



Análisis numérico de los gradientes térmicos por cargas de temperatura en puentes de
concreto reforzado

Camilo Andrés Ballesteros Avellaneda

20481726168

Universidad Antonio Nariño

Programa Ingeniería Civil

Facultad de Ingeniería Civil

Duitama, Colombia

2022

Análisis numérico de los gradientes térmicos por cargas de temperatura en puentes de concreto
reforzado

Camilo Andrés Ballesteros Avellaneda

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Ingeniero Civil

Directores:

Dr. Ingeniero Edison Osorio Bustamante

Esp. Erika Lorena Becerra Becerra

Línea de Investigación:

Análisis estructural

Universidad Antonio Nariño

Programa Ingeniería Civil

Facultad de Ingeniería Civil

Duitama, Colombia

2022

NOTA DE ACEPTACIÓN

El trabajo de grado titulado
Análisis numérico de los gradientes térmicos por cargas de
temperatura en puentes de concreto reforzado, Cumple con
los requisitos para optar
Al título de Ingeniero Civil.

Firma del Tutor

Firma Jurado

Firma Jurado

Duitama, 14 de mayo de 2022.

Contenido

| | | |
|--------|---|----|
| 1. | Introducción | 15 |
| 2. | Objetivos | 18 |
| 2.1. | Objetivo general | 18 |
| 2.2. | Objetivos específicos | 18 |
| 3. | Marco teórico | 19 |
| 3.1. | Elementos del clima..... | 19 |
| 3.2. | Cambio climático..... | 19 |
| 3.3. | Transferencia de calor | 20 |
| 3.4. | Mecanismos de transferencia de calor..... | 21 |
| 3.4.1. | Transferencia de calor por conducción. | 21 |
| 3.4.2. | Transferencia de calor por convección..... | 22 |
| 3.4.3. | Trasferencia de calor por radiación e irradiación..... | 23 |
| 3.5. | Cargas térmicas en puentes..... | 24 |
| 3.5.1. | Expansión y contracción con temperatura uniforme..... | 25 |
| 3.5.2. | Distribución de la temperatura | 26 |
| 3.6. | Métodos numéricos en la conducción de calor..... | 27 |
| 3.6.1. | Diferencias finitas | 28 |
| 3.6.2. | Diferencias finitas en régimen transitorio unidimensional | 28 |
| 4. | Estado del conocimiento | 29 |

| | | |
|--------|---|----|
| 4.1. | Producción de documentos..... | 29 |
| 4.2. | Comportamiento de la temperatura en la estructura..... | 31 |
| 4.3. | Efectos de la distribución de la temperatura en la estructura | 33 |
| 4.4. | Importancia del monitorio de la temperatura en la estructura | 36 |
| 4.5. | Monitoreo analítico..... | 37 |
| 5. | Metodología | 39 |
| 5.1. | Identificación de variables independientes..... | 40 |
| 5.1.1. | Temperatura ambiente..... | 40 |
| 5.1.2. | Radiación solar..... | 41 |
| 5.1.3. | Velocidad del viento..... | 41 |
| 5.1.4. | Coefficiente de convección | 41 |
| 5.2. | Modelo numérico desarrollado..... | 41 |
| 5.3. | Desarrollo y despeje de las ecuaciones..... | 43 |
| 5.3.1. | Ecuación nodo superior..... | 43 |
| 5.3.2. | Ecuación nodos intermedios..... | 43 |
| 5.3.3. | Ecuación nodo inferior | 44 |
| 5.4. | Construcción algoritmo en Python | 44 |
| 5.5. | Verificaciones metodológicas del algoritmo | 44 |
| 5.5.1. | Problema 5-86. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3rd edition..... | 45 |
| 5.5.2. | Problema 5-88. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3 rd edition..... | 45 |

| | |
|--|----|
| 5.5.3. Ejemplo 5.12. Fundamentals of heat and mass transfer-Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, David P. De Witt..... | 46 |
| 5.6. Aplicación técnica | 47 |
| 5.6.1. Puente de acceso a la terminal uno del Aeropuerto Internacional el Dorado-Bogotá | 47 |
| 5.6.2. Puente tizón-Neiva | 53 |
| 5.6.3. Modelado temperatura ambiente | 57 |
| 5.6.4. Modelado radiación solar | 58 |
| 5.6.5. Propiedades del modelo y suposiciones | 59 |
| 6. Resultados..... | 61 |
| 6.1. Algoritmo programado en lenguaje Python..... | 62 |
| 6.2. Resultados problemas de validación..... | 66 |
| 6.2.1. Desarrollo Problema 5-86. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3 rd edition | 66 |
| 6.2.2. Problema 5-88. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3 rd edition..... | 71 |
| 6.2.3. Ejemplo 5.12. Fundamentals of heat and mass transfer-Theodore L.Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, David P. De Witt..... | 74 |
| 6.3. Resultados de la comparación con la aplicación técnica | 76 |
| 6.3.1. Resultados puente de acceso a la terminal uno del Aeropuerto Internacional el Dorado-Bogotá..... | 76 |
| 6.3.2. Resultados puente Tizón-Neiva | 81 |

7. Conclusiones 86

8. Referencias bibliográficas..... 89

Lista de tablas

| | |
|--|----|
| Tabla 1 Temperatura y radiación solar durante un día..... | 46 |
| Tabla 2 Datos ambientales para el puente de acceso al Aeropuerto Internacional el Dorado | 48 |
| Tabla 3 Temperatura en la placa superior en la mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado..... | 49 |
| Tabla 4 Temperatura en la placa superior en la tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado | 50 |
| Tabla 5 Temperatura en la placa inferior en la mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado | 51 |
| Tabla 6 Temperatura en la placa inferior en la tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado | 52 |
| Tabla 7 | 53 |
| Tabla 8 Temperatura placa superior puente Tizón..... | 55 |
| Tabla 9 Temperatura placa inferior puente Tizón..... | 56 |
| Tabla 10 Propiedades térmicas y geométricas de la capa asfáltica..... | 59 |
| Tabla 11 Propiedades térmicas y geométricas de la placa de concreto | 59 |
| Tabla 12 Referencias ambientales puente Tizón..... | 60 |
| Tabla 13 Referencias ambientales puente acceso Aeropuerto al Dorado | 60 |
| Tabla 14 Temperatura en los nodos según las iteraciones | 67 |
| Tabla 15 Temperatura en los nodos según las iteraciones | 68 |
| Tabla 16 Porcentajes de error..... | 70 |
| Tabla 17 Temperatura de los nodos durante 48h propuestos por el autor | 71 |

| | |
|--|----|
| Tabla 18 Temperatura de los nodos durante 48h obtenidos por el algoritmo..... | 72 |
| Tabla 19 Porcentajes de error..... | 73 |
| Tabla 20 Temperaturas en los nodos según las iteraciones | 74 |
| Tabla 21 Temperatura en los nodos según las iteraciones..... | 75 |
| Tabla 22 Porcentaje de error | 75 |

Lista de figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 Elementos del clima | 19 |
| Figura 2 Procesos de transferencia de calor sobre un puente | 25 |
| Figura 3 <i>Fuerzas externas sobre un elemento sin variación de temperatura</i> | 25 |
| Figura 4 Fuerzas externas sobre un elemento con aumento de temperatura | 26 |
| Figura 5 Fuerzas externas sobre un elemento con una disminución de temperatura..... | 26 |
| Figura 6 Distribución de temperatura, deformaciones y esfuerzos | 27 |
| Figura 7 Producción de documentos por año..... | 30 |
| Figura 8 Primeros diez países en producción de documentos | 30 |
| Figura 9 Diez (10) autores que más han producido documentos..... | 31 |
| Figura 10 Gradiente Positivo de Temperatura Vertical en Superestructuras de Concreto y de Acero | 39 |
| Figura 11 Conducción unidimensional de calor a través de un elemento en una pared plana grande..... | 40 |
| Figura 12 Diagrama de flujo algoritmo | 61 |
| Figura 13 Gráfica de la temperatura de los nodos en los extremos | 69 |
| Figura 14 Grafica de la temperatura de los nodos extremos..... | 69 |
| Figura 15 Representación datos de la solución..... | 72 |
| Figura 16 Representación datos obtenidos por el algoritmo..... | 73 |
| Figura 17 Temperatura del ambiente entre el 4 de septiembre del 2018 y el 13 de octubre de 2018..... | 76 |
| Figura 18 Radiación solar entre el 4 de septiembre del 2018 y el 13 de octubre de 2018 | 77 |

| | |
|---|----|
| Figura 19 Temperatura de la placa entre el 4 de septiembre del 2018 y el 13 de octubre de 2018..... | 77 |
| Figura 20 Comparación de la temperatura placa inferior mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado..... | 78 |
| Figura 21 Comparación de la temperatura placa inferior tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado..... | 79 |
| Figura 22 Comparación de la temperatura placa superior mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado | 80 |
| Figura 23 Comparación de la temperatura placa superior tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado..... | 80 |
| Figura 24 Temperatura del ambiente entre el 12 de diciembre de 2019 y 6 de enero de 2020..... | 81 |
| Figura 25 Radiación solar entre el 12 de diciembre de 2019 y 6 de enero de 2020 | 82 |
| Figura 26 Temperatura de la placa entre el 12 de diciembre de 2019 y 6 de enero de 2020 | 82 |
| Figura 27 Gráfica comparativa temperatura placa inferior mañana puente Tizón | 83 |
| Figura 28 Gráfica comparativa temperatura placa inferior tarde puente Tizón..... | 83 |
| Figura 29 Gráfica comparativa temperatura placa superior mañana puente Tizón | 84 |
| Figura 30 Gráfica comparativa placa superior tarde puente Tizón..... | 85 |

Lista de apéndices

| | |
|-------------------------|----|
| Apéndice A | 93 |
| Apéndice B | 95 |
| Apéndice C | 98 |

Resumen

Los cambios térmicos medioambientales producen deformaciones y esfuerzos en las estructuras que pueden acelerar la fisuración en el hormigón y, en consecuencia, acortar su durabilidad. Actualmente, Colombia carece de estudios específicos sobre las cargas térmicas en los puentes. En consecuencia, se desarrolla un modelo numérico programando en Python un algoritmo que soluciona el problema unidimensional en estado transitorio para simular mecanismo de transferencia de calor en el tablero de concreto de un puente de hormigón. Los resultados se validan con problemas de referencia académica. Además, se realiza una comparación con datos de temperatura superficial con mediciones de monitoreo con cámara térmica para dos puentes localizados en Bogotá y Neiva. El modelo numérico arroja resultados similares a los problemas de referencias y resultados conservadores con referencia a los datos de monitoreo.

Palabras clave: Distribución térmica, puentes, diferencias finitas, cargas térmicas, modelo analítico.

Abstract

The environmental thermal changes produce deformations and stresses in the structures that can accelerate the cracking in the concrete and, consequently, shorten its durability. Currently, Colombia lacks specific studies on thermal loads on bridges. Consequently, a numerical model is developed programming in Python an algorithm that solves the one-dimensional problem in transient state to simulate heat transfer mechanism in the concrete deck of a concrete bridge. The results are validated with academic reference problems. In addition, a comparison is made with surface temperature data with thermal camera monitoring measurements for two bridges located in Bogotá and Neiva. The numerical model gives similar results to the reference problems and conservative results with reference to the monitoring data.

Keywords: Thermal distribution, bridges, finite differences, thermal loads, analytical model.

1. Introducción

Con el avance de la tecnología y acceso a ella, en el territorio colombiano se ha dado paso a la construcción de obras de ingeniería que permiten atravesar la cadena montañosa que compone nuestro país, así como también con la creciente población y su correspondiente aumento en el tráfico de vehículos en las ciudades, se proyecta la construcción de infraestructura donde los puentes son una pieza clave para la movilidad, habiendo observado que el costo de construcción es fácilmente retribuido en los gastos que se salvan tanto en tiempo de desplazamiento como en gasto de combustibles y mantenimiento de los vehículos (*INVÍAS Apuesta Por El Uso de Tecnología e Inteligencia Artificial Para Optimizar Recursos y Mejorar La Movilidad Vial Del País*, n.d.) Los puentes proveen una solución eficaz, generando un aumento exponencial en el aumento de su construcción de cara al futuro no sólo de las movilizaciones cubriendo grandes trayectos sino también dentro de concurridas ciudades donde la construcción de vías por sobre el nivel del suelo da más espacio para la creación de rutas alternativas.

Debido a la diferencia de los códigos y normativas de construcción de puentes se pueden presentar grandes diferencias entre éstos, algo que sumado al cambio del ciclo y fenómenos climáticos en los últimos años y la proyección que se hacen de los mismos es un tema que debe ser tratado con una alta importancia debido a que las fallas de estas estructuras generarían pérdidas no sólo económicas sino de vidas en sus usuarios, haciendo necesario que se generen rangos de seguridad óptimos.

Si bien en Colombia se cuentan con manuales y normas que definen el diseño por cargas de temperatura en puentes y estructuras, se sabe que estos manuales son adaptados de las investigaciones hechas por las academias estadounidenses, con lo cual permanece la incertidumbre

de si los valores adoptados son congruentes con los efectos producidos por el clima colombiano que tiene marcadas diferencias con el norteamericano. Los valores y métodos de diseño que se han venido utilizando en Colombia para el diseño de puentes fueron adoptados del (*AASHTO, 2013*).

La incertidumbre en cuanto a la idoneidad de los valores utilizados para el diseño y la construcción de estas estructuras se ve incrementada por las diferencias geográficas y climáticas, entre los países en los cuales se desarrollan los estudios y en los cuales se aplica, esto se suma a los cambios en el ambiente debido al cambio climático.

El monitoreo de las estructuras es indispensable para garantizar que durante su vida útil el desempeño de estas es el esperado (Burdet, 2010). Sin embargo, en el territorio colombiano no se cuenta con un método de control sobre las distribuciones de la temperatura que se presentan sobre los puentes. Es importante verificar que los resultados teóricos de diseño que proporcionan los manuales tengan congruencia con las mediciones in situ, en las situaciones en las que no sea así se debe contar con un rango de seguridad apropiado previendo que no se presenten esfuerzos que afecten gravemente las estructuras.

Debido a la situación climática actual sería oportuno el instar a que se haga una revisión que pueda demostrar si existe una correcta relación entre los valores obtenidos in situ con los de las normativas de diseño a fin de adoptar valores y métodos de cálculo que brinden seguridad con respecto a las solicitaciones de servicio producidas por las cargas térmicas en estas estructuras.

En el presente trabajo se desarrolla un análisis numérico de la distribución térmica que se presenta en los puentes debido a las cargas térmicas. En este documento se desarrolla por capítulos, en el capítulo tres se abordan los conceptos fundamentales de la transferencia de calor y los efectos de la temperatura en las estructuras. En el capítulo cuatro se hace referencia a la consulta de documentos concernientes a investigaciones previas con enfoque hacia la distribución de la temperatura en los puentes, los efectos de esa distribución, la importancia de monitorear estas

variables y los métodos analíticos usados para dicho monitoreo. En el capítulo cinco se expone el proceso metodológico a través del cual se desarrolla la investigación, y consecuentemente en el capítulo seis se exponen los resultados obtenidos a través de la metodología elegida para finalizar exponiendo las conclusiones de la investigación en el capítulo nueve.

2. Objetivos

2.1. Objetivo general

Realizar un análisis de la distribución térmica dentro de la superestructura de un puente mediante el desarrollo de un modelo numérico unidimensional para evaluar las temperaturas en estado transitorio

2.2. Objetivos específicos

- Programar un algoritmo que desarrolle por medio del método de las diferencias finitas el modelo de la distribución térmica unidimensional.
- Realizar verificaciones al algoritmo desarrollado para garantizar que cumpla con las soluciones analíticas propuestas en la literatura consultada.
- Aplicar el algoritmo a un caso real con el fin de obtener los valores de las temperaturas superficiales y contrastar con las mediciones in situ disponibles.

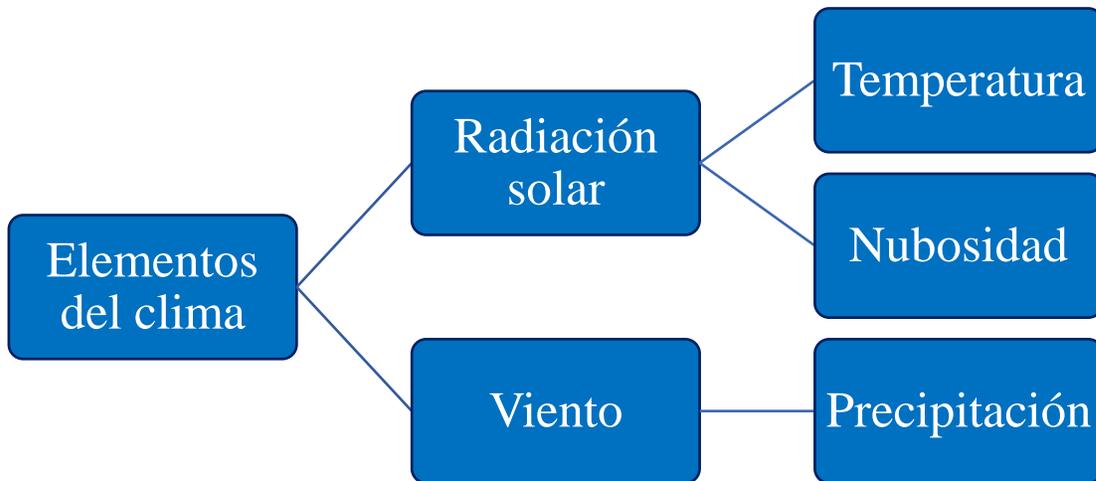
3. Marco teórico

3.1. Elementos del clima

El tiempo atmosférico está definido por una serie de elementos que en conjunto definen el clima, los más notorios se muestran en la Figura 1.

Figura 1

Elementos del clima



Fuente: Adaptado de Elementos y Factores Del Clima - Meteo Navarra, (n.d.)

3.2. Cambio climático

El cambio climático se define en base a dos términos, antes de 1992 se entendía como el cambio del clima en el globo terrestre, independientemente de las causas que lo generen, sin embargo, a partir de la celebración de la *Cumbre de Río* se hizo la primera mención oficial de este término refiriéndolo como el cambio en los ciclos y fenómenos climáticos producidos directa o

indirectamente por la actividad humana, sobreponiéndose al cambio que se produce naturalmente (Oraza, 2011).

Debido a los presentes fenómenos que ocurren en el ambiente hoy en día y como lo refiere el investigador (Larsson, 2015) se tiene una certeza casi absoluta sobre el aumento de la temperatura en todo el planeta. Las estructuras ya construidas se verían afectadas por las cargas térmicas mayores, además también introduce una incertidumbre sobre los métodos y códigos de diseño existentes, los cuales pueden presentar valores que pronto serán obsoletos para describir las condiciones reales que se presenten en las estructuras. Sin embargo, el dónde o cuando se presentarán estas variaciones son preguntas por responder para poder modificar los métodos y normativas de construcción.

3.3. Transferencia de calor

Este fenómeno es estudiado bajo las leyes de la termodinámica, aunque un proceso analítico es muy complicado, a través de los estudios experimentales se han deducido ecuaciones que describen y simplifican su estudio. Así mismo la termotecnia es la herramienta usada para determinar la velocidad a la que se producen los fenómenos térmicos, algo que no contempla la termodinámica (Fernandez Benitez & Corrochano Sanchez, 2014).

El fenómeno se produce cuando existe un gradiente térmico entre dos sistemas o puntos de un mismo objeto, buscando alcanzar un equilibrio donde para cada sistema o punto del elemento se cuente con la misma temperatura.

El estudio de la transferencia de calor se vale en sus cimientos del desarrollo teórico que ha tenido la termodinámica, agregando el hecho de que se puede saber mediante este enfoque no la cantidad de energía transferida sino la razón a la cual se realiza dicha transferencia, resultando también en el cálculo de los intervalos de tiempo transcurridos (Camaraza Medina, 2017).

Se puede conocer la cantidad de energía térmica transferida si se conoce la tasa de transferencia y el tiempo durante el cual se quiere analizar el fenómeno, tal como lo describe la ecuación 1.

$$Q = \int_0^{\Delta t} \dot{Q} \Delta t \quad (1)$$

Donde:

Q: Calor transferido

Δt : Intervalo de tiempo en cual se desarrolla el fenómeno

\dot{Q} : Razón de la tasa de transferencia

3.4. Mecanismos de transferencia de calor

Comúnmente los mecanismos de transferencia de calor que son predominantes en los efectos termodinámicos son cuatro, dos de los cuales se presentan sólo cuando existe un medio físico que lo permita.

3.4.1. *Transferencia de calor por conducción.*

Este proceso se da sólo si los objetos que poseen un gradiente térmico, esto es, una diferencia de temperatura, están en contacto en alguna de sus superficies, permitiendo que el movimiento de las partículas de un objeto sea transmitido (Camaraza Medina, 2017).

Generalmente para la aplicación práctica de los modelos de conducción térmica se utiliza un modelo de una o dos dimensiones, lo cual, aunque no es del todo exacto, ya que, a saber, el fenómeno se produce en todo el campo espacial, esta simplificación provee valores que son válidos para sus usos en ingeniería, además de reducir los requisitos computacionales facilitando en gran manera los cálculos (AGhali et al., 2012).

La razón de condición térmica para este fenómeno se describe en la ecuación 2.

$$\dot{Q}_{cond} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (2)$$

Donde:

\dot{Q}_{cond} : Razón de transferencia de calor por conducción.

k: Constante de conductividad térmica propia del material.

A: Superficie de transferencia.

$T_1 - T_2$ o ΔT : Diferencia de temperatura entre los dos puntos en los que ocurre el fenómeno.

