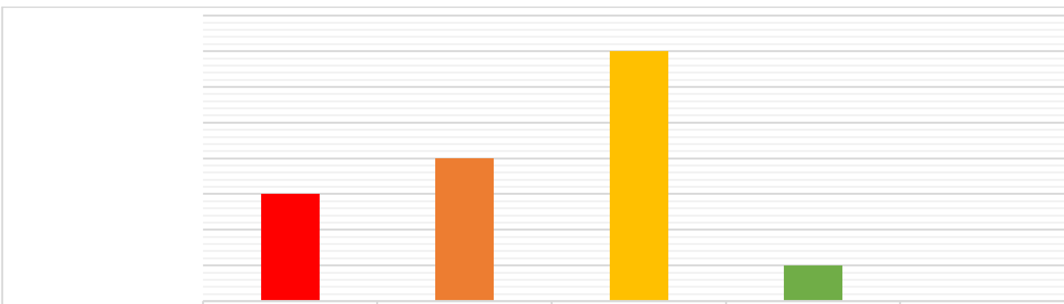


Figura 32. Categorización del Pensamiento Geométrico de los Estudiantes en la Actividad 4.

Conclusiones del capítulo 5

En aras de sintetizar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes a lo largo del sistema de actividades planteadas, se cuantifica en promedio la cantidad de estudiantes en cada nivel por actividad. Este promedio de estudiantes por nivel de pensamiento geométrico se presenta en la Figura 33.

Como ya se adelantaba, ninguno de los 15 estudiantes alcanza el nivel de ***Rigor*** en el desarrollo de su pensamiento geométrico con las actividades propuestas. Esto era de esperarse, pues este nivel requiere un dominio profundo de los conceptos involucrados, junto con un manejo avanzado de los sistemas axiomáticos y las estructuras de demostración, lo cual se consigue mediante un proceso formativo continuo y con enfoques en la abstracción (Yudianto, Sugiarti & Trapsilasiwi, 2018).



	Reconocimiento o Visualización	Análisis	Deducciones Informales	Deducciones	Rigor
Estudiantes	3	4	7	1	0

Figura 33. Categorización sintética de los niveles de pensamiento geométrico alcanzado por los estudiantes en el sistema de actividades propuesto.

La mayoría de los estudiantes se ubican en el nivel de ***Deducciones Informales***. Estos estudiantes pueden organizar de manera lógica las figuras dentro de una configuración geométrica y relacionarlas entre sí por medio del análisis de las características, propiedades u operaciones. Sin embargo, aún son incapaces de asociar las características de las representaciones a un sistema matemático para realizar operaciones y deducir resultados de manera formal (Van Hiele, 1999).

Se considera que los estudiantes, en su mayoría, se quedan en este nivel debido a falencias en su formación en fundamentos básicos de las matemáticas, pues para realizar las conversiones de las representaciones semióticas de los registros gráficos a registros simbólicos (asociar a sistemas matemáticos), se requiere amplia comprensión en estas bases matemáticas (Crannell, Frantz & Futamura, 2019). Resulta necesario entonces, con el fin de obtener mejores niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, fortalecer las bases matemáticas de los estudiantes en formación, antes de integrar cuestiones como la geometría proyectiva.

La capacidad de los estudiantes para resolver problemas se ve afectada, pues dentro de los procesos heurísticos usuales, la manipulación por medio de las operaciones de los elementos involucrados es fundamental, este tipo de conocimiento se considera como *recurso* indispensable para el correcto desenvolvimiento del resolutor (Schoenfeld, 1985). Sin lograr llegar a las deducciones formales, los estudiantes pocas veces resuelven satisfactoriamente los problemas retadores planteados.

CONCLUSIONES

El pensamiento geométrico desarrollado por los estudiantes a través de las actividades propuestas basadas en la resolución de problemas retadores y el uso de GeoGebra puede caracterizarse en cuatro niveles: *reconocimiento o visualización*, *análisis, deducciones informales y deducciones formales*. Principalmente, el pensamiento geométrico de los estudiantes participantes se ubica en el nivel de deducciones informales, en cual los estudiantes ya pueden reconocer regularidades, relaciones, características y propiedades de los elementos que hacen parte de una configuración geométrica, sin llegar a asociarlos con sistemas matemáticos en los cuales pueda realizar operaciones.

Si bien es cierto que el pensamiento geométrico desarrollado cuando los estudiantes aprenden geometría proyectiva se fortalece por las actividades propuestas y basadas en la resolución de problemas retadores y el uso de GeoGebra, también lo es que el nivel alcanzado no es el ideal. A lo largo de la intervención se evidencia la existencia de falencias en el proceso, algunas derivadas del diseño de las actividades, otras de la implementación de éstas y otras más relacionadas con los participantes.

Con respecto a los problemas del diseño de las actividades, al intentar conservar el carácter formal que caracteriza la presentación y uso de axiomas o teoremas, se obtuvo varios escenarios de confusión, angustia y rechazo de los estudiantes, pues la simple denominación de los enunciados como *axioma* genera temor. Además, la presentación de los problemas retadores en los cuales se utilizaron los axiomas como parte de su planteamiento, fueron en los que peores resultados se obtuvieron. Esto sugiere un inevitable replanteamiento de estos problemas, pues no resultan óptimos para el desarrollo del conocimiento de los estudiantes.

En relación con la implementación, el tiempo dispuesto para el desarrollo de las actividades resulta corto en su mayoría. Los estudiantes, en su afán de resolver los problemas antes del tiempo límite destinado, dejaron de lado la escritura, argumentación o representación gráfica que acompañase sus procesos resolutorios. Este material habría aportado datos significativos al entendimiento del pensamiento geométrico de los estudiantes. Además, algunos no llegaron a entender si quiera el enunciado de algunos problemas, pues no contaron con el tiempo suficiente para analizarlos. Estas cuestiones implican que, si se pretende continuar con una serie de actividades donde los problemas retadores sean la base, debe ofrecerse un espacio más amplio de tiempo para su análisis y resolución.

Finalmente, las problemáticas que se encontraron en el desarrollo de las actividades y que se vincularon con el estudiante, tienen que ver con los recursos, ese conjunto de conocimientos previos con los que los estudiantes llegan a enfrentarse al problema, que utilizan para relacionar, vincular o integrar los elementos del problema a situaciones conocidas, a operaciones usuales, o a signos y símbolos de algún sistema matemático. Se observó cómo, los estudiantes que menos fortalezas poseían en cuanto a bases matemáticas tuvieron dificultades al resolver los problemas debido a esta incapacidad de relacionar los elementos de la configuración geométrica con sistemas matemáticos, símbolos y signos, para realizar operaciones y obtener resultados.

Por otro lado, aunque se puede observar cómo las representaciones gráficas presentadas en GeoGebra generaron un espacio de dinamismo y novedad en los estudiantes que motiva el trabajo con las configuraciones geométricas, también genera estrés y confusión, pues el software fue un recurso nuevo utilizado por ellos. Superar esta dificultad, para futuras investigaciones, requiere una familiarización previa del estudiantado con el software, sesiones donde no se empiece con la resolución de problemas, sino que se realicen exploraciones, construcciones y manipulaciones.

