

REPÚBLICA DE COLOMBIA
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO



Faculta de Educación

Programa de Maestría en Educación Matemática

**ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE LA MODELACIÓN
MATEMÁTICA, LA GAMIFICACIÓN Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
RETADORES EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DEL COLEGIO GUSTAVO
RESTREPO.**

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Edgardo Ramírez Arcos

Bogotá D.C.

2022

REPÚBLICA DE COLOMBIA
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

**ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE LA MODELACIÓN
MATEMÁTICA, LA GAMIFICACIÓN Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
RETADORES EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DEL COLEGIO GUSTAVO
RESTREPO.**

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en
Educación Matemática

Autor: Lic. Edgardo Ramírez Arcos

Director de Tesis: Dr. Gerardo Antonio Chacón Guerrero

Bogotá D.C.

2022

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. abril de 2022

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a Dios; "...den gracias al señor, porque es eterno su amor" salmo 106:1; a mi familia, mis hijas y mi esposa por su comprensión.

A la Universidad Antonio Nariño por las gratas experiencias y enseñanzas que durante estos últimos años viví con mis maestros, ya que gracias a sus sugerencias y comentarios me permitieron crecer a nivel profesional y como persona.

En especial quiero agradecer a mi maestro, el Doctor Gerardo Chacón, quien desde el inicio en esta aventura de investigación siempre tuvo un comentario de aliento y sinceridad ante cada uno de los obstáculos que se presentaban.

Al colegio Gustavo Restrepo y en especial a sus alumnos de grado 803 que siempre estuvieron dispuestos a participar activamente en el proceso de investigación; gracias muchachos esto es por ustedes y para ustedes.

A mis compañeros de trabajo, Diana, Sandra y Luis quienes a pesar de las dificultades siempre estuvieron dispuestos a ceder los espacios de clase para poder llevar a cabo las implementaciones.

A mis compañeros profesores, que con sus aportes y sugerencias me permitieron mejorar el presente trabajo.

¡Gracias a todos!!!

SÍNTESIS

La enseñanza de ecuaciones lineales mediante la modelación matemática, la gamificación y la resolución de problemas retadores en estudiantes de grado octavo del colegio Gustavo Restrepo constituye un aporte a la didáctica matemática en el dominio del álgebra, respecto de la enseñanza aprendizaje de ecuaciones lineales, integrando estrategias y métodos pedagógicos con procesos de gamificación, en procura de hacer autónomo el proceso de aprendizaje en los estudiantes, quienes al comprometerse a jugar asumen su propio riesgo de aprender acompañados por sus compañeros y el docente, en lo que ocurre una resignificación de roles dentro del aula de clase y en la forma de resolver problemas, con punto de partida en eventos cotidianos mezclados con actividades lúdicas diseñadas para alcanzar aprendizajes, como si se tratara de juegos. Se utiliza una metodología de investigación-acción enmarcada en el paradigma cualitativo y se emplea un sistema de valoración innovador que sigue el método de resolución de problemas IDEAL.

Los resultados muestran que este proceso didáctico, aunque requiere en principio esfuerzos por parte del docente, finalmente conduce a un proceso aprendizaje exitoso en el que la totalidad de los estudiantes actuaron para superar desafíos, embestir correctamente al enemigo, generar una estrategia o administrar bien los recursos entre otros, lo que se evaluó mediante descriptores como el Uso de la palabra, Mediadores visuales, Narrativas y Rutinas, y si bien cada uno de los estudiantes resolvió con autonomía los problemas a diferente ritmo, todos identificaron cómo se relacionan las expresiones algebraicas con una situación real y lo útiles que son las expresiones algebraicas para resolver nuevos interrogantes .

Palabras clave: Álgebra, ecuaciones lineales, didáctica matemática, Gamificación, Resolución de problemas.

ABSTRACT

Teaching of linear equations through mathematical modeling, gamification and the resolution of challenging problems in eighth grade students of the Gustavo Restrepo School constitutes a contribution to mathematical didactics in the domain of algebra, regarding the teaching-learning of linear equations, integrating strategies and pedagogical methods with gamification processes, seeking to make the learning process autonomous in students, who by committing to play assume their own risk of learning accompanied by their peers and the teacher, in which a redefinition of roles occurs within the classroom and in the way of solving problems, with a starting point in everyday events mixed with playful activities designed to achieve learning, as if they were games. An action-research methodology framed in the qualitative paradigm is used and an innovative assessment system is used that follows the IDEAL problem-solving method.

The results show that this didactic process, although it initially requires efforts on the part of the teacher, finally leads to a successful learning process in which all the students acted to overcome challenges, correctly attack the enemy, generate a strategy or manage well. resources among others, which was evaluated through descriptors such as the use of words, visual mediators, narratives and routines, and although each of the students independently solved the problems at a different pace, they all identified how the algebraic expressions are related with a real situation and how useful algebraic expressions are to solve new questions.

Keywords: Algebra, linear equations, mathematical didactics, Gamification, Problem solving

CONTENIDO

SÍNTESIS	i
CONTENIDO	iii
LISTA DE TABLAS	i
LISTA DE FIGURAS	ii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE	7
1.1 Principios de la Gamificación.....	7
1.1.1 Introduction to Gamification: Foundation and Underlying Theories	7
1.1.2 Los principios de la Gamificación	9
1.1.3 La narrativa como herramienta de la Gamificación	10
1.1.4 Trabajo colaborativo en la gamificación	12
1.1.5 <i>Gamificación y realidad virtual</i>	13
1.1.6 <i>Gamificación en las aulas universitarias</i>	14
1.2 Gamificación y proceso de enseñanza aprendizaje	15
1.2.1 <i>Reading with a Touch of Gameplay: Gamified E-Books' Convergence with Classical Literary Worlds</i>	15
1.2.2 <i>Didáctica de la Gamificación</i>	16
1.2.3 <i>Pedagogía constructivista y aprendizaje significativo</i>	18
1.2.4 <i>Gamificación en el aula a través de TIC</i>	19
1.2.5 Aprendizaje basado en juegos como herramienta educativa	20
1.3 Gamificación y enseñanza aprendizaje de las matemáticas	22
1.3.1. Gamificación en matemáticas.....	22
1.3.2. A Practical Study Of Mathematics Education Using Gamification ...	23
1.3.3. Aprendizaje de las matemáticas a través del ajedrez	24
1.3.4. Gamificación como estrategia para el desarrollo de competencias matemáticas	25
1.3.5. Gamificación en la enseñanza de la geometría	26
1.3.6. Aprendizaje de las matemáticas en el contexto del uso del teléfono móvil	27

Conclusión del capítulo 1	29
CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO	33
2.1. Marco histórico	33
2.1.1 Egipcios y babilonios	33
2.1.2 Griegos	34
2.1.3 Las Ecuaciones en el mundo occidental.....	34
2.1.4 La balanza Orlov	35
2.2 Teoría de la resolución de problemas	36
2.3 Modelación Matemática.....	42
2.4 Gamificación.....	46
Conclusiones del Capítulo 2	54
CAPITULO 3. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION	56
3.1. Tipo o enfoque de investigación	56
3.2. Alcance del estudio	57
3.3. Población y muestra	58
3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados	58
3.5 Valoración de resultados	58
CAPÍTULO 4. DISEÑO DE ACTIVIDADES	61
4.1. Estructura de las actividades.....	67
4.1.1 Actividad Uno: A meeting of Strangers	67
Desafío 1: Sentados en una mesa	74
Desafío 2: Cuadro del calendario	77
Desafío 3: Entre áreas.....	78
Desafío 4: EL Pescado.....	79
4.1.2 Actividad Dos: The Riddle of the Tower.....	81
4.1.3 Actividad Tres: The fastest way down	96
4.1.4. Actividad Cuatro: Trouble on the lake.....	104
4.1.5. Actividad Cinco: The Three Pillars.....	116
Conclusiones del capítulo 4.....	125
CAPÍTULO 5. VALORACIÓN DE RESULTADOS	126
5.1 Análisis de resultados desde la resolución de problemas	126
5.1.1 Actividad Uno: A meeting of Strangers	131

5.1.2 Actividad Dos: The Riddle of the Tower.....	152
5.1.3 Actividad Tres: The fastest way down	162
5.1.4 Actividad Cuatro: Trouble on the lake.....	168
5.1.5 Actividad Cinco: The Three Pillars.....	173
5.1 Análisis de resultados desde el proceso de Gamificación	180
5.2 Análisis de resultados desde la modelación matemática	184
Conclusiones del capítulo 5	186
CONCLUSIONES	186
RECOMENDACIONES	190
Bibliografía	192
ANEXOS	1

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Descripción de proceso cognitivo para resolución de problemas.....	39
Tabla 2 Matriz de descriptores para evaluación de resolución de problemas.....	59
Tabla 3 Tabla de valores en las opciones de dados y lances	64
Tabla 4 Sistema de control de avances por acciones	70
Tabla 5 Datos de juego y criterios de valor en las acciones	71
Tabla 6 Tablero de soluciones	74
Tabla 7 Tabla registro de acciones de los estudiantes	82
Tabla 8 Tabla de soluciones para las variables de la ecuación	111
Tabla 9 Aspectos de la resolución de problemas método IDEAL.....	127
Tabla 10 Matriz de componentes y descriptores en resolución de problemas....	129
Tabla 11 Resultados de actividad 1.	131
Tabla 12 Datos de la actividad 1 desafío 2.	136
Tabla 13 Datos de la actividad 1 desafío 3	141
Tabla 14 Datos de la actividad 1 desafío 4	146
Tabla 15 Datos de actividad 2 desafíos 1 y 2	152
Tabla 16 Datos de la actividad 2 desafío 3	157
Tabla 17 Datos de la actividad 3, desafíos 1,2 y 3.....	162
Tabla 18 Datos de la actividad 4	168
Tabla 19 Datos de la actividad 5	173

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Balanza de Orlov medio didáctico para enseñar ecuaciones lineales	35
Figura 2 Estaciones de la historia	61
Figura 3 Personajes del proceso de gamificación.....	62
Figura 4 Organización de grupos participantes.....	63
Figura 5 Mapa del proceso.....	64
Figura 6 Ejemplo de tarjeta de beneficios	65
Figura 7 Lados de la tarjeta de beneficios	66
Figura 8 Sistema de registro de acciones y avances	67
Figura 9 Criterios básicos de la plataforma.....	68
Figura 10 Mapa de ruta de actividad 1	¡Error! Marcador no definido.
Figura 11 Mapa representativo de dimensiones lineales	69
Figura 12 Ficha individual de control de avances	¡Error! Marcador no definido.
Figura 13 Diseño gráfico de ecuaciones lineales con elementos cotidianos.....	74
Figura 14 Carta de poder	76
Figura 15 Cuadrículas para colocar la clave de la tarjeta de poder	77
Figura 16 Cuadrado con nueve números para una expresión algebraica.....	77
Figura 17 Cuadrados y ecuaciones lineales con superficies.....	78
Figura 18 Ejemplo comparativo de áreas.....	¡Error! Marcador no definido.
Figura 19 Ecuaciones que relacionan longitudes.....	80
Figura 20 Imagen para estimular la creatividad en un proceso de gamificación ...	81
Figura 21 Rompecabezas de la torre	82
Figura 22 Tarjetas de juego	83

Figura 23 Imagen que representa una ecuación lineal	85
Figura 24 Imagen de creatividad.....	85
Figura 25 Ejercicios de ecuaciones lineales mediante imágenes	87
Figura 26 Imágenes cotidianas relacionadas con ecuaciones lineales	89
Figura 27 Imagen representativa de una ecuación lineal.....	90
Figura 28 Imagen representativa de una ecuación lineal.....	90
Figura 29 Imagen representativa de ecuación lineal.....	91
Figura 30 Imagen representativa de ecuación lineal.....	91
Figura 31 Imagen de ecuación lineal método de la balanza	92
Figura 32 Ecuación lineal representada mediante método balanza.....	92
Figura 33 Imagen de ecuación lineal mediante el método de balanzas	93
Figura 34 Imagen de ecuación lineal	93
Figura 35 Diagrama de ecuaciones lineales	94
Figura 36 Imagen de diagrama de ecuación lineal.....	95
Figura 37 Imagen de los tres guerreros del juego.....	97
Figura 38 Segmento e imagen de una ecuación.....	99
Figura 39 Actividades de recuperación gamificadas	100
Figura 40 Imagen de datos de variables de la ecuación en desarrollo	112
Figura 41 Gráfica de las variables resultantes utilizando GeoGebra	114
Figura 42 Imagen de pergamino en juego y gamificación de la enseñanza.....	117
Figura 43 Modelo en papel para elaborar una ecuación lineal.....	118
Figura 44 Pergamino para indicar parte del juego	120
Figura 45 Imagen de modelo para construir un cilindro y una ecuación	120

Figura 46 Figura digitalizada que se obtiene en GeoGebra.....	121
Figura 47 Pergamino que hace parte del juego	122
Figura 48 Imagen de hoja para crear problema de ecuaciones	122
Figura 49 Representación gráfica de ecuaciones	123
Figura 50 Representación de una ecuación en una superficie	124
Figura 51 Evidencias del desarrollo de aprendizaje en el grupo de estudiantes.	135
Figura 52 Uso de la palabra	178
Figura 53 Uso de mediadores visuales	179
Figura 54 Uso de narrativa en la solución de problemas	179
Figura 55 Seguimientos de rutina en la obtención de respuestas.....	180

INTRODUCCIÓN

El proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas presenta un gran reto en la actualidad, puesto que la búsqueda de procesos pedagógicos significativos demanda de los docentes la capacidad para pensar y enseñar en contexto educativo, comprendiendo el contexto educativo como un entorno dinámico donde la presencialidad y virtualidad generan experiencias de aprendizaje complejo mediado por la tecnología. Por ello, cada día se hace más apremiante el diseño de estrategias didácticas que motiven a los estudiantes y conduzcan la comprensión contextual educativa de los conceptos matemáticos, de manera efectiva.

En el contexto educativo se articulan de manera simultánea problemas de orden pedagógico, didáctico y matemático donde la “Gamificación” se muestra como una solución a las necesidades de motivación, compromiso y comprensión que presentan los estudiantes a la hora de enfrentarse a procesos complejos de enseñanza-aprendizaje. Consecuentemente, el diseño de actividades gamificadas tiene el potencial de llegar a ser un factor pertinente para el desarrollo de las clases de matemáticas, inclusive sin tener un objeto matemático específico, de donde emerge el reto que plantea la presente investigación.

La Gamificación aplicada a la didáctica matemática consiste en el uso de mecánicas, elementos y técnicas de diseño propios de los juegos, en contextos no lúdicos para involucrar a los participantes en la resolución de problemas (Zichermann & Cunningham, 2011; Werbach & Hunter, 2012).

Esta estrategia parte de la posibilidad de aplicar, por transferencias, habilidades cognitivas, sociales, afectivas, etc., requeridas en determinado campo (los juegos) a uno distinto (las matemáticas). Dicha perspectiva fundamenta, por ejemplo, las aplicaciones didácticas rigurosas del ajedrez en la escuela.

La viabilidad de esta estrategia en el aula radica en su capacidad para motivar el aprendizaje activo y significativo, permitir una retroalimentación constante, así como fortalecer el compromiso por parte del estudiante con el contenido y con las tareas, dado que explora la dimensión lúdica de los seres humanos, es decir, su natural propensión al juego como actividad espontánea, en un entorno con una perspectiva estructurada y planificada, posibilitando hacer medibles los resultados de las actividades a partir de rasgos específicos de ciertos juegos (como niveles, puntos, badges, etc.), mientras que, de manera simultánea, el estudiante afianza su autonomía y su propensión al trabajo competitivo y colaborativo.

Si bien existe una diferencia entre *juego* como actividad estructurada (con reglas, estrategias, metas y resultados) y *jugar* (que implica disfrutar de la acción al divertirse), en la Gamificación se busca un equilibrio entre ambas, guiando al estudiante e involucrándolo con el aprendizaje, a partir de retos y elecciones, en la búsqueda de la resolución de problemas concretos (superar un nivel, por ejemplo). En medio de este proceso, el estudiante aprende a tomar sus propias decisiones. Así, Hamari y Koivisto publicaron, en 2013, un estudio titulado *Social Motivations to Use Gamification: An Empirical Study of Gamifying Exercise* en donde establecen algunos rasgos característicos de la estrategia de gamificación con respecto a la espontaneidad de los juegos.

En primer lugar, la Gamificación tiene como principal objetivo influir en el comportamiento de las personas, con independencia de objetivos secundarios como el disfrute de las personas durante la realización del juego. A la vez, la Gamificación produce y crea experiencias, crea sentimientos de dominio y autonomía en las personas, dando lugar a un considerable cambio en su comportamiento. Los videojuegos crean experiencias hedonistas por el medio audiovisual, mientras que la Gamificación crea expectativas de posibles cursos de acción.

También existen diferencias entre la Gamificación y juegos educativos en las aulas, en el sentido de que la primera muestra un espacio de interacción más atractivo para los jugadores (Kapp, 2012), mientras que la segunda no lo hace o dispone de medios que satisfacen las perspectivas de quienes los diseñan, pero no de quienes participan en ellos.

En complemento a la Gamificación, como parte de la estrategia didáctica para la enseñanza de conceptos matemáticos, existe el concepto de la modelación matemática trabajado en el presente trabajo, comprendiendo la modelación matemática como un intento de describir partes del mundo real en términos matemáticos (Brito et al., 2011). Los modelos matemáticos han sido utilizados en las diferentes ramas de la física, astronomía, la biología y las ciencias sociales, como la forma de dar respuesta a un problema matemático para formular un modelo que permita sacar conclusiones e interpretar y obtener predicciones acerca del mundo real de tal forma que validen la solución a un problema.

En el contexto de la matemática escolar la modelación matemática puede ser comprendida como estudios que surgen a partir de contextos cotidianos de los

estudiantes que pueden ser sociales, culturales o de otras disciplinas académicas; que permiten desarrollar herramientas matemáticas que ofrecen una aproximación a la comprensión de un fenómeno o la solución de un problema (Villa, 2012).

En este orden de ideas, se abre un problema de investigación pedagógica que consiste en ligar el concepto y las prácticas de la Gamificación con la modelación en educación matemática. Esto es, plantear la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el aula, a partir del desarrollo de actividades de reto, que incluyan estrategias cercanas a las de los juegos de rol.

Por lo tanto, la presente investigación procura responder la pregunta que emerge, ¿Cómo utilizar la Gamificación, la modelación matemática y la resolución de problemas en una clase de matemáticas de tal manera que se potencialice el aprendizaje de ecuaciones lineales haciendo lúdica la comunidad de práctica en estudiantes de grado octavo del Colegio Gustavo Restrepo IED?

Se precisa como objeto de estudio el proceso enseñanza aprendizaje en el dominio de álgebra, categoría de las ecuaciones lineales, y se plasma como objetivo: Desarrollar el pensamiento algebraico de ecuaciones lineales mediante la Gamificación como recurso didáctico dentro de la estrategia pedagógica vinculada a la modelación de situaciones problemas, para alcanzar como resultado el aprendizaje de expresiones algebraicas en estudiantes de grado octavo del Colegio Gustavo Restrepo IED.

De esta manera el campo de acción se enfoca hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en el contexto de la modelación matemática escolar; y puesto que la investigación se desarrolla bajo el paradigma cualitativo descriptivo, en la búsqueda

del cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se plantea a manera de hipótesis que el uso de actividades para el aprendizaje de las matemáticas que emplea la Gamificación, la modelación matemática y la resolución de problemas retadores en la categoría de las expresiones algébricas aumenta la motivación y el aprendizaje autónomo del estudiante en el dominio del álgebra pudiendo ser evaluado mediante la superación hitos o niveles del proceso de Gamificación.

Para llevar a cabo el objetivo propuesto se diseñaron las siguientes tareas de investigación:

1. Mostrar las principales características de la Gamificación y su relación con procesos de enseñanza y aprendizaje.
2. Abordar procesos de investigación que se han llevado a cabo en torno a la relación entre Gamificación y matemáticas.
3. Diseñar e implementar un sistema de actividades para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la Gamificación.
4. Valorar los resultados de la aplicación de las actividades.

El aporte teórico-práctico se orientó a la propuesta estratégica de actividades Gamificación, sustentadas en problemas retadores, conocimientos matemáticos y la modelación matemática escolar, que favorece el pensamiento matemático y estratégico en estudiantes de grado octavo del Colegio Gustavo Restrepo IED.

En la parte descriptiva la investigación consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se elabora un análisis del estado del arte, que revisa aportes de varios investigadores y autores en las

temáticas que se abordan en el trabajo. En el segundo, se plantean los fundamentos teóricos en los que se basa el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, particularmente la teoría de resolución de problemas, la modelación matemática escolar y la enseñanza del álgebra. En el tercer capítulo se aborda la metodología de la investigación. En el cuarto, se propone un sistema de actividades que propicia el aprendizaje de las matemáticas en el dominio del álgebra, en la categoría de las ecuaciones lineales. En el quinto capítulo se realiza un análisis de la implementación de las actividades en la práctica, dando finalmente alcance a las conclusiones y recomendaciones respectivas a la investigación.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

Este capítulo enmarca el análisis de literatura científica que explora la relación existente entre la Gamificación y la enseñanza aprendizaje de las matemáticas escolares. Para tal objetivo se plantea el análisis inicial de los principios y definiciones existentes en la Gamificación, luego se realiza el análisis de artículos científicos relacionados con la teoría de la enseñanza aprendizaje y sus diferentes aportes a la teoría. Finalmente, se realiza el estudio de la relación entre Gamificación y la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

1.1 Principios de la Gamificación

Inicialmente se concibe la Gamificación como la utilización de las reglas y elementos de los juegos de rol o videojuegos, para la construcción de estrategias que involucren al estudiante de manera positiva en procesos enseñanza aprendizaje. A continuación, se presenta el análisis recolectado acerca de las características y propuestas de artículos relacionados con la Gamificación de manera general.

1.1.1 Introduction to Gamification: Foundation and Underlying Theories¹

Este artículo proporciona definiciones, conceptos y teorías básicas que se utilizan en la gamificación; distingue la gamificación de otras áreas de investigación, como el diseño lúdico y los juegos serios; presenta la mecánica común de los juegos, los sistemas de logros, la dinámica del juego y la estética. También describe las teorías subyacentes; examina la influencia de la teoría de la motivación y la teoría del flujo en

¹ Matallaoui, A., Hanner, N., & Zarnekow, R. (2017). *Introduction to Gamification: Foundation and Underlying Theories*. Gamification Using Game Elements in serious Contexts, Springer, 2017, 3 - 16.

la gamificación (Matallaoui, Hanner, & Zarnekow, 2017); anotando diferentes arquetipos de jugadores, lo que se considera como un aporte valioso para la presente investigación. Así mismo, los autores sugieren una definición de la gamificación, citando a Deterding (2011), quien la define como el uso de elementos de diseño de juegos en contextos no relacionados con ellos.

De otra parte, el trabajo en mención establece características para la mecánica, dinámica y estética de la Gamificación, utilizando las siguientes características:

- Integración y visualización de un componente de medición del progreso y la experiencia, como barras de niveles
- Información continua y rápida
- Previsión de objetos a largo y corto plazo
- Recompensa progresiva por la consecución de determinadas tareas
- Mecanismos de recompensa imprevistos y no deterministas
- Ofrecer un modo multijugador (por ejemplo, mejora la colaboración y/o el desafío)

Dentro de la estética de la Gamificación resaltan las respuestas emocionales que conlleva el desarrollo de las actividades. Por ejemplo; el placer sensorial, la fantasía, la narrativa, el desafío, compañerismos, el descubrimiento, la expresión y la presentación. Finalmente establece una aproximación a la caracterización de los cuatro tipos de arquetipos utilizado por los estudiantes, tales como, los asesinos que representan a los usuarios competitivos que disfrutan desafiando a otros usuarios y ganando contra ellos; el triunfo es el objetivo clave. Los “achievers” caracterizan el tipo

de usuarios cuyo principal incentivo es acumular puntos, subir de nivel y obtener una mejor clasificación; Los socializadores que representan el tipo de usuarios que utilizan la aplicación como puente para entrar en contacto con otros usuarios e interactuar con ellos. Los exploradores quienes representan el tipo de usuarios que quieren descubrir la aplicación y sus límites.

1.1.2 Los principios de la Gamificación²

En esta revisión, es muy importante traer a colación los elementos implicados en el aspecto tecnológico que han llevado a la conjunción entre la pedagogía y los vídeos juegos. Yu Kai Chou (2017), en su presentación virtual Los ocho principios de la gamificación, jugar para competir mejor, expone cómo se han descubierto los principios que hacen que las personas se involucren de manera comprometida en actividades ludificadas. Su trabajo se fundamenta en responder a la pregunta: ¿qué es lo que hace atractivo al juego? A lo que responde que existe un sistema “octalisis”.

Tal sistema se basa en ocho motores: el primero es el significado y motivación épicas (“tú eres el único que puede salvar el mundo”); el segundo. el logro (estamos subiendo de nivel y nos sentimos muy motivados, ves aumentar los puntos); el tercero, potenciar la creatividad (acude al ego, les das a los usuarios ladrillos de construcción y ellos crean diversas estrategias productos); el cuarto es la posición (es decir la acumulación de puntos, lo tuyo); el quinto, la influencia social y afinidad (estar conectado con tus afines); el motor seis es la escasez y la impaciencia (cuando hay algo fuera de nuestro

² Yu Kai Chou (2 de junio 2017). *Los ocho principios de la gamificación; jugar para competir mejor* [Archivo de vídeo]. Recuperado <https://www.youtube.com/watch?v=1bK8qG3nIgl&t=49s>

alcance lo queremos para nosotros); el séptimo es la imprevisibilidad y la curiosidad (rifas, loterías, o terminar un libro); el octavo, el motor de pérdida o evitación (no queremos perder y a veces solo se trata de evitarlos).

Para Yu Kai Chou (2017), lo importante es comprender “que no se trata de tecnología, ni de funciones, ni de características, sino cómo se interesa el cerebro por los estímulos, por el entorno, qué le emociona, y utilizar la empatía para saber crear una experiencia mejor”. El problema no es solo conocer y saber utilizar la tecnología disponible, sino, ante todo, comprender las conexiones que logran establecerse entre las actividades y la significación en el aprendizaje, a través de los recursos tecnológicos. En este sentido, la presente investigación se enriquece con la propuesta de Yu Kai Chou al indagar las posibilidades didácticas y pedagógicas de la ludificación, en el campo específico del aprendizaje contextual de las matemáticas.

1.1.3 La narrativa como herramienta de la Gamificación³

El trabajo de Barreal y Jannes (2019), *La Narrativa como Herramienta Docente Dentro de La Gamificación de La Estadística en el Grado en Turismo*, aporta unos criterios clave en torno a la narrativa que ha de involucrar un proceso de ludificación. Siguiendo el estudio semiótico de Todorov, los autores sintetizan la dinámica de la narrativa siguiendo cinco preceptos:

1. Iniciar la historia: presentar los personajes, el espacio de desarrollo de la actividad, los antecedentes y el tiempo de desarrollo.

³ Barreal, J., & Jannes, G. (2019). *La narrativa como herramienta docente dentro de la gamificación de la estadística en el Grado en Turismo*. Madrid: Universidad Complutense.

2. El desarrollo: la evolución de los hechos y acciones del juego que mantengan la intriga o complicación: se establece una progresión de incidentes y episodios que complican la acción y mantienen la intriga
3. La valoración: se evalúan los sucesos del juego, tanto por el narrador como por los jugadores.
4. El desenlace: concluye la acción a través de la resolución del conflicto.
5. La situación final: a través de los anteriores episodios se llega a un nuevo estado resultante de las acciones llevadas a cabo. (p. 157)

Esto describe los diferentes pasos, restricciones, desarrollo y cierre que debe tener la dinámica de la narrativa personal, en el planteamiento didáctico ludificado. Por esta misma razón, la apertura de las actividades debe partir de la autonomía de los estudiantes, y el desarrollo ser lo suficientemente flexible para que promueva la toma de decisiones: *“los beneficios de la gamificación deben de estar bien explicados para que el alumno perciba su importancia en su proceso formativo. En caso contrario implicará una desmotivación y un posible abandono del juego por parte del estudiante”*⁴.

Este aporte es significativo, ya que quien diseña las actividades ludificadas debe tener en cuenta el perfil de los estudiantes a quienes está orientado, la tipología de los participantes y los niveles que pueden ir alcanzando, en el desarrollo de las competencias requeridas en el proceso de aprendizaje. Solo como un proceso

⁴ Barreal, J., & Jannes, G. (2019). *La narrativa como herramienta docente dentro de la gamificación de la estadística en el Grado en Turismo*. Madrid: Universidad Complutense. p. 157.

consciente y planificado tiene sentido el diseño de dichas actividades, pues en ello se distingue de los juegos en contextos diferentes a los propiamente educativos.

1.1.4 Trabajo colaborativo en la gamificación⁵

El trabajo colaborativo como orientación constructivista también está presente en los entornos tecnológicos, en los que se desenvuelven los procesos ludificados; y en este contexto, el trabajo *Fortalecimiento del trabajo colaborativo de los estudiantes del curso undécimo A, en el área de contabilidad-informática del Colegio colombo japonés de Bogotá mediante la plataforma de ludificación classcraft* de Gómez, Osorio y Tapiero (2015) es un valioso aporte, ya que proporciona algunos enfoques y dinámicas de las diferentes plataformas que se están utilizando actualmente en gamificación.

Algunas de aquellas plataformas inicialmente se centraron en los factores relacionados con el aprendizaje de contenidos y la interacción con las tareas propias del proceso, pero no daban mayor importancia a los comportamientos de los participantes; por el contrario, las nuevas tendencias están orientadas al trabajo colaborativo que es de suma importancia, pues, como afirman Gómez, Osorio y Tapiero (2015), es característico de estas plataformas el permitir *“a los profesores proporcionar retroalimentación en tiempo real a los estudiantes con respecto a la conducta individual y de grupo, otorgando o restando puntos por conductas específicas”*⁶

⁵ Gómez, A., Osorio, D., & Tapiero, G. (2015). *Fortalecimiento del trabajo colaborativo de los estudiantes del curso undécimo a, en el área de contabilidad-informática del Colegio colombo japonés de Bogotá mediante la plataforma de ludificación classcraft*. Bogotá: Fundación Libertadores.

⁶ Gómez, A., Osorio, D., & Tapiero, G. (2015). *Fortalecimiento del trabajo colaborativo de los estudiantes del curso undécimo a, en el área de contabilidad-informática del Colegio colombo japonés de Bogotá mediante la plataforma de ludificación classcraft*. Bogotá: Fundación Libertadores. p.25.

Al respecto, los autores del estudio sugieren que una plataforma adecuada para el ejercicio de la ludificación no debe limitarse a la disposición de los contenidos objeto de aprendizaje, sino que debe tener en cuenta también algunos factores que permitan observar los comportamientos de los estudiantes. Por esta razón, recomiendan aquellas herramientas virtuales que, mediante su aplicación, premien y corrijan las acciones de los participantes.

Gómez, Osorio y Tapiero (2015) ponen como ejemplo una actividad en la que se logra este tipo de aprendizaje colaborativo. En ella, se premian acciones de los estudiantes como, ayudar a un compañero a llevar a cabo un trabajo, responder acertadamente una pregunta acerca de las temáticas abordadas, acatar una retroalimentación, cumplir con puntualidad los plazos para la entrega de tareas y la asertividad en el trabajo en clase; de igual manera, se penaliza, con la pérdida de puntaje acciones como incumplir los horarios de clase, la indisciplina, la mala disposición en el aula o la falta de diligencia en la entrega de trabajos. Al tomar como base esta dinámica, el docente se provee de herramientas interactivas para establecer normas concretas en el aula de clase, pero, además, de incentivos prácticos para que los estudiantes reflexionen sobre su rendimiento y sopesen las consecuencias de sus acciones en el aula.

1.1.5 Gamificación y realidad virtual⁷

Un grupo de docentes mexicanos llevó a cabo una interesante experiencia de ludificación, en el área de la historia. *La Gamificación En Los Ambientes De Realidad Virtual Móvil*, de Torres, Franco, Gutiérrez y Suárez (2019), aporta una forma de

⁷ Torres, G., Franco, A., Gutiérrez, M., & Suárez, A. (2019). *La Gamificación En Los Ambientes De Realidad Virtual Móvil*. Pistas Educativas, No. 133, julio 2019, 671-699.

desarrollo de ludificación mediante la Metodología para el Desarrollo de Entornos Educativos de Realidad Virtual (MEDEERV), que consiste en el desarrollo de tres etapas: 1. Diseño sistemático de la instrucción, 2. Diseño funcional del mundo virtual, y 3. Implementación; esta investigación se sigue de cerca dicha metodología.

El trabajo de Torres, et al. (2019), enfatiza en un aspecto que se debe tener en cuenta en toda ludificación a saber: además de los elementos constitutivos del juego, sus reglas, el entorno tecnológico y el diseño de los procesos, la propuesta pedagógica debe tener en cuenta “la narrativa en primera persona” (p. 678), que lleva al estudiante a vivenciar y a interactuar como actor en el proceso de aprendizaje, con lo que los conocimientos adquieren un sentido de mayor aprehensión y aprendizaje. Sin este factor de experiencia subjetiva, el proceso de aprendizaje pierde sentido práctico y elude la disposición natural de los individuos al juego.

1.1.6 Gamificación en las aulas universitarias⁸

La obra de Contreras y Eguia (2017) *Gamificación en aulas universitarias* desarrolla algunos aspectos importantes para esta investigación, cuando presenta elementos que se deben tener en cuenta a la hora de planear y llevar a cabo ejercicios de gamificación; entre ellos, es esencial revisar que las actividades estén centradas en los mecanismos cognitivos de los estudiantes que participan del proceso, más que en el software que sirve de soporte. Por otra parte, los autores afirman que es necesario también definir con claridad el rol del docente, que no puede ser el de transmisor del conocimiento.

En la educación tradicional, el docente representa a la escuela y sus principios disciplinarios, en lo que Contreras y Eguia (2017) denominan un “contexto local”,

⁸ Contreras, R., & Eguia, L. (2017). *Gamificación en aulas universitarias*. Bellaterra: Institut de la Comunicació, Universitat Autònoma de Barcelona, 10 - 18.

mientras que en la gamificación el docente debe salir del enfoque normal de esa enseñanza tradicional para ubicarse en un “contexto global”, pues no representa los intereses de la Escuela local solamente, sino que actúa con el conocimiento y el apoyo de la misma como organización que trasciende sus marcos institucionales.