Δx : Distancia entre los dos puntos en los que ocurre el fenómeno.

3.4.2. *Transferencia de calor por convección*

También llamado emisión calorífica es el proceso mediante el cual un sólido trasmite el calor a un fluido y en este a su vez las macropartículas que han recibido la energía se trasportan a un lugar con menos temperatura produciendo la disipación del calor, para que estas condiciones se presenten es necesario que el fluido tenga una viscosidad óptima que permita el movimiento libre de las partículas (Camaraza Medina, 2017).

La convección puede definirse de dos maneras, será forzada si por medio de instrumentos externos se dirige el fluido hacia el objeto aumentando el flujo de éste y consecuentemente la tasa de transferencia de calor. Por otro lado, se define la convección natural si no se interfiere en el sistema y el movimiento del fluido sobre el cuerpo se produce por las diferencias en las densidades de este (Yunus A. & Afshin J., 2014).

La razón de conducción térmica para este fenómeno se describe mediante la ecuación 3.

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty) \quad (3)$$

Donde:

\dot{Q}_{conv} : Razón de transferencia de calor por convección.

h: Constante de convección propia de la interacción en la superficie del material.

T_s : Temperatura superficial del elemento.

T_∞ : Temperatura del medio ambiente.

3.4.3. *Trasferencia de calor por radiación e irradiación*

Este fenómeno se produce en todos los cuerpos que tengan energía calorífica, se establece que para todo objeto que tenga una temperatura mayor al cero absoluto tendrá emisión de energía electromagnética debido al cambio energético de los átomos, visto así, la transferencia de calor por radiación no es más que radiación electromagnética, la cual puede variar su longitud de onda clasificándolas en rayos X, ultravioletas, luminosas, infrarrojas y ondas radioeléctricas.

Como tal todos los cuerpos emiten y absorben energía al mismo tiempo, sin embargo, los objetos fríos emiten menos energía de la que absorben y viceversa, siendo éste el proceso que sucede mientras se llega a un equilibrio térmico (Arenas, 2020).

Para describir el fenómeno de absorción de energía por parte de un cuerpo que recibe radiación se plantea la ecuación 4.

$$\dot{Q}_{absorbida} = \alpha \dot{Q}_{incidente} \quad (4)$$

Donde

$\dot{Q}_{absorbida}$: Razón de transferencia de calor absorbido por radiación.

$\dot{Q}_{incidente}$: Razón de transferencia de calor neta por radiación.

α : Constante de absorción del material.

Para describir el fenómeno de un objeto que emite radiación se plantea la ecuación 5, así:

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_\infty^4) \quad (5)$$

Donde

\dot{Q}_{rad} : Razón de emisividad de calor.

ε : Constante emisividad del material.

σ : Constante empírica de Stefan-Boltzmann

T_s : Temperatura superficial del elemento.

T_∞ : Temperatura del medio ambiente.

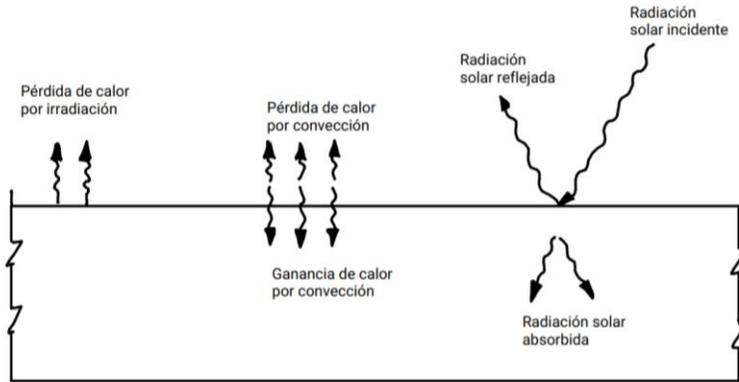
3.5. Cargas térmicas en puentes

Desde la generación de calor causada por la hidratación del cemento las estructuras de los puentes empiezan a experimentar los efectos térmicos y sus consecuentes efectos mecánicos. Es de especial interés el estudio de estos fenómenos debido a la magnitud de las fuerzas internas que pueden producirse, a saber, pueden alcanzar valores cercanos a los producidos por las cargas muertas o vivas durante la vida útil de la estructura.

Estas cargas son producto de los cambios en la temperatura en los intervalos de tiempo si se tiene en cuenta el calor absorbido de la radiación solar y la temperatura del ambiente, así como su pérdida en forma de irradiación, conducción hacia estructuras cercanas, tales como apoyos o elementos complementarios; y efectos de convección durante las horas de disminución de la temperatura ambiental (ver Figura 2). Estos cambios generan esfuerzos de flexión debido a gradientes térmicos o bien esfuerzos axiales debido las restricciones a la expansión o contracción del elemento en sus apoyos (AGhali et al., 2012).

Figura 2

Procesos de transferencia de calor sobre un puente



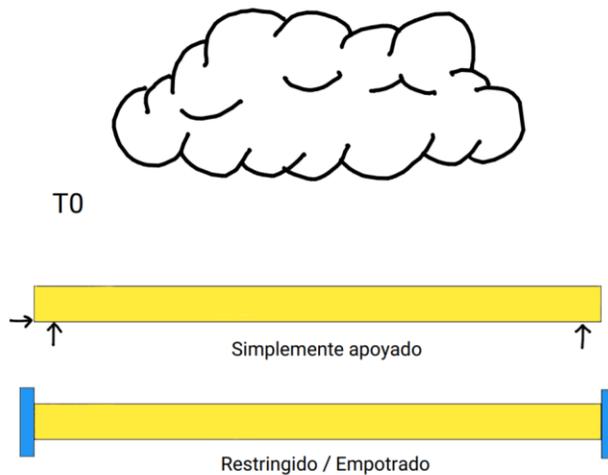
Adaptado de: AGhali et al., (2012)

3.5.1. *Expansión y contracción con temperatura uniforme*

La expansión y contracción de la estructura se calcula en base al coeficiente de expansión térmica y la diferencia de temperatura que se presenta en el cuerpo. Para un elemento simplemente apoyado no se tendrán esfuerzos, mientras que en el caso de un confinamiento se presentarán esfuerzos axiales debido a las restricciones en la longitud (Ver Figura 3Figura 4Figura 5).

Figura 3

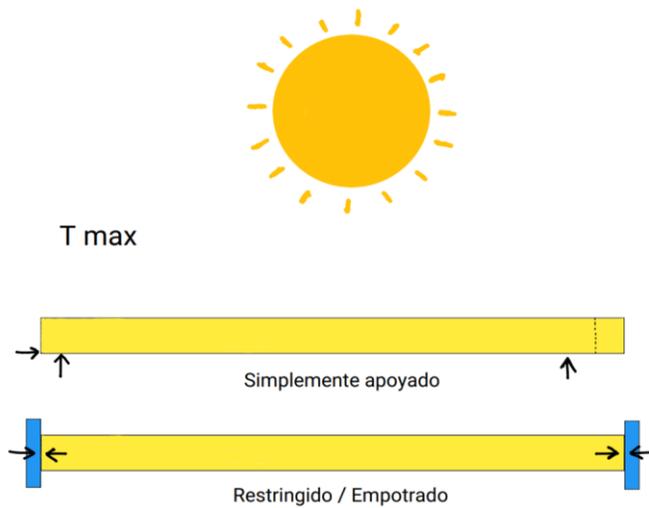
Fuerzas externas sobre un elemento sin variación de temperatura



Adaptado de: Bridge Design| Temperature Effects in Bridge Decks, (n.d.)

Figura 4

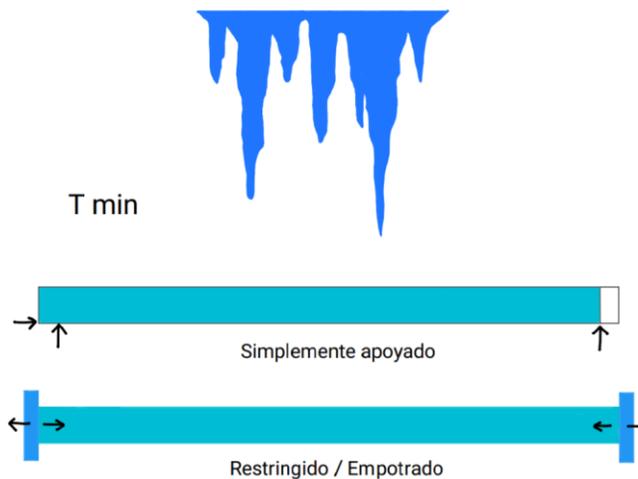
Fuerzas externas sobre un elemento con aumento de temperatura



Adaptado de: Bridge Design| Temperature Effects in Bridge Decks, (n.d.)

Figura 5

Fuerzas externas sobre un elemento con una disminución de temperatura



Adaptado de: Bridge Design| Temperature Effects in Bridge Decks, (n.d.)

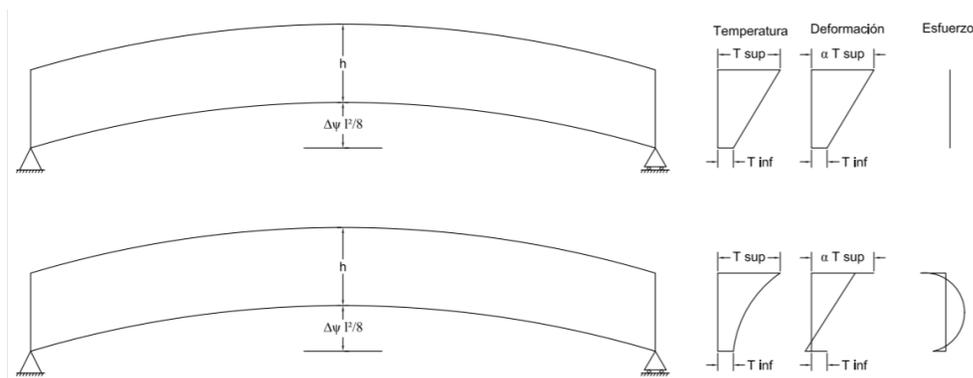
3.5.2. *Distribución de la temperatura*

A través de la sección de la superestructura la temperatura puede presentarse en forma de variación lineal o no lineal, para una estructura simplemente apoyada en el primer caso se van a

presentar deformaciones, pero no esfuerzos, a diferencia del segundo caso donde los esfuerzos serán proporcionales a la variación en la temperatura. En la Figura 6 se puede ver una interpretación de estos. Para el caso de un elemento perfectamente empotrado como lo son los casos de construcción monolítica se presentan solicitaciones de flexión y axiales en una distribución no lineal de la temperatura.

Figura 6

Distribución de temperatura, deformaciones y esfuerzos



Adaptado de: AGhali et al., (2012)

3.6. Métodos numéricos en la conducción de calor

El fenómeno de transferencia de calor está expresado en base a ecuaciones diferenciales, las cuales brindan una solución para las temperaturas que se encuentran en cada punto medio, en contra parte los métodos numéricos transforman el problema a un conjunto de n ecuaciones para n puntos intermedios.

Dentro de los métodos numéricos encontramos las diferencias finitas, elementos finitos, elementos de frontera y balance de energía. En este caso se describirá el primero de éstos.

3.6.1. Diferencias finitas

La base de este método es el remplazar las derivadas presentes en las ecuaciones diferencias por diferencias, la formulación corresponde a la ecuación 6. Esta expresión puede obtenerse también al expresarse la función $f(x)$ en torno al punto x como lo muestra la ecuación 7.

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (6)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \dots \quad (7)$$

Se debe tener en cuenta que se desprecian todos los términos excepto los dos primeros en el desarrollo lo cual conlleva a inexactitudes, lo cual es fácilmente deducible ya que el primer término es proporcional a Δx^2 y en consecuencia su error será también proporcional al mismo, de esta manera se establece que para un Δx^2 menor se reducirá el error (Yunus A. & Afshin J., 2014).

3.6.2. Diferencias finitas en régimen transitorio unidimensional

Para abordar el fenómeno durante el régimen transitorio es necesario realizar no sólo una diferenciación en la longitud del elemento sino también en los intervalos de tiempo, teniendo además un término adicional para denotar el cambio de energía térmica dentro del elemento, una expresión escrita de la fórmula analítica es:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Calor transferido hacia el} \\ \text{elemento desde todas las} \\ \text{superficies durante } \Delta t \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Calor generado} \\ \text{dentro del elemento} \\ \text{durante } \Delta t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Cambio en el contenido} \\ \text{de energía interna del} \\ \text{elemento durante } \Delta t \end{array} \right)$$

4. Estado del conocimiento

4.1. Producción de documentos

Durante los últimos años ha venido en aumento el interés por los efectos térmicos que se generan en los puentes, y no se quiere decir que antes no se tuviese en cuenta al fenómeno, sino que debido al desarrollo de los modelos matemáticos de cómputo se permite realizar un análisis complejo sin el enorme esfuerzo antes requerido, lo cual brinda una herramienta muy importante para este tipo de estudios. A su vez el hecho de haber experimentado una variedad de incidentes en este tipo de estructuras, junto con los cambios que se prevén en las temperaturas medias del clima se han hecho necesarios casos de estudio donde se replantee el comportamiento y los efectos de las cargas térmicas.

En consecuencia, se realizó una búsqueda en la base de datos Scopus con las siguientes palabras claves: (cita de la página web de la búsqueda). Se obtuvieron 882 documentos, de los cuales durante los últimos cinco años se han publicado en promedio de 65 documentos por año (Ver Figura 7). En la Figura 8 se presentan los países con mayor producción de documentos en esta línea de investigación y de la misma manera en la Figura 9 se presentan los autores que más han aportado en este campo.

Figura 7

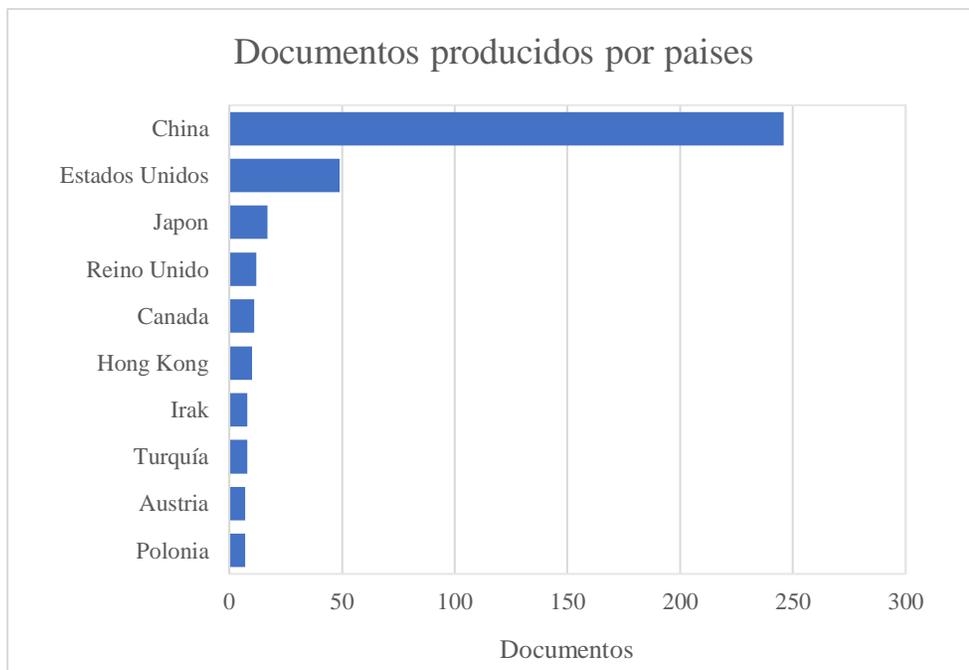
Producción de documentos por año



Fuente: Adaptado de Scopus - Document Search | Signed In, (n.d.)

Figura 8

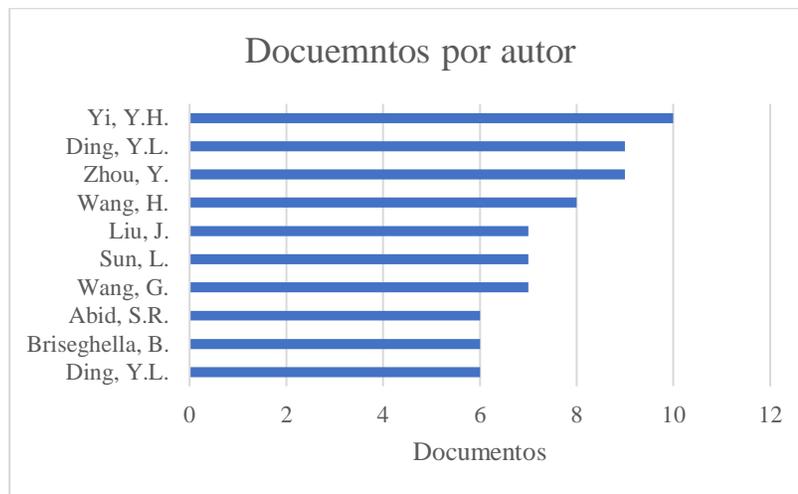
Primeros diez países en producción de documentos



Fuente: Adaptado de Scopus - Document Search | Signed In, (n.d.)

Figura 9

Diez (10) autores que más han producido documentos



Fuente: Adaptado de Scopus - Document Search | Signed In, (n.d.)

Además de los documentos referenciados en la búsqueda anterior también se tuvieron en cuenta una serie de libros y artículos que no habrían sido tenidos en cuenta por la fecha de su publicación, sin embargo, debido a su relevancia son incluidos, a saber, los desarrollados por Oskar Larsson Ivanov quien ha mantenido un enfoque especial en este campo.

4.2. Comportamiento de la temperatura en la estructura

Los códigos de diseño de puentes han considerado las cargas térmicas con un interés significativo, se sabe que estas cargas tienen un efecto significativo en estas estructuras al estar expuestas a ellas durante toda su vida útil. Teniendo en cuenta la significancia de estas cargas se hace relevante el conocer el comportamiento de la temperatura dentro de la estructura, ya que tiene una influencia directa en el comportamiento mecánico y su correspondiente desempeño de servicio. Por estas razones durante el último par de décadas se ha mantenido un esfuerzo significativo en entender mejor el fenómeno por medio de investigaciones tanto experimentales como numéricas (Abid et al., 2022).

Los gradientes térmicos están directamente relacionados con las cargas térmicas producidas por la interacción con el medio ambiente, coincidiendo en la madrugada las menores temperaturas del aire con los mayores gradientes térmicos negativos ya que la superficie superior presenta una pérdida de y sobre las horas de mayor radiación solar los mayores gradientes térmicos positivos (Abid, 2018).

Los estudios en campo se han encontrado con que los gradientes térmicos verticales son considerablemente mayores que los laterales, esto se atribuye a que la parte inferior se encuentra en una zona de sombra, lo cual hace que se caliente mucho menos a diferencia de la capa superior que se encuentra constantemente expuesta, por lo cual se genera un gradiente significativo, el cual puede llegar a estar en el orden de los 25°C en el caso que la radiación solar esté en su pico anual y se cuente con las condiciones climáticas que mantengan una baja o nula nubosidad. Estos resultados son respaldados con recientes investigaciones que relacionan linealmente los factores de transparencia atmosférica y absorción de radiación solar con la distribución de las temperaturas en el elemento (Peng & Shizhong, 2007) (Sheng et al., 2022).

A su vez la baja conductividad térmica del concreto hace que este se caliente lento y se enfríe lento, debido a lo cual los cambios superficiales de la temperatura no se ven reflejados en el corto plazo dentro del cuerpo de la estructura, produciendo de esta manera diferencias térmicas, las cuales por las mismas propiedades térmicas del concreto llegan a tener una profundidad efectiva de los efectos de la radiación solar cercana a los 30cm (Sheng et al., 2022) (Lu et al., 2021).

Según la literatura o el código de diseño consultado se pueden observar que se siguieren tanto gradientes con variaciones lineales como no lineales, aunque, a saber, los gradientes se presentan de manera no linear, La primer suposición se realizó en un principio mientras los investigadores estaban enfocados en obtener fórmulas de diseño y métodos de control para las

cargas térmicas, las últimas investigaciones están de acuerdo con la segunda suposición, observando distribuciones de la temperatura no lineales en la estructura (Abid et al., 2022).

Se tiene consenso en que la máxima temperatura está directamente relacionada con la temperatura del ambiente y la radiación solar incidente, esta última es una variable que tiene la mayor influencia dentro de los cambios térmicos de la estructura, esto se debe a que la capa asfáltica que posee la estructura absorbe en gran manera en la radiación solar y al ser tan delgada resulta en una conducción de calor significativa hacia el elemento de concreto (Abid et al., 2021) (Abid et al., 2022).

4.3. Efectos de la distribución de la temperatura en la estructura

Esfuerzos que produce la temperatura pueden dividirse generalmente en dos secciones, los llamados micro esfuerzos y macro esfuerzos. Los primeros hacen referencia a los producidos por diferencias en los coeficientes a lo largo de una gran masa de cemento, agregados y en los cristales resultantes de la reacción de cementación. Los macro esfuerzos hacen referencia a los producidos por el cambio de los gradientes térmicos en el elemento a través del tiempo. En este caso se tienen en cuenta sólo los efectos de macro esfuerzos (Pulyaev et al., 2019).

La variación de la temperatura dentro de la estructura causa una serie de desplazamientos de la misma si el gradiente térmico es lo suficientemente grande, es por esta razón que si los apoyos restringen tales movimientos se producirán esfuerzos internos que pueden llegar a producir el agrietamiento de la estructura, contribuyendo a la corrosión del refuerzo de acero. Junto a esto y en consecuencia de la dinámica de la variación térmica las contracciones y expansiones del cuerpo pueden resultar en el daño de otros componentes principales de la estructura (Larsson & Karoumi, 2011) (Krkoška & Moravčík, 2015).