Para finalizar, debido a las limitaciones propias de un estudio de este estilo, el trabajo sólo considera el pensamiento geométrico desarrollado por los estudiantes en los elementos básicos de la geometría proyectiva y la razón cruzada, Teorema de Pappus, Pascal y Desargues. Esto implica que, como trabajo a futuro, se pueden estudiar implementaciones con problemas retadores que trabajen con otras temáticas de esta geometría. De igual manera, la descripción de las características del desarrollo del estudiante y la categorización de su pensamiento geométrico, abren el camino al análisis y profundización.

RECOMENDACIONES

Las recomendaciones para la enseñanza se condensan en las siguientes cuatro cuestiones:

- Se debe asegurar que el lenguaje utilizado para la definición de enunciados sea familiar o alterado con el fin de evitar el temor infundado de los estudiantes sobre dicho enunciado.
- En el planteamiento de los problemas retadores se deben considerar las capacidades de entendimiento del estudiante, pues lo mínimo que se espera es que el estudiante entienda el problema.
- El tiempo designado para el análisis y la resolución de un problema retador debe considerarse en función de los intereses. Un tiempo mayor permite que los estudiantes expandan sus procedimientos, agreguen información, sus argumentos, construcciones y demás aspectos que pueden ser beneficiosos para la detección de falencias, interpretación de resultados y la realización de investigaciones.
- El uso de herramientas tecnológicas novedosas para el estudiante, como el caso de GeoGebra en la presente investigación con los participantes, debe ser anticipada por una introducción previa para la familiarización de los estudiantes con el software. Esto puede evitar la generación de incertidumbres, confusiones y temores al enfrentarse a la resolución de un problema retador que requiera la implementación de esta herramienta.

BIBLIOGRAFÍA

Ahamad, S. N. Li, H. C., Shahrill, M., & Prahmana, R. C. I. (2017). Implementation of problem-based learning in geometry lessons. En *Journal of Physics: Conference Series Vol. 943*, No. 1.

Almaida, J. D., & Gallego, D. C. (2019). Geometría Proyectiva: Las Sombras Como Recurso Didáctico En El Aula. *Investigación e Innovación educativa en el Siglo* XXI, 57.

Andrade, J. P., & Amorim, C. (2020). A articulação de meios semióticos no ensino-aprendizagem da orientação espacial. *RECME- Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 107-116.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Armah, R. B., Cofie, P. O., & Okpoti, C. A. (2018). Investigating the Effect of van Hiele Phase-Based Instruction on Pre-Service Teachers' Geometric Thinking. *International journal of Research in Education and Science, 4*(1), 314-330.

Astafieva, M., Hlushak, O., & Lytvyn, O. (2021). GeoGebra Classroom as a Component to ICT Support Inquiry Based Mathematics Education in a Blended Learning. *ICTERI-2021 Vol. I Main Conference* (No. 6736).

Bashiru, A., & Nyarko, J. (2019). Van Hiele geometric thinking levels of junior high school students of Atebubu Municipality in Ghana. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences, 15*(1), 39-50.

Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2018). Características de cómo estudiantes para maestros miran profesionalmente el pensamiento geométrico de estudiantes de educación primaria. *XARXES-INNOVAESTIC 2018. Llibre d'actes REDES-INNOVAESTIC 2018. Libro de actas*, 12, .

Blohm, I., & Leimeister, J. M. (2013). Gamification. *Business & information systems engineering*, *5*(4), 275-278.

Branch, R. M. (2009). *Instructional design: The ADDIE approach*. Springer Science & Business Media.

Buckley, J., Seery, N., & Canty, D. (2019). Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving. *International Journal of Technology and Design Education, 29*(2), 341-362.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education, 17*(1), 31-48.

Can, E. (2020). On the Design of 2D Dynamic Drawings with Euklid DynaGeo. *Sakarya University Journal of Sciencie, 24*(4), 615-621.

Campistrous, L, & Rizo, C. (2013). La resolución de problemas en la escuela. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 343-354). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Crannell, A., Frantz, M., & Futamura, F. (2019). *Perspective and Projective Geometry*. Princeton University Press.

CIBEM (2013). *Actas del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática VIII*. Sociedad de Educación Matemática Uruguaya. Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Cobo, P., & Fortuny, J. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(2), 115-140.

Corredor, M., & Londoño, C. (2019). El Arte y la Historia de la Construcción en la Geometría Proyectiva. *Saber, Ciencia y Libertad*, *14*(2), 295-311

Coxeter, H. (2003). *Projective Geometry*. Springer Science & Business Media: Toronto, Canadá.

D'Amore, B., Pinilla, M. I. F., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Analysis of the historical and philosophical antecedents of "Duval's cognitive paradox". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis*. España: Ediciones Pirámide.

De Souza M., S.; Andrada, O. A. (2013). Adecuación de los recursos didácticos utilizados en clases de geometría proyectiva a los estilos de aprendizaje de los alumnos. *Revista Estilos de aprendizaje, (11)*12, pp. 1-26.

Dillon, M. (2014). Geometry for all. *The College Mathematics Journal*, *45*(3), pp. 169-178.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *18*(10), pp. 5-53.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En *Semiotics in mathematics education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39-61). Brill Sense.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations.* Switzerland: Springer International Publishing.

Erdogan, F. (2020). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Problem Posing Abilities in Context of Van Hiele Levels of Geometric Thinking. *International Online Journal of Educational Sciences, 12*(2), 132-152.

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 8*(1).

Feriozzi, R., & Olivieri, A. (2018). Video Games for Learning Projective Geometry: Analysis of Virtual Spaces Through the Disciplines of Representation. En *International and Interdisciplinary Conference on Digital Environments for Education, Arts and Heritage* (pp. 76-85). Springer, Cham.

Fitriyani, H., Widodo, S. A., & Hendroanto, A. (2018). Students' geometric Thinking Based on Van Hiele's Theory. *Infinity Journal, 7*(1), 55-60.

Flórez, A. (1991). *Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba*. (Tesis de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practice. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97-124.

Fortuna, E., Frigerio, R., & Pardini, R. (2016). *Projective Geometry: Solved Problems and Theory Review* (Vol. 104). Springer.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 3, i-196.

Fuentes, C., Vanegas, S. & Téllez, S. (2017). Potencialidades del uso del Cubo Soma en la clase de matemáticas. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 23* (pp. 119-124). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Gómez, M. (2011). *Pensamiento Geométrico y Métrico en las pruebas nacionales*. (Tesis de Maestría), Universidad Nacional, Bogotá D.C.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 7-25).

Hernst, P., Hock, U., Richard, P. R., & Jones, K. (Eds.) (2018). *ICME-13 International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools*. Springer: Hamburgo.

Herbst, P., Cheah, U., Richard, P., & Jones, K. (2018). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*. Hamburg: Springer International Publishing AG, part of Springer Nature.

Herbst, P.; Fujita, T.; Halverscheid, S.; Weiss, M. (2017). *The Learning and teaching of geometry in secondary schools: A modeling perspective.* London and New York: Routledge. Taylos & Francis Group

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos, En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa.* (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18

Jaeggi, S. M., Buschkuehl, M., Jonides, J., & Shah, P. (2011). Short-and long-term benefits of cognitive training. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 108*(25), 10081-10086.