Estos aportes conducen a una definición un poco más concreta de la gamificación, cuando Contreras y Eguia (2017) afirman que “Gamificar es pensar en un concepto y transformarlo en una actividad que puede tener elementos de competición, cooperación, exploración y narración y que busca la consecución de objetivos a medida de una organización” (p. 15).

1.2 Gamificación y proceso de enseñanza aprendizaje

Luego de analizar las diferentes características de la Gamificación y sus aportes a diversos campos, en este apartado nos centraremos en el análisis de las relaciones y aportes al proceso de enseñanza aprendizaje revisando varios trabajos que merecen atención.

1.2.1 Reading with a Touch of Gameplay: Gamified E-Books’ Convergence with Classical Literary Worlds⁹

Este artículo analiza diez libros electrónicos con el fin de descubrir los distintos recursos retóricos utilizados para mejorar la experiencia de la lectura y lograr convergencia con el mundo literario original; recursos que orientan en parte el presente trabajo, ya que estos elementos enriquecen la elaboración de las actividades y deben utilizarse para el diseño de las mismas.

⁹ Rughinis, R., & Rughinis, C. (2017). 1.2.1. *Reading with a Touch of Gameplay: Gamified E-Books’ Convergence with Classical Literary Worlds*. Gamification Using Game Elements in serious Context. Editoria, Springer.

Rughinis y Cosima (2017) establecen que para el estudio de los mundos literarios clásicos con los niños y adultos es necesario considerar diferentes estrategias. Algunas de las estrategias establecidas son los libros electrónicos y la utilización de la multimedia; sin embargo, los autores establecen que, *“hotspots o los mini juegos no contribuyen, en conjunto, a la comprensión de los libros ni al vocabulario expresivo. Además, anotaron que los efectos positivos de los elementos multimedia, “pueden distraer a los niños del seguimiento de la historia”*¹⁰

Este análisis conduce a que es necesario establecer ciertos límites en la utilización de las plataformas digitales para la elaboración de las actividades en matemáticas puesto que pueden conllevar a la distracción. Finalmente, los autores concluyen que los libros electrónicos gamificados ofrecen muchas posibilidades específicas para lograr la convergencia en los mundos de las historias, pues resalta las experiencias subjetivas de los personajes a través de percepciones, elecciones y emociones.

1.2.2 Didáctica de la Gamificación ¹¹

Foncubierta y Rodríguez (2006), en su trabajo *Didáctica de la gamificación en la clase de español*, presentan una serie de análisis que son valiosos al momento de proponer actividades gamificadas en los procesos educativos. Estos autores parten de un principio fundamental: “la gamificación puede que haya llegado a sectores como la empresa, la publicidad o los departamentos de recursos humanos, pero sin duda ya

¹⁰ Rughinis, R., & Rughinis, C. (2017). Reading with a Touch of Gameplay: Gamified E-Books' Convergence with Classical Literary Worlds. Gamification Using Game Elements in serious Context. Editoria, Springer. p. 124

¹¹ Foncubierta, J., & Rodríguez, C. (2006). *Didáctica de la Gamificación en la clase de español*. Editoria, Edinumen.

estaba en el aula, siempre ha estado ahí, ese ha sido su hábitat natural” (p. 3). En efecto, su enfoque consiste en reevaluar algunos factores que ya se encuentran en la interacción en la escuela, pero que tienden a ser opacados por la enseñanza tradicional.

Entre las virtudes de proponer procesos pedagógicos gamificados, Foncubierta y Rodríguez (2006) mencionan que hay juegos que requieren de una experiencia de trabajo en equipo y permiten fortalecer, entre tanto, la individualidad al conquistar logros colectivos. Al participar en juegos en equipo, se fortalece la autoimagen y se fomenta la curiosidad que impulsa el descubrimiento y la exploración. Si se entiende la competición como un elemento estimulante, sana, útil y práctica, se puede recurrir a ella en los procesos gamificación. De hecho, los seres humanos necesitamos tener una sensación de dirección, un horizonte para alcanzar una utopía, que esta metodología puede aprovechar. Existe un temor en los seres humanos a fallar, a cometer errores, y ello retrotrae muchas veces el participar en actividades; pero en el juego existe cierto sentido de libertad y riesgo que no implica consecuencias mayores. Este último análisis sobre el error es valioso en la enseñanza de conceptos matemáticos, pues el diseño de actividades ludificadas a partir de la construcción de identidades, las narraciones dinámicas y concebir el aula de clase como un lugar de simulaciones y fantasías permite que los estudiantes se encuentren, de una manera edificante con “ese universo de contradicciones”. Por lo que, de acuerdo con Foncubierta y Rodríguez (2006):

La contradicción será algo admitido como válido en el pensamiento del juego y, así, teñir de estas posibilidades las tareas de aprendizaje hará que crezca y

madure esa vieja idea tan valiosa de que el “error” forma parte del aprendizaje o que –como sostenía el viejo Coseriu– “ningún error es solo error”. Junto a ello, los sistemas digitales que permiten feedback inmediato abundan aún más en esa sensación de que el error es útil porque me permite ser consciente, aprender y desarrollar autonomía: porque puedo aprender a aprender (p. 5)

1.2.3 Pedagogía constructivista y aprendizaje significativo¹²

En el contexto colombiano, el trabajo *Desarrollo pedagógico Constructivista con enfoque en el Aprendizaje Significativo del contenido: Educación Vial para usuarios, niños (a) de 9 a 11 años, para la organización Mil Ideas Internet*, ubicada en la ciudad de Bogotá, localidad Antonio Nariño, de Bernal (2018), aporta a la presente investigación en lo que respecta a su fundamentación pedagógica, dado el papel fundamental que el autor adjudica a la ludificación, en el desarrollo de la pedagogía constructivista.

De acuerdo con Bernal (2018), a partir de esta metodología se logra adquirir herramientas que parten de las experiencias que el estudiante tiene cuando aprende de manera didáctica, pues el juego está íntimamente ligado con la motivación.

En efecto, el proceso de ludificación de la enseñanza está estrechamente ligado a la línea constructivista del aprendizaje significativo, en el que los estudiantes van desarrollando habilidades, en un ambiente de disfrute de su interés por un contenido

¹² Bernal, J. (2018). *Desarrollo pedagógico Constructivista con enfoque en el Aprendizaje Significativo del contenido: Educación Vial para usuarios, niños (a) de 9 a 11 años, para la organización Mil Ideas Internet, ubicada en la ciudad de Bogotá, localidad Antonio Nariño*. Bogotá: Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD).

virtual o tecnológico. Por otra parte, emerge de manera natural el aspecto competitivo personal y grupal, dentro de unas reglas que son comunes a todos los participantes, que, en el caso de la obra en ciernes, son niños y niñas de 9 a 11 años. Así, la presente investigación establece una orientación constructivista que otros estudios han trabajado con éxito.

1.2.4 Gamificación en el aula a través de TIC ¹³

Por cuanto la posibilidad de ludificar procesos de enseñanza de las matemáticas es abierta y puede seguir las virtudes pedagógicas que el juego modela, solo que en este caso los recursos didácticos son digitales, se deben tener en cuenta otras variables, tal como lo sugiere Morillas (2016) en su tesis doctoral *Gamificación de las aulas mediante las TIC: Un cambio de paradigma en la enseñanza presencial frente a la docencia tradicional*. Allí se afirma que este tipo de aprendizaje tiene dos aspectos que deben ser tenidos en cuenta a saber: la inserción de recursos tecnológicos en el aula y la redefinición de la relación tradicional estudiante-profesor, en la que se remarca la función posibilitadora del segundo, más que la puramente “transmisora”, y en la que el primero es un agente más autónomo del aprendizaje.

Morillas (2016) resume los dos procesos que han significado la introducción de las TIC en las aulas, e-learning y b-learning, con sus implicaciones sobre la enseñanza. Como herramientas de gestión de internet en el campo educativo, el e-learning busca facilitar el acceso y el manejo de plataformas tecnológicas, a través de recursos como “MOOC”

¹³ Morillas, C. (2016). *Gamificación de las aulas mediante las TIC: Un cambio de paradigma en la enseñanza presencial frente a la docencia tradicional* (Tesis doctoral). Universidad Miguel Hernández, Elche, Alicante.

(acrónimo en inglés de *Massive Open Online Course*), que son espacios de formación de acceso abierto en internet, dirigidos a un público amplio. El b-learning (*blending learning*) se refiere a la enseñanza semi-presencial, en la que el docente y el estudiante se encuentran en escenarios virtuales y físicos compartidos, lo cual ha dado lugar a nuevos enfoques como el que ocupa este esfuerzo investigativo, relacionado con la enseñanza mediante la ludificación.

El e-learning y el b-learning requieren de un aspecto importante para llevar a cabo estas modalidades formativas, como es la existencia de un entorno tecnológico que los sustente, pues, afirma Morillas (2016), *“las plataformas de e-learning, llamadas LMS (learning management system), son las herramientas software que permiten distribuir los contenidos didácticos y organizar los cursos on-line. ... existen numerosas plataformas al servicio de la enseñanza, tanto gratuitas como de pago”*¹⁴, plataformas que son igualmente útiles en el proceso de ludificación

1.2.5 Aprendizaje basado en juegos como herramienta educativa ¹⁵

Con su tesis doctoral, *Aprendizaje basado en juegos serios como herramienta de la educación para todos*, García (2015) aporta la diferencia requerida para avanzar hacia un concepto más claro del proceso de gamificación en educación cuando expresa: *“...se puede diferenciar el recurso educativo del juego digital, en cuanto es un instrumento que puede ser utilizado con un propósito de ocio, pero también a efectos*

¹⁴ Morillas, C. (2016). Gamificación de las aulas mediante las TIC: Un cambio de paradigma en la enseñanza presencial frente a la docencia tradicional (Tesis doctoral). Elche, Alicante.: Universidad Miguel Hernández., p. 24.

¹⁵ García, M. (2015). *Aprendizaje basado en juegos serios como herramienta de la educación para todos* (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca.

de técnica de apoyo en la potenciación de las habilidades intelectuales, físicas o sociales en general en las personas.

Sólo se encuentra aprendizaje cuando se proporciona a las acciones un orden o fin que las explica y dota de sentido”¹⁶.

En este contexto, García (2015) explica que una de las problemáticas más apremiantes asociadas al uso de las TIC consiste en la accesibilidad pedagógica. Por dicho concepto, el autor entiende el *“grado de facilidad en la participación, acceso y desarrollo del individuo en el proceso de enseñanza-aprendizaje”*; *ahora bien, si “el diseño de una situación de aprendizaje viene determinado en función del contenido pedagógico que se marca como objetivo (concepto, habilidad/destreza o actitud)”, de ello se sigue que el acceso a los medios educativos cambia con respecto a las “competencias específicas tanto cognitivas, comunicativas y lingüísticas, como de interacción general con el entorno personal social, en las que se desarrollan los referidos procesos de aprendizaje”¹⁷* Por consiguiente, los medios pedagógicos y la accesibilidad de los mismos deben estar en concordancia con los rasgos psicosociales de quienes participan de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Efectivamente, los estudiantes de grado octavo, población de la presente investigación, oscilan entre los 11 y los 15 años de edad y presentan un nivel de madurez intelectual con competencias cognitivas, comunicativas y de resolución de

¹⁶ García, M. (2015). Aprendizaje basado en juegos serios como herramienta de la educación para todos (Tesis doctoral). Salamanca: . Universidad de Salamanca. p. 68.

¹⁷ García, M. (2015). Aprendizaje basado en juegos serios como herramienta de la educación para todos (Tesis doctoral). Salamanca: . Universidad de Salamanca. p. 68 - 69.

problemas matemáticos acordes con su desarrollo académico. Por otra parte, son estudiantes que, de acuerdo a las generalidades de su grupo etario, tienen accesibilidad a recursos digitales, juegos y videojuegos, así como a sus reglas, procedimientos y mecanismos. Esto permite proyectar procesos de gamificación en el aprendizaje de matemáticas para fortalecer la competencia de resolución de problemas.

1.3 Gamificación y enseñanza aprendizaje de las matemáticas

La apuesta por un proceso de enseñanza-aprendizaje innovador, basado en la ludificación de las operaciones matemáticas básicas como alternativa pedagógica a las prácticas educativas tradicionales, es un desafío que exige hacer interrupciones cognitivas, dado que implica relacionar el campo específico de la didáctica con la estrategia emergente de enseñar con base en juegos y sus reglas, puesto que conduce a analizar lo relacionado con dicha estrategia y sus aportes en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

1.3.1. Gamificación en matemáticas¹⁸

En su trabajo *Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra?*, publicado en España, Muñoz, Hans y Fernández (2019) establecen una importante diferencia entre la gamificación como metodología educativa y el aprendizaje basado en juegos. Para estos investigadores, “*la ludificación se basa en incorporar dinámicas o mecanismos de juego (puntos, ranking, insignias, reglas de juego, etc.) a procesos*

¹⁸ Muñoz, J., Hans, A., & Fernández, A. (2019). *Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra?* *Revista de Educación Matemática*, No. 101, 2019, 29 - 45

que de por sí no son muy 'jugables', valiéndose de la predisposición psicológica del ser humano para participar en juegos"¹⁹ La gamificación utiliza dinámicas propias de los juegos, especialmente de los videojuegos, en contextos no lúdicos que pueden ser profesionales, sociales, educativos, etc. Su objetivo primordial es conseguir modificar el interés de una parte de la población hacia un determinado producto o situación.

De acuerdo con la indagación en mención, diversos autores definen la Gamificación como una metodología de enseñanza derivada del ambiente de los juegos tecnológicos, aplicados a la vida empresarial. Por lo que requiere una revisión crítica, ya que la gamificación es un proceso que indica nuevos derroteros de la enseñanza, pero no es aplicable a todos los escenarios de la enseñanza.

Si bien el aprendizaje basado en juegos es una estrategia que ha estado presente en los procesos pedagógicos desde que la humanidad tiene memoria, su estudio y desarrollo específico corresponde a unas décadas recientes, lo que a su vez ha ido evolucionando con el aporte de las tecnologías de la información. Sin embargo, surgen ciertos interrogantes sobre la perspectiva de uso, tanto de los juegos como de las tecnologías, diferenciando los recursos educativos de los juegos digitales que hacen parte del proceso de gamificación.

1.3.2. A Practical Study Of Mathematics Education Using Gamification

Este artículo explora el uso de la Gamificación en las clases de matemáticas para estudiantes de primaria, con el fin, de establecer la relación entre la educación

¹⁹ Muñoz, J., Hans, J., & Fernández, A. (2019). Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra? Épsilon - Revista de Educación Matemática, nº 101., 29-45.

matemática y su aplicación en la sociedad. Como punto de partida, los autores Sakai y Shiota (2016) afirman que el problema en la educación escolar radica en el cómo relacionar los conceptos aprendidos en matemáticas con la vida cotidiana. Una de las razones de dicha problemática radica en que los profesores les resulta difícil plantear preguntas adecuadas para los alumnos. A partir de la problemática, el estudio reflejó que con la ayuda de la Gamificación los estudiantes establecen conexión de conceptos matemáticos de la asignatura con la sociedad.

1.3.3. Aprendizaje de las matemáticas a través del ajedrez²⁰

Respecto al aprendizaje de las matemáticas y la competencia de resolución de problemas, el juego de ajedrez tiene ciertas aportaciones que Gairin y Fernández (2010), en su trabajo titulado *Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez*, ponen de manifiesto: “*Los juegos sirven, así, tanto para desarrollar contenidos conceptuales (sumas, restas, comparaciones numéricas,...) como procedimentales (recoger datos manipular, experimentar, deducir,..), y actitudinales (interés por la investigación, satisfacción por los procesos lógicos,..)*”²¹ aspectos que no excluyen, por supuesto, el disfrute lúdico de los estudiantes, mientras se acercan al aprendizaje de las matemáticas. Es, precisamente, la posibilidad de ligar la praxis del juego con la enseñanza lo que puede permitir un aprendizaje significativo, lo cual se evidencia en los resultados de la presente investigación.

²⁰ Gairin, J., & Fernández, J. (2010). Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. *Tendencias Pedagógicas*, vol 15, No 1., 57-90.

²¹ Sakai, K., & Shiota, S. (2016). *A Practical Study Of Mathematics Education Using Gamification*, International Conferences ITS, ICEduTech and STE 2016.

1.3.4. Gamificación como estrategia para el desarrollo de competencias matemáticas

La investigación realizada en Ecuador por Macías (2017), *La Gamificación como estrategia para el desarrollo de la competencia matemática: plantear y resolver problemas*, proporciona una serie de elementos que son relevantes al momento de usar esta metodología de enseñanza-aprendizaje. En el terreno de la práctica del ejercicio está, en primer lugar, la creación de perfiles, a partir de los cuales los estudiantes configuran su “identidad virtual”, que sirve como medio de interacción con los demás participantes y el contexto de la actividad; en segundo lugar, se diseñan los niveles, también ajustados a los perfiles, en tanto que “jugador, troll, flamer, inexperto, iniciado, aprendiz, amateur, regular, experto, avanzado y elite”²², todo ello articulado en un sistema que permite desarrollar misiones en el entorno de un curso.

Macías (2017) expresa de la siguiente manera los resultados de su proceso investigativo:

Las misiones propuestas en el curso permitieron un sistema de aprendizaje flexible, personalizado y gamificado, a través de:

1. Dinámicas: limitaciones, emociones, narrativa, progreso y relaciones.
2. Mecánicas: retos, oportunidades, cooperación, competición, condiciones para ganar, feedback y recompensas.

²² Macías, A. (2017). *La Gamificación como estrategia para el desarrollo de la competencia matemática: plantear y resolver problemas*. Guayaquil: Universidad de Casa Grande. p. 52.

3. Componentes: Avatares, badges, regalos, niveles, puntos, coleccionables, contenidos desbloqueables, misiones, rankings y búsquedas (p. 41)

Además de la experiencia, el autor recurrió a una encuesta validada para determinar los tipos de participantes o jugadores; lo que representa un aspecto de gran relevancia al momento de diseñar las actividades didácticas con esta metodología, ya que, de esta manera, no sólo se trata de la preparación de todos los elementos de la metodología, sino también de la preparación y capacitación de quienes van a estar al frente de los procesos, es decir los docentes.

1.3.5. Gamificación en la enseñanza de la geometría²³

La investigación realizada por Sánchez (2019), *Gamificación en ámbitos educativos: uso de classdojo y geogebra para la enseñanza de geometría en el noveno año de EGB*, aporta una visión de lo que se exige de los docentes que desean implementar esta metodología. En su propuesta incluye el “TPACK” (*Technological Pedagogical Content Knowledge*), como paradigma que permite a los docentes comprender la relación estrecha que se teje entre el uso de la tecnología y los procesos de aprendizaje. Su fundamento es, entonces, la relación de tres conceptos básicos: tecnología, pedagogía y contenido de las actividades.

A propósito, Sánchez (2019) asegura que es indispensable que los profesores dominen el conocimiento de la tecnología, ya que esto es indispensable para la

²³ Sánchez, E. (2019). Gamificación en ámbitos educativos: uso de classdojo y geogebra para la enseñanza de geometría en el noveno año de EGB. Asogues, Ecuador: Universidad Nacional de Educación

pertinencia en el diseño de las actividades: *“El dominio de este conocimiento se produce en las relaciones con los otros conocimientos (contenido y pedagógico). Así, la tecnología puede ayudar a representar contenidos de aprendizaje (conocimiento tecnológico y de contenido), como también en las tareas pedagógicas del profesor (conocimiento tecnológico y pedagógico)”*²⁴

En cuanto al conocimiento pedagógico, la ludificación se puede ubicar en diferentes modelos, de acuerdo al interés y la orientación de los docentes, pues su plasticidad en la aplicación, permite ajustarse, previo al diseño estructurado, a las dinámicas propias del aula. Sin embargo, la mayoría de los trabajos revisados se inscribe en la línea del constructivismo y su desarrollo en el aprendizaje significativo. Algunos trabajos en el ámbito local así lo evidencian y aportan al presente esfuerzo.

1.3.6. Aprendizaje de las matemáticas en el contexto del uso del teléfono móvil²⁵

Constructivismo, aprendizaje significativo y trabajo colaborativo son compatibles, ya que constituyen elementos básicos de un buen proceso de ludificación en un entorno tecnológico, que en el ámbito de las matemáticas tiene varios aspectos a considerar. Un esfuerzo por aclarar esta síntesis conceptual es la investigación de Martínez y Páez (2013) *Escenario de aprendizaje de las matemáticas: la cultura del uso y consumo del teléfono celular*. En dicho trabajo se presenta, a partir de las investigaciones de Skovsmose, llevadas a cabo en el 2000 y el 2012, que la enseñanza de las

²⁴ Sánchez, E. (2019). Gamificación en ámbitos educativos: uso de classdojo y geogebra para la enseñanza de geometría en el noveno año de EGB. Asogues, Ecuador: Universidad Nacional de Educación. p. 20.

²⁵ Martínez, D., & Paez, O. (2013). *Escenario de aprendizaje de las matemáticas: la cultura del uso y consumo del teléfono celular*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

matemáticas se conduce por escenarios que el docente y los estudiantes pueden acordar para trabajar, en el marco de tres tipos de referencia: 1. Las matemáticas enfocadas en el empleo de algoritmos y operaciones; 2. La “semirrealidad” que se gesta en la aplicación práctica de fórmulas a partir de “datos artificiales” y 3. La aplicación de conceptos a contextos cotidianos, “reales”, de los estudiantes.

La utilidad de esta conceptualización en la presente investigación radica en que fue posible evidenciar en la población objeto de estudio (el grado octavo de una institución educativa) que los estudiantes tienden a realizar los trabajos de manera individual, pese a que se soliciten en grupo, pero también que suelen usar de manera recurrente el teléfono móvil y las redes sociales para compartir sus adelantos con los compañeros de grupo. Así, mientras que en las dos primeras referencias señaladas por Martínez y Páez (2013), dedicadas a los problemas puramente numéricos y a supuestos hipotéticos, los estudiantes asumen una actitud individual, en la tercera, aquella que involucra la vida real en la resolución de problemas matemáticos, existe un comportamiento diferente, en el que los estudiantes se ven inmiscuidos de manera personal.

En un ejemplo relacionado con la producción, ubicación e impactos ambientales de las basuras en un territorio como Usme, en el suroriente de Bogotá, los estudiantes mostraron mayor interés por los variables que afectan al fenómeno estudiado y sus cálculos correspondientes, dado que concierne directamente al lugar que ellos habitan. Esta relación directa entre los problemas matemáticos y la cotidianidad de los estudiantes permiten que su actividad académica en la asignatura se transforme en una investigación de interés comunitario y de participación democrática. Esta

aportación es válida cuando se trata de procesos de ludificación, como el que se propone en este trabajo, para fortalecer la competencia de resolución de problemas retadores en el grado octavo.

Por otro lado, el trabajo de Martínez y Páez (2013) aporta a esta investigación una perspectiva clara en torno a la participación activa de los estudiantes en el aprendizaje de matemáticas, dado que uno de los mayores problemas didácticos al que se enfrenta dicho proceso es el de hallar el nexo entre la presentación teórica de los conceptos y los contextos prácticos en los que pueden aplicarse. De hecho, se asume la posibilidad de involucrar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje de las matemáticas, a partir de la problematización subjetiva de su propia cotidianidad. De allí que la ludificación cumpla un papel importante, dado que permite que la aproximación a las matemáticas sea realmente significativa.

Conclusión del capítulo 1

La revisión del estado del arte y de algunos trabajos dedicados al concepto de Gamificación, sus elementos y componentes, así como las implicaciones para los docentes y estudiantes, permite inferir aspectos de relevancia al momento de construir la propuesta: *Enseñanza de Ecuaciones Lineales Mediante la Modelación Matemática, La Gamificación y La Resolución de Problemas Retadores en Estudiantes de Grado Octavo del Colegio Gustavo Restrepo*, tales como:

Se ha de diferenciar los juegos de rol, de la gamificación en la que los elementos constitutivos del juego, sus reglas, el entorno tecnológico y el diseño de los procesos deben tener en cuenta tópicos y dominios transversales imperativos para alcanzar los

resultados de aprendizaje que se proponen los docentes. De esta manera, tópicos o temas como el uso del lenguaje comunicacional dentro del proceso, que involucra la primera persona en la narrativa, invitando al estudiante a tomar sus propias decisiones y optar libre y lógicamente por las posibles salidas o estrategias de acción representan cambios en los imaginarios docentes y en las dinámicas de aprendizaje.

Con esta articulación, lógica, lúdica, resignificante del roles los estudiantes van conformando el cuerpo de conocimiento necesario para potenciar la solución de los problemas, lo que a su vez debe está ligado al trabajo colaborativo que se recomienda sea estimulado, y donde el docente es compañero en las acciones que en la estrategia traza, a fin de desarrollar otras competencias en el estudiante; en lenguaje coloquial, soplar las posibles respuestas es válido, ya que no depende de la respuesta misma, sino de la decisión que adopte el estudiante respecto de si la acepta o no, con lo que se desarrolla una actitud de sana crítica frente a sus pares, incluido el docente.

Igualmente, el proceso de gamificación ha de tener en cuenta los niveles cognitivos que se requieren para hallar soluciones, sobre todo cuando se requieren conocimientos previos, como los que han de subyacer en el saber del estudiante, sobre los aspectos básicos de matemáticas.

Por otra parte, en lo tecnológico la gamificación se puede desarrollar con mayor eficiencia siempre que se hagan las escogencias adecuadas para cada grupo respecto de las plataformas virtuales, el software y su gama de opciones, de manera que como establecen los teóricos del desarrollo cognitivo, cada decisión que adopte el estudiante constituya mecanismos de acomodación y reconfiguración de sus estructuras

mentales y de sus dinámicas intrapersonales e intersubjetivas con sus pares o compañeros de aprendizaje gamificado.

Este tipo de estrategia de enseñanza aprendizaje también invita al docente a una reconfiguración de su rol, ya que en los procesos tradicionales de la escuela el docente representa a su disciplina en el entorno de una institución específica o contexto local, mientras que en el proceso de gamificación se traslada a un entorno o contexto global (Contreras y Eguia, 2017) donde el docente representa un par acompañante de los procesos de sus estudiantes, lo que exige mayor esfuerzo en la planificación y acompañamiento en el proceso con su desenvolvimiento lúdico creativo e imprevisible para todos, mientras que la evaluación la va haciendo el propio estudiante quien asume los retos y búsquedas de soluciones ya sea de forma individual o colaborativa. La gamificación, ligada a la modelación –que se referencia enseguida en el marco teórico- con una adecuada utilización, es un salto copernicano educativo que conduce a nuevos universos en todas las áreas, sobre todo por su impulso para que los estudiantes desarrollen capacidades.

Gamificar implica por lo tanto proponer escenarios que invitan a divertirse aprendiendo sobre la base de la toma de decisiones reflejadas en acciones e ideas concretas, delineando un rostro nuevo de la enseñanza aplicada en áreas del conocimiento, en este caso el de las matemáticas en la educación básica.

Así, igualmente se concluye que la Gamificación se ha convertido en un concepto emergente en la investigación dentro del proceso enseñanza aprendizaje, ya que permite influir de forma significativa en el trabajo humano y en especial en los estudiantes; es viable aplicarla a muchos contextos en especial al contexto de las

actividades realizadas en el aula de matemáticas porque introduce elementos que subyacen en la esencia humana como lo es el impulso lúdico o de juego, estimulando la construcción de respuestas singulares y la creatividad.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo se divide en cuatro apartados. En el primero un vistazo a la historia de los métodos de solución de ecuaciones lineales, seguido de la teoría de la resolución de problemas, enfatizando algunos conceptos propios de la teoría y estrategias para la resolución, en el tercer lugar un acercamiento a la modelación matemática y su utilidad. Luego se realiza una descripción de lo que se comprende por Gamificación y por último se realiza un análisis acerca de los conceptos matemáticos a trabajar.

2.1. Marco histórico

La historia de las matemáticas deja ver que todos los grupos humanos conocidos hicieron esfuerzos por solucionar problemas cotidianos que se les presentaban, tales como el cálculo de las cosechas, la distribución de terrenos, los sistemas orbitales de los planetas en el universo e incluso los juegos sobre el cálculo de la edad de alguna persona para lo que diseñaron fórmulas y métodos de resolución de problemas algebraicos.

2.1.1 Egipcios y babilonios

Guerra (2012, p 13), sintetiza algunos aportes de las diferentes culturas, mencionando que “en Egipto se encuentra el *Papiro de Rhind*, escrito por el escriba Ahmés, hacia 1650 a.C., documento que es una copia de otra más antigua (2000 – 1800 a.C.) con evidencia del uso de ecuaciones lineales y más aún, de sistemas de ecuaciones simultáneas; en algunas de estas soluciones utilizaron un “*regula falsi*” o regla de falsa posición, con lo que mediante varios intentos con valores cercanos falsos, finalmente hallaban la solución correcta, lo que constituye un ejercicio como si fuera un juego con números y dimensiones.

Así mismo, se sabe que los “los babilonios sabían cómo resolver problemas que involucraban la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas e incluso

sistemas de ecuaciones lineales y no lineales” (Guerra, 2012, p.14), mientras que los chinos hacia el año 200 a.C. ya tenían un tratado denominado *nueve capítulos sobre el arte matemático*, en el que aparece un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales conocido como la regla “fan-chen” que se podría comparar con la eliminación gaussiana que conocemos hoy, libro que contiene 250 problemas sobre agrimensura, y resolución de problemas de triángulos.

2.1.2 Griegos

En el mundo griego, el pitagórico Thymaridas de Paros, siglo IV d.C. plantea una forma de solucionar problemas de ecuaciones lineales con n incógnitas llamada la “flor de Thymaridas”, y en el siglo III d.C “Diofanto de Alejandría, del cual se tiene un problema respecto de su edad a través de un acertijo encontrado en alguna colección griega, “su niñez duró $1/6$ de su vida; le creció barba después de $1/12$; tras $1/17$ más se casó y tuvo un hijo 5 años más tarde; su hijo vivió la mitad de la edad del padre y finalmente el padre pereció 4 años después (Guerra, 2012, p.18); el álgebra de Diofanto se le conoce como álgebra sincopada por cuanto utilizó algunas abreviaciones.

2.1.3 Las Ecuaciones en el mundo occidental

Diversas obras presentan a Leibniz como el primer matemático que hace uso de métodos para solucionar problemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por el año 1663; sin embargo otros matemáticos habían planteado soluciones y métodos en tiempos anteriores. Uno de ellos Maclurian en su “tratado de álgebra” 1748, presenta la solución de ecuaciones por la eliminación sucesiva de variables, y por el método de determinantes cuando existen varias incógnitas. En todos estos métodos se presenta un denominador de pensamiento común que consiste en tomar decisiones que van sustituyendo, como en un juego, los valores; de esta manera finalmente se hallan las soluciones. De hecho, como ocurre en las soluciones simultáneas con determinantes, una vez se tiene un cierto dominio del método, las soluciones son cada vez más fáciles

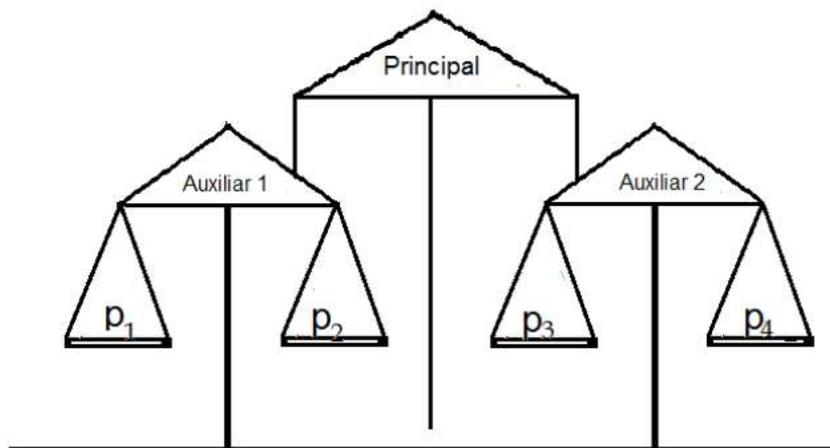
pues hacen parte de una forma de pensamiento construida alrededor de este tipo de problemas.

2.1.4 La balanza Orlov

Merece especial mención este método didáctico para resolver ecuaciones lineales de primer grado, el cual se vale de gráficas para enseñar la dinámica de los signos y cómo resolver problemas; la imagen de la figura 1 muestra la articulación de esta propuesta.

Figura 1

Balanza de Orlov medio didáctico para enseñar ecuaciones lineales



Fuente: (Botero, 2014, p.42)

Este método consta de tres balanzas, las de los lados representan los dos términos de una ecuación y la principal que representa la dinámica de equivalencia de acuerdo con unas reglas específicas asociadas a los valores de las variables P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , en las que se aplican las leyes de los signos positivo (+) y negativo (-), que en sus respectivas posiciones y cambios conservan el equilibrio de la ecuación.

La utilidad de éste método es relevante en la presente investigación por cuanto las decisiones de los estudiantes en cada ocasión, dentro del ejercicio de gamificación, son ilustradas de manera sencilla; en este espacio no se dedica explicación minuciosa a la historia de las ecuaciones por razones de espacio²⁶, pero se resalta su utilidad didáctica porque también es una forma de visualizar los acontecimientos y sus soluciones dentro del entorno individual y global.

2.2 Teoría de la resolución de problemas

La población mundial atraviesa por una serie de problemáticas que pasaron de ser vicisitudes lejanas y se han convertido en dificultades del contexto. Es por ello que la necesidad de desarrollar una capacidad de análisis autónoma para resolver problemas se hace urgente e importante. Esta temática de resolución de conflictos ha sido tratada desde la matemática, y expuesta por varios autores, en diferentes latitudes. Un escenario que se ha consolidado para atender esta dinámica resolutoria se halla por ejemplo en la olimpiadas de matemáticas, Falk, (2001, p.15) anota que, “aun las pruebas de selección múltiple (las cuales posibilitan que se organicen competencias con participación masiva) dan a cada estudiante la oportunidad de resolver problemas sencillos, pero intrigantes, propuestos en circunstancias que le son familiares”.

Para la propuesta que nos convoca, la resolución de conflictos –problemas- es un pilar fundamental porque es una ruta que se elabora en el proceso del conocimiento, es gestión y transformación cognitiva que cada estudiante y cada persona elabora para llegar a aquello que se denomina respuesta o solución.

