REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de maestría en educación matemática

LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS EN GRADO 11°: UNA EXPERIENCIA DE TRABAJO USANDO LA APLICACIÓN DESMOS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Grigelio de Jesús Rodríguez Rincón.

Bogotá D. C.

2022

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de maestría en educación matemática

LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS EN GRADO 11°: UNA EXPERIENCIA DE TRABAJO USANDO LA APLICACIÓN DESMOS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Grigelio de Jesús Rodríguez Rincón

Director de tesis:

Dr. Gerardo Antonio Chacón Guerrero.

Bogotá D. C.

2022

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor Gerardo Antonio Chacón Guerrero, por su colaboración, acompañamiento y dedicación, que como asesor me ofreció con gran motivación en todo momento, para el desarrollo y culminación de esta investigación. A los docentes de la maestría, los doctores María Falk, Osvaldo Rojas y Rafael Sánchez por los conocimientos aportados y adquiridos a nivel profesional y personal. A mis compañeros de la maestría, por su colaboración y aportes. A los estudiantes del grado once del Colegio Liceo Piñeros Cortés (Bogotá), por su entusiasmo, colaboración y responsabilidad con la que asumieron cada una de las actividades aplicadas.

DEDICATORIA

A mis hijos:

Jhonatan Camilo, Daniel Steven y Sara Sofia son motivos de orgullo y felicidad en todo instante; por ser mi motor de vida e inspiración para realizar este proyecto.

A mi esposa:

Angelica María, por su cariño y acompañamiento presentes en todo momento.

De igual forma a mis padres y hermanos que estuvieron presentes cuando más los necesitaba y me apoyaron en este trabajo.

SÍNTESIS

El objetivo de este trabajo es mejorar la comprensión de los conceptos de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas con sus propiedades a través de las actividades trabajadas en la plataforma Desmos, en los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

Para ello se utilizó una metodología con enfoque cualitativo de modo que se pudiera orientar a la construcción de los conceptos de las funciones y sus gráficas, permitiendo una flexibilidad en sus etapas y desarrollo como en la afinidad en las preguntas, los participantes fueron 20 estudiantes de grado once entre las edades de 15 a 17 años.

Estas actividades se sustentan en los fundamentos de la tecnología en la enseñanza de la matemática, La modelación como alternativa didáctica en la matemática y en la teoría de resolución de problemas.

Las actividades están estructuradas con diferentes situaciones didácticas y problemas de modelación, y con su aplicación se pretende introducir el concepto de función, describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, al igual que favorecer la construcción y articulación de los conceptos de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y sus propiedades.

ABSTRACT

The objective of this work is to improve the understanding of the concepts of linear, quadratic, exponential and logarithmic functions with their properties through the activities worked on the Desmos platform, in the eleventh grade students of the Liceo Piñeros Cortés School.

For this, a methodology with a qualitative approach was used so that it could be oriented to the construction of the concepts of the functions and their graphs, allowing flexibility in their stages and development as in the affinity in the questions, the participants were 20 students from grade eleven between the ages of 15 to 17 years.

These activities are based on the fundamentals of technology in the teaching of mathematics, modeling as a didactic alternative in mathematics and the theory of problem solving.

The activities are structured with different didactic situations and modeling problems, and with its application it is intended to introduce the concept of function, describe its behavior from the geometric, numerical, symbolic and verbal points of view, as well as favor the construction and articulation of the concepts of linear, quadratic, exponential, logarithmic functions and their properties.

TABLA DE CONTENIDO **PÁG.**

INTRODUCCIÓN

El uso de la tecnología hoy en día es muy importante y fundamental en la vida cotidiana de las personas, porque se encuentran presentes en prácticamente en todo lo que nos rodea, desde el trabajo hasta las actividades diarias. Las herramientas digitales en la educación les ofrecen muchas posibilidades para trabajar o implementar en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo representar una función, recrear una actividad con video o juegos, dar clases sincrónicas y asincrónicas o porque no, enseñar de una nueva forma, como lo asegura la experta en herramientas tecnológicas para la educación, Sagenmüller (2016)[1], "*Al incorporar herramientas tecnológicas en la educación aporta beneficios que promueven el conocimiento y la interacción, además la eficiencia y la productividad en el salón de clase entre los profesores y los alumnos*".

De igual forma, la matemática encuentra a la tecnología como un aliado estratégico que apoya los procesos educativos y conjuntamente brinda elementos complementarios para mejorar las dificultades presentadas en la comprensión de la matemática.

Además, es pertinente tener en cuenta que el tema del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática con herramientas digitales, ha sido abordado en eventos, congresos y reuniones a nivel internacional en el campo de la Educación Matemática, destacándose: International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the

[1] Sagenmüller, I. (2016). Beneficios de la tecnología en educación.

European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), la Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), los Congresos Colombianos de Matemática, entre otros. En estos congresos y reuniones se presentan trabajos que muestran experiencias significativas y dificultades, en la enseñanza y aprendizaje de la matemática usando herramientas digitales.

En el ICME 13 de 2016 el TSG 43 hace referencia a "*Usos de la tecnología en la educación matemática secundaria superior (14 a 19 años)*", donde muestra la descripción general del estado actual de los usos de la tecnología en la educación matemática superior y realizaron un debate centrado en cuatro temas, que son: ¿cómo las nuevas tecnologías pueden crear nuevos tipos de actividades?, el papel de las tecnologías emergentes, interrelaciones entre la tecnología y las matemáticas enseñadas a este nivel y por último la formación docente. Se menciona que son nuevos retos y oportunidades para que los docentes puedan reflexionar sobre sus prácticas y cómo se pueden desarrollar con el empleo de las nuevas tecnologías.

Por otra parte, en el ICME 14 de 2020 el TSG 23 se refiere a "*Visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*". El objetivo es cuestionar la importancia de la investigación para comprender el papel de los procesos de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, donde abordan varios temas, uno de los cuales trata sobre la visualización y las nuevas tecnologías.

Adicionalmente, es fundamental mencionar los elementos motivadores que surgen para realizar este presente trabajo, en primer lugar la importancia que tienen las funciones y gráficas en la matemática y otras áreas, ya que las funciones no solamente interpretan, sino que determinan las relaciones que existen entre distintas magnitudes tanto en matemáticas, como en física, química, medicina estadística, economía, ingeniería, psicología, entre otras áreas, permitiendo modelar situaciones de la vida real y poder realizar, predecir o dar una solución a un problema dado.

En segundo lugar, la motivación que presentan los alumnos mediante las herramientas digitales, en este caso el proceso de la enseñanza -aprendizaje de las funciones y gráficas, debido a su capacidad y facilidad de manejar programas, de interactuar, interpretar, representar y visualizar lo que se está trabajando.

Por último, diseñar nuevos procesos de enseñanza y aprendizaje, no solo para los estudiantes sino también para los docentes, que puedan adaptarse a las necesidades y cambios en la educación matemática.

De acuerdo con lo anterior, se pretende implementar estrategias de enseñanza y aprendizaje con herramientas digitales que permitan al estudiante desarrollar habilidades matemáticas, como el discurso matemático, la modelación matemática, la resolución de problemas y que el estudiante pueda superar las debilidades que presenta en el área. Este proceso permite apoyar la práctica docente, teniendo en cuenta que es fundamental y de importancia aportar estrategias didácticas nuevas que motiven al estudiante en el campo de la educación matemática.

Es valioso recordar que las matemáticas son importantes para el desarrollo intelectual e integral del estudiante y también hacen parte del enriquecimiento de varias ciencias, por tal motivo es pertinente que las matemáticas están incluidas en el currículo de los diferentes niveles en las instituciones educativas. Especialmente, en el colegio Liceo Piñeros Cortés (LPC) que es una institución de calendario A y se encuentra ubicado en la localidad de Kennedy, Bogotá, tiene como énfasis principal la enseñanza del inglés y las matemáticas.

Los estudiantes de grado once de bachillerato de la institución reciben el tema de funciones, el cual les permite llevar a cabo procesos de relación, modelación, razonamiento, resolución de problemas y análisis de datos para comprender el mundo en cada uno de los contextos que lo conforman. Sin embargo, estos estudiantes presentan dificultades de aprendizaje en el tema de funciones y sus gráficas, causando que los estudiantes muestran poco interés y atención en la clase, limitaciones en el aprendizaje de los conceptos y poca comprensión del tema, perdiendo la motivación durante el proceso de resolución de problemas con funciones.

A partir de la revisión de la literatura, la observación participante, la encuesta a docentes (ver anexo 1) y la experiencia como docente de matemáticas en la institución, se evidencian las siguientes potencialidades:

1) Oportunidad para incorporar nuevas prácticas de enseñanza en clases presenciales y a distancia.
2) Fomentar la capacidad visual, destreza y la creatividad en los estudiantes para el desarrollo del pensamiento matemático.
3) Fortalecer los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de forma activa.

4) Oportunidad para fomentar discusiones estructuradas, no sólo de respuestas, sino también de conjeturas, predicciones y justificaciones de los estudiantes.

5) Pertinencia para implementar la modelación matemática en la solución de un problema matemático.

Además, se tienen presentes las siguientes dificultades observadas al realizar la triangulación entre la revisión del estado del arte, la encuesta docente y la experiencia en el salón de clase.

1) Problema de comunicación entre el lenguaje simbólico y su interpretación. (R Prada, C Hernández y L Jaime. 2017).

2) Dificultades para la representación gráfica y algebraica de funciones. (Díaz, Haye, Montenegro, Córdoba. 2016).

3) Dificultades de los estudiantes para la modelación y resolución de problemas contextualizados.

4) Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones. (Díaz M, Haye E, Montenegro F y Córdoba L. 2015).

5) Deserción en los estudiantes de básica media y superior debido a no aprobar las asignaturas relacionadas con el cálculo. (F Riveros, O Agudelo y E Páez. 2018).

A partir de lo expuesto anteriormente surge el siguiente **problema de investigación**:

¿Cómo favorecer los procesos de enseñanza -aprendizaje con relación a los conceptos de las funciones y sus gráficas en los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés?

Se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con relación a las funciones y sus gráficas.

Para resolver esta problemática se infiere como **objetivo general**: Mejorar la comprensión de los conceptos sobre funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas con sus propiedades, en los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

Se plantean los siguientes **objetivos específicos**:

- Establecer los parámetros y conceptos que se van a trabajar con relación a las funciones y sus gráficas.
- Evaluar la aplicación Desmos para la enseñanza -aprendizaje de las funciones y gráficas.
- Analizar el papel que podría jugar la aplicación Desmos al trabajar con problemas retadores.
- Formar un grupo o comunidad de profesores usando la aplicación Desmos.
- Construir e implementar actividades con un aprendizaje activo, que incluya un desarrollo de discurso matemático, brindando oportunidad para experimentar, comprobar y realizar conjeturas en la plataforma digital Desmos.

Acorde con el objeto y el objetivo, **el campo de acción** es el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas a través de la resolución de problemas en los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

Para dar cumplimiento al objetivo y la solución del problema de investigación se proponen las siguientes **preguntas de investigación**

- ¿Cuáles investigaciones contribuyen al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en las funciones y sus gráficas a través de la resolución de problemas en los estudiantes de grado once de básica secundaria?
- ¿Qué estrategias didácticas utilizar en la enseñanza y aprendizaje de la matemática con las herramientas digitales?
- ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus propiedades?
- ¿Cómo concebir un sistema de actividades para favorecer los conceptos y propiedades en la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas a través de la resolución de problemas en los estudiantes de grado once de básica media?
- ¿Cómo analizar los resultados del sistema de actividades para favorecer los conceptos y propiedades en la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas a través de la resolución de problemas en los estudiantes de grado once de básica media?

A partir de lo anterior y para desarrollar la presente tesis se plantean las siguientes **tareas de investigación**:

- Actualizar el estado del arte.
- Determinar los fundamentos teóricos que sustenta el trabajo de investigación.
- Seleccionar y aplicar la metodología de investigación.
- Diseñar un sistema de actividades en la plataforma Desmos para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas.

- Aplicar el sistema de actividades en la plataforma Desmos para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas en los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.
- Analizar y evaluar los resultados obtenidos en las actividades aplicadas a los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

El proyecto de investigación está constituido por: introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y los anexos. En el primer capítulo se expone el análisis del estado del arte. En el segundo capítulo se plantea el marco teórico sobre los fundamentos de la tecnología en la enseñanza de la matemática, fundamentos sobre las funciones y sus gráficas, la modelación como alternativa didáctica en la matemática y, por último, la teoría de la resolución de problemas. En el tercer capítulo se explica la metodología de investigación. En el cuarto capítulo se plantea la propuesta de estrategias para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de las funciones y sus gráficas en la plataforma Desmos. Finalmente, en el quinto capítulo se procede al análisis de resultados de las actividades.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este apartado se presentan de manera concisa algunos de los trabajos e investigaciones que son fundamentales para el desarrollo del presente proyecto a nivel práctico. Se busca cubrir de manera específica referentes sobre: El proceso de la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas; la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas por medio de herramientas digitales y, por último, las investigaciones sobre el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en línea. Para cada trabajo tenido en cuenta en esta descripción se consideran aspectos metodológicos, bibliográficos, estratégicos y recomendaciones de modo que sirva de fuente de ideas y contraste en esta investigación.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de la enseñanza y aprendizaje de funciones y sus gráficas.

En este apartado se enuncian las investigaciones más representativas en el campo de la educación con temas relacionados a las funciones y sus gráficas que con sus aportes permiten el desarrollo de la presente investigación.

1.1.1 Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato[2]

Matías Arce y Tomas Ortega (2014) realizaron un estudio de investigación de la Universidad de Valladolid (España) en tres Instituciones educativas en bachillerato, cuyos objetivos específicos son:

[2] Matías Arce y Tomas Ortega (2014). Deficiencias en el trazado de graficas de funciones en estudiantes de bachillerato PNA, 8(2), 61-73.

- Detectar las deficiencias más frecuentes en el trazado de las gráficas de funciones.
- Reflexionar sobre las limitaciones técnicas y las dificultades didácticas o cognitivas que pueden ocasionar estas deficiencias.
- Recomendar acciones didácticas que puedan subsanar estas deficiencias.

El estudio analizó las representaciones gráficas de funciones existentes en los cuadernos de matemáticas de estudiantes de varias aulas de Bachillerato. Donde encontraron deficiencias en el trazado de gráficas que se repiten en un alto número de estudiantes, relacionadas con los conceptos de función y asíntota, con el uso de las escalas en los ejes del diagrama cartesiano y con las características de algunas funciones.

Los documentos utilizados para realizar el análisis fueron las fotocopias de los cuadernos de los alumnos pertenecientes a este bloque. El estudio utilizó como técnica de investigación el análisis de contenido (Bardin, 1996; Krippendorff, 1990), técnica de interpretación de textos capaces de albergar un contenido que, leído e interpretado adecuadamente, nos permite conocer mejor diversos aspectos y fenómenos (Andréu, s.f.).

La investigación establece varias causas para la aparición de las deficiencias identificadas, de diferente naturaleza, que requerirían un tratamiento distinto para su superación.

- Pueden estar causadas por problemas del alumno al reproducir, a través de un deficiente trazado en la representación gráfica de la función sobre el papel, el comportamiento o propiedades de la función o sus elementos, que el alumno tiene correctamente interiorizados en sus esquemas conceptuales.

- Pueden reflejar un desconocimiento de cómo se traducen ciertas propiedades de la función en su representación gráfica.
- Pueden reflejar la existencia de errores en el esquema conceptual que el alumno tiene de conceptos como el de función, asíntota, o las características de determinados tipos de funciones.

Por último, sugieren algunas recomendaciones didácticas para los docentes; plantear tareas donde se proponga la formulación de propiedades de una función a través únicamente de su representación gráfica, con la presencia de casos donde exista alguna de las dificultades comentadas; proponer tareas donde los alumnos visualicen las diferencias que provoca la elección de escalas en la representación gráfica de una función y tareas donde, tras presentar una función verbalmente o a través de su expresión analítica, se discuta cuál es la escala más adecuada para su representación gráfica "*óptima*".

Este trabajo realiza aportes importantes para la presente investigación en cuanto a las deficiencias que presentan los estudiantes en el trazado de gráficas de funciones, estableciendo varias causas que provocan esas deficiencias y recomiendan a los docentes unas posibles estrategias didácticas para mejorar en la problemática presentada.

1.1.2 Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas.[3]

Este trabajo realizado por Díaz M, Haye E, Montenegro F y Córdoba L (2015) estudian las dificultades en la articulación de registros gráficos y algebraicos con relación a las funciones lineales y cuadráticas que se observaron en 109 ingresantes a carreras de ingeniería de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

Las actividades estaban diseñadas entre las conversiones algebraicas y gráficas (pasar de algebraico al gráfico o del gráfico al algebraico).

Las dificultades más notorias que presentaron los estudiantes en la investigación son:

- Conectar el parámetro $\boldsymbol{a}$ de la expresión $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ con la inclinación de la recta.
- La relación entre el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola.
- Establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.
- Pasar información de un registro gráfico a un registro algebraico.

Los datos obtenidos en este estudio revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas hay una considerable proporción de los estudiantes que no logró establecer una articulación espontánea y exenta de errores de sus representaciones, lo cual proporciona indicadores de la ausencia de una aprehensión conceptual de los objetos en estudio considerados.

[3] Díaz M, Haye E, Montenegro F y Córdoba L (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. Universidad Nacional de Litoral. Argentina.

Este proyecto de investigación tiene elementos importantes para el desarrollo del presente trabajo en cuanto a las estrategias planteadas en los problemas, al igual que permiten reconocer con claridad y detalle algunas dificultades que los estudiantes presentan al trabajar con funciones lineales y cuadráticas, tema fundamental para el presente estudio.

1.1.3 Comprensión de la noción de función exponencial por medio del tránsito por los distintos registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería[4]

La investigación realizada por Cupi Hernán (2018) tiene por objetivo "*cómo el tránsito por los distintos registros de representación semiótica favorece la comprensión de la noción de función exponencial en estudiantes de Ingeniería Ambiental de una universidad pública en Lima-Perú*"[5], con la metodología de la ingeniería didáctica.

El trabajo se justifica en cuatro aspectos: importancia de la función exponencial en el currículo, importancia de la función exponencial para modelar situaciones en contextos reales, importancia de la función exponencial dentro de la estructura matemática y la importancia de la comprensión de la noción de función exponencial mediante el uso de diversas representaciones semióticas para contrarrestar algunas dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático.

[4] Cupi Hernán (2018). Comprensión de la noción de función exponencial por medio del tránsito por los distintos registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería. (Tesis de maestría). Universidad Católica, Perú.
[5] Cupi Hernán (2018). Comprensión de la noción de función exponencial por medio del tránsito por los distintos registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería. (Tesis de maestría). Universidad Católica, Perú.

El trabajo muestra alguna de las dificultades que presentan los estudiantes universitarios con relación a las funciones exponenciales, las cuales son: dificultad para determinar una expresión analítica para la función exponencial; dificultad para graficar funciones exponenciales a partir de una expresión analítica o dentro de su dominio correspondiente; dificultad para pasar de una representación a otra sea gráfica, analítica o tabular.

El marco teórico que utilizó la investigación es la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS).

Una de las conclusiones de la investigación indica que este tipo de enseñanza, enfocada en favorecer los cambios de representación semiótica, promueve que los estudiantes mejoren su posición en los niveles de comprensión del concepto función exponencial.

Este proyecto de investigación tiene elementos importantes para el desarrollo del presente trabajo en cuanto a la importancia de modelar situaciones en contextos reales, la importancia de la comprensión de la noción de función mediante el uso de diversas representaciones semióticas, al igual muestra las dificultades que se le presenta a los estudiantes al trabajar con la temática de función exponencial, tema fundamental para el presente estudio.

1.1.4 La resolución de problemas para el aprendizaje de funciones[6]

El presente trabajo de investigación fue realizado por Acevedo M (2017) con el objetivo de analizar el aprendizaje conceptual sobre funciones desarrollado por los estudiantes de undécimo grado, porque con frecuencia se observa dificultades en el aula de clase sobre conceptos relacionados con funciones, en torno a que se resuelven ejercicios y no problemas, por este motivo, se hace necesario realizar un proceso de forma reflexiva y crítica sobre el proceso de enseñanza desde la resolución de problemas.

Para este estudio se utilizó la metodología cualitativa, los participantes fueron 30 estudiantes entre las edades de 15 y 16 años de la Institución Educativa San Luis Gonzaga, Antioquia (Colombia).

La investigación diseñó e implementó una estrategia didáctica basada en situaciones problemas en contextos de la vida cotidiana para aproximar a los estudiantes al concepto de función, función lineal, función cuadrática y función exponencial. También, se aplicó un cuestionario abierto, esto con la finalidad de comprobar la efectividad que tuvo la implementación de la estrategia didáctica basada en la resolución de problemas.

De acuerdo con el trabajo realizado recomiendan:

- Aplicar estrategias basadas en la resolución de problemas con el fin de disminuir las dificultades que se presentan en matemáticas.

[6]Acevedo Marín, G. F. (2017). La resolución de problemas para el aprendizaje de funciones.

- Realizar debates entre los estudiantes con discusiones abiertas de cada una de las actividades, donde puedan participar de forma activa y puedan fundamentar sus posiciones con las concepciones alternativas de los otros estudiantes y así retroalimentar sus conocimientos.
- Los docentes deben emplear métodos creativos, innovadores y prácticos que faciliten el aprendizaje de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas.

Esta investigación permitió concluir que, al emplear una estrategia basada en la resolución de problemas, hay un gran progreso para el aprendizaje de las funciones.

El estudio es pertinente para la presente investigación porque expone una metodología para la resolución de problemas de los estudiantes de grado undécimo en las clases de funciones, también dan algunas recomendaciones importantes que se van a tener en cuenta en el desarrollo de las actividades.

1.1.5 Improved engagement and learning in flipped classroom calculus[7]

Este estudio se realizó en Suecia por Kanbir S., Clements M.A., Ellerton N. F. (2018) en la universidad (KTH Royal Institute of Technology). El aula invertida es un modelo de enseñanza interactiva que se ha introducido con éxito en los últimos años en las matemáticas universitarias, donde los estudiantes participan activamente a través de discusiones y resuelven problemas u otras tareas. La idea es aprovechar el tiempo, toda la introducción, conceptos y cuestionarios se realiza por medio de videos e

[7] Mikael Cronhjort, Lars Filipsson, Maria Weurlander, Mejora de la participación y el aprendizaje en el cálculo de aula invertida, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, volumen 37, número 3, septiembre de 2018, páginas 113–121.

investigaciones fuera del horario de clase, mientras que en las clases se desarrollan problemas y preguntas que se trabaja de a pares con la idea profundizar en los temas.