Kline, M. 1990. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Vol. 1*. Oxford University Press. Nueva York.

Krulik, S. & Rudnik, J. (1987). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical thinking and learning, 5*(2-3), 157-189.

Lienert, C. (2018). Dual Perspectives on Desargues' Theorem. Geometry 3. Ursinus College: Pennsylvania.

Liljedahl, P., & Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical Problem Solving*. Springer International Publishing: ICME-13 Monographs.

Lowrie, T., Logan, T., & Hegarty, M. (2019). The influence of spatial visualization training on students' spatial reasoning and mathematics performance. *Journal of Cognition and Development, 20*(5), 729-751.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Bogotá: MEN.

Osta, I., Silfverberg, H., Henderson, D., Hoyos, V., & Swoboda, E. (2008). Topic Study Group 10: Research and Development in the Teaching and Learning of Geometry. En *ICME-10 Proceedings* (pp. 331-336).

Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María.

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. New Jersey, U.S.A: Anchor Books Edition.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. En *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Brill Sense.

Radford, L. (2018). Semiosis and subjectification: The classroom constitution of mathematical subjects. En *Signs of Signification* (pp. 21-35). Springer, Cham.

Ramírez, A. (2008). *Geometría Moderna*. Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT): Guanajuato, México.

Rizki, H. T. N., Frentika, D., & Wijaya, A. (2018). Exploring students' adaptive reasoning skills and van Hiele levels of geometric thinking: a case study in geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, *983*(1), p. 012148. IOP Publishing.

Rodríguez, L. A. (2017) *GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior*. (Tesis de Especialización) Universidad Militar Nueva Granada. Colombia.

Rodríguez, J. M., & Ruiz, J. M. (1998). *Geometría proyectiva*. Addison-Wesley Iberoamericana España.

Sbitneva, L., Moreno, M., & Serna H., L. (2017). Experiencias en el desarrollo de la visualización de invariantes geométricos en el contexto de la visión 3D por computadora con el apoyo de GeoGebra. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (p. 1543-1552). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Schlenker, J. M. (2021). A hyperbolic proof of Pascal's Theorem. *Mathematical Intelligencer, 43*(2), 130-133.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Elsevier: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 179-214.

Segall, M. H., Campbell, D. T., & Herskovits, M. J. (1963). Cultural differences in the perception of geometric illusions. *Science*, 139(3556), 769-771.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. En G. Keiser, *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education ICME-13* (277-287). Hamburgo: Springer Open.

Sigarreta, J. M., Rodríguez, J. M., & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática venezolana, 13*(1), 53-66.

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (2010). *Thinking mathematically Second Edition*. Addison-Wesley. Pearson Education: Great Britain.

Torres A., C. (2012). ¿Qué significa "comprender el Teorema de Desargues"? Miscelánea matemática, Vol. 54. p. 3-23.

Ubuz, B. Haser, C., & Mariotti, M. (Eds.) (2013). *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Middle East Technical University: Ankara, Turkey.

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74-94.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310 - 316.

Wei, W. (2019). Projective Geometry. (Degree Thesis). Linnaeus University. Sweden.

Yudianto, E., Sugiarti, T., & Trapsilasiwi, D. (2018). The identification of van Hiele level students on the topic of space analytic geometry. *Journal of Physics: Conference Series* 983 (1), 012078 IOP Publishing.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.). (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.

Zhang, D. (2017). Effects of visual working memory training and direct instruction on geometry problem solving in students with geometry difficulties. Learning Disabilities: *A Contemporary Journal, 15*(1), 117-138.

Zlatanov, B. (2017). On a family curves of the second class. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, 6*(2), 91-105.

ANEXOS

Anexo A. Evidencias de tránsito de fases de aprendizaje.