²⁶ En el documento de Botero (2014) se halla una descripción completa del método Orlov.

En este sentido, la definición que Pölya refiere respecto de la noción de problema, convoca la discusión. Un problema consiste en descubrir concienzudamente la gestión pertinente para alcanzar un objetivo a través de un desarrollo no inmediato (Polya, 1965), mientras otros estudiosos del tema como House, precisan el problema matemático, enunciándolo como una circunstancia que, de manera hipotética, plantea un objetivo para ser logrado, e inicia desde el algoritmo útil para resolver, esto regularmente, requiere de técnicas matemáticas para ser resuelto (1983). Y en esa misma dirección los matemáticos Krulik y Rudnik, plantean: el problema es una situación que de naturaleza matemática o de otro tipo, confronta a un grupo o individuo y requiere una solución, aclarando, que para esta situación no existe una solución evidente (1987), perspectiva que para este caso complementa muy bien Laberrere al describir como el problema responde a una condición, elemento o relación que se encuentra oculta al individuo o grupo, que los mismos buscan descubrir (1996).

En concordancia con los anteriores teóricos, Campistrous y Rizo (1996), afirman que un problema es una circunstancia que requiere una transformación. Esto es, que hace alusión a las condiciones iniciales de lo desconocido en relación con lo dicotómico que exige transformación, pero que trae consigo avidez del estudiante por resolver la contradicción; pero, cabe preguntarse sobre la solución y la resolución. La resolución implica no sólo solucionar, sino planear, identificar y sobrellevar una técnica para la solución. Así pues, de los autores que estudian al respecto de la resolución, la propuesta de este estudio tiene como referencia el trabajo de Schoenfeld, quien expone las fases de análisis para comprender el problema, diseñar una solución, contemplar diferentes soluciones y finalmente verificar la solución.

Las precisiones que Schoenfeld plantea frente a la resolución, aluden a tener en cuenta, a la hora de buscar soluciones, los elementos de carácter emocional, socio-afectivo, psicológico, cultural y otros. Así pues, dentro de sus propuestas plantea, a diferencia de Pölya, que se trata de generar una pequeña comunidad científica en clase para resolver problemas.

En este sentido, al examinar en equipo diferentes problemas, con formas distintas y en contextos diversos, y para que este proceso cobre sentido, el autor habla de tener en cuenta el dominio del tema, los recursos matemáticos, intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, algunos hechos y procedimientos que puedan ser útiles. Para dar forma a este proceso, Schoenfeld, plantea lo heurístico como forma vital para resolver problemas, examinar a partir de dibujar diagramas, invertir el problema y es también un punto de dirección articular las competencias metacognitivas relacionadas directamente con planear, evaluar y decidir desde una perspectiva que se asume como un rol científico, poner en juego ese papel de comunidad científica en el aula.

Así, ya sea como la búsqueda de una salida a un acertijo o el intento de reducir las contradicciones de cualquier problema, el maestro y los estudiantes se encuentran inmersos en un contexto, que exige tomar decisiones y articular procesos o secuencias que conducen finalmente a la resolución como un desenlace del problema, aunque en últimas tal resolución, al ser contemplada científicamente, es solo un paso más para acercarse a la realidad.

Si bien esta dinámica de planear, evaluar y decidir desde una perspectiva de rol científico para dar alcance a la solución que se busca, se puede concebir como la secuencia de los hitos, saltos o estaciones en el desarrollo de la lógica de resolución, lo que se puede percibir como macro estructura del proceso resolutivo, es importante revisar las microestructuraciones que se encadenan en cada individuo, hasta que ocurre ese desarrollo lógico. Al respecto el equipo de investigadores Zayyadi, Nusantara, Subanji, Hidayanto y Sulandra (2019) lograron un innovador aporte al develar que, en la secuencia de búsqueda de soluciones, las personas o estudiantes ejecutamos ciertos procesos cognitivos que van dando forma a una solución que finalmente alcanza la resolución del problema en algún sentido; y como es una actividad individual se puede hacer un registro cercano del desarrollo. Esta secuencia la denominaron en su composición macro, el proceso IDEAL, por sus siglas en Inglés (*Identification of problems, Define goals, Explore posible strategies, Anticipate outcomes, Look back*). las etapas o pasos de IDEAL para resolver problemas tienen una secuencia de actividades cognitivas hasta llegar a una resolución, ver tabla 1.

Tabla 1

Descripción de proceso cognitivo para resolución de problemas

Etapas IDEAL	Descripción de la acción en el estudiante o indicador
Identificación de problema	Comprende los problemas en general y los divide en varias partes
Definir los objetivos	Establece los objetivos a alcanzar.

Explorar las posibilidades estratégicas	Busca varias soluciones alternativas a los problemas y lleva a cabo estudios sobre cada alternativa desde diferentes perspectivas.
Anticipar resultados	Elige una solución y resuelve el problema según la estrategia elegida.
Mirar hacia atrás (repasso)	Ver la correspondencia entre los objetivos a alcanzar y los resultados obtenidos, y aprender de las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas.

Fuente: Zayyadi et al., (2019)

Los elementos que tuvieron en cuenta se basan en comprender el pensamiento como la forma de comunicación, ya que, según los autores, quienes siguen a Sfard (2007; 2008); y Sfard & Kieren (2001), el pensamiento tiene una elaboración individual.

“El pensamiento suele realizarse de forma interna y, por lo general, se considera inaccesible para los demás. La Actividad del pensamiento realizada individualmente parece originarse en el interior de la persona y tener lugar biológicamente, pero sigue constituyendo una forma de comunicación del individuo hacia sí mismo”²⁷

Por tal motivo, la forma como el estudiante (*individuo*) expresa de manera verbal, escrita o no verbal lo que comprende puede sintonizarse como la forma de comunicar su pensamiento. Particularmente, el estudiante al enfrentar un problema, para obtener una solución expresa unas habilidades entorno a su comunicación, lo que en la

²⁷ Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, & Hidayanto, E. S. (2019). A Commognitive Framework : The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students . International Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 18, No.2, 89-102

investigación realizada fue sistematizado como análisis cognitivo el cual se desarrolla mediante: el *uso de palabras, mediadores visuales, narraciones con apoyo y rutinas* (Zayyadi et al., 2019, p.92).

Uso de la palabra: como su nombre lo indica, es la forma como el estudiante expresa en lenguaje matemático los conceptos trabajados durante la resolución del problema, esto proporciona pistas sobre cómo el estudiante percibe el mundo.

Los mediadores visuales, definidos como objetos que manipula el estudiante para poder solucionar el problema, tales como, diagramas, símbolos y gráficos. Así como también objetos físicos, de esta manera se puede determinar cómo el estudiante utiliza estos objetos para la solución de problemas.

Narrativa: Es una secuencia de discurso, oral o escrita, que describe las relaciones entre los objetos involucrados en un problema. En la manera que el estudiante utilice la narrativa propia de las matemáticas, hechos matemáticos, axiomas, definiciones y teoremas, se evidencia el tipo de pensamiento para resolver el problema.

Rutina: es descrita por los autores como “un proceso de meta-relato que describe patrones en las actividades de desaliento” es decir procesos mentales que los estudiantes deben realizar para poder resolver un problema, tales como; definir, estimar, probar, predecir y abstraer. En especial se tiene en cuenta que los estudiantes tengan rutinas de definir, estimar o probar, tal como ocurre cuando en medio de un juego los participantes proceden al comunicarse.

Este hilo lógico desarrollado en cada ocasión que se busca una solución matemática se establece mediante indicadores específicos que ayudan a evidenciar el avance respecto de la etapa resolutoria; proceso se describe más abajo en la metodología.

2.3 Modelación Matemática

Desde hace varias décadas se ha venido trabajando en el concepto de modelación matemática para plantear soluciones a problemas de diversas ciencias, y existe una definición general así, “un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (Salett-Biembengut & Hein, 2004, p.106). Este concepto se aplica, por ejemplo

a los cálculos de las órbitas de los planetas y su duración en el giro alrededor del sol, pero de igual manera se puede aplicar a fenómenos como el cálculo de reproducción de pollos en una granja, o las posibilidades de producción de desechos y basuras en una ciudad, etc., sin embargo, el plantear la modelación como una herramienta para enseñar matemáticas es un reto que se ha ido posicionando en el escenario pedagógico.

Salett-Biembengut y Hein (2004) en su trabajo *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*²⁸ plantean que la modelación involucra procesos como la elección de un tema, el reconocimiento de una situación/problema, una delimitación, una familiarización con el tema a través de referencias investigativas y teóricas,

²⁸ Salett-Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, 105-125

además de postular una hipótesis que, de ser probada, permite dar explicación al problema, la cual se debe validar y evaluar para completar el ciclo del modelo. Estos mismos procesos se aplican para la metodología de investigación tradicional, por supuesto con algunas variaciones, por lo que la modelación en esa perspectiva tiene un enfoque investigativo que difiere del enfoque pedagógico.

La idea de muchos defensores de la modelación en la enseñanza es la de que cada alumno pueda elegir un tema de algún área de su interés, hacer una investigación al respecto, proponer cuestiones y, bajo la orientación del profesor, elaborar un modelo matemático. En estos términos, el alumno pasa a ser (co) responsable de su aprendizaje y el profesor, un orientador (Bassanezi, 2002, en Salett-Biembengut & Hein, 2004, p.107)

Estos aportes son valiosos en el contexto de la presente investigación por cuanto en la gamificación el estudiante tiene la posibilidad de escoger diversos caminos para llegar a la meta que se ha trazado en relación con la temática de estudio y debe adoptar sus propias decisiones que le confieren la responsabilidad de su aprendizaje, en tanto que va construyendo conocimientos que tienen sentido para él y el contexto que ha elegido; solo con la orientación del docente quien prepara el material correspondiente.

Así mismo Villa-Ochoa (2012) realizó una investigación titulada *Modelación matemática escolar. Algunas reflexiones frente a su relación con la cultura*²⁹ la cual giró sobre el papel modelador de la cultura en el ámbito de resolver problemas y la

²⁹ Villa-Ochoa, J. (2012). Modelación matemática escolar. algunas reflexiones frente a su relación con la cultura. *Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática-RECOMEM*, p. 201-219, 201-219

forma como la cultura influye en los procesos de conocimiento matemático, al tomar un caso como la siembra de café en un terreno inclinado, donde los estudiantes reconstruyeron el modelo tradicional y luego lo compararon con los modelos promovidos por los técnicos, llegando a una conclusión muy seria, que apunta a que con frecuencia las personas asumen modelos matemáticos basados en las creencias, y en este caso del cultivo de café se demostró por los mismos estudiantes que se pueden proponer otros modelos matemáticos fuera de lo que se cree tradicionalmente e incluso fuera del modelo promovido por los organismos administrativos.

Son valiosos los aportes en este sentido, ya que, al ligar la gamificación con la modelación en procesos de resolución de problemas para estudiantes de grado octavo, se descubren caminos y soluciones que no se habían previsto, lo cual tiene como descripción un proceso doble en los estudiantes, de una parte “mediante la modelación matemática los estudiantes ampliaron su sistema de conocimientos sobre el contexto” y de otra, “reformularon algunas miradas sobre el fenómeno, en otras palabras, transformaron su “realidad”, (Villa-Ochoa, 2012, p. 216), lo cual motiva a la implementación de este tipo de estrategias pedagógicas donde el ambito contextual pedagógico matemático del aula se extiende hasta la vida práctica de las comunidades y contribuye a las soluciones.

En el mismo sentido de la utilización de la modelación como parte del proceso pedagógico, Villa, et al. (2008) en su documento *El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos*

*curriculares colombianos*³⁰, refiere que desde 1998 se incluyó la modelación matemática como parte del currículo educativo en Colombia, y sin embargo los avances no son tan notorios. En el documento se plantea que:

La modelización/modelación, entendida como un proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un problema o fenómeno del mundo real, no ocurre de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades” de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático (Villa, et al., 2008, p.2).

Esto mismo ocurre con la gamificación que no es un proceso espontáneo sino planificado y bien estructurado, en el que los estudiantes con la narrativa van asumiendo sus roles y decisiones, e incluso se plantean retos que les llevan a construir conocimientos y soluciones. Es de anotar que el estudio en mención plantea igualmente un aporte a la presente investigación en el sentido de hacer de la modelación matemática una herramienta pedagógica donde “el docente debe realizar un proceso direccionado en dos sentidos, primero de descontextualización y segundo de recontextualización de tal manera que la situación, sin perder su esencia e

³⁰ Villa, J., Bustamente, C., Berrio, M., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. *Asociación Colombiana de Matemática Educativa, 2008* , 1-5.

intencionalidad, se transforme en una situación que propicie el aprendizaje de los estudiantes” (Villa, et al., 2008, p.3), y por otra parte, el estudiante ha de “posicionarse de manera crítica ante las diferentes demandas del contexto social junto con la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problemas”(p.4).

Así las cosas, las acciones docentes de relacionar, ligar y articular gamificación, modelación matemática y resolución de problemas en un contexto virtual requiere del docente creatividad, planificación y puesta en escena de procesos en los que el estudiante asume el rol de resolutor de los problemas con temas que el mismo estudiante puede escoger, lo cual desarrolla capacidades críticas y constructivas en un ambiente lúdico, serio y desafiante.

2.4 Gamificación

En acápite anteriores se abordaron temas como las relaciones entre la gamificación y el aprendizaje, además de algunas ventajas y formas de implementarla, por lo que en este apartado se enfocará sobre la pertinencia de su uso. La idea, es promover la enseñanza del concepto del lugar geométrico a través de una estrategia de gamificación atravesando las 3 teorías aplicadas a este concepto (Geometría Euclidiana, geometría del taxi, geometría de la torre eiffel) como si fueran 3 mundos, o niveles de juego donde la motivación, la recompensa y la resolución de problemas encaminen el objetivo de enseñanza-aprendizaje. Bajo esta óptica, la gamificación, para Kapp (2012) se orienta a partir de la mecánica, la estética y el uso del pensamiento del juego, en términos de motivar el aprendizaje, la participación y estimular la resolución de problemas. Es importante aclarar que la naturaleza de la gamificación no es de origen educacional, son los videojuegos, los que gestan esa

forma de interacción que influyó y transformó la forma de transmitir información de forma óptima (Ramirez L., 2014). Frente a la propuesta, la gamificación es tomada entonces para generar una realidad donde a partir del apoyo de la plataforma ClassCraft, se simule una experiencia de trabajo individual y en equipo.

En este orden de ideas, se hablará de algunos modelos y reflexiones sobre la gamificación: el grupo Gartner, líderes en investigación y consultoría en tecnología de la información, habla de cómo los elementos estéticos y mecánicos se suman en el compromiso de lograr que el usuario o estudiante pueda alcanzar su objetivo en un contexto digital (Burke, 2014) Si examinamos con cuidado, notaremos que el punto de aporte de la noción anterior es lo digital. Y para el caso, la metodología de gamificación es intervenida desde un espacio digital, puesta en orden por la plataforma, que en detalle es una pieza fundamental en la estructuración del pensamiento, del juego y el discurso de apropiación al interior de la experiencia. Esta plataforma permite una puesta en marcha frente a los elementos del juego, puede llegar hacer lo gráfico y la caracterización de un personaje, lo que integra la experiencia del usuario en interacción directa con la administración del sistema como lo afirma.

La naturaleza de la gamificación, responde a la configuración de ciertos elementos. Elementos tales como objeto o reto, reglas, sistemas de retroalimentación, participación voluntaria y recompensa (McGonigal, 2011). Que son importantes definir puesto que se clarifica la naturaleza de la experiencia y se puede dialogar de los diferentes momentos que en concordancia apuntan al ejercicio. Como estrategia pedagógica, definir los objetivos o retos, permiten enriquecer la experiencia y el trabajo

en equipo, dialogar, buscando una comunicación efectiva, maximizando el pensamiento hacia la resolución de problemas.

Ahora bien, la gamificación, la ludificación y el juego. Se explican en la condición humana de una forma tan cercana al conocimiento y la cultura, que es favorable integrar una noción histórica del juego. El juego, es un elemento inherente a la evolución humana desde hace más de 3000 años, antecede a la cultura y es evidente que los animales también tienen esta capacidad. Los elementos que lo constituyen, permiten salir de las reglas monótonas y rígidas de la realidad para experimentar una realidad alterna donde, para muchos, vale la pena tomar con seriedad esta misma. En palabras de Huizinga “el ser vivo, obedece, cuando juega, a un impulso congénito de imitación, o satisface una necesidad de relajamiento, o se ejercita para actividades serias que la vida le pondrá más adelante o, finalmente, le sirve para adquirir dominio de sí mismo” (Foncubierta & Rodriguez, 2006, p.12 cita Huizinga 1948).

Visto ahora desde el aspecto pedagógico, se debe observar, que teniendo en cuenta estos elementos de la gamificación, está en juego la simulación de experiencias e interacción y consenso entre los iguales (Sánchez y Periz, 2015). Lo anterior permite poner en juego el papel colaborativo en el contexto educativo. Ahora bien, al hablar de las herramientas web 2.0 en la educación, ya no solo se habla de conocimiento sino de recursos técnicos y tecnológicos que permiten hacer tangible la participación en la construcción social del conocimiento. Por ello debemos partir de reconocer que mundialmente es más fácil tener internet, que computadora, y ello genera una diferencia muy opuesta en el desarrollo de la sociedad de conocimiento. De acuerdo con Garay & otros, los elementos de la red mejoran los procesos de enseñanza-

aprendizaje direccionado competencias de exploración, recopilación de información, selección y lectura crítica entre otros (Garay, Lujan, & Etxeberria, 2013).

La propuesta en cuestión, innova no solo por la formulación del ejercicio, sino porque hace parte de un seguimiento académico. Desde allí se debe pensar la importancia que tiene el uso de herramientas web 2.0 en este nivel de la educación y a esto alude un estudio de Boza Carreño donde asegura que las herramientas de la web 2.0 permiten que las estrategias metacognitivas se acrecienten y esto a su vez permite el desenvolvimiento autónomo y mejorado en los estudiantes (Boza & Conde, 2015); y es que en el ámbito de la educación, los retos que presenta la cultura actual y el mundo globalizado, invitan a repensar la forma de relacionarse con la tecnología de la información y la comunicación. Lo anterior hace parte del nuevo paradigma educativo se alza ya hace casi medio siglo y esto contribuye a la manera de relacionarse con el medio.

No se debe perder de vista, que los objetivos en el aprendizaje pueden verse como una condición de competencia, donde la meta implica una motivación excepcional. En el estudio que realiza Wendy Hsin donde afirma que la mayor dificultad que tiene la educación moderna es la desmotivación de los estudiantes por el conocimiento, y afirma que por ello los profesores están preocupados por innovar en la manera de invitar a participar a los estudiantes de forma voluntaria, para ello una posible solución es la recompensa; los esfuerzos y los resultados obtenidos por el premio (Hsin-Yuan Huang & Soman, .2013.). Esa posición es la base del uso de elementos de juego, lo que conlleva a pensar la gamificación como una posibilidad efectiva en los procesos educativos.

La gamificación obedece a unos elementos que deben existir en el objetivo gamificable, estos elementos están descritos de manera precisa por Karl M. Kapp (2012):

La base del juego: allí se encuentra la acción de jugar, competir, aprender y apreciar la información que se desea transmitir a partir del juego, en este punto el reto es necesario, porque motiva al jugador, es esencial tener en cuenta la interactividad y la retroalimentación.

Mecánica: en el juego es simbólico y relevante el orden de niveles o insignias. Lo común es que se ganen como recompensas. Esto incentiva al auto-mejoramiento y la participación constante.

Estética: la programación gráfica, las ilustraciones y los efectos visuales deben ser agradables y exitosas para la mirada del jugador.

Idea del juego: los objetivos que persigue el juego se presentan de forma inconsciente y consciente por la lectura del jugador. Esto permite que las habilidades y las actividades se simulen mejor, permitiendo que el jugador adquiera o tenga la sensación de adquirir competencias nuevas.

Conexión juego-jugador: el juego debe tener una lectura de fácil acceso, desde instrucciones hasta objetivos deben ser entendidas fácilmente por el jugador, permitiendo que la comunicación entre juego y jugador sean claras y precisas. Esto permite una afinidad que motive el compromiso con el juego.

Jugadores: el perfil de jugadores es amplio pueden estar ocupados en sus labores diarias o no. Kapp apunta a una división entre los que intervienen en el proceso de conformación, que estarán motivados y otros que no.

Motivación: debe existir una disposición psicológica y esto concatena la participación en el juego. La configuración entre unos desafíos que tengan un punto medio y que vayan aumentando de forma sincrónica con el nivel del jugador, evita la frustración y motiva las crecientes habilidades del jugador. Que esto se ajuste a los niveles de evolución del jugador, permite que el juego sea atractivo.

Promover el aprendizaje: las estrategias de asignación de premios en puntos y otros, así como la constante retroalimentación del proceso de juego son técnicas que desde la psicología permiten el aprendizaje a través del juego.

Resolución de problemas: este es el punto céntrico del juego, pero es necesario tener en cuenta que es un elemento que aparece en cada sección o momento del juego: superar desafíos, embestir correctamente al enemigo, generar una estrategia o administrar bien los recursos entre otros. Son finalmente lo que le da sentido al juego en su totalidad y requiere de un análisis detallado de los elementos constitutivos del juego. (Kapp, 2012).

Además de estos elementos que ordenen la gamificación, están también los roles que juegan quienes ordenan la propuesta. Los líderes de equipo y los líderes del sistema de juego. Tienen o desarrollan unas habilidades concretas, competencias que juegan un papel esencial en el desarrollo tanto del diseño de la gamificación, como del desempeño de los jugadores.

En consecuencia, con la gamificación es importante ilustrar acerca de las plataformas que se han especializado en organizar experiencias donde el juego sirve a todos los niveles. Los juegos de video, por excelencia en este tipo de diseños, se han ubicado

en el primer lugar por el alto acogimiento que tiene en los usuarios. Uno de los juegos con mayor fuerza es League of legends es un video juego online cuyo objetivo es lograr controlar el campeón elegido y llevarlo a cumplir los desafíos y retos que este plantea, los dos modos de juego el Clásico o Dominen, donde cada uno presenta diferentes elementos que integran mundos creados con gran detalle en su versión gráfica. Desde crear un avatar y mejorarlo, hasta alcanzar los elementos y las herramientas necesarias para la supervivencia, el juego encierra la motivación y la victoria a través de insignias y logros. World of Warcraft LK, es otra plataforma on line que dispara a cualquier jugador en el escenario creado para los amantes de los reinos caídos y los imperios que resurgen, la hibrida historia de seres góticos le permite al jugador sumergirse en una serie de información creada para consumir a los más altos niveles un numero de 80 niveles donde el usuario puede pasar incluso años logrando objetivos. Se puede consultar con detenimiento en la página <http://us.blizzard.com/es-mx/games/wrath/>.

La descripción de este tipo de juegos nos permite analizar la manera en que se ha amplificado la gamificación y como esta permite el alto consumo de horas incluso meses o años de interacción con la web. Es necesario pensar como llevar estas herramientas al aprendizaje por ello, plataformas de juego como I HELP donde los estudiantes plantean preguntas que son difíciles de resolver y en interacción con otros estudiantes quienes les ayudan a responder con el fin de tener una recompensa. Los participantes cuentan con una especie de bolsa que aumenta o disminuye dependiendo de su compromiso y participación en la resolución de estos enigmas. (Vassileva, 2012).

Una de las altruistas metas alcanzadas por plataformas de juego y gamificación es la propuesta Re-misión, el punto de este juego es ayudar a pacientes con cáncer a entender cómo funciona esta enfermedad en su cuerpo. El objetivo es controlar a un nano-robot que recorre el cuerpo buscando la forma de combatir las células cancerígenas. Sin duda una audaz propuesta que ha logrado acompañar y motivar la auto-eficiencia en pacientes que padecen del mismo mal. Para ver con mayor detenimiento consultar <http://www.re-mission.net/>.

Una plataforma que se crea directamente con el valor educativo, es la denominada El palabrero, estrategia de gamificación que fue diseñada y aplicada para motivar la lectura y la escritura en jóvenes universitarios. La propuesta, fue desarrollada en la Universidad Autónoma de Occidente en Cali, Colombia. Esta consistió en lograr que los estudiantes lograran a partir de restos y recompensas, construir una tesis y entender que tipos de argumentos son los más adecuados en un debate. El eje principal consistió en reconocer los criterios de interacción, la experiencia de juego y la motivación. Permitiendo así clasificar a los jugadores y reconociendo los niveles en los desafíos y las recompensas. Gallego y Agredo (2016), para entender mejor ver en <http://elpalabrero.co/>.

Es en este sentido como el uso de la gamificación se ha diversificado y acondicionado a muchos escenarios y múltiples objetos de conocimiento. El experimento denominado Sistema Integrado de Gamificación, quiere intervenir entonces en la optimización del aprendizaje para el uso de herramientas web 2.0. Para ello se utilizaron tres herramientas que apoyan la gamificación y que se explicaran con detenimiento en el apartado de metodología.

Conclusiones del Capítulo 2

Se puede concluir de este apartado que las comunidades humanas han planteado diversas maneras de calcular los elementos y dinámicas de las ecuaciones en problemáticas cotidianas, conservándose algunas evidencias. En Egipto, se utilizó un “*regula falsi*” o regla de falsa posición, con lo que ecuaciones mediante varios intentos con valores cercanos falsos, finalmente hallaban la solución correcta a una ecuación enunciada como un problema respecto de cosechas, medidas de territorios, cálculo de edades, etc.; así mismo, “los babilonios sabían resolver problemas que involucraban lineales, cuadráticas, cúbicas e incluso sistemas de ecuaciones lineales y no lineales” (Guerra, 2012, p.14); los chinos, hacia el año 200 a.C. ya tenían un tratado denominado *nueve capítulos sobre el arte matemático*, en el que aparece un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales conocido como la regla “fan-chen” que se podría comparar con la eliminación gaussiana.

En el mundo griego Thymaridas plantea una forma de solucionar problemas de ecuaciones lineales con n incógnitas llamada la “flor de Thymaridas”; más adelante Maclurian en su “tratado de álgebra” 1748, presenta la solución de ecuaciones por la eliminación sucesiva de variables, y por el método de determinantes; de esta manera y con el devenir de los procesos pedagógicos también aparece un aporte importante denominado la balanza de Orlov que muestra como las leyes de los signos se pueden aprender con imágenes en una balanza, lo cual tiene fuerte incidencia en los procesos de aprendizaje del algebra lineal actual. Tres balanzas, las de los lados representan los dos términos de una ecuación y la principal que representa la dinámica de equivalencia de acuerdo con unas reglas específicas asociadas a los valores de las

variables P1, P2, P3 y P4, en las que se aplican las leyes de los signos, presentan de manera didáctica la compleja reglamentación del uso de los signos en las soluciones de ecuaciones.

Aquellos desarrollos, aunados a los actuales esfuerzos y propuestas permiten vislumbrar estrategias como la presente, integrando lo lúdico o gamificación con los aspectos de resolución de problemas y la modelación para alcanzar mayor eficiencia, a la vez que se gana el interés de los estudiantes en torno a solución de problemas con autonomía en contextos cotidianos.

CAPITULO 3. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION

La enseñanza aprendizaje de las ecuaciones lineales en el octavo grado se fortalece y fundamenta de mejor manera indagando y proporcionando alternativas de representaciones matemáticas y de secuencias didácticas donde el interés parte del estudiante que percibe la enseñanza como un juego, se compromete a participar y toma sus propias decisiones, guiado por la labor previa del maestro, quien pone en juego una serie de cualidades docentes como la creatividad, la utilización de los problemas cotidianos y los elementos de la tecnología actual; por ello, para el desarrollo del presente trabajo se ha establecido enmarcarlo en el paradigma cualitativo. Es de resaltar que una ventaja del enfoque cualitativo es que se “pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después, de la recolección y análisis de datos” (Hernández, Fernández, & Baptista, 1998).

3.1. Tipo o enfoque de investigación

Situados bajo el paradigma cualitativo, se estimó que el método más adecuado es la investigación - acción, enfoque que permite el análisis de los datos, de manera versátil, en cualquier momento de la investigación, puesto que es un método adecuado para trabajar en el aula mientras se desarrollan las clases o actividades docentes, además que tiene una historia desde 1973 cuando Kurt Lewin en Estados Unidos propuso éste método (Bausela, 1984, p.1), así mismo otros autores han aportado sobre la relevancia de este método refiriendo cómo se desarrolla y cómo los participantes son actores de su propio desarrollo.

(i) Se construye desde y para la práctica, (ii) pretende mejorar la práctica a través de su transformación, al mismo tiempo que procura comprenderla, (iii) demanda la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas, (iv) exige una actuación grupal por la que los sujetos implicados colaboran coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación, (v) implica la realización de análisis crítico de las situaciones y (vi) se configura como una espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión (Kemmis & MacTaggart, 1988).

En este mismo contexto, para que la dinámica de aprendizaje fuera lo más natural posible, se trabajó con base en una herramienta adecuada para la observación de fenómenos cognitivos que ocurren dentro de la clase. Esta herramienta se fundamenta en una serie de premisas “P” que indican “la forma como el estudiante (*individuo*) expresa de manera verbal, escrita o no verbal lo que comprende y puede sintonizarse como la forma de comunicar su pensamiento; esta herramienta para recabar información de los procesos de los estudiantes es presentada por Zayyadi et al. (2019) como se explicita en adelante, (ver tabla 1).

3.2. Alcance del estudio

El alcance de esta investigación es de carácter exploratorio en cuanto que es un proceso que se presenta de manera innovadora e integradora de diversas estrategias didácticas y lo que se pretende es dejar un aporte metodológico para la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales. Así mismo, se tiene como horizonte develar nuevas rutas de investigaciones sobre la enseñanza aprendizaje del álgebra para estudiantes de grado octavo.

3.3. Población y muestra

La población se centró en estudiantes del Colegio Gustavo Restrepo IED, colegio ubicado al sur de Bogotá en el barrio Gustavo Restrepo, institución perteneciente a la Secretaria de Educación distrital. El colegio cuenta con aproximadamente 1800 estudiantes entre hombres y mujeres de estrato 3 y 4. Dentro de los cuales se han conformado cuatro grupos de grado octavo y en cada aula se brinda formación a 35 y/hasta 40 estudiantes. Para la muestra se tomó un curso de entre los cuatro en forma aleatoria de tal manera que no se vieran afectados los resultados por variables externas al grupo. El grupo objetivo se compuso de 40 estudiantes entre hombres y mujeres, cuyas edades oscilan entre 13 y 15 años.

3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

El trabajo se centró en revisar y utilizar métodos teóricos y empíricos de investigación científica. Los aspectos teóricos conllevaron la revisión documental que se refleja en los acápites de formulación del problema, los antecedentes y el marco referencial con enfoque en la gamificación y sus interacciones con aspectos como la modelación matemática y la resolución de problemas.

3.5 Valoración de resultados

Para el análisis de los resultados de las actividades se tuvo en cuenta lo expuesto en el artículo, *A Commognitive Framework: The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students (Un Marco Cognitivo: El proceso de resolución de problemas matemáticas de los estudiantes de secundaria)* de Zayyadi, Nusantara, Subanji, Hidayanto & Sulandra (2019)³¹, el cual propone describir la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos desde un punto de vista cognitivo,

³¹ Zayyadi, Moh; Nusantara, Toto; Subanji; Hidayanto, Erry, Sulandra, I., *A Commognitive Framework : The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students*, International Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 18, No.2, p. 89-102. (traducción del investigador)

teniendo en cuenta, no sólo el resultado en la solución de problemas, sino especialmente el proceso para llegar al resultado, puesto que durante el proceso que se sigue para llegar a la solución, los estudiantes establecen narraciones usando palabras, mediadores visuales, narraciones con apoyo y rutinas hasta construir su propia narrativa para resolver el problema.

Dentro de la investigación los autores hacen énfasis en cinco componentes: identificar, definir, explorar, actuar y buscar. Lo que se conoce como el enfoque IDEAL por sus siglas en inglés, como: *Identification of problems*, *Define goals*, *Explore possible strategies*, *Anticipate outcomes* y *Look back*. Este enfoque determina que el resolver problemas conlleva una serie de procesos cognitivos que permiten desarrollar habilidades orales y escritas, a la vez que fomentan la creatividad y aumentan la motivación por el aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido los investigadores plantean un ordenamiento, tabla 2; como parte de la descripción interna del desenvolvimiento del pensamiento:

Tabla 2

Matriz de descriptores para evaluación de resolución de problemas

Componentes examinados	Descriptores	
Uso de la palabra	P_1	Utilizan expresiones propias del lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones o interrogantes
	P_2	Describen parcialmente los elementos de un problema con un lenguaje cotidiano dando a entender sus afirmaciones e interrogantes.
	P_3	Se les dificulta expresar de manera total o parcial elementos de un problema en matemáticas.

<i>Continuación tabla 2</i>		
Mediador visual	MV_1	Utilizan correctamente gráficos, imágenes y diagramas para la solución de un problema matemático
	MV_2	Realizan correctamente medidores visuales. Sin embargo, se le dificulta el relacionarlos con los conceptos de matemáticas.
	MV_3	Comprenden correctamente los conceptos matemáticos propios del problema. Sin embargo, se le dificulta relacionarlo con medidores visuales.
Narrativa	N_1	Expresan los procedimientos para la solución de un problema utilizando el lenguaje propio de las matemáticas, tales como axiomas, definiciones o teoremas.
	N_2	Expresan de manera coherente los procedimientos para la solución de un problema, sin embargo, el lenguaje utilizado no es asertivo para la explicación de los procedimientos del problema.
	N_3	No dan explicación a los procedimientos realizados durante la obtención de la respuesta del problema, sin embargo, la respuesta es correcta.
Rutina	R_1	Realizan correctamente la rutina propuesta en el problema planteado (definir, estimar, probar, predecir y abstraer)
	R_2	Se les dificulta realizar la rutina propuesta en el problema planteado.
	R_3	No evidencian la utilización de rutinas. Sin embargo, obtiene patrones y respuestas para la solución de un problema.

Fuente: Zayyadi, Nusantara, Subanji & Hidayanto (2019), adaptado por el investigador con base en la técnica de validación propuesta originalmente.