Los esfuerzos internos de la estructura pueden atribuirse a las restricciones de los apoyos y a los propios esfuerzos de equilibrio, estos esfuerzos producirán un momento positivo siempre que el gradiente térmico sea a su vez positivo, generando sobre la estructura una carga en el mismo sentido que las de servicio, sin embargo, el riesgo de agrietamiento es menor a diferencia del caso en el que se presenta un gradiente negativo (Wang et al., 2021).

Según sea la composición de la estructura se deben tener en cuenta los esfuerzos térmicos para añadir refuerzo longitudinal para soportar los esfuerzos a tensión en el concreto y prevenir el agrietamiento del mismo (Lu et al., 2021).

Estas condiciones de esfuerzos son directamente relacionables con los gradientes térmicos, cuyos efectos cuando son sumados con los esfuerzos por servicio de cargas vivas y muertas pueden alcanzar magnitudes capaces de provocar la falla sobre el elemento (Wang et al., 2021).

Los esfuerzos internos que pueden producir las cargas térmicas son incluso comparables con los que se desarrollan por las cargas vivas o muertas durante su vida de servicio, afectando de manera significativa no sólo la durabilidad sino también la seguridad de la estructura al presentar esfuerzos concentrados, daños locales e inclusive severas deformaciones degradando la integridad de la estructura (Peng & Shizhong, 2007) (Abid et al., 2022).

Krkoška & Moravčík (2015), desarrollaron una investigación en la cual se realiza una comparación entre los esfuerzos a tensión y compresión que se dan en las fibras críticas en la superestructura de cinco puentes ubicados en Europa donde se analizan principalmente dos secciones: sobre el pilar y en el punto medio del claro.

En el primer caso se encontró que para las fibras superiores el esfuerzo de compresión que se presenta por un gradiente térmico positivo alcanza el 77% del presentado por las cargas a largo plazo (Peso propio, peso de la superestructura, cargas de pretensado, y cargas producidas por el

efecto de creep y retracción de fraguado). A su vez el esfuerzo de tensión que se produce por un gradiente térmico negativo sumado a el esfuerzo producido por la carga viva de tránsito alcanza el 99% del valor alcanzado por las cargas a largo plazo.

Para el caso de las fibras inferiores se halla que no son significantes los esfuerzos a compresión, con un 22% de la magnitud producida por las cargas a largo plazo, mientras que los esfuerzos a tensión se desarrollan en una magnitud que iguala a los producidos por las cargas vivas a compresión.

En el análisis que se realiza para la sección en el medio del claro se encuentra con que en las fibras superiores cuando se tiene un gradiente térmico positivo los esfuerzos a compresión superan a los producidos por la carga viva y las cargas a largo plazo en un factor de 5% y 74% respectivamente. Mientras que el esfuerzo a tensión con un gradiente negativo el esfuerzo a tensión alcanza el 81% de la máxima magnitud a compresión.

Para la misma sección en las fibras inferiores el esfuerzo a compresión no es significativo, alcanzando un valor del 18% del máximo esfuerzo presentado. Sin embargo, en el caso del esfuerzo a tensión si se suma con el producido por las cargas vivas se llega al 95% del esfuerzo de pretensado.

Las estructuras que ya se encuentran en funcionamiento tienen un grado de complejidad mayor cuando se quiere modelar los efectos térmicos debido a que las condiciones que llegan a afectar a la estructura son variables e incluso indeterminadas en algunos casos. A pesar de esto los estudios experimentales han demostrado que los cambios en la temperatura tienen un efecto primario en la deformación de puentes con grandes luces (Wang et al., 2021).

4.4. Importancia del monitoreo de la temperatura en la estructura

La razón por la cual se empezó a estudiar el comportamiento de la temperatura en los puentes, sus efectos y el monitoreo de estos se atribuye a la evidencia de los problemas que causaron en un gran número de puentes construidos en las últimas décadas, los cuales se le atribuyen al método de construcción utilizado, prefiriendo los apoyos restrictivos. Sin embargo, estos modelos del comportamiento térmicos no eran muy acertados debido a la calidad de los datos disponibles, a saber, tan sólo se tenía en cuenta los máximos y mínimos valores presentados durante el día. Una mayor disposición de los valores climáticos y la perfección de métodos computacionales han posible que los modelos sean más representativos (Larsson & Karoumi, 2011).

El reglamento colombiano de diseño de puentes CPP14 (MinTransporte et al., 2014) es una adaptación del código de diseño americano, se debe tener en cuenta que los valores obtenidos por medio de este código plantean la incertidumbre de su validez para el territorio colombiano ya que las diferencias en las condiciones climáticas regionales son significativas, lo cual puede resultar en el desconocimiento del efecto que pueda llegar a darse en ciertas regiones especiales al usar un código de diseño unificado, los cuales pueden además tener valores que pronto serían obsoletos, a saber, que se han establecido ciertos criterios desde hace al menos 50 años (Abid et al., 2022) (Larsson, 2015).

El estudio del comportamiento de la temperatura requiere de una investigación mucho más amplia, la cual no sólo proveerá mecanismo para el control de las estructuras sino también para los códigos de diseño. Sabiendo que monitoreo a largo plazo de las estructuras tiene un enfoque preventivo hacia el cuidado de las mismas, también sirve para el control de los parámetros de diseño, revelando en algunas investigaciones que los códigos deben ser actualizados y ajustados

con las recientes mediciones, las cuales encuentran que los cambios en la temperatura son mayores a los establecidos por algunos códigos internacionales (Sheng et al., 2022) (Wang et al., 2021).

El monitoreo a largo plazo de las estructuras tiene un enfoque preventivo hacia el cuidado de las mismas, aunque también sirve de verificación para los códigos de diseño, esto teniendo en cuenta que con el cambio de las temperaturas en los últimos años pueden estar perdiendo vigencia en cuanto a la fiabilidad de la representación real (Wang et al., 2021). Conociendo los efectos de las cargas térmicas sobre los puentes es necesario tener un control del comportamiento y la afectación de la estructura para evitar el posible deterioro de la misma antes de cumplir su vida útil de diseño (Abid, 2018).

El cambio climático representa un factor muy relevante en cuanto puede generar un amplio impacto en el comportamiento térmico en los puentes y su desempeño mecánico. Aunque la radiación solar no presente indicadores de tener un cambio significativo en su intensidad la temperatura del ambiente sí se plantea como uno de los factores con mayor dinamismo, sin embargo, las estimaciones en estos cambios tienen un alto grado de incertidumbre, por lo cual el monitoreo constante de la evolución de estos efectos se hace necesario (Larsson, 2015).

4.5. Monitoreo analítico

Si bien el fenómeno térmico ha sido tenido en cuenta durante varias décadas también se reconoce que los métodos de monitoreo no se han extendido completamente debido a la dificultad en el acceso a la tecnología, se sabe que en países europeos se desarrollan ejercicios de monitoreo de las estructuras con instrumentos tanto internos como externos a la estructura, sin embargo para aquellos casos en los cuales no se cuenta con los recursos para implementar este tipo de mediciones se han propuesto desarrollos no intrusivos que permiten tener una estimación con un alto grado de

fiabilidad del comportamiento térmico, esto inclusive sin el contar con datos tomados in situ para el análisis (Zhu & Meng, 2017).

Dentro del cálculo del comportamiento térmico se pueden identificar tres métodos de medición y estimación, métodos teóricos, experimentales y numéricos. De acuerdo a Zhu y Meng (2017) los últimos han tenido gran relevancia en donde se ha venido generando un perfeccionamiento en los modelos y los métodos. La literatura revisada por estos autores muestra un desarrollo de los modelos donde se tiene variedad de éstos, se tienen en cuenta modelos de distribución térmica en una, dos y tres dimensiones por medio de métodos analíticos como diferencias finitas y elementos finitos donde la tendencia es a usar un modelo simplificado de una y dos dimensiones.

Este tipo de análisis se ha visto favorecido con el desarrollo de software que ha permitido obtener un modelo complejo de los fenómenos que ocurren alrededor de la estructura. Investigaciones y modelos con este tipo de software han obtenido resultados que al compararse con las mediciones in situ han demostrado ser fiables al fenómeno que ocurre en el lugar, permitiendo establecer parámetros tanto para el diseño de nuevas estructuras y su comportamiento como para el análisis de los actuales efectos de las cargas térmicas sobre estructuras ya construidas (Abid et al., 2014).

Los modelos de estimación de la distribución de la temperatura se han centrado en el desarrollo de un método comprensivo analítico del fenómeno en un régimen transitorio. Además de tener en cuenta las diferencias climáticas regionales en cuanto a la radiación solar recibida, la temperatura y la velocidad del viento, así como también en el perfeccionamiento de los coeficientes de transferencia de calor que afecten la conductividad y la convección (Lu et al., 2021).

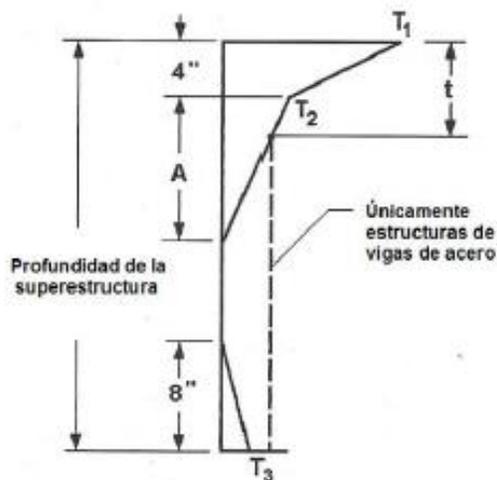
5. Metodología

Para el estudio del comportamiento de la temperatura dentro de la superestructura de un puente se pueden realizar simplificaciones que brindan una mayor facilidad en el cálculo del fenómeno manteniendo una fiabilidad en los resultados si se comparan con los datos in situ. La simplificación más notoria se realiza en cuanto a la geometría del elemento a analizar, a saber, que la distribución de la temperatura se da principalmente a través de la placa, siendo generalmente despreciable en las otras dos dimensiones, resultando en el modelado del fenómeno a uno de tipo unidimensional (Peng & Shizhong, 2007).

Esta reducción se toma en cuenta en el código de diseño de puentes colombiano CPP14 el cual en cuanto habla de la distribución de la temperatura en los puentes tan sólo tiene en cuenta la distribución en el eje vertical simplificándolo además en un modelo de variación lineal como se ve en la Figura 10.

Figura 10

Gradiente Positivo de Temperatura Vertical en Superestructuras de Concreto y de Acero



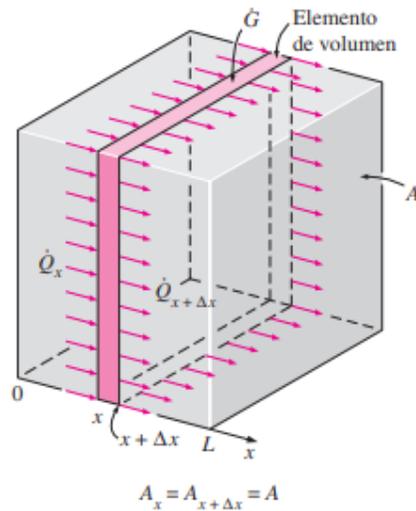
Fuente: MinTransporte et al., (2014)

Este modelo unidimensional es comparable con el propuesto por Yunus A. & Afshin J., (2014) mientras se define el flujo a través de un elemento de una pared plana. La Figura 11 es una

ilustración de este modelo. Para el desarrollo del proyecto se tuvo en cuenta la complejidad que significa el desarrollar un análisis del fenómeno térmico teniendo en cuenta la gran cantidad de variables por la generalidad del mismo.

Figura 11

Conducción unidimensional de calor a través de un elemento en una pared plana grande.



Fuente: Yunus A. & Afshin J., (2014)

5.1. Identificación de variables independientes

Para la definición del fenómeno se realiza un ajuste de las diferentes variables medioambientales junto con las características físicas que dependen de las mismas.

5.1.1. Temperatura ambiente

La temperatura del aire es necesaria para conocer la transferencia de calor por convección entre el ambiente y el elemento como en sentido contrario, así también para estimar el comportamiento que se da por irradiación.

Esta variable al tener un comportamiento oscilatorio es definida por medio de una función periódica, la cual se afectará por medio de coeficientes para ajustar su modelado de una manera más precisa a las condiciones naturales.

5.1.2. Radiación solar

Siendo una de las variables con más impacto para las estructuras tiene una importancia considerable, se realiza, a su vez una simplificación a la misma en cuanto al ángulo de incidencia se refiere.

Esta variable tiene un comportamiento parabólico durante el día con cambios aleatorios. Para su modelado se opta por definirse dentro de una función periódica igualmente afectada por coeficientes que permitan ajustar su comportamiento, a su vez se define a trozos, lo cual refleja su comportamiento intermitente en los ciclos diarios.

5.1.3. Velocidad del viento

Como última variable ambiental a tener en cuenta se modela la velocidad del viento, si bien esto influye en la sensación térmica lo que realmente se quiere estudiar es su inferencia en el proceso de convección, sabiendo que de ésta depende el coeficiente de convección.

5.1.4. Coeficiente de convección

Teniendo en cuenta que se presenta dentro del fenómeno en función de la velocidad del viento y en algunos recursos literarios también en función de la temperatura del ambiente es considerado variable a lo largo del proceso, el cual dependerá de forma directa de las variables mencionadas (Jiji, 2009).

5.2. Modelo numérico desarrollado

El desarrollo del modelo se hace en base al control de la energía en elemento volumen durante el intervalo de tiempo según lo propone Bergman et al., (2016).

Se plantea como: la suma del calor transferido al elemento junto con el calor generado por el mismo durante el intervalo de tiempo ha de ser igual al cambio de la energía dentro del elemento volumen, tal como se plantea en la ecuación 8.

$$\Delta t * \sum \dot{Q} + \Delta t * \dot{E}_{generado} = \Delta E_{elemento}. \quad (8)$$

Sabiendo que el cambio de la energía del elemento se define según la ecuación 9.

$$\Delta E_{elemento} = \rho V_{elemento} c_p \Delta T \quad (9)$$

Se puede reorganizar la expresión llegando a la ecuación 10.

$$\sum \dot{Q} + \dot{E}_{generado} = \rho V_{elemento} c_p \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (10)$$

El último término de la ecuación define el cambio de la temperatura con respecto al tiempo, el cual es equivalente a la derivada parcial de los mismos, sin embargo, teniendo en cuenta la aproximación hecha por el método de las diferencias finitas la expresión se puede re definir dando lugar a la ecuación 11.

$$\sum \dot{Q} + \dot{E}_{generado} = \rho V_{elemento} c_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (11)$$

Conociendo que el proceso se lleva a cabo en un sistema transitorio el flujo de calor estará en función del momento en el cual se evalúe, por cual se hace necesario introducir superíndices que indiquen la situación, al desarrollarse en función del método explícito se obtiene la expresión general, descrita en la ecuación 12, para el desarrollo de las ecuaciones que se usarán durante la programación, la cual es coincidente con la propuesta por Yunus A. & Afshin J., (2014).

$$\sum \dot{Q}^i + \dot{E}_{generado}^i = \rho V_{elemento} c_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (12)$$

Una vez obtenida la expresión general con la cual se va a trabajar es necesario reconocer las expresiones que se le darán a cada uno de los fenómenos propuestos de transferencia de calor, cada uno de los cuales estará relacionado con las variables modeladas que antes se mencionaron.

5.3. Desarrollo y despeje de las ecuaciones

Para el desarrollo propuesto se sabe que no existe generación de calor por el elemento, con lo cual tan sólo se tendrán en cuenta los procesos de transferencia de calor descritos, los cuales son: Convección, conducción, radiación e irradiación.

Los fenómenos citados se han descrito por medio de las ecuaciones 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

5.3.1. Ecuación nodo superior

El punto superior del elemento estará sujeto a los cuatro mecanismos mencionados, de manera que la ecuación 13 describe el fenómeno para este punto.

$$hA(T_{\infty}^i - T_0^i) + kA\dot{q}^i + kA\frac{T_1^i - T_0^i}{\Delta x} + \varepsilon\sigma A(T_0^{i4} - T_{\infty}^{i4}) = \rho A\frac{\Delta x}{2}C_p\frac{T_0^{i+1} - T_0^i}{\Delta t} \quad (13)$$

Para simplificar la notación, se reescribe la ecuación en función de la efusividad térmica y el número discreto de Fourier, los cuales corresponden a la ecuación 14 y 15 respectivamente.

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (14)$$

$$\tau = \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (15)$$

Para el despeje se usa el software provisto por Texas Instruments con su sistema CAS, de manera que la ecuación 13 se reescribe en la ecuación 16.

$$T_0^{i+1} = \frac{2h(T_{\infty}^i - T_0^i)\tau\Delta x}{k} + \frac{2k\dot{q}^i\tau\Delta x}{k} + 2\tau(T_1^i - T_0^i) + \frac{2\varepsilon\sigma(T_0^{i4} - T_{\infty}^{i4})\tau\Delta x}{k} + T_0^i \quad (16)$$

5.3.2. Ecuación nodos intermedios

Los nodos intermedios tan sólo estarán sujetos al mecanismo de conducción, remplazando en la ecuación 17 se llega a la ecuación descrita por Yunus A. & Afshin J., (2014).

$$kA\frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta x} + kA\frac{T_{n+1}^i - T_n^i}{\Delta x} = \rho A\Delta x C_p\frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \quad (17)$$

Simplificando y despejando se obtiene la ecuación 18 que describe el fenómeno para los nodos intermedios.

$$T_n^{i+1} = \tau(T_{n-1}^i + T_{n+1}^i) + (1 - 2\tau)T_n^i \quad (18)$$

5.3.3. Ecuación nodo inferior

Punto inferior del elemento no estará expuesto a la radiación, por lo cual la ecuación 13 se reducirá a:

$$hA(T_\infty^i - T_n^i) + kA \frac{T_{n-1}^i - T_n^i}{\Delta x} + \varepsilon\sigma A (T_n^{i4} - T_\infty^{i4}) = \rho A \frac{\Delta x}{2} C_p \frac{T_n^{i+1} - T_n^i}{\Delta t} \quad (19)$$

La cual una vez se reescribe y despeja se transforma en:

$$T_n^{i+1} = \frac{2h(T_\infty^i - T_n^i)\tau\Delta x}{k} + 2\tau(T_{n-1}^i - T_n^i) + \frac{2\varepsilon\sigma(T_n^{i4} - T_\infty^{i4})\tau\Delta x}{k} + T_n^i \quad (20)$$

5.4. Construcción algoritmo en Python

Con los fenómenos definidos, las variables y las ecuaciones formuladas se plantea desarrollar un algoritmo que use este método numérico para resolver las ecuaciones que describen el fenómeno, la tarea se desarrolla por medio de la programación en el lenguaje de Python debido a la familiaridad de su lenguaje y su facilidad en la exportación e importación de datos.

Para el desarrollo se utilizaron las librerías de math, numPy y pandas, las dos primeras brindan herramientas para realizar funciones matemáticas y almacenar o analizar gran volumen de datos, por su parte la librería pandas permite exportar los datos obtenidos hacia otro documento en formato xlsx o csv (*Math — Funciones Matemáticas — Documentación de Python - 3.10.4*, n.d.; *NumPy*, n.d.; *Pandas - Python Data Analysis Library*, n.d.).

5.5. Verificaciones metodológicas del algoritmo

A continuación, se plantean una serie de problemas encontrados en la literatura consultada los cuales se desarrollarán para verificar que tanto método como el lenguaje de programación y el

proceso de exportación de los datos es correcto y brinda resultados coherentes con el desarrollo encontrado.

5.5.1. Problema 5-86. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3rd edition

El enunciado del problema dice que:

Un plato de uranio inicialmente con temperatura uniforme es aislado en un extremo y sometido a convección en el otro. Se debe obtener la formulación por medio de diferencias finitas y la temperatura en los nodos luego de 5 minutos.

Las propiedades y datos del problema son:

$$\text{Conductividad: } k = 28 \frac{W}{m^{\circ}C}$$

$$\text{Difusividad } \alpha = 12.5 * 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$\text{Diferencia distancia nodos } \Delta x = 0.02m$$

$$\text{Intervalos tiempo } \Delta t = 15s$$

$$\text{Generación de calor } \dot{e} = 10^6 \frac{W}{m^3}$$

$$\text{Coeficiente convección } h = 35 \frac{W}{m^2}$$

$$\text{Temperatura ambiente } T_{\infty} = 20^{\circ}C$$

5.5.2. Problema 5-88. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3rd edition

El enunciado del problema dice que:

Se estudia la transferencia de calor pasiva a una casa por la radiación solar, se debe determinar la distribución de la temperatura en la pared en un intervalo de 12h durante el primer y el segundo día.

La temperatura del ambiente y la radiación solar está dada por la tabla 1.

Tabla 1

Temperatura y radiación solar durante un día

| Hora del día | Temperatura del ambiente (°C) | Radiación solar (W/m ²) |
|--------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 7 am - 10 am | 0 | 375 |
| 10 am - 1 pm | 4 | 750 |
| 1 pm - 4 pm | 6 | 580 |
| 4 pm - 7 pm | 1 | 95 |
| 7 pm - 10 pm | -2 | 0 |
| 10 pm - 1 am | -3 | 0 |
| 1 am - 4 am | -4 | 0 |
| 4 am - 7 am | -4 | 0 |

Fuente: Adaptado de Yunus A. & Afshin J., (2007)

Así mismo las propiedades y datos del problema son:

Conductividad: $k = 0.7 \frac{W}{m^{\circ}C}$

Difusividad $\alpha = 0.44 * 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

Coefficiente de absorción de radiación $k = 0.76$

Diferencia distancia nodos $\Delta x = 0.05m$

Intervalos de tiempo $\Delta t = 900s$

La temperatura inicial del muro se distribuye linealmente con 20°C al interior del muro y 0°C al exterior.