El objetivo del presente estudio fue comparar el aprendizaje de los estudiantes entre la implementación del aula invertida y la enseñanza tradicional. Una de las conclusiones a las que llegaron es que los estudiantes aprenden más en las aulas de matemáticas invertidas, ya que el estudio reveló que los estudiantes de la clase invertida explican mucho mejor sus soluciones en comparación con los estudiantes de la clase magistral. Esto sugiere que los estudiantes de la clase invertida no sólo resolvieron los problemas, sino que entendieron lo que estaban haciendo y en mayor medida. Otra conclusión es que, aunque existen diferencias significativas entre los diferentes profesores en la forma en que utilizan los ejemplos y estimulan la comunicación con sus estudiantes, pero lo común es que se dedica poco tiempo a las discusiones entre pares y los estudiantes rara vez tienen tiempo para trabajar con problemas complejos.

El artículo es pertinente para este trabajo de investigación ya que realiza un estudio para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo con un enfoque de aula invertida, donde los estudiantes tienen la oportunidad de hacer discusiones y aumentar el tiempo en la resolución de problemas, elementos importantes para este trabajo.

1.2. La enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas por medio de herramientas digitales.

1.2.1. Representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función y sus propiedades en los estudiantes del grado undécimo[8]

Esta tesis fue presentada en la Universidad Antonio Nariño por Garavito E (2013), donde propone mejorar la interiorización del concepto de funciones cuadráticas, lineales y sus propiedades a través del desarrollo de actividades, en los estudiantes de once.

Estas actividades se sustentan en la teoría de representaciones semióticas con sus conversiones, y en la teoría de comunidades de práctica, donde se considera la visualización, modelación y el uso de la computadora como una herramienta didáctica. La aplicación de las actividades con problemas contextualizados, donde se propicia la implementación de varias representaciones: lenguaje natural, formal, numérico y gráfico en la solución de un mismo problema, para favorecer la construcción y articulación de los conceptos de funciones cuadráticas, lineales y sus propiedades.

Uno de los problemas expuestos en este trabajo va relacionado con el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, la problemática del estudiante para adentrarse en el aprendizaje matemático puede estar relacionada con la incapacidad de representar, o tratar de hacer conversiones de las representaciones dadas, pues las diferentes representaciones de los conceptos son fundamentales para su comprensión.

---

[8] Garavito E (2013). Representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función y sus propiedades en los estudiantes del grado undécimo. Facultad de Educación Matemática (Tesis de maestría). Universidad Antonio Nariño. Colombia.

También muestra la importancia en la enseñanza y aprendizaje de funciones cuadráticas, lineales y sus propiedades al integrar aspectos como los registros de representaciones semióticas, el proceso cognitivo de aprendizaje, la visualización, modelación, simulación, la semiótica y proceso didáctico.

Las recomendaciones que dan son:

- Continuar investigando en el uso de las conversiones semióticas para la construcción del concepto de funciones cuadráticas, lineales y sus propiedades.
- Implementar en las aulas de clase el uso de la tecnología como herramienta didáctica, para realizar más fácilmente diversas conversiones entre representaciones semióticas.
- Motivar a la discusión en la comparación de estrategias, al solucionar problemas contextualizados, a través de la modelación de situaciones problemáticas, para integrar diferentes representaciones de funciones cuadráticas, lineales y sus propiedades.

Este proyecto de investigación tiene elementos importantes para el desarrollo del presente trabajo en cuanto a las estrategias planteadas para la interiorización del concepto de función, como la visualización, modelación y el uso de la computadora como una herramienta didáctica, tema fundamental para el presente estudio.

1.2.2. Hawgent dynamic mathematic software as mathematics learning media for teaching quadratic functions[9]

Esta investigación realizada por Wijaya TT, Ying S, Chotimah S, Bernard M, Zulfah and Astuti (2020) muestra la importancia de implementar un software matemático y dinámico como medio de aprendizaje para la en la enseñanza de las matemáticas, porque:

- Aumenta la colaboración entre escuelas, docentes y estudiantes mediante el uso de dispositivos tecnológicos.
- Aumenta la calidad de la educación que está respaldada por software; mejorar la habilidad de los estudiantes en el uso de dispositivos tecnológicos.
- Se puede visualizar y analizar los gráficos.

De acuerdo con los estudios de las escuelas en Indonesia, el gráfico de función cuadrática es una lección para los estudiantes de secundaria. Debido a que es un concepto abstracto, los estudiantes tienen dificultades para comprender e imaginar las funciones gráficas. El objetivo principal de esta investigación es diseñar un medio de aprendizaje para mejorar los logros de aprendizaje de los estudiantes mediante el uso del software matemático dinámico Hawgent. La muestra de esta investigación fueron 32 estudiantes en clase experimental y 32 estudiantes en clase controlada. La validación del método es realizada por expertos en medios que son profesores que se especializan en software matemático utilizado como medio de aprendizaje en la

[9] Wijaya, TT, Ying, Z., Chotimah, S. y Bernard, M. (agosto de 2020). Software matemático dinámico de Hawgent como medio de aprendizaje de matemáticas para enseñar funciones cuadráticas. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1592, No. 1, p. 012079). Publicación IOP.

escuela secundaria y expertos en materiales que son profesores que enseñan y se especializan en temas para estudiantes de secundaria y preparatoria. En conclusión, el software es mejor que el método de enseñanza tradicional ya que los estudiantes pueden visualizar fácilmente la forma gráfica de la ecuación cuadrática y podrían generalizar. Esto aumenta automáticamente el logro de aprendizaje de los estudiantes y hace que sean más interesantes las matemáticas.

Esta investigación plantea elementos fundamentales para el desarrollo de este trabajo en cuanto al uso de un software dinámico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su importancia en la visualización, modelación y análisis de funciones y gráficas.

1.2.3. Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions[10]

Mushipe M y Ogbonnaya U (2019) elaboraron un estudio sobre el efecto de integrar GeoGebra con la enseñanza de funciones lineales para mejorar el rendimiento de los alumnos de 9° grado. El estudio se orientó por la teoría constructivista del aprendizaje con un diseño cuasiexperimental. Los participantes fueron 62 alumnos de dos escuelas en Limpopo Sudáfrica. El grupo de control fue de 29 alumnos de una escuela y el grupo experimental fue de 33 alumnos de la segunda escuela. GeoGebra se integró con la enseñanza en el grupo experimental mientras que al grupo de control se le enseñó tradicionalmente.

A partir de los hallazgos del estudio, se evidencio que los alumnos que fueron expuestos a GeoGebra (grupo experimental) obtuvieron mejores resultados en

[10] Mushipe, M. y Ogbonnaya, UI (2019). Geogebra y los logros de los alumnos de 9º grado en funciones lineales. University of South Africa, Pretoria. South Africa.

funciones lineales en comparación con aquellos que no fueron expuestos a GeoGebra (grupo de control), porque captó su atención e interés durante las lecciones de matemáticas, debido a que podían dibujar, comparar y analizar gráficos lineales con facilidad.

También el estudio muestra la importancia de implementar un software en la enseñanza de la matemática porque estimula la imaginación y desarrolla habilidades de pensamiento crítico al tiempo que permiten a los estudiantes desempeñar un papel activo en su propio aprendizaje.

Mushipe M y Ogbonnaya U (2019) concluyen que el uso de GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mejoró el rendimiento de los alumnos en funciones lineales y recomiendan que los docentes deben capacitarse en los aspectos pedagógicos tecnológicos para poder facilitar el aprendizaje matemático en un entorno de aprendizaje integrado de las TIC.

La investigación es pertinente para el presente trabajo de tesis por la metodología de investigación, la importancia de implementar un software en la enseñanza de la matemática y porque proporciona herramientas para que el estudiante desarrolle habilidades de pensamiento crítico con un aprendizaje activo.

1.2.4. Uso de los registros de representación semiótica para la elaboración de propuestas didácticas. El caso de la función lineal y cuadrática[11]

Esta propuesta investigativa elaborada por Fierro Ayala, Esquer Zarate, Ansaldo Leyva y Peralta García (2019) tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica para el

[11] Fierro, M., Esquer, M., Ansaldo, J., & Peralta, J. (2019). Uso de los registros de representación semiótica para la elaboración de propuestas didácticas. El caso de la función lineal y cuadrática.

caso de la función lineal y cuadrática a través de la conversión de registros de representación semiótica, utilizando situaciones en contexto extra matemático, la propuesta didáctica incluye el uso del software dinámico GeoGebra, para facilitar la comprensión de algunos registros.

El trabajo fue dirigido a estudiantes de Ingeniería, de diferentes edades y sexo que cursaban la materia de Fundamentos de Matemáticas en el Instituto Tecnológico de Sonora (México).

De acuerdo con la investigación, se observó que los alumnos tienen dificultades para resolver problemas de enunciado verbal que demandan interpretar y codificar situaciones mediante el uso de lenguaje algebraico, es decir, en las que el estudiante debe plantear ecuaciones lineales y cuadráticas y al momento de transitar de un registro de representación a otro.

Una de las conclusiones del trabajo es que la elaboración de la propuesta didáctica ayudó a los estudiantes a modelar y resolver problemas con el uso de funciones cuadráticas y funciones lineales en diferentes contextos. Además, el uso de los registros de representación favorece al estudiante a desenvolverse en la construcción y análisis del objeto bajo estudio.

Este artículo es interesante para este proyecto de investigación porque muestran cómo trabajan las actividades utilizando una herramienta digital, las dificultades que presentan los estudiantes no solo con la temática sino con la aplicación de la herramienta digital y cómo al usar los diferentes registros de representación favorecen en la interiorización del concepto de función lineal y cuadrática.

1.2.5. La aplicación de herramientas digitales con el enfoque onto semiótico y su influencia en el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas[12]

Esta propuesta investigativa elaborada por Ruiz J (2018) tiene como objetivo determinar la influencia de la aplicación de herramientas digitales con el enfoque onto semiótico, en el aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas en los estudiantes del Profesorado de Enseñanza Media en Ciencias especializado en Física-Matemática, para poder evidenciar los resultados cognitivos. La metodología que emplea la investigación es de enfoque cualitativo. La población de investigación es de 84 estudiantes siendo divididos en dos grupos en el primer grupo se aplicó el experimento, grupo 1 donde participaron 45 estudiantes y grupo 2 donde participaron 39 estudiantes.

La investigación primero realizó un pretest para medir los conocimientos fundamentales que tenían los estudiantes en los dos grupos acerca del tema de funciones exponenciales y logarítmicas, luego se realizó el postest donde se midieron los conocimientos que obtuvieron los estudiantes en los dos grupos después de recibir las orientaciones, es importante destacar que en el grupo uno se aplicó el experimento haciendo uso de herramientas virtuales con el uso del EOS, en los temas de funciones exponenciales y logarítmicas.

La investigación concluye que al correlacionar el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas con herramientas digitales haciendo uso del EOS, con

[12]Castillo, J. C. R. (2022). La aplicación de herramientas digitales con el enfoque onto semiótico y su influencia en el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas. *Revista Científica del Sistema de Estudios de Postgrado de la Universidad de San Carlos de Guatemala*, *5*(1), 15-23.

una enseñanza tradicionalista, se obtuvo excelentes resultados del grupo experimental con relación al grupo de enseñanza tradicional, demostrando que los resultados del pretest fueron superados en el postest, al aplicar las herramientas virtuales y el Enfoque Onto semiótico optimizando el aprendizaje y el rendimiento académico de los estudiantes.

Este proyecto de investigación es apropiado para el trabajo de grado porque señala que la aplicación de herramientas digitales puede ayudar a incrementar los conocimientos y así mismo el rendimiento académico de los estudiantes.

1.3. Investigaciones sobre el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en línea.

1.3.1. Teaching Cross-Listed Mathematics Courses Online[13]

Este estudio escrito por Laurie Battle, Atish J. Mitra, and H. Smith Risser (2020) analiza los desafíos que enfrentan los docentes al enseñar tres cursos en línea de lista cruzada (combinadas de pregrado y posgrado de nivel superior) que se impartieron en el verano de 2017 sobre el Álgebra lineal en Montana (Estados Unidos).

Los tres instructores enfrentaron problemas similares al diseñar los cursos:

- Presentar el material básico a un nivel adecuado para todo el grupo.
- Adaptar el material de un aula tradicional a la entrega en línea.
- Elección de métodos de evaluación.

[13]Laurie Battle, Atish J. Mitra, H. Smith Risser. (2020). *Teaching cross-listed mathematics courses online,* In Howard, J. P., & Beyers, J. F. (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics Online* (p. 3-16).
.

- Determinar un equilibrio apropiado de aprendizaje sincrónico y asincrónico.

Lo que surge de la experiencia común de enseñar estas tres clases son algunas de los problemas recurrentes que los docentes deben considerar al diseñar un curso en línea, las cuales son:

¿Cómo se deberá adaptar el contenido del curso para los estudiantes en línea?

¿Qué tecnología necesitarán los estudiantes y el docente?

¿Cómo se evaluará a los estudiantes a distancia?

¿Qué apoyo necesitarán los estudiantes?

Una conclusión a la que llegó el estudio sobre los cursos de matemáticas en línea es que pueden tener bastante éxito en los entornos de aprendizaje, porque ofrecen a los estudiantes una mayor flexibilidad y permiten que el curso se ofrezca a una audiencia sustancialmente mayor, en comparación con las presenciales. También sugieren, para que un curso de este tipo tenga aceptación implica un esfuerzo considerable y la participación del docente en términos de diseño del curso, preparación de conferencias en línea, uso de software apropiado y uso de técnicas de evaluación adecuadas.

Esta investigación realiza aportes fundamentales para esta tesis en cuanto a las dificultades que se pueden presentar en un curso en línea y dan algunas recomendaciones para cada uno de los problemas que se presentan, las cuales se van a tener en cuenta para las actividades que se trabajarán en la plataforma.

1.3.2. What Do We Know about Student Learning from Online Mathematics Homework?[14]

Por otro lado, Allison Dorko (2020) realiza una investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes universitarios a partir de tareas de matemáticas en línea en el área de cálculo, con el objetivo de informar la práctica, la cual realiza una lista de consideraciones para que los docentes que toman decisiones sobre las estructuras de tarea empleadas en sus clases sean exitosos.

Las cuales son: La tarea en línea tiene los mismos efectos en el rendimiento de los estudiantes, o aumenta ligeramente el rendimiento, en comparación con la tarea con papel y lápiz; Los estudiantes completan la tarea en línea a un ritmo mayor que el que completan la tarea con lápiz y papel; A los estudiantes les gusta tener tareas tanto en línea como en papel y lápiz, y los aspectos de ambos pueden ser importantes para el éxito de los estudiantes; los estudiantes se benefician al máximo de las tareas en línea o papel y lápiz cuando las califican y las devuelven con comentarios; Si emplea tareas tanto en línea como con papel y lápiz, tenga cuidado con la carga de trabajo total; Los estudiantes se frustran rápidamente con las plataformas de tareas en línea que dificultan el formato de las respuestas o son inconsistentes en el formato; Los estudiantes hacen más tareas cuando cuentan para la calificación del curso.

Una de las conclusiones a las que llego la investigación es que los docentes deben brindar a los estudiantes oportunidades para trabajar en tareas ricas y oportunidades

[14] Allison Dorko. (2020). *What Do We Know About Student Learning from Online Mathematics Homework,* In Howard, J. P., & Beyers, J. F. (Eds.), Teaching and Learning Mathematics Online (p. 17-42).

para explicar su pensamiento y sugiere que debe haber más investigaciones sobre qué y cómo aprenden los estudiantes de las tareas en línea, lo cual puede ayudarnos a mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Los hallazgos de Allison Dorko permiten identificar una estructura para las actividades o tareas en línea fuera del horario de clase y cómo los estudiantes se pueden beneficiar no solamente en su rendimiento sino también en su pensamiento crítico, lo cual se convierte en un elemento importante para la presente investigación debido a la metodología que se va a trabajar.

1.3.3. A Practical Guide to Discussions in Online Mathematics Courses[15]

El Proyecto investigativo elaborado por Glenn F. Miller y Kathleen H. Offenholley (2020) describe la mejor manera de dar a los estudiantes la oportunidad de participar en debates en línea, utilizando las ramas del pensamiento matemático.

La intención de los autores es proporcionar sistemáticamente un marco para crear buenas pautas de discusión en línea, de modo que los docentes puedan tener herramientas para encontrar elementos que necesitan para fomentar la discusión en sus clases. Este estudio se basa en los resultados de las preguntas enviadas a los profesores de matemáticas que enseñan en línea en universidades en los Estados Unidos. Se pidió a los docentes que describieran sus mejores y peores indicaciones de debate en línea y que escribieran sobre lo que consideraban esencial en un debate de matemáticas en línea. En total, respondieron 38 profesores. Consideramos que

[15] Gleenn F. Miller and Kathleen H. offenholley. (2020). *Apractical guide to discussions in OnlineMathematics Courses*, J. P., & Beyers, J. F. (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics Online* (p. 235-250).

cada respuesta es similar a una entrevista individual en un estudio cualitativo. La facultad escribió extensamente y proporcionó respuestas bien pensadas. Estaba claro que la mayoría de nuestros encuestados había pensado en lo que funcionó, lo que no funcionó y por qué.

Se categorizó en cinco grupos, los cuales son: 1. Síntesis y análisis: piense en conceptos clave que los estudiantes deberían poder comparar y contrastar o comunicarse en términos no técnicos. 2. Resolver problemas de contenido: piense en ciertas habilidades clave que podrían practicarse en línea en un formato colaborativo, con los estudiantes usando el trabajo de otros estudiantes como modelo para el suyo propio. 3. Aplicaciones de las matemáticas: piense en cómo se podrían aplicar las matemáticas y cómo personalizar los conceptos para sus alumnos. 4. Interacción social y emocional: piense en cómo los estudiantes pueden compartir sus sentimientos sobre las matemáticas con otros estudiantes, sin terminar en una nota negativa. ¿Qué fomentaría una mentalidad de crecimiento en torno al aprendizaje de las matemáticas? 5. Habilidades de estudio y consejos: piense en cómo los estudiantes comparten sus fortalezas e ideas con otros estudiantes, y cómo ayudarlos a comprender que trabajar duro en matemáticas es lo que los ayuda a mejorar.

La investigación concluye que el objetivo de los debates en los cursos en línea, es que los estudiantes sean capaces de hacer algo más que resolver problemas; deben poder pensar profundamente sobre estos problemas y compararlos y contrastarlos con otros, deben poder aplicar el conocimiento matemático, deben poder comunicarse sobre matemáticas con claridad y precisión, adquirir técnicas para el aprendizaje de las matemáticas, pero también aprender habilidades que pueden transferirse también a otras disciplinas.

Este artículo es interesante para este proyecto de investigación porque muestra elementos importantes para fomentar los discursos matemáticos estructurados en las clases presenciales o a distancia, debido a que aporta beneficios que promueven el conocimiento, la interacción, análisis y profundización en los temas.

1.3.4. Effects of a social regulation-based online learning framework on students' learning achievements and behaviors in mathematics[16]

Este estudio que se realizó en Taiwán (China) por Hwang G, Wang S y Lai C (2021) propone desarrollar un marco de aprendizaje en línea basado en la regulación social para guiar a los estudiantes a hacer referencia a las formas de autorregulación de otros estudiantes y planificar metas y estrategias de aprendizaje adecuadas para ellos mismos durante el aprendizaje en línea.

Los participantes de este experimento son estudiantes de primer grado de secundaria en el norte de Taiwán. Un total de 62 estudiantes de dos clases participaron en el estudio, y sus edades promedio fueron de 15 y 16 años. Una clase fue elegida al azar como grupo experimental y la otra clase fue el grupo de control. El grupo experimental con 32 estudiantes utilizó el marco de aprendizaje en línea basado en la regulación social para estudiar. La otra clase con 30 estudiantes fue el grupo de control, que utilizó el marco convencional de aprendizaje autorregulado para estudiar. Las dos clases

[16] Hwang, G. J., Wang, S. Y., & Lai, C. L. (2021). Effects of a social regulation-based online learning framework on students' learning achievements and behaviors in mathematics. *Computers & Education*, *160*, 104031.

fueron impartidas por el mismo maestro y estaban programadas para aprender el mismo contenido de aprendizaje y completar las mismas tareas en el mismo tiempo de aprendizaje.

En conclusión, de acuerdo con los resultados, el enfoque de aprendizaje en línea basado en la regulación social mejora los logros de aprendizaje de los estudiantes y las motivaciones de aprendizaje en matemáticas. También la investigación muestra que los estudiantes que utilizan el enfoque de aprendizaje en línea basado en la regulación social tienen comportamientos de aprendizaje en línea más positivos, como leer los materiales complementarios con respecto a las respuestas incorrectas. preguntas y revisar las notas.

Este proyecto de investigación tiene elementos importantes para el desarrollo del presente trabajo porque brinda a los estudiantes la oportunidad de intercambiar opiniones con otros y facilitar su aprendizaje autorregulado, de esta forma motiva y mejora los logros de aprendizaje en matemáticas.

Conclusiones del capítulo 1

De acuerdo con las investigaciones consultadas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas, enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas por medio de herramientas digitales y la enseñanza y aprendizaje de la matemática en línea se generan las siguientes conclusiones parciales:

- En la literatura revisada acerca de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las funciones y gráficas muestran algunas dificultades que presentan los estudiantes en la temática.

- Las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas están presentes en todos los entornos escolares del mundo.
- La importancia de incluir un software dinámico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su importancia en la visualización, modelación y análisis de funciones y gráficas.
- Los estudios sobre el enfoque de resolución de problemas en las matemáticas permiten identificar con claridad los errores que los estudiantes cometen mientras buscan soluciones a un problema planteado en el tema de funciones y gráficas, tema fundamental para el presente estudio.
- La importancia de fomentar los discursos matemáticos estructurados en las clases presenciales o a distancia entre pares, debido a que aporta beneficios que promueven el conocimiento, la interacción, análisis y profundización en los temas.
- El uso de diferentes estrategias didácticas e innovadoras para la enseñanza de las funciones y gráficas proporciona distintas formas de otorgarle el conocimiento al estudiante para encontrarle sentido y la importancia a lo que está aprendiendo.
- La bibliografía y referencias citadas en cada estudio son una guía para el proceso de investigación, ya que permiten encontrar artículos, tesis y libros relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las funciones y sus gráficas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este apartado se presenta los referentes conceptuales que son fundamentales para el desarrollo del presente proyecto, se tuvo en cuenta cuatro ejes: Fundamentos de la tecnología en la enseñanza de la matemática; Fundamentos sobre las funciones y sus gráficas; La modelación como alternativa didáctica en la matemática y la teoría de la resolución de problemas.

2.1. Fundamentos de la tecnología en la enseñanza de la matemática

2.1.1. Importancia de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas

Una característica de las matemáticas es su dimensión simbólica, la única forma de acceder a los objetos matemáticos es a través de representaciones. Duval (1999) señala que "*el uso de sistemas de representación semiótica para el pensamiento matemático es fundamental porque, a diferencia de los otros campos del conocimiento [científico] (botánica, geología, astronomía, física), no hay otra forma de acceder a los objetos matemáticos sino para producir algunas representaciones semióticas*"[17].