CAPÍTULO 4. DISEÑO DE ACTIVIDADES

Introducción a las actividades

Las cinco actividades diseñadas en el presente trabajo de investigación, fueron creadas para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales y están basadas en la gamificación, la resolución de problemas y la modelación. El desarrollo de dichas actividades se estructuró de la siguiente manera: cada actividad cuenta con un reto y cada reto cuenta con una serie de problemas; que para el presente trabajo llamaremos desafíos; a medida que se cumplan los retos, los estudiantes van obteniendo beneficios dentro de la plataforma. El desarrollo de cada actividad cuenta con una historia que se va desarrollando a medida que los estudiantes resuelven cada reto; los estudiantes crean un avatar en una plataforma de gamificación y posterior a ello se crean grupos de trabajo.

Descripción de la actividad

La gamificación está basada en el desarrollo de una historia que inicia en la actividad 1 llamada “*A meeting of Strangers*” y termina en la actividad 5 “*The Three Pillars*”, se representa en la plataforma en estaciones nombradas y diseñadas como se representa en la figura 2.

Figura 2

Estaciones de la historia



Fuente: Imagen tomada como pantallazo de juego virtual

Debido al proyecto de transversalidad de la institución, los nombres de cada estación se colocaron en inglés y de esta manera apoyar al vocabulario de los estudiantes en dicho idioma extranjero.

Para iniciar las actividades cada estudiante ingresa a la plataforma <https://www.classcraft.com/es-es/> y escoge libremente un personaje o avatar el cual le permitirá avanzar en las actividades propuestas, los personajes son: Guerrero, Mago y Curandero, figura 3.

Figura 3

Personajes del proceso de gamificación



Fuente: <https://app.classcraft.com/teacher/home>

Luego, en clase los estudiantes arman los grupos de trabajo libremente, se les aconseja que cada grupo tenga al menos un personaje (Guerrero, Mago y Curandero). En clase el profesor ingresa a la plataforma y arma los grupos de trabajo y asigna el nombre creado por los estudiantes a cada grupo, figura 4.

Figura 4

Organización de grupos participantes



<input type="checkbox"/>	NOMBRE	AUSENTE	MANAGE POINTS	TIPO	NIVEL	HP	AP	XP	GP
<input type="checkbox"/>	JUAN ARANGO	<input type="checkbox"/>	  	Guerrero	1				50
<input type="checkbox"/>	MARIA BEUSAQUILLO	<input type="checkbox"/>	  	Mago	1				50
<input type="checkbox"/>	NICOL DAZA	<input type="checkbox"/>	  	Curandero	1				50
<input type="checkbox"/>	OSCAR HERRERA	<input type="checkbox"/>	  	Mago	1				50

Fuente: Imagen tomada de la plataforma app.classcraft.com

Para iniciar la clase, el profesor introduce a los estudiantes en una historia diciendo:

“Bienvenidos damas y caballeros, me presento mi nombre es Emir Pino del viento, emisario del rey Red Diamond. Él los ha convocado para rescatar un objeto muy valioso que ha sido hurtado de su castillo principal, creemos que el ladrón lo ha escondido en las ruinas de Broken Crystals...”

Luego de realizar la lectura de la historia, se le entrega a cada grupo el reto de la actividad. El reto para la primera actividad consiste en avanzar por un mapa y salir de él en el lugar correcto, este mapa se entrega en físico y se dan las instrucciones para salir del él cada vez que el grupo resuelve un desafío, figura 5.

Figura 5

Mapa del proceso



Fuente: Imagen tomada de google earth

Mientras los estudiantes desarrollan los desafíos, se va explicando lo que se define para esta gamificación como reglas. Para la primera actividad se proponen tres reglas así, la regla de los dados, la regla de acción y las reglas de objetos, aliados y mascotas.

La regla de los dados consiste en lanzar dados de diferentes caras y gana el jugador o equipo que obtenga más éxitos. Para determinar la cantidad de éxitos se establece la tabla 3.

Tabla 3

Tabla de valores en las opciones de dados y lances

N° caras	Caras fracasos	Caras éxitos	Blancos
6	1	6	2, 3, 4 y 5
8	1 y 2	8 y 7	3, 4, 5 y 6
10	1, 2 y 3	10, 9 y 8	4, 5, 6 y 7
12	1, 2, 3 y 4	12, 11, 10 y 9	5, 6, 7 y 8
20	1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7	20, 19, 18, 17, 16, 15 y 14	8, 9, 10, 11, 12 y 13

La regla de acción consiste en determinar el orden en que los grupos serán atendidos durante la solución de los desafíos. Tal orden se determina utilizando la regla de los dados.

Por último, la regla de objetos, aliados y mascotas, consiste en tarjetas que permiten obtener beneficios durante el desarrollo de los desafíos, dichas tarjetas tienen limitaciones para ser utilizadas o reglas de dados para poder utilizarlas, figura 6.

Figura 6

Ejemplo de tarjeta de beneficios



Fuente: Tarjeta de preguntas. Imagen tomada de <https://co.pinterest.com/pin/68609594312472374/>

Esta tarjeta permite a cada grupo realizar una pregunta durante el desarrollo de cada reto. Sin embargo, para utilizarlas debe lanzar los dados y obtener más éxitos que fracasos y a cada grupo se le entrega solamente tres tarjetas de éstas, que tienen dos caras, figura 7.

Figura 7

Lados de la tarjeta de beneficios



Kristallschwert
Espada que perteneció al guerrero de las tierras blancas llamado Koch copo de Nieve , se dice que puede lanzar ráfagas de viento y aumentar su daño.
Atributo: proporciona un dado más a cualquier reto de dados. Puede ser utilizada por magos, guerreros o curanderos.
Costo: se puede utilizar en cada acción. (5 Puntos vitales)
Duración: un estudiante sólo la puede utilizar durante una historia de clase.
Contra: se puede evitar su uso con la utilización del escudo de Mandelbrot

Fuente: Imagen tomada de <https://co.pinterest.com/pin/68609594312472374/>

Esta tarjeta es de un objeto y posee: la definición, el atributo, el costo, la duración y contra del beneficio por tener la tarjeta. Durante la realización de las actividades se van explicando a los estudiantes las reglas que se desarrollan en la gamificación.

Al finalizar cada desafío los grupos ganan puntos de experiencia. Los puntos de experiencia son un indicador que trae la aplicación, es decir en el momento que el estudiante termine la actividad se le sube los puntos en la plataforma, esto se puede hacer desde el celular o el computador.

Por cada actividad que los estudiantes realicen correctamente obtienen más puntos de experiencia, tal como se representa en la figura 8.

Figura 8

Sistema de registro de acciones y avances



Fuente: Tomado de <https://app.classcraft.com/teacher/home>

De manera similar se desarrollan las demás actividades propuestas en el presente trabajo.

4.1. Estructura de las actividades

4.1.1 Actividad Uno: A meeting of Strangers

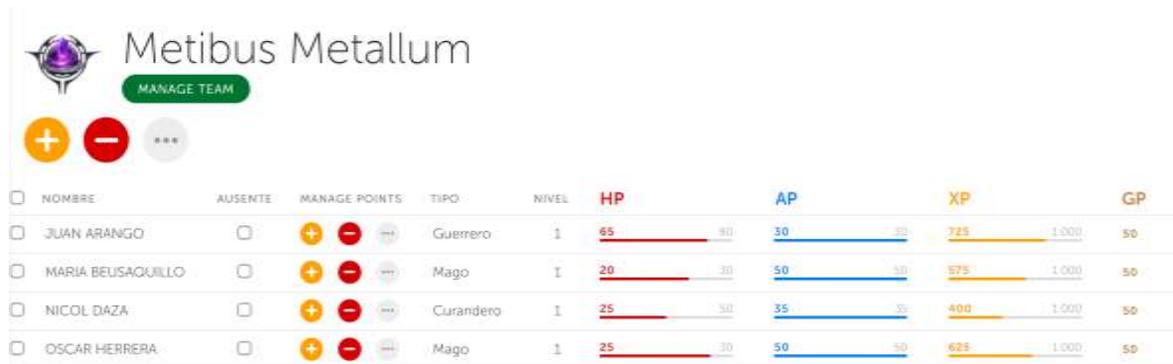
Objetivo: Introducir a los estudiantes en la metodología de la Gamificación, mostrando sus reglas y características, componentes, plataforma y dinámicas propias de la clase.

Sugerencia metodológica: El profesor inicia narrando la introducción de la historia. Luego, asigna a cada grupo de trabajo una bitácora con un mapa y una tabla. En la bitácora deberá cada grupo escribir la cantidad de aciertos obtenidos y trazar la ruta de escape, el grupo que llegue primero a la meta y obtenga la mayor cantidad de aciertos en el juego, ganará la mayor cantidad de puntos de experiencia.

Materiales a utilizar: guía de trabajo, dados, tablero de lanzamiento, tarjetas de poderes y plataforma.

Desarrollo de la actividad:

El profesor previamente ha armado grupos de trabajo aleatoriamente de no más de cinco estudiantes y cada estudiante ha escogido un personaje de la plataforma Classcraft como se muestra en las figuras 4 y 9.



<input type="checkbox"/>	NOMBRE	AUSENTE	MANAGE POINTS	TIPO	NIVEL	HP	AP	XP	GP
<input type="checkbox"/>	JUAN ARANGO	<input type="checkbox"/>	+ - ...	Guerrero	1	<div><div style="width: 65%;">65</div></div> / 90	<div><div style="width: 30%;">30</div></div> / 30	<div><div style="width: 72.5%;">725</div></div> / 1,000	50
<input type="checkbox"/>	MARÍA BEUSAQUILLO	<input type="checkbox"/>	+ - ...	Mago	1	<div><div style="width: 20%;">20</div></div> / 30	<div><div style="width: 50%;">50</div></div> / 50	<div><div style="width: 57.5%;">575</div></div> / 1,000	50
<input type="checkbox"/>	NICOL DAZA	<input type="checkbox"/>	+ - ...	Curandero	1	<div><div style="width: 25%;">25</div></div> / 30	<div><div style="width: 35%;">35</div></div> / 50	<div><div style="width: 40%;">400</div></div> / 1,000	50
<input type="checkbox"/>	OSCAR HERRERA	<input type="checkbox"/>	+ - ...	Mago	1	<div><div style="width: 25%;">25</div></div> / 30	<div><div style="width: 50%;">50</div></div> / 50	<div><div style="width: 68.5%;">685</div></div> / 1,000	50

Figura 9. Criterios básicos de la plataforma

Fuente: Pantallazos de la plataforma Classcraft

Luego, ha asignado una ruta para la historia en la plataforma. Los estudiantes deben ir superando cada etapa del juego.



Figura 10, mapa de ruta actividad 1

Fuente: Diseño del investigador tomada como pantallazo de juego virtual

A meeting of Strangers

El profesor inicia contando una historia:

Cuenta la historia que en un lugar al norte de la isla de cristal (Crystal Island) se reunieron en un castillo hombres y mujeres que fueron convocados para una nueva tarea. Un anciano se levanta de su asiento y en voz alta dice: “Bienvenidos damas y caballeros, me presento mi nombre es Emir Pino del viento, emisario del rey Red Diamond. Él los ha convocado para rescatar un objeto muy valioso que ha sido hurtado de su castillo principal, creemos que el ladrón lo ha escondido en las ruinas de Broken Crystals, aquellos que recuperen este objeto obtendrán una recompensa.

Emir entrega a cada grupo un pergamino en el que se encuentra el mapa de las ruinas, (el profesor entrega a cada grupo una hoja con el siguiente mapa y tabla de puntaje

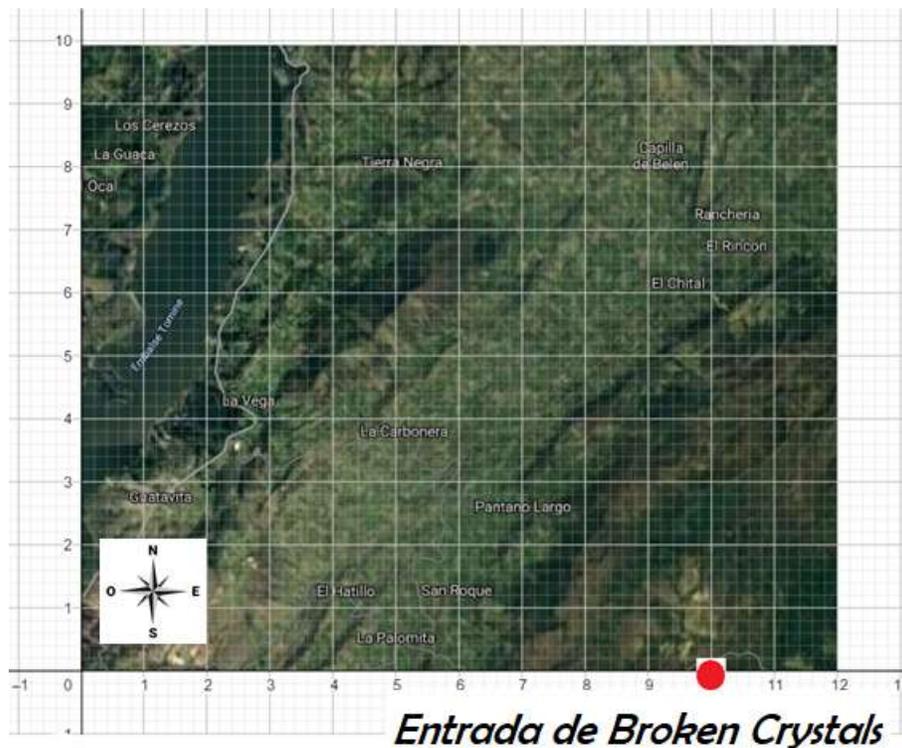


Figura 11 Mapa representativo de dimensiones lineales

Fuente: Diseño del investigador, tomada de google earth

Cada unidad del mapa es un kilómetro. Las indicaciones para avanzar las da el profesor cada vez que un grupo termina correctamente un desafío.

Tabla 4

Sistema de control de avances por acciones

<i>Acción</i>														
<i>Puntos Medalla</i>														

Los grupos participan por turnos, dichos turnos se le llama acciones de juego. En cada acción se asignan puntos por el desempeño.

Explicación de reglas de los dados: los dados son los que te permiten hacer acciones convencionales o extras, son los que deciden las consecuencias en actividades fallidas o exitosas y determinan en ocasiones el vencedor de una batalla. Los resultados de los dados pueden ser éxitos, fracasos y blancos. Entre mayor cantidad de éxitos, mejor la actividad o resultado de la actividad, de igual manera para los fracasos; los blancos no deciden, pero en ocasiones determinan desempates o decisiones dudosas.

En un dado de 6 caras, la cara que tiene el número 1 es fracaso y la cara con el número 6 es éxito, blancos las caras que tienen los números restantes, 2, 3, 4, 5.

En un dado de 8 caras, las caras que tienen los números 1 y 2 son fracasos y las caras que tienen los números 7 y 8 son éxitos, las demás caras con sus respectivos números son blancos.

En un dado de 10 caras, las caras que tienen los números 1, 2 y 3 son fracasos y las caras que tienen los números 8, 9 y 10 son éxitos, las demás caras con sus respectivos números son blancos.

En un dado de 12 caras, las caras que tienen los números 1, 2, 3 y 4 son fracasos y las caras que tienen los números 9, 10, 11 y 12 son éxitos, las demás caras con sus respectivos números son blancos.

En un dado de 20 caras, las caras que tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 son fracasos y las caras que tienen los números 20, 19, 18, 17, 16, 15 y 14 son éxitos, las demás caras con sus respectivos números son blancos, estas reglas se pueden presentar como lo expone la tabla 4.

Tabla 5

Dados de juego y criterios de valor en las acciones

N° caras	Caras con fracasos	Caras éxitos	Blancos
6	1	6	2, 3, 4 y 5
8	1 y 2	8 y 7	3, 4, 5 y 6
10	1, 2 y 3	10, 9 y 8	4, 5, 6 y 7
12	1, 2, 3 y 4	12, 11, 10 y 9	5, 6, 7 y 8

20	1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7	20, 19, 18, 17, 16, 15 y 14	8, 9, 10, 11, 12 y 13
----	----------------------	-----------------------------	-----------------------

La cantidad de dados con las que cuenta un competidor está determinada por la cantidad de puntos de experiencia que tenga (XP) como se muestra en la figura 4, es decir que por cada 100 puntos de experiencia tiene derecho a un dado. Sin embargo, en algunas circunstancias debido a las reglas de los retos, poderes u objetos, la cantidad de dados puede cambiar. Es importante tener en cuenta que la cantidad de éxitos, fracasos o blancos también pueden cambiar dependiendo de la historia.

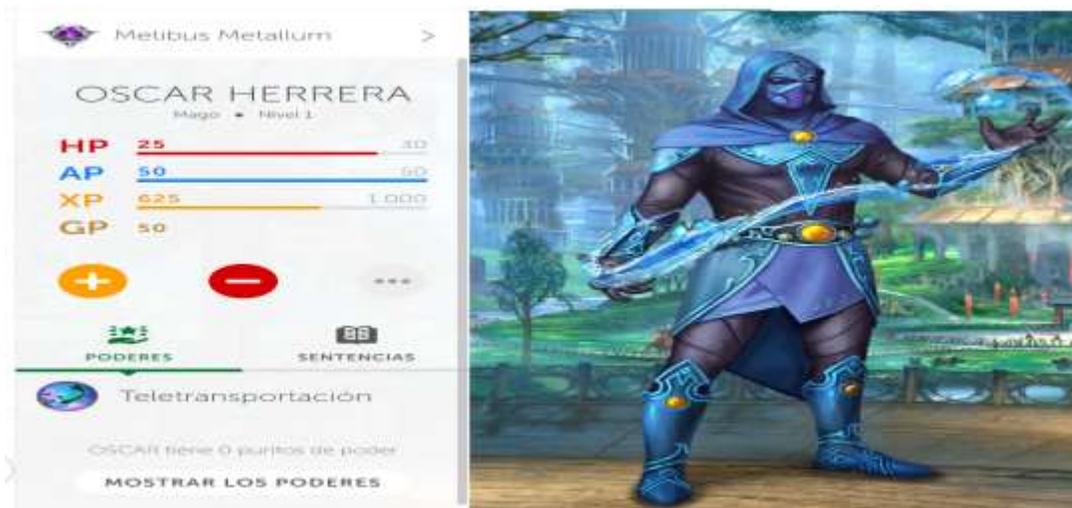


Figura 12: ficha individual de control de avances

Fuente: Diseño del investigador tomando pantallazos de juego

A cada grupo se le entregará una hoja con un mapa y una cuadrícula, la cual utilizarán para avanzar y llegar al objetivo. Para lograr avanzar los estudiantes reciben unas tarjetas las cuales tienen un problema de olimpiadas matemáticas y al resolverlos correctamente los estudiantes podrán saber hacia dónde avanzar. Gana el grupo que primero llegue al final de la prueba y ganará cada participante 300 puntos de experiencia (XP).

Reto de los dados

Nuestro personaje Emir sentándose en su asiento pregunta; ¿Tienen alguna duda?

Cada grupo jugará a los dados.

Regla, cada grupo debe determinar las dos maneras de jugar con la cantidad de dados:

- a. Cada jugador irá pasando uno a uno y tomará la cantidad de dados que le corresponden de acuerdo a la cantidad de puntos de experiencia (XP). Los lanzará y se anotarán la cantidad de éxitos y fracasos obtenidos; luego, se establece el total de éxitos obtenidos en el total de lanzamientos.
- b. Un solo jugador pasará y tomará la cantidad de dados que le corresponde al total de puntos de experiencia del grupo entero (XP). Lanzará todos los dados y se anotarán la cantidad de éxitos y fracasos obtenidos; luego, se establece el total de éxitos obtenidos en el total de lanzamientos.

El grupo que obtenga la mayor cantidad de éxitos será el último que preguntará a Emir y el último de una acción dentro de la presente historia.

Explicación de reglas de acción: dentro del juego los grupos o estudiantes de manera individual, deberán realizar acciones (decisiones); estas acciones determinan una consecuencia (ligada directamente con las reglas de los dados) que estará unida con el desarrollo de la historia. Cada grupo o jugador al iniciar una historia determina el orden de acción siendo la más arriesgada la primera y la menos la última.

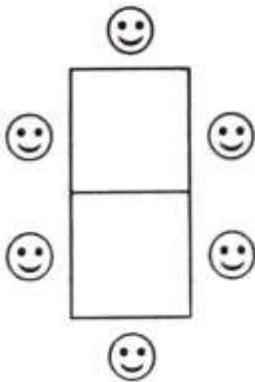
El orden de cada grupo o estudiante podrá variar debido a las reglas de los desafíos, atributos, aliados, mascotas u objetos.

Desafío 1: Sentados en una mesa

Cuatro (4) personas pueden sentarse alrededor de una mesa cuadrada. Para sentarse 6 personas se requieren dos mesas, como se ilustra en figura 5.

Figura 12

Diseño gráfico de ecuaciones lineales con elementos cotidianos



Teniendo en cuenta el anterior gráfico, completa la siguiente tabla.

Tabla 6

Tablero de soluciones

Cantidad de mesas	de	Personas sentadas	Expresión para calcular la cantidad de personas sentadas
1			$((2(\underline{\quad})) + 2)$
2			$((2(\underline{\quad})) + 2)$
3			$((2(\underline{\quad})) + 2)$
4			
5			
		14	
		16	
24			$((2(\underline{\quad})) + 2)$
n			

Fuente: Adaptado por el investigador problema olimpiadas (Jaime & María, 2000, pág. 12)

¿Cuántas mesas se requieren para sentar 24 personas?

Reto de acciones

Cada grupo tiene derecho a cuatro preguntas durante toda la actividad de **A meeting of Strangers**, el profesor pasará (luego de 5 minutos) en el orden de acción preguntando si tiene una pregunta, si el grupo tiene una pregunta; uno de los magos (y sólo uno de los magos) lanzará los dados correspondientes a su (XP) y hará la pregunta.

Si obtiene más éxitos que fracasos la respuesta será correcta, si obtiene más fracasos que éxitos no se contesta la pregunta y perderá su oportunidad, y si no hay ni fracasos ni éxitos y obtiene en la sumatoria de puntos blancos más de 6 se contesta la pregunta de manera parcial y en voz alta para que todos los grupos la escuchen.

Luego de pasar por todos los grupos, el profesor espera 5 minutos y vuelve a pasar en el orden de acción para observar si ya obtuvieron el resultado correcto, si es así, dará las indicaciones para avanzar en el mapa y obtener el siguiente reto.

Explicación de reglas de objetos, aliados y mascotas: en ocasiones, el juego permite obtener cartas que poseen objetos, aliados y mascotas. Cada una de estas tarjetas tiene un poder o atributo especial que les permite a los estudiantes utilizarla en algunos momentos especiales. Para obtener una tarjeta, los estudiantes deben

resolver un desafío rápido o acción de clase para ganarla. Un ejemplo de esas tarjetas está en la figura 7.

Figura 13
Carta de poder



Kristallschwert

Espada que perteneció al guerrero de las tierras blancas llamado **Koch copo de Nieve**, se dice que puede lanzar ráfagas de viento y aumentar su daño.

Atributo: proporciona un dado más a cualquier reto de dados. Puede ser utilizada por magos, guerreros o curanderos.

Costo: se puede utilizar en cada acción. (5 Puntos vitales)

Duración: un estudiante sólo la puede utilizar durante una historia de clase.

Tomado de: <https://www.pinterest.es/pin/42573158968909450/>

Reto objetos, aliados y mascotas

Por cada grupo se selecciona un guerrero el cual deberá resolver un reto lo más rápido posible. El reto rápido se llama la clave, consiste en resolver cuatro ecuaciones lineales simples y la solución de cada una de ellas hace parte de una clave para ganar la tarjeta **Kristallschwert**. El orden de acción se establece por el orden de los grupos.

La clave

1. $x - 5 = 4$
2. $2x + 3 = 7$
3. $2x + 5 = x + 10$
4. $3x + x + 4 = 2x + 12$

Escriba la clave en las cuadrículas de la Figura 15 teniendo en cuenta que, la posición de las centenas es la mitad de las unidades de mil y en la posición de las unidades es el impar más grande de los dos.

Figura 14

Cuadrículas para colocar la clave de la tarjeta de poder

--	--	--	--

El profesor entrega al guerrero ganador la tarjeta con el poder, según las características de la tarjeta el estudiante podrá utilizarla. Las veces que sea necesario teniendo en cuenta el costo.

Desafío 2: Cuadro del calendario

Escribimos la expresión algebraica que representa la suma de los nueve números de un cuadrado de 3×3 de un mes de un calendario normal de semanas 7 días, como se ve en la figura 8.

Figura 15

Cuadrado con nueve números para una expresión algebraica

	l	m	m	j	v	s	d
						1	2
3	<i>a</i>	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	
24	25	26	27	28	29	30	
31							

Fuente: adaptado por el investigador

Escribir la expresión algebraica que representa la suma de los nueve números del rectángulo en términos de la variable a

Suma = _____

¿Cuál es la suma de los nueve números si el valor de $a = 4$?

Si la suma de los nueve números colocados en un cuadrado de 3×3 es igual a 180

$$a + (a + \underline{\quad}) + (a + \underline{\quad})$$

¿Cuál es el valor de la variable a ? Resolver al respaldo de la hoja.

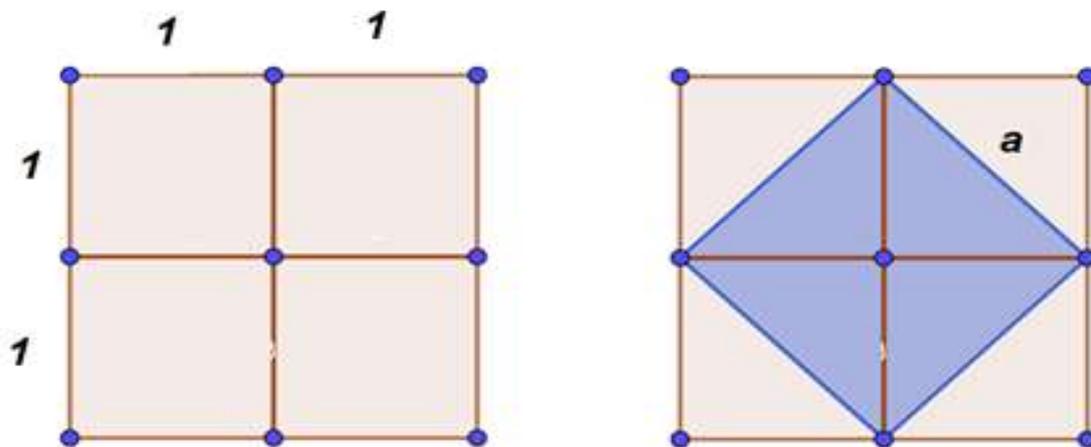
Nuevamente el profesor espera 5 minutos y vuelve a pasar en el orden de acción para observar si ya obtuvieron el resultado correcto, si es así, dará las indicaciones para avanzar en el mapa y obtener el siguiente reto.

Desafío 3: Entre áreas

Observa los cuadrados de la figura 17, y contesta las preguntas:

Figura 16

Cuadrados y ecuaciones lineales con superficies



Fuente: Adaptado por el investigador del problema 11 (Clemens & Daffer, 1998, pág.

415)

- ¿Cuál es el área del cuadrado grande? _____

- ¿Cuál es la longitud del lado a del cuadrado azul? _____
- ¿Cuál es el área del cuadrado azul? _____

Si se aumenta en dos unidades el lado del cuadrado grande, ¿En cuánto aumentará el área del cuadrado inscrito en él? _____

En la figura 18, realice los respectivos recortes de las partes sombreadas y compruebe que el área del cuadrado pequeño es el área de la mitad de cuadrado grande. (Tome una fotografía como evidencia de la actividad).

Ejemplo comparativo de áreas

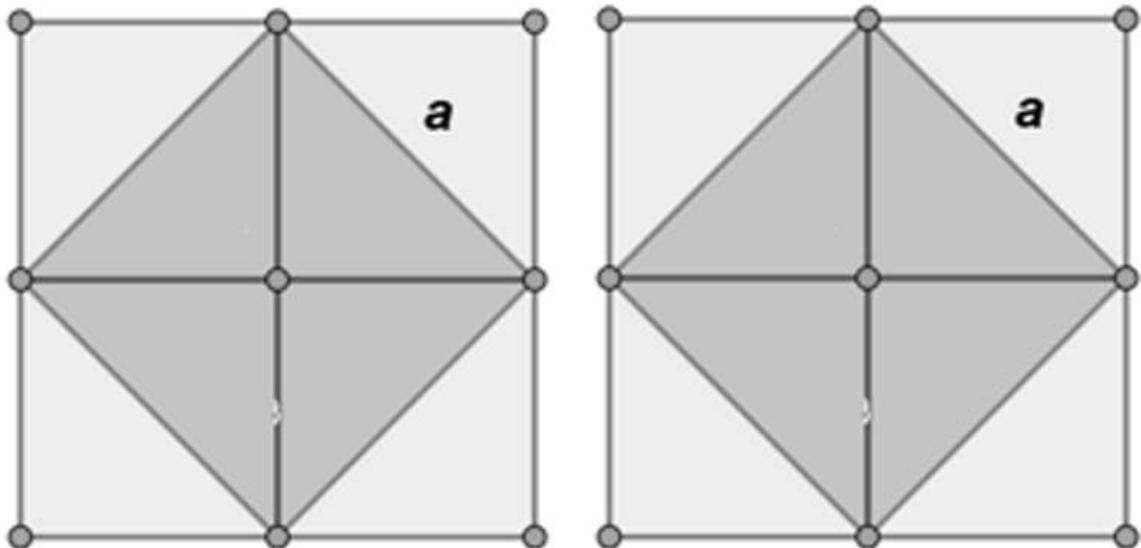


Figura 18: ayuda visual ejercicios propuestos

Fuente: : Diseño del investigador

Desafío 4: EL Pescado

Observe la figura 19, Hay un pez cuya cabeza mide 9 pulgadas; la cola es tan larga como la cabeza más la mitad del lomo; y el lomo es tan largo como la cabeza y la cola juntas. ¿Cuál es la longitud del lomo y la cola?

Ecuaciones que relacionan longitudes

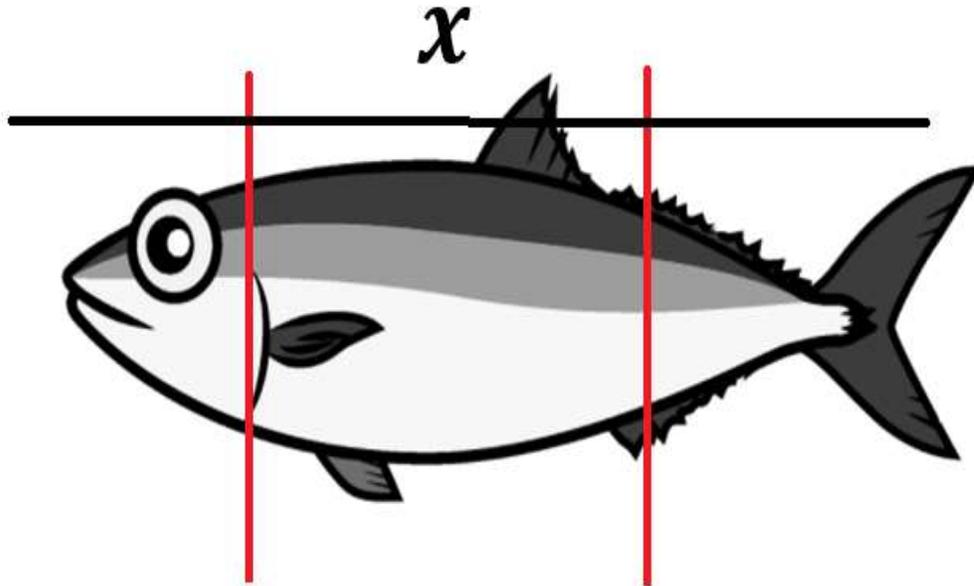


Figura 17: ayuda visual para resolver problema propuesta

Fuente: Adaptado por el investigador, ejercicio citado por Vicente Meavilla de Elements of algebra for the use of students at the Universities (1756), del profesor Nicholas Saunderson. (Meavilla, 2013, pág. 60)

Recomendación: tome como variable x la longitud del lomo

En este punto el narrador establece un punto de cierre y futura apertura del proceso, y declara: durante el recorrido por las ruinas de Broken Crystals, no pudieron observar nada extraño nada más que escombros de una vieja batalla, al parecer Emir pino del viento los había enviado por el camino equivocado. ¿Pero por qué haría eso?

De pronto en la salida de las ruinas se encuentran con un guerrero ... (la imagen habrá de estimular la creatividad, por ello se ilustra con la figura 20.

Imagen para estimular la creatividad en un proceso de gamificación



Tomado de: <https://www.pinterest.es/pin/655907133223134088/>

... aparentemente está saludando diciendo

- ¿Tira hielo en algodón o seda? - En mi país se saluda de esa manera, ¿qué dicen? –
- ¿Tira hielo en algodón o seda?...

4.1.2 Actividad Dos: The Riddle of the Tower

Objetivo: Reconocer y utilizar correctamente las propiedades de la igualdad para la solución de ecuaciones lineales.

Sugerencia Metodológica: El profesor continúa con la historia del rescate del objeto perdido del Rey Red Diamond. Utilizando las reglas del juego, los estudiantes deben superar desafíos para obtener las fichas de un rompecabezas que les permitirán armar una torre, el grupo que primero arme la torre será el vencedor.

Materiales a utilizar: guía de trabajo, dados, tablero de lanzamiento, tarjetas de poderes y plataforma.

Desarrollo de la actividad

El profesor continúa con la historia retomando la figura 20.

Los caballeros al salir de las ruinas de Broken Crystals se encuentran con un guerrero, éste hace movimientos con las manos en señal de saludo, y dice:

- ¿Tira hielo en algodón o seda? - En mi país se saluda de esa manera, ¿qué dicen?
- ¿Tira hielo en algodón o seda?...

Los estudiantes deben elegir cómo contestar, Hielo en algodón o hielo en seda, es un juego de elección, si eligen hielo en algodón tendrán la opción de ser primeros en las acciones y si escogen hielo en seda serán segundos en las acciones. Luego, deben lanzar los dados de acuerdo a la cantidad de puntos de experiencia (XP) para determinar el orden de acción.

La actividad consiste en armar un rompecabezas, como el de la Figura 21. Mediante las soluciones de los desafíos, los estudiantes obtienen, de manera aleatoria, las fichas para armar la torre y de esta manera ganar los puntos de experiencia de esta actividad.