5.5.3. Ejemplo 5.12. *Fundamentals of heat and mass transfer-Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, David P. De Witt.*

El enunciado del problema dice que:

Una delgada placa de cobre a una temperatura uniforme de 20°C se expone repentinamente a una radiación constante de $3 * 10^5 \text{ W/m}^2$. Determine la temperatura de un punto que está ubicado a 150mm de la superficie.

Las propiedades y datos del problema son:

$$\text{Conductividad: } k = 401 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

$$\text{Difusividad } \alpha = 117 * 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\text{Diferencias distancia nodos } \Delta x = 0.075 \text{m}$$

$$\text{Intervalos de tiempo } \Delta t = 24 \text{s}$$

5.6. Aplicación técnica

Para la aplicación técnica del algoritmo se eligieron dos puentes, cada uno ubicado en una ciudad con distintas condiciones climáticas a los cuales se les ha realizado un monitoreo de la temperatura superficial en la placa. A partir de los datos existentes se realiza un análisis comparativo para los valores tomados in situ de la estructura y los calculados por medio del modelo desarrollado. Para desarrollar el análisis se hace necesario el desarrollo de un modelo climático que simule las condiciones de la temperatura del ambiente junto con la radiación solar incidente para cada intervalo del tiempo. Para el desarrollo del modelado de las condiciones climáticas se hacen una serie de suposiciones que simplifican el análisis y la programación de las mismas.

5.6.1. Puente de acceso a la terminal uno del Aeropuerto Internacional el Dorado-Bogotá

Como resultado de la investigación realizada por Rozo Grimaldos, (2018) se cuenta con los datos de la temperatura de la placa para el puente de acceso a la terminal uno del Aeropuerto Internacional el Dorado en la ciudad de Bogotá en el intervalo del 4 de septiembre de 2018 y el 13 de octubre de 2018 de manera intermitente. Los datos se distribuyen en dos franjas horarias, una

en las horas de la mañana comprendidas entre las 5:30 y las 6:30, y otra en horas de la tarde entre las 12:30 y las 14:30.

Los datos se verifican y clasifican según la fecha y la hora de la toma a fin de realizar la comparación de éstos con una de las iteraciones diarias cercanas. Como resultado de la recolección de los datos y su análisis se obtienen los datos de la temperaturas máximas y mínimas de la temperatura ambiente, la radiación solar máxima, la velocidad del viento promedio y la temperatura tanto superior como inferior de la placa del puente. Estos resultados se muestran de la tabla 2 a la tabla 6.

Tabla 2

Datos ambientales para el puente de acceso al Aeropuerto Internacional el Dorado

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Radiación solar incidente (W/m ²) | Velocidad del viento promedio (m/s) |
|-----------|-------------------------|-------------------------|---|-------------------------------------|
| 9/4/2018 | 20 | 10.8 | 887 | 3.5 |
| 9/6/2018 | 17 | 10.9 | 544 | 2.1 |
| 9/7/2018 | 17 | 10.6 | 395 | 2.0 |
| 9/8/2018 | 19 | 10.9 | 727 | 2.7 |
| 9/10/2018 | 19 | 7.6 | 603 | 2.5 |
| 9/11/2018 | 18 | 10 | 492 | 2.0 |
| 9/12/2018 | 19 | 9.1 | 592 | 1.9 |
| 9/14/2018 | 19 | 8.2 | 904 | 2.6 |
| 9/15/2018 | 19.1 | 10.5 | 637 | 2.3 |
| 9/17/2018 | 21 | 6 | 856 | 2.9 |
| 9/18/2018 | 20 | 10 | 598 | 3.3 |
| 9/19/2018 | 20.8 | 6.6 | 912 | 3.6 |
| 9/20/2018 | 21 | 9.5 | 939 | 4.6 |
| 9/21/2018 | 21 | 4.5 | 915 | 3.0 |
| 9/22/2018 | 21 | 9.8 | 726 | 2.6 |

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Radiación solar incidente (W/m ²) | Velocidad del viento promedio (m/s) |
|------------|-------------------------|-------------------------|---|-------------------------------------|
| 9/24/2018 | 19 | 16 | 636 | 4.0 |
| 9/25/2018 | 19.7 | 7 | 531 | 2.9 |
| 9/26/2018 | 19 | 7.7 | 740 | 2.6 |
| 9/27/2018 | 18.9 | 10.6 | 579 | 2.5 |
| 9/28/2018 | 21 | 6 | 677 | 3.0 |
| 9/29/2018 | 22 | 9.6 | 1054 | 3.6 |
| 10/1/2018 | 22.3 | 8 | 601 | 2.7 |
| 10/2/2018 | 22 | 9 | 888 | 2.9 |
| 10/3/2018 | 22.6 | 7.5 | 750 | 2.4 |
| 10/4/2018 | 20.3 | 11 | 669 | 2.0 |
| 10/5/2018 | 18.4 | 9 | 693 | 2.4 |
| 10/6/2018 | 19.5 | 11.6 | 631 | 1.8 |
| 10/8/2018 | 21 | 9.9 | 804 | 3.0 |
| 10/9/2018 | 21.2 | 9.9 | 790 | 2.6 |
| 10/11/2018 | 19 | 11 | 749 | 1.9 |
| 10/12/2018 | 19.1 | 9.3 | 927 | 2.2 |
| 10/13/2018 | 20 | 9.8 | 892 | 2.3 |

Fuente: Adaptado de Weather History & Data Archive | Weather Underground, (n.d.)

Tabla 3

Temperatura en la placa superior en la mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|-----------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 9/4/2018 | 11.0 | 10.0 | 10.5 |
| 9/6/2018 | 12.7 | 12.2 | 12.6 |
| 9/7/2018 | 12.0 | 11.2 | 11.7 |
| 9/8/2018 | 11.1 | 10.5 | 10.8 |
| 9/10/2018 | 10.3 | 8.8 | 9.6 |
| 9/11/2018 | 8.4 | 7.2 | 7.8 |

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 9/12/2018 | 10.5 | 9.5 | 10.1 |
| 9/14/2018 | 7.8 | 6.2 | 7.2 |
| 9/17/2018 | 6.1 | 3.9 | 5.1 |
| 9/19/2018 | 9.4 | 7.5 | 8.5 |
| 9/20/2018 | 12.7 | 11.3 | 12.0 |
| 9/24/2018 | 16.3 | 14.1 | 15.5 |
| 9/27/2018 | 13.9 | 12.6 | 13.3 |
| 10/1/2018 | 13.9 | 10.9 | 12.2 |
| 10/2/2018 | 10.1 | 8.3 | 9.4 |
| 10/4/2018 | 12.3 | 10.8 | 11.5 |
| 10/6/2018 | 11.4 | 10.4 | 10.9 |
| 10/12/2018 | 10.5 | 9.2 | 9.8 |
| 10/13/2018 | 14.7 | 13.7 | 14.3 |

Fuente: Adaptado de Rozo Grimaldos, (2018)

Tabla 4

Temperatura en la placa superior en la tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|-----------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 9/4/2018 | 40.6 | 37.7 | 39.0 |
| 9/6/2018 | 26.6 | 24.9 | 25.9 |
| 9/7/2018 | 17.1 | 14.5 | 15.7 |
| 9/8/2018 | 43.2 | 35.4 | 41.3 |
| 9/10/2018 | 33.7 | 32.2 | 32.8 |
| 9/11/2018 | 19.7 | 19.0 | 19.3 |
| 9/12/2018 | 22.3 | 21.4 | 22.0 |
| 9/14/2018 | 30.3 | 27.9 | 29.2 |
| 9/17/2018 | 38.4 | 35.7 | 37.3 |
| 9/19/2018 | 33.0 | 22.9 | 31.3 |

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 9/20/2018 | 52.7 | 47.9 | 50.3 |
| 9/22/2018 | 24.5 | 23.1 | 23.8 |
| 9/24/2018 | 35.5 | 32.9 | 33.9 |
| 9/27/2018 | 29.5 | 27.4 | 28.4 |
| 9/29/2018 | 52.5 | 48.3 | 50.1 |
| 10/1/2018 | 26.7 | 25.4 | 26.0 |
| 10/3/2018 | 22.5 | 19.2 | 20.2 |
| 10/4/2018 | 30.7 | 28.9 | 29.8 |
| 10/6/2018 | 25.2 | 19.4 | 24.0 |
| 10/8/2018 | 31.0 | 25.6 | 29.8 |
| 10/9/2018 | 25.7 | 23.1 | 25.2 |
| 10/11/2018 | 40.9 | 38.9 | 40.2 |
| 10/13/2018 | 26.1 | 24.4 | 25.3 |

Fuente: Adaptado de Rozo Grimaldos, (2018)

Tabla 5

Temperatura en la placa inferior en la mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|-----------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 9/6/2018 | 16.0 | 14.5 | 15.5 |
| 9/7/2018 | 13.7 | 12.2 | 13.0 |
| 9/8/2018 | 14.9 | 13.3 | 14.2 |
| 9/10/2018 | 15.6 | 13.4 | 14.9 |
| 9/11/2018 | 15.8 | 14.8 | 15.5 |
| 9/12/2018 | 15.4 | 13.3 | 14.8 |
| 9/14/2018 | 14.8 | 13.0 | 14.3 |
| 9/17/2018 | 14.5 | 12.9 | 13.8 |
| 9/19/2018 | 16.2 | 14.9 | 15.8 |
| 9/20/2018 | 15.6 | 13.9 | 15.0 |

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 9/24/2018 | 17.0 | 15.1 | 16.3 |
| 9/27/2018 | 17.2 | 15.7 | 16.6 |
| 10/1/2018 | 19.2 | 16.8 | 18.3 |
| 10/2/2018 | 15.8 | 13.9 | 15.1 |
| 10/4/2018 | 17.3 | 14.3 | 16.2 |
| 10/6/2018 | 14.6 | 12.7 | 13.6 |
| 10/12/2018 | 14.2 | 11.7 | 13.3 |
| 10/13/2018 | 16.6 | 15.3 | 16.3 |

Fuente: Adaptado de Rozo Grimaldos, (2018)

Tabla 6

Temperatura en la placa inferior en la tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|-----------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 9/4/2018 | 17.9 | 17.4 | 17.6 |
| 9/6/2018 | 16.7 | 15.8 | 16.1 |
| 9/7/2018 | 15.9 | 14.7 | 15.3 |
| 9/8/2018 | 17.5 | 17.2 | 17.4 |
| 9/10/2018 | 18.9 | 18.2 | 18.4 |
| 9/11/2018 | 19.0 | 18.5 | 18.6 |
| 9/12/2018 | 17.1 | 16.2 | 16.4 |
| 9/14/2018 | 16.8 | 15.5 | 15.9 |
| 9/17/2018 | 20.9 | 19.4 | 20.1 |
| 9/19/2018 | 18.6 | 18.2 | 18.4 |
| 9/20/2018 | 21.9 | 20.5 | 21.6 |
| 9/22/2018 | 19.1 | 17.9 | 18.5 |
| 9/24/2018 | 19.8 | 18.9 | 19.4 |
| 9/27/2018 | 18.2 | 17.7 | 17.9 |
| 9/29/2018 | 23.6 | 21.9 | 22.8 |

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Temperatura promedio (°C) |
|------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 10/1/2018 | 20.8 | 20.1 | 20.4 |
| 10/6/2018 | 16.9 | 15.7 | 16.3 |
| 10/8/2018 | 20.2 | 19.1 | 19.4 |
| 10/9/2018 | 17.9 | 17.2 | 17.5 |
| 10/11/2018 | 16.1 | 15.2 | 15.7 |
| 10/13/2018 | 17.9 | 17.3 | 17.6 |

Fuente: Adaptado de Rozo Grimaldos, (2018)

5.6.2. *Puente tizón-Neiva*

Como resultado de la investigación realizada por Patarroyo Querales & Meneses Real, (2020) se cuenta con los datos de la temperatura de la placa para el puente Tizón en la ciudad de Neiva en el intervalo del 12 de diciembre de 2019 y el 6 de enero de 2020. Los datos se distribuyen en dos franjas horarias, una en las horas de la mañana comprendidas entre las 6:15 y las 7:15, y otra en horas de la tarde entre las 12:00 y las 14:20.

Los datos se verifican y clasifican según la fecha y la hora de la toma a fin de realizar la comparación de éstos con una de las iteraciones diarias cercanas.

Como resultado de la recolección de los datos y su análisis se obtienen los datos de la temperaturas máximas y mínimas de la temperatura ambiente, la radiación solar máxima, la velocidad del viento promedio y la temperatura tanto superior como inferior de la placa del puente. Estos resultados se muestran de la tabla 7 a la tabla 9.

Tabla 7

Datos ambientales puente Tizón-Neiva

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Radiación solar incidente (W/m ²) | Velocidad del viento promedio (m/s) |
|------------|----------------------------|----------------------------|--|--|
| 12/12/2019 | 31.6 | 22 | 538 | 1.5 |

| Fecha | Temperatura máxima (°C) | Temperatura mínima (°C) | Radiación solar incidente (W/m ²) | Velocidad del viento promedio (m/s) |
|------------|-------------------------|-------------------------|---|-------------------------------------|
| 12/13/2019 | 32.6 | 22.4 | 719.5 | 1.7 |
| 12/14/2019 | 28.4 | 21.8 | 349.375 | 1.0 |
| 12/15/2019 | 30 | 21.7 | 806.75 | 0.9 |
| 12/16/2019 | 32.6 | 23 | 530.5 | 1.3 |
| 12/17/2019 | 33.8 | 23.6 | 465.625 | 1.3 |
| 12/18/2019 | 32.4 | 24.3 | 781.75 | 1.2 |
| 12/19/2019 | 32.4 | 23.8 | 851.75 | 1.4 |
| 12/20/2019 | 30.5 | 23.8 | 616.25 | 1.7 |
| 12/21/2019 | 32.5 | 23.6 | 879.75 | 1.4 |
| 12/22/2019 | 33.3 | 23.6 | 845 | 1.6 |
| 12/23/2019 | 33.4 | 24.4 | 880.75 | 1.4 |
| 12/24/2019 | 34 | 24.9 | 711.75 | 1.5 |
| 12/25/2019 | 33.7 | 24.9 | 489.125 | 1.3 |
| 12/26/2019 | 34 | 24.2 | 847.75 | 2.0 |
| 12/27/2019 | 31.1 | 24.2 | 747.25 | 1.4 |
| 12/28/2019 | 33 | 22.6 | 609.25 | 1.3 |
| 12/29/2019 | 34.1 | 22.4 | 781.25 | 1.6 |
| 12/30/2019 | 35 | 23.7 | 780.75 | 1.6 |
| 12/31/2019 | 32 | 23 | 606.75 | 1.6 |
| 1/1/2020 | 33.3 | 23.2 | 871 | 1.7 |
| 1/2/2020 | 34.2 | 24.2 | 885.25 | 1.4 |
| 1/3/2020 | 35.3 | 24 | 992.25 | 1.3 |
| 1/4/2020 | 34.5 | 24 | 915.5 | 1.3 |
| 1/5/2020 | 33.9 | 23.7 | 943 | 1.7 |
| 1/6/2020 | 33.4 | 23.7 | 814.5 | 1.4 |

Fuente: Adaptado de Weather History & Data Archive | Weather Underground, (n.d.)

Tabla 8*Temperatura placa superior puente Tizón*

| Fecha | Temperatura en la mañana (°C) | Temperatura en la tarde (°C) |
|------------|-------------------------------|------------------------------|
| 12/12/2019 | 25.0 | 46.4 |
| 12/13/2019 | 27.1 | 53.5 |
| 12/15/2019 | 24.1 | 56.6 |
| 12/16/2019 | 26.3 | 48.4 |
| 12/17/2019 | 26.5 | 45.8 |
| 12/18/2019 | 27.4 | 57.0 |
| 12/19/2019 | 27.5 | 58.5 |
| 12/20/2019 | 27.4 | 48.8 |
| 12/21/2019 | 26.6 | 58.7 |
| 12/22/2019 | 27.1 | 57.7 |
| 12/23/2019 | 27.8 | 60.7 |
| 12/24/2019 | 28.2 | 56.2 |
| 12/25/2019 | 27.7 | 48.7 |
| 12/26/2019 | 27.8 | 57.6 |
| 12/27/2019 | 27.2 | 54.8 |
| 12/28/2019 | 26.2 | 50.9 |
| 12/29/2019 | 25.3 | 56.6 |
| 12/30/2019 | 27.5 | 57.6 |
| 12/31/2019 | 26.2 | 50.0 |
| 1/1/2020 | 26.2 | 58.8 |
| 1/2/2020 | 29.1 | 60.6 |
| 1/3/2020 | 28.8 | 66.6 |
| 1/4/2020 | 28.2 | 63.5 |
| 1/5/2020 | 27.2 | 60.7 |
| 1/6/2020 | 27.2 | 57.6 |

Fuente: Adaptado de Patarroyo Querales & Meneses Real, (2020)

Tabla 9*Temperatura placa inferior puente Tizón*

| Fecha | Temperatura en la mañana (°C) | Temperatura en la tarde (°C) |
|------------|-------------------------------|------------------------------|
| 12/12/2019 | 30.4 | |
| 12/13/2019 | 31.8 | 31.1 |
| 12/15/2019 | 29.6 | 32.25 |
| 12/16/2019 | 28.1 | 33.4 |
| 12/17/2019 | | |
| 12/18/2019 | | |
| 12/19/2019 | | |
| 12/20/2019 | 31.6 | 32.63 |
| 12/21/2019 | 28 | 31.33 |
| 12/22/2019 | 27.4 | 31.8 |
| 12/23/2019 | 31.6 | 35.1 |
| 12/24/2019 | 30.9 | 33.8 |
| 12/25/2019 | | 33.45 |
| 12/26/2019 | 34 | 34.94 |
| 12/27/2019 | | 33.06 |
| 12/28/2019 | 27.7 | 34.27 |
| 12/29/2019 | 30.43 | 33.7 |
| 12/30/2019 | 31.9 | 34.68 |
| 12/31/2019 | 31.37 | 32.35 |
| 1/1/2020 | 32.11 | 32.2 |
| 1/2/2020 | 32.32 | 35.67 |
| 1/3/2020 | 32.75 | 36.4 |
| 1/4/2020 | 32 | 35 |
| 1/5/2020 | 32.73 | 36.7 |
| 1/6/2020 | 33.12 | 36.5 |

Fuente: Adaptado de Patarroyo Querales & Meneses Real, (2020)

5.6.3. Modelado temperatura ambiente

Si bien el modelado de la temperatura ambiente es muy complejo debido a la incertidumbre de su comportamiento debido a la gran cantidad de variables incidentes, la simplificación se realiza por medio de una función sinusoidal dividida en dos partes.

La ecuación 21 describe la temperatura en su fase de aumento durante la mañana, como se ve en la se afecta por una potencia, esto con el fin de mostrar un crecimiento que se ajusta de manera coherente con las condiciones naturales.

$$T_{\infty} = (T_{m\acute{a}x}^d - T_{m\acute{i}n}^d) * \left(\sin \left(\frac{90}{(htm-5) * \left(\frac{3600}{dt} \right)} * \frac{\pi}{180} \right) \right)^{cs} + T_{m\acute{i}n}^d \quad (21)$$

Donde:

$T_{m\acute{a}x}^d$: Temperatura máxima para un día.

$T_{m\acute{i}n}^d$: Temperatura mínima para un día.

htm : Hora del día donde se tendrá la temperatura máxima.

dt : Intervalo de tiempo.

cs : Coeficiente exponencial del seno

La ecuación 22 describe la temperatura en su fase de disminución durante la tarde, igualmente se afecta por un coeficiente de ajuste, además de esto con el fin de dar continuidad de un día a otro se tiene en cuenta la temperatura mínima para el día siguiente en la formulación.

$$T_{\infty} = (T_{m\acute{a}x}^d - T_{m\acute{i}n}^{d+1}) * \left(\sin \left(\frac{90}{(24-(htm-5)) * \left(\frac{3600}{dt} \right)} * \left(t - \left((htm - 5) * \frac{3600}{dt} \right) \right) * \frac{\pi}{180} \right) \right)^{cs} + T_{m\acute{i}n}^{d+1} \quad (22)$$

Donde:

$T_{m\acute{a}x}^d$: Temperatura máxima para un día.

T_{min}^{d+1} : Temperatura mínima para el día siguiente.

htm : Hora del día donde se tendrá la temperatura máxima.

dt : Intervalo de tiempo.

cs : Coeficiente exponencial del seno.

Estas dos funciones se aplican por medio de una función condicional que evalúa la hora del día en la cual se está analizando.

5.6.4. Modelado radiación solar

El modelado de la radiación solar diaria se realiza por medio de una función definida en dos partes con el fin de facilitar la programación, esta simplificación se realiza combinando la función seno y coseno para las distintas partes del día.

La ecuación 23 describe la radiación solar incidente durante la mañana hasta la hora de máxima radiación solar.

$$\dot{q} = \dot{q}_{m\acute{a}x}^d * \sin\left(\left(\frac{90}{(hrm-5)*3600/dt}\right) * t * \frac{\pi}{180}\right)^2 \quad (23)$$

Donde:

$\dot{q}_{m\acute{a}x}^d$: Radiación solar máxima del día.

hrm : Hora de radiación solar máxima.

dt : Intervalo de tiempo.

t : Iteración del día.