FASE DE INFORMACIÓN

FASE DE ORIENTACIÓN GUIADA

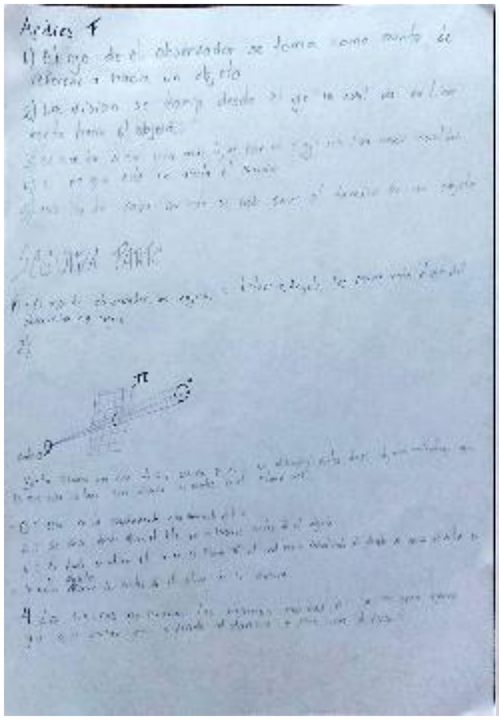
FASE DE EXPLICACIÓN

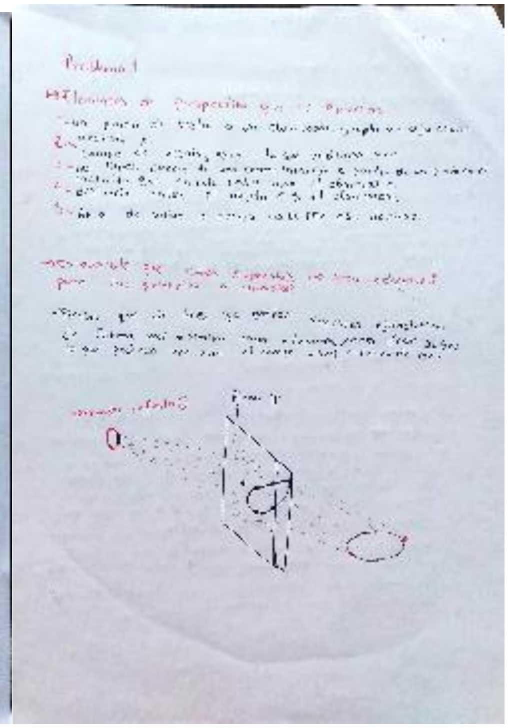
FASE DE ORIENTACIÓN LIBRE

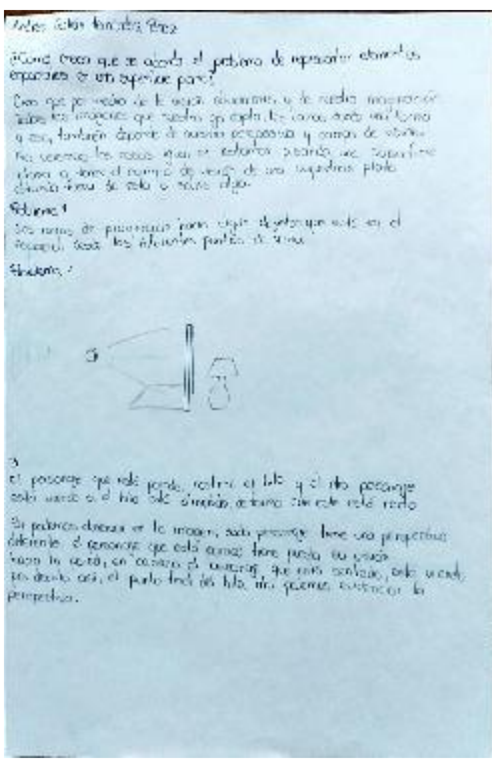
FASE DE INTEGRACIÓN

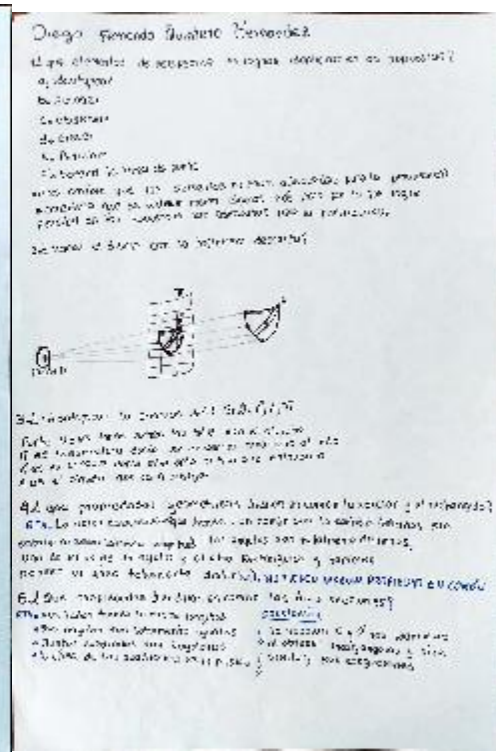
Anexo B. Videos capturados en cada sesión.

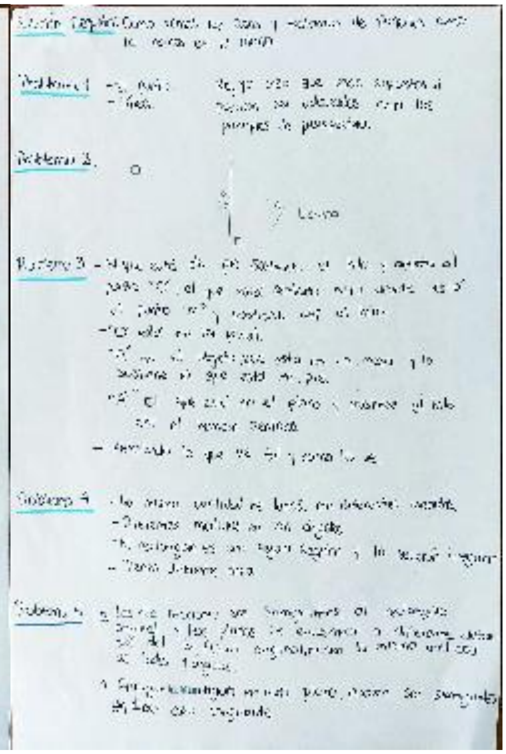
Anexo C. Respuestas de los estudiantes en la Actividad 1.