Las tecnologías digitales median en las matemáticas y ofrecen nuevos tipos de representaciones como, por ejemplo, las representaciones dinámicas. Por eso los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares establecen que: "*La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseña y mejora el aprendizaje de los estudiantes*"[18]. Hay

[17] Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds), Proceedings of the annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education. p.4

[18] NCTM—National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

muchas oportunidades para integrar la tecnología en los métodos de enseñanza, por ejemplo, las tabletas, los teléfonos inteligentes y el acceso a Internet pueden incorporarse de manera efectiva a la enseñanza. Selwyn (2011) indica que el uso de la tecnología individualiza y personaliza el aprendizaje.

Una de las herramientas más poderosas de la tecnológicas en la matemática es su capacidad de apoyar la visualización sobre los conceptos matemáticos como lo indica "*Las herramientas digitales apoyan la visualización de conceptos matemáticos en diversas formas de expresión y, como tal, pueden fomentar el pensamiento versátil, especialmente cuando estas representaciones están vinculadas dinámicamente*"[19]. Estas herramientas se pueden utilizar en la educación matemática en todos los niveles para modelar situaciones de la vida cotidiana y generar nuevos tipos de enseñanza.

2.1.2. Interrelaciones entre tecnología y matemáticas

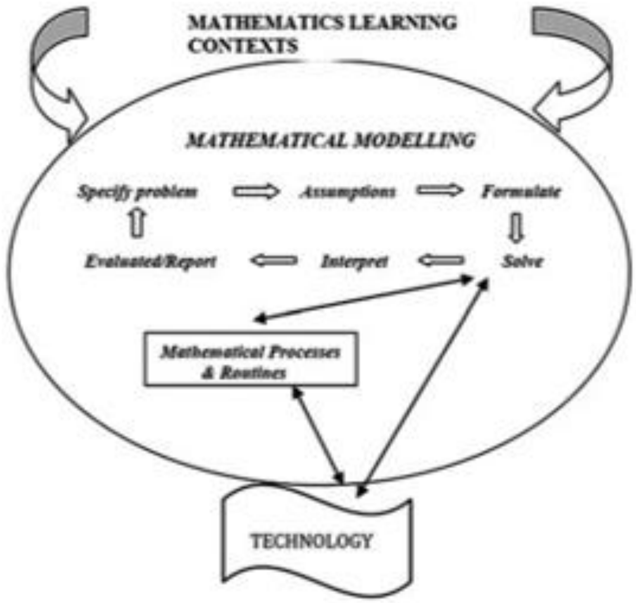
El proceso del aprendizaje matemático con la tecnología digital es activo porque puede incluir discusiones estructuradas, oportunidad para explorar, realizar conjeturas, comprobaciones y modelar situaciones cotidianas. Como lo asegura Hegedus (2017) "*Cambiar las interacciones parte del papel de las nuevas tecnologías es cambiar el proceso hacia un resultado para el aprendizaje. Este proceso incluye el desarrollo de un discurso matemático, brindando oportunidades para conjeturas y pruebas con un aprendizaje activo*"[20]. La tecnología y las herramientas digitales pueden interrelacionar a los estudiantes de diferentes maneras, aprender de diferentes formas, aplicar

[19] Selwyn, Ch 1: Revisiting the Promise of Digital Technology in Schools. In Schools and Schooling in the Digital Age: A Critical Analysis. Abingdon, UK: Routledge, 2011. p. 2
[20] Selwyn, Ch 1: Revisiting the Promise of Digital Technology in Schools. In Schools and Schooling in the Digital Age: A Critical Analysis. Abingdon, UK: Routledge, 2011. p. 2

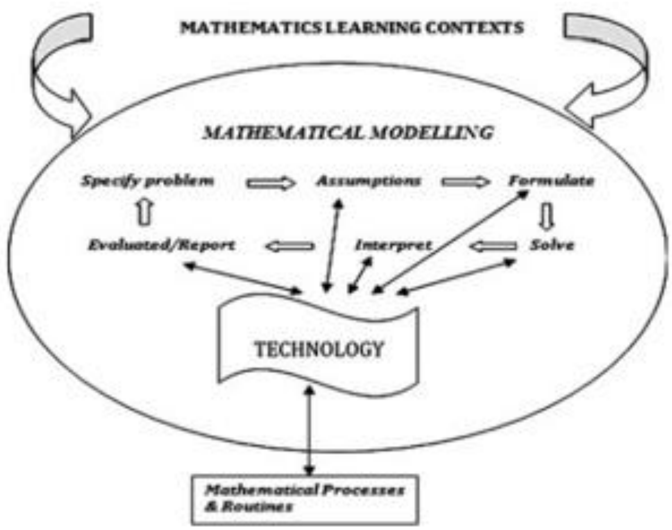
estrategias para solucionar problemas apoyándose en el trabajo de los demás a través de compartir videos o documentos.

Figura 1.

A. Uso de la tecnología al trabajar en problemas de modelación matemática.



B. Modelado matemático incluido el uso de la tecnología



Nota, En la figura 1 tenemos la gráfica de dos modelos matemáticos A y B, en el modelo A uso de la tecnología al trabajar en problemas de modelación matemática, se ve claramente que en este tipo de problemas se utiliza la tecnología solo para procesos matemáticos o rutinas. Si en la educación matemática se utiliza la tecnología solo para realizar procesos matemáticos, pues no tiene sentido utilizar la tecnología como lo expresa Greefrath (2016) "*Si la tecnología se usa simplemente como un medio para un fin, y los estudiantes no tienen que dar ningún comentario sobre los procesos matemáticos o las soluciones que han usado, el uso de la tecnología no tendrá ningún sentido*" [21]. Mientras que en la gráfica B el modelado matemático incluido el uso de la tecnología se puede observar que la tecnología se está relacionando con casi todos los elementos del modelo matemático. Aquí los estudiantes deben realizar diferentes tareas con las herramientas digitales, esto va a generar otro tipo de enseñanza donde los estudiantes realizan diferentes procesos como por ejemplo explorar, realizar pruebas, conjeturas, comprobaciones, debates o discusiones, lo cual les permite profundizar en los temas. De esta forma "*la tecnología a menudo no es solo una herramienta para hacer las matemáticas, sino un medio para expresar las matemáticas*" (Monaghan, 2004)[22].

Según Artigue (2002) [23] "*El uso de la tecnología permite a los estudiantes hallazgos multifacéticos, que no son controvertidos cuando se usan esas herramientas. Por tanto, las matemáticas se vuelven más significativas y liberan a los estudiantes de rutinas*". De esta forma se puede introducir nuevas técnicas que los estudiantes

---

[21] Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H-St, Weigand, H.-G., & Ulm, V. (2016). Didaktik der Analysis. Wiesbaden: Springer.
[22] Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology-based mathematics lesson. International Journal of Computers for Mathematical Learning.
[23] Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a re-flection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning.

requieren utilizar, aclarando que esas técnicas sean coherentes con la temática a enseñar.

2.1.3. La formación docente y la tecnología.

Para poder obtener la mejor enseñanza con la tecnología, es necesario que los docentes tengan buenos conocimientos de esta, porque si el docente no tiene buenas bases en la tecnología no se puede desenvolver en las actividades que se están trabajando con la ayuda de la tecnología y la enseñanza va a estar interrumpida, y mucho menos no podrá diseñar actividades donde los estudiantes puedan desarrollar y potenciar sus habilidades y conocimientos en las matemáticas.

Como lo han señalado Hegedus y Tall (2015) "*Un tema crítico a largo plazo será el desarrollo profesional de los docentes para comprender cómo utilizar estas nuevas herramientas, aprovechar las ventajas y posibilidades y comprender las implicaciones pedagógicas*"[24].

De acuerdo con los Estándares ISTE3-T (2008) definen cinco habilidades que los docentes "necesitan para enseñar, trabajar y aprender en la era digital":

(1) "*Los maestros utilizan su conocimiento de la materia, la enseñanza y el aprendizaje, y la tecnología para facilitar experiencias que promueven el aprendizaje, la creatividad y la innovación de los estudiantes*", (2) "*Los maestros diseñan, desarrollan y evalúan experiencias de aprendizaje y evaluaciones auténticas que incorporan herramientas y recursos* ", (3)" *Los docentes exhiben conocimientos, habilidades y procesos de trabajo*

[24] Hegedus, S., & Tall, D. O. (2015). Foundations for the future: The potential of multimodal technologies for learning mathematics. In L. English & D. Kirshner (Eds.), The third edition of the handbook of international research in mathematics education (pp. 543–562). New York, NY: Routledge.

*representativos de un profesional innovad*or ", (4) *Los docentes […] exhiben un comportamiento legal y ético en sus prácticas profesionales, y* (5)" *Los docentes mejoran continuamente su práctica profesional […], exhiben liderazgo en su escuela y comunidad profesional promoviendo y demostrando el uso efectivo de herramientas y recursos digitales*"[25].

También NCTM (2011) afirma que "*Los programas de formación docente y desarrollo profesional deben actualizar continuamente el conocimiento de la tecnología de los profesionales y su aplicación para apoyar el aprendizaje*"[26].

El cual enfatiza tres condiciones para una integración eficiente de la tecnología: la conciencia de los docentes sobre el valor agregado de la tecnología en términos de la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes, la actualización continua de los docentes de su conocimiento de la tecnología como su uso en la enseñanza y el diseño de recursos didácticos aprovechando las posibilidades de las herramientas digitales.

También es importante que los docentes puedan enseñar sus habilidades a sus alumnos sobre la tecnología, para que ellos sean eficaces y puedan concentrarse en resolver la temática para desarrollar sus conocimientos. Como lo afirma (UNESCO ICT, 2011) "*No basta con que los profesores tengan competencias en TIC y puedan enseñárselas a sus alumnos. Los maestros deben poder ayudar a los estudiantes a*

[25] ISTE Standards-T (2008). ISTE Standards Teachers. Online http://www.iste.org/standards/iste-standards/standards-for-teachers [Retrieved September 17, 2015]
[26] NCTM. (2011). Technology in teaching and learning mathematics. A position of the national council of teachers of mathematics. [Retrieved September 17, 2015]

convertirse en aprendices creativos, colaborativos y resolutivos mediante el uso de las TIC"[27].

2.2. Fundamentos sobre las funciones y sus gráficas.

La noción de función es una idea fundamental en matemáticas. Las funciones son la base de la mayoría de las aplicaciones matemáticas en casi todas las áreas del esfuerzo humano. En este sentido el concepto de función se va a trabajar como un modelo matemático desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal.

2.2.1. Definición de función.

Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo un elemento del segundo conjunto.

Por ejemplo, en la figura 1, se muestra una función entre un conjunto de polígonos y un conjunto de números. A cada polígono se le hace corresponder su número de lados:

[27] UNESCO ICT Competency Framework for Teachers. (2011). Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

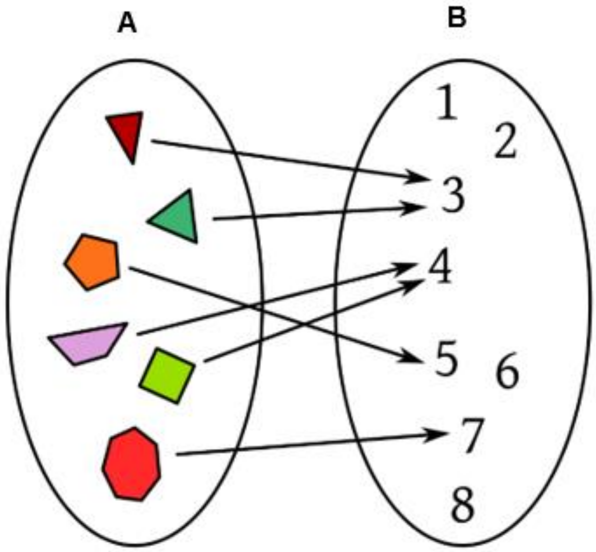


Figura 2. Ejemplo de función.

Al primer conjunto (el conjunto A) se le da el nombre de dominio.

Al segundo conjunto (el conjunto B) se le da el nombre de codominio.

Una función también puede ser vista como un aparato de cálculo. La entrada es el dominio, los cálculos que haga el aparato con la entrada son en sí la función y la salida sería el rango.

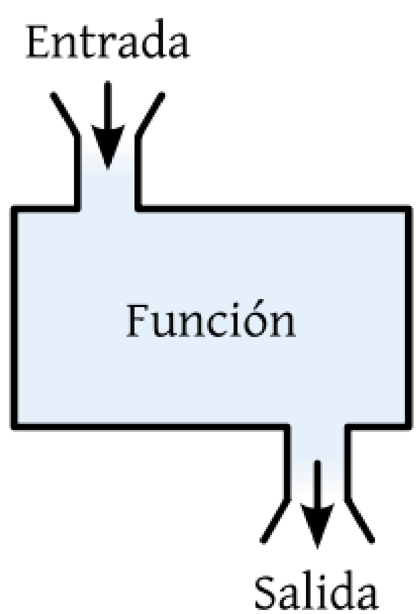


Figura 3. Otra forma de ver una función.

La gráfica de una función es el conjunto de puntos en el plano de la forma (x, y) en donde x está en el dominio de la función y además $y = f(x)$.

Una función puede representarse en forma gráfica, verbal, mediante una tabla de valores o algebraicamente.

2.2.2. La función lineal y su gráfica.

Una de las familias de funciones muy útil son las funciones lineales. Las funciones lineales son usadas en el estudio de las ciencias y para modelar problemas de la vida real. Estas situaciones son convertidas en ecuaciones matemáticas lineales que luego son resueltas usando varios métodos algebraicos o gráficos.

La pendiente m o inclinación de una recta no vertical que pasa por los puntos

$A: (x_1, y_1)$ y $B: (x_2, y_2)$ es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Una función de la forma $f(x) = mx$ se conoce como lineal, en la que m es su pendiente o razón de cambio de y respecto a x. Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen.

Una función afín es una traslación de una función lineal. Las funciones afines tienen la forma $f(x) = mx + b$, donde b determina el punto de corte de la recta con el eje vertical.

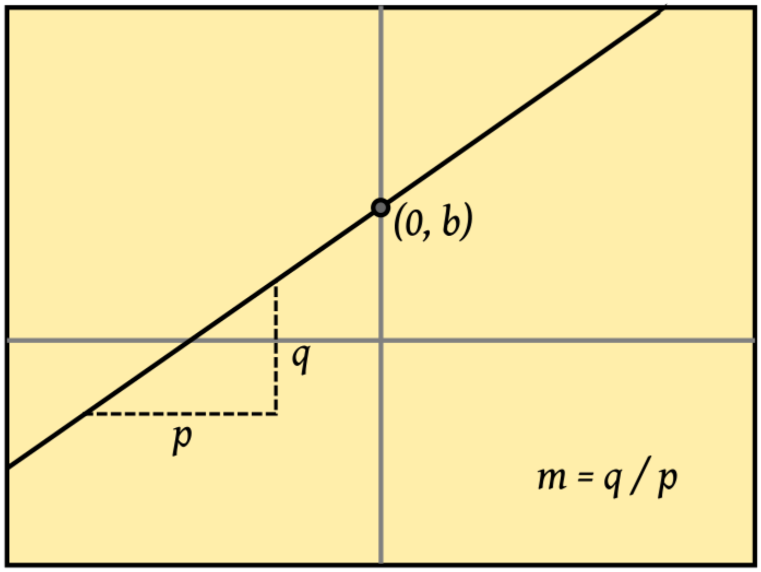


Figura 4. Gráfica de una función lineal.

La función $f(x) = mx + b$ puede ser:

Creciente si $m > 0$. Los valores de y aumentan a medida que x aumenta.

Decreciente si $m < 0$. Los valores de y disminuyen a medida que x aumenta.

Constante si m=0. La variable y toma un único valor.

2.2.3. La función cuadrática y su gráfica.

Las funciones cuadráticas son utilizadas en muchas áreas como en física, economía, medicina, biología, arquitectura, deportes y toda situación que involucre o describa una parábola. Porque son útiles para describir y modelar movimientos como la aceleración constante, trayectoria de proyectiles, ganancias, costos de empresas y obtener así información como, por ejemplo, los valores máximos o mínimos en alguna situación mencionada anteriormente.

Una función f es una función cuadrática en la variable x, sí y sólo si, $f(x)$ se puede escribir de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Si $a > 0$. La parábola abre hacia arriba.

Si $a < 0$. La parábola abre hacia abajo.

El vértice de la función cuadrática se puede determinar por $v = (-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right))$.

Su intersección con el eje vertical ocurre en el punto $(0, c)$.

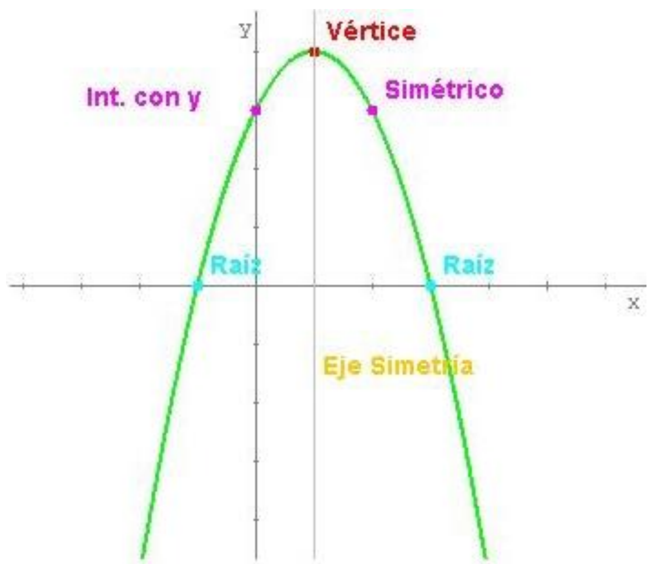


Figura 5. Gráfica de una función cuadrática.

2.2.4. La función exponencial y su gráfica.

Son útiles para describir y modelar un gran número de comportamientos de la vida cotidiana, por ejemplo, el crecimiento de algunas poblaciones, el crecimiento de un capital invertido a una determinada tasa de interés, el tiempo que tarda un material en disolverse, la tasa de disminución o decaimiento radioactivo de una sustancia. La función definida por $f(x) = a^x$, donde $a > 0$, $a \neq 0$ y el exponente x es cualquier número real, se denomina función exponencial de base a.

La función exponencial cumple con las siguientes propiedades.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = a$$

$$f(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$$

Características de las funciones exponenciales.

Su dominio es el conjunto de números reales. Su rango es el conjunto de números reales mayores de cero. Si $0 < a < 1$, entonces su gráfica tiene un comportamiento decreciente. Si $a > 1$, entonces su gráfica tiene un comportamiento creciente. Pasa por el punto $(1, a)$. Intercepto en el eje de y es igual a 1.

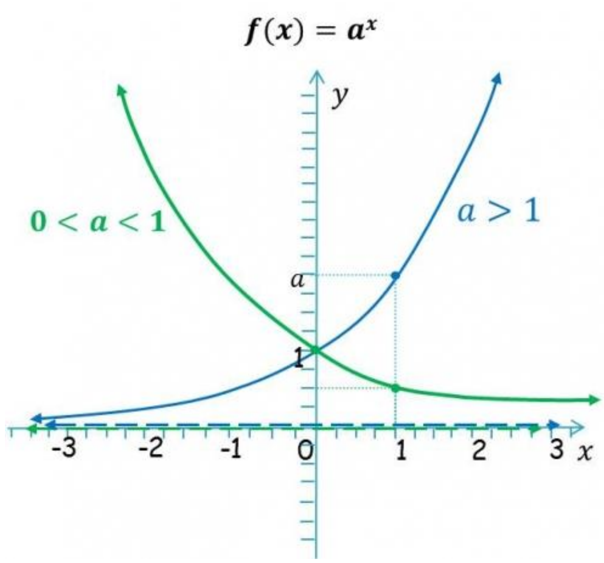


Figura 6. Gráfica de una función exponencial.

Un tipo especial de función exponencial se conoce como función exponencial natural, en el cual la base es el número irracional e. Este número cuya aproximación hasta las primeras cinco cifras decimales es $e = 2.71828$ resulta especial, ya que en muchas aplicaciones aparece de forma natural.

2.2.5. La función logarítmica y su gráfica.

En ecuaciones de tipo $a^x = b$, donde la variable x aparece como un exponente, se usa la función logarítmica para hallar el valor de x.

Las funciones logarítmicas son utilizadas en varias ramas, porque nos permiten modelar ciertas situaciones de la vida real. Por ejemplo, en astronomía para establecer la luminosidad visible de una estrella, en geología podemos usar escalas logarítmicas para medir las intensidades de terremotos (escala de Richter), en química para establecer la escala del pH, en música identificar la intensidad del sonido por medio de las escalas de los decibeles del sonido, entre otras más.

La función logarítmica de base a, con $a \in R^+$, $a \neq 1$, denotada por $f(x) = \log_a x$, se define mediante la equivalencia $y = \log_a x$, sí y sólo si, $a^y = x$.

La función logarítmica cumple las siguientes propiedades.

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(a) = 1$

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Si $\log_a(x) = \log_a(y)$, entonces, $x = y$.

Características de las funciones exponenciales.

Su dominio es el conjunto que hacen positivo la expresión dentro del logaritmo. Su rango es el conjunto de números reales. Si $0 < a < 1$, entonces su gráfica tiene un comportamiento decreciente. Si $a > 1$, entonces su gráfica tiene un comportamiento creciente. Pasa por los puntos $(1,0)$ y $(a, 1)$.

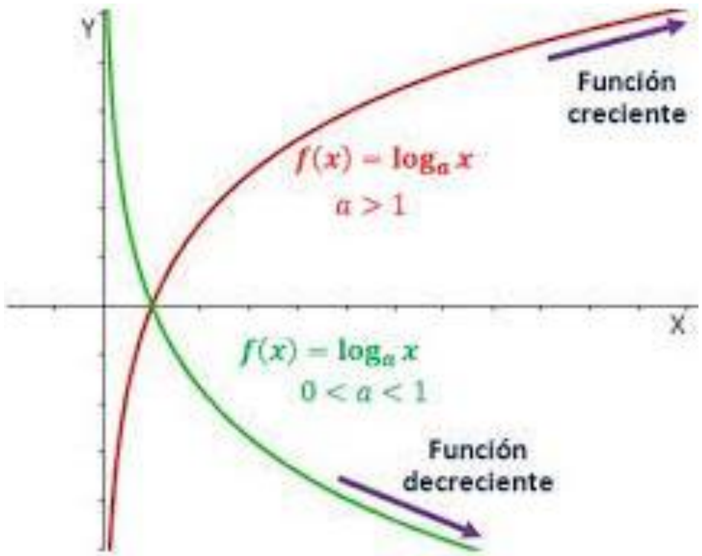


Figura 7. Gráfica de una función logarítmica.

Dentro de la familia de funciones logarítmicas son de uso frecuente:

El logaritmo en base 10, también conocido como logaritmo común, se denota omitiendo la base, así: $\log x = \log_{10} x$.

El logaritmo en base e, se conoce como logaritmo natural y se denota así:

$\ln x = \log_e x$.