Figura 18

Rompecabezas de la torre



Fuente: <https://www.pinterest.es/pin/342062534209859078/>

Tabla 7

Tabla registro de acciones de los estudiantes

Acción														
Puntos Medallas														

Antes de iniciar los desafíos, los estudiantes entran en batalla para obtener una de las siguientes tarjetas:

Figura 19

Tarjetas de juego



Corazón Partido

El corazón sangra a causa de una traición, ésta debe ser perdonada en algún momento.

Atributo: Permite cambiar un compañero de un grupo a otro.

Costo: Debe intercambiar por una acción un compañero de su grupo. (acción obligatoria)

Duración: El estudiante cambia por una acción. No se puede cambiar el mismo estudiante en dos acciones consecutivas.

Contra: se puede evitar su uso con la utilización de la carta, los amantes de Rene Magritte.

Fuente: <https://www.pinterest.es/pin/342062534209859078/>



Los amantes de Rene Magritte.

La reconciliación y el perdón es la solución para los problemas de la traición.

Atributo: Evita la utilización de la carta corazón partido.

Costo: Para evitar el uso debe ganar en reto de dados.

Duración: Se puede utilizar en dos acciones seguidas.

Contra: solo se puede utilizar cuando se utilice la carta de corazón partido.

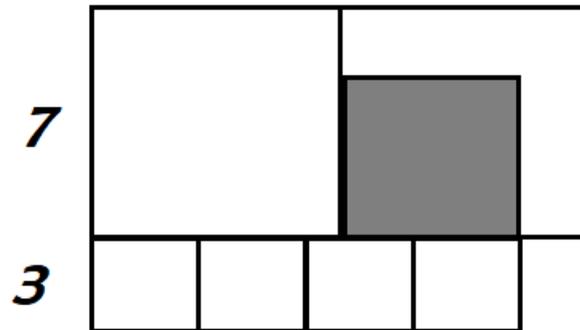
Fuente: <https://www.pinterest.es/pin/18577417204395938/>

Reto dados y tarjetas: cada uno de los grupos recibirá tres problemas diferentes de olimpiadas matemáticas y de problemas de fósforos.

- Problema uno: Betty quiere comprar una bicicleta, pero le faltan 23.000 pesos. Clara también quiere comprar la misma bicicleta, pero le faltan 25.000 pesos. Si Betty y Clara reúnen su dinero, tendrán exactamente el dinero para comprar la bicicleta. ¿Cuál es el precio de la bicicleta?
- En la figura 23, hay dos cuadrados grandes con lados de 7 unidades cada uno, cuatro cuadrados pequeños con lados de 3 unidades cada uno. ¿Cuál es el área de la figura sombreada, si también es un cuadrado?

Figura 20

Imagen que representa una ecuación lineal

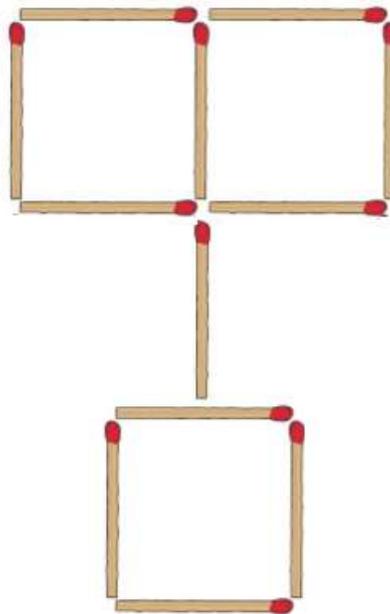


Fuente: Adaptado por el investigador problema olimpiadas (Jaime & María, 2000, pág. 12)

■ En la figura 24, Mueve cuatro fósforos para formar cinco cuadrados

Figura 21

Imagen de creatividad



Fuente: tomado de (Publishing, 2012, pág. 21)

Las tres tarjetas se entregarán a cada uno de los grupos. Los primeros dos grupos que terminen correctamente los tres problemas ganarán una tarjeta de corazón partido, el tercero y cuarto recibirán la tarjeta de los amantes de Rene Magritte, los demás grupos no obtendrán ninguna tarjeta.

... el recorrido por las ruinas de Broken Crystals no dejó nada extraño, nada más que escombros de una vieja batalla, al parecer Emir pino del viento los había enviado por el camino equivocado. ¿pero, por qué haría eso?

El guerrero que se encuentra en la salida de las ruinas, lleva por nombre Koch Copo de Nieve. Él los invita a la torre de piedra y les dice:

- Creo que han sido engañados; Emir Pino del viento fue expulsado hace tiempo de estas tierras por el mismo Rey Red Diamond, creo que él intenta robar y escapar con el cofre del bastón.
- Si me ayudan a descubrir el secreto de esta torre yo les ayudaré a encontrar y dar captura a Emir Pino del viento y el cofre.

Explicación regla de personajes: cada personaje tiene una cantidad de puntos de vida (HP) y de experiencia (XP), la cantidad de estos puntos está determinada por la importancia en el desarrollo de la historia que el personaje tenga. El personaje puede hacerte daño o puede ayudarte a resolver desafíos.

Reto de personaje

El personaje toma sus propias decisiones. Puedes pedir ayuda a Koch Copo de Nieve, cada vez que lo necesites. Sin embargo, por cada acción en la que te ayude deberás pagar por ello, en este caso por cada acción un estudiante de cada grupo deberá hacer una tarea para Koch.

El estudiante puede ser escogido por el grupo si Koch lo permite, si no, él lo escogerá.

El profesor, en el orden de acción entrega el primer desafío y las tarjetas de pregunta.

Desafío 1: Estrellas, triángulos y cuadrados

Encuentra el valor numérico que representa cada una de las imágenes de la figura 25.

Figura 22

Ejercicios de ecuaciones lineales mediante imágenes

Ejercicio 1

$$\star + \star + \star + 4 = 25$$

$$\star = ?$$

Ejercicio 2

$$\star + \blacktriangle = 17 \qquad \star = ?$$

$$\star - \blacktriangle = 7 \qquad \blacktriangle = ?$$

Ejercicio 3

$$\square + \bigcirc = 10$$

$$\square + \square + \square + \bigcirc + \bigcirc = 24$$

$$\bigcirc = ?$$

$$\square = ?$$

Ejercicio 4

$$\bigcirc + \triangle + \square = 12$$

$$\bigcirc = ?$$

$$\bigcirc + \bigcirc + \square = 11$$

$$\square = ?$$

$$\triangle + \square = 8$$

$$\triangle = ?$$

Ejercicio 5

$$\square - \triangle = -2$$

$$\bigcirc = ?$$

$$\bigcirc + \triangle = 20$$

$$\square = ?$$

$$\square - \bigcirc = -4$$

$$\triangle = ?$$

Fuente: creación del investigador

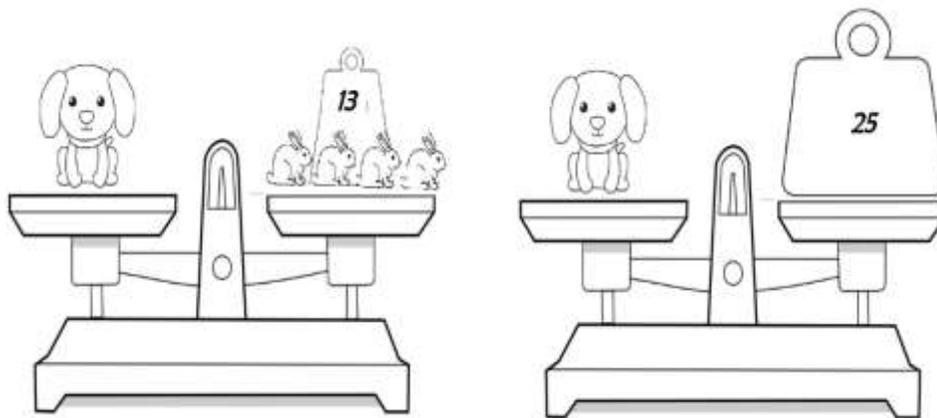
El desafío es superado cuando un estudiante escogido al azar por la plataforma Classcraft explique al profesor los procedimientos utilizados para resolver los diferentes ejercicios. Puntos experiencia 100 (XP)

Desafío 2: Trueques y balanzas

- En la figura 26, las balanzas están en equilibrio, los conejos pesan igual y las pesas están en kg.

Figura 23

Imágenes cotidianas relacionadas con ecuaciones lineales



Fuente: Creación propia del investigador.

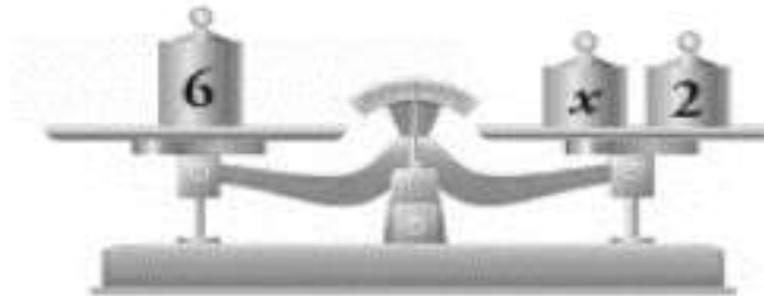
¿Cuánto pesa un conejo? _____

¿Cuál será el peso de un conejo, si la pesa pequeña pesara 28 kg y, la pesa grande 60kg? _____

- En Las figuras 27, 28, 29, 30 de balanzas determina en cada una el valor del peso de x luego escribe la ecuación que representa cada dibujo.

Figura 24

Imagen representativa de una ecuación lineal



Fuente: Adaptado por el investigador (Joya, 2013, pág. 79)

$x =$ _____

Ecuación: _____

Figura 25

Imagen representativa de una ecuación lineal



Fuente: Adaptado por el investigador (Joya, 2013, pág. 78)

$x =$ _____

Ecuación: _____

Figura 26

Imagen representativa de ecuación lineal



Fuente: Adaptado por el investigador (Joya, 2013, pág. 80)

$x =$ _____

Ecuación: _____

Figura 27

Imagen representativa de ecuación lineal



Fuente: Adaptado por el investigador (Joya, 2013, pág. 80)

$x =$ _____

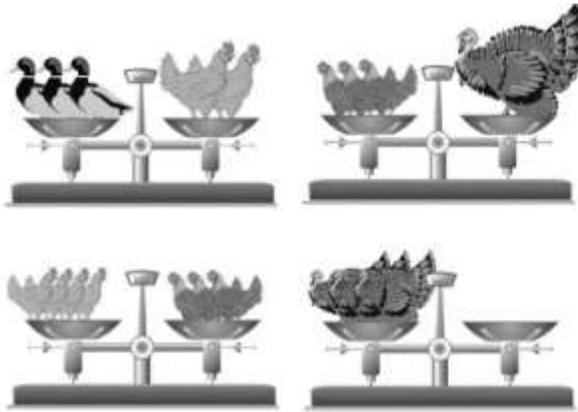
Ecuación: _____

En el desarrollo del conocimiento matemático la complejización es un paso cada vez profundo y exigente. Observe las figuras 31 y obtenga la respuesta.

- Tenga en cuenta la figura de la balanza, ¿Cuántos patos hacen tres pavos?
Respuesta: _____

Figura 28

Imagen de ecuación lineal método de la balanza



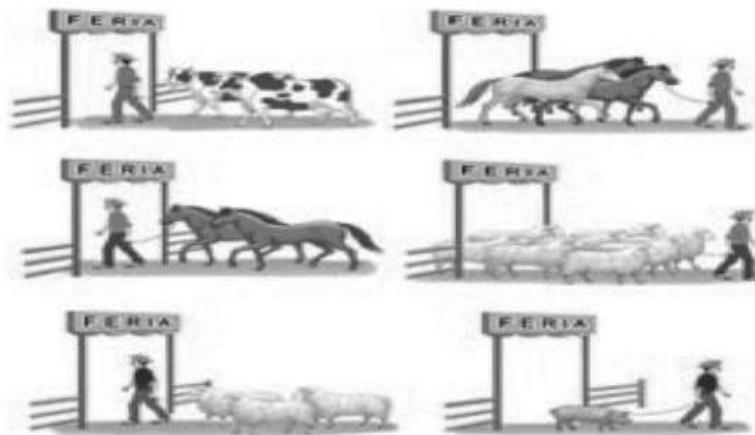
Fuente: Adaptado por el investigador (Joya, 2013, pág. 80)

Escriba el procedimiento realizado y las ecuaciones realizadas para encontrar la respuesta en la parte de atrás de esta hoja.

Observe la figura 32 y halle la respuesta.

Figura 29

Ecuación lineal representada mediante método balanza



Fuente: Adaptado por el investigador (Joya, 2013, pág. 80)

- ¿Cuántos cerdos se necesitan para intercambiarlos por 4 vacas?
Respuesta: _____

Escriba el procedimiento realizado y las ecuaciones realizadas para encontrar la respuesta en la parte de atrás de esta hoja.

- Considere las siguientes ecuaciones

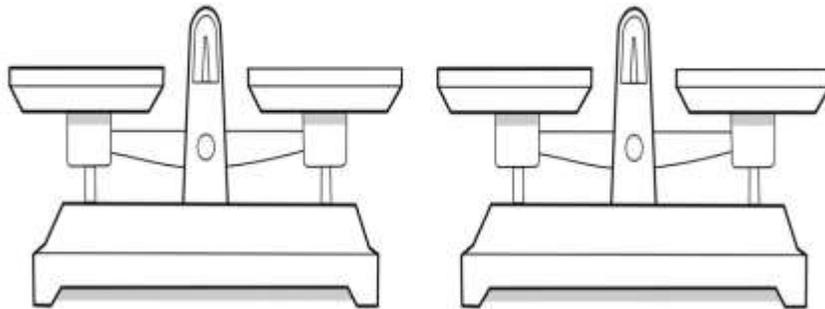
$$x + 3y = y + 8$$

$$x + y = 6$$

Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando dos balanzas y representando las variables x, y en la figura 33

Figura 30

Imagen de ecuación lineal mediante el método de balanzas



Fuente: Creación propia del investigador.

Explique el procedimiento para encontrar el valor de

$$x = \underline{\quad}$$

$$y = \underline{\quad}$$

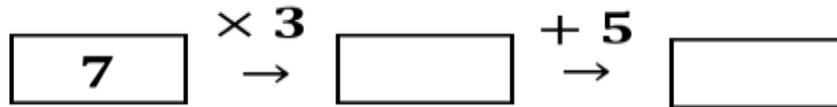
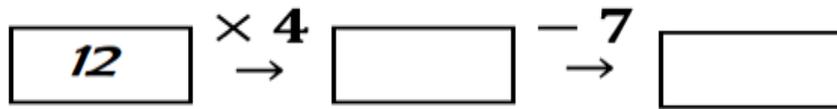
El desafío es superado cuando un estudiante escogido al azar por la plataforma Classcraft explique al profesor los procedimientos utilizados para resolver los diferentes ejercicios. Puntos experiencia 100 (XP)

Desafío 3: Diagramas numéricos

- Complete los diagramas en cada figura realizando las operaciones indicadas en cada flecha

Figura 31

Imagen de ecuación lineal



Fuente: Creación propia del investigador.

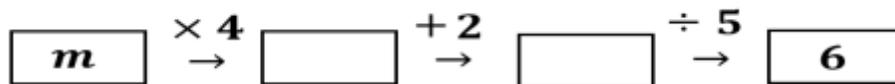
- Determine el valor de la variable, en la figura 35 para que el resultado sea correcto y escriba en la parte de abajo la ecuación que representa el diagrama numérico.

Figura 32

Diagrama de ecuaciones lineales

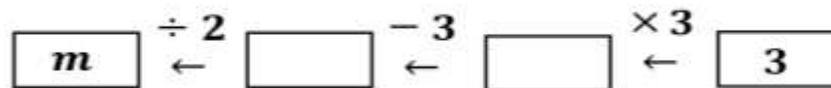
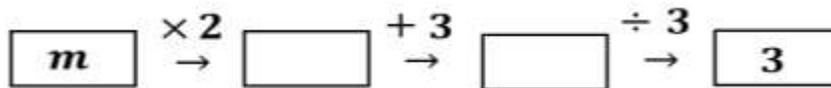
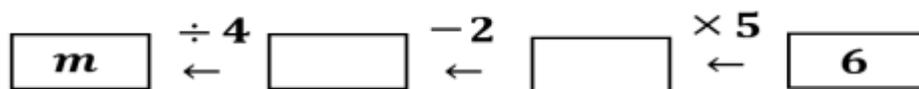


Ecuación:



Ecuación:

Nota: realiza la operación



Fuente: Creación propia del investigador.

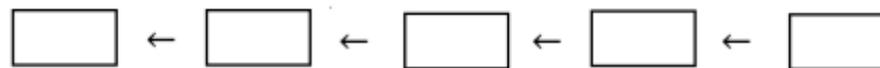
Ecuación:

- Complete el diagrama numérico de la ecuación en la figura 36 y luego resuélvala.

Figura 33

Imagen de diagrama de ecuación lineal

$$\frac{2(3x + 4)}{4} = 14$$



Fuente: Creación propia del investigador.

- Construya el diagrama numérico de la siguiente ecuación y luego resuélvala.

$$\frac{(2x + 5)}{9} - 5 = -2$$

- Problema: Un agricultor lleva manzanas; encuentra tres guardas; da al primero la mitad de las manzanas más dos; al segundo, la mitad de las que le quedan más dos, y al tercero, la mitad de las sobrantes más dos. Le queda una. ¿Cuántas manzanas llevaba el agricultor?

El desafío es superado cuando un estudiante escogido al azar por la plataforma Classcraft explique al profesor los procedimientos utilizados para resolver los diferentes ejercicios. Puntos experiencia 100 (XP)



Muy bien caballeros han descubierto el acertijo de la torre, gracias.

Pronto nos veremos. Según me han contado Emir Pino del viento ha sido visto por esos desfiladeros (paso angosto entre dos montañas), señala Koch hacia la falda de una montaña. Pronto, deben ir allá o de lo contrario se escapará con el cofre del rey.

Todos van en capturar de Emir Pino del viento, cuando se encuentran en los desfiladeros a tres caballeros...

4.1.3 Actividad Tres: *The fastest way down*

Objetivo: Desarrollar destrezas para la resolución de problemas que implican la solución de ecuaciones lineales.

Sugerencia Metodológica: El profesor continúa con la historia. Utilizando las reglas del juego los estudiantes deben entrar en batalla con los tres guerreros que encontraron en el desfiladero, esto con el fin de desarrollar habilidades para la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales de primer grado.

Durante el desarrollo de los desafíos los estudiantes pueden utilizar los elementos que hayan ganado durante partidas pasadas.

Materiales a utilizar: guía de trabajo, dados, tablero de lanzamiento, tarjetas de poderes y plataforma.

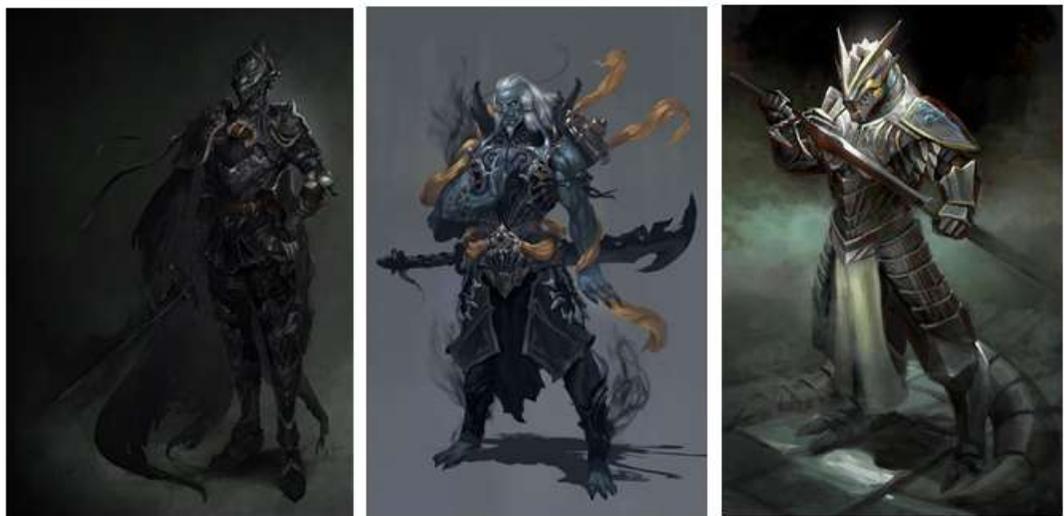
Desarrollo de la actividad

El profesor continuó con la historia:

Al entrar en el desfiladero son emboscados por tres guerreros, Figura 38; ellos no tienen clemencia y atacan con todo, deben pelear para no sufrir tanto daño y poder escapar con vida.

Figura 34

Imagen de los tres guerreros del juego



Fuente: <https://co.pinterest.com/pin/3025924734957595/>

Cada uno de estos guerreros cuenta con 600 (XP) y 50 (HP). Sobrevivir a los tres guerreros es la misión de cada grupo, puede ser que se salven todos, pero no es seguro, tal vez sea necesario el sacrificio de uno o más personajes...

Reto de dados

Cada grupo debe lanzar los dados para establecer el orden de acción, en este caso el grupo ganador irá de últimas mientras que el perdedor irá en acción de primeras.

Desafío 1: La batalla de las espadas

En esta parte del desafío se explica a los estudiantes el mecanismo de las batallas, el profesor propone a cada integrante del grupo una serie de problemas sobre ecuaciones lineales. Luego, el profesor asigna a cada grupo un guerrero enemigo, espera un tiempo prudencial (10 a 15 min) y debe pasar en el orden de acción por cada grupo. Los estudiantes deben establecer un orden de ataque o defensa para entrar en batalla. Ejemplo: El estudiante Juan es mago y tiene 300 (XP) y 30 (HP), inicia la acción con un ataque del guerrero asignado, si el estudiante tiene el problema correctamente desarrollado lanza los dados y debe obtener un éxito para no sufrir daño, de lo contrario recibirá -5 (HP); si el estudiante tiene el problema incorrecto deberá lanzar la cantidad de dados correspondiente a su puntaje de puntos de experiencia (XP) por ejemplo, si tiene 300 (XP) le corresponde lanzar tres dados y luego lanzará el guerrero sus seis dados que corresponden a 600 (XP) si gana el guerrero en éxitos el estudiante recibirá daño de menos 10 puntos vitales (-10HP) por éxito ganado, es decir si obtiene tres éxitos tendrán daño de -30 (HP) sucede de igual manera si pierde el guerrero pero recibirá -5(HP) por cada éxito obtenido por el jugador. Los problemas son entregados al azar

Problema 1

En Piedradura Vilma compró rocavastos por un valor total de 200 piedrólares. Si compró sólo rocavastos de 29 y 5 piedrólares cada uno, ¿Cuántos rocavastos de 5 piedrólares compró?

Problema 2

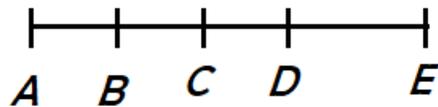
Si se suma 5 a la tercera parte de un número el resultado es la mitad del número ¿Cuál es ese número?

Problema 3

En la figura 38, La longitud del segmento AE es de 20 cm. B es el punto medio de AC, C es el punto medio de BD y D es el punto medio de BE. ¿Cuál es la longitud del segmento DE?

Figura 35

Segmento e imagen de una ecuación



Fuente: creación del investigador

Problema 4

En la ecuación

$$\frac{A}{3} + \frac{B}{4} = \frac{11}{12}$$

A y B representan números naturales. Hallar los valores de A y B que hacen que la igualdad sea cierta.

Problema 5

Colocar todos los signos aritméticos y paréntesis necesarios para producir una ecuación.

$$5. 1991 = 1661$$

Problema 6

Entré a un supermercado con 5 billetes de \$1000 y compré siete paquetes de galletas. Todos tenían el mismo precio y cuando pagué me dieron \$40 de vueltas. ¿Cuánto le di al cajero?

Los estudiantes que reciben más daño del permitido y se quedan sin (HP) entran en sentencia. Es decir, los estudiantes deberán desarrollar actividades extras para recuperar su sangre y poder volver al juego, como describe la figura 39.

Figura 36

Actividades de recuperación gamificadas

9010GR ▾
Parámetros de clase

Compartir configuraciones

Sentencias

Crea una lista de consecuencias
Cuando un jugador llega a 0 HP, cae en batalla y recibe una sentencia elegida al azar de esta lista.

VER LOS RECURSOS

CLASE - BIOLGR

Realiza un video donde expliques el procedimiento para resolver una ecuación lineal. Además debes resolver 5 ejercicios de ecuaciones lineales y un problema propuesto en la guía de apoyo 1	
Crear un meme en el que se explique el procedimiento para resolver la ecuación $2x+4=-3x+3$. Además debes resolver 5 ejercicios de ecuaciones lineales y un problema propuesto en la guía de apoyo 1	
Crear un padlet y compartirlo con tus compañeros, en el compartirás un mapa conceptual donde se evidencie los procedimientos para resolver una ecuación lineal. Además debes resolver 5 ejercicios de ecuaciones lineales y un problema propuesto en la guía de apoyo 1	

Fuente: classcraft

-... amigos, amigos. pueden escapar por acá – escuchan una voz conocida, miran hacia una parte del desfiladero y ven a Emir Pino del viento.

- vamos escapen por este lado, yo los ayudaré a defenderse de esos guerreros...-

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes que sobrevivan ganan 100 (XP)

Emir pino del viento explica a los estudiantes sobre la solución de ecuaciones lineales por medio de diagramas de barras. Esto puede ser una herramienta para poder derrotar a los guerreros que los están atacando (el profesor explica a sus estudiantes la forma de resolver algunas ecuaciones lineales por medio de diagramas).

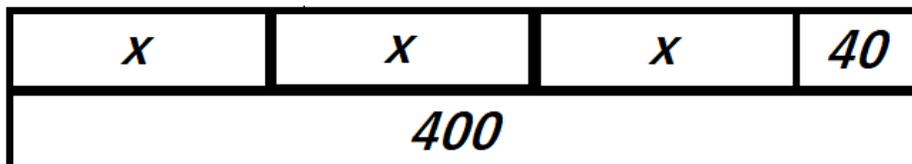
Ejemplo

Marcela tiene 400kg de queso que reparte en 3 paquetes de igual peso y le sobran 40kg ¿Cuánto pesa cada paquete?

se identifica la variable x y la representamos con una barra



La situación que se representa es



Resulta la ecuación

$$3x + 40 = 400$$

Por lo tanto $x = 120$

Desafío 2: La batalla de los túneles

La batalla continua con los guerreros, en esta parte los estudiantes deberán ganar la batalla con los guerreros solucionando problemas de ecuaciones o solucionado varios ejercicios de ecuaciones lineales.

Los estudiantes de sentencia deberán reunirse y tratar de resolver las ecuaciones con la ayuda del profesor para poder subir un poco de puntos vitales (HP).

Problema 1

José gastó $\frac{2}{3}$ de sus ahorros en fichas para videojuegos y le quedaron \$2.300. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado José?

Problema 2

Claudia tiene inicialmente 4 paquetes de nueces, de igual peso. A cada paquete le agrego 20g de nueces. El peso final de los 4 paquetes juntos es de 360g. ¿Cuál era el peso original de cada paquete?

Problema 3

Anita es 11 años mayor que su hermana María, pero su mamá prefiere decir que Anita tiene un año más que el doble de la edad de María. ¿Cuál es la edad de Anita?

Problema 4

Después de gastar la mitad de lo que tenía y prestar la mitad de lo que me quedaba, tengo 21.000 pesos ¿Cuánto dinero tenía al principio?

Problema 5

Tengo cierta suma de dinero. Si me pagan 7.000 pesos que me deben, puedo gastar los $\frac{4}{5}$ de mi nuevo capital y me quedarán 20.000 pesos. ¿Cuánto tengo ahora?

Fuente: Tomado por el investigador (Ress & Sparks, 1968, pág. 54)

Los procedimientos para las batallas son los mismos que el desafío anterior. Los curanderos pueden sacrificar puntos para poder salvar a sus compañeros. Puntos de resistencia.

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes que sobrevivan ganan 100 (XP)

Desafío 3: La batalla uno a uno

Los magos, guerreros y curanderos sobrevivientes se deslizan por un canal cuesta abajo para poder huir de la batalla. Puede ser que haya posibilidad de salvar el día, pero muy pocos están seguros de eso.

El profesor convoca a un jugador por grupo para reunirlos en una mesa de batalla. De manera aleatoria cada estudiante escoge un problema para resolverlo, el estudiante observa su problema y tiene la posibilidad de cambiarlo por el de un compañero. El mecanismo del posible cambio se da por el reto entre los dados, el jugador que gane el reto (cantidad de éxitos) decide si cambiar o no el problema. Los jugadores se enfrentan uno a uno en cada acción y dependiendo si ha resuelto parcial o definitivamente el problema puede infringir daño al opositor o realizar una acción para escapar sí así lo decide.

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes que ganen más duelos obtendrán 200 (XP) la batalla finaliza a las tres acciones por duelo.

Emir les pide que detengan la batalla, - ¡Basta ya!! hay muchos heridos y caídos en batalla, es tiempo de enviar al calabozo al que hizo todo esto, ese tramposo de Koch los engaño y los envió por el desfiladero. Ahora tiene el acertijo de la torre, no faltara mucho en avanzar con sus caballeros a blue lake. Debemos recuperarnos y avanzar.

4.1.4. Actividad Cuatro: Trouble on the lake

Objetivo: Desarrollar y modelar las soluciones de un sistema de ecuaciones a partir de la relación entre sus variables.

Analizar e interpretar las condiciones sociales, religiosas y culturales en el que se desarrolló la muerte de Hitapatia de Alejandría.

Sugerencia metodológica: El profesor continúa narrando la historia de nuestros personajes. En esta parte de la historia se asigna a los estudiantes la tarea de ver y analizar la película Ágora. Luego, se soluciona el sistema de ecuaciones modelan la relación entre sus variables y estableciendo las características entre las soluciones y la representación gráfica del sistema.

Materiales a utilizar: guía de trabajo, dados, tablero de lanzamiento, tarjetas de poderes y plataforma.

Desarrollo de la actividad:

El profesor continúa: luego de salir con vida del desfiladero llegan a un lago inmenso en el que habita un espíritu muy puro que perteneció a una mujer muy famosa en la antigüedad. El espíritu de ella los recibe con emoción y alegría.

- Sean todos bienvenidos a este lugar, acá pueden estar a salvo del mal que los persigue. Deseo ayudarles a recuperar sus fuerzas y mejorar sus destrezas; pero para ello deben hacer algo por mí.

Explicación reglas de medallas: Los estudiantes obtienen medallas en exposiciones, presentaciones o sustentaciones orales y escritas, sobre contenidos matemáticos o de la historia de las matemáticas. La valoración de estas actividades está determinada por las habilidades comunicativas que demuestren los estudiantes en la actividad asignada.

Medallas³²



Medalla de correcto trabajo en equipo, se obtiene al tener 20 puntos en las actividades en conjunto. Esta medalla puede ser utilizada solo una vez para detener el daño de un enemigo u objeto maligno a cualquiera de los integrantes del grupo. Además, al tener más de tres medallas acumuladas puedes usarlas para que el profesor te resuelva un problema. Recuerda que una vez utilizadas tienes nuevamente que ganarlas.



Medalla de exposición, se obtiene al realizar correctamente una exposición escrita u oral demostrando habilidades comunicativas; tales como, habilidad para comunicar de manera técnica los contenidos matemáticos, contestar de manera correcta a inquietudes del público en general y presentar de manera creativa los temas a exponer.

³² Las imágenes de las medallas se tomaron de la plataforma de juegos

Esta medalla puede ser utilizada para devolver daño a un enemigo. Con tres medallas puedes detener el tiempo y obtener antes que tus compañeros pruebas escritas, desafíos, retos o puedes devolver una acción para ganar tiempo ante tus competidores.



Medalla de investigación, se obtiene al realizar una extensa y correcta indagación sobre un tema que se propone, además, organiza, analiza y sintetiza la información recolectada para presentarla en forma de resumen, esquema, cuadros sinópticos o cuestionarios. Esta medalla puede ser utilizada para desviar daño de un enemigo y enviarlo a cualquier estudiante del curso. Con tres medallas puedes agregar a un reto de dados 10 más.

Nota: las medallas se obtienen individualmente, sólo se pueden utilizar una vez y se pueden obsequiar a cualquier jugador del curso.

Desafío 1: Desenterrando el pasado para revivir un recuerdo

- Yo soy Hipatia de Alejandría y entre más revivan mi recuerdo, más podré ayudarlos a recuperar sus fuerzas.

En esta parte los estudiantes deben ver la película *Ágora* y analizar el contexto cultural, social y religioso de la época.

Ver la película en el link: <https://www.youtube.com/watch?v=lja2D8-tB7s&t=487s>

Luego de ver la película los estudiantes deben realizar una grabación simulando una entrevista a Rachel Weisz, actriz que interpretó a Hipatia de Alejandría en la película *Ágora*. Las preguntas deben estar dirigidas hacia la actriz e indagar, en primera parte, sobre los acontecimientos históricos, sociales y religiosos en los que se

desarrolló la historia, en la segunda parte, sobre los estudios matemáticos realizados por Hipatia (evidenciados en la película) y, por último, sobre la vida personal de Hipatia y la visión de mundo que tenía.

Los estudiantes obtienen 100 (XP) si superan el desafío. Dependiendo de la exposición y presentación cada integrante del grupo obtiene una medalla de buena exposición.

Recuperación magos y curanderos 5 (HP) guerreros 10 (HP)

Desafío 2: Desenterrando el pasado para revivir un recuerdo

Hipatia fue una profesora carismática y respetada, muy querida por todos sus estudiantes. Debido a que era famosa por haber sido la mejor en el arte de resolver problemas, los matemáticos que habían estado durante meses atascados en algún problema en particular le escribían pidiéndole consejo. Se dice que era físicamente atractiva y que decidió mantenerse célibe. Cuando se le preguntó por qué estaba tan obsesionada con las matemáticas y no quería casarse, replicó que estaba casada con la verdad.

En uno de sus problemas matemáticos para sus estudiantes, les preguntaba la solución entera del par de ecuaciones simultáneas

$$x - y = a$$

$$x^2 - y^2 = (x - y) + b$$

en los valores de a y b son conocidos.

Los cristianos fueron sus rivales filosóficos más poderosos, y rechazaban oficialmente sus enseñanzas, que eran de naturaleza pitagórica con una dimensión religiosa.

Recorriendo la ciudad vestida con atuendo de filósofo, hablaba públicamente, a todos

los que quisieran escucharla, acerca de los escritos de Platón, de Aristóteles y de otros filósofos.