La ecuación 24 describe la radiación solar incidente durante la tarde hasta la hora del ocaso.

$$\dot{q} = \dot{q}_{m\acute{a}x}^d * \cos\left(\left(\frac{90}{(hr-(hrm-5))*3600/dt}\right) * (t - (hrm - 5) * 3600/dt) * \frac{\pi}{180}\right)^2 \quad (24)$$

Donde:

$\dot{q}_{m\acute{a}x}^d$: Radiación solar máxima del día.

hrm: Hora de radiación solar máxima.

hr: Horas de radiación solar diarias.

dt: Intervalo de tiempo.

t: Iteración del día.

Estas dos funciones se aplican por medio de una función condicional que evalúa la hora del día en la cual se está analizando, de esta manera se asignan los valores nulos para las horas de la noche y madrugada donde no existe la radiación solar.

5.6.5. *Propiedades del modelo y suposiciones*

Las propiedades térmicas y geométricas definidas para el asfalto y el concreto que fueron usadas para el modelo se muestran en las tablas 10 y 11 a continuación.

Tabla 10

Propiedades térmicas y geométricas de la capa asfáltica

| Propiedad | Valor |
|--|---------------------------|
| Conductividad térmica del asfalto | 1 (W/m°C) |
| Calor específico del asfalto | 920 (J/kg°C) |
| Coefficiente de absorción de radiación | 0.9 |
| Densidad del asfalto | 2100 (kg/m ³) |
| Espesor | 0.05 (m) |

Fuente: Adaptado de AGhali et al., (2012)

Tabla 11

Propiedades térmicas y geométricas de la placa de concreto

| Propiedad | Valor |
|---|---------------------------|
| Conductividad térmica del concreto | 2 (W/m°C) |
| Calor específico del concreto | 900 (J/kg°C) |
| Coefficiente de emisividad del concreto | 0.9 |
| Densidad del concreto | 2400 (kg/m ³) |

| Propiedad | Valor |
|-----------|---------|
| Espesor | 0.2 (m) |

Fuente: Adaptado de AGhali et al., (2012)

En el caso del modelado de las condiciones climáticas para cada ciudad se definieron valores con el fin de representar de manera coherente el comportamiento ambiental, los cuales se describen en las tablas 12 y 13.

Tabla 12

Referencias ambientales puente Tizón

| Referencia | Valor |
|----------------------------------|----------|
| Hora del alba | 5:00 am |
| Horas de radiación solar por día | 13 (h) |
| Hora de máxima radiación solar | 12:00 m |
| Hora del ocaso | 18:00 pm |
| Hora de temperatura mínima | 5:00 am |
| Hora de temperatura máxima | 13:00 pm |

Fuente: Elaboración propia

Tabla 13

Referencias ambientales puente acceso Aeropuerto al Dorado

| Referencia | Valor |
|---|----------|
| Hora del alba | 5:00 am |
| Horas de radiación solar por día | 13 (h) |
| Hora de máxima radiación solar | 12:00 m |
| Hora del ocaso | 18:00 pm |
| Hora de temperatura mínima | 5:00 am |
| Hora de temperatura máxima | 13:00 pm |
| Velocidad del viento en la placa inferior | 0 (m/s) |

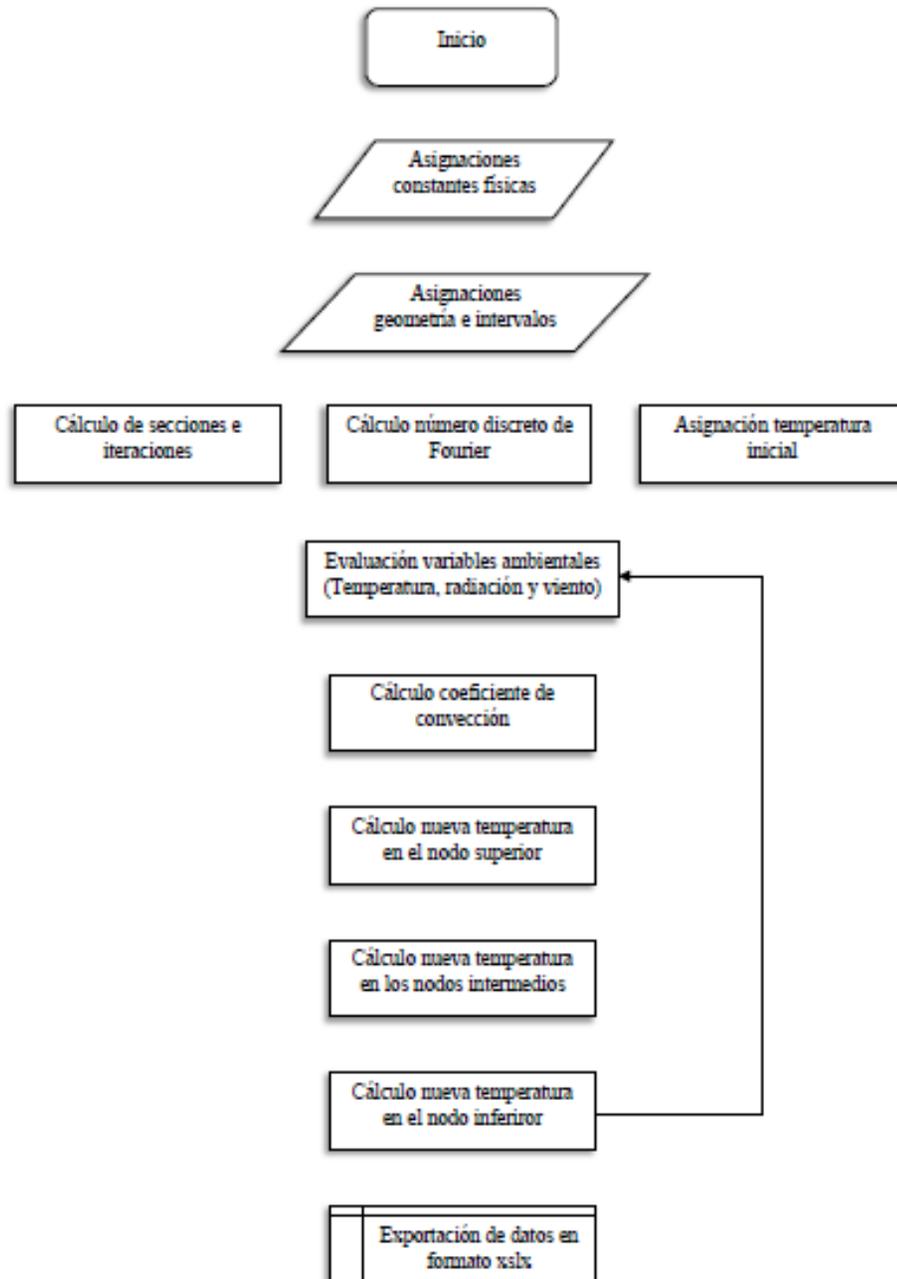
Fuente: Elaboración propia

6. Resultados

En la Figura 12 se presenta el algoritmo realizado para el modelo numérico

Figura 12

Diagrama de flujo algoritmo



Fuente: Elaboración propia

6.1. Algoritmo programado en lenguaje Python

El algoritmo programado según las ecuaciones mostradas queda como corresponde:

Inicio.

```
import numpy as np
import pandas as pd
import math

basedatos=pd.read_excel(r"C:\Users\Usuario\Desktop\PExp.xlsx",
sheet_name='Bog.02')
md=basedatos.values

cs=4
#Thermal conductivity concrete W/m*°C (1.5-2.5)
kc=2

#Thermal conductivity asphalt W/m*°C (1.5-2.5)
ka=1

#Specific heat concrete J/kg°C (800-1200)
cpc=900

#Specific heat asphalt J/kg°C
cpa=920

#Solar radiation absorptivity concrete (0.65-0.8)
rac=0.7

#Solar radiation absorptivity asphalt
raa=0.9

#Solar radiation emissivity concrete (0.65-0.8)
rec=0.9
```

```
#Solar radiation emissivity asphalt
rea=0.9

#Density concrete kg/m^3
roc=2400

#Density asphalt kg/m^3
roa=2100

dt=900

#Finite difference (m)
dx=0.05

#Discret number of Fourier for concrete
tauc=kc*dt/(roc*cpc*dx**2)

#Discret number of Fourier for asphalt
taua=ka*dt/(roa*cpa*dx**2)

#Stefan-Boltzmann W/m2*°K
sb=5.670373*(10**(-8))
#sb=0

#Top temperature °C
tt=md[0,1]

#Bottom temperature °C
bt=md[0,1]

#Thickness asphalt(m)
tna=0.05

#Thickness concrete (m)
tnc=0.2

#Asphalt sections
nas=int(tna/dx)
```

```

#Concrete secctions
ncs= int(tnc/dx)

#Iterations (days)
di=62

#Time iterations for a day
ti=int (86400/dt)

fm=int((86400/dt)*di+1)
cm=int(4+nas+ncs+2)
A=np.zeros([fm,cm])

#Columnas:Tambiente, Radiación, Wind speed top, Wind speed bottom,
Tsuperior, T1,T2,Tn, Tinferior
A[0,4]=tt

for im in range(0,(nas+ncs),1):
    A[0,im+5]=A[0,im+4]-(tt-bt)/(nas+ncs)

for d in range (0,di,1):
    t=1
    htm=13
    hr=13
    hrm=12

    for t in range(0,ti,1):
        A[t+96*d,5+nas+ncs]=d
        if t<=((htm-5)*3600/dt):
            at=(md[d,0]-md[d,1])*(math.sin((90/((htm-
5)*3600/dt))*t*math.pi/180))*cs+md[d,1]
        else:
            at=(md[d,0]-md[d+1,1])*(math.cos(((90/((24-htm+5)*3600/dt))*(t-
((htm-5)*3600/dt)))*math.pi/180))*cs+md[d+1,1]
            #at=(math.cos(((90/((24-htm+5)*3600/dt))*(t-37))*math.pi/180))
            if t<=(hrm-5)*3600/dt:
                #rsol=abs(md[d,2]*(math.sin((180/(hr*3600/dt))*t/(4955.071514*ma
th.pi)*math.pi/180)))

```

```

    rsol=abs(md[d,2]*(math.sin((90/((hrm-
5)*3600/dt))*t*math.pi/180))**2)
    else:
        if (hrm-5)*3600/dt<t<=hr*3600/dt:
            rsol=abs(md[d,2]*((math.cos((90/((hr-(hrm-5))*3600/dt))*(t-
(hrm-5)*3600/dt)*math.pi/180))**2))
        else:
            rsol=0

A[(t+d*ti),0]=at
A[(t+d*ti),1]=rsol

#Wind velocity on the top m/s
wvt=md[d,3]
#Convection heat transfer coefficient on the top W/m2°C
if wvt<=5:
    ht=6+4*wvt
else:
    ht=7.4*(wvt**0.78)

#Wind velocity on the bottom m/s
wvb=md[d,4]
#Convection heat transfer coefficient on the bottom W/m2°C
if wvb<=5:
    hb=6+4*wvb
else:
    hb=7.4*(wvb**0.78)

A[(t+(d*ti)+1),4]=2*ht*(at-
A[t+(d*ti),4])*tau*dx/ka+2*raa*rsol*tau*dx/ka+2*tau*(A[t+ti*d,5]-
A[t+(d*ti),4])-2*rec*sb*((A[t+(d*ti),4]+273.15)**4-
(at+273.15)**4)*tau*dx/ka+A[t+(d*ti),4]

for j in range(0,nas+ncs-1,1):

    if j<nas:
        tau=taua
        A[t+(d*ti)+1,5+j]=tau*(A[t+d*ti,4+j]+A[t+d*ti,6+j])+(1-
2*tau)*A[t+(d*ti),5+j]

```

```

#A[t+(d*ti)+1,5+j]=tau (prueba taus)

else:
    tau=tauc
    A[t+(d*ti)+1,5+j]=tau*(A[t+d*ti,4+j]+A[t+d*ti,6+j])+(1-
2*tau)*A[t+(d*ti),5+j]
    #A[t+(d*ti)+1,5+j]=tau (prueba taus)

#A[(t+(d*ti)+1),4+nas+ncs]=A[t+(d*ti),4+nas+ncs] (VERIFICADOR DE
COLUMNA)
A[(t+(d*ti)+1),4+nas+ncs]=(2*hb*(at-
A[t+(d*ti),4+nas+ncs])*tauc*dx/kc+2*tauc*(A[t+ti*d,4+nas+ncs-1]-
A[t+(d*ti),4+nas+ncs])+2*rec*sb*((A[t+(d*ti),4+nas+ncs]+273.15)**4-
(at+273.15)**4)*tauc*dx/kc+A[t+(d*ti),4+nas+ncs])

df_A=pd.DataFrame(A)
df_A.to_excel('CodeV2.xlsx', index=False)

```

Fin

6.2. Resultados problemas de validación

Para los ejercicios propuestos con el fin de validar los resultados se realizaron modificaciones en el algoritmo principal con el fin de obtener un proceso coherente con el desarrollo que pide el problema, los resultados para cada uno de los problemas se expresan a continuación.

6.2.1. Desarrollo Problema 5-86. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3rd edition

El algoritmo desarrollado según el método explícito de diferencias finitas se ve en el apéndice A. Para verificar los resultados se comparará la tabla propuesta por la solución del libro y la gráfica correspondiente.

Los resultados propuestos por el autor se expresan en la Tabla 14. Para realizar la verificación se tomarán los resultados propuestos por la literatura adoptando sus valores como

decimales cerrados, comparándolos con los valores obtenidos por el algoritmo con sus decimales completos. Los resultados en porcentaje de error se presentan en la Tabla 16.

Tabla 14

Temperatura en los nodos según las iteraciones

| Tiempo (s) | T_1 °C | T_2 °C | T_3 °C | T_4 °C | T_5 °C | Fila |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|------|
| 0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 1 |
| 15 | 106.7 | 106.7 | 106.7 | 106.7 | 104.8 | 2 |
| 30 | 113.4 | 113.4 | 113.4 | 112.5 | 111.3 | 3 |
| 45 | 120.1 | 120.1 | 119.7 | 119.0 | 117.0 | 4 |
| 60 | 126.8 | 126.6 | 126.3 | 125.1 | 123.3 | 5 |
| 75 | 133.3 | 133.2 | 132.6 | 131.5 | 129.2 | 6 |
| 90 | 139.9 | 139.6 | 139.1 | 137.6 | 135.5 | 7 |
| 105 | 146.4 | 146.2 | 145.4 | 144.0 | 141.5 | 8 |
| 120 | 152.9 | 152.6 | 151.8 | 150.2 | 147.7 | 9 |
| 135 | 159.3 | 159.1 | 158.1 | 156.5 | 153.7 | 10 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 3465 | 1217 | 1213 | 1203 | 1185 | 1160 | 232 |
| 3480 | 1220 | 1216 | 1206 | 1188 | 1163 | 233 |
| 3495 | 1223 | 1220 | 1209 | 1192 | 1167 | 234 |
| 3510 | 1227 | 1223 | 1213 | 1195 | 1170 | 235 |
| 3525 | 1230 | 1227 | 1216 | 1198 | 1173 | 236 |
| 3540 | 1234 | 1230 | 1219 | 1201 | 1176 | 237 |
| 3555 | 1237 | 1233 | 1223 | 1205 | 1179 | 238 |
| 3570 | 1240 | 1237 | 1226 | 1208 | 1183 | 239 |
| 3585 | 1244 | 1240 | 1229 | 1211 | 1186 | 240 |
| 3600 | 1247 | 1243 | 1233 | 1214 | 1189 | 241 |

Fuente: Adaptado de Yunus A. & Afshin J., (2007).

Los resultados obtenidos por parte del algoritmo programado se dan en la tabla 15.

Tabla 15*Temperatura en los nodos según las iteraciones*

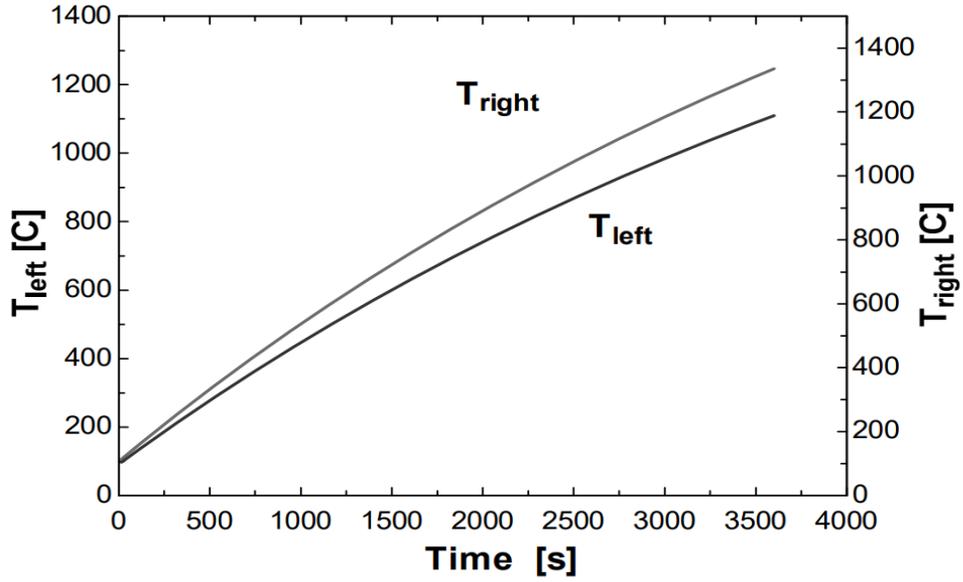
| Tiempo (s) | T_1 °C | T_2 °C | T_3 °C | T_4 °C | T_5 °C | Fila |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|------|
| 0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 1 |
| 15 | 106.7 | 106.7 | 106.7 | 106.7 | 104.8 | 2 |
| 30 | 113.4 | 113.4 | 113.4 | 112.5 | 111.3 | 3 |
| 45 | 120.1 | 120.1 | 119.7 | 119.0 | 117.0 | 4 |
| 60 | 126.8 | 126.6 | 126.3 | 125.1 | 123.3 | 5 |
| 75 | 133.3 | 133.2 | 132.6 | 131.5 | 129.2 | 6 |
| 90 | 139.9 | 139.6 | 139.1 | 137.6 | 135.5 | 7 |
| 105 | 146.4 | 146.2 | 145.4 | 144.0 | 141.5 | 8 |
| 120 | 152.9 | 152.6 | 151.8 | 150.2 | 147.7 | 9 |
| 135 | 159.3 | 159.1 | 158.1 | 156.5 | 153.7 | 10 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 3465 | 1217 | 1213 | 1203 | 1185 | 1160 | 232 |
| 3480 | 1220 | 1216 | 1206 | 1188 | 1163 | 233 |
| 3495 | 1223 | 1220 | 1209 | 1192 | 1167 | 234 |
| 3510 | 1227 | 1223 | 1213 | 1195 | 1170 | 235 |
| 3525 | 1230 | 1227 | 1216 | 1198 | 1173 | 236 |
| 3540 | 1234 | 1230 | 1219 | 1201 | 1176 | 237 |
| 3555 | 1237 | 1233 | 1223 | 1205 | 1179 | 238 |
| 3570 | 1240 | 1237 | 1226 | 1208 | 1183 | 239 |
| 3585 | 1244 | 1240 | 1229 | 1211 | 1186 | 240 |
| 3600 | 1247 | 1243 | 1233 | 1214 | 1189 | 241 |

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 13 corresponde con propuesta por el autor para la interpretación de los resultados.

Figura 13

Gráfica de la temperatura de los nodos en los extremos

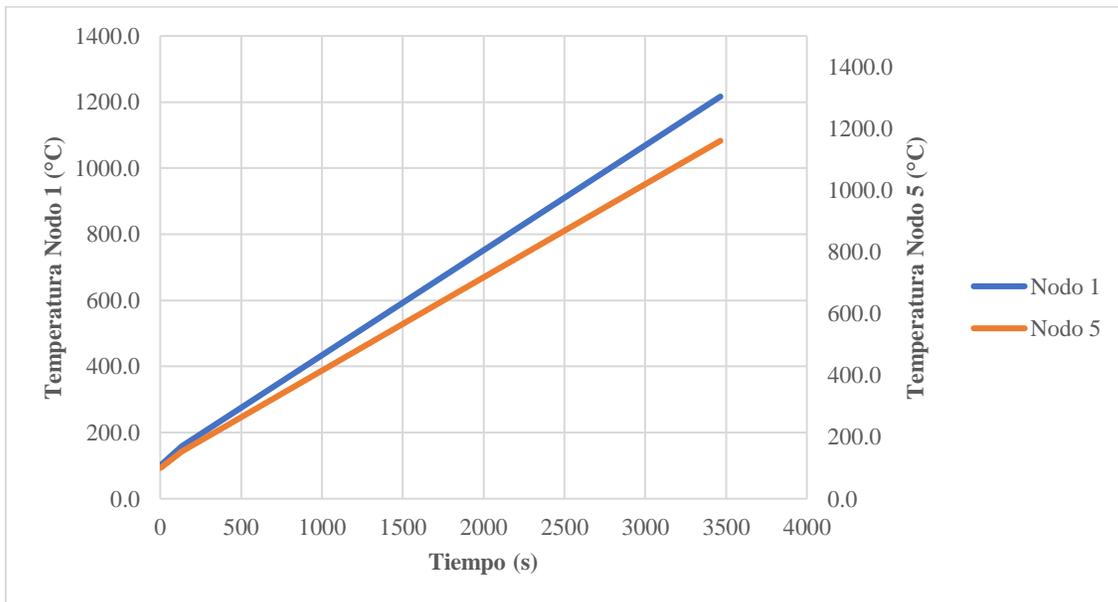


Fuente: Yunus A. & Afshin J., (2007)

La Figura 14 se construye con los datos obtenidos por el algoritmo programado.