2.3. La modelación como alternativa didáctica en la matemática.

Un modelo matemático se puede aproximar como una representación simplificada, a través de ecuaciones, funciones o fórmulas matemáticas, de un fenómeno o de la relación entre dos o más variables. Por ejemplo, el MEN (2006) plantea que: "Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo". [28]

Como proceso de la modelación matemática, Villa y Ruiz (2009)[29] afirman que se fundamenta en los lineamientos curriculares de matemáticas desde varios aspectos: La modelación como una necesidad generada por los desarrollos de la tecnología que permean la sociedad; La modelación como una forma de describir las interrelaciones entre el "mundo real" y las matemáticas; Como una actividad involucrada en la "solución de problemas reales" que implica procesos de simplificación, idealización y estructuración de las "situaciones reales", que luego de ser matematizadas arrojan como resultado la construcción de un modelo matemático.

[28] Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio. p. 52
[29] Villa, J. y Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, (27), 1-21.

Frente al rol que asume el docente en el desarrollo del proceso de modelación matemática Biembengut y Hein (2004) afirman:

"Para implementar la modelación matemática en la enseñanza, el profesor actúa en dos tipos de abordajes: el primero, le permite desarrollar el contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las más diversas áreas del conocimiento y el segundo orienta a sus alumnos para que hagan un trabajo de modelaje. La modelación puede ser implementada en cualquier nivel de escolaridad: desde el ciclo primario hasta la licenciatura"[30].

Una alternativa didáctica para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas es resolver problemas de la vida cotidiana aplicando la modelación matemática, debido a que es muy importante por la relación que hay entre las matemáticas y su entorno, donde los estudiantes pueden ver la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas en situaciones cotidianas y diversas.

La propuesta didáctica pretende que el estudiante analice, describa, e interprete gráficos, ecuaciones, tablas de valores, enunciados verbales y además en el modelado matemático pueda distinguir las variables y relaciones entre ellas, tratando de hacer más interesante y dinámico el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas, tema de investigación.

[30] Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación matemática, 16(2), 105-125. p. 108

2.4. Teoría de la resolución de problemas

Los profesores en su práctica docente evidencian que los estudiantes presentan diferentes dificultades de aprendizaje en las matemáticas y que muchas de ellas se solucionan con el diseño, elaboración y aplicación de recursos, herramientas, materiales y estrategias, diseñadas por expertos que quieren aportar en la solución de esas dificultades.

La resolución de problemas contribuye a superar esas dificultades. Esta teoría va más allá de realizar un procedimiento y encontrar una respuesta, se trata de situaciones con un nivel de dificultad, que permite que el estudiante coloque todas sus capacidades y conocimientos sobre el tema, lo cual genera motivación y se convierte en un desafío para el estudiante.

En la teoría de resolución de problemas son varios autores que se destacan por realizar aportes fundamentales y que a través de la historia han elaborado diferentes investigaciones: Polya (1965), Ballester et al. (1992), Schoenfeld (1985), Campistrous y Rizo (1996), Lesh y English (2005), Cruz (2006), Lesh y Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012). Además, con sus aportes, permiten que otros estudios tomen sus contribuciones para solucionar diferentes dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Antes de enmarcar la teoría se darán algunas definiciones del concepto de problema.

2.4.1. El problema.

Varios autores dan un acercamiento a la definición sobre ¿Qué es un problema? "*Para que una situación constituya un problema para una persona, debe estar enterada de* *la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación*". Teaching and Learning Mathematics, F. Bell, (1978)[31].

De igual forma Polya (1945) dice que "*Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata*"[32].

Para Mosquera (2017) un problema es *"una situación enfrentada por un individuo o grupo, que presenta una oportunidad de poner en juego los esquemas de conocimiento y en la que se deben hallar interrelaciones expresas y tácitas entre un grupo de factores o variables, lo que implica la reflexión cualitativa, el cuestionamiento de las propias ideas, la construcción de nuevas relaciones, esquemas y modelos mentales"*[33].

Uno de los esfuerzos del docente de matemáticas debe ser el de propiciar situaciones para que sus estudiantes piensen, analicen y sean creativos para resolver problemas, generando en ellos una atracción y gusto no solo para aprender sino para hacer matemáticas.

2.4.2. Problema reto.

Para Pérez (2004) un problema reto "*Es aquel que invita a que el estudiante piense de manera autónoma, indague, cuestione, razone y pueda explicar su razonamiento*". Por otra parte, Pérez (2004) plantea que "*Los problemas retadores exigen la integración*

[31] Bell, F. H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary schools)*. WC Brown Company.
[32] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas.p. 28.
[33] Mosquera. H. E. (2017). Desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas, a través de la resolución de problemas. (Tesis de pregrado) Facultad de educación. Universidad de Antioquia.

de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática”[34].

Un problema retador también debe dirigir su atención a *“Hacer que el estudiante piense productivamente, desarrollar su razonamiento, enseñarle a enfrentar situaciones nuevas, darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática, hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes, equiparlo con estrategias para resolver problemas y darle una buena base matemática”*[35].

Por otra parte, Falk (1980) señala que los problemas retadores son estimulantes para el estudiante y debe tener estas tres características:

1. *“Debe ser una situación que estimula el pensamiento.*
2. *Que sea interesante para el alumno.*
3. *La solución no debe ser inmediata”*[36].

Los problemas retadores propician en los estudiantes creatividad y originalidad, su desarrollo le exige responsabilidad y compromiso. Estos elementos son fundamentales para que las actividades diseñadas conduzcan al estudiante a mejorar la comprensión acerca del concepto de función mediante la resolución de problemas.

2.4.3. Resolución de problemas.

Cuando se habla de resolución de problemas se puede definir como la estrategia didáctica usada para encontrar una solución viable a un ejercicio matemático. Polya

[34] Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

[35] Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de marzo de 2021 de la URL: http: www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/

[36] Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.p. 16

(1965), afirma que "… *resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados*"[37].

Por su parte Garret (Citado por García, 1998) define la resolución de problema como "*Una actividad de aprendizaje, compleja, que incluye el pensar…, y que, además, … puede ser descrita como un proceso creativo, ya que solucionar problemas es pensar creativamente… y… hallar una solución a un problema, es un acto productivo*"[38].

Sriraman y English (2010), citando a Schoenfeld, recomiendan que la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática es factible para:

- Propiciar en los estudiantes una habilidad para utilizar estrategias que lo vinculen con el contexto.
- Fomentar en los estudiantes estrategias metacognitivas para que se apropien del contenido matemático.
- Mejorar las creencias que tienen los estudiantes acerca de su entorno.

En los Lineamientos pedagógicos y curriculares para el área de matemáticas (1998) del Ministerio de Educación Nacional (MEN), se plantea que la elaboración y resolución de problemas permite adquirir objetivos relevantes en el proceso de construcción del conocimiento matemático, los cuales son:

[37] *Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas*

[38] García, J. (1998). *Didáctica de las ciencias*. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Grupo Impresor. Colombia. pp.15. Recuperado 12 de febrero de 2021 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191

- *“Desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas.*
- *Provocar procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; nos estamos refiriendo precisamente a los procesos del pensamiento matemático: la manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares); la formulación de conjeturas (núcleo del razonamiento matemático, proponer sistemáticamente afirmaciones que parecen ser razonables, someterlas a prueba y estructurar argumentos sobre su validez); la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistemáticamente sobre ella); y la argumentación.*
- *Investigar comprensión de conceptos y de procesos matemáticos a través de: reconocimiento de ejemplos y contraejemplos; uso de diversidad de modelos, diagramas, símbolos para representarlos, traducción entre distintas formas de representación; identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos, verificación de resultados de un proceso, justificación de pasos de un proceso, reconocimiento de procesos correctos e incorrectos, generación de nuevos procesos, etcétera.*
- *Investigar estrategias diversas, explorar caminos alternos y flexibilizar la exploración de ideas matemáticas”[39].*

[39]Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio. p. 53.

Para lograr estas metas los estudiantes tienen que discutir sus ideas, analizar y comprobar las posibles soluciones por medio de argumentos, ejemplos o contraejemplos matemáticos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas.

2.4.4. Método IDEAL para la resolución de problemas.

Una de las cuestiones importantes sobre las estrategias de resolución de problemas es que no todos los estudiantes desarrollan una resolución de problemas adecuada. Sin un modelo paso a paso para identificar o resolver un problema, muchos de ellos usan comportamientos que no les deja concentrar y pierden el interés en resolverlo, por tal motivo se busca un método que ayude a los estudiantes a establecer un problema, generar algún tipo de solución y avanzar de manera rápida y eficiente.

Algunos teóricos argumentan que hay varios componentes en el proceso de resolución de problemas (Bransford y Stein, 1993; Gick, 1986; Pugalee, 2004; Bransford, Sherwood, Vye y Rieser, 1986; Polya, 1954), pero con el propósito de este estudio, se enfatizará cinco componentes: identificar, definir, explorar, actuar y lograr. Esto también se conoce como el enfoque IDEAL para la resolución de problemas (Bransford & Stein, 1993).

El modelo IDEAL que presentamos es un organizador de ideas para abordar de manera sistemática situaciones problemáticas. Funciona bien a nivel personal, pero tiene mayor potencial cuando es necesario ordenar las ideas de varios, con intereses y puntos de vista diversos, como por ejemplo en esta investigación.

Las etapas de resolución de problemas IDEAL se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Las etapas del método IDEAL

Etapas de IDEAL	Descripción
Identificar el problema	Comprender los problemas en general y dividirlos en varias partes.
Definir metas	Establecer metas a alcanzar.
Explorar posible estrategias	Busque varias soluciones alternativas a los problemas y realice estudios sobre cada alternativa desde diferentes perspectivas.
Anticipe resultados y actúe	Elija una solución y resuelva el problema de acuerdo con la estrategia elegida.
Logros, observación y evaluación.	Ver el partido entre los objetivos a alcanzar y los resultados obtenidos y aprender de las estrategias utilizadas para resolver los problemas.

2.4.5. Componentes cognitivos en la resolución de problemas.

El proceso de resolución de problemas forma parte del proceso cognitivo de individualización que lleva a cabo cada alumno. A pesar de ser un proceso interno, aún implica comunicación. Los procesos de individualización y comunicación están reflexivamente interrelacionados (Sfard, 2007). Las metodologías cognitivas analizan cómo los estudiantes resuelven problemas matemáticos (Presmeg, 2016). El propósito del análisis cognoscitivo es observar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas no solo por los resultados que obtienen sino también por las palabras utilizadas, las rutinas realizadas y las narrativas visuales y los mediadores utilizados para resolver el problema.

El discurso es la comunicación de ideas, información, etc., especialmente el habla o conversación (Neufeldt & Guralnik, 1988). El discurso puede ocurrir cuando a alguien se le presenta un problema y trata de resolverlo. Esto sucede porque al tratar de resolver problemas matemáticos, las habilidades discursivas de la persona cambian a un nuevo formato de comunicación. Los componentes examinados como parte del análisis en este trabajo fueron el uso de palabras, los mediadores visuales, las narrativas sustentadas y las rutinas. Los indicadores de los componentes se describen en la tabla 2.

Tabla 2: Indicadores de los Componentes Cognitivos Utilizados en la Resolución de Problemas Matemáticos

Componente Cognitivo	Indicador
Uso de palabras	Escribe y recita palabras que incluyen términos algebraicos, numéricos y geománticos, ecuaciones y otros términos utilizados por los estudiantes para resolver problemas matemáticos.
Mediador visual	Utiliza objetos como gráficos, imágenes, diagramas y otros en la resolución de problemas matemáticos.
Narrativa	Describe hechos matemáticos como axiomas, definiciones y teoremas que utilizan los estudiantes para resolver problemas matemáticos.
Rutinas	Explica los pasos seguidos para resolver los problemas propuestos.

2.5. ¿Por qué escoger Desmos?

Objetivo: Ver la importancia de implementar la plataforma digital Desmos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Se hace una revisión de varias aplicaciones y software libres como GeoGebra, Sage, Desmos, Matematics entre otros.

Al comparar las aplicaciones, en general son muy parecidas, son fáciles de utilizar, al escribir los símbolos matemáticos, la calidad y versatilidad que tienen es muy buena, son de carácter abiertos y gratuitos, se pueden grabar, compartir trabajos y materiales educativos por medio de foros o redes sociales.

Desmos es una plataforma con la filosofía de que todos los estudiantes aprendan matemáticas y se diviertan haciéndolo. Más de 40 millones de docentes y estudiantes de todo el mundo utilizan anualmente el conjunto gratuito de softwares de herramientas de matemáticas de Desmos. Además de tener un Software, Desmos maneja una plataforma con una tecnología de punta que impulsa actividades digitales gratuitas para aulas, y abren un mundo de posibilidades para que los estudiantes exploren conceptos más profundamente, trabajen en grupo, resuelvan problemas y apliquen el conocimiento de manera creativa como matemáticos.

Para crear una actividad cuenta con 10 herramientas que se pueden combinar las cuales son; gráfico, mesa, bosquejo, medios de comunicación, notas, entradas, elección y casillas de verificación, graficar calc, deslizamientos de canicas y tipo de tarjeta.

Conclusión.

La plataforma digital Desmos posibilita trabajar una amplia gama de actividades y problemas, aplicando la modelación, también situaciones dinámicas que motive y aporte beneficios que promueven el conocimiento, interacción, análisis, comunicación y profundización. También, los docentes tienen la oportunidad de ser creativos en el diseño de actividades, compartirlas, modificarlas o utilizar las más interesantes para el provecho del alumnado.

Conclusiones del capítulo 2

Lo que se pretende en este trabajo de investigación es el diseño y aplicación de un sistema de actividades en la plataforma digital Desmos, enfocadas a que el estudiante analice, describa, e interprete gráficos, ecuaciones, tablas de valores, enunciados verbales, realice discusiones y además resuelva problemas de aplicación, para mejorar sus dificultades de aprendizaje en los temas. Para ello se asume las siguientes posturas del marco teórico anteriormente expuesto.

Incluir el uso de la tecnología en el modelado matemático, para que los estudiantes realicen diferentes tareas y procesos con las herramientas digitales como por ejemplo explorar, realizar pruebas, conjeturas, comprobaciones, debates o socializaciones, lo cual les permite profundizar en los temas.

Respecto al contenido principal y base de la propuesta, esta investigación asume el concepto de función, la función lineal, la función cuadrática, la función exponencial y la función logarítmica.

Una alternativa didáctica para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas es resolver problemas de la vida cotidiana aplicando la modelación matemática, debido a que es muy importante por la relación que hay entre las matemáticas y su entorno, donde los estudiantes pueden ver la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas en situaciones cotidianas y diversas.

El método IDEAL y los componentes cognitivos se van a tener en cuenta en el análisis de resultados de las actividades, es decir, no solo por los resultados que obtienen sino también por las palabras, las rutinas, las narrativas y los mediadores visuales utilizados para resolver los problemas.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se expone, el diseño metodológico que se compone del tipo, enfoque de investigación y diseño, la población y muestra o unidad de análisis, los métodos de recolección de información (instrumentos) y las fases de investigación pertinentes para dar solución a la problemática planteada.

3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

La metodología que se implementa en la tesis se delimita dentro de los parámetros de una investigación de enfoque cualitativo. Este tipo de investigación es una actividad sistemática, que se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones (Sampieri, Collado, Lucio & Pérez (1998). El enfoque de investigación cualitativo *"… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[40].

Por su parte, Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2014) plantean que "… el proceso cualitativo no es lineal, sino iterativo o recurrente; las supuestas etapas en realidad son acciones para adentrarnos más en el problema de investigación y la tarea de recolectar y analizar datos es permanente"[41]. Bajo estas ideas se aborda el proceso investigativo de la enseñanza y aprendizaje de las

[40] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 358.
[41] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 356.

funciones y sus gráficas en estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

Además, la investigación se estructura bajo un diseño de investigación acción, este diseño *"… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría"*[42].

Con respecto al diseño de investigación acción Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2014) expresan que *"Su precepto básico es que debe conducir a cambiar y por tanto este cambio debe incorporarse en el propio proceso de investigación. Se indaga al mismo tiempo que se interviene"*[43]*.* Por lo que se infiere que este diseño permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente relacionado con la construcción de los conceptos de las funciones y sus gráficas.

El presente trabajo de tesis pretende un robusto conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática relacionado con las funciones y sus gráficas, en un grupo de estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de funciones y gráficas en estudiantes del grado once se fortalece con los aportes que ofrece el diseño de investigación acción, ya que propicia la experimentación, búsqueda y exploración del conocimiento

[42] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.
[43] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 496.

matemático, que a la vez estimule y genere discursos matemáticos. Este proceso le permite al estudiante plantear, expresar, comprobar y profundizar sus ideas

3.2. Población y muestra (Unidad de análisis)

Un aspecto importante para el desarrollo del proyecto de investigación es la población, que en este caso son los estudiantes del colegio Liceo Piñeros Cortés ubicado en la localidad de Kennedy en Bogotá. El Colegio en la actualidad tiene más 250 estudiantes, en preescolar, básica primaria y básica secundaria. La unidad de análisis a quién va dirigido el sistema de actividades es el grupo de estudiantes del grado once, conformado por 20 estudiantes, 11 niñas y 9 niños entre las edades de 16 a 17 años.

3.3. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados

En este proyecto de investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas con sus propiedades.

Análisis-Síntesis: para elaborar el estado del arte y para determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones y gráficas. Además, se utiliza para la construcción de los fundamentos teóricos y en el análisis para sintetizar los resultados de las actividades relacionados con las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, lo que permite la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.

Entre los **métodos empíricos** se tiene:

La **observación participante**: se realiza la observación de clases y otras actividades docentes, para obtener información del nivel de conocimientos que poseen los estudiantes sobre las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.

3.4. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se establecieron las siguientes fases:

- **Fase 1: Detección, conocimiento y clarificación del problema de investigación.** En esta fase se evidencian los siguientes elementos:
  1. Diseño de instrumentos: observación participante y encuesta a docentes utilizando el método Delphi.
  2. Planteamiento inicial del problema de investigación y el objetivo general.
- **Fase 2: Revisión de la literatura**. En esta fase se realiza una búsqueda detallada del estado del arte, la cual permite confirmar el problema de investigación, reestructurar el objetivo general y determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones y sus gráficas.
- **Fase 3: Construcción del marco teórico**. En esta fase se determina el marco teórico de la tesis, basado en:
  1. Fundamentos de la tecnología en la enseñanza de la matemática.
  2. Fundamentos sobre las funciones y sus gráficas.
  3. La modelación como alternativa didáctica en la matemática.
  4. Teoría de la resolución de problemas.
- **Fase 4: Diseño y estructuración del sistema de actividades.** En esta fase se realiza el diseño y elaboración de seis actividades las cuales se detallan en el capítulo 4 de la tesis.

- **Fase 5: Implementación y análisis de resultados**. En esta fase se realiza las siguientes acciones:
  1. Aplicación de las actividades a los estudiantes de grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.
  2. Recogida de la información.
  3. Aplicación de la encuesta de satisfacción a estudiantes sobre la implementación de la plataforma digital Desmos para la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas.
  4. Elaboración del documento escrito.
  5. Socialización de los resultados obtenidos.

Conclusiones del capítulo 3

El planteamiento de la metodología de investigación para la tesis se sitúa dentro de los parámetros de una investigación de enfoque cualitativo y orientado al tipo de diseño de investigación acción. Es importante resaltar que en la investigación se utilizan métodos del nivel teórico como el Histórico-lógico y el análisis-síntesis y también empíricos como la observación participante.

En este estudio cualitativo la unidad de análisis tomada para la investigación son los estudiantes de grado once de bachillerato del colegio Liceo Piñeros Cortés.

Además, esta metodología, permite el análisis de los resultados del sistema de actividades relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas en los estudiantes, la elaboración de las conclusiones y las recomendaciones.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

En este capítulo se expone la propuesta y organización del sistema de actividades dirigidas a los estudiantes de grado once, con el objetivo de mejorar la comprensión de los conceptos básicos y propiedades sobre las funciones y sus gráficas, al igual que la importancia de la modelación matemática y la resolución de problemas.

4.1. Estructura de las actividades

Las actividades sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones y gráficas, que se muestran en este capítulo, pretenden mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en las matemáticas, contribuyendo al desarrollo de habilidades matemáticas, como el uso del discurso matemático, la modelación matemática, el análisis e interpretación de gráficas y la resolución de problemas.

En esta investigación se implementaron 5 actividades y un proyecto por medio de la plataforma digital Desmos, basadas en la temática básica de funciones y sus gráficas, cada actividad se divide en tres partes, explicadas a continuación:

Introducción del tema: Primero se les presenta un problema a los estudiantes, con la idea de que puedan ver la importancia del tema, luego se les propone situaciones donde ellos deben experimentar y sacar conclusiones, desarrollar desafíos y resolver problemas de aplicación. Posterior al trabajo, se socializan las soluciones de algunos estudiantes en la clase siguiente para realizar discusiones matemáticas e interiorizar conceptos y propiedades de las funciones.

Aplicación del tema: Aquí los estudiantes deben resolver problemas con la modelación matemática y abordar desafíos más complejos. Posteriormente del trabajo realizado, se analiza y socializan las soluciones de algunos estudiantes.

Resolución de problemas: Se propone a los estudiantes resolver problemas más complejos, que los estimulen a repasar, indagar y examinar, para comprender y debatir el problema que se presenta; con la finalidad de que sean creativos y competentes para encontrar una solución y la socialicen.

Temas sobre las funciones y sus gráficas: El contenido propuesto para el desarrollo de las actividades con funciones y sus gráficas es: Introducción a las funciones; La función lineal en el mundo real; La función cuadrática en el mundo real; La función exponencial en el mundo real; La función logarítmica en el mundo real y por último un proyecto sobre la replicación de una imagen con funciones en Desmos.

El sistema de actividades se dirige a lograr un robusto proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos y propiedades de las funciones y sus gráficas.

4.2. Propuesta del sistema de actividades

Seguidamente, se presentan cada una de las 5 actividades diseñadas y el proyecto, Las actividades se estructuran en título, objetivo, sugerencias metodológicas, introducción del tema y desarrollo de la actividad divididas en las tres partes mencionadas anteriormente.

4.2.1. Actividad 1. Introducción a las funciones

Objetivo: Introducir el concepto de función y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, aplicando varias situaciones matemáticas.

Metodología de la actividad: Primero en clase presencial se le da el código a los estudiantes para que puedan ingresar a la plataforma digital Desmos, donde se encuentra la actividad 1, para que sea resuelta de forma individual en casa. El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y resolverá dudas e inquietudes. Se estipula un tiempo de 2 clases para el desarrollo de la actividad.

Se proponen diferentes situaciones matemáticas con el objetivo de que los estudiantes usen las herramientas digitales, analicen gráficas y tablas, modelen situaciones y puedan realizar discusiones matemáticas en las tres partes de la actividad.