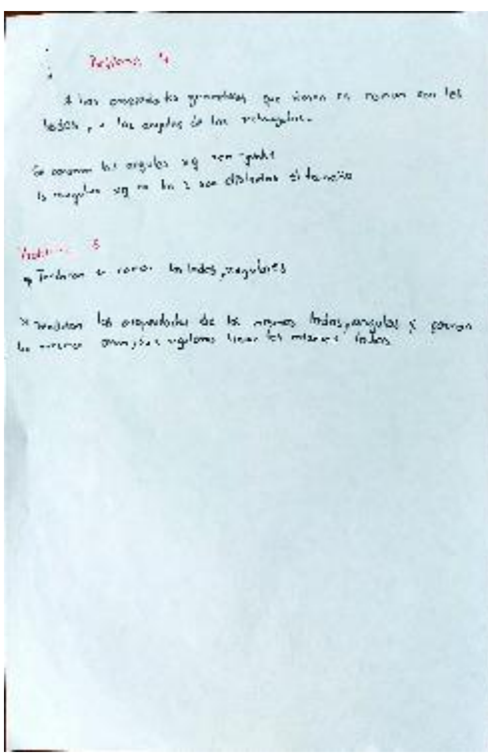


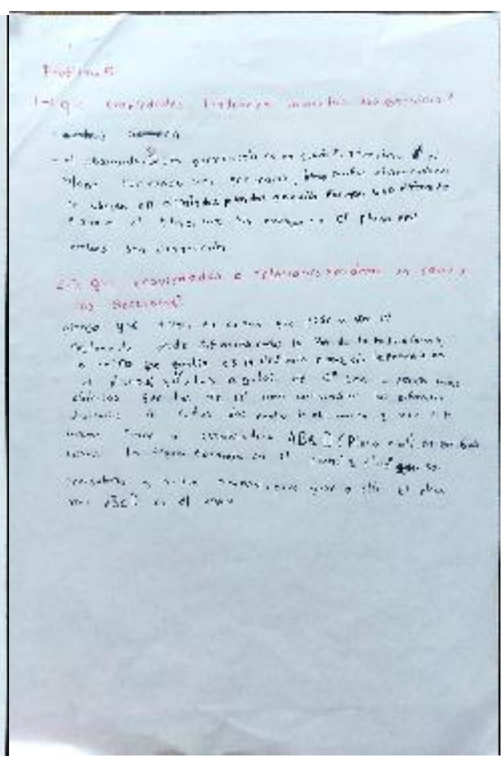




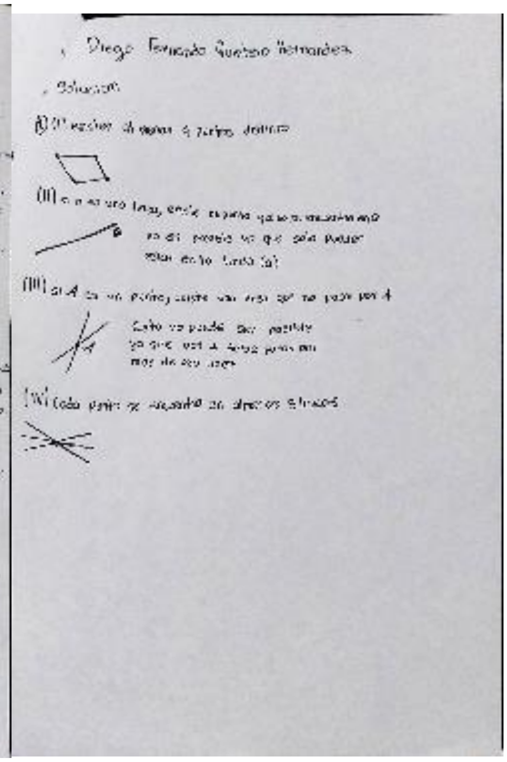


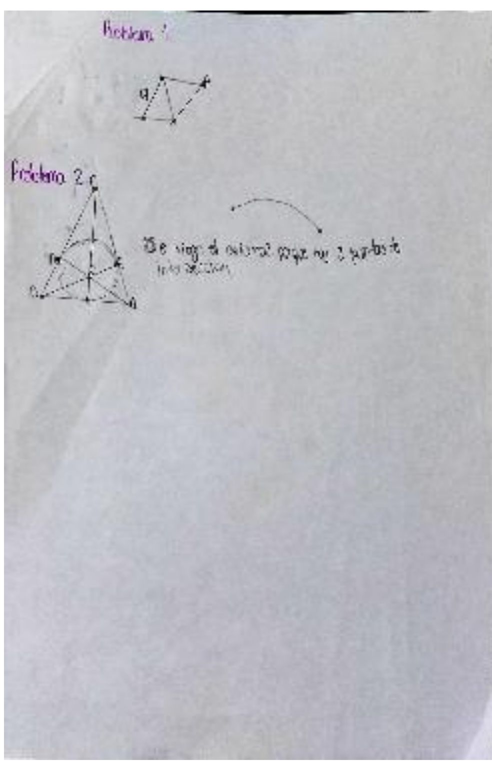


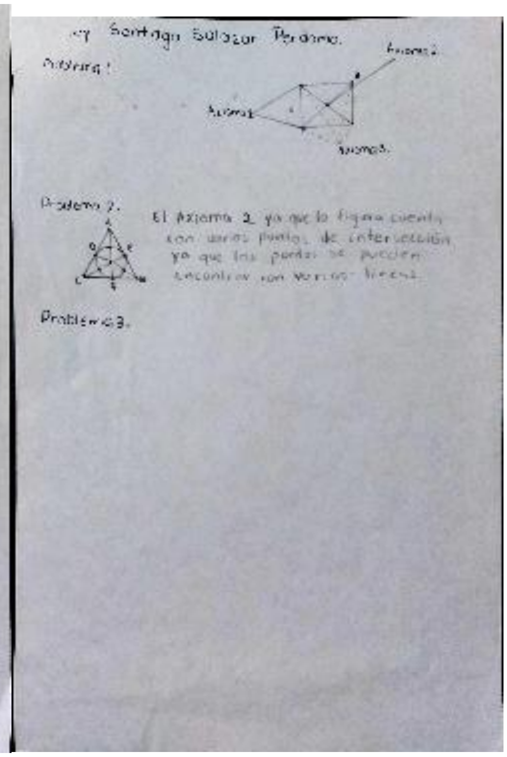


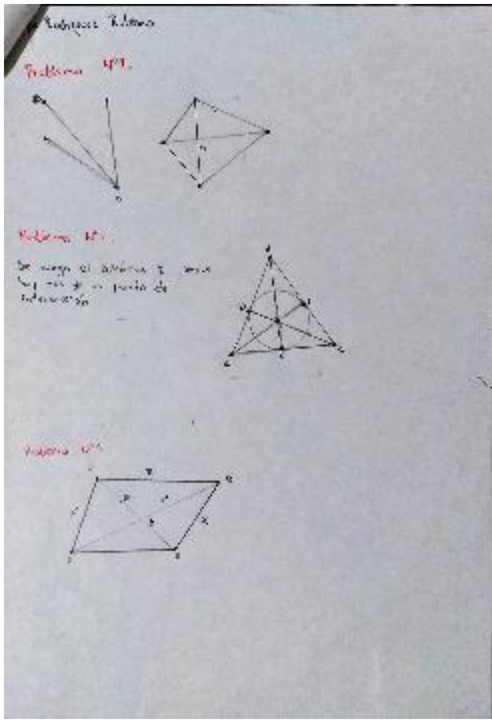


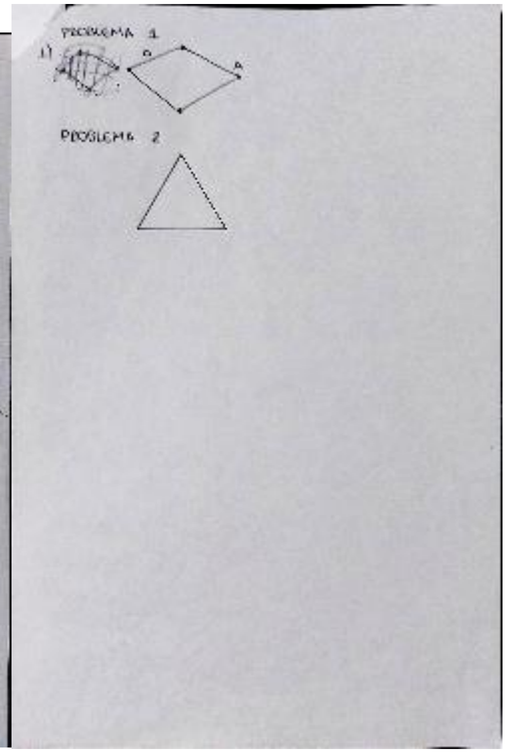
Anexo D. Respuestas de los estudiantes en la Actividad 2.