En un cálido día de marzo del año 414, después de haber dejado a sus estudiantes enzarzados en una animada discusión filosófica, Hipatia conducía su carruaje confiadamente por las calles de Alejandría camino a su casa, advirtió una multitud situada frente a una iglesia, y antes de que pudiera dar la vuelta a su carro dos hombres la arrojaron del mismo. ¡Muerte a la pagana! Gritaron, como muchas víctimas de los terroristas de hoy en día, es posible que hubiera sido prendida debido meramente a que era una figura bien conocida y prominente de una religión distinta.

El historiador Edward Gibbon nos ha proporcionado un triste relato de su muerte:

“En un día fatal, en la sagrada estación de Lent, Hipatia fue arrancada de su carruaje, desnudada, arrastrada a la iglesia y despedazada despiadadamente a manos de Pedro el Lector y una tropa de fanáticos salvajes y sin merced; su carne fue desgarrada de los huesos con conchas de ostras de bordes cortantes, y sus miembros trémulos arrojados a las llamas”

Tomado de: EL prodigio de los números. Pickover, Clifford. Pag (70-71). 2000

- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones sabiendo que $a = 1$ y $b = 4$

$$x - y = a$$

$$x^2 - y^2 = (x - y) + b$$

Explique el procedimiento realizado para encontrar el valor de x y y

Suponga que se tiene los siguientes valores

$$a = 3, b = 24, x = 6 \text{ y } y = 3$$

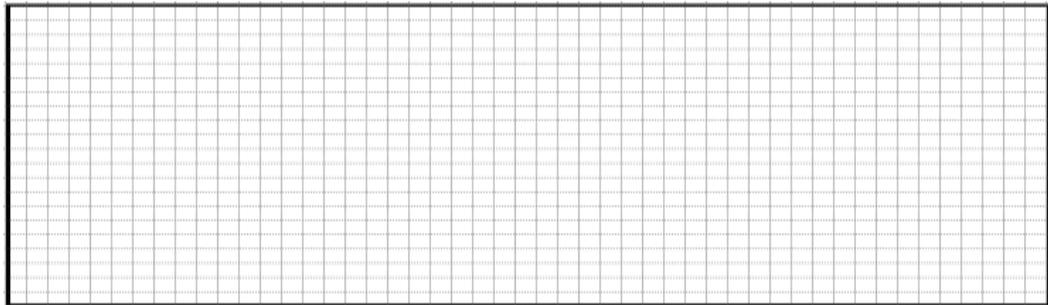
Reemplace en el sistema de ecuaciones y verifique que las igualdades se cumplen (los lienzos o recuadros son para que el estudiante realice la actividad escrita).

$$x - y = a$$

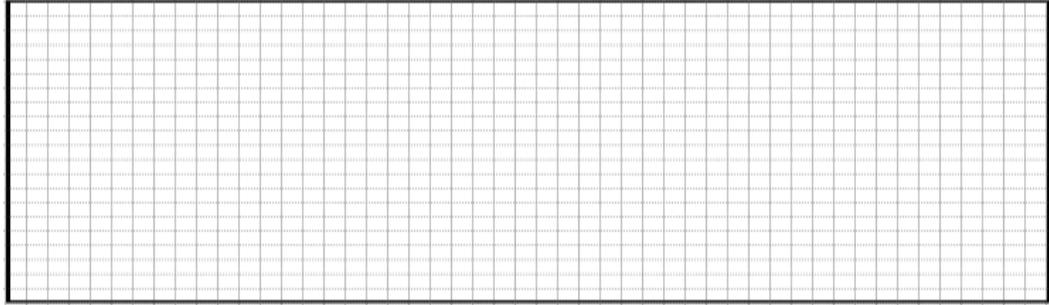
$$x^2 - y^2 = (x - y) + b$$

- En la primera ecuación despeje la variable x

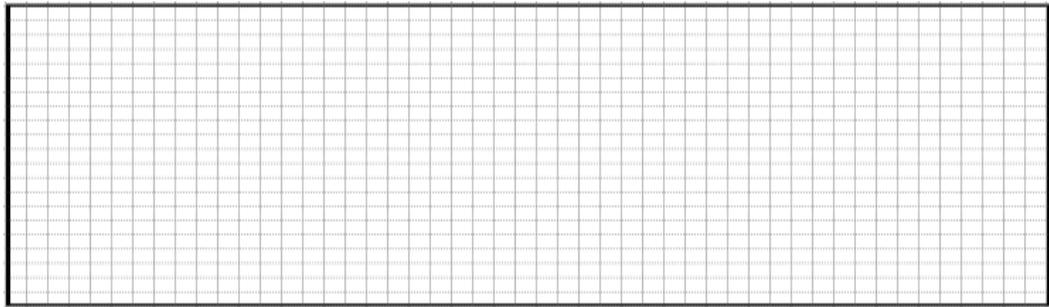
$$\begin{aligned} x - y &= a && \text{ecuación 1} \\ x^2 - y^2 &= (x - y) + b && \text{ecuación 2} \end{aligned}$$



Luego, reemplace a la variable x en la ecuación 2, por la expresión obtenida en el despeje del punto anterior. Realice las operaciones para determinar el valor de la variable y en términos de a y b .



Si $a = 1$, ¿qué valores puede tomar b para que la variable y tenga un valor entero positivo?



¿Qué valores debe tomar a y b para que la variable y tenga un valor entero positivo?

¿Es posible encontrar más soluciones enteras al sistema de ecuaciones? ¿Por qué?

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes obtienen **100 (XP)** si superan el desafío. Los guerreros pueden entrar en batalla para ganar más tarjetas de preguntas. Recuperación magos y curanderos 5 (HP) guerreros 10 (HP).

Desafío 3: Modelando la solución

Luego de recuperar fuerzas es importante obtener

- ¿Cuántas soluciones enteras puede tener el sistema de ecuaciones?

$$x - y = a$$

$$x^2 - y^2 = (x - y) + b$$

- En el desafío anterior se obtuvo

$$y = \frac{a + b - a^2}{2a}$$

Despeje la variable b

Luego, complete la tabla 8 para establecer las soluciones del sistema para $a = 1$ y la variable y que varía de 1 a 9

Tabla 8

Tabla de soluciones para las variables de la ecuación

a	y	b	x
1	1		
1	2		
1	3		
1	4		
1	5		
1	6		
1	7		

1	8		
1	9		

Fuente: realizada por el investigador

¿Qué características tiene los valores de la variable **b**?

Se puede construir una expresión algebraica que represente las soluciones de la variable **b**

Encuentre las soluciones para $a = 2$ y la variable y que varía de 1 a 9

¿Qué características tiene los valores de la variable **b** para $a = 2$?

- Utilice el software Geogebra para generar una tabla con las soluciones para $a = 3$, siguiendo la figura 40.

Figura 37

Imagen de datos de variables de la ecuación en desarrollo

	A	B	C	D
1	a	?	b	x
2	3	1	12	
3	3	2	18	5
4	3	3	24	6
5	3	4	30	7
6	3	5	36	8
7	3	6	42	9
8	3	7	48	10
9	3	8	54	11
10	3	9	60	12
11				

Fuente: realizada por el investigador

¿Qué características tienen los valores de la variable **b**? ¿Es posible generalizar los valores de la variable **b** en una expresión algebraica?

¿Qué características tiene los valores de la variable **x**? ¿Es posible generalizar los valores de la variable **x** en una expresión algebraica?

Realiza el mismo procedimiento para $a = 4, 5, 6, 7$

¿Es posible establecer la relación entre los valores a y los valores de **b** y **x**?

¿Cuántas soluciones podemos encontrar del sistema de ecuaciones?

- Utilice el software Geogebra para graficar una solución del sistema de ecuaciones, como resultaría en la figura 41.

$$x - y = a$$

$$x^2 - y^2 = (x - y) + b$$

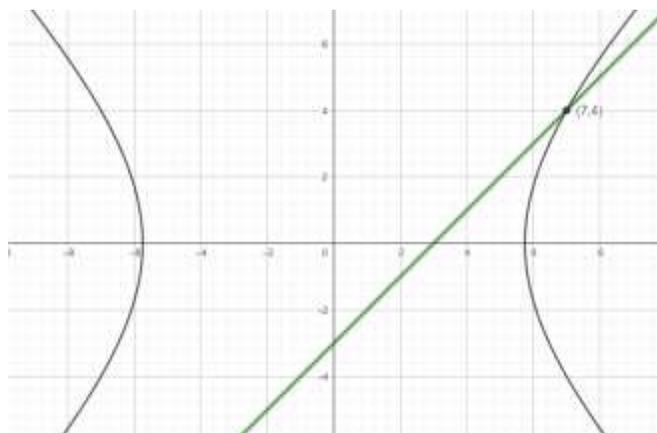
$$a = 3, b = 30, x = 7 \text{ y } y = 4$$

$$x - y = 3$$

$$x^2 - y^2 = 33$$

Figura 38

Gráfica de las variables resultantes utilizando GeoGebra



Fuente: realizada por el investigador

¿Qué representa geoméricamente la solución del sistema de ecuaciones propuesto por Hipatia?

¿Qué representan las coordenadas de punto de intersección entre la cónica y la recta?

si cambiamos en la segunda ecuación (del punto anterior) a **x** por **y**

$$x - y = 3$$
$$y^2 - x^2 = -33$$

¿Cuál sería el punto de intersección y solución del sistema? (utiliza el software Geogebra para contestar la pregunta)

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes obtienen 100 (XP) si superan el desafío. Los magos pueden desafiar para obtener más tarjetas de preguntas. Recuperación magos y curanderos 5 (HP) guerreros 10 (HP)

4.1.5. Actividad Cinco: The Three Pillars

Objetivo: Analizar y proponer modelos para la solución general de un problema que involucran ecuaciones lineales.

Sugerencia metodológica: El profesor continúa narrando la historia de nuestros personajes. Se llega al final de la historia y se concluye con el tema de ecuaciones lineales.

Materiales a utilizar: guía de trabajo, dados, tablero de lanzamiento, tarjetas de poderes y plataforma.

Desarrollo de la actividad:

Los guerreros avanzan por un camino pedregoso y estrecho, ya contentos y aliviados, y, sobre todo, curados de las heridas del combate anterior. Ya había pasado más de una hora de camino cuando encuentran una planicie con tres pilares que forman entre sí un triángulo con sus lados iguales, en lo que parece la mitad de ese triángulo hay un hombre con una hermodura roja (armadura hecha de cristal), este hombre está de espaldas al camino, y eleva su mirada a uno de los pilares del triángulo. Inclina su cabeza hacia los guerreros y dice:

- ¿Ustedes son los que contrataron para encontrar mi cofre?
- Creo que han sido engañados, ni Emir pino del viento ni Koch copo de nieve han sido los culpables de la pérdida de mi cofre, los verdaderos responsables están entre ustedes.

- Ahora es tiempo de ponerlos al descubierto, y para ello en frente de estas tres torres los desenmascaremos.

Explicación reglas del antagonista: En algunas actividades el profesor asigna una tarea en secreto a un estudiante o a un grupo para que asuma el rol de un opositor de los demás jugadores. En ocasiones puede ayudar a los demás o puede asumir un rol de enemigo, depende de la historia que se desarrolle.

Reto del antagonista

En estos desafíos se le asignará a un estudiante, por grupo y en secreto, el rol de impostor; la misión de cada grupo es descubrir cuál es el estudiante impostor de los demás grupos. Ganará más puntos de experiencia el grupo que descubra más impostores.

Para el reto, los grupos desarrollarán los desafíos y el grupo que termine de primeras podría decir al azar cuál es el impostor del último grupo en acción y así sucesivamente pasando por todos los grupos.

Reto de dados

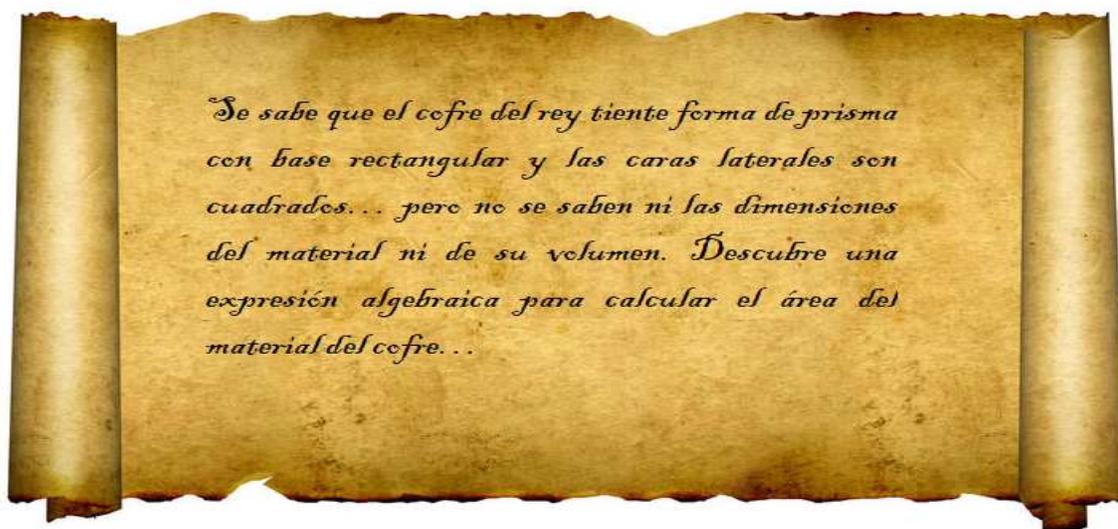
Para determinar la acción los estudiantes escogen un integrante del grupo para lanzar los dados, la cantidad de dados se determina por la cantidad de puntos vitales (HP)

Desafío 1: Pilar

Es hora de descubrir el cofre del Rey Red Diamond, para ello debes pasar las pruebas de cada uno de los pilares. En primer pilar encuentras el siguiente pergamino.

Figura 39

Imagen de un pergamino para el juego y gamificación de la enseñanza

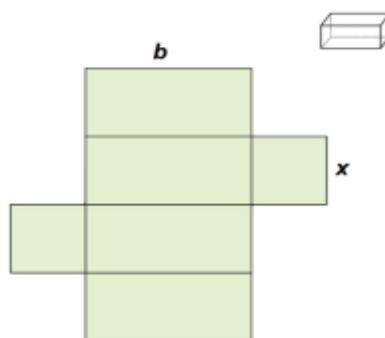


Fuente: <https://thumbs.dreamstime.com/b/pergamino-viejo-67193924.jpg>

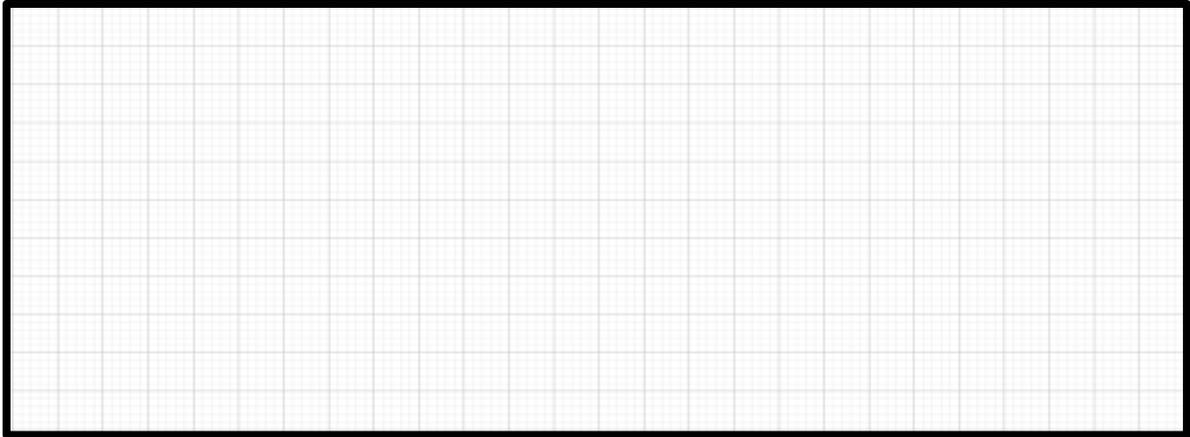
La figura 43 representa el modelo del material para construir un cofre. Se sabe que la longitud del lado del cuadrado se representa por la variable x y el lado del rectángulo se representa con la variable b . ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del material para construir un cofre?

Figura 40

Modelo en papel para elaborar una ecuación lineal



Fuente: realizada por el investigador



¿Cuál es la medida de x para que el área total del modelo de papel sea igual a 66 dm^2 , sabiendo que $b = 4 \text{ dm}$?

Teniendo en cuenta las dimensiones de la caja anterior, ¿Cuál de los siguientes objetos ocuparía el mayor volumen posible en la caja?

- a. Un balón de fútbol
- b. Una botella de gaseosa de un litro
- c. Un esfero
- d. Un celular

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes obtienen **100 (XP)** si superan el desafío. Los magos pueden desafiar para obtener más tarjetas de preguntas. Recuperación magos y curanderos 5 (HP) guerreros 10 (HP)

Desafío 2: Pilar

En el segundo pilar encuentra otro pergamino (figura 44):

Figura 41

Pergamino para indicar parte del juego

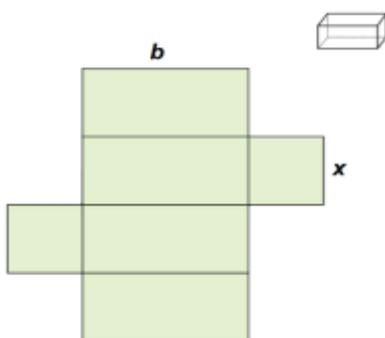


Fuente: <https://thumbs.dreamstime.com/b/pergamino-viejos-67193924.jpg>

Observando la figura 45, hallar las medidas de la caja que contiene a un cilindro de medio litro de capacidad y un radio de 4cm

Figura 42

Imagen de modelo para construir un cilindro y una ecuación



Fuente: Creación del investigador

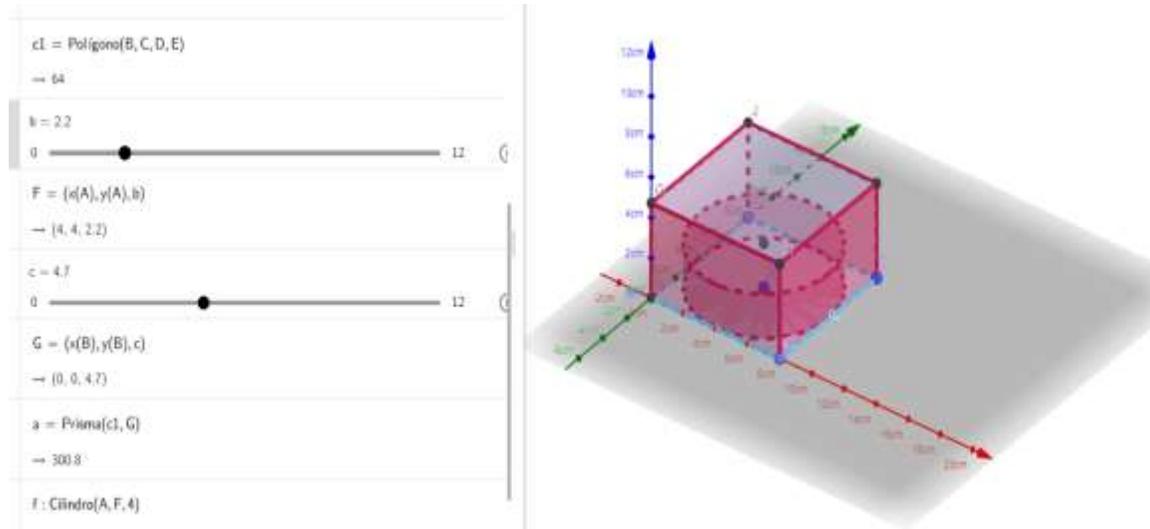
La base del cilindro se encuentra sobre la base cuadrada de la caja.

Notas: invoca duelo de dados, medallas, cartas o poderes para obtener el siguiente link de ayuda y acceder a la figura 46.

<https://www.geogebra.org/m/czjtkunu>

Figura 43

Figura digitalizada que se obtiene al desarrollar la ecuación en GeoGebra



Fuente: realizada por el investigador

Acción									
Puntos ganados									

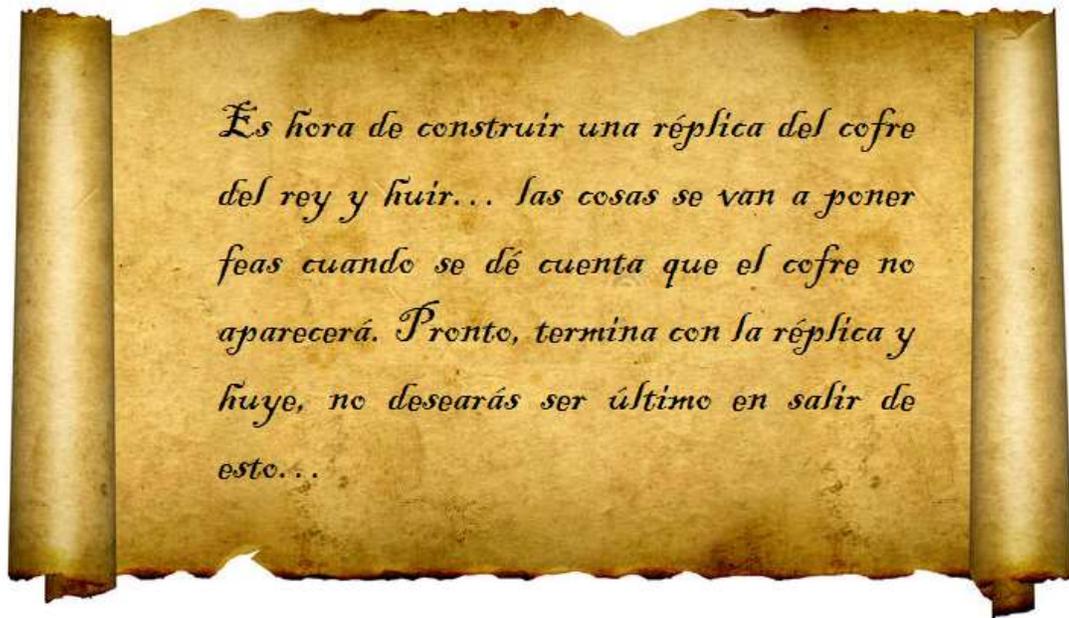
Los estudiantes obtienen **100 (XP)** si superan el desafío. Los magos pueden desafiar para obtener más tarjetas de preguntas. Recuperación magos y curanderos 5 (HP) guerreros 10 (HP)

Desafío 3: pilar

El tercer pilar y su pergamino (figura 47):

Figura 44

Pergamino que hace parte del juego

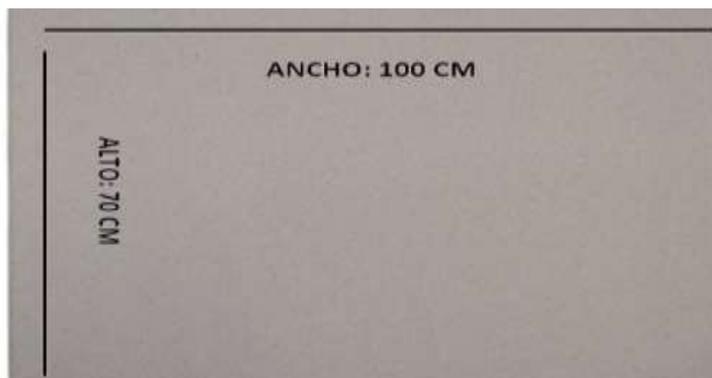


Fuente: <https://thumbs.dreamstime.com/b/pergaminos-viejos-67193924.jpg>

Observe la figura 48: Una hoja de cartón prensado tiene las medidas 70 cm x 100 cm.

Figura 45

Imagen de hoja para crear problema de ecuaciones

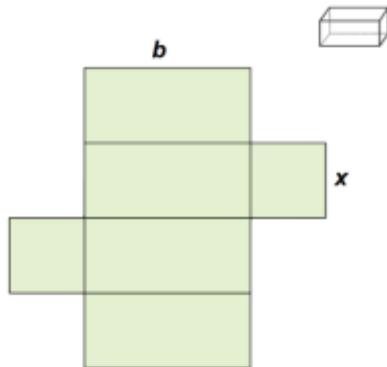


Fuente: Diseño del investigador

Contesta las siguientes preguntas teniendo en cuenta que la hoja de cartón mide 70 x 100 cm y el modelo de la caja es, como se representa en la figura 49.

Figura 46

Representación gráfica de ecuaciones



Fuente: Diseño del investigador

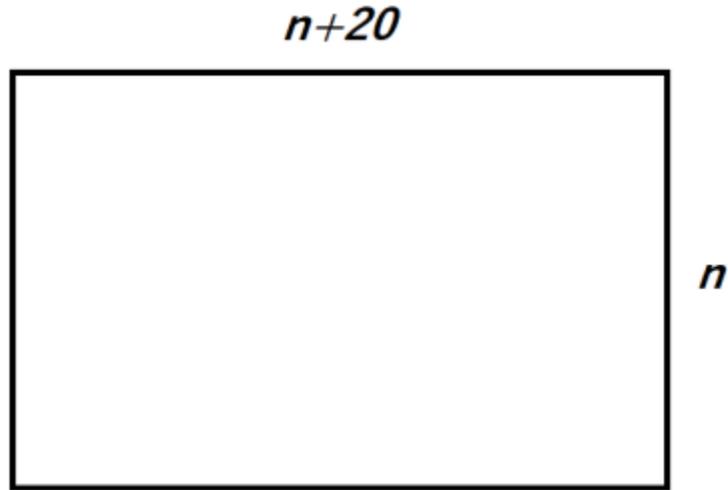
¿Cuáles son las medidas máximas del molde de la caja que se puede construir con una hoja de cartón?

Se desean hacer 4 cajas con una hoja de cartón, ¿Qué dimensiones debe tener x y b para ocupar el máximo de área de la hoja?

Plantee una solución al siguiente problema, suponga que las medidas de una hoja de cartón están dadas como lo muestra la figura 50.

Figura 47

Representación de una ecuación en una superficie



Fuente: realizado por el investigador

¿Cuáles son las medidas de x y b para obtener un modelo que ocupe la mayor área posible de la hoja de cartón?

¡Vamos, rápido!

Construye la réplica, las medidas del tubo que se guarda en el cofre tiene un litro de capacidad y un radio 4 cm.

Los estudiantes deben construir el cofre con cartulina.

Acción									
Puntos ganados									

Los estudiantes obtienen **200 (XP)** si superan el desafío. Los magos pueden desafiar para obtener más tarjetas de preguntas. Recuperación magos y curanderos 5 (HP) guerreros 10 (HP)

El rey los observa y ve la réplica del cofre, sonrío y dice; creo que han pasado la prueba, su recompensa es el conocimiento que han adquirido, ahora pueden avanzar al final de la isla, deben seguir sus aventuras... avancen a la isla de las aves doradas para estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.

Conclusiones del capítulo 4

El proceso de gamificación es infinitamente versátil, siempre que el diseño de las etapas se haga con dedicación. Los estudiantes van alcanzando cada vez mayor desarrollo de vocabulario relacionado con el tema, y a la vez van desarrollando redes complejas de pensamiento que juegan con las imágenes del proceso, algunos presentan ritmos acelerados en la forma de responder, y en el fondo todos y cada uno van a su propio ritmo de aprendizaje. Es notorio que el apoyo del grupo es un aporte importante al momento de alcanzar niveles más difíciles.

De otra parte, se percibe que las imágenes contribuyen a la manifestación de abstracciones matemáticas y lógicas en la medida que se desarrolla el proceso de juego y sus relaciones con el tema, en este caso con las ecuaciones lineales.

CAPÍTULO 5. VALORACIÓN DE RESULTADOS

Introducción

En este capítulo se analizan los resultados alcanzados en la implementación de las actividades propuestas para la enseñanza de las ecuaciones lineales, a través de la gamificación, la resolución de problemas y la modelación. La presente valoración se divide en tres apartados, en el primero se analizan las soluciones y procedimientos de los problemas planteados, en el segundo apartado se analiza la utilización de la gamificación en la ejecución de actividades y por último las actividades propuestas bajo la modelación matemática.

5.1 Análisis de resultados desde la resolución de problemas

Para el análisis de los resultados de las actividades del presente trabajo se tuvo en cuenta lo expuesto en el artículo, *A Commognitive Framework: The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students (Un Marco Cognitivo: El proceso de resolución de problemas matemáticas de los estudiantes de secundaria)* de Zayyadi et al. (2019)³³, el cual propone describir la capacidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos desde un punto de vista cognitivo teniendo en cuenta, no sólo el resultado en la solución de problemas, sino, el proceso para llegar al resultado, puesto que durante el proceso para llegar a la solución los estudiantes establecen narraciones usando palabras, mediadores visuales, narraciones con apoyo y rutinas hasta construir su propia narrativa para resolver el problema.

³³ Zayyadi, Moh; Nusantara, Toto; Subanji; Hidayanto, Erry, Sulandra, I., *A Commognitive Framework : The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students*, International Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 18, No.2, p. 89-102. (traducción del investigador)

Dentro de la investigación los autores hacen énfasis en cinco componentes: identificar, definir, explorar, actuar y buscar. Lo que se conoce como el enfoque IDEAL por sus siglas en inglés, como: **I**dentification of problems, **D**efine goals, **E**xplore possible strategies, **A**nticipate outcomes y **L**ook back. Este enfoque determina que el resolver problemas conlleva una serie de procesos cognitivos que permiten desarrollar habilidades orales y escritas, que se anotan como datos cualitativos del proceso. Estos datos se resumen en la tabla

Tabla 9

Aspectos de la resolución de problemas método IDEAL

Etapas Ideal	Descripción de la acción en el estudiante
Identificación de problema	Comprende los problemas en general y los divide en varias partes
Definir los objetivos	Establece los objetivos a alcanzar.
Explorar las posibilidades estratégicas	Busca varias soluciones alternativas a los problemas y lleva a cabo estudios sobre cada alternativa desde diferentes perspectivas.
Anticipar resultados	Elige una solución y resuelve el problema según la estrategia elegida.
Mirar hacia atrás	Ver la correspondencia entre los objetivos a alcanzar y los resultados obtenidos, y aprender de las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas.

Fuente: (Zayyadi et al. 2019)

Los elementos que se tuvieron en cuenta para la elaboración de las conclusiones se basan en comprender el pensamiento como la forma de comunicación, ya que, según

los autores, quienes siguen a Sfard (2007; 2008); y Sfard & Kieren (2001), el pensamiento tiene una elaboración individual.

“El pensamiento suele realizarse de forma interna y, por lo general, se considera inaccesible para los demás. La Actividad del pensamiento realizada individualmente parece originarse en el interior de la persona y tener lugar biológicamente, pero sigue constituyendo una forma de comunicación del individuo hacia sí mismo”³⁴

Por tal motivo, la forma como el estudiante (*individuo*) expresa de manera verbal, escrita o no verbal lo que comprende puede sintonizarse como la forma de comunicar su pensamiento. Particularmente, el estudiante al enfrentar un problema, para obtener una solución expresa unas habilidades entorno a su comunicación, lo que en la investigación realizada fue sistematizado como análisis cognitivo el cual se desarrolla mediante el *uso de las palabras, los mediadores visuales, las narraciones con apoyo y las rutinas* (Zayyadi et al., 2019, p.92).

Uso de la palabra: como su nombre lo indica es la forma como el estudiante expresa en lenguaje matemático los conceptos trabajados durante la resolución del problema, esto proporciona pistas sobre cómo el estudiante percibe el mundo.

Los mediadores visuales: objetos que manipula el estudiante para poder solucionar el problema, tales como, diagramas, símbolos y gráficos. Así como también objetos físicos, de esta manera se puede determinar cómo el estudiante utiliza estos objetos para la solución de problemas.

Narrativa: Es una secuencia de discurso, oral o escrita, que describe las relaciones entre los objetos involucrados en un problema. En la manera que el estudiante utilice

³⁴ Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, & Hidayanto, E. S. (2019). A Commognitive Framework : The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students . International Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 18, No.2, 89-102.

la narrativa propia de las matemáticas, hechos matemáticos, axiomas, definiciones y teoremas, se evidencia el tipo de pensamiento para resolver el problema.

Rutina: descrito por los autores como “un proceso de metarrelato que describe patrones en las actividades de desaliento” es decir procesos mentales que los estudiantes deben realizar para poder resolver un problema, tales como; definir, estimar, probar, predecir y abstraer. En especial para los autores se tiene en cuenta que los estudiantes tengan rutinas de definir, estimar o probar.

Teniendo en cuenta el sustento anterior se propone para la valoración de resultados en cada una de las actividades propuesta en este trabajo de investigación, la siguiente matriz de evaluación de proceso en la resolución de problemas:

Tabla 10

Matriz de componentes y descriptores en resolución de problemas

Componentes examinados	Descriptores	
Uso de la palabra	P_1	Utilizan expresiones propias del lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones o interrogantes
	P_2	Describen parcialmente los elementos de un problema con un lenguaje cotidiano dando a entender sus afirmaciones e interrogantes.
	P_3	Se les dificulta expresar de manera total o parcial elementos de un problema en matemáticas.
Mediador visual	MV_1	Utilizan correctamente gráficos, imágenes y diagramas para la solución de un problema matemático
	MV_2	Realizan correctamente medidores visuales. Sin embargo, se le dificulta el relacionarlos con los conceptos de matemáticas.

	MV_3	Comprenden correctamente los conceptos matemáticos propios del problema. Sin embargo, se le dificulta relacionarlo con medidores visuales.
Narrativa	N_1	Expresan los procedimientos para la solución de un problema utilizando el lenguaje propio de las matemáticas, tales como axiomas, definiciones o teoremas.
	N_2	Expresan de manera coherente los procedimientos para la solución de un problema, sin embargo, el lenguaje utilizado no es asertivo para la explicación de los procedimientos del problema.
	N_3	No dan explicación a los procedimientos realizados durante la obtención de la respuesta del problema, sin embargo, la respuesta es correcta.
Rutina	R_1	Realizan correctamente la rutina propuesta en el problema planteado (definir, estimar, probar, predecir y abstraer)
	R_2	Se les dificulta realizar la rutina propuesta en el problema planteado.
	R_3	No evidencian la utilización de rutinas. Sin embargo, obtiene patrones y respuestas para la solución de un problema.