La actividad 1 se encuentra en el siguiente enlace:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/62059e648ddcc7275c5cfa40?lang=es

4.2.2. Actividad 2. La función lineal en el mundo real.

Objetivo: Introducir el concepto de función lineal, describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y profundizar aplicando varias situaciones matemáticas.

Metodología de la actividad: Se les informa a los estudiantes que en la plataforma digital Desmos se encuentra la actividad 2, para que sea resuelta de forma individual. El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y resolverá dudas e inquietudes. Después de resolver cada parte de la actividad son socializadas y discutidas en las próximas clases. Se estipula un tiempo de 2 clases para el desarrollo de la actividad.

Se proponen diferentes situaciones donde los estudiantes puedan diferenciar la función lineal, realizar pruebas y conjeturas, analizar gráficas y tablas, abordar desafíos, resolver problemas y socializar sus resultados.

La actividad 2 se encuentra en el siguiente enlace:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/620d7e613041021dec5e9bb0?lang=es

4.2.3. Actividad 3. La función cuadrática en el mundo real.

Objetivo: Introducir el concepto de función cuadrática, describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y profundizar aplicando varias situaciones matemáticas.

Metodología de la actividad: Se les informa a los estudiantes que en la plataforma digital Desmos se encuentra la actividad 3, para que sea resuelta de forma individual. El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y resolverá dudas e inquietudes. Después de resolver cada parte de la actividad son socializadas y discutidas en las próximas clases. Se estipula un tiempo de 2 clases para el desarrollo de la actividad.

Se proponen diferentes situaciones donde los estudiantes puedan diferenciar la función cuadrática, realizar pruebas y conjeturas, analizar gráficas y tablas, abordar desafíos, resolver problemas y socializar sus resultados.

La actividad 3 se encuentra en el siguiente enlace:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/621eae83237643539eeac1de?lang=es

4.2.4. Actividad 4. La función exponencial en el mundo real.

Objetivo: Introducir el concepto de función exponencial, describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y profundizar aplicando varias situaciones matemáticas.

Metodología de la actividad: Se les informa a los estudiantes que en la plataforma digital Desmos se encuentra la actividad 4, para que sea resuelta de forma individual. El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y resolverá dudas e inquietudes. Después de resolver cada parte de la actividad son socializadas y discutidas en las próximas clases. Se estipula un tiempo de 2 clases para el desarrollo de la actividad.

Se proponen diferentes situaciones donde los estudiantes puedan observar la importancia de la función exponencial, realizar pruebas y conjeturas, analizar gráficas y tablas, abordar desafíos, resolver problemas y socializar sus resultados.

La actividad 4 se encuentra en el siguiente enlace:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/62438f68167a95604908c573?lang=es

4.2.5. Actividad 5. La función logarítmica en el mundo real.

Objetivo: Introducir el concepto de función logarítmica, describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y profundizar aplicando varias situaciones matemáticas.

Metodología de la actividad: Se les informa a los estudiantes que en la plataforma digital Desmos se encuentra la actividad 5, para que sea resuelta de forma individual. El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y resolverá dudas e inquietudes. Después de resolver cada parte de la actividad son socializadas y discutidas en las próximas clases. Se estipula un tiempo de 2 clases para el desarrollo de la actividad

Se proponen diferentes situaciones donde los estudiantes puedan observar la importancia de la función logarítmica, realizar pruebas y conjeturas, analizar gráficas y tablas, abordar desafíos, resolver problemas y socializar sus resultados.

La actividad 5 se encuentra en el siguiente enlace:

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/62631f75387326466e9845b0?lang=es

4.2.6. Actividad 6. Proyecto con funciones.

Objetivo: Aplicar los conceptos aprendidos con relación a las funciones y sus gráficas para replicar una imagen con funciones en la plataforma digital Desmos.

Metodología de la actividad: En la primera clase se les explica a los estudiantes cada punto del proyecto y se les entrega el archivo que contiene la información. Se les aclara las fechas de entrega y las condiciones sobre la imagen. También se les aclara que a medida que se trabajan las actividades propuestas en la investigación, ellos van adquiriendo herramientas, habilidades y destrezas para graficar las funciones. Los puntos del proyecto se encuentran a continuación:

Lluvia de ideas sobre el tema: Los estudiantes deben seleccionar un personaje de dibujos animados de su agrado, teniendo en cuenta que deberán reproducirlo usando Desmos. La imagen no puede ser una que ya esté escrita en Desmos.

Una vez que un estudiante tiene una imagen en mente, debe enviarla al correo electrónico del profesor para su aprobación. El profesor está en su derecho de rechazar o cambiar la caricatura seleccionada **Fecha límite: 28/02/2022.**

Estudio de funciones: Los estudiantes completarán 5 actividades interactivas en Desmos sobre funciones.El profesor proporcionará el código de enlace para ingresar a la plataforma digital Desmos. Los estudiantes deben completar todas las 5 actividades.

Desarrollo del proyecto: Cada estudiante reproducirá la caricatura de su elección usando ecuaciones matemáticas en Desmos. Las fórmulas matemáticas deben incluir algunas funciones como: funciones lineales; funciones cuadráticas, funciones exponenciales o funciones logarítmicas.

En algunas clases durante el resto del periodo, el profesor le pedirá a cada estudiante que le muestre su progreso. Los estudiantes deben usar ese tiempo para hacer preguntas o resolver dudas si es necesario.

Entrega del proyecto: La caricatura final debe entregarse en forma de enlace al correo electrónico del profesor. **Vence: 12/05/2022.**

Presentación del proyecto: Los estudiantes grabarán una presentación de 5 minutos y la compartirán con el profesor. En la presentación mostrarán la caricatura y explicarán el proceso de construcción de esta, mostrando explícitamente las funciones que se utilizaron.**Vence: 18/05/2022.**

Conclusiones del capítulo 4

Las seis actividades planteadas bajo los componentes pedagógicos y didácticos de diferentes propuestas expuestas en el capítulo 2 del marco teórico, permiten que el estudiante desarrolle habilidades y mejore la comprensión de los conceptos de las funciones y aplique las propiedades para resolver problemas.

La socialización que puedan realizar los estudiantes en las clases de matemáticas, al comparar las soluciones de las situaciones que desarrollan, generan que los estudiantes analicen, interpreten y profundicen en los temas trabajados en la investigación. La comunicación trabajada por los estudiantes en clase se va a tener en cuenta para el análisis de resultados.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL SISTEMA DE ACTIVIDADES

En este capítulo se realiza el análisis de los resultados observados durante la aplicación de las actividades con los estudiantes en la plataforma Desmos, se tiene en cuenta los siguientes aspectos: desarrollo de las actividades, motivación, logros, comunicación y dificultades.

5.1. Análisis de los resultados en la implementación del sistema de actividades.

En esta investigación el análisis de resultados en la resolución de problemas se llevará a cabo a través de la aplicación del método IDEAL de Bransford y Stein (1993) explicado en el marco teórico, se enfatiza en las cinco componentes que son identificar, definir, explorar, actuar y lograr. De igual forma se tiene en cuenta los componentes cognitivos para el análisis de resultados en la resolución de problemas explicados también en el marco teórico que son: uso de palabras; los mediadores visuales; narrativas y las rutinas.

Para el análisis de resultados en la resolución de problemas desde el método IDEAL de Bransford y Stein (1993) se categorizó la información de la siguiente forma, como se muestra en la Tabla 3.

Componente del método IDEAL	**Descripción.**	
Identificar el problema.	I_1	Comprenden que les están pidiendo en el problema.
	I_2	Dividen el problema en varias partes para una mejor comprensión.

Definir metas.	D_1	Desarrollan tablas de valores, gráficas para identificar variables del problema.
	D_2	Identifican ecuaciones que se necesitan para desarrollar el problema.
Explorar estrategias	E_1	Utilizan gráficas y tablas de valores como estrategia para resolver el problema.
	E_2	Hallan funciones que cumplen con las condiciones dadas para resolver el problema.
Anticipe resultados	A_1	Aplican la estrategia explorada anteriormente.
Logros, observación y evaluación.	L_1	Utilizan gráficos o ecuaciones para verificar el resultado obtenido.

Tabla 3.

De igual forma, para el análisis de resultados en la resolución de problemas desde los componentes cognitivos, se categorizó la información como se muestra en la Tabla 4.

Componente cognitivo	**Descripción.**	
Uso de palabras	U_1	Utilizan expresiones matemáticas para comunicar o escribir una idea para la solución del problema.
	U_2	Describen el comportamiento de una función y la relacionan con el problema
Mediador visual	M_1	Utilizan tablas de valores, gráficos o videos para comprender o solucionar un problema.
	M_2	Se le dificulta parcialmente relacionar los mediadores visuales con los conceptos matemáticos.
Narrativas	N_1	Describen el desarrollo de un problema con axiomas, definiciones y teoremas
	N_2	No hay explicación a procesos realizados al solucionar un problema.
Rutinas	R_1	Utilizan la rutina para describir la relación de los pasos seguidos para resolver el problema

	R_2	No Explica los pasos seguidos para resolver los problemas propuestos.

Tabla 4.

A continuación, se analizan cada una de las actividades aplicadas sobre las funciones y sus gráficas

5.1.1. Actividad 1: Introducción a las funciones.

Desempeño del estudiante durante la actividad. El desarrollo de la actividad se realiza de manera virtual en la plataforma Desmos, en la cual participan 20 estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés. Esta actividad se desarrolla de manera individual y tiene como objetivo introducir el concepto de función y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, aplicando varias situaciones matemáticas.

Esta actividad tiene 12 diapositivas y cuenta con 10 situaciones, la cual fue abordada por el 100% de los estudiantes. La tabla 5 muestra el porcentaje del nivel de desempeño de los estudiantes por problema.

Tabla 5. Nivel de desempeño de la actividad 1.

Actividad 1. Introducción a las funciones.			
Problema.	Nivel de desempeño		
	Alto	Medio	Bajo
1.	80%	15%	5%
2.	85%	10%	5%
3.	70%	15%	15%
4.	95%	5%	
5.	80%	20%	
6.	80%	10%	10%
7.	65%	20%	15%
8.	75%	10%	15%
9.	50%	20%	30%
10.	55%	25%	20%

En los primeros 8 problemas el objetivo era que los estudiantes identificaran las diferentes formas de representar una función, por ejemplo, algebraicamente, por gráficos, tablas o palabras. También, describieron el comportamiento de una función y cómo se relacionan las diferentes formas de representar una función.

De acuerdo con el análisis, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del componente cognitivo.

Uso de palabras: los estudiantes utilizaron expresiones matemáticas para comunicar o describir el comportamiento de una función, como, por ejemplo, en el problema 6 utilizaron palabras como función creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, máximos, mínimos, puntos de inflexión, dominio y rango.

Mediador Visual: los estudiantes utilizaron tablas de valores y gráficos en los 8 problemas para comprender el comportamiento de una función, por ejemplo, en los problemas 1, 7 y 8 usaron o completaron una tabla de valores para graficar una función, en el problema 2 y 3 de acuerdo con el video, modelan y determinan las variables que se presentaban en la situación, en el problema 6 y 7 relacionaron varias situaciones con su gráfica correspondiente y en el problema 6 describieron el comportamiento de una imagen, con relación a las funciones.

En los 2 últimos problemas el objetivo es aplicar los conceptos aprendidos sobre funciones para resolver algunas situaciones más complejas.

En esta parte, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del método ideal.

Identificar el problema: los estudiantes trabajaron sobre la imagen y sacaron información importante, lo cual le facilitó la comprensión del problema, por ejemplo, como se muestra en la figura 8 del problema 10.

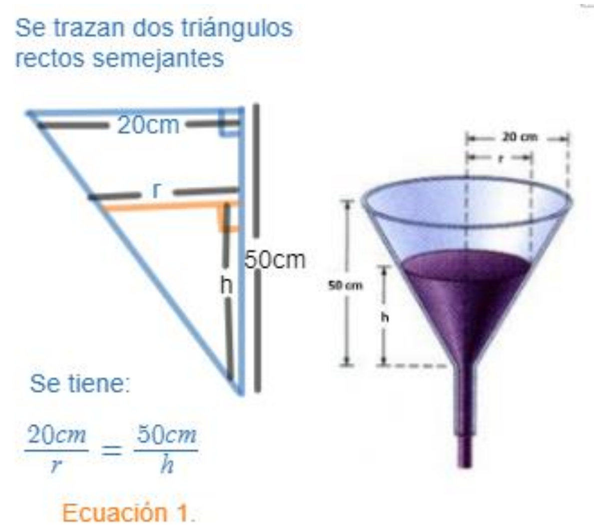


Figura 8.

Definir metas: los estudiantes identifican varias ecuaciones que necesitan para resolver el problema, por ejemplo, en el problema 9 reemplazaron varias veces la función que les proporcionan para hallar la solución, en el problema 10 usaron ecuaciones para calcular el volumen de un cono y la semejanza de triángulos para despejar una de las variables.

Explorar estrategias: los estudiantes utilizaron como estrategia realizar una gráfica de la información proporcionada y luego determinaron valores, por ejemplo, en el problema 10, la construcción de los triángulos rectángulos y la semejanza de triángulos proporcionó la relación de las variables.

Anticipe resultados: en el problema 10 los estudiantes implementaron la estrategia mencionada anteriormente, despejaron una de las variables y la sustituyeron en la ecuación del volumen de un cono, y de esta forma determinaron el volumen en función de la altura.

Logros, observación y evaluación: los estudiantes no escribieron ninguna comprobación que el problema estuviera bien, pero si comunicaron en las socializaciones porque estaba bien, por ejemplo, en el problema 10, realizaron algunas comprobaciones para valores de la altura y determinar su volumen ya conocido.

También en esta parte los estudiantes utilizaron algunos componentes cognitivos, por ejemplo, en el uso de palabras, comunican las ideas de cómo resolver el problema y discutieron las diferentes soluciones, utilizaron la gráfica como mediador visual para determinar información importante para resolver el problema, realizaron rutinas para explicar el paso a paso de la solución del problema, como se muestra en la figura 9.

A. Se despeja r de la ecuación 1.

$r = \frac{20cm}{50cm} \cdot h$ al simplificar $r = \frac{2}{5} \cdot h$ ecuación 2

B. La ecuación del volumen de un cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

se remplaza el radio por la ecuación 2

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot h\right)^2 \cdot h$$

al elevar al cuadrado se obtiene:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4}{25}h^2 \cdot h$$

$V = \frac{4}{75}\pi \cdot h^3$ Ecuación 3

C. Como lo máximo que se puede llenar relacionando la altura es de 50cm.
el dominio es [0, 50cm]

D. Primero hay que calcular el volumen total.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (20cm)^2 \cdot 50cm = \frac{20000}{3}\pi \cdot cm^3$$

Para determinar la mitad del volumen, se divide por 2.

$$V = \frac{\frac{20000}{3}\pi \cdot cm^3}{2} = \frac{10000}{3}\pi \cdot cm^3$$

Para calcular la altura, el volumen se remplaza en la ecuación 3.

$$\frac{10000}{3}\pi \cdot cm^3 = \frac{4}{75}\pi \cdot h^3$$

Se despeja h

$$\frac{10000 \cdot \pi \cdot cm^3 \cdot 75}{3 \cdot 4 \cdot \pi} = h^3$$

$$62500cm^3 = h^3$$

$$\sqrt[3]{62500}\ cm = h$$

Figura 9.

Motivación por el aprendizaje. Los estudiantes demuestran curiosidad y entusiasmo por desarrollar los problemas de la actividad, no solamente por las herramientas que se pueden trabajar en la plataforma Desmos, sino también por las diferentes situaciones que deben resolver.

Logros. Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por solucionar los diferentes problemas propuestos.
- Logran interiorizar el concepto de función y sus propiedades en cuanto a su comportamiento.
- Identifican las formas de representar una función y cómo se relacionan entre ellas.
- Participan activamente en la socialización de los problemas en clase presencial.

Dificultades. A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Los estudiantes tienden a ser un poco tímidos para escribir sus ideas y algunas veces no son claros en el procedimiento al solucionar un problema.
- Los estudiantes no describen el desarrollo de un problema con axiomas, definiciones y teoremas para justificar procedimientos.

5.1.2. Actividad 2: La función lineal en el mundo real.

- **Desempeño del estudiante durante la actividad.** El desarrollo de la actividad se realiza en casa por medio de la plataforma Desmos, en la cual participan 20 estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés. Esta actividad se desarrolla de manera individual y tiene como objetivo introducir el concepto de función lineal y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, aplicando varias situaciones matemáticas.

- Esta actividad tiene 14 diapositivas y cuenta con 12 situaciones, la cual fue abordada por el 100% de los estudiantes. La tabla 6 muestra el porcentaje del nivel de desempeño de los estudiantes por problema.

Tabla 6. Nivel de desempeño de la actividad 2.

Actividad 2. La funcion lineal en el mundo real.			
Problema.	Nivel de desempeño		
	Alto	Medio	Bajo
1.	95%	5%	
2.	85%	10%	5%
3.	80%	10%	10%
4.	90%	10%	
5.	90%		10%
6.	85%	5%	10%
7.	80%		20%
8.	70%	20%	10%
9.	90%	5%	5%
10.	80%	10%	10%
11.	75%	5%	20%
12.	80%		20%

El objetivo en los 6 primeros problemas era que los estudiantes identificaran y diferenciarán una función lineal, la pudieran representar por medio de gráficos, tablas, palabras o algebraicamente. También, describieron el comportamiento de una función lineal y cómo se relacionan las diferentes formas de representarla.

De acuerdo con el análisis, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del componente cognitivo.

Uso de palabras: los estudiantes utilizaron expresiones matemáticas para comunicar o describir el comportamiento de una función lineal, por ejemplo, en los problemas 1 y 2 utilizaron palabras como creciente, decreciente, pendiente, puntos de corte con los ejes y origen. En todos los problemas utilizaron ecuaciones, términos numéricos y algebraicos para resolver los problemas.

Mediador Visual: los estudiantes utilizaron tablas de valores y gráficos en los problemas para comprender el comportamiento de una función lineal, por ejemplo, en los problemas 3 y 4 usaron o completaron una tabla de valores para graficar o encontrar una ecuación de una función lineal, en los problemas 1,2 y 5 resolvieron varias situaciones gráficas para describir el comportamiento de la función lineal.

En los problemas del 7 al 12, el objetivo es aplicar los conceptos aprendidos sobre funciones lineales para resolver algunas situaciones más complejas.

En esta parte, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del método ideal.

Identificar el problema: los estudiantes trabajaron sobre un plano cartesiano y construyeron gráficas para comprender el problema, de lo cual sacaron información importante para resolver cada situación, por ejemplo, como se muestra en la figura 10 del problema 10, determinaron los puntos de corte de las funciones lineales para determinar qué compañía le favorece en ser la más económica.

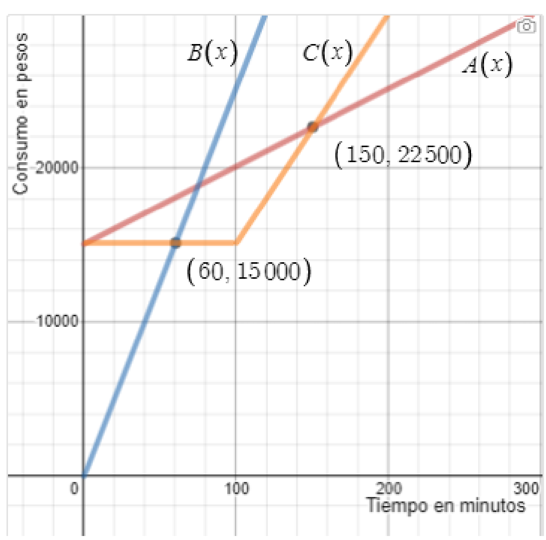


Figura 10.

Definir metas: los estudiantes identificaron varias ecuaciones que necesitaron para resolver el problema, por ejemplo, en el problema 7 y 12 escribieron varias funciones lineales para completar el desafío, en el problema 11 utilizaron la ecuación de velocidad para calcular el tiempo y la distancia, en los problemas 8, 9 y 10 utilizaron ecuaciones para graficar y analizar el problema.

Explorar estrategias: los estudiantes utilizaron como estrategia sacar datos del problema, con esa información realizaron gráficas para sacar otros datos o analizar el problema, por ejemplo, en el problema 10, de acuerdo con la información proporcionada pudieron graficar 3 funciones, de las cuales pudieron determinar cuál compañía le favorece al consumidor, en el problema 11, de acuerdo con los datos, pudieron representar la situación y comprobarla.

Anticipe resultados: en los problemas 8, 9 y 10 implementaron la estrategia mencionada anteriormente, encontraron la ecuación de cada función lineal con los datos proporcionados por el problema y luego determinaron información de ella.

Logros, observación y evaluación: los estudiantes en el problema 10, realizaron comprobaciones para determinar en qué condiciones es favorable cada compañía. En los problemas 7 y 12 comprobaron si las funciones cumplían con el desafío.

También en esta parte los estudiantes utilizaron algunos componentes cognitivos, por ejemplo, el uso de palabras, para expresar o escribir las ideas, utilizaron términos matemáticos para resolver el problema y discutir las diferentes soluciones en las socializaciones, utilizaron las gráficas como mediador visual para determinar información importante o comprobar el problema, como se muestra en la figura 11.

A. Sofia Miguel
Velocidad (km/h) 15 20
Tiempo (horas) $t+1$ t
Para hallar la distancia recorrida se tiene que $d = V \cdot t$
Para Sofia $d = 15 \cdot (t+1) = 15t + 15$
Para Miguel $d = 20 \cdot t$
Como los dos recorrieron la misma distancia, se pueden igualar las dos ecuaciones.
$15t + 15 = 20t$
$15 = 20t - 15t$
$15 = 5t$
$t = 3$
De aquí se deduce que Miguel demoro 3 horas y Sofia 4 horas.
B.
Para Sofia $d = 15 \cdot 4 = 60$ La distancia que recorrieron
Para Miguel $d = 20 \cdot 3 = 60$ fue de 60 kilómetros.

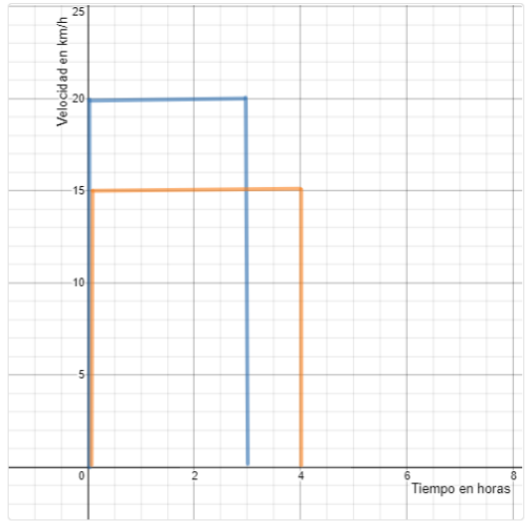


Figura 11.