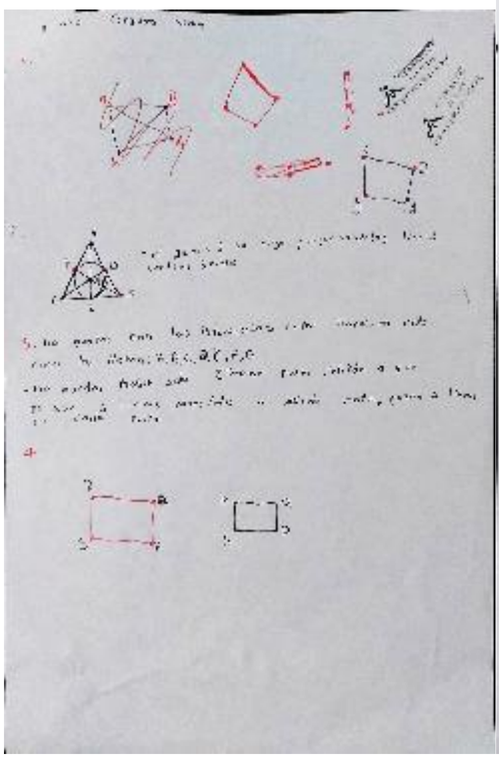


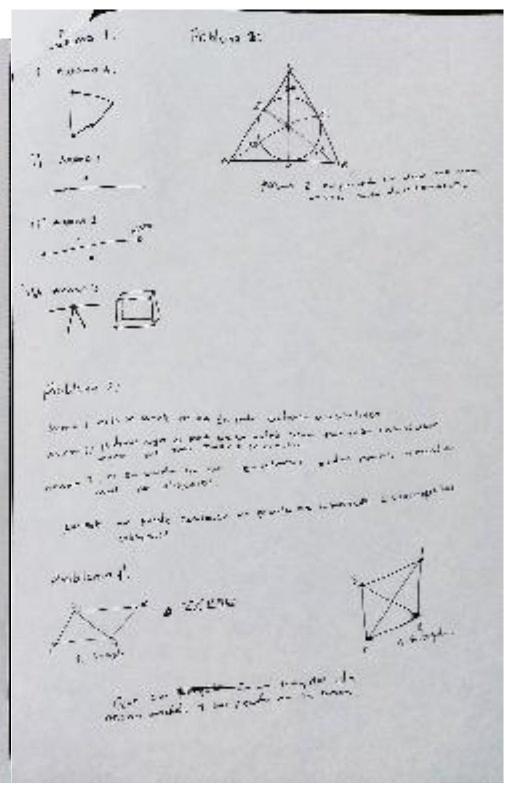




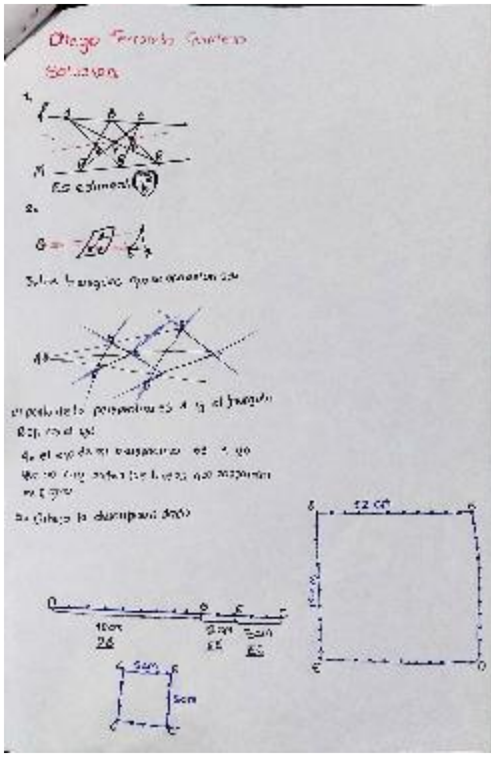


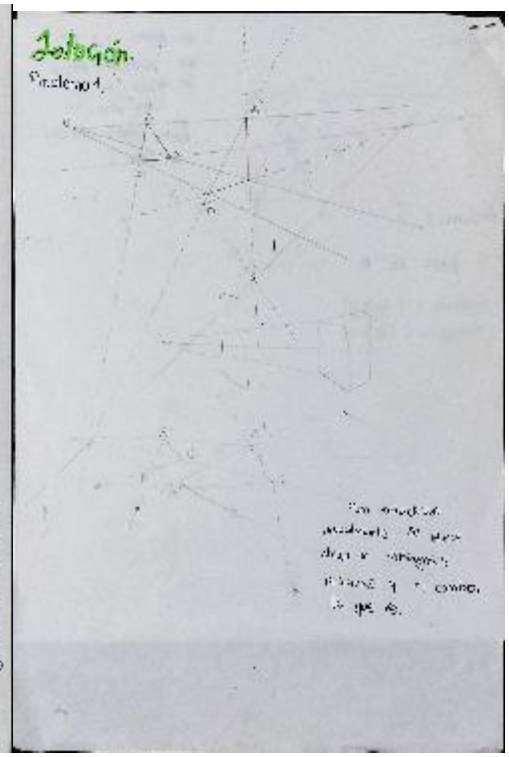

PROBLEMA 1
PROBLEMA 2

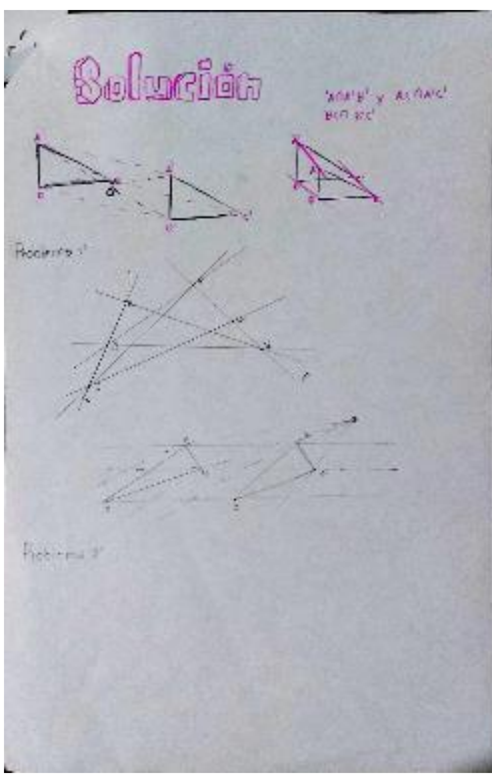


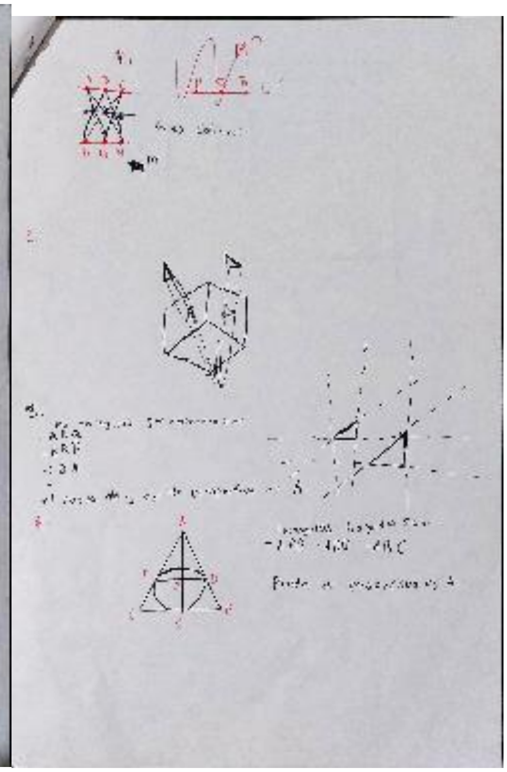


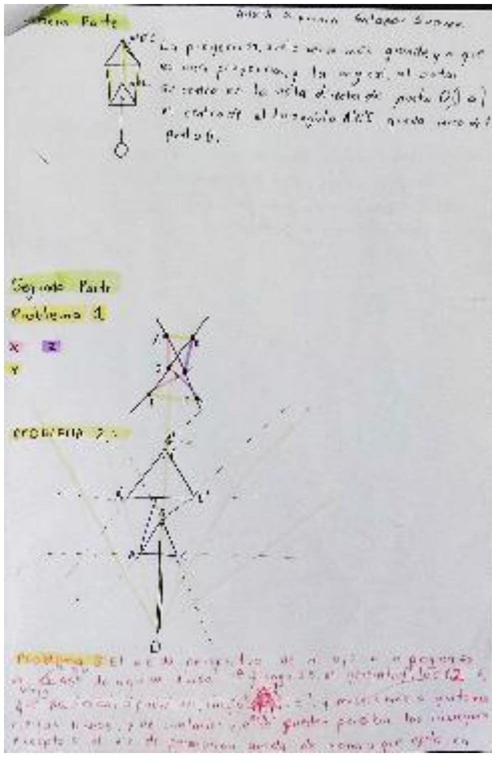
Anexo E. Respuestas de los estudiantes en la Actividad 3.