Fuente: Adaptado por el investigador con base en la técnica de validación utilizada en (Zayyadi et al. 2019)

En consecuencia, al desarrollar la investigación se obtuvieron los datos y resultados que se resumen en la tabla 11.

5.1.1 Actividad Uno: A meeting of Strangers

Tabla 11

Resultados de actividad 1.

Actividad 1 Desafío 1: Sentados en una mesa																
Respuesta de aprendizaje: reconoce regularidades y patrones para deducir una expresión algebraica y de esta manera encontrar la solución al problema planteado.																
Grupo	Uso de la palabra				Mediador visual				Narrativa				Rutina			
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos		✓		Los estudiantes comprendieron fácilmente el ejercicio y expresaban con			✓	Se les dificulta comprender cómo agregar más mesas al gráfico presentado		✓		Diligenciaron correctamente la tabla, sin embargo, los cálculos aritméticos los realizaron	✓			Obtuvieron rápidamente la expresión algebraica y la solución de problema, gracias a

			seguridad los procedimientos a realizar.							inicialmente de manera errónea.				reconocer el patrón y la expresión algebraica
Hunters of Demons	✓		Utilizaron palabras propias de las matemáticas para describir la posición de las mesas en el restaurante.	✓			Luego de comprender la posición de las mesas en el problema, identificaron la regularidad en el ejercicio.			✓	Los estudiantes no utilizaron un lenguaje propio de las matemáticas, la solución fue encontrada tanteando posibles resultados.	✓		Identificaron rápidamente los patrones propuestos en el desafío.

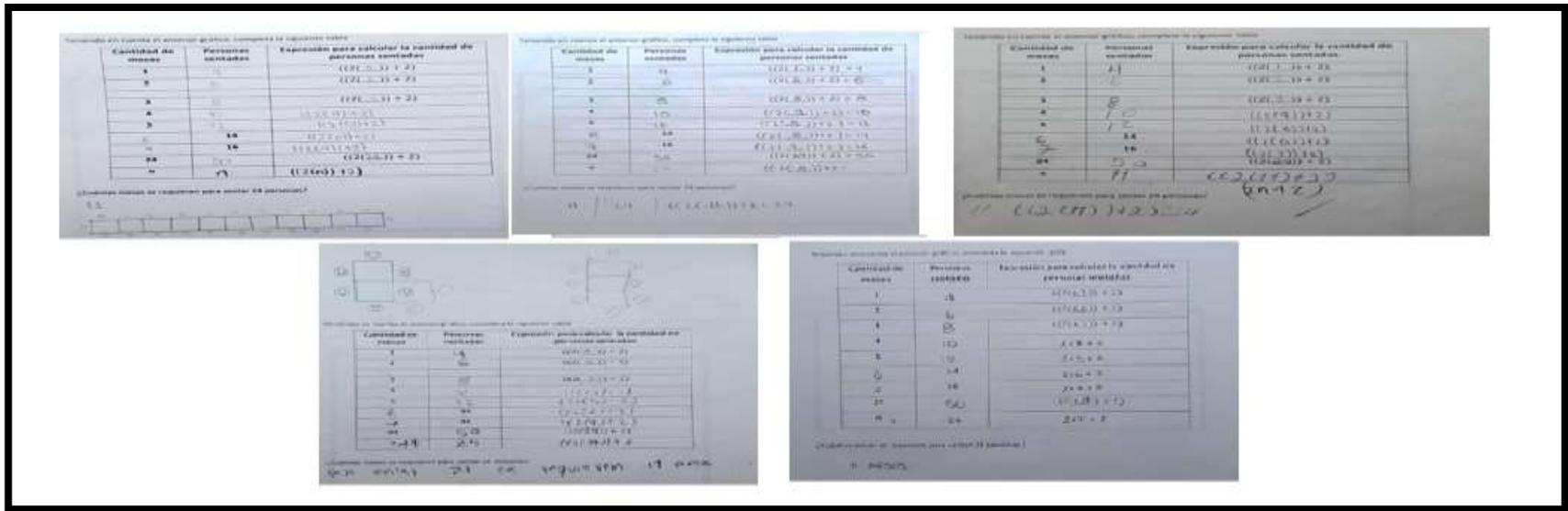
Metibus Metallum		✓	Se les dificulta comprender el ejercicio y expresar con su propio lenguaje lo que querían decir.	✓		Relacionaron correctamente la gráfica con el completar la tabla propuesta. Sin embargo, no establecen claramente la relación. Confunden la cantidad de mesas con la cantidad de personas.		✓	Aunque obtuvieron la respuesta, no fue clara ni verbal ni escrita la obtención de la respuesta.		✓	No evidenciaron rutina alguna en la elaboración de la tabla. Utilizaron varias ayudas para poder completar la tabla.
Red Hawks		✓	Comprender on fácilmente el gráfico presentado para la	✓		Podría decirse que de manera inmediata comprendieron		✓	Este grupo desarrolló rápidamente el ejercicio propuesto sin		✓	Evidenciaron la solución haciendo los dibujos de las 11 mesas, es

			solución del problema. Sin embargo, el lenguaje utilizado				n el problema a partir de la gráfica presentada.				expresar los procedimientos realizados.			decir completaron la tabla después de resolver el problema.
Los Mast-Sigos		✓	Los estudiantes no comprenden ni saben dar a conocer sus inquietudes ¿Cómo lo hago profe? era la pregunta que hacían.		✓		Realizaron parcialmente los dibujos para comprender el ejercicio. Sin embargo, no establecen la relación entre el gráfico y el procedimiento a realizar.			✓	al preguntarles por los procedimientos realizados se confunden en completar la tabla propuesta		✓	Completaron la tabla, pero no lograron definir ni abstraer la fórmula solicitada.

Como aspectos generales del análisis de resultados del primer desafío; en el componente de **uso de la palabra**, los estudiantes se les dificulta utilizar un lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones e interrogantes, en el segundo componente **mediador visual**, los estudiantes utilizaron el gráfico para solucionar el problema planteado, un grupo utilizó el dibujo para solucionar el problema haciendo las 11 mesas y afirmaban que no era necesario completar la tabla ya que, habían encontrado la solución. El tercer componente **narrativa**, podría dividirse en dos grupos de estudiantes, aquellos que utilizan los procedimientos para calcular la solución del problema y otros que resuelven el problema tanteando las posibles soluciones, como caso particular un grupo de estudiantes manifestaban que la solución era 50, ya que, en la tabla aparecía el número 24, y como la pregunta era ¿Cuántas mesas se requieren para sentar 24 personas? Asumieron que la respuesta estaba relacionada simplemente con el resultado del renglón donde estaba el número, esto evidencia otro tipo de narrativa en la cual hay grupos que no analizan el problema planteado, sino que, asumen que la respuesta se puede obtener inmediatamente observando los resultados parciales suministrados. En el último componente, **rutina**, los estudiantes completan cada uno de los renglones de la tabla, pero se les dificulta llegar a una expresión que generalice lo realizado, se evidencia en la figura 51.

Figura 48

Evidencias del desarrollo de aprendizaje en el grupo de estudiantes



Fuente: Archivos de la investigación

Tabla 12

Datos de la actividad 1 desafío 2.

Actividad 1 Desafío 2: Cuadro del calendario																
Respuesta de aprendizaje: Comprende la noción de variable como número generalizado y a partir de ello resuelve una ecuación lineal con solución entera.																
Grupo	Uso de la palabra			Mediador visual				Narrativa				Rutina				
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones

Lobo de los signos		✓	En vez de decir que la expresión algebraica era $9a+72$, afirmaban que era sumar nueve veces el valor de la variable a más los números 1, 2, 7, 8, 9, 14, 15 y 16.	✓		Establecen la relación entre el gráfico y la expresión de suma a realizar.	✓		Comentan los procedimientos realizados de una manera coloquial. Sin embargo, los procedimientos están correctamente realizados.	✓		A partir de la suma generalizaron la expresión algebraica y utilizaron despejes para encontrar el valor entero de la ecuación.
Hunters of Demons	✓		Encontraron fácilmente la expresión de la suma de los nueve números de cuadrado de 3×3	✓		Encontraron la expresión algebraica con facilidad a partir del gráfico presentado.	✓		Sustentan correctamente los procedimientos realizados para obtener	✓		A partir de la suma generalizaron la expresión algebraica. Pero no la utilizaron

											la expresión algebraica.			para resolver el problema en vez de utilizar la expresión buscaron un número que se acomodara a la solución del problema.
Metibus Metallum		✓	Se les dificultó entender el enunciado del problema y afirmaban que no tenía sentido sumar los números de esa manera.		✓	Al iniciar la solución del problema, confundieron la serie de números a colocar en la adición con los números que se encontraban			✓	No demuestran un lenguaje propio de las matemáticas ni es coherente los procedimientos realizados.		✓	Se les dificultó generalizar la adición con una expresión algebraica y al finar recurrieron a varias ayudas para	

							en el calendario.							resolver el problema.
Red Hawks		✓	Comprenden fácilmente el problema y manifestaban que era lo mismo que en el lenguaje cotidiano “hace ocho días” pero que en realidad se sumaba 7	✓			Relacionaron rápidamente la posición de los números con la adición que debían realizar.			✓	Comentan los procedimientos realizados de una manera coloquial. Sin embargo, los procedimientos están correctamente realizados.	✓		Encontraron fácilmente la expresión algebraica. Para la solución de la ecuación realizaron la suma de los números para encontrar la solución al tanteo.
Los Mast-Sigos		✓	Comprenden el enunciado del problema, pero	✓			Utilizaron el gráfico correctamente para encontrar la		✓		Al exponer los resultados, los realizan de manera desorganizada	✓		Los estudiantes obtuvieron la expresión algebraica. En la

			expresan en lenguaje cotidiano sus interrogantes, tales como: profesor ¿le sumo al número de arriba 7 para que me dé el de abajo?				expresión algebraica				da y no hay un esquema claro en lo realizado. Sin embargo, obtuvieron la expresión algebraica.			solución de la ecuación los estudiantes resolvieron el problema utilizando la ecuación, pero comprobaban la solución realizando la suma.
--	--	--	---	--	--	--	----------------------	--	--	--	--	--	--	--

Como aspectos generales del análisis de resultados del segundo desafío; 4 de los 5 grupos resolvieron el problema sin utilizar las ayudas que propone la gamificación, cabe aclarar que la motivación por completar el reto era lo importante en la solución de los problemas. En el componente **uso de la palabra**, se observa, hasta este momento de este análisis, que los estudiantes manejan un lenguaje más cotidiano que matemático, esto presuntamente porque no están acostumbrados a utilizar dicho lenguaje. Sin embargo, los estudiantes dan a conocer sus puntos de vista y posibles caminos para solucionar el problema. Es decir, el lenguaje no es un impedimento para la realización de los problemas planteados hasta el momento. **mediador visual**, en este componente cabe decir, que el problema planteado parte de un gráfico o ayuda visual por lo que los estudiantes se vieron obligados a iniciar la solución de problema a partir de éste. En general, en este componente los estudiantes utilizaron correctamente el objeto visual propuesto. En el componente

de **narrativa**, al igual que en el primer desafío los grupos se pueden dividir en dos partes, aquellos que utilizan las ecuaciones y los procedimientos propios del despeje de variable y los que resuelven el problema tanteando las posibles soluciones. En el último descriptor **rutina**, sólo un grupo no llegó a la generalización de la adición en una expresión algebraica, los demás, si bien la obtuvieron no la utilizaban para resolver el problema, aparentemente no establecen la relación entre la expresión algebraica y la utilidad que ésta proporciona para resolver el problema.

Tabla 13

Datos de la actividad 1 desafío 3

Actividad 1 Desafío 3: Entre áreas																
Respuesta de aprendizaje: Comprende y utiliza expresiones algebraicas para solucionar el problema planteado																
Grupo	Uso de la palabra				Mediador visual				Narrativa				Rutina			
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones

Lobo de los signos		✓	No reconoce las expresiones algebraicas que debe utilizar para solucionar el problema ni identifica palabras como diagonal, cuadrado y número racional.	✓		Utilizan correctamente el gráfico para poder resolver el problema planteado.	✓		Plantean la solución del problema de dos formas diferentes; la primera con números sin dar a conocer el contexto de los mismos y, en segundo lugar, presentar los resultados mediante un dibujo.	✓		Aunque no se hace explícito el procedimiento realizado. Al escuchar las explicaciones de los estudiantes se evidencia que utilizaron procedimientos propios del componente de rutina.
Hunters of Demons	✓		Aunque se les dificulta entender los términos	✓		Se basaron el gráfico para resolver el	✓		Sustentan correctamente los procedimientos	✓		Le grupo utiliza una rutina correcta

			algebraicos expuestos en el problema comprende los procedimient os a realizar.			problema planteado.			os realizados. Sin embargo, algunos datos son calculados incorrectam ente.			para la solución del problema, estos estudiantes probaron y estimaron las soluciones propuestas.
Metibus Metallum		✓	Se les dificultó establecer los términos propios de las matemáticas involucrados en el problema planteado.	✓		Comprenden que a partir del gráfico se debe contestar las preguntas planteadas. Sin embargo, no comprende los temas		✓	Se les dificulta el desarrollar procedimient os propios de las matemáticas para la resolución de problemas.	✓		Se les dificulta el realizar procedimient os propios de este componente. Se observar que carecen de habilidades propias para

							involucrados en la gráfica.							la resolución de problemas.	
Red Hawks		✓	Confunden conceptos cómo área y perímetro, pese a esto, utilizan los procedimientos correctos para resolver el problema.	✓			Realizaron varios dibujos para comprender el problema a realizar, luego comprendieron los procedimientos a utilizar para solucionar el problema.			✓	Solucionan correctamente el problema. Pero no de la forma como se pensaba que los estudiantes lo iban a resolver.			✓	Realizaron aproximaciones al tanteo sobre las posibles soluciones. Utilizando la calculadora alcanzaron una buena aproximación a la solución.
Los Mast-Sigos		✓	Aunque expresaron correctamente el teorema de Pitágoras	✓			Además de utilizar la representación gráfica para solucionar la			✓	Sustentan de manera correcta los procedimientos	✓			En este grupo los estudiantes desarrollaron

				no lo saben utilizar para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo.				primera parte del problema, realizan sus propios gráficos para solucionar la segunda parte.				realizados para obtener las respuestas al problema planteado.				correctamente las rutinas propuestas para la solución del problema.
--	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	---	--	--	--	---

Como aspectos generales del análisis de resultados del tercer desafío; 4 de los 5 grupos resolvieron el problema sin utilizar las ayudas que propone la gamificación, cabe aclarar que la motivación por completar el reto era lo importante en la solución de los problemas. En el componente **uso de la palabra**, además que es tendencia que a los estudiantes se les dificulta utilizar lenguaje matemático, en este problema se evidenció que en algunos grupos enuncian correctamente el teorema de Pitágoras y lo escriben de manera correcta, pero a pesar de esto realizan incorrectamente las operaciones para calcular la longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo. **Mediador visual** los estudiantes utilizan el gráfico propuesto y adicional crean sus propios gráficos que le permiten comprender la situación problema. En el componente de **narrativa**, al igual que en el primer desafío los grupos se pueden dividir en dos partes, aquellos que utilizan las ecuaciones y los procedimientos propios del despeje de variable y los que resuelven el problema tanteando las posibles soluciones. En el último descriptor **rutina**, los estudiantes utilizan diferentes formas para obtener la solución a un problema, sea aproximando con la calculadora, haciendo otra representación gráfica o la esperada por el investigador para la solución del problema. Solo un grupo no obtuvo el desarrollo esperado ni evidenciaron rutinas diferentes para lograr la solución del problema.

Tabla 14

Datos de la actividad 1 desafío 4

Actividad 1 Desafío 4: El pescado																
Respuesta de aprendizaje: Plantean una ecuación lineal a partir de un enunciado y resuelve parcial o completamente la solución de una ecuación.																
Grupo	Uso de la palabra				Mediador visual				Narrativa				Rutina			
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos			✓	Se les dificulta comprender el enunciado	✓			Utilizando correctamente las divisiones del			✓	Se les dificulta expresar sus resultados,			✓	No alcanzaron la respuesta de

			del problema. Utilizaron aproximaciones de cada una de las partes para poder identificar numéricamente la solución, mas no utilizaron expresiones algebraicas.				pescado pudieron aproximar la solución de problema.				ya que, utilizaron procedimientos de aproximación y tanteo para lograr la solución del problema.			aprendizaje esperada, una expresión algebraica. Sin embargo, obtuvieron la solución al problema.
--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--

Hunters of Demons	✓	No utilizaron la variable X como se plateaba en el dibujo del pescado, aun así, los estudiantes utilizaron como variables las partes del pescado, cabeza, lomo y cola para hallar la solución.	✓	Utilizaron correctamente e el dibujo del pescado para poder solucionar el problema.	✓	Aunque un poco confuso expresaron los procedimientos realizados para hallar la solución del problema. "es que; son múltiplos de nuevo y por eso es fácil encontrar los números, profe" expresó uno de los estudiantes del grupo.	✓	Le grupo utiliza una rutina correcta para la solución del problema, estos estudiantes probaron y estimaron las soluciones propuestas.
-------------------------	---	--	---	---	---	--	---	---

Metibus Metallum		✓	No comprendían el enunciado del problema ni eran precisas las preguntas que realizaban. Luego, de varias ayudas de la gamificación, se logró dividir el problema en partes más pequeñas para poder comprender el problema.	✓	Realizaron recortes de dibujo para poder comprender la relación entre las partes del pescado. Pese a esto, no comprendían el establecer dicha relación. “profe ya recortamos el pescado, pero no da porque ya lo medimos” afirmaba un	✓	No justifican los procedimientos realizados para obtener la respuesta al problema.	✓	Se les dificulta comprender y realizar alguna rutina para encontrar la solución del problema. A diferencia de los demás grupos no intentan aproximar la solución de manera numérica.
---------------------	--	---	--	---	---	---	--	---	--

							estudiante del grupo.							
Red Hawks		✓		Se les dificultó al inicio de la actividad comprender el problema planteado y no lograban expresar sus preguntas con el lenguaje matemático apropiado, pese a esto, finalmente comprendieron el objetivo del trabajo.	✓		Utilizaron correctamente el gráfico para obtener parcialmente la ecuación que se solicitaba.	✓			Expresan correctamente los procedimientos realizados para la obtención de la respuesta al problema planteado.	✓		Mediante la observación, la estimación y la abstracción. Pudieron plantear una ecuación algebraica que les permitiera encontrar la solución al problema.

Los Mast-Sigos		✓	En este grupo, partieron literalmente del enunciado del problema, extrayendo la información relevante y haciendo las preguntas adecuadas, aunque no en el lenguaje matemático, sino en el lenguaje cotidiano.	✓		A partir del gráfico del pescado, se les facilita comprender el enunciado del problema y establecer la relación entre las tres partes del pescado.		✓	Sustentan de manera correcta los procedimientos realizados para obtener las respuestas al problema planteado.	✓		Al principio plantearon la ecuación del problema de manera desorganizada, ya que, contaban con dos ecuaciones y no lograban establecer la relación entre las dos.
----------------	--	---	---	---	--	--	--	---	---	---	--	---

Como aspectos generales del análisis de resultados del cuarto desafío; 3 de los 5 grupos resolvieron el problema sin utilizar las ayudas que propone la gamificación, en esta parte se hizo crucial alcanzar el objetivo de la misión, pues estaban a punto de cumplirse y así, obtener los puntos de experiencia. En el componente **uso de la palabra**, los grupos comprendieron el enunciado del problema, pero al intentar plasmarlo en una ecuación se les dificultaba el expresarlo de manera correcta en un lenguaje matemático, por lo cual optaron algunos por escribir las partes del pescado, lomo, cabeza y cola en vez de expresiones algebraicas que involucraran a todas. **Mediador visual** es un componente importante para la resolución de problemas, ya que, se evidencia la utilización de gráficos o dibujos para la comprensión y resolución de problemas, tanto es así, que en un grupo se llegó a pensar que haciendo recortes y comparando sus longitudes se podría llegar a la solución; en ese momento se les informó que el dibujo era una ayuda pero que no se encontraba a escala y por lo tanto sus medidas no correspondían a las magnitudes del enunciado del problema. En el componente de **narrativa**, se evidencia que los estudiantes utilizan narrativas propias para dar explicación de a los procedimientos y argumentos que hay que colocar en contexto para poderlos entender. Por ejemplo, un estudiante antes de resolver el problema manifestaba que la solución debía ser múltiplo de 9 porque todo dependía de la medida de la cabaza y que por lo cual todo debía tener respuesta con números enteros. En el último descriptor **rutina**, los estudiantes utilizan diferentes formas para obtener la solución a un problema, sea aproximando con la calculadora, haciendo otra representación gráfica o la esperada por el investigador para la solución del problema.

5.1.2 Actividad Dos: The Riddle of the Tower

De la actividad se obtuvieron las siguientes tablas.

Tabla 15

Datos de actividad 2 desafíos 1 y 2

Actividad 2 Desafío 1 - 2: Estrellitas, triángulos y cuadrados. Trueques y Balanzas																
Respuesta de aprendizaje: Plantean y resuelven problemas de ecuaciones lineales con números naturales utilizando elementos gráficos y simbólicos.																
Grupo	Uso de la palabra				Mediador visual				Narrativa				Rutina			
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos		✓		Expresan correctamente los interrogantes, utilizando un lenguaje cotidiano.	✓			Además de utilizar los medios visuales propuestos, diseñan y utilizan sus propios mediadores visuales para la solución de los problemas.	✓			Exponen correctamente los procedimientos realizados en la solución de los problemas planteados.	✓			Utilizan correctamente las rutinas para resolver correctamente los problemas planteados.

Hunters of Demons	✓	No utilizan el lenguaje matemático para expresar sus interrogantes, esto debido que se les facilita la resolución de los problemas planteados.	✓	Los problemas planteados no presentan mucha dificultad para este grupo resolviendo casi de inmediato los problemas planteados.	✓	Su explicación se basa en la exposición de procedimientos simples para la obtención de los resultados.	✓	Utilizan correctamente las rutinas para resolver correctamente los problemas planteados.
Metibus Metallum	✓	comprende los problemas planteados y expresan sus interrogantes utilizando un lenguaje	✓	Los estudiantes comprenden los primeros problemas planteados con triángulos, cuadrados y	✓	El grupo explica parcialmente los procedimientos realizados para la	✓	Aunque no realizan explícitamente los procedimientos para el cálculo de los resultados,

			cotidiano. Se les dificulto comprender los problemas de trueque, ya que, no establece la relación entre los cambios de los animales.			círculos. Sin embargo, al grupo se le dificultó establecer la relación de igualdad en los problemas de trueque.			solución de problemas.			si dan razón de las rutinas realizadas en la resolución de problemas.
Red Hawks		✓	Expresan sus posiciones de manera adecuada para plantear las posibles ecuaciones	✓		Utilizan correctamente e las ayudas visuales para la solución de problemas.	✓		El grupo exponen los procedimientos de manera adecuada. Los estudiantes expusieron	✓		Realizan correctamente las rutinas para poder resolver los problemas planteados.

			para la solución de problema.							paso por paso los procedimientos realizados.			
Los Mast-Sigos		✓	Los estudiantes comprenden y expresan sus interrogantes con el lenguaje cotidiano. Expresan de manera numérica los planteamientos realizados.	✓			Los estudiantes establecen de manera correcta los medios gráficos para la solución de problemas planteados.	✓		Expresan los procedimientos realizados para la obtención de resultados. Los estudiantes son muy meticulosos en la forma como expresan sus resultados.	✓		Realizan correctamente las rutinas propuestas en los problemas propuestos para este desafío.

Como aspectos generales del análisis de resultados de los desafíos 1 y 2 de la actividad 2; los 5 grupos resolvieron el problema sin utilizar las ayudas que propone la gamificación, en estos desafíos se utilizó varias estrategias para desarrollar ecuaciones lineales, tales como balanzas y trueques. En el componente **uso de la palabra**, los grupos no utilizan un lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones o interrogantes, por lo cual utilizan otros medios de comunicación para dar a entender sus afirmaciones. **Mediador visual** en estos desafíos los estudiantes utilizan correctamente los gráficos para resolver los problemas planteados, ya que, en su mayoría están plasmados de esa manera, por lo cual no es tan asertivo el análisis de este mediador en estos problemas. En el componente de **narrativa**, se evidencia que los estudiantes utilizan narrativas propias para dar explicación de a los procedimientos y argumentos que hay que colocar en contexto para poderlos entender. Por ejemplo, en el caso de los trueques hicieron dibujos adicionales para dar a entender sus afirmaciones. En el último descriptor **rutina**, aunque no se evidencia tácitamente la utilización de rutinas, si se observa en la mayoría la utilización de estrategias para la solución de problemas.

Datos de la actividad 2 desafío 3

Actividad 2 Desafío 3: Diagramas numéricas																
Respuesta de aprendizaje: Reconocen y realizan procedimientos inversos para solucionar ecuaciones lineales con soluciones enteras.																
Grupo	Uso de la palabra				Mediador visual				Narrativa				Rutina			
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos	✓			Utilizan el lenguaje matemático para expresar sus interrogantes. Profe ¿la ecuación se resuelve al contrario?	✓			Utilizan correctamente los mediadores visuales para la solución para la ejecución de la secuencia.	✓			Exponen correctamente los procedimientos realizados para encontrar las soluciones. En el último problema no reconocieron el procedimiento de	✓			Realizan correctamente la rutina para resolver los problemas propuestos. A pesar de esto, en el último problema no identificaron la rutina apropiada

										descomposi ción de una ecuación lineal.			para resolverlo.
Hunters of Demons		✓	Utilizan el lenguaje matemático para expresar sus interrogante s. Sin embargo, en el último problema no utilizaron el lenguaje matemático.	✓			Utilizaron los mediadores visuales para resolver los diagramas numéricos. Los utilizaron de manera inversa como se solicitaba.	✓		Expresan correctamen te los procedimient os realizados para la solución de ecuaciones lineales.	✓		Utilizan en general las rutinas propuestas para la solución de los diagramas numéricos. Sin embargo, no utilizan las rutinas para la solución del último problema.
Metibus Metallum		✓	No utilizan un lenguaje	✓			Utilizan correctament	✓		Explican correctamen		✓	Se les dificulta

			matemático para expresar sus interrogantes, pero al escucharlos se evidencia que comprenden los problemas propuestos.			e los diagramas para calcular los números y resolver las ecuaciones al inverso.			te los primeros procedimientos. En el último procedimiento no dan explicación de los procedimientos.			establecer las rutinas de trabajo en el desarrollo de los diagramas numéricos. En el problema no establecen las rutinas propuestas para la solución del problema.
Red Hawks		✓	Aunque expresan correctamente sus afirmaciones no establecen		✓	Comprenden y utilizan los diagramas para la solución de ecuaciones. Pese a esto,	✓		El grupo expone correctamente sus procedimientos realizados		✓	Realizan las rutinas propuestas para la solución de los problemas planteados.

			la relación entre los procedimientos y la solución de ecuaciones lineales.			no utilizan los gráficos para la solución del último problema.			en la elaboración de las operaciones.			Sin embargo, como sucedió con la mayoría de grupos no establecieron la relación con el último problema.
Los Mast-Sigos		✓	Utilizan expresiones matemáticas como ecuaciones y variables para dar a entender sus afirmaciones e interrogantes.	✓		Utilizan correctamente los mediadores visuales para solucionar los problemas planteados.	✓		Explican correctamente los procedimientos para la solución de ecuaciones lineales.	✓		Utilizan las rutinas para la solución de algunas ecuaciones, pero en el desarrollo del último problema no se observa la utilización de rutinas.

Como análisis de resultados del desafío 3 de la actividad 2; 4 de los 5 grupos resolvieron el problema sin utilizar las ayudas que propone la gamificación, en este desafío se utilizaron diagramas numéricos para realizar los procedimientos a la inversa y de esta resolver las ecuaciones lineales. En el componente **uso de la palabra**, los estudiantes siguen utilizando más el lenguaje cotidiano que el matemático para dar a entender sus afirmaciones, a pesar de esto, ya se ven modificaciones en la forma de expresar algunos interrogantes de manera natural, Profe: ¿la ecuación se resuelve al contrario? ¿profe las operaciones que se deben realizar son las inversas a las que están? **Mediador visual** en este desafío los estudiantes como mediador visual utilizaron los diagramas numéricos, los cuales le permitieron comprender los pasos para resolver una ecuación lineal con paréntesis y con denominadores. Pese a esto, los estudiantes no los utilizaron para resolver el problema planteado al final de la actividad, esto quiere decir que utilizan los medidores gráficos propuestos pero no los relacionan con la solución de un problema. En el componente de **narrativa**, se evidencia mejoría en la justificación de los procedimientos realizados, sin embargo, carecen de fluides para poder expresar las operaciones que realizan para hallar los resultados. En el último descriptor **rutina**, en este desafío los estudiantes evidenciaron la utilización de rutinas, tales como estimar, predecir y comprobar los resultados obtenidos.

5.1.3 Actividad Tres: *The fastest way down*

Tabla 17

Datos de la actividad 3, desafíos 1,2 y 3

Actividad 3 Desafío 1- 2 - 3: La batalla de las Espadas y La batalla de los túneles																
Respuesta de aprendizaje: Resuelven problemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos.																
Grupo	Uso de la palabra				Mediador visual				Narrativa				Rutina			
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos		✓		En los problemas no utilizan el lenguaje matemático para interpretar los problemas propuestos.			✓	Comprende los problemas propuestos. Pese a esto, no utilizan medios gráficos para resolver los problemas planteados.			✓	No son claras las maneras para resolver los problemas planteados. Sin embargo, debido a las dinámicas de la gamificación invente			✓	Utilizan diferentes rutinas para la obtención de las respuestas. Tales como, aproximaciones o tanteos en las soluciones de los problemas.

										formas para resolverlos.			
Hunters of Demons	✓		Este grupo es el que mejor ha adoptado un lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones e interrogantes.	✓			Utilizaron los mediadores visuales para resolver los problemas que requieren la utilización de gráficos.	✓		Expresan correctamente los procedimientos realizados para la solución de ecuaciones lineales.	✓		Utilizan las rutinas propuestas para la solución de los problemas planteados. Sin embargo, algunas rutinas las asumen como mecánicas por lo cual carecen de análisis para utilizarlas.
Metibus Metallum		✓	No utilizan un lenguaje matemático para expresar sus		✓		Utilizan correctamente los cuadros para la solución de		✓	Explican de manera desorganizada los procedimientos		✓	Han mejorado en la utilización de rutinas para la

			resultados o inquietudes, a pesar de esto, los estudiantes han mejorado en la resolución de problemas.			problemas que requieren este tipo de ayudas gráficas.			ntos realizados. Pero a pesar de esto han mejorado en la explicación de las soluciones encontradas.			solución de problemas, se hace evidente que han diseñado inconscientemente estrategias para la solución de problemas.
Red Hawks		✓	Aunque expresan correctamente sus afirmaciones no establecen la relación entre los procedimientos		✓	Comprenden y utilizan los diagramas para la solución de ecuaciones. Pese a esto, se les dificulta para la		✓	Justifican correctamente los procedimientos realizados en la obtención de las respuestas. Aun así, en algunos		✓	Los estudiantes encuentran las soluciones a los problemas planteados. Pero no es claro las

			os y la solución de ecuaciones lineales.			solución de problemas.				casos se confunden en plantear las ecuaciones para la solución.			rutinas utilizadas para la solución del problema.
Los Mast-Sigos		✓	Los estudiantes han mejorado en la utilización del lenguaje propio de las matemáticas para expresar sus interrogantes y afirmaciones. Tales como, ecuación	✓		En este grupo se ha avanzado en la utilización de ayudas gráficas para encontrar la solución de problemas que se hacen más fácil en resolver este tipo de problemas.	✓			Los estudiantes dan explicación de los procedimientos realizados para obtención de las respuestas.	✓		Realizan las rutinas propuestas para la solución de los problemas planteados.

				lineal, la variable X, se debe despejar.															
--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Como análisis de resultados de los desafíos 1 – 2 – 3 de la actividad 3; 4 de los 5 grupos resolvieron el problema sin utilizar las ayudas que propone la gamificación, en esta actividad, por la historia de la gamificación, se presenta la dinámica de resolver problemas cortos sobre ecuaciones lineales. En el componente **uso de la palabra**, los estudiantes siguen utilizando más el lenguaje cotidiano que el matemático para dar a entender sus afirmaciones. Sin embargo, han mejorado en la utilización de las expresiones que utilizan. **Mediador visual** en este desafío los estudiantes utilizaron los mediadores visuales para resolver los problemas, ya que, se dio una ayuda en este sentido para resolver los problemas propuestos. En el componente de **narrativa**, a excepción de un grupo los demás han mejorado en la explicación de sus afirmaciones a la hora de dar justificación de los procedimientos realizados. En el último descriptor **rutina**, los estudiantes realizan las rutinas propuestas para el desarrollo de los problemas, a pesar de esto no interiorizan dichas rutinas para la resolución de otros problemas planteados.