Motivación por el aprendizaje. Los estudiantes demuestran interés por desarrollar las situaciones de la actividad, aunque tuvieron mayor motivación al resolver los desafíos de recoger estrellas por medio de funciones lineales.

Logros. Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por solucionar los diferentes problemas propuestos.
- Logran interiorizar el concepto de función lineal y sus propiedades.
- Determinan el comportamiento de una función lineal.
- Participan activamente en la socialización de los problemas en clase presencial.

Dificultades. A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Los estudiantes no explican el paso a paso del desarrollo del problema.
- Los estudiantes no describen el desarrollo de un problema con axiomas, definiciones y teoremas para justificar procedimientos.

5.1.3. Actividad 3: La función cuadrática en el mundo real.

- **Desempeño del estudiante durante la actividad.** El desarrollo de la actividad se realiza por medio de la plataforma Desmos, en la cual participan 20 estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés. Esta actividad se desarrolla de manera individual y tiene como objetivo introducir el concepto de función cuadrática y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, aplicando varias situaciones matemáticas.
- Esta actividad tiene 21 diapositivas y cuenta con 12 problemas, la cual fue abordada por el 100% de los estudiantes. La tabla 7 muestra el porcentaje del nivel de desempeño de los estudiantes por problema.

Actividad 3. La función cuadrática en el mundo real.			
Problema.	Nivel de desempeño		
	Alto	Medio	Bajo
1.	100%		
2.	75%	20%	5%
3.	100%		
4.	90%		10%
5.	95%		5%
6.	75%	15%	10%
7.	65%	10%	25%
8.	80%	10%	10%
9.	75%	10%	15%
10.	50%	35%	15%
11.	55%	20%	25%
12.	75%	10	15%

Tabla 7. Nivel de desempeño de la actividad 3.

El objetivo en los 5 primeros problemas era que los estudiantes identificaran y diferenciarán una función cuadrática, la pudieran representar por medio de gráficos, tablas, palabras o algebraicamente. También, describieron el comportamiento de una función cuadrática y cómo se relacionan las diferentes formas de representarla.

De acuerdo con el análisis, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del componente cognitivo.

Uso de palabras: los estudiantes utilizaron expresiones matemáticas para comunicar o describir el comportamiento de una función cuadrática, como, por ejemplo, en los problemas 1, 2 y 3 utilizaron palabras como creciente, decreciente, punto máximo, punto mínimo, puntos de corte con los ejes, vértice, eje de simetría, ecuación cuadrática. Además, en los problemas utilizaron ecuaciones, términos numéricos y algebraicos para resolver las situaciones.

Mediador Visual: los estudiantes utilizaron tablas de valores y gráficos en los problemas para comprender el comportamiento de una función cuadrática, por ejemplo, en el problema 2, completaron una tabla de valores para graficar y encontrar la ecuación de la función, en los problemas 1, 3, 4 y 5 analizaron la gráfica y describieron el comportamiento de la función cuadrática.

En los problemas del 6 al 12, el objetivo es aplicar los conceptos aprendidos sobre funciones cuadráticas para resolver algunas situaciones más complejas.

En esta parte, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del método ideal.

Identificar el problema: los estudiantes trabajaron sobre la gráfica o las tablas de valores para comprender el problema y sacar información importante de este, por ejemplo, en el problema 6, los estudiaron construyeron la gráfica y la ecuación por medio de la tabla de valores, en el problema 8 los estudiantes por medio de la gráfica pudieron determinar puntos importantes para resolver el problema, como se muestra en la figura 12.

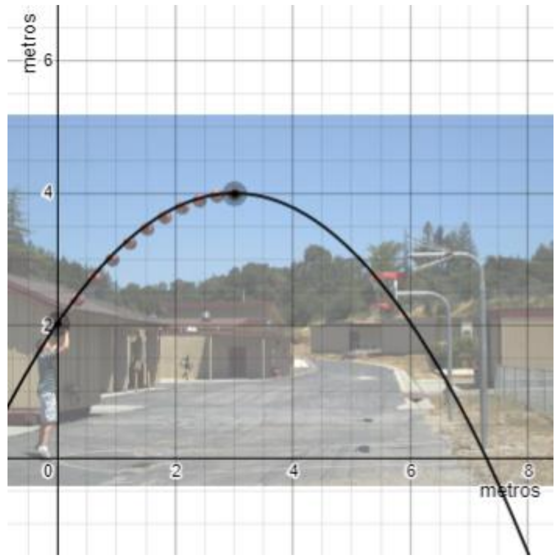


Figura 12.

Definir metas: los estudiantes identificaron varias ecuaciones que necesitaron para resolver el problema, por ejemplo, en el problema 7 utilizaron las fórmulas de Vieta para determinar los coeficientes de la función cuadrática, en el problema 10 y 11 utilizaron la fórmula cuadrática o factorización para determinar los cortes y en el problema 12 utilizaron las fórmulas de Vieta y la fórmula cuadrática para resolver el problema.

Explorar estrategias: los estudiantes utilizaron como estrategia sacar datos o información del problema, luego aplicaron las fórmulas de Vieta, la factorización o la fórmula cuadrática, por ejemplo, en el problema 7 se les dio unas condiciones y los estudiantes aplicaron las fórmulas de Vieta para encontrar la ecuación de la función para poder solucionar el problema. En el problema 8 los estudiantes trasladaron una función para encontrar puntos de la parábola y poder determinar la ecuación de la función, en el problema 9 realizaron una gráfica para determinar las variables del área y aplicar la función cuadrática para hallar el área máxima, en el problema 10, 11 y 12 utilizaron la fórmula cuadrática para hallar los puntos de corte de una función y los utilizaron para hallar las otras funciones, como se muestra en la figura 13.

Se tiene:

$g(x) = x^2 + 8x + m$
$a = 1$
$b = 8$

Se utiliza el discriminante de la función cuadrática debido a que solo debe tener un corte con X.

$b^2 - 4ac = 0$
$8^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0$
$64 - 4m = 0$
$64 = 4m$
$16 = m$

Ecuación:

$g(x) = x^2 + 8x + 16$

$f(x) = x^2 + 16x + n$
$a = 1$
$b = 16$

Se utiliza el discriminante de la función cuadrática

$b^2 - 4ac = 0$
$16^2 - 4 \cdot 1 \cdot n = 0$
$256 - 4n = 0$
$256 = 4n$
$64 = n$

Ecuación:

$f(x) = x^2 + 16x + 64$

Figura 13.

Logros, observación y evaluación: los estudiantes en los problemas 10, 11 y 12 realizaron la tabla de valores y la gráfica para comprobar las condiciones que le pedían en las situaciones, en los problemas 4 y 5 realizaron la comprobación de recolectar todas las estrellas.

Motivación por el aprendizaje. Los estudiantes demuestran interés por desarrollar las situaciones de la actividad, por ejemplo, buscan información sobre las fórmulas de Vieta y la fórmula cuadrática con su discriminante.

Logros. Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por solucionar los diferentes problemas propuestos.
- Logran interiorizar el concepto de función cuadrática y sus propiedades.
- Determinan el comportamiento de una función cuadrática.

- Participan activamente en la socialización de los problemas en clase presencial.

Dificultades. A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Los estudiantes no utilizan un lenguaje adecuado al explicar la solución de un problema.
- Los estudiantes no describen el desarrollo de un problema con axiomas, definiciones y teoremas para justificar procedimientos.

5.1.4. Actividad 4: La función exponencial en el mundo real.

- **Desempeño del estudiante durante la actividad.** El desarrollo de la actividad se realiza por medio de la plataforma Desmos, en la cual participan 20 estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés. Esta actividad se desarrolla de manera individual y tiene como objetivo introducir el concepto de función exponencial y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, aplicando varias situaciones matemáticas.
- Esta actividad tiene 19 diapositivas y cuenta con 10 problemas, la cual fue abordada por el 100% de los estudiantes. La tabla 8 muestra el porcentaje del nivel de desempeño de los estudiantes por problema.

Actividad 4. La función exponencial en el mundo real.			
Problema.	Nivel de desempeño		
	Alto	Medio	Bajo
1.	70%	30%	
2.	80%	20%	
3.	75%	25%	
4.	85%	10%	5%
5.	85%	5%	10%
6.	100%		
7.	90%	5%	5%
8.	55%	30%	15%
9.	65%	10%	25%
10.	90%		10%

Tabla 8. Nivel de desempeño de la actividad 4.

El objetivo en los 4 primeros problemas era que los estudiantes identificarán la función exponencial, la pudieran representar por medio de gráficos, tablas, palabras o algebraicamente. También, describieron el comportamiento de una función exponencial y cómo se relacionan las diferentes formas de representarla.

De acuerdo con el análisis, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del componente cognitivo.

Uso de palabras: los estudiantes utilizaron expresiones matemáticas para comunicar o describir el comportamiento de una función exponencial, por ejemplo, en los problemas 2, 3 y 4 utilizaron palabras como creciente, decreciente, asíntota horizontal, puntos de corte con los ejes, función reflejada, dominio, rango, traslación en el eje horizontal o vertical y el número de Euler. Además, en los problemas utilizaron ecuaciones, términos numéricos y algebraicos para resolver las situaciones.

Mediador Visual: los estudiantes utilizaron tablas de valores y gráficos en los problemas para comprender el comportamiento de una función exponencial, por ejemplo, en el problema 1 observaron un video que modelaba una situación, de la cual realizaron una tabla de valores para graficar y encontrar la ecuación de la función exponencial, en los problemas 2, 3 y 4 analizaron la gráfica y describieron el comportamiento de la función exponencial.

En los problemas del 5 al 10, el objetivo es aplicar los conceptos aprendidos sobre funciones exponenciales para resolver algunas situaciones más complejas.

En esta parte, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del método ideal.

Identificar el problema: los estudiantes trabajaron y escribieron varias ecuaciones para modelar la situación por medio de los datos que les proporcionó el problema, por ejemplo, en los problemas 5, 7, 8 y 9, los estudiantes sacaron los datos y comenzaron a reemplazarlos en la ecuación general que les proporcionaba la situación, como se muestra en la figura 14 del problema 7.

Datos del problema:
Inicialmente hay 30kg de azúcar.
Despued de 5 horas hay 10 kg de azúcar.

Ecuación general.

$A(0) = c \cdot e^{-k \cdot 0} = 30$

$c = 30$

$A(5) = 30 \cdot e^{-k \cdot 5} = 10$

$e^{-k \cdot 5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$-5k = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-5} = 0.2197$

Por lo tanto la ecuación es:

$A(t) = 30 \cdot e^{-0.2197 \cdot t}$

Figura 14.

Definir metas: los estudiantes identificaron que tenían que encontrar la ecuación que modela cada situación utilizando las ecuaciones generales de la función exponencial, por ejemplo, en el problema 8, utilizaron una ecuación para determinar el número de contagios por coronavirus, en el problema 9, utilizaron una ecuación que modela la cantidad de dinero que se obtiene al invertir dinero a una tasa anual después de t años.

Explorar estrategias: los estudiantes utilizaron como estrategia sacar la información que les brinda el problema para aplicar las ecuaciones generales de la función exponencial que modele la situación planteada, por ejemplo, en el problema 7, de acuerdo con los datos sobre la disolución del azúcar en agua los estudiantes encontraron la ecuación que modela la situación, en el problema 8, los estudiantes encontraron la ecuación que modela la situación del número de contagios por el coronavirus en España, en el problema 9, encontraron la expresión que modela la cantidad de dinero que se obtiene al invertir dinero a una tasa anual después de años.

Logros, observación y evaluación: los estudiantes en los problemas 5, 7, 8 y 9 realizaron la tabla de valores y la gráfica para comprobar las condiciones que le pedían en las situaciones, en los problemas 6 y 10 realizaron la comprobación de recolectar todas las estrellas.

Motivación por el aprendizaje. Los estudiantes demuestran interés por desarrollar las situaciones de la actividad, por ejemplo, hacen consultas sobre el número de Euler y en qué situaciones se puede aplicar la función exponencial.

Logros. Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por solucionar las diferentes situaciones propuestas.
- Logran interiorizar el concepto de función exponencial y sus propiedades.
- Determinan el comportamiento de una función exponencial.
- Participan activamente en la socialización de los problemas en clase presencial.

Dificultades. A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Los estudiantes no explican el paso a paso del desarrollo del problema.
- Los estudiantes no describen el desarrollo de un problema con axiomas, definiciones y teoremas para justificar procedimientos.

5.1.5. Actividad 5: La función logarítmica en el mundo real.

- **Desempeño del estudiante durante la actividad.** El desarrollo de la actividad se realiza por medio de la plataforma Desmos, en la cual participan 20 estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés. Esta actividad tiene como objetivo introducir el concepto de función logarítmica y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal, aplicando varias situaciones matemáticas.
- Esta actividad tiene 20 diapositivas y cuenta con 12 situaciones, la cual fue abordada por el 100% de los estudiantes. La tabla 9 muestra el porcentaje del nivel de desempeño de los estudiantes por problema.

Actividad 5. La función logarítmica en el mundo real.			
Problema.	Nivel de desempeño		
	Alto	Medio	Bajo
1.	85%	10%	5%
2.	70%	10%	20%
3.	80%	10%	10%
4.	75%	15%	10%
5.	80%	5%	15%
6.	65%	30%	5%
7.	80%	5%	15%
8.	100%		
9.	65%		35%
10.	80%	10%	10%
11.	60%	15%	25%
12.	90%		10%

Tabla 9. Nivel de desempeño de la actividad 5.

El objetivo en los 5 primeros problemas era que los estudiantes identificaran las propiedades de los logaritmos, la función logarítmica y pudieran representar la función por medio de gráficos, tablas, palabras o algebraicamente. También, describieron el comportamiento de una función logarítmica y cómo se relacionan las diferentes formas de representarla.

De acuerdo con el análisis, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del componente cognitivo.

Uso de palabras: los estudiantes utilizaron expresiones matemáticas para comunicar o describir las propiedades de los logaritmos, por ejemplo, en los problemas 1 y 2 utilizaron palabras como tablas, producto, cociente, raíz, potencia de logaritmos, de igual forma utilizaron expresiones matemáticas para comunicar o describir el comportamiento de una función logarítmica, por ejemplo, en los problemas 2, 3, 4 y 5 utilizaron palabras como creciente, decreciente, asíntota vertical, puntos de corte con los ejes, función reflejada, dominio, rango, traslación en el eje horizontal o vertical y función logarítmica natural. Además, en los problemas utilizaron ecuaciones, términos numéricos y algebraicos para resolver las situaciones.

Mediador Visual: los estudiantes utilizaron tablas de valores y gráficos en los problemas para comprender el comportamiento de una función logarítmica, por ejemplo, en el problema 3 completaron una tabla de valores para graficar y responder preguntas relacionadas a la función, en los problemas 4 y 5 analizaron la gráfica, describieron el comportamiento de la función logarítmica y como se puede trasladar la función en el eje vertical y horizontal.

En los problemas del 6 al 12, el objetivo es aplicar los conceptos aprendidos sobre funciones logarítmicas con sus propiedades para resolver algunas situaciones más complejas.

En esta parte, se puede observar que los estudiantes utilizaron algunos elementos del método ideal.

Identificar el problema: los estudiantes trabajaron y escribieron varias ecuaciones para modelar la situación por medio de los datos que les proporcionó el problema, por ejemplo, en el problema 6 y 7 completaron una tabla de valores y realizaron la gráfica para determinar información y resolver la situación, en el problema 9, sacaron datos de la gráfica para encontrar la ecuación de la función logarítmica, en los problemas 10 y 11, los estudiantes sacaron las condiciones para determinar la ecuación general que les proporcionaba la situación.

Definir metas: los estudiantes identificaron que tenían que encontrar la ecuación que modela cada situación por medio de los datos que les proporcionaba el problema, por ejemplo, en los problemas 9 y 11, determinaron la ecuación de la función que cumplen con las condiciones del problema y graficaron la función, como se muestra en la figura 15, en los problemas 6, 7 y 10 utilizaron la ecuación que les proporcionaba el ejercicio para describir el comportamiento de la función y de esta forma respondieron algunas preguntas.

1.Datos que podemos sacar de la gráfica.
Asíntota vertical en -2 y $p_1:(0,-2)$, $p_2:(2,-3)$
$x+b>0 \quad x>-b$ se tiene $b=2$ por lo tanto el dominio es
$Dom:(-2,+\infty) \quad f(x)=\log_a(x+2)+c$
Al reemplazar en los puntos encontrados se tiene:
$-2=\log_a(0+2)+c$
$-3=\log_a(2+2)+c$ se resta para cancelar c
$1=\log_a(2)-\log_a(4)$
$1=\log_a\left(\frac{2}{4}\right)$ aplicando como base a .
$a=\frac{1}{2}$ remplazando en la función y el primer punto se tiene:
$-2=\log_{0.5}(2)+c \qquad -2=-1+c \qquad c=-1$
Por lo tanto, la ecuación de la función de la gráfica es:
$f(x)=\log_{0.5}(x+2)-1$

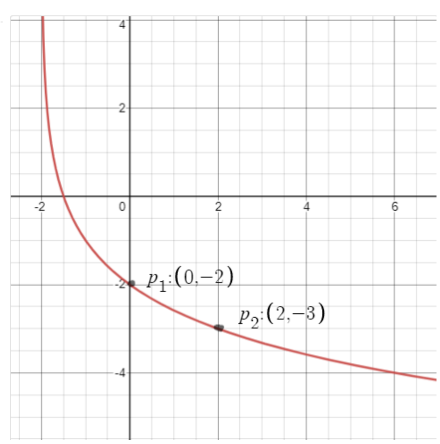


Figura 15.

Explorar estrategias: los estudiantes utilizaron como estrategia sacar la información que les brinda el problema por medio de gráficas, tablas o condiciones para aplicar las ecuaciones generales de la función logarítmica que modele la situación planteada, por ejemplo, en los problemas 6 y 7, los estudiantes reemplazaron valores en la función y pudieron determinar el comportamiento de la función, en los problemas 9 y 11, los estudiantes determinaron valores importantes para determinar la ecuación de la función en cada situación.

Logros, observación y evaluación: los estudiantes en los problemas 6, 9, 10 y 11 realizaron la tabla de valores y la gráfica para comprobar las condiciones que le pedían en las situaciones, en los problemas 8 y 12 verificaron que podían recolectar todas las estrellas.

Motivación por el aprendizaje. Los estudiantes demuestran interés por aplicar las propiedades de los logaritmos, y desarrollar las situaciones planteadas en la actividad.

Logros. Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por solucionar las diferentes situaciones propuestas.
- Logran interiorizar el concepto de función logarítmica y sus propiedades.
- Determinan el comportamiento de una función logarítmica.
- Participan activamente en la socialización de los problemas en clase presencial.

Dificultades. A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Los estudiantes no explican el paso a paso del desarrollo del problema.

- Los estudiantes no describen el desarrollo de un problema con axiomas, definiciones y teoremas para justificar procedimientos.

5.1.6. Actividad 6: Proyecto con funciones.

Desempeño del estudiante durante la actividad. El desarrollo de la actividad se realiza de manera virtual en la plataforma Desmos, en la cual participan 20 estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés. Esta actividad se desarrolla de manera individual y tiene como objetivo aplicar los conceptos aprendidos con relación a las funciones y sus gráficas para replicar una caricatura por medio de funciones en la plataforma digital Desmos.

Esta actividad fue abordada por el 100% de los estudiantes. De acuerdo con las imágenes que los estudiantes replicaron y que se encuentran en el anexo 6, se puede observar que el 100% de los estudiantes aplicaron funciones lineales y cuadráticas, el 10% de los estudiantes aplicaron funciones exponenciales y logarítmicas, debido a que la mayoría de las imágenes necesitaban líneas rectas, parábolas, circunferencias y elipses.

De igual forma se puede observar que los estudiantes entendieron muy bien las traslaciones de las funciones y cónicas, debido a que trasladaron varias funciones del origen para replicar la imagen, también, se observa claramente que manejaron muy bien el dominio y rango debido a que solo necesitaban un segmento de la gráfica de cada función o cónica.

También se observa el gran manejo de la herramienta y del aprendizaje de las funciones y gráficas, debido a que tenían que escribir muchas funciones en la plataforma para replicar la imagen del personaje que cada estudiante escogió.

Motivación por el aprendizaje. Los estudiantes demuestran interés por replicar una imagen de una caricatura de su agrado por medio de funciones y cónicas, también porque observan otra aplicación de la herramienta y tienen que mostrar lo que han aprendido en las actividades anteriores.

Logros. Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por realizar su caricatura por medio de funciones.
- Determinan las ecuaciones generales de varias funciones.
- Aplican la traslación vertical y la traslación horizontal de funciones.
- Determinan el dominio y rango de una función.
- Aplican los conceptos sobre las funciones vistos en las actividades anteriores.

Dificultades. A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Debido a la forma de las caricaturas escogidas por los estudiantes, no se evidencia gran utilidad de las funciones exponenciales y logarítmicas.

Conclusiones del capítulo 5

En el análisis de las actividades se evidencia que los estudiantes demuestran mayor interés y motivación por desarrollar problemas con situaciones en las que se involucra gráficas, tablas, imágenes, porque les permiten analizar, visualizar y comprender mejor el tema.

El uso de la tecnología digital para desarrollar las actividades, motivaron a los estudiantes, debido a que realizan diferentes tareas dinámicas, permitiendo otro tipo de enseñanza diferente, donde los estudiantes tienen la oportunidad de explorar, comprobar, desarrollar desafíos, graficar, completar tablas, resolver problemas y socializar sus ideas ante sus compañeros.

La integración de la modelación como herramienta didáctica para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas, generó un gran interés para los estudiantes, debido a que pudieron ver la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas en situaciones cotidianas y diversas.

El método IDEAL y los componentes cognitivos utilizados para el análisis de resultados en la resolución de problemas, proporcionó información importante para comprender cómo los estudiantes desarrollan un problema.

Los objetivos planteados en cada una de las actividades se lograron en la mayoría de los estudiantes, lo cual se puede constatar por medio del nivel de desempeño y el análisis que se realizó en cada actividad.

Una de las dificultades que presentan los estudiantes al solucionar un problema es aplicar la componente narrativa, es decir, justificar los procedimientos que utilizan al desarrollar un problema, aunque en ocasiones llegan a la solución sin argumentar.

CONCLUSIONES

La presente investigación enfocada a favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje con relación a los conceptos de las funciones y sus gráficas en los estudiantes del grado once del Colegio Liceo Piñeros Cortés, permite constatar los siguientes hallazgos, con la aplicación de las actividades, en las que se destacan algunos componentes, los cuales son:

- Las investigaciones consultadas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas evidencian problemáticas en todos los entornos escolares del mundo. También estas investigaciones, muestran la importancia de incluir un software dinámico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su importancia en la visualización, modelación y análisis de funciones con sus gráficas.
- El marco teórico de la investigación está basado en los fundamentos de la tecnología sobre la enseñanza de la matemática, la modelación como alternativa didáctica en la matemática, el método IDEAL y los componentes cognitivos para el análisis de resultados en la resolución de problemas.
- El uso de la tecnología digital para desarrollar las actividades, motivaron a los estudiantes, debido a que realizaron diferentes tareas dinámicas, permitiendo otro tipo de enseñanza diferente, donde los estudiantes tienen la oportunidad de explorar, comprobar, desarrollar desafíos, graficar, completar tablas, resolver problemas y socializar sus ideas ante sus compañeros.
- El uso de la tecnología digital también permitió la integración de la modelación como herramienta didáctica en la aplicación de problemas, lo cual generó en los

estudiantes un gran interés, debido a que pudieron ver la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas en situaciones cotidianas y diversas.