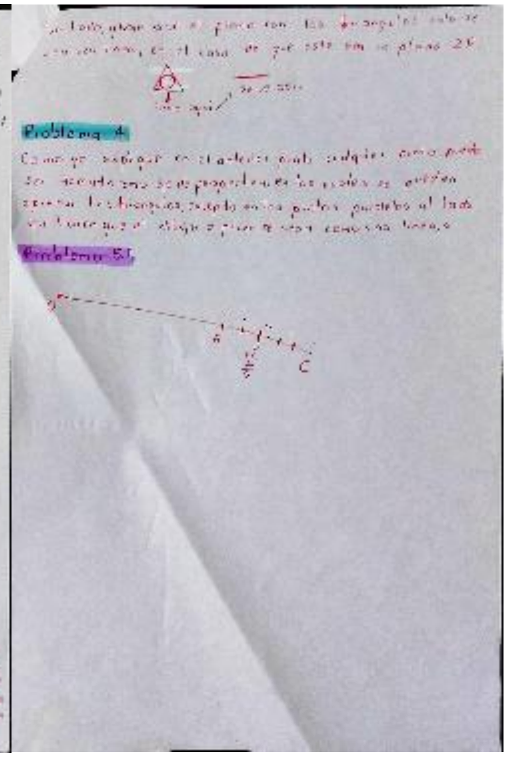


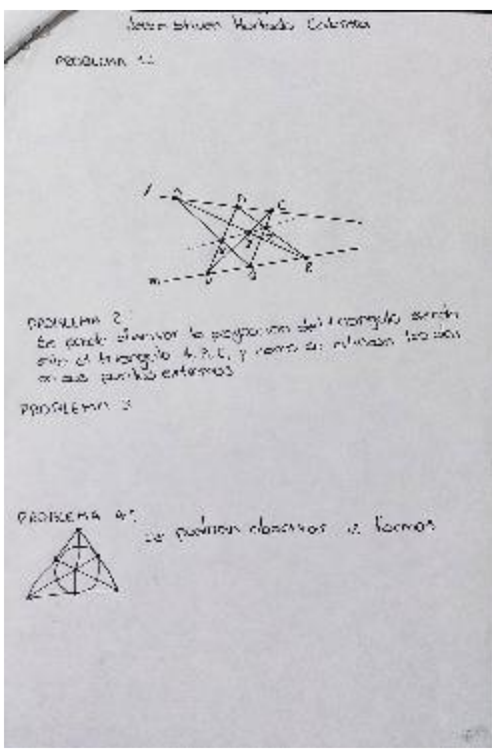


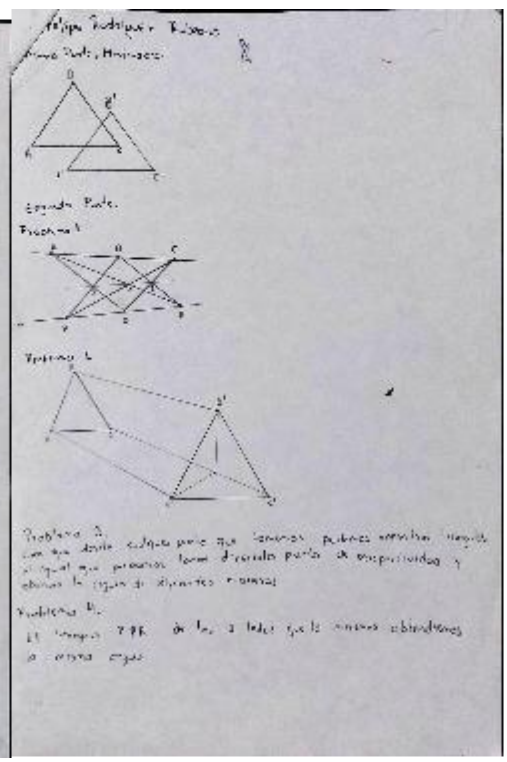




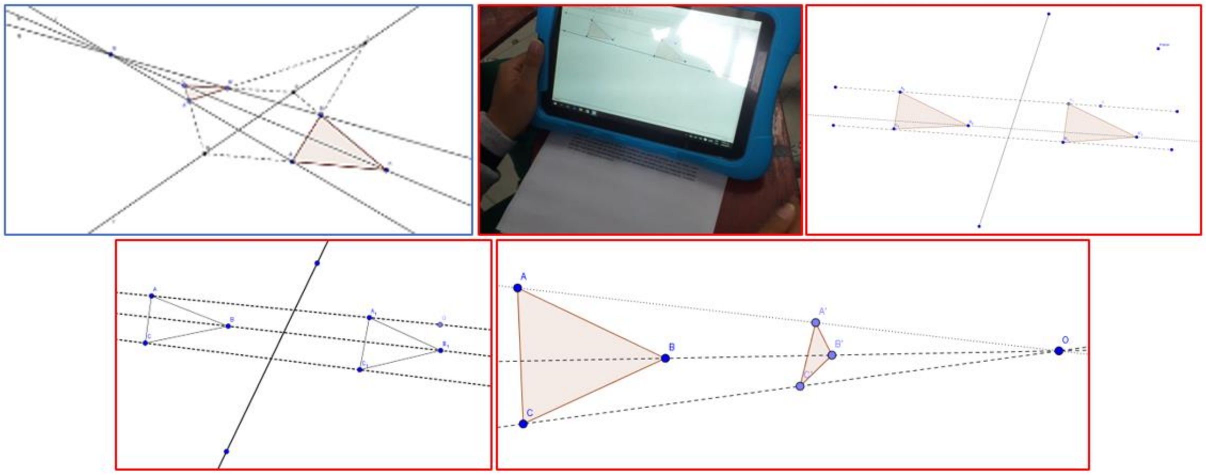

Segunda Parte
Problema 1
PROBLEMA 2

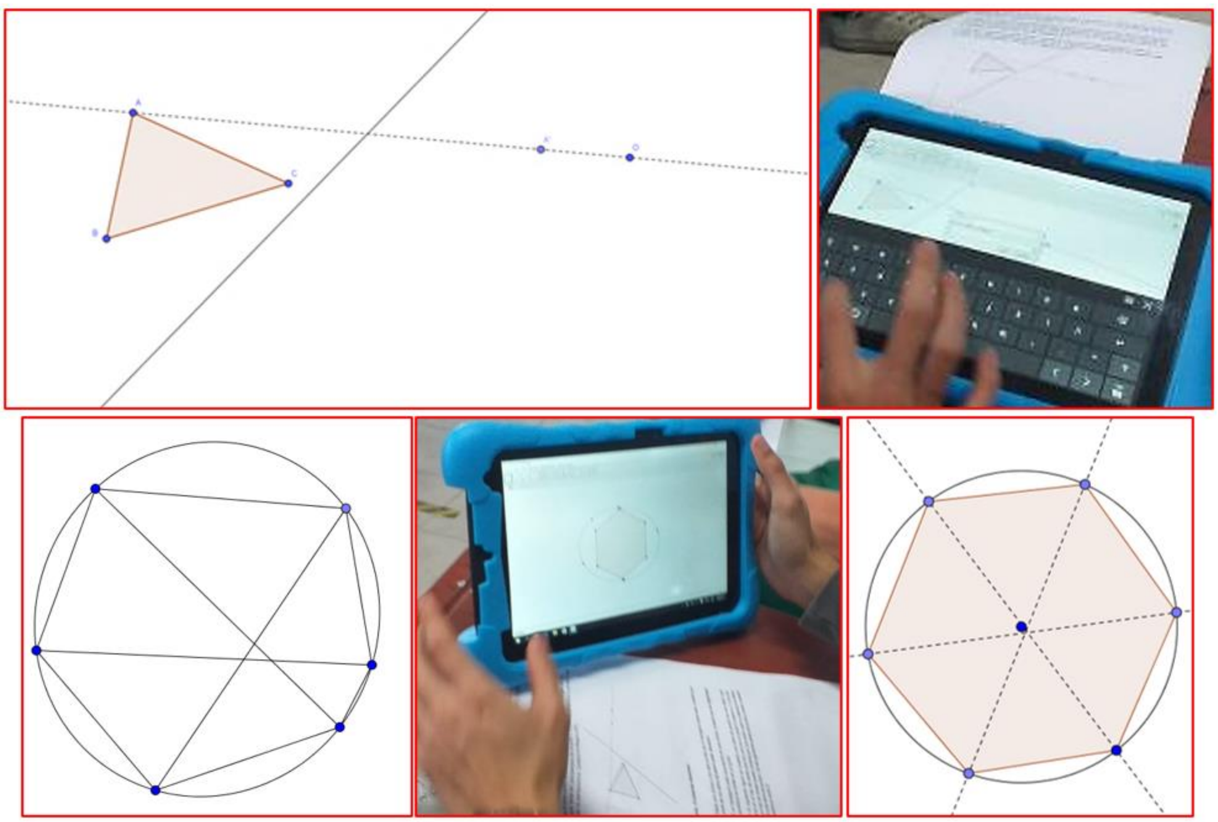

Problema 4
Problema 5

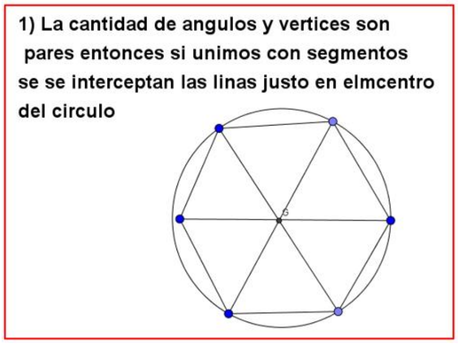

PROBLEMA 1
PROBLEMA 2
PROBLEMA 3
PROBLEMA 4

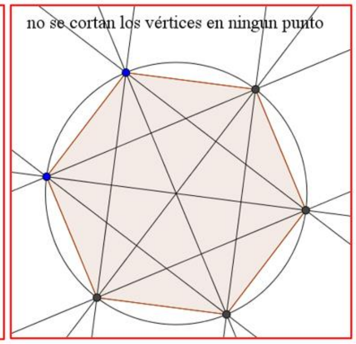

Segunda Parte