Figura 14

Gráfica de la temperatura de los nodos extremos



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 16

Porcentajes de error

| Tiempo | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 | T_5 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 15 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 30 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 45 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 60 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 75 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 90 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 105 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 120 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 135 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 3465 | -0.4% | 0.1% | -0.4% | -0.1% | 0.1% |
| 3480 | 0.0% | 0.5% | -0.1% | 0.2% | 0.4% |
| 3495 | 0.4% | -0.1% | 0.3% | -0.4% | -0.4% |
| 3510 | -0.2% | 0.3% | -0.4% | -0.1% | -0.2% |
| 3525 | 0.2% | -0.4% | 0.0% | 0.2% | 0.0% |
| 3540 | -0.4% | 0.0% | 0.3% | 0.4% | 0.3% |
| 3555 | -0.1% | 0.4% | -0.4% | -0.3% | 0.5% |
| 3570 | 0.3% | -0.3% | 0.0% | 0.0% | -0.3% |
| 3585 | -0.4% | 0.0% | 0.3% | 0.2% | -0.2% |
| 3600 | 0.0% | 0.4% | -0.4% | 0.5% | 0.0% |

Fuente: Elaboración propia.

Se puede concluir que el algoritmo funciona correctamente debido a los bajos porcentajes de error los cuales pueden ser causados por la suposición hecha.

6.2.2. Problema 5-88. Heat and Mass transfer-Yunus Cengel 3rd edition

El algoritmo desarrollado según el método explícito de diferencias finitas se ve en el Apéndice C. Para verificar los datos obtenidos se compararán las tablas dadas por el autor y las obtenidas luego de ejecutar el algoritmo.

En la Tabla 17 se presentan los valores presentados para la solución dados por el autor. Para realizar la verificación se tomarán los resultados propuestos por la literatura adoptando sus valores como decimales cerrados, comparándolos con los valores obtenidos por el algoritmo con sus decimales completos. Los resultados en porcentaje de error se presentan en la Tabla 19. Los resultados obtenidos por medio del algoritmo se dan en la Tabla 18. La Figura 15 propuesta por el autor representa los datos de la solución según la literatura. La Figura 16 representa los valores obtenidos por medio del algoritmo.

Tabla 17

Temperatura de los nodos durante 48h propuestos por el autor

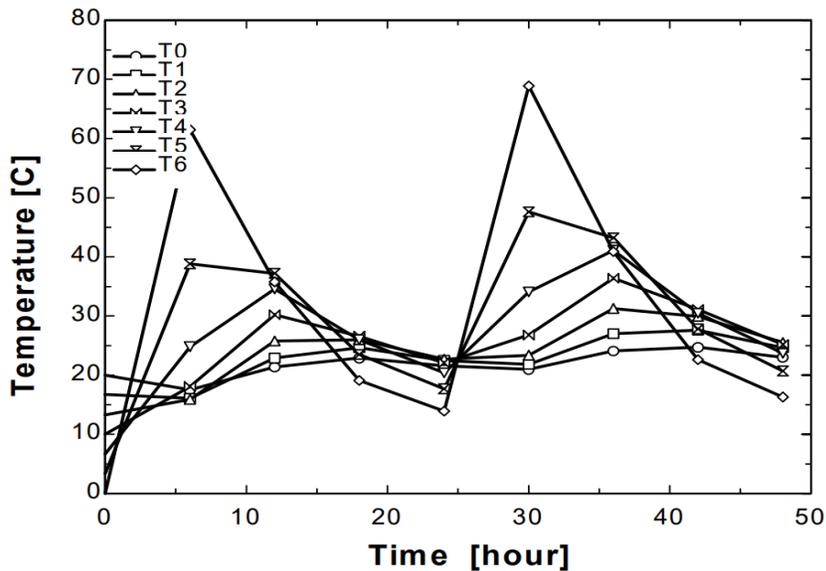
| Hora | Paso iteración | Temperatura en los nodos °C | | | | | | |
|-----------|-------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 | T_5 | T_6 |
| 0h (7am) | 0 | 20 | 16.7 | 13.3 | 10 | 6.66 | 3.33 | 0 |
| 6h (1pm) | 24 | 17.5 | 16.1 | 15.9 | 18.1 | 24.8 | 38.8 | 61.5 |
| 12h (7pm) | 48 | 21.4 | 22.9 | 25.8 | 30.2 | 34.6 | 37.2 | 35.8 |
| 18h (1am) | 72 | 22.9 | 24.6 | 26 | 26.6 | 26 | 23.5 | 19.1 |
| 24h (7am) | 96 | 21.6 | 22.5 | 22.7 | 22.1 | 20.4 | 17.7 | 13.9 |
| 30h (1pm) | 120 | 21 | 21.8 | 23.4 | 26.8 | 34.1 | 47.6 | 68.9 |
| 36h (7pm) | 144 | 24.1 | 27 | 31.3 | 36.4 | 41.1 | 43.2 | 40.9 |
| 42h (1am) | 168 | 24.7 | 27.6 | 29.9 | 31.1 | 30.5 | 27.8 | 22.6 |
| 48h (7am) | 192 | 23 | 24.6 | 25.5 | 25.2 | 23.7 | 20.7 | 16.3 |

Fuente: Adaptado de Yunus A. & Afshin J., (2007)

Tabla 18*Temperatura de los nodos durante 48h obtenidos por el algoritmo*

| Hora | Paso iteración | Temperatura en los nodos °C | | | | | | |
|-----------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 | T_5 | T_6 |
| 0h (7am) | 0 | 20.0 | 16.7 | 13.3 | 10.0 | 6.7 | 3.3 | 0.0 |
| 6h (1pm) | 24 | 17.5 | 16.1 | 15.8 | 18.0 | 24.8 | 38.8 | 61.5 |
| 12h (7pm) | 48 | 21.4 | 22.9 | 25.8 | 30.2 | 34.6 | 37.2 | 35.8 |
| 18h (1am) | 72 | 22.8 | 24.6 | 26.0 | 26.6 | 26.0 | 23.5 | 19.0 |
| 24h (7am) | 96 | 21.6 | 22.5 | 22.7 | 22.1 | 20.5 | 17.7 | 13.9 |
| 30h (1pm) | 120 | 21.0 | 21.8 | 23.4 | 26.8 | 34.1 | 47.6 | 68.9 |
| 36h (7pm) | 144 | 24.1 | 27.1 | 31.3 | 36.4 | 41.1 | 43.2 | 40.9 |
| 42h (1am) | 168 | 24.7 | 27.6 | 29.9 | 31.0 | 30.5 | 27.7 | 22.6 |
| 48h (7am) | 192 | 23.0 | 24.6 | 25.5 | 25.2 | 23.7 | 20.7 | 16.3 |

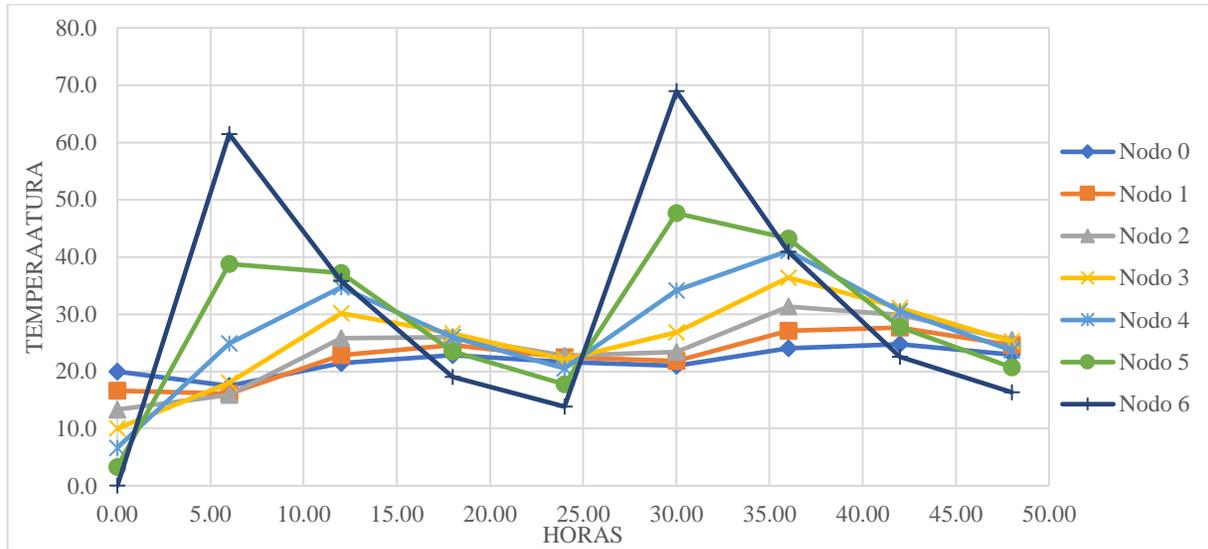
Fuente: Elaboración propia.

Figura 15*Representación datos de la solución*

Fuente: Yunus A. & Afshin J., (2007)

Figura 16

Representación datos obtenidos por el algoritmo



Fuente: Elaboración propia

Tabla 19

Porcentajes de error

| Hora | Paso iteración | Porcentaje de error en las mediciones | | | | | | |
|-----------|----------------|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 | T_5 | T_6 |
| 0h (7am) | 0 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 6h (1pm) | 24 | 0.0% | 0.0% | -0.1% | -0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 12h (7pm) | 48 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 18h (1am) | 72 | -0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | -0.1% |
| 24h (7am) | 96 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.1% | 0.0% | 0.0% |
| 30h (1pm) | 120 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 36h (7pm) | 144 | 0.0% | 0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 42h (1am) | 168 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | -0.1% | 0.0% | -0.1% | 0.0% |
| 48h (7am) | 192 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |

Fuente: Elaboración propia.

Se puede concluir que el algoritmo funciona correctamente debido a los bajos porcentajes de error los cuales pueden ser causados por la suposición hecha.

6.2.3. Ejemplo 5.12. Fundamentals of heat and mass transfer-Theodore L.Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, David P. De Witt.

El algoritmo desarrollado según el método explícito de diferencias finitas se ve en el apéndice C. Para verificar los resultados se comparará la tabla propuesta por la solución del libro y la gráfica correspondiente. Los resultados dados por el autor se expresan en la tabla 20. Para realizar la verificación se tomarán los resultados propuestos por la literatura adoptando sus valores como decimales cerrados, comparándolos con los valores obtenidos por el algoritmo con sus decimales completos. Los resultados en porcentaje de error se presentan en la tabla 22. Se puede concluir que el algoritmo funciona correctamente debido a los bajos porcentajes de error los cuales pueden ser causados por la suposición hecha, además que el autor realiza una simplificación en la formulación del fenómeno para los nodos intermedios, la cual se describe en la ecuación 25 en contraste con la ecuación 26 definida para el algoritmo.

Tabla 20

Temperaturas en los nodos según las iteraciones

| Paso | Tiempo (s) | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 |
|------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 1 | 24 | 76.1 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 2 | 48 | 76.1 | 48.1 | 20 | 20 | 20 |
| 3 | 72 | 104.2 | 48.1 | 34 | 20 | 20 |
| 4 | 96 | 104.2 | 69.1 | 34 | 27 | 20 |
| 5 | 120 | 125.2 | 69.1 | 48.1 | 27 | 23.5 |

Fuente: Adaptado de Bergman et al., (2016)

Los resultados obtenidos por el algoritmo se muestran en la tabla 21.

Tabla 21*Temperatura en los nodos según las iteraciones*

| Paso | Tiempo (s) | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 |
|------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 |
| 1 | 24 | 76.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 |
| 2 | 48 | 76.1 | 48.0 | 20.0 | 20.0 | 20.0 |
| 3 | 72 | 104.0 | 48.1 | 34.0 | 20.0 | 20.0 |
| 4 | 96 | 104.2 | 69.0 | 34.0 | 27.0 | 20.0 |
| 5 | 120 | 125.0 | 69.1 | 47.9 | 27.0 | 23.5 |

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 22*Porcentaje de error*

| Paso | Tiempo (s) | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 |
|------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 1 | 24 | -0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 2 | 48 | 0.0% | -0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 3 | 72 | -0.2% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 4 | 96 | 0.0% | -0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| 5 | 120 | -0.2% | 0.0% | -0.2% | 0.0% | 0.0% |

Fuente: Elaboración propia.

$$T_m^{p+1} = \frac{T_{m+1}^p + T_{m-1}^p}{2} \quad (25)$$

$$T_m^{p+1} = \tau(T_{m-1}^p + T_{m+1}^p) + (1 - 2\tau)T_m^p \quad (26)$$

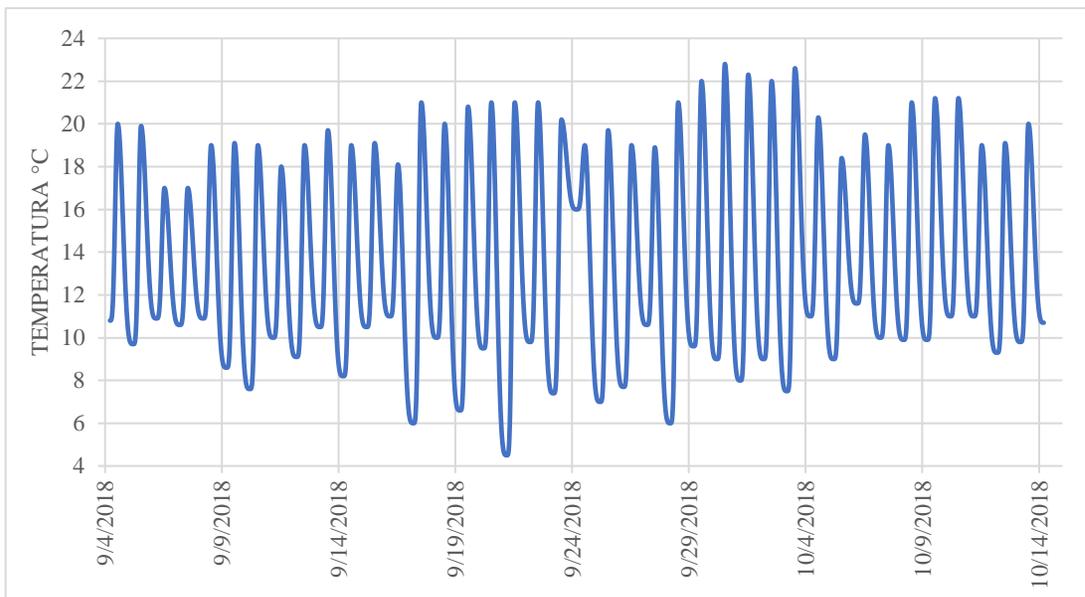
6.3. Resultados de la comparación con la aplicación técnica

6.3.1. Resultados puente de acceso a la terminal uno del Aeropuerto Internacional el Dorado-Bogotá

El algoritmo se ejecuta con las propiedades y suposiciones mencionadas, el comportamiento de la temperatura y la radiación solar en el intervalo de días analizados se presentan en la Figura 17 y Figura 18.

Figura 17

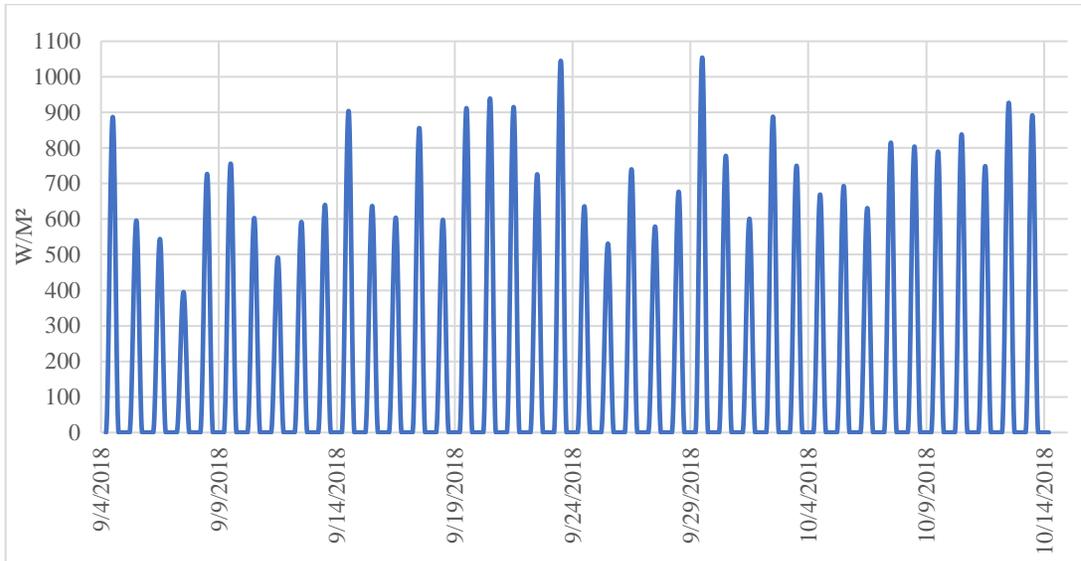
Temperatura del ambiente entre el 4 de septiembre del 2018 y el 13 de octubre de 2018



Fuente: Elaboración propia

Figura 18

Radiación solar entre el 4 de septiembre del 2018 y el 13 de octubre de 2018

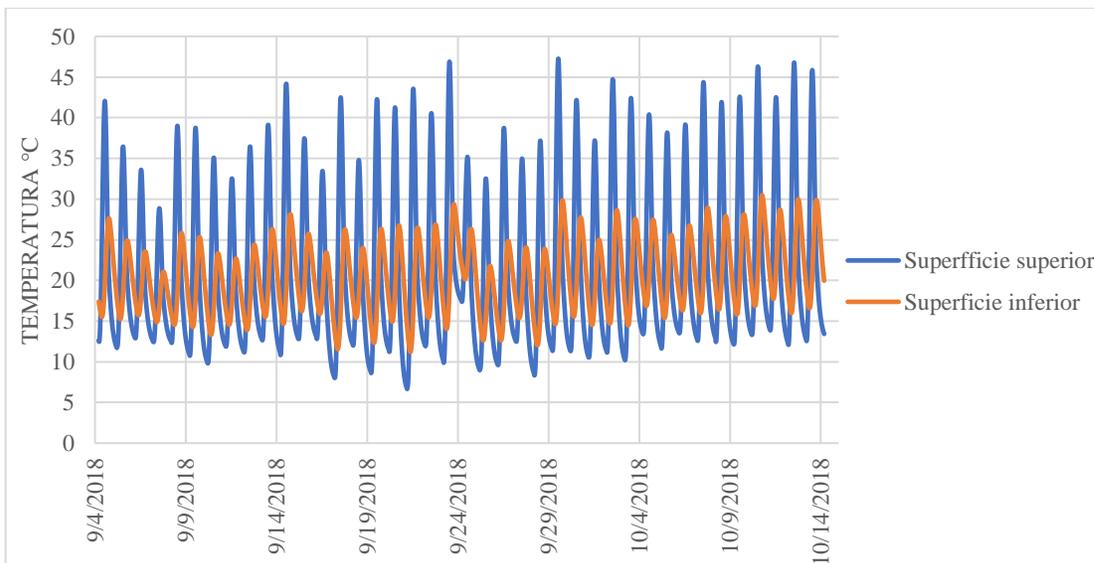


Fuente: Elaboración propia

Con en análisis simultáneo de las condiciones ambientales se ejecuta el cálculo dando como resultado las temperaturas superficiales tanto para la capa superior como inferior mostradas en la Figura 19.

Figura 19

Temperatura de la placa entre el 4 de septiembre del 2018 y el 13 de octubre de 2018



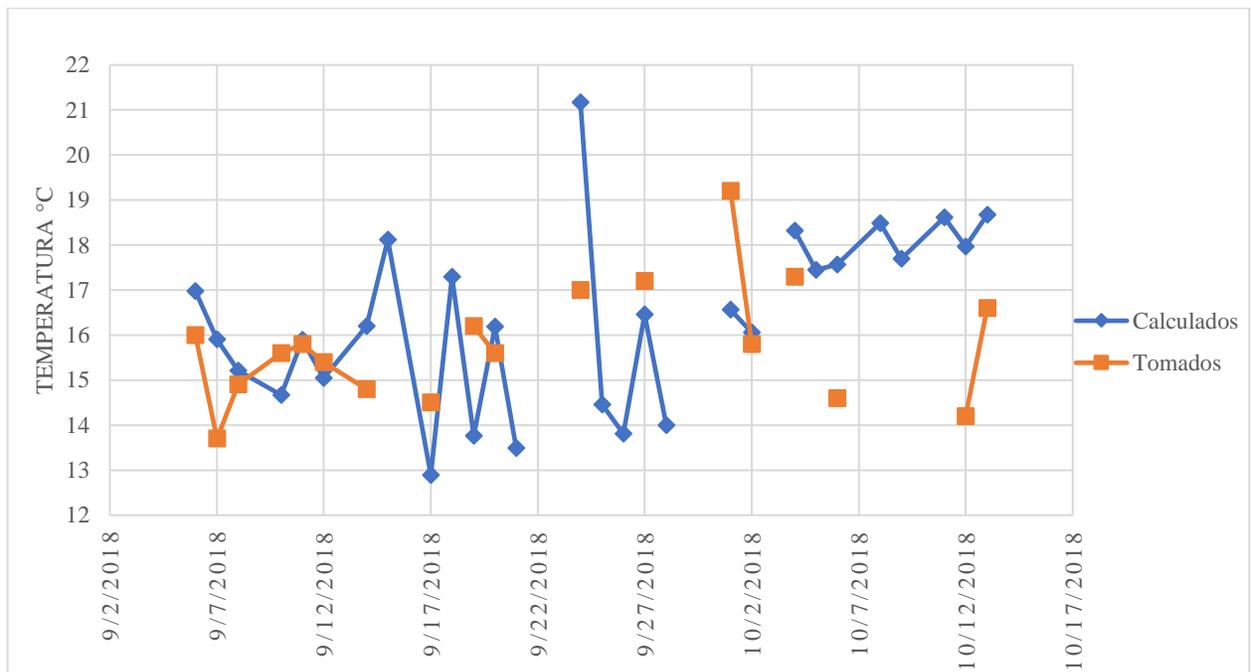
Fuente: Elaboración propia

Para el análisis comparativo se toman en cuenta los puntos coincidentes con las mediciones realizadas por Rozo Grimaldos, (2018).