- Los estudiantes gracias a la interacción y manipulación reconocen el uso de la plataforma Desmos como mediador en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en este caso la comprensión de conceptos y propiedades relativas a las funciones y resaltan la facilidad del uso del sistema, no solamente de la representación gráfica, sino en general de todas las herramientas que les ofrece.
- La metodología de investigación implementada en la tesis genera, las herramientas necesarias para el análisis de los resultados del sistema de actividades relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas en los estudiantes, la elaboración de las conclusiones y las recomendaciones.
- El método IDEAL de Bransford & Stein y los componentes cognitivos utilizados para el análisis de resultados en la resolución de problemas, proporcionó información importante para comprender, analizar y sacar conclusiones acerca de cómo los estudiantes desarrollan un problema.
- La implementación de las actividades y su análisis demostró un gran impacto de forma positiva en la participación muy activa de los estudiantes, donde se pudo constatar la motivación para el aprendizaje de los conceptos de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas, lo cual implica el cumplimiento del objetivo propuesto de la investigación.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades para mejorar la comprensión de los conceptos de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas con sus propiedades, en los estudiantes del grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones, para optimizar el proceso investigativo y los resultados obtenidos:

- Continuar investigando en el uso de la modelación matemática para la construcción del concepto y comportamiento de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.
- Implementar en las aulas de clase el uso de la tecnología digital como herramienta didáctica, para la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas.
- Es importante que los docentes se formen en el uso de las nuevas tecnologías y sus aplicaciones dentro del aula, para crear contenido que se adapte, motive y facilite la enseñanza y el aprendizaje de las funciones y sus gráficas.
- Motivar a los estudiantes a realizar discusiones o socializaciones entre las estrategias utilizadas al resolver un problema, para aportar beneficios que promueven el conocimiento, interacción, análisis y profundización en los conceptos de las funciones y sus gráficas.

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo Marín, G. F. (2017). La resolución de problemas para el aprendizaje de funciones.

Allison Dorko. (2020). *What Do We Know About Student Learning from Online Mathematics Homework,* In Howard, J. P., & Beyers, J. F. (Eds.), Teaching and Learning Mathematics Online (p. 17-42).

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a re-flection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning.

Bell, F. H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary schools)*. WC Brown Company.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación matemática, 16(2), 105-125.

Castillo, J. C. R. (2022). La aplicación de herramientas digitales con el enfoque onto semiótico y su influencia en el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas. *Revista Científica del Sistema de Estudios de Postgrado de la Universidad de San Carlos de Guatemala*, *5*(1), 15-23.

Cupi Hernán (2018). Comprensión de la noción de función exponencial por medio del tránsito por los distintos registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería. (Tesis de maestría). Universidad Católica, Perú.

Díaz M, Haye E, Montenegro F y Córdoba L (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. Universidad Nacional de Litoral. Argentina.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds), Proceedings of the annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education.

Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.p. 16

Fierro, M., Esquer, M., Ansaldo, J., & Peralta, J. (2019). Uso de los registros de representación semiótica para la elaboración de propuestas didácticas. El caso de la función lineal y cuadrática.

Garavito E (2013). Representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función y sus propiedades en los estudiantes del grado undécimo. Facultad de Educación Matemática (Tesis de maestría). Universidad Antonio Nariño. Colombia.

García, J. (1998). *Didáctica de las ciencias*. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Grupo Impresor. Colombia. pp.15. Recuperado 12 de febrero de 2021 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191

Gleenn F. Miller and Kathleen H. offenholley. (2020). *Apractical guide to discussions in OnlineMathematics Courses*, J. P., & Beyers, J. F. (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics Online* (p. 235-250).

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H-St, Weigand, H.-G., & Ulm, V. (2016). Didaktik der Analysis. Wiesbaden: Springer.

Hegedus, S., & Tall, D. O. (2015). Foundations for the future: The potential of multimodal technologies for learning mathematics. In L. English & D. Kirshner (Eds.), The third edition of the

Hegedus, S., & Tall, D. O. (2015). Foundations for the future: The potential of multimodal technologies for learning mathematics. In L. English & D. Kirshner (Eds.), The third edition of the handbook of international research in mathematics education (pp. 543–562). New York, NY: Routledge.

Hegedus, S., Laborde, C., Brady, C., Dalton, S., Siller, HS, Tabach, M., ... & Moreno-Armella, L. (2017). *Usos de la tecnología en la educación matemática de secundaria superior*. Naturaleza Springer.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 358.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 356.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 496.

Hwang, G. J., Wang, S. Y., & Lai, C. L. (2021). Effects of a social regulation-based online learning framework on students' learning achievements and behaviors in mathematics. *Computers & Education*, *160*, 104031.

ISTE Standards-T (2008). ISTE Standards Teachers. Online http://www.iste.org/standards/iste-standards/standards-for-teachers [Retrieved September 17, 2015]

Laurie Battle, Atish J. Mitra, H. Smith Risser. (2020). *Teaching cross-listed mathematics courses online,* In Howard, J. P., & Beyers, J. F. (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics Online* (p. 3-16).

Matías Arce y Tomas Ortega (2014). Deficiencias en el trazado de graficas de funciones en estudiantes de bachillerato PNA, 8(2), 61-73.

Mikael Cronhjort, Lars Filipsson, Maria Weurlander, Mejora de la participación y el aprendizaje en el cálculo de aula invertida, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, volumen 37, número 3, septiembre de 2018, páginas 113–121.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio. p. 53.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio. p. 52

Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology-based mathematics lesson. International Journal of Computers for Mathematical Learning.

Mosquera. H. E. (2017). Desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas, a través de la resolución de problemas. (Tesis de pregrado) Facultad de educación. Universidad de Antioquia.

Mushipe, M. y Ogbonnaya, UI (2019). Geogebra y los logros de los alumnos de 9º grado en funciones lineales. University of South Africa, Pretoria. South Africa.

NCTM. (2011). Technology in teaching and learning mathematics. A position of the national council of teachers of mathematics. [Retrieved September 17, 2015]

NCTM—National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas.p. 28.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas

Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de marzo de 2021 de la URL: http: www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/

Sagenmüller, I. (2016). Beneficios de la tecnología en educación.

Selwyn, Ch 1: Revisiting the Promise of Digital Technology in Schools. In Schools and Schooling in the Digital Age: A Critical Analysis. Abingdon, UK: Routledge, 2011.

UNESCO ICT Competency Framework for Teachers. (2011). Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

Villa, J. y Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, (27), 1-21.

Wijaya, TT, Ying, Z., Chotimah, S. y Bernard, M. (agosto de 2020). Software matemático dinámico de Hawgent como medio de aprendizaje de matemáticas para enseñar funciones cuadráticas. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1592, No. 1, p. 012079). Publicación IOP.

ANEXOS

Anexo 1. La encuesta a docentes empleando el método Delphi

Objetivo: El objetivo de esta encuesta es caracterizar la importancia del uso de herramientas digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en especial en funciones y sus gráficas.

Estimado docente, su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca implementar una metodología utilizando herramientas digitales para desarrollar el pensamiento con relación a funciones y sus gráficas. Muchas gracias por su colaboración.

Datos generales.

Nombre y apellido: ___________________________________.

¿Usted es Licenciado en matemáticas? Si____, No____.

Años de experiencia orientando cursos de matemáticas: _____.

Preguntas cerradas: De acuerdo con cada pregunta de la tabla, valore con la siguiente escala: Siempre (S); casi siempre (C.S.); A veces (A.V.); Casi nunca (C.N.) y Nunca (N).

Tabla 10.

PREGUNTAS	S	C.S.	A.V.	C.N.	N
1. ¿Considera usted que es de gran importancia el uso de la visualización para la enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados a gráficas y sus funciones?					
2. ¿Para el desarrollo de sus clases relacionadas a gráficas y sus funciones utiliza algún tipo de software?					

3. ¿considera usted que es importante las herramientas digitales para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la actualidad?					
4. ¿Cree usted que las herramientas digitales permiten crear, construir y desarrollar problemas matemáticos?					
5. ¿Usted cree que al utilizar herramientas digitales para la enseñanza de la matemática incentiva y motiva al estudiante?					

Preguntas abiertas:

6. ¿Qué actividades con herramientas digitales, recomendarías para la enseñanza y el aprendizaje de funciones y sus gráficas?

7. Mencione algún tipo de problema o actividad propuesta por usted, en la clase de matemáticas utilizando herramientas digitales, en las que sus estudiantes sí lograron, desarrollar el pensamiento con relación a funciones y sus gráficas.

8. Mencione que tipo de dificultades o problemas presentan los estudiantes al utilizar las herramientas digitales en la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas.

Análisis de la encuesta de expertos en matemáticas para establecer el consenso.

Esta encuesta fue realizada a 10 docentes de matemáticas para establecer el consenso de los criterios de los expertos. Primero se realiza la tabla de valores absolutos, luego la tabla de frecuencia de valores absolutos acumulados, a continuación, la distribución de frecuencias relativas acumuladas y por último la función recíproca de la distribución normal y determinación de los puntos de corte o límites, para establecer el consenso de las preguntas.

Tabla de valores absolutos:

PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	A VECES	CASI NUNCA	NUNCA
1	6	4	0	0	0
2	4	3	3	0	0
3	8	2	0	0	0
4	7	1	2	0	0
5	5	2	3	0	0

Tabla de frecuencia de valores absolutos acumulados:

PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	A VECES	CASI NUNCA	NUNCA
1	6	10	10	10	10
2	4	7	10	10	10
3	8	10	10	10	10
4	7	8	10	10	10
5	5	7	10	10	10

Distribución de frecuencias relativas acumuladas.

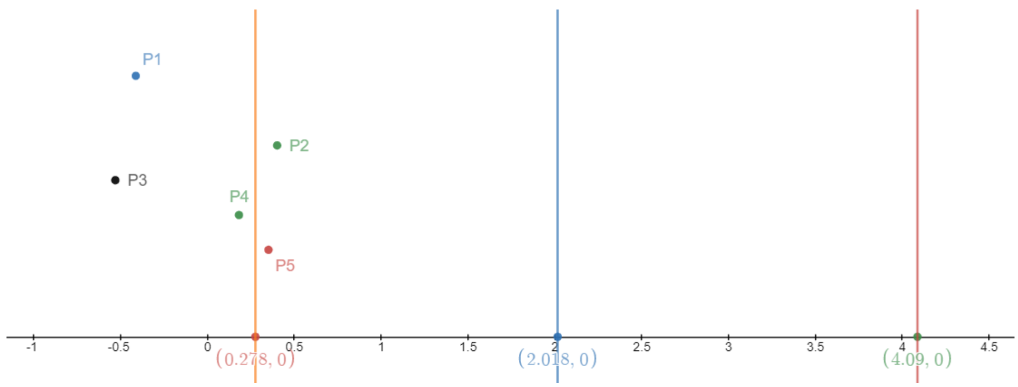
PREGUNTA	SIEMPRE	CASI SIEMPRE	A VECES	CASI NUNCA	NUNCA
1	0,6	1	1	1	1
2	0,4	0,7	1	1	1
3	0,8	1	1	1	1
4	0,7	0,8	1	1	1
5	0,5	0,7	1	1	1

Función recíproca de la distribución normal y determinación de los puntos de corte o límites.

PREGUNTA	S	C.S.	A.V.	C.N.	N.	SUMA	PROM	N-P
1	0,26	4,09	4,09	4,09	4,09	16,62	3,324	-0,4108
2	-0,25	0,53	4,09	4,09	4,09	12,55	2,51	0,4032

3	0,85	4,09	4,09	4,09	4,09	17,21	3,442	-0,5288
4	0,53	0,85	4,09	4,09	4,09	13,65	2,73	0,1832
5	0	0,53	4,09	4,09	4,09	12,8	2,56	0,3536
SUMA	1,39	10,09	20,45	20,45	20,45	72,83	14,566	
PUNTOS DE CORTE	0,278	2,018	4,09	4,09	4,09	14,566	/5	2,9132
PP						/5	2,9132	

De acuerdo con la tabla anterior se tienen puntos de corte a 0,278; 2,018 y 4,09 para analizar la ubicación del valor de cada pregunta. Se tiene:



Conclusión.

De acuerdo con la gráfica anterior se puede evidenciar un consenso en relación con las preguntas planteadas, ya que algunas se encuentran al lado izquierdo del primer corte y las otras muy cerca también a este.

Este consenso muestra que en la práctica docente es importante la integración de las herramientas digitales para la enseñanza de funciones y sus gráficas debido a que se puede visualizar y modelar problemas relacionados a funciones, también puede generar otras formas de enseñanza que motive al estudiante.

Anexo 2. Comunidad académica Desmos

Objetivo: Formar un grupo o comunidad de profesores usando la aplicación Desmos. Se conoció y trabajó por primera vez la plataforma Desmos en el año 2018 con la temática de cónicas en el grado décimo, tratando de implementar una herramienta digital que facilite la visualización y modelación de problemas en matemáticas.

Al socializar los trabajos realizados por los estudiantes a compañeros docentes, les pareció muy interesante y fácil, debido a los beneficios que se podían tener, como por ejemplo trabajar en línea, ver en qué punto de la actividad se encuentra cada estudiante, que problemas presentan los estudiantes, cómo respondió cada estudiante a una pregunta, trabajar alguna parte o toda la actividad, en cualquier momento pausar la actividad, aunque lo que más les llamó la atención fue las herramientas que presenta la plataforma Desmos para realizar las actividades y mucho más las actividades dinámicas.

A comienzos del año 2020, cuando estaba empezando la pandemia por el coronavirus, formamos un grupo de 5 profesores que trabajan en la plataforma Desmos (compañeros del trabajo), para facilitar el trabajo en las clases virtuales con los estudiantes, comenzamos a compartir material y actividades creadas en Desmos por cada uno de nosotros por medio de WhatsApp.

Más amigos y compañeros docentes se unieron al grupo, durante el 2020 a 2022, ahora somos 17 docentes que compartimos actividades interesantes que motivan a los estudiantes a resolver problemas o situaciones dinámicas.

Anexo 3. Encuesta de satisfacción a la comunidad académica Desmos.

Objetivo: Conocer el impacto que ha generado la plataforma Desmos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los docentes.

La encuesta se encuentra en el siguiente enlace.
https://questionpro.com/t/AVCoWZrliR

Anexo 4. Encuesta de satisfacción a estudiantes de grado once.

Objetivo: Conocer el impacto y motivación que ha generado la plataforma Desmos en la enseñanza y aprendizaje de las funciones y sus gráficas en los estudiantes de grado once del colegio Liceo Piñeros Cortés.

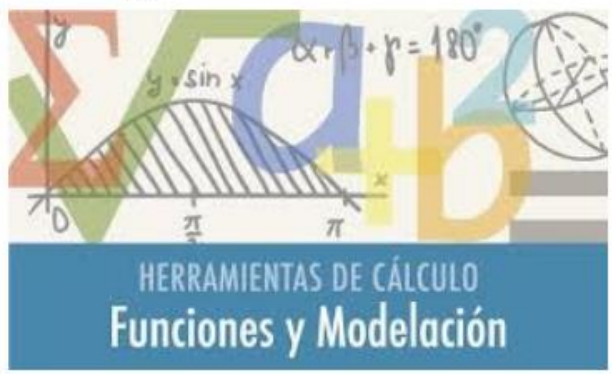
La encuesta se encuentra en el siguiente enlace.
https://questionpro.com/t/AVCoWZss4t

Anexo 5. Mostrar con mayor detalle la actividad 1

Introducción a las funciones y gráficas.

La noción de función es una idea fundamental en matemáticas. Porque las funciones son la base de la mayoría de las aplicaciones matemáticas en casi todas las áreas y de gran utilidad para resolver problemas de finanzas, economía, física, tecnología y de cualquier situación que relacione variables.

El objetivo de esta actividad es introducir el concepto de función y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico, simbólico y verbal aplicando la modelación matemática con problemas de la vida cotidiana.



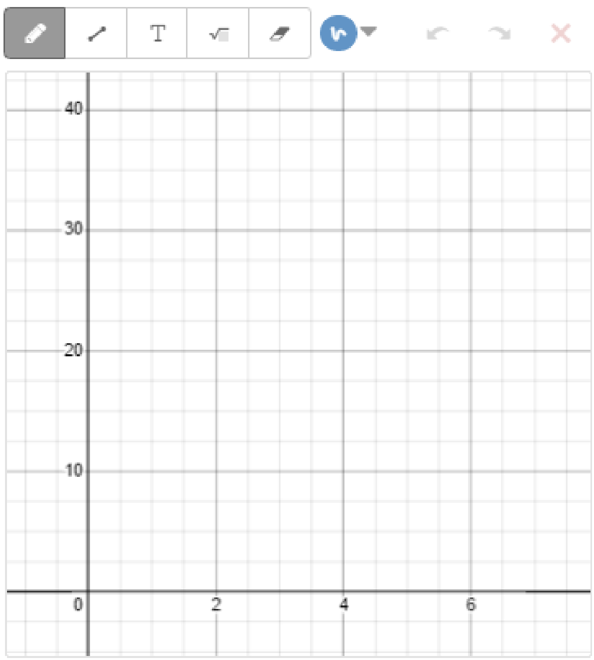
Concepto de función

Cuando se invierte un capital a una tasa de interés ***I*** depende del tiempo ***t*** en que el capital dure invertido. Supóngase que se invierte un capital de $\$100\,000$ a una tasa de interés simple del 5% mensual; de esta forma, el interés y el tiempo se relacionan con la fórmula $I = f(t) = 100(0.05 \cdot t)$, donde ***I*** está en miles de pesos y *t* en meses.
Por ejemplo, si *t=2*, entonces el interés está dado por $I = f(2) = 100(0.05 \cdot 2) = 10.$

De acuerdo a la información anterior completa la tabla para los meses que se indican.

MESES	INTERÉS
0	
1	
2	
3	
4	
5	

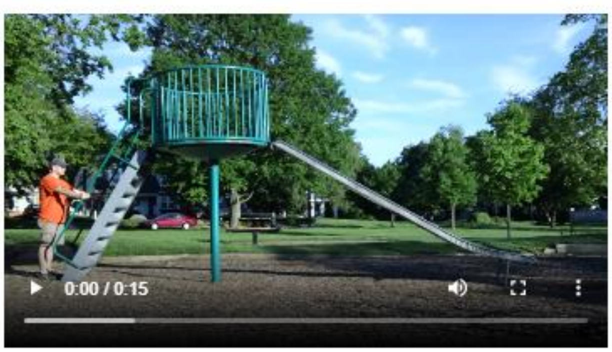
Concepto de función



De acuerdo con la tabla anterior, ubica las coordenadas en el plano cartesiano, tomando los datos de los meses en el eje ***x*** y el interés en el eje ***y***, luego responde y justifica las siguientes preguntas en el siguiente recuadro:
A. ¿Qué relación tiene la variable ***t*** con la variable ***I***?
B. ¿Esa relación representa una función? ¿Por qué?
C. ¿Se puede predecir el comportamiento en cualquier valor de t?

Compartir con la clase

Modelar una situación



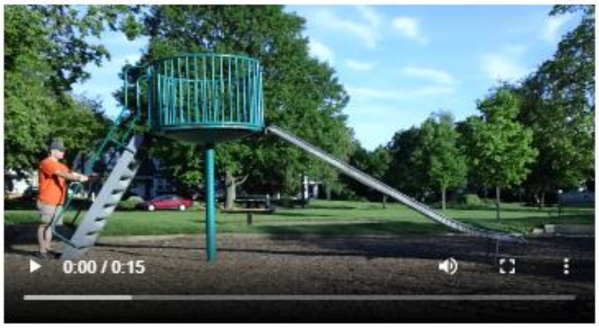
(Actividad modificada de Desmos, Graficando Historias, 2020)

Mira el video y responde las siguientes preguntas:

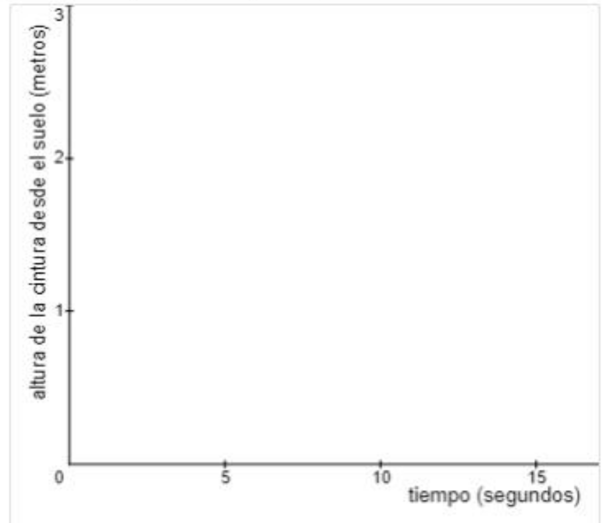
A. ¿Cuáles variables están cambiando con respecto al tiempo en este video?
B. ¿Esa relación entre las variables que se observan en el video representa una función?, ¿Por qué?

Compartir con la clase

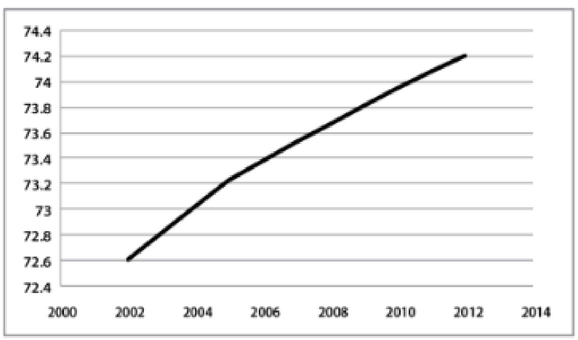
Gráfica la relación



(Actividad modificada de Desmos, Graficando Historias, 2020)
De acuerdo al video, gráfica la relación que hay entre la altura de la cintura desde el suelo con respecto al tiempo.



Representar funciones con gráficos



Escobar, Evelyn & Sánchez, Tania & Hermosa, Julio. (2016). La educación y el ingreso como determinantes de la esperanza de vida en Colombia - 2002-2012. Tendencias. 17. 31. 10.22267/rtend.161702.2.

El gráfico de la figura muestra el aumento de la esperanza de vida en Colombia del año 2002 al 2012. De acuerdo con la imagen y la información responde las siguientes preguntas:
A. ¿Qué variables puedes observar?
B. Al comparar la esperanza de vida en el 2004 con la del 2012. ¿Qué se puede concluir?
C. Con la información de la gráfica, ¿Se podrá predecir la esperanza de vida en un futuro no muy lejano? ¿Por qué?