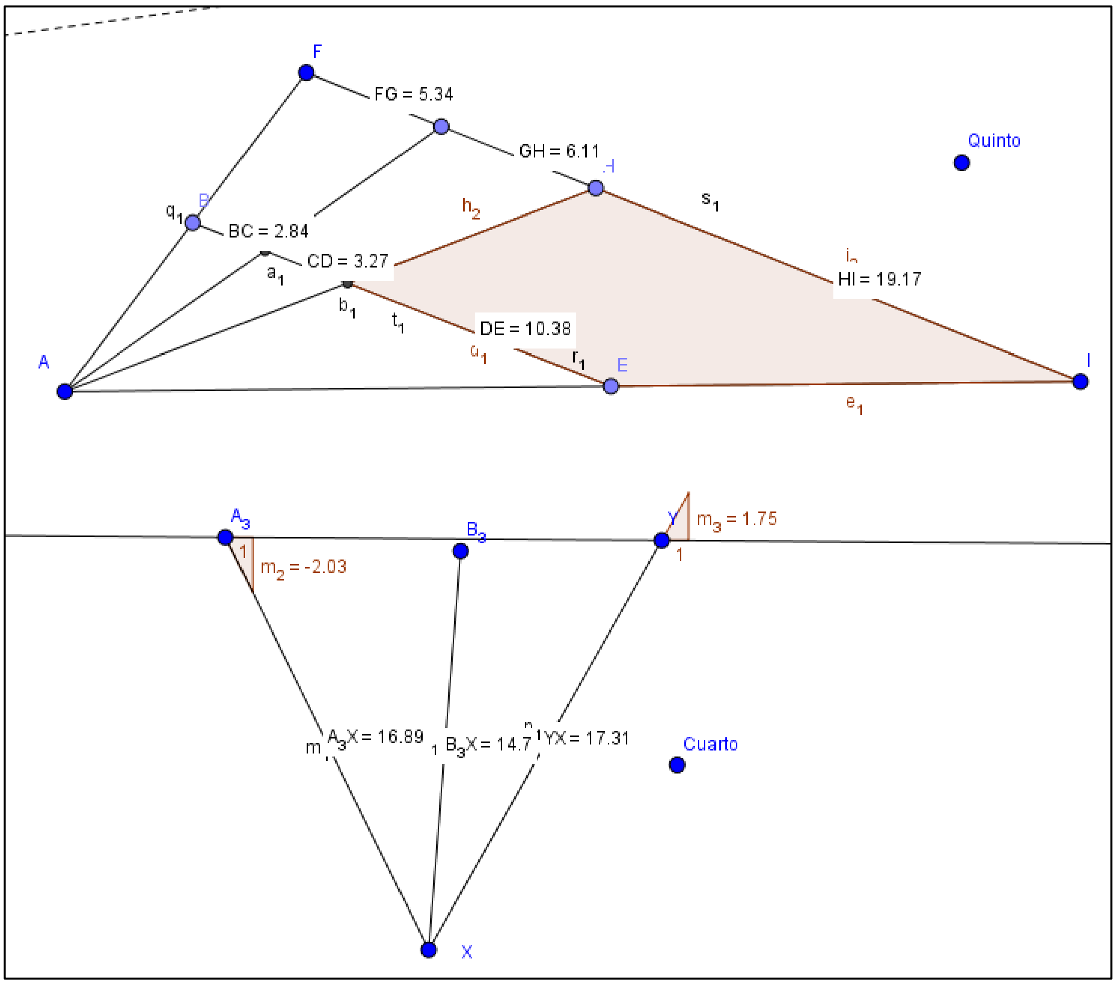
Anexo F. Respuestas de los estudiantes en la Actividad 4.






1) La cantidad de angulos y vertices son
pares entonces si unimos con segmentos
se se interceptan las linas justo en elmcentro
del circulo


no se cortan los vértices en ningun punto


F
FG = 5.34
GH = 6.11
Quinto
BC = 2.84
CD = 3.27
HI = 19.17
DE = 10.38
A
E
I
A_3
B_3
Y
$m_3 = 1.75$
$m_2 = -2.03$
$A_3X = 16.89$
$B_3X = 14.7$
$YX = 17.31$
Cuarto
X