A continuación, se muestran las gráficas comparativas para la superficie inferior en los intervalos de la toma de datos en la mañana y tarde.

Figura 20

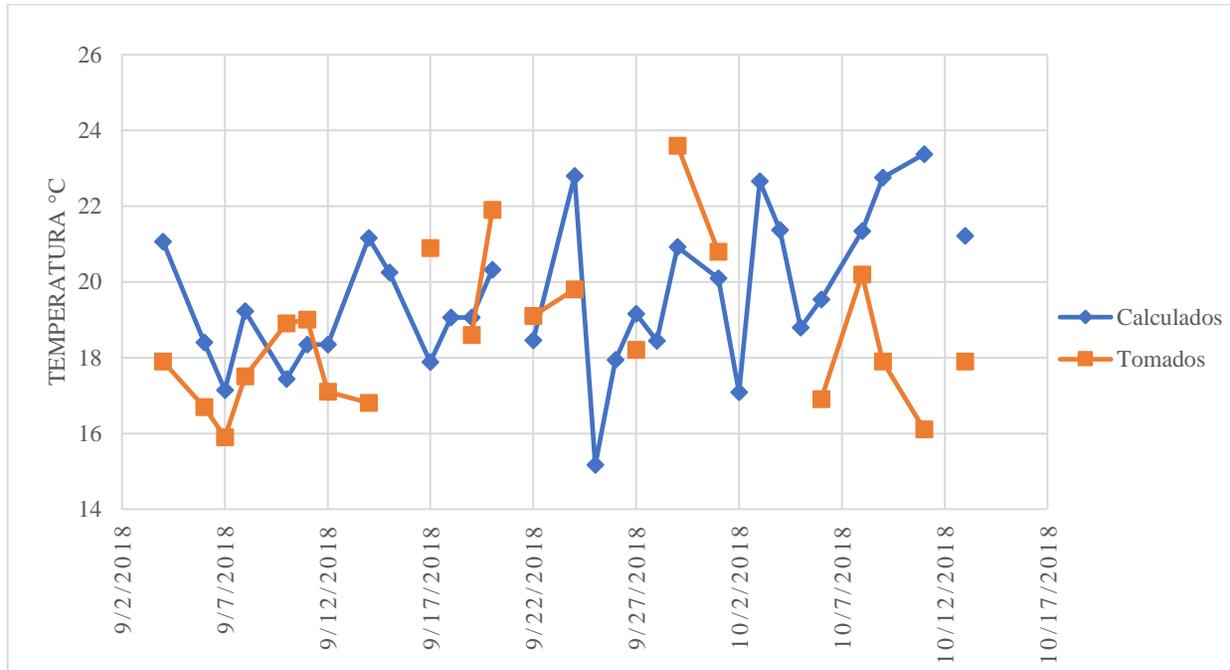
Comparación de la temperatura placa inferior mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado



Fuente: Elaboración propia

Figura 21

Comparación de la temperatura placa inferior tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado



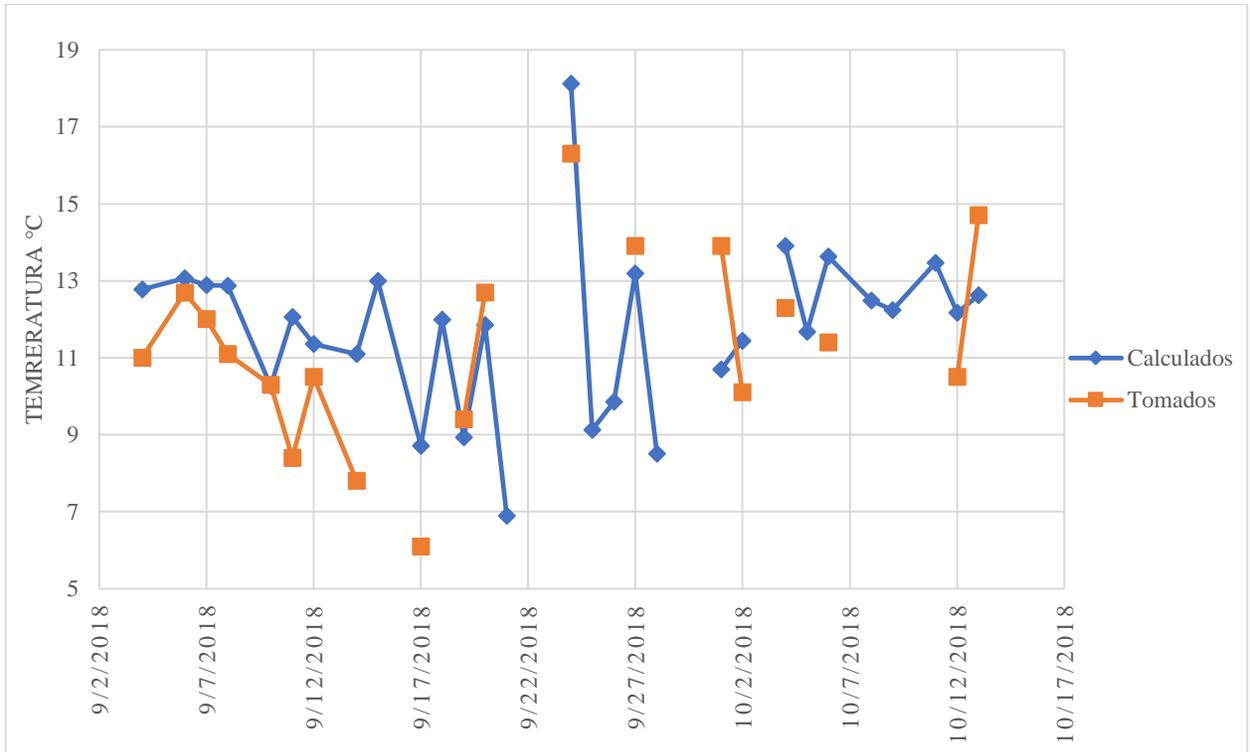
Fuente: Elaboración propia

Si bien la itinerancia de los datos hace que el análisis sea incierto se puede apreciar que en las horas de la tarde tanto la tendencia de las temperaturas como sus valores presentan similitudes con datos aislados donde las variaciones son mayores, las cuales pueden ser provocadas por las variables que no se han tenido en cuenta.

Las Figura 22 y Figura 23 muestran las gráficas comparativas para la superficie superior.

Figura 22

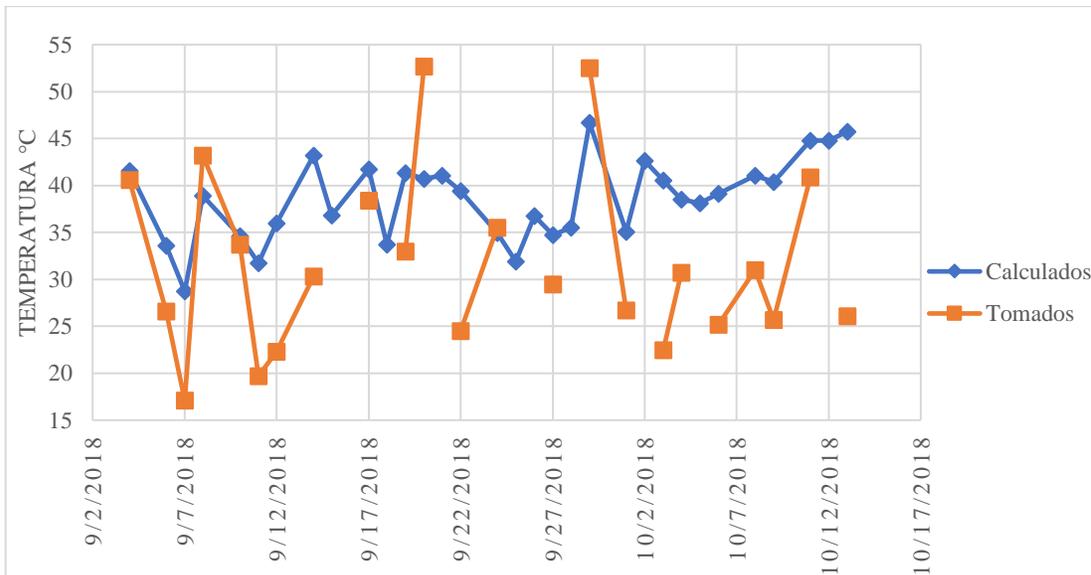
Comparación de la temperatura placa superior mañana puente acceso Aeropuerto el Dorado



Fuente: Elaboración propia

Figura 23

Comparación de la temperatura placa superior tarde puente acceso Aeropuerto el Dorado



Fuente: Elaboración propia

Como ya se mencionó la discontinuidad en los datos hace que el análisis de la tendencia en las temperaturas no sea tan evidente, sin embargo, es apreciable el que se tengan pocos datos medidos in situ que sean superiores a los predichos por el algoritmo.

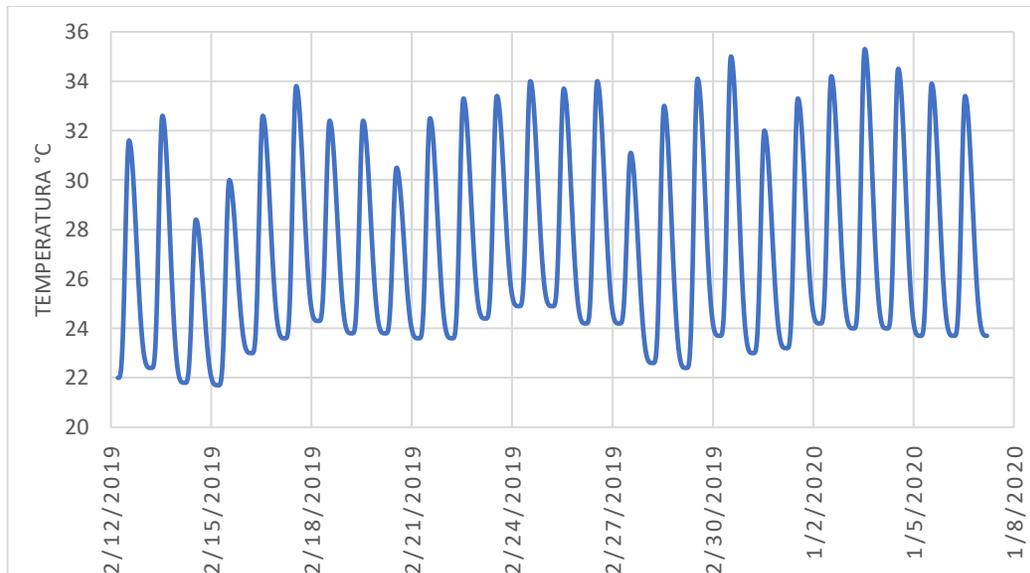
6.3.2. Resultados puente Tizón-Neiva

El algoritmo se ejecuta con las propiedades y suposiciones mencionadas, el comportamiento de la temperatura y la radiación solar en el intervalo de días analizados se presentan en la Figura 24 y Figura 25. Para el análisis comparativo se toman en cuenta los puntos coincidentes con las mediciones realizadas por Patarroyo Querales & Meneses Real, (2020).

A continuación, se muestran las gráficas comparativas para la superficie inferior en los intervalos de la toma de datos en la mañana y tarde.

Figura 24

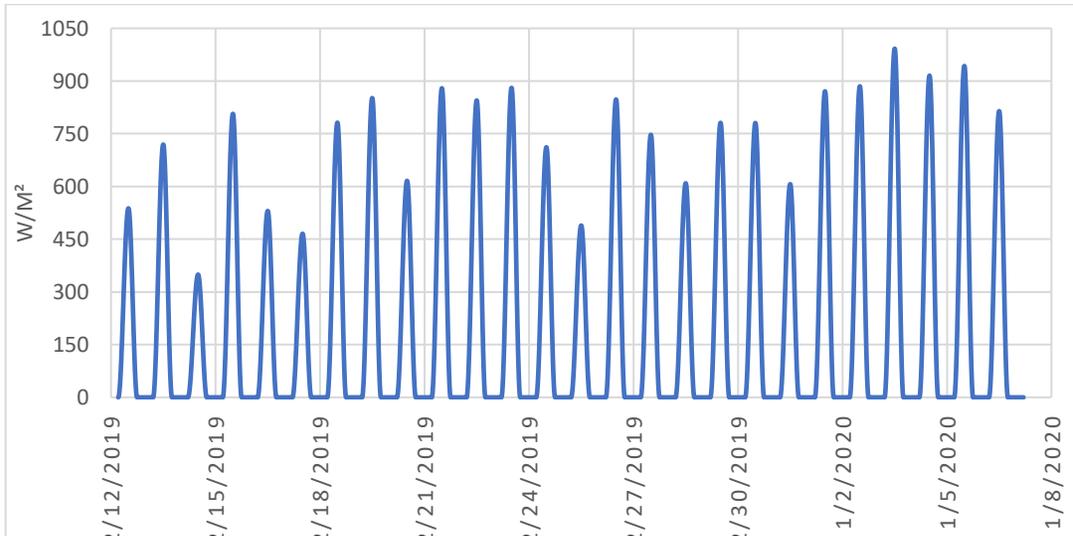
Temperatura del ambiente entre el 12 de diciembre de 2019 y 6 de enero de 2020



Fuente: Elaboración propia

Figura 25

Radiación solar entre el 12 de diciembre de 2019 y 6 de enero de 2020

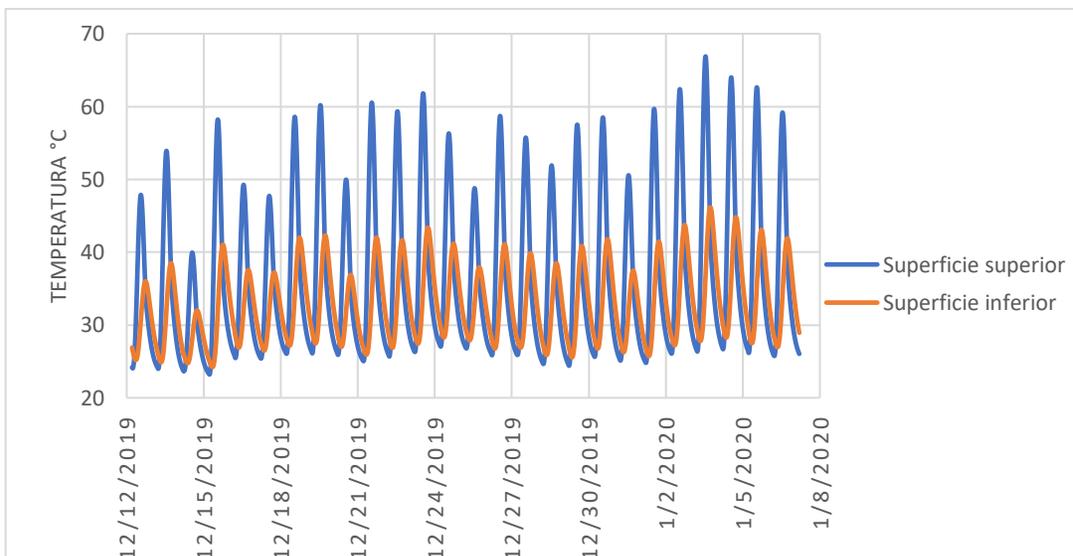


Fuente: Elaboración propia

Con en análisis simultáneo de las condiciones ambientales se ejecuta el cálculo dando como resultado las temperaturas superficiales tanto para la capa superior como inferior mostradas en la Figura 26.

Figura 26

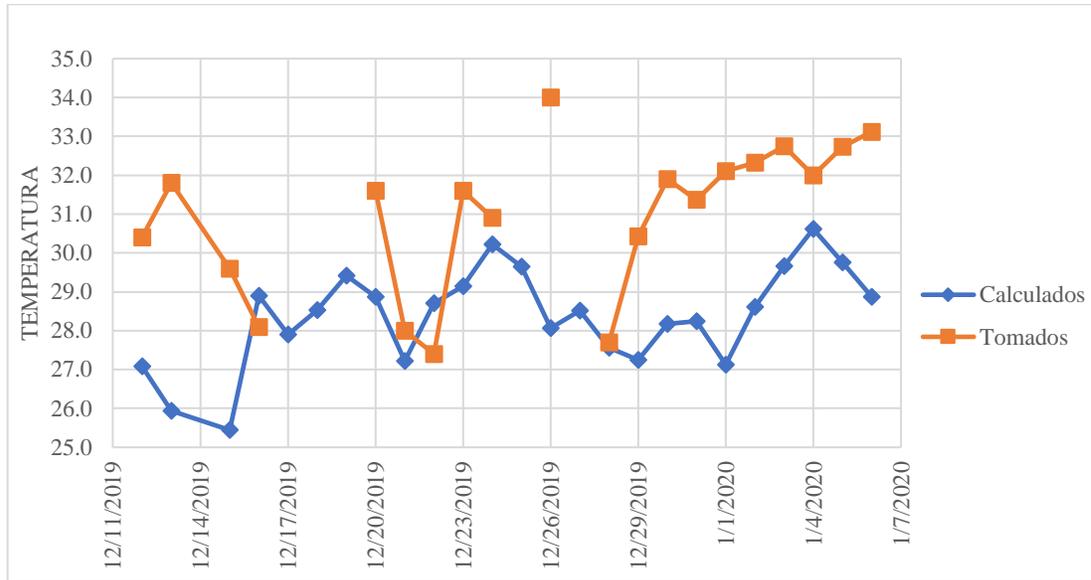
Temperatura de la placa entre el 12 de diciembre de 2019 y 6 de enero de 2020



Fuente: Elaboración propia

Figura 27

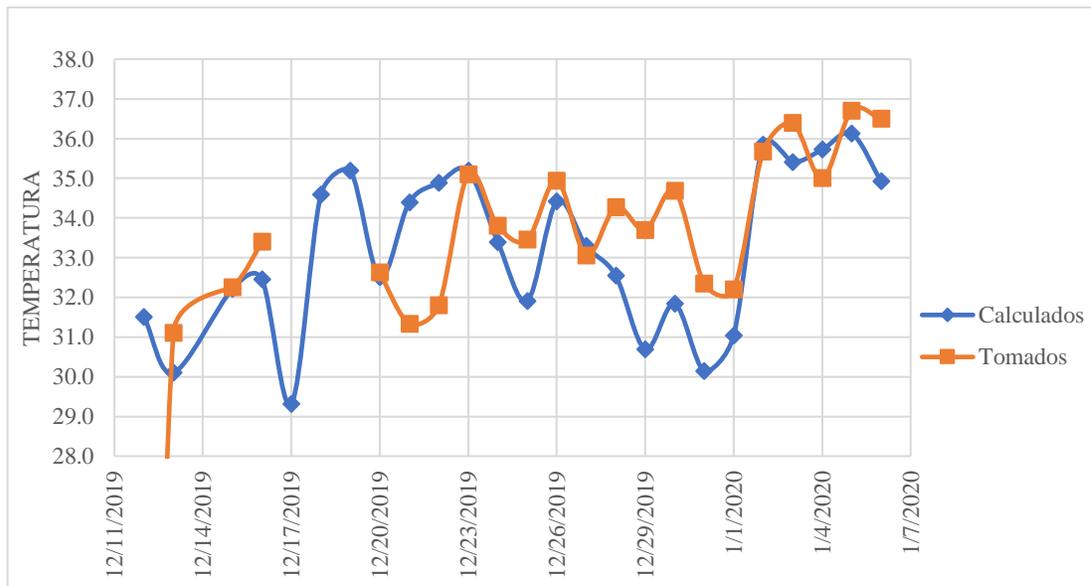
Gráfica comparativa temperatura placa inferior mañana puente Tizón



Fuente: Elaboración propia

Figura 28

Gráfica comparativa temperatura placa inferior tarde puente Tizón



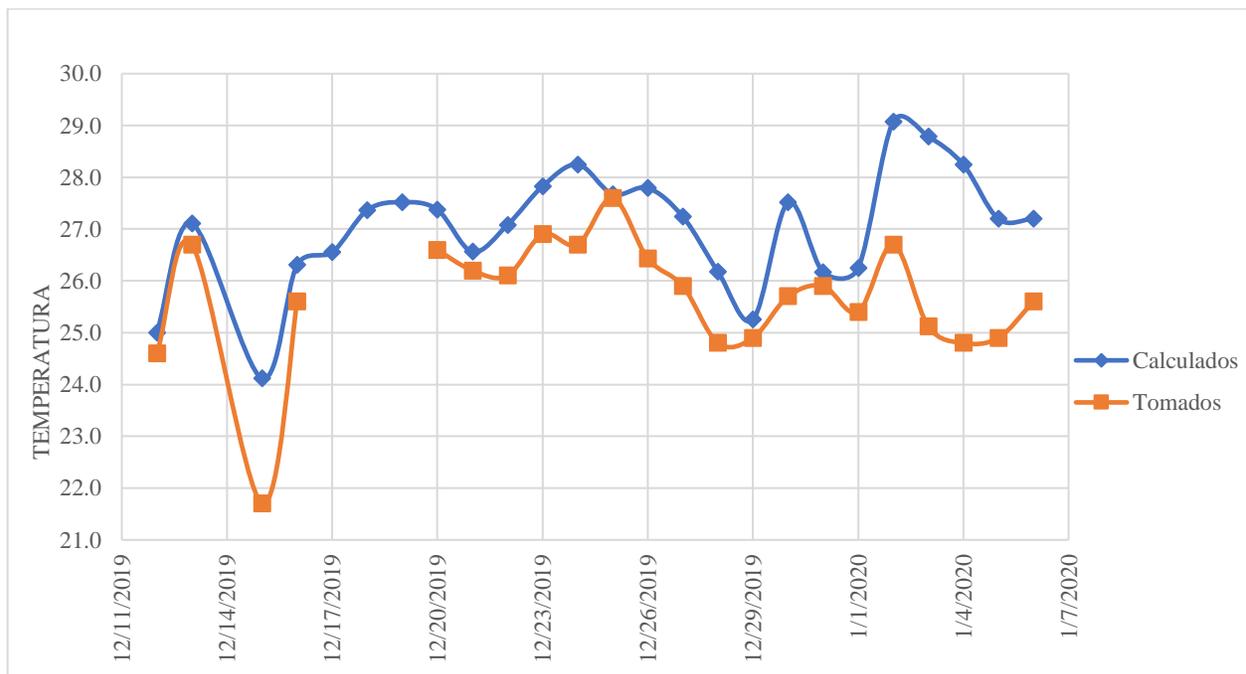
Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que el comportamiento de la temperatura calculada por el algoritmo, si bien presenta una similitud parcial de la tendencia natural, los valores calculados difieren en sus valores en un rango considerable para la temperatura en las horas de la mañana, a diferencia de la tarde, donde se encuentra que la tendencia se sigue de manera que los valores calculados son cercanos a los tomados in situ.