5.1.4 Actividad Cuatro: Trouble on the lake

Tabla 18

Datos de la actividad 4

Actividad 4 Desafío 2: Desenterrando el pasado para revivir un recuerdo y Modelando la solución																
<p>Respuesta de aprendizaje: Identifican y establece relaciones entre variables en un sistema de ecuaciones simultaneas. Despejan correctamente una variable con respecto a otra. Encuentra patrones a partir de las soluciones de un sistema de ecuaciones. Identifican gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones.</p>																
Grupo	Uso de la palabra			Mediador visual				Narrativa				Rutina				
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos		✓		Aunque su lenguaje sigue siendo cotidiano, justifican de mejor manera sus afirmaciones e	✓			Comprende los medidores visuales para reconocer la solución del sistema de ecuaciones. Sin embargo, no utilizan los		✓		Se les dificulta realizar despejes y comprender la relación entre las variables propuestas.			✓	Realizan las rutinas propuestas de manera mecánica y esto dificulta el aprendizaje de rutinas

			interrogantes.			nombres de las gráficas representadas.						más complejas, tales como interpretar o inferir sobre una información proporcionada por una ecuación.
Hunters of Demons	✓		Este grupo ha mejorado significativamente en el uso del lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones e	✓		Los estudiantes comprendieron la solución del problema a partir de una intersección entre una recta y una hipérbola.	✓		Expresan correctamente los procedimientos realizados, tales como los despejes la igualación de variables y la	✓		Utilizan las rutinas propuestas para la solución de los problemas, tales como, definir, estimar, probar,

			interrogantes.						generalización de las respuestas.			predecir y abstraer.
Metibus Metallum		✓	Los estudiantes, aunque no manejan un lenguaje matemático han mejorado en la interpretación de un problema planteado.		✓		Los procedimientos realizados no son claros para los estudiantes, pese a esto, los estudiantes a partir del gráfico comprendieron mejor la solución del problema.		✓		✓	Aunque no realizan de manera correcta las rutinas propuestas para la solución del problema, se evidencia que han mejorado en sus procedimientos para llegar a la solución del problema.
Red Hawks		✓	Los estudiantes			✓	Utilizaron el gráfico para		✓		✓	Los estudiantes

			han mejorado en la utilización del lenguaje matemático para expresar sus afirmaciones e interrogantes.			comprender de mejor manera la solución del problema. Lo interesante en este punto, es que se hicieron más interrogantes con relación a la gráfica de la hipérbola.			correcta los procedimientos realizados en la solución del problema, aunque se evidencia un poco de confusión en el momento de hacer los despejes.			han mejorado en la utilización de rutinas para la obtención de resultados.
Los Mast-Sigos	✓	Los estudiantes han mejorado significativamente en el uso del lenguaje matemático, tanto para	✓			Los estudiantes comprenden de manera significativa cuando identifican la solución como la intersección	✓		Los estudiantes explican de manera coherente los procedimientos realizados. Sin	✓		Realizan las rutinas propuestas para la solución de los problemas planteados.

				expresar sus afirmaciones como interrogantes.				de una recta con una hipérbola.				embargo, tiene confusiones con el despeje de ecuaciones.			
--	--	--	--	---	--	--	--	---------------------------------	--	--	--	--	--	--	--

Como análisis de resultados del desafío 2 de la actividad 4; los 5 grupos resolvieron el problema con las ayudas que propone la gamificación, en esta actividad la revisión de un trágico acontecimiento histórico de las matemáticas, y con esto, colocar un sistema de ecuaciones para el análisis y solución, de tal manera se incorpore inicios a la modelación matemática. En el componente **uso de la palabra**, los estudiantes siguen utilizando más el lenguaje cotidiano que el matemático para dar a entender sus afirmaciones. Sin embargo, han mejorado en la utilización de las expresiones que utilizan. **Mediador visual** en este desafío los estudiantes utilizaron los mediadores visuales para comprender los resultados encontrados en las ecuaciones y dar sentido a lo realizado durante la actividad. En el componente de **narrativa**, en general los estudiantes han mejorado en las justificaciones de los procedimientos realizados. En el último descriptor **rutina**, los estudiantes en diferente proporción, pero han logrado establecer rutinas que le permiten resolver problemas, tales como el estimar, probar, predecir y abstraer.

5.1.5 Actividad Cinco: The Three Pillars

Tabla 19

Datos de la actividad 5

Actividad 5 Desafío 1 – 2 – 3: Pilar I, II y III																
Respuesta de aprendizaje: Estimar, predecir y modelar una ecuación a partir de una situación problema.																
Grupo	Uso de la palabra			Mediador visual				Narrativa				Rutina				
	P_1	P_2	P_3	Observaciones	MV_1	MV_2	MV_3	Observaciones	N_1	N_2	N_3	Observaciones	R_1	R_2	R_3	Observaciones
Lobo de los signos		✓		Los estudiantes han mejorado en la utilización del lenguaje matemático para expresar sus interrogantes y sus afirmaciones.	✓			A partir de las construcciones realizadas los estudiantes evidencia la utilidad de la modelación y de las expresiones algebraicas.		✓		Dan explicación satisfactoria de los procedimientos realizados.			✓	Se ha logrado interiorizar las diferentes rutinas para la resolución de un problema y el entendimiento que un problema

			afirmaciones . Sin embargo, son claras sus explicaciones en la obtención de resultados.			en la construcción de la caja propuesta.			realizados. Pese a esto, se comprende lo realizado en clase.			los estudiantes buscaron mecanismos diferentes para obtener las soluciones propuestas.
Red Hawks		✓	Aunque no expresan con el lenguaje matemático sus afirmaciones logran darse a entender en los que están planeado.		✓	Se equivocaron varias veces en la utilización del material. Lograron mediante tanteo dar solución al problema planteado.		✓	Expresan de manera correcta sus procedimientos, aunque un poco desorganizado, logran dar a entender los		✓	Lograron asumir y comprender las rutinas propuestas para la solución de problemas.

											procedimie ntos realizados.			
Los Mast- Sigos		✓	Comprende la situación problema planteada. sin embargo, se les dificulta darlas en términos matemáticos .	✓			Utilizaron el modelo de papel para la elaboración del producto final.	✓			Expresan de manera correcta los procedimie ntos realizados durante el desarrollo de la actividad.	✓		Se evidencia en el grupo la utilización de rutinas propias del desarrollo de la actividad, aunque se les dificulto modelar la situación problema.

Como análisis de resultados del desafío 1 – 2 - 3 de la actividad 5; los 5 grupos resolvieron el problema con las ayudas que propone la gamificación, en esta actividad se involucra la modelación matemática para resolver un problema real, los estudiantes deben desarrollar más rutinas para la finalización de la actividad. En el componente **uso de la palabra**, los estudiantes al finalizar las actividades demostraron el manejo de un lenguaje matemático para expresar sus

afirmaciones, palabras como ecuaciones, variables, operaciones, despejar, etc. Se volvieron más comunes dentro de su lenguaje. **Mediador visual** se evidencio a través de las actividades que es un elemento que permite al estudiante resolver un problema y a entender parte de la solución del problema. En el componente de **narrativa**, en la medida que los estudiantes mejoran el componente del uso de la palabra justifican los procedimientos que utilizaron para encontrar las soluciones a los problemas. En el último componente de **rutina**, los estudiantes logran establecer y desarrollar las rutinas propuestas, tanto implícitamente como explícitamente. Pese a esto, los estudiantes no apropian dichas rutinas para la resolución de problemas diferentes a los planteados.

Teniendo en cuenta la tabulación de los resultados, se obtuvieron los siguientes resultados por componente y se grafican para ilustrar la interpretación, en figuras estadísticas de apoyo.

Figura 49

Uso de la palabra



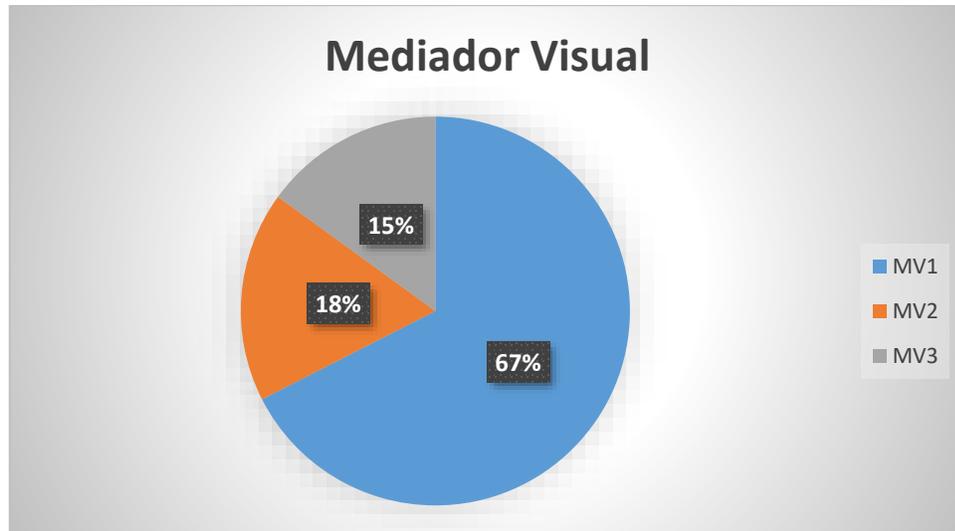
Fuente: resultados de la investigación

Esto concuerda con las observaciones adelantadas en cada una de las actividades, lo cual indica que en la resolución de problemas los estudiantes utilizan más el lenguaje cotidiano para expresar sus afirmaciones e interrogantes, esto aparentemente porque no están acostumbrados a exponer o sustentar con el lenguaje matemático.

En el componente de mediador visual, se evidencia que a los estudiantes se les facilita la utilización de elementos visuales para resolver problemas o comprender las soluciones encontradas, ver figura 53.

Figura 50

Uso de mediadores visuales

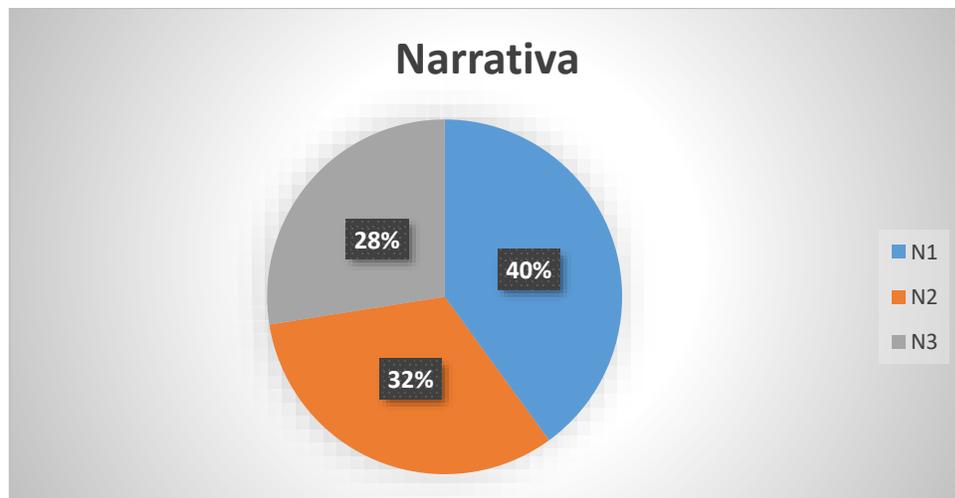


Fuente: resultados de la investigación

En el componente de Narrativa los niveles son más proporcionales y se establece que los resultados obtenidos no deciden en relación a los porcentajes. Ver figura 54.

Figura 51

Uso de narrativa en la solución de problemas



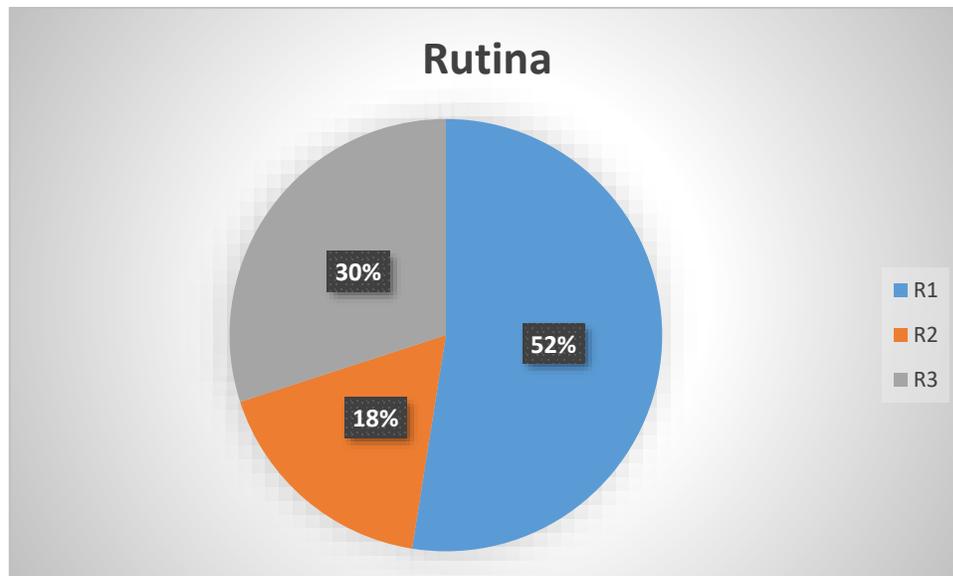
Fuente: resultados de la investigación

En este contexto del uso de la narrativa, se puede afirmar que los estudiantes se les dificulta explicar los procedimientos realizados en la obtención de las respuestas.

Finalmente, en el aspecto de la rutina, los resultados se evidencian en la figura 55.

Figura 52

Seguimientos de rutina en la obtención de respuestas a los problemas



Fuente: resultados de la investigación

En este componente se establece que los estudiantes asumen y desarrollan las rutinas establecidas para la resolución de problemas. Sin embargo, debido a lo evidenciado los estudiantes no interiorizan dichas rutinas, ya que, al enfrentar problemas donde no está explícito dicho componente los estudiantes se enfrentan a indecisiones para optar por una rutina determinada.

5.1 Análisis de resultados desde el proceso de Gamificación

Para el presente análisis se tuvo en cuenta 6 elementos que componen la gamificación, definidos de la siguiente manera:

la base del juego: entendido como la acción de jugar, competir, aprender y apreciar la información que se desea transmitir a partir del juego, en este punto el reto es necesario, porque motiva al jugador, es esencial tener en cuenta la interactividad y la retroalimentación.

Mecánica: en el juego es simbólico y relevante el orden de niveles o insignias. Lo común es que se ganen como recompensas. Esto incentiva al auto-mejoramiento y la participación constante.

Estética: la programación gráfica, las ilustraciones y los efectos visuales deben ser agradables y exitosas para la mirada del jugador.

Idea del juego: los objetivos que persigue el juego se presentan de forma inconsciente y consciente por la lectura del jugador. Esto permite que las habilidades y las actividades se simulen mejor, permitiendo que el jugador adquiera o tenga la sensación de adquirir competencias nuevas.

Conexión juego-jugador: el juego debe tener una lectura de fácil acceso, desde instrucciones hasta objetivos deben ser entendidas fácilmente por el jugador, permitiendo que la comunicación entre juego y jugador sean claras y precisas. Esto permite una afinidad que motive el compromiso con el juego.

Jugadores: el perfil de jugadores es amplio pueden estar ocupados en sus labores diarias o no. Kapp apunta a una división entre los que intervienen en el proceso de conformación, que estarán motivados y otros que no.

Motivación: debe existir una disposición psicológica y esto concatena la participación en el juego. La configuración entre unos desafíos que tengan un punto medio y que

vayan aumentando de forma sincrónica con el nivel del jugador, evita la frustración y motiva las crecientes habilidades del jugador. Que esto se ajuste a los niveles de evolución del jugador, permite que el juego sea atractivo.

Promover el aprendizaje: las estrategias de asignación de premios en puntos y otros, así como la constante retroalimentación del proceso de juego son técnicas que desde la psicología permiten el aprendizaje a través del juego.

Resolución de problemas: este es el punto céntrico del juego, pero es necesario tener en cuenta que es un elemento que aparece en cada sección o momento del juego: superar desafíos, embestir correctamente al enemigo, generar una estrategia o administrar bien los recursos entre otros. Son finalmente lo que le da sentido al juego en su totalidad y requiere de un análisis detallado de los elementos constitutivos del juego.

En respuesta a cada uno de los anteriores ítems, la gamificación se diseñó de la siguiente manera. La base del juego consiste en el desarrollo una historia, la cual es en esencia simple, “recuperar un objeto perdido” el estudiante para desarrollar la historia debe superar cinco actividades, cada actividad cuenta con una serie de desafíos. Para dar cumplimiento de este ítem se diseñó mediante la plataforma classcraft una misión, establecida por una serie de objetivos los cuales los estudiantes debían completar.

En este sentido los estudiantes comprendieron y desarrollaron las diferentes actividades, se observa la motivación de los estudiantes al presentar las dinámicas de

la clase de esta manera, ya que, no corresponden a una clase tradicional sino a una metodología basada en la superación de retos.

En la mecánica del juego, se les indicó a los estudiantes que el sentido del juego era sobrevivir a las misiones establecidas, y que en la medida que superan los desafíos podrían obtener puntos de experiencia, objetos, mascotas y poderes. Esto generó en los estudiantes un interés particular, pues como en todo video juego van a pareciendo cosas nuevas en la medida que se desarrolla la historia.

En la estética, adicional a lo presentado en la plataforma (sólo el perfil, el camino y algunas ayudas para retos), para la presente gamificación se desarrollaron una serie de tarjetas, medallas y juegos con dados para hacer más dinámico el juego dentro del aula de clase; este tipo de cosa mantuvieron concentrados a los estudiantes en la elaboración de las actividades propuestas, pues con esto se mantenía a los estudiantes concentrados en las actividades propuestas.

En la idea de juego, como principal idea del juego se mantuvo, los retos para la enseñanza aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales en diferentes contextos, esto se cumplió y se evidencia a partir de los resultados obtenidos en el análisis de los resultados de la resolución de problemas.

Conexión juego-jugador, la mayoría de los estudiantes descargaron su aplicación en el celular, es decir, podían ver en tiempo real el progreso de su personaje en la plataforma.

Jugadores, los estudiantes escogieron cada uno y de manera personal su avatar, los cuales contaban con mago, guerrero y curandero, y cada uno de estos personajes contaba con su estereotipo, poderes y dinámicas.

Motivación, en general todo el proceso de gamificación motivo a los estudiantes a realizar las actividades para alcanzar un objetivo grupal, y de esta manera obtener puntos de experiencia para poder subir de nivel y alcanzar mejores poderes que le permitieran desarrollar mejoras cosas en el juego, además de esto, poder obtener objetos, mascotas y poder utilizarlas en otras misiones.

Promover el aprendizaje, estas actividades proporcionaron a los estudiantes la motivación intrínseca para el aprendizaje, ya que no se basa en contestar un taller o examen por una nota sino de superar retos y obtener elementos dentro del juego que le permitan adquirir para su avatar elementos que los demás no tienen y sentir que a medida que su avatar está avanzando él inconscientemente lo hace igual.

Por último, en el ítem de Resolución de problemas, esta gamificación en especial está basada en esto, pues la naturaleza de los retos y desafíos se basaban en ello, esto proporciona a los estudiantes un propio desafío, grupal o individual, pues el sentimiento de competencia está presente en todo momento de la clase, y esto permite que ellos se sientan atentos y dispuestos a las actividades.

5.2 Análisis de resultados desde la modelación matemática

Para el análisis de resultados se toma como definición “La modelación matemática es un intento de describir alguna parte del mundo real en términos matemáticos.” (Brito et al. 2011), y en este sentido, se propuso en el presente trabajo desarrollar

inicialmente procesos de generalización y solución de ecuaciones lineales. Luego, a partir de un modelo de papel de una caja, se propone al estudiante la abstracción de una expresión algebraica que permitiera relacionar el área total del modelo con la longitud de sus lados, establecido esto, el estudiante desarrolla una serie de situaciones que le permitan establecer las medidas para la construcción de la caja con material concreto, además esto realiza simulaciones en GeoGebra para observar la variación del volumen con relación a las dimensiones de las variables del modelo de papel. Todo este proceso es un intento por modelar la construcción de una caja a partir de una necesidad especial de la gamificación. En este sentido, los estudiantes desarrollaron la actividad de acuerdo a lo establecido. Sin embargo, debido a la situación mundial de la pandemia varios grupos no se encontraban completos para la realización de la caja, esto hizo que la finalización y conclusión de la actividad no se realizara de igual manera que las otras actividades. En particular y lo beneficioso de la actividad, es que los estudiantes pudieron establecer y relacionar una expresión algebraica con la construcción de un objeto, esto es importante porque el estudiante puede observar de manera palpable como la variación de uno de los lados afecta directamente el volumen de una caja, sumado a lo anterior, la actividad dejó más interrogantes en los estudiantes, tales como ¿profe, da lo mismo hacer crecer la base que la altura? Otro compañero le contestaba, obvio no, si aumenta la altura, aumenta más la caja (volumen), este tipo de cuestionamientos, son los que permiten al estudiante generar su propio conocimiento porque generan más interrogantes hacia el futuro.

Conclusiones del capítulo 5

En términos generales los resultados obtenidos en las actividades de modelación evidencian que se alcanzó el objetivo de introducir al estudiante en un proceso de estimación y de modelación de un problema matemático a partir de una expresión algebraica.

CONCLUSIONES

La investigación, dirigida a la enseñanza de las ecuaciones lineales mediante la modelación matemática, la gamificación y resolución de problemas en estudiantes de grado octavo del Colegio Gustavo Restrepo, permite dar respuesta al objetivo. En los resultados se destacan algunos elementos esenciales que pueden ser resumidos en tres aspectos generales.

En la resolución de problemas:

- Los componentes utilizados para el análisis de resultados en la resolución de problemas Uso de la palabra, Medidor visual, Narrativa y Rutina. Proporcionan valiosa información para comprender de qué forma los estudiantes afrontan un problema. Adicional, en la medida en que los estudiantes mejoran en dichos componentes, mejoran en habilidades para resolver los problemas.
- A pesar de que los estudiantes no poseen un lenguaje propio de las matemáticas, son capaces de expresar coherentemente sus afirmaciones e interrogantes.
- Se les facilita a los estudiantes solucionar un problema y comprender su solución, si dicho proceso está acompañado de un apoyo visual.
- En el componente de la narrativa, a los estudiantes les cuesta trabajo justificar los procedimientos realizados, y no porque no los comprendan, sino porque no argumentan de manera asertiva lo que realizaron, en muchos casos por el temor a caer en un error o por temor al prejuicio del profesor o sus compañeros.

- Los estudiantes establecen rutinas de trabajo para la solución de problemas. Sin embargo, se puede clasificar en dos categorías dichas rutinas. Las rutinas que están propuestas explícitamente o implícitamente en la solución de un problema y las rutinas que inventan o diseñan los estudiantes; que pueden conllevar a una solución o a más interrogantes, por lo general, estas últimas rutinas son generadas por aquellos estudiantes más creativos y contestatarios.

En utilización de la gamificación:

- La gamificación como metodología aplicada en el aula de clase proporciona desarrollo de competencias emocionales, cooperativas, creativas y motivacionales.
- La gamificación genera el auto aprendizaje, ya que, en la búsqueda de la solución de los retos los estudiantes buscan estrategias para alcanzar los objetivos propuestos.
- La gamificación permite a los estudiantes identificarse con su avatar, en el momento de escoger los personajes (mago, guerrero o curandero) se observó que los estudiantes más aventajados en las matemáticas escogían mago, a los que se les dificultaba escogían guerrero. Esto es debido a la naturaleza de los video juegos, ya que, para los video juegos los magos requieren más estrategia para poder vencer en las actividades mientras que los guerreros
- El proponer una ruta e historia en la gamificación proporciona emoción a los estudiantes, pues para cada clase los estudiantes están a la expectativa de

qué ira a pasar en la historia, que pasará con los personajes, con qué saldrá el profesor hoy.

- La gamificación, proporciona un excelente ambiente para el aprendizaje por resolución de problemas, pues debido a su metodología (retos, desafíos y sentencias), permite a los estudiantes la utilización de problemas matemáticos para superar cada una de las pruebas y la retroalimentación o repetición de los problemas gracias a las sentencias.

En la modelación:

- Los estudiantes partieron de un proceso de generalización y de variación para obtener un resultado de un problema real.
- Los estudiantes identificaron como se relaciona las expresiones algebraicas con una situación real y lo útiles que son para resolver nuevos interrogantes.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades propuestas para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones lineales bajo la metodología de la gamificación, la resolución de problemas y la modelación, llevan a poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Continuar investigando acerca de la implementación de la gamificación, fuera de las reglas de los videos juegos, considerar las dinámicas de los juegos de mesa, ya que, mediante este tipo de juegos se propicia de mejor manera el trabajo en grupo y el pensamiento estratégico en diferentes formas.
- Para futuras gamificaciones establecer un reto inicial, esto con el fin de establecer y de acuerdo a los resultados la posibilidad de obtener su avatar, es decir, mediante los resultados de la prueba “diagnostica” establecer los posibles personajes. Para ello es importante aumentar los tipos de roles que pueden tomar los estudiantes (mago oscuro, mago blanco, guerrero de los bosques, guerrero arcano, curandero de las montañas y curandero valquiria), con esto se puede establecer otro tipo de comportamientos que los estudiantes asumen dentro de la gamificación.
- En futuras gamificaciones desarrollar progresivamente la dificultad de los retos y la obtención de las medallas, objetos y puntos, ya que, luego de realizar la gamificación, los estudiantes comentaron que dentro de los video juegos los

primeros niveles eran más sencillos y se puede obtener varias cosas, esto incentiva a los participantes a continuar en el juego.

- Incentivar a los estudiantes a estudiar las ecuaciones lineales a partir de un proceso de modelación matemática que permita un aprendizaje significativo de los procesos realizados.
- Investigar más detalladamente los componentes que describen la capacidad que tiene los estudiantes en resolver problemas matemáticos (uso de la palabra, medidor visual, narrativa y rutina), de tal manera que se pueda establecer problemas que evidencian de mejor manera cada uno de los componentes.

Bibliografía

- Barreal, J., & Jannes, G. (2019). *La narrativa como herramienta docente dentro de la gamificación de la estadística en el Grado en Turismo*. . Madrid: Universidad Complutense.
- Bausela, E. (1984). La Docencia a Través De La Investigación–Acción. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-10.
- Bernal, J. (2018). *Desarrollo pedagógico Constructivista con enfoque en el Aprendizaje Significativo del contenido: Educación Vial para usuarios, niños (a) de 9 a 11 años, para la organización Mil Ideas Internet, ubicada en la ciudad de Bogotá, localidad* . Bogotá: Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD.
- Botero, L. (2014). *Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría, para los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario (trabajo de maestría)*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Boza, A., & Conde, S. (3 de 12 de 2015). *Web 2.0 en educación superior: formación, actitud, uso, impacto, dificultades y herramientas*. Obtenido de <https://doi.org/10.1344/der.2015.28.45-58>:
<https://doi.org/10.1344/der.2015.28.45-58>
- Brito, M., Alemán, I., Fraga, E., Para, J., & Arias, R. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*. Vol. 14. No. 2, mayo-agosto, 2011, 129-139 .

- Burke, B. (2014). *Gamify: how gamification motivates people to do extraordinary things*. Brookline: Bibliomotion, Inc.
- Campistrous, L. &. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana:: Editorial Pueblo y Educación.
- Chou, Y. K. (2017). Los ocho principios de la gamificación; jugar para competir mejor. <https://www.youtube.com/watch?v=1bK8qG3nlgl>.
- Clemens, S., & Daffer, P. (1998). *Geometría*. Mexico: Pearson Educación.
- Contreras, R., & Eguia, L. (2017). Gamificación en aulas universitarias. *Bellaterra: Institut de la Comunicació, Universitat Autònoma de Barcelona*, 10-18.
- Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas : retos , logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VIII, No. 1 (2001) 15, 15-26*.
- Foncubierta, J., & Rodriguez, C. (2006). *Didáctica de la Gamificación en la clase de español*. Editoria, Edinumen.
- Gairin, J., & Fernández, J. (2010). Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. . *Tendencias Pedagógicas, vol 15, No 1., 57-90*.
- Gallego, A. (2016). Implementando una metodología de gamificación para motivar la lectura y escritura en jóvenes universitarios. *KEPES Año 13 No. 14 julio-diciembre 2016*, 61-81.
- Gallego, A., & Agredo, A. (2016). Implementando una metodología de gamificación para motivar la lectura y escritura en jóvenes universitarios. *Revista KEPES Año 13 No. 14 julio-diciembre 2016*, 61-81.

- Garay, U., Luján, C., & Etxebarria, A. (2013). El empleo de herramientas de la Web 2.0 para el desarrollo de estrategias cognitivas: un estudio comparativo. *Porta Linguarum*, 20: , 169-186.
- García, M. (2015). *Aprendizaje basado en juegos serios como herramienta de la educación para todos (Tesis doctoral)*. Salamanca: . Universidad de Salamanca.
- Gómez, A., Osorio, D., & Tapiero, G. (2015). *Fortalecimiento del trabajo colaborativo de los estudiantes del curso undécimo a, en el área de contabilidad-informática del Colegio Colombo japonés de Bogotá mediante la plataforma de ludificación classcraft*. Bogotá: Fundación Libertadores.
- Guerra, A. (2012). *Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales (trabajo de maestría)*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Hamari, J., & Koivisto, J. (2013). *Social motivations to use gamification: An empirical study of gamifying exercise*. Tampere: Conference: Proceedings of the 21st European Conference on Information Systems.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (1998). *Metodología de la Investigación*. Mexico: McGrawHill.
- Hsin-Yuan Huang, W., & Soman, D. (.2013.). A practitioner's Guide to Gamification of Education. *Research Report Series Behavioural Economics in Action –*.
- Jaime, F., & María, D. (2000). *5 Años de Olimpiadas Matemáticas para primaria 1995-1999*. Bogotá : Universidad Antonio Nariño.
- Joya, A. d. (2013). *Caminos del Saber. Matemáticas 6*. Bogotá : Santillana .

- Kapp, K. (2012). *The Gamification of Learning and Instruction: Game-Based Methods and Strategies for Training and Education*. San Francisco: John Wiley & Sons.
- Obtenido de https://books.google.com.co/books?id=M2Rb9ZtFxccC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false
- Kemmis, & MacTaggart. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- Macías, A. (2017). *La Gamificación como estrategia para el desarrollo de la competencia matemática: plantear y resolver problemas*. Guayaquil: Universidad de Casa Grande.
- Martínez, D., & Paez, O. (2013). *Escenario de aprendizaje de las matemáticas: la cultura del uso y consumo del teléfono celular*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Matallaoui, A., Hanner, N., & Zarnekow, R. (2017). Introduction to Gamification: Foundation and Underlying Theories. Gamification Using Game Elements in serious Contexts, Springer, 2017, 3 - 16. *Technische_Universitaet_Berlin*, 3-18.
- McGonigal, J. (2011). *Reality is Broken: Why Games make Us Better and how they can Change the World*. London: Penguin Press.
- Meavilla, V. (2013). *¿Cuánto vale la X?*. Zaragoza: Almuzara.
- Morillas, C. (2016). *Gamificación de las aulas mediante las TIC: Un cambio de paradigma en la enseñanza presencial frente a la docencia tradicional (Tesis doctoral)*. Elche, Alicante.: Universidad Miguel Hernández,.

- Muños, J. (2010). *Ernesto el aprendiz de matemago*. Barcelona : Nivola .
- Muñoz, J., Hans, J., & Fernández, A. (2019). Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra? *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, nº 101,, 29-45.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.
- Publishing, A. (2012). *Juegos con fosforos*. Bogotá : Panamericana .
- Ramírez, J. (2014). *Mecánicas de juegos en tu vida personal y profesional* . Mexico: Alfaomega.
- Ress, P., & Sparks, F. (1968). *Algebra* . Mexico: Reverté.
- Rughinis, R., & Rughinis, C. (2017). *Reading with a Touch of Gameplay: Gamified E-Books' Convergence with Classical Literary Worlds. Gamification Using Game Elements in serius Context*. Editoria, Springer.
- Sakai, K., & Shiota, S. (2016). *A Practical Study Of Mathematics Education Using Gamification, International Conferences ITS,. ICEduTech and STE 2016.* .
- Salett-Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, 105-125.
- Sánchez, E. (2019). *Gamificación en ámbitos educativos: uso de classdojo y geogebra para la enseñanza de geometría en el noveno año de EGB.* . Asogues, Ecuador: Universidad Nacional de Educación.

- Sánchez, P. (2016). *Gamification Universitat de Valencia*. Valencia. doi:<http://dx.doi.org/10.14201/eks20151621315> junio 2015 vol.16 nº 2 E K S e-ISSN 2444-8729
- Torres, G., Franco, A., Gutiérrez, M., & Suárez, A. (2019). La Gamificación En Los Ambientes De Realidad Virtual Móvil. . *Pistas Educativas*, No. 133, julio 2019 , 671-699.
- Vassileva, J. (2014). Motivating Participation in Social Computing Applications: A User Modeling Perspective. *Computer Science Department, University of Saskatchewan*, 1-32.
- Villa, J. (2012). Modelación Matemática Escolar, Algunas Reflexiones Frente a su relación con la cultura . *RELME Reunión Latinoamericana de Educación Matemática*, 23-28.
- Villa, J., Bustamente, C., Berrio, M., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. *Asociación Colombiana de Matemática Educativa*,, 1-5.
- Werbach, K., & Hunter, D. (15 de 04 de 2012). *How Game Thinking Can Revolutionize Your Business*. Obtenido de <https://fliphtml5.com/ndhs/wtqf/basic>
- Zayyadi, M., Nusantara, T., Subanji, & Hidayanto, E. S. (2019). A Commognitive Framework : The Process of Solving Mathematical Problems of Middle School Students . *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research Vol. 18, No.2*, 89-102.

Zichermann, G., & Cunningham, C. (2011). *Gamification by Design*. Obtenido de https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=zZcpuMRpAB8C&oi=fnd&pg=PR7&dq=gamification+by+design+zicherman&ots=UvO771zb9k&sig=O03kGetvNyRZuVTwXMHxYrvm_W8#v=onepage&q=gamification%20by%20design%20zicherman&f=false

ANEXOS

Análisis de los resultados

Las actividades se desarrollaron con la participación de 26 estudiantes, 16 hombres y 10 mujeres. Inicialmente cada estudiante escogió un avatar en la plataforma classcraft y con la ayuda del docente conformaron 5 equipos de trabajo.

Equipo	Nombre	Avatar
Lobos de los signos	ACOSTA, DIIVANE	Guerrero X
	ALARCÓN, JIHAN	Guerrero X
	CORREDOR, DARIO	Guerrero X
	ELCAITA, PAULA	Curandero X
	VILLA, MATEO	Mago X
Hunters of Demons	CACERES, DAVID	Mago X
	FIGUEROA, HONNY	Guerrero X
	GOMEZ, SAMUEL	Curandero X
	PIÑA, DAVID	Mago X
	VALDES, BERWAN	Curandero X
Metibus Metallum	ARANGO, JIHAN	Guerrero X
	BAQUERO, ANTONY	Curandero X
	BENSAQUELLO, MARIA	Mago X
	DAZA, NICOL	Curandero X
	HERRERA, OSCAR	Mago X
TORRES, DAVID	Guerrero X	
Red Hawks	COLORADO, LINDA	Guerrero X
	ESPINOSA, SHARICK	Mago X
	GONZALEZ, ISABELLA	Mago X
	HOLGUIN, NICOL	Guerrero X
	LENA, JUSTIN	Curandero X
Los Mats-Sigos	DIAZ, LIZETH	Mago X
	JARABE, TATIANA	Guerrero X
	JIMENEZ, ERICK	Guerrero X
	PULGARIN, DANIEL	Mago X
	RODRIGUEZ, HEIDI	Mago X

Siguiendo las dinámicas de la clase se hizo entrega del material propuesto para cada actividad y desafío propuesto.