Para la placa superior las gráficas comparativas se presentan en la Figura 29 y Figura 30. Es apreciable la fiabilidad que se presentan en los resultados, especialmente es de importancia para efectos ingenieriles el que los datos calculados se mantengan sobre un rango superior a los datos tomados, estando de esta manera en un rango de seguridad incluso antes de modificarse los valores por cualquier factor.

Figura 29

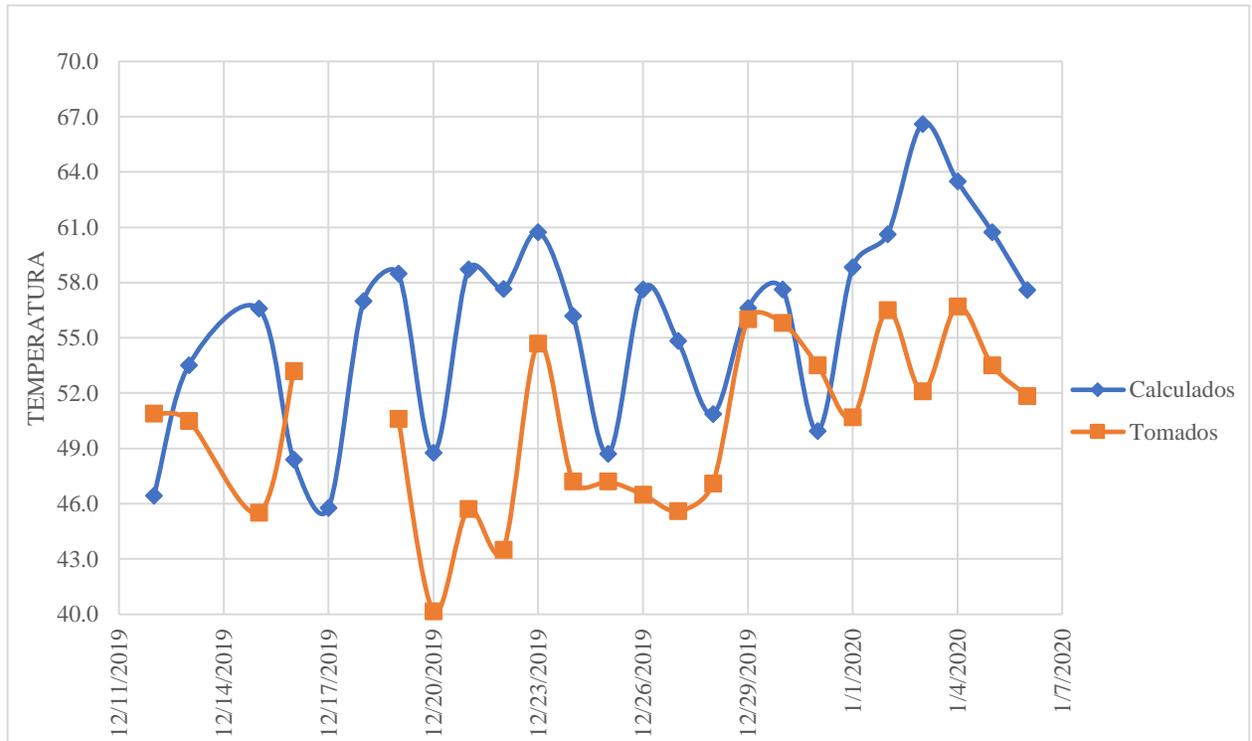
Gráfica comparativa temperatura placa superior mañana puente Tizón



Fuente: Elaboración propia

Figura 30

Gráfica comparativa placa superior tarde puente Tizón



Fuente: Elaboración propia

7. Conclusiones

Debido a los problemas evidenciados en los puentes que son atribuidos a las cargas térmicas, se ha provocado un crecimiento en el interés por investigar su comportamiento y consecuencias, con el fin de tener una mejor comprensión del fenómeno. El llevar a cabo esta tarea da como resultado el mitigar las posibles amenazas que se presenten en las estructuras ya presentes a través del monitoreo de las mismas, como también en el ajuste de los códigos de diseño al obtener una mejor perspectiva de las afectaciones que se tienen y la manera de controlarlas con una mayor fiabilidad de los valores y fórmulas de diseño utilizadas.

Las maneras generales de investigar este fenómeno se realizan a través de investigaciones teóricas, experimentales y analíticas, las primeras son demasiado complejas e inviables, y las segundas requieren de un presupuesto considerable si se quiere desarrollar un modelo complejo que sea representativo a las condiciones de servicio de la estructura, es por esto, que los modelos analíticos han tomado una alta relevancia, esto gracias también al avance de los métodos computacionales que han simplificado estos análisis en cuanto a tiempo y esfuerzo.

Se aprecia un perfeccionamiento cada vez mayor en cuanto a los modelos computacionales analíticos, a saber que cada vez es más viable el tener amplios análisis donde las simplificaciones del problema son reducidas, si bien en un comienzo y para fines ingenieriles el problema puede tomarse y desarrollarse en una dimensión a través del método de las diferencias finitas, se ha podido progresar a través del análisis bidimensional e inclusive con los últimos desarrollos de software se ha modelado el fenómeno térmico en tres dimensiones por medio del método de elementos finitos, lo cual brinda una caracterización mucho más representativa de la complejidad natural del fenómeno.

Tanto las investigaciones experimentales como analíticas han evidenciado que algunos de los códigos de diseño que se utilizan hoy día tienen un contraste marcado con los valores que se presentan en las estructuras, esto puede atribuirse a dos factores principalmente, la vigencia de los valores utilizados, ya que se han venido manejando estos mismos desde décadas atrás, esto se suma al uso de códigos unificados, a saber que Colombia se vale de los manuales desarrollados por la AASTHO, si bien se hacen algunas adaptaciones es necesario tener en cuenta la diferencia en las condiciones climáticas como geomorfológicas que ciertamente representan un desafío en el desarrollo de un manual que se ajuste a cada una de las condiciones del territorio colombiano.

Son estos factores los que han producido una necesidad de monitoreo en estas estructuras, los cuales se ven agravados por los efectos del cambio climático y su tendencia hacia la variación especialmente de sus temperaturas medias, algo que sin duda potenciará los efectos térmicos en los puentes.

El algoritmo desarrollado tiene la capacidad de modelar la distribución térmica en una dimensión a través de la losa de un puente, para lo cual tiene en cuenta las propiedades térmicas y geométricas tanto de la carpeta asfáltica como de la losa de concreto. El modelo se vale a su vez del modelado de la temperatura ambiente, radiación solar y velocidad del viento, variables de entrada con las cuales se desarrolla la interacción térmica dentro de la estructura.

La programación se desarrolla de tal manera que se puede realizar un modelo para cualquier dimensión tanto de la carpeta asfáltica como de la losa de concreto, estas secciones pueden dividirse en diferencias finitas a considerar, teniendo en cuenta que junto con el intervalo de tiempo no se viole el criterio de estabilidad.

El algoritmo se considera válido y apto para aplicarse a situaciones de estructuras en servicio teniendo en cuenta que por medio de los problemas de validación se ha verificado que el

análisis realizado es altamente fiable, a saber, que las diferencias para los resultados presentados por la literatura y los obtenidos por medio del programa no llegan a superar el 0.5%.

Los resultados en los casos de aplicación del algoritmo con base en los datos seleccionados, muestran que se puede considerar el método utilizado como válido para futuros análisis, sin embargo, aún se tienen diferencias considerables en las temperaturas, los cuales pueden atribuirse a la sensibilidad de los instrumentos utilizados para la toma de los datos, la fiabilidad de los mismos y la serie de simplificaciones realizadas que dejan de tomar en cuenta variables influyentes en el comportamiento térmico.

Se puede apreciar una diferencia en la concordancia de los resultados para la mañana y la tarde, este comportamiento de los resultados puede deberse a que la distribución de la temperatura para las horas de la tarde es predominantemente afectada por la radiación solar, mientras que en las horas de la mañana el fenómeno térmico es más sensible a la interacción con el ambiente en conjunción con las variables no estudiadas.

El resultado del análisis se tiene como satisfactorio, ya que la ejecución parte de datos generales de las condiciones ambientales y se logra establecer un comportamiento específico, de cara a una futura simulación con mayor cantidad de datos de referencia se esperan tener valores vez más ajustados a la situación real.

8. Referencias bibliográficas

- Abid, S. R. (2018). Three-dimensional finite element temperature gradient analysis in concrete bridge girders subjected to environmental thermal loads. *Cogent Engineering*, 5(1). <https://doi.org/10.1080/23311916.2018.1447223>
- Abid, S. R., Al-Bugharbee, H., Mhalhal, J. M., Al-Gasham, T. S., Tayşi, N., & zak a, M. (2021). Statistical evaluation of vertical and lateral temperature gradients in concrete box-girders. *Journal of Physics: Conference Series*, 1895(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1895/1/012068>
- Abid, S. R., Tayşi, N., & Özakça, M. (2014). *Three-Dimensional Thermal Modeling of Temperature Variation in Concrete Box-Girders Using COMSOL Multiphysics®*.
- Abid, S. R., Xue, J., Liu, J., Tayşi, N., Liu, Y., Özakça, M., & Briseghella, B. (2022). Temperatures and gradients in concrete Bridges: Experimental, finite element analysis and design. *Structures*, 37, 960–976. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.01.070>
- AGhali, RFavre, & MELbadry. (2012). *Concrete Structures: Stresses and Deformations, Third Edition*.
- Arenas, F. C. (2020). *Transferencia de calor*. Jorge Sarmiento Editor - Universitas. <https://elibro.net/es/lc/bibliouan/titulos/174535>
- Bergman, T. L., Lavine, Adrienne., & Incropera, F. P. (2016). *Fundamentals of heat and mass transfer*.
- Bridge Design| Temperature Effects in Bridge Decks*. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from <http://bridgedesign.org.uk/tutorial/temperature-effects.php>
- Burdet, O. L. (2010). *Thermal Effects in the Long-Term Monitoring of Bridges*.

- Camaraza Medina, Y. (2017). *Introducción a la termotransferencia*. Editorial Universitaria.
<https://elibro.net/es/lc/bibliouan/titulos/100758>
- Elementos y factores del clima - Meteo Navarra*. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from
<http://meteo.navarra.es/definiciones/elementosFactores.cfm>
- Fernandez Benitez, J. A., & Corrochano Sanchez, C. (2014). *Fundamentos de transmisión de calor*. Dextra Editorial. <https://elibro.net/es/lc/bibliouan/titulos/43834>
- INVÍAS apuesta por el uso de tecnología e inteligencia artificial para optimizar recursos y mejorar la movilidad vial del país*. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from
<https://www.mintransporte.gov.co/publicaciones/10869/invias-apuesta-por-el-uso-de-tecnologia-e-inteligencia-artificial-para-optimizar-recursos-y-mejorar-la-movilidad-vial-del-pais/>
- Jiji, L. M. (2009). Heat convection: Second edition. In *Heat Convection: Second Edition*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-02971-4>
- Krkoška, L., & Moravčík, M. (2015). The analysis of thermal effect on concrete box girder bridge. *Procedia Engineering*, *111*, 470–477. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.07.118>
- Larsson, O. (2015). *Climate change effects on design thermal actions for concrete structures*.
- Larsson, O., & Karoumi, R. (2011). Modelling of climatic thermal actions in hollow concrete box cross-sections. *Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, *21*(1), 74–79.
<https://doi.org/10.2749/101686611X12910257102550>
- Lu, Y., Li, D., Wang, K., & Jia, S. (2021). Study on solar radiation and the extreme thermal effect on concrete box girder bridges. *Applied Sciences (Switzerland)*, *11*(14).
<https://doi.org/10.3390/app11146332>

math — *Funciones matemáticas* — *documentación de Python - 3.10.4*. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from <https://docs.python.org/es/3/library/math.html>

MinTransporte, Invias, & AIS. (2014). *Norma Colombiana de Diseño de Puentes CCP14*.

NumPy. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from <https://numpy.org/>

Oraza, S. A. (2011). *Hablamos de cambio climatico. Fundación BBVA*.

pandas - Python Data Analysis Library. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from https://pandas.pydata.org/getting_started.html

Patarroyo Querales, L. A., & Meneses Real, H. D. (2020). *Temperatura superficial in situ en el puente vehicular de la Avenida Américas con Avenida Boyacá (Bogotá) y en el puente intercambiador vial el Tizón (Neiva)*.

Peng, Y., & Shizhong, Q. (2007). *ANALYTICAL SOLUTION TO TEMPERATURE VARIATIONS IN HIGHWAY CONCRETE BRIDGES DUE TO SOLAR RADIATION*.

Pulyaev, I., Pulyaev, S., Bazhenov, Y., Fetisova, A., & Shcherbeneva, O. (2019). Effect of thermal induced stress of concrete on performance characteristics of constructions. *E3S Web of Conferences*, 97. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199706026>

Rozo Grimaldos, L. J. (2018). *Medición de la temperatura superficial in situ para el puente de acceso a la terminal uno del*.

Scopus - Document search | Signed in. (n.d.). Retrieved May 23, 2022, from <https://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic&zone=header&origin=searchbasic#basic>

Sheng, X., Shi, T., Zheng, W., & Lou, P. (2022). Time-varying non-uniform temperature distributions in concrete box girders caused by solar radiation in various regions in China. *Advances in Mechanical Engineering*, 14(2). <https://doi.org/10.1177/16878140221076458>

- Wang, D., Tan, B., Wang, X., & Zhang, Z. (2021). Experimental study and numerical simulation of temperature gradient effect for steel-concrete composite bridge deck. *Measurement and Control (United Kingdom)*, 54(5–6), 681–691. <https://doi.org/10.1177/00202940211007166>
- Weather History & Data Archive | Weather Underground*. (n.d.). Retrieved May 24, 2022, from <https://www.wunderground.com/history>
- Yunus A., C., & Afshin J., G. (2007). *Transferencia de Calor y Masa - Yunus A Cengel - 3ra Ed (1)*.
- Yunus A., C., & Afshin J., G. (2014). *Heat and mass transfer: Fundamentals and applications*. McGraw-Hill Professional .
- Zhu, J., & Meng, Q. (2017). Effective and Fine Analysis for Temperature Effect of Bridges in Natural Environments. *Journal of Bridge Engineering*, 22(6), 04017017. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)be.1943-5592.0001039](https://doi.org/10.1061/(asce)be.1943-5592.0001039)

Apéndice A

```
import numpy as np
import pandas as pd

#Thermal conductivity W/m*°C
k=0.7

dt=15

#Finite difference (m)
dx=0.02

alf=12.5*10**(-6)

#Discret number of Fourier
tau=alf*dt/(dx**2)

#W/m³
e=10**6

#Convection heat transfer coefficient W/m²°C
h=35

#Ambient temperature °C
at=20

#Thickness (m)
tnc=0.08

#Concrete secctions
ncs= int(tnc/dx)

#Iterations
it=5000
```

```

A=np.zeros([it+1,6])
A[0,0]=at
A[0,1]=100
A[0,2]=100
A[0,3]=100
A[0,4]=100
A[0,5]=100
for t in range (0,it,1):
    A[t+1,0]=at
    A[t+1,1]=tau*(A[t,2]+A[t,2])+(1-2*tau)*A[t,1]+tau*e*dx**2/k
    A[t+1,2]=tau*(A[t,1]+A[t,3])+(1-2*tau)*A[t,2]+tau*e*dx**2/k
    A[t+1,3]=tau*(A[t,2]+A[t,4])+(1-2*tau)*A[t,3]+tau*e*dx**2/k
    A[t+1,4]=tau*(A[t,3]+A[t,5])+(1-2*tau)*A[t,4]+tau*e*dx**2/k
    A[t+1,5]=(1-2*tau-
2*tau*h*dx/k)*A[t,5]+2*tau*A[t,4]+2*tau*h*dx*at/k+tau*e*dx**2/k
df_A=pd.DataFrame(A) df_A.to_excel('Y.01.xlsx', index=False)

```

Apéndice B

```
import numpy as np
import pandas as pd

#Thermal conductivity W/m*°C
k=0.7

dt=900

#Finite difference (m)
dx=0.05

alf=0.44*10**(-6)

ka=0.76

#Discret number of Fourier
tau=alf*dt/(dx**2)

#W/m³
e=10**6

#Convection heat transfer coefficient W/m²°C
hint=9.1
hout=3.4

#Ambient temperature °C
atint=20

#Iterations
it=300

A=np.zeros([it+1,9])

da=2
```

```
for d in range (0,da,1):
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d,0]=0
        A[j+96*d,1]=375
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d+12,0]=4
        A[j+96*d+12,1]=750
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d+24,0]=6
        A[j+96*d+24,1]=580
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d+36,0]=1
        A[j+96*d+36,1]=95
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d+48,0]=-2
        A[j+96*d+48,1]=0
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d+60,0]=-3
        A[j+96*d+60,1]=0
    for j in range (0,12,1):
        A[j+96*d+72,0]=-4
        A[j+96*d+72,1]=0
    for j in range (0,12,1):
```

```

A[j+96*d+84,0]=-4
A[j+96*d+84,1]=0
A[0,2]=20
A[0,3]=16.66
A[0,4]=13.33
A[0,5]=10
A[0,6]=6.66
A[0,7]=3.33
A[0,8]=0
for t in range (0,it,1):
    A[t+1,2]=(1-2*tau-
2*tau*hint*dx/k)*A[t,2]+2*tau*A[t,3]+2*tau*hint*dx*atint/k
    A[t+1,3]=tau*(A[t,2]+A[t,4])+(1-2*tau)*A[t,3]
    A[t+1,4]=tau*(A[t,3]+A[t,5])+(1-2*tau)*A[t,4]
    A[t+1,5]=tau*(A[t,4]+A[t,6])+(1-2*tau)*A[t,5]
    A[t+1,6]=tau*(A[t,5]+A[t,7])+(1-2*tau)*A[t,6]
    A[t+1,7]=tau*(A[t,6]+A[t,8])+(1-2*tau)*A[t,7]
    A[t+1,8]=(1-2*tau-
2*tau*hout*dx/k)*A[t,8]+2*tau*A[t,7]+2*tau*hout*dx*A[t,0]/k+2*tau*ka*A
[t,1]*dx/k
df_A=pd.DataFrame(A)
df_A.to_excel('Y.02.xlsx', index=False)

```

Apéndice C

```
import numpy as np
import pandas as pd

#Thermal conductivity W/m*°K
k=401

dt=24

#Finite difference (m)
dx=0.075

alf=117*10**(-6)

ka=0.76

#Discret number of Fourier
tau=alf*dt/(dx**2)

#Ambient temperature °C
atint=20

#Iterations
it=5

A=np.zeros([it+1,5])

A[0,0]=20
A[0,1]=20
A[0,2]=20
A[0,3]=20
A[0,4]=20

r=3*10**5
```

```
for t in range (0,it,1):  
    A[t+1,0]=(1-2*tau)*A[t,0]+2*tau*A[t,1]+2*tau*r*dx/k  
    A[t+1,1]=tau*(A[t,0]+A[t,2])+(1-2*tau)*A[t,1]  
    A[t+1,2]=tau*(A[t,1]+A[t,3])+(1-2*tau)*A[t,2]  
    A[t+1,3]=tau*(A[t,2]+A[t,4])+(1-2*tau)*A[t,3]  
    A[t+1,4]=tau*(A[t,3]+A[t,4])+(1-2*tau)*A[t,4]  
df_A=pd.DataFrame(A)  
df_A.to_excel('T.01.xlsx', index=False)
```