Compartir con la clase

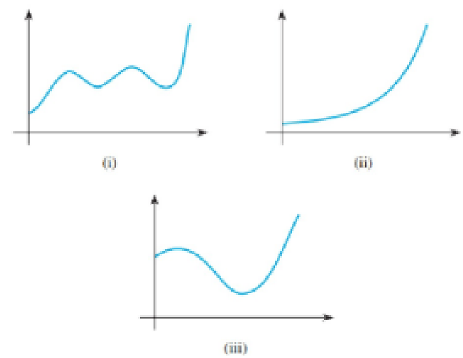
Relación de función con su grafico

Los siguientes gráficos muestran el nivel de ruido de los estudiantes de once de un colegio que ven jugar al equipo de futbol en la final del campeonato por el título de la liga. Relacione los tres gráficos con los escenarios (reacciones) correspondientes.

A. Nuestro equipo comenzó lentamente, pero eventualmente comenzó a ganar.

B. El partido oscilaba de un lado a otro, pero nosotros finalmente ganamos con un gol sobre el final.

C. Nuestro equipo empezó bien, luego la oposición tomó la delantera, pero finalmente ganamos.



Escenario	Gráfica
A.	
B.	
C.	

Describir el comportamiento de las funciones.

Considere la montaña rusa que se muestra en la figura adjunta. Los puntos A, B, C, D, E y F dividen el comportamiento matemático de la curva.

1. Identifique y gráfique todos los intervalos donde la curva es:

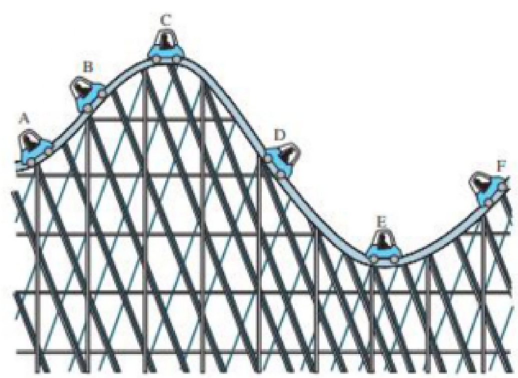
A. creciente;
B. decreciente;
C. cóncava arriba;
D. cóncavo hacia abajo.

Luego indica todos los puntos donde la curva tiene:

E. puntos extremos;
F. máximo local;
G. mínimo local;
H. puntos de inflexión.

2. Describa si la velocidad de los autos aumenta o disminuye a un ritmo creciente o decreciente.

Entregar



(Actividad modificada del libro de Sheldon P. Gordon, Florence S. Gordon, Alan C. Tucker, Martha J. Siegel - Functioning in the Real World_ A Precalculus Experience-Pearson (2003))

Problemas de aplicación.

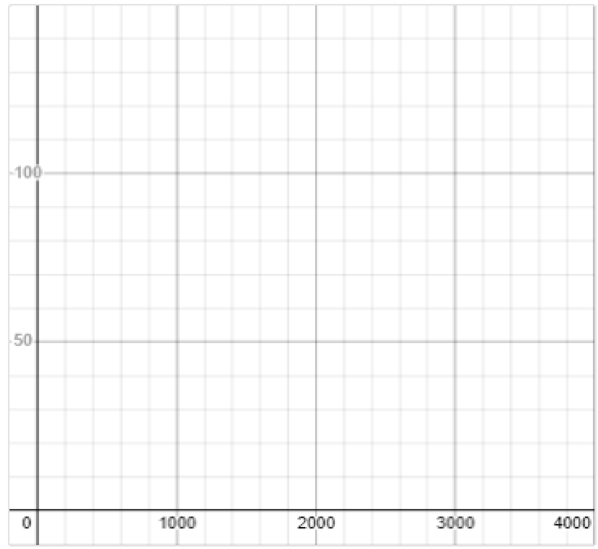
El gobierno nacional cobra un impuesto I sobre las ventas, correspondiente al 3% sobre el valor de los artículos adquiridos x, donde I y x se expresan en pesos.

A. Completa la tabla de valores y realiza la gráfica.

B. Expresa I en función de x.

C. Determine $I(2500)$ y $I(18000)$

x (Valor de los artículos)	I (Valor del impuesto)
0	
1 000	
2 000	
3 000	
4 000	



Compartir con la clase

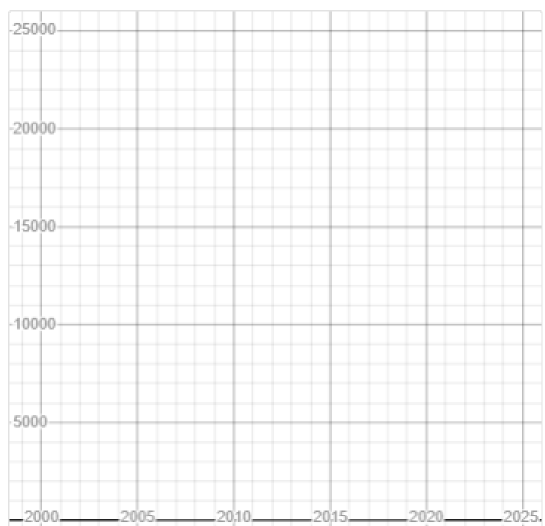
Problemas de aplicación.

El promedio Dow-Jones de 30 acciones industriales es probablemente la medida más observada del desempeño del mercado de valores. A continuación, se encuentran los valores Dow al comienzo de cada año desde 2000 hasta 2020.

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
DOW JONES	10 177	10 126	10 326	7 855	10 401	10 551	11 150	12 348	12 423	8 005	10 251

AÑO	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
DOW JONES	11 476	12 672	13 868	16 252	17 807	16 561	20 150	25 884	24 935	22 843

Datos tomados directamente de la plataforma Dow Jones Industrial Average.



Grafique los datos y describa el comportamiento del mercado de valores durante este período de tiempo. Luego responde las siguientes preguntas:

A. ¿Cuándo subió?

B. ¿Cuándo cayó?

C. ¿Qué años habrían sido los mejores para comprar acciones?

D. ¿Cuáles habrían sido los peores momentos para hacerlo?

Compartir con la clase

Problema retador.

Considere una función $f: R \to R$, definida por $f(x) = ax + b$, con $a, b \in R$. Sabiendo que $f(6) = 3$, Hallar el valor numérico de $f(f(5)+f(7))$.

Compartir con la clase

Problema retador.

Un cono regular recto invertido tiene 20 cm de radio y 50 cm de altura, como se muestra en la figura. El cono contiene un líquido que está saliendo del mismo, de tal forma que el volumen dentro del cono está cambiando continuamente.

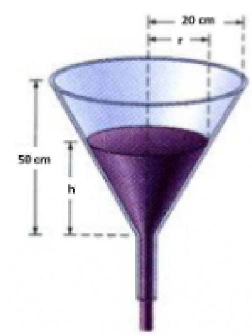
a. Escriba el radio r del volumen de la sustancia en términos de la altura h.

b. Escriba una expresión del volumen V del líquido en función de la altura h.

c. Obtenga el dominio de la función.

d. Calcule la altura para la cual el volumen del líquido es la mitad del volumen total del recipiente.

Compartir con la clase



(Problema modificado de 2 modelando funciones, 2018)

Anexo 6. Mostrar con mayor detalle la actividad 2

Introducción a la función lineal.

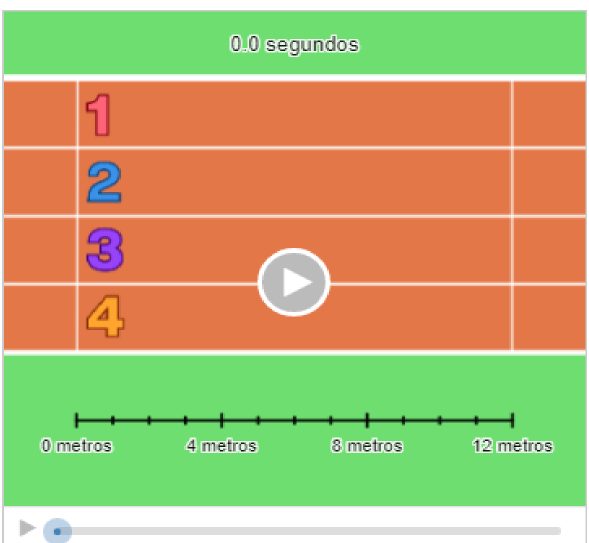
La familia de funciones muy util son las funciones lineales.
Las funciones lineales son usadas en el estudio de las ciencias y para modelar problemas de la vida real.
Estas situaciones son convertidas en ecuaciones matemáticas lineales que luego son resueltas usando varios métodos algebraicos o gráficos.

Con las funciones lineales, podemos resolver problemas de finanzas, economía, física, tecnología y de cualquier situación que relacione variables directamente proporcionales, como, por ejemplo, el consumo de un servicio de agua, luz, gas, teléfono, etc.
La gráfica de una función lineal es siempre una línea recta.

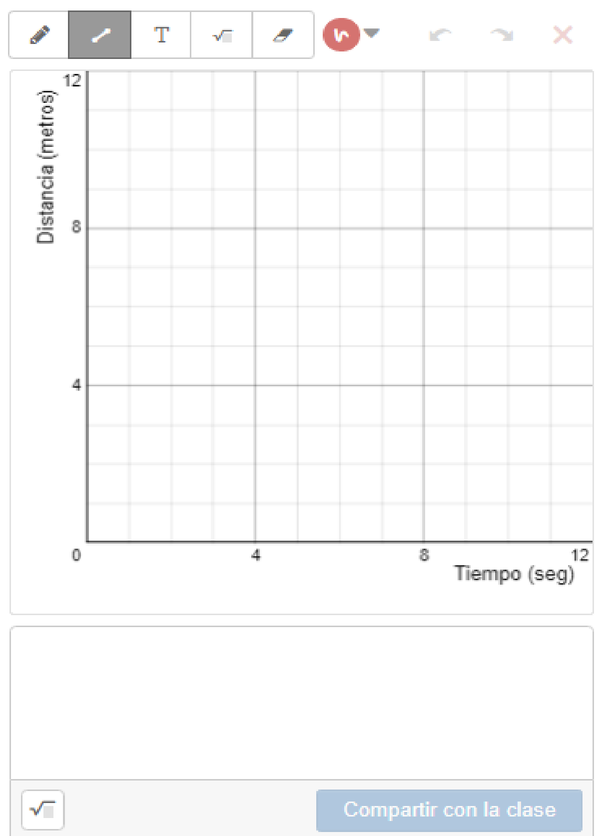
Imagen tomada de: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales/3eso_quincena10.pdf

Identificar la función lineal.

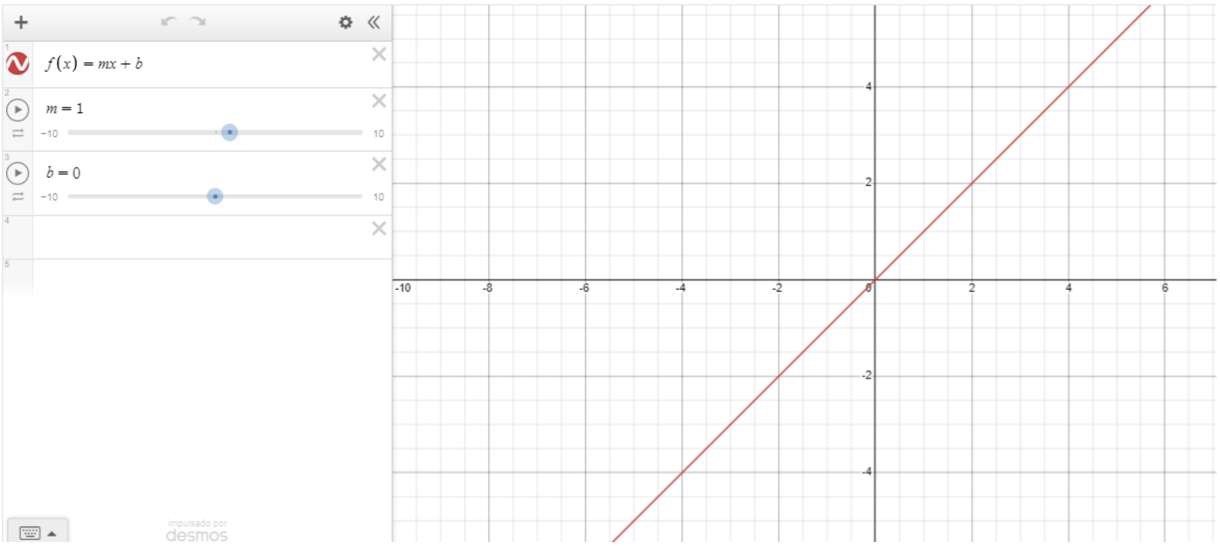
Crea tu propia carrera dibujando gráficas para cuatro tortugas con las siguientes condiciones;
Todas las graficas inicien en el punto (0,0) y dos de ellas tengan una relación proporcional.
Luego, compara y escribe las diferencias entre ellas. Usa un color distinto para cada tortuga.



(Actividad modificada de Desmos, Turtle Time Trials, 2020)

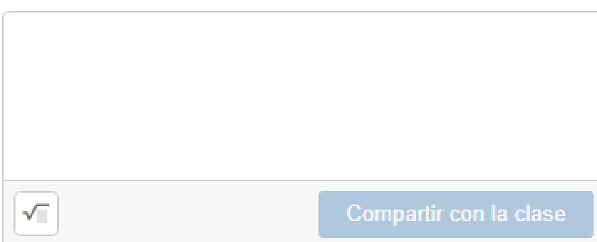


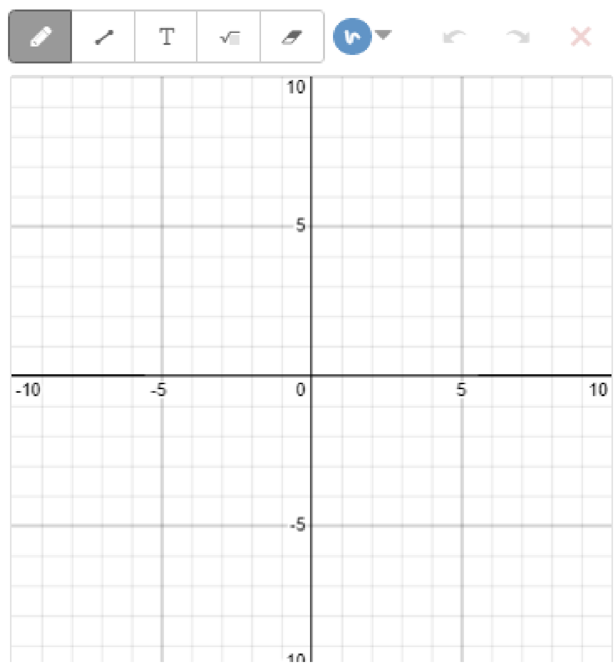
Observa lo que sucede al cambiar los deslizadores a y b.



Interpretación de la pendiente y el punto de corte en el eje Y.

1. De acuerdo con la actividad anterior, escribe que sucede con el deslizador m cuando $m < 0$, $m = 0$ y $m > 0$.
2. También, escribe que sucede con el deslizador b cuando $b < 0$, $b = 0$ y $b > 0$.
3. Escribe una ecuación de una función creciente y otra decreciente que pase por el origen.
4. Escribe una ecuación de una función creciente y otra decreciente que no pase por el origen.
5. Graficar las funciones anteriores en el plano cartesiano.



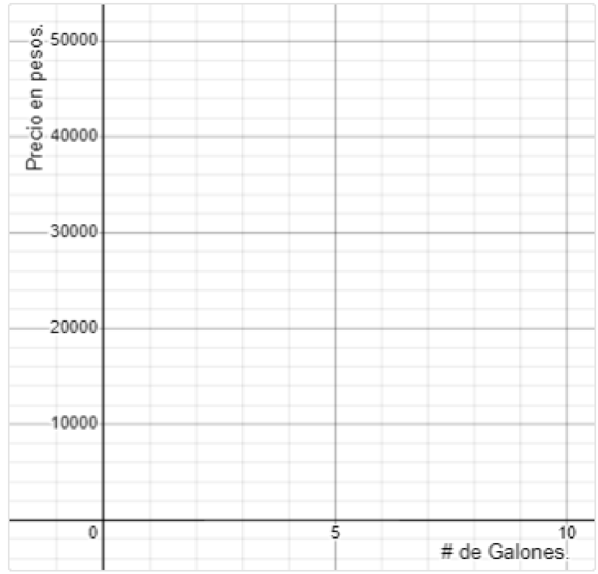


Funciones lineales que pasan por el origen

En las 13 ciudades principales de Colombia, la tarifa de la gasolina quedo en promedio a **$9 000 pesos por galón.**
De acuerdo con la información.
A. Completa la tabla de valores.
B. Gráfica la función que relaciona el número de galones con el precio.
C. Determina la ecuación de la función.
D. Determina las funciones y grafiqué, si el precio sube a $10 000 y $11 000 pesos por galón y compáralas entre sí.

# de Galones. (G)	Precio en pesos. (P)
1	
2	
3	
4	

Entregar

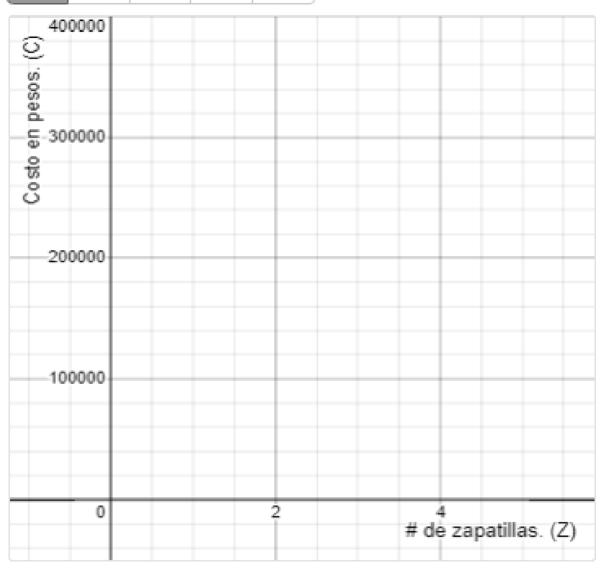


Líneas rectas que no pasan por el origen

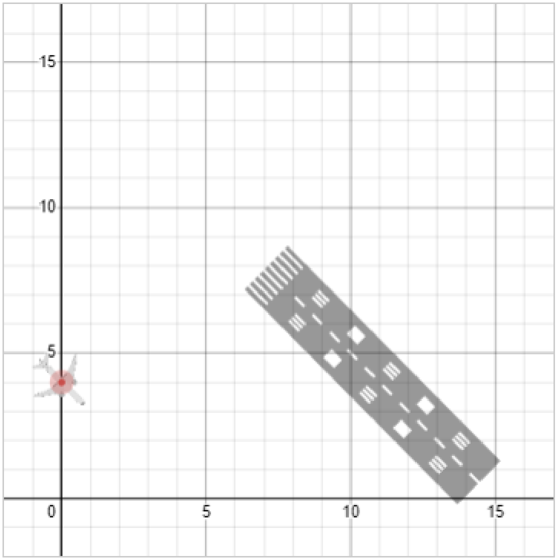
Un proveedor mayorista de zapatillas, realiza una tabla de valores para los almacenes de acuerdo al número n de unidades ordenadas.
De acuerdo a la tabla de valores:
A. Realiza la gráfica.
B. Determinar una función lineal que modele los costos.
C. Escriba que relaciona la pendiente de la función con el problema y también, la intersección vertical.

# de zapatillas. (P)	Costo en pesos. (C)
1	120 000
2	200 000
3	280 000
4	360 000
...	...

Entregar



Una línea recta puede ser útil.



(Actividad modificada de Desmos, Land the Plane, 2020)

Las líneas rectas pueden ayudarnos a ser más precisos.

Mueve el avión para que aterrice de forma segura y has clic en ¨simulador¨ para observar si el avión aterriza correctamente.

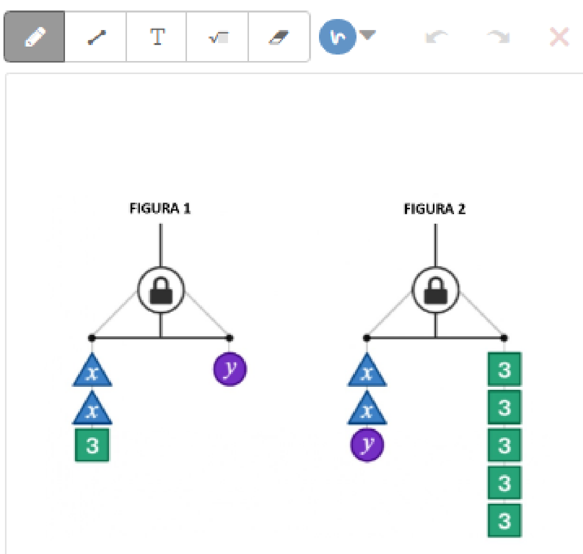
Luego, determina la ecuación de la recta que sigue la trayectoria de forma segura. (Escribe el procedimiento).

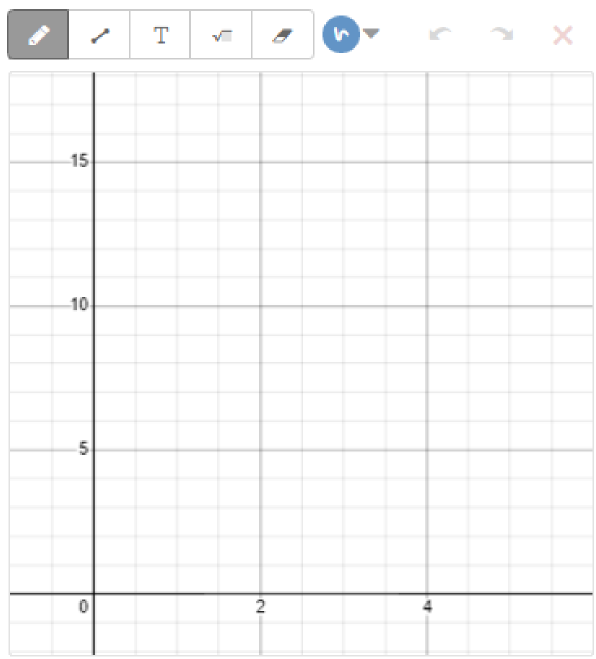
Simular

Compartir con la clase

Sistemas de ecuaciones lineales.

Julián es orfebre y tiene tres lingotes de oro para elaborar joyas, de los cuales dos son iguales. Necesita conocer las masas de cada lingote. Solo cuenta con una balanza y masas de 3 libras. por lo que Julián logra equilibrar la balanza de dos formas diferentes, como lo muestra la figura inferior.
De acuerdo con la gráfica:
A. Determine la ecuación de cada balanza en la parte inferior de la imagen.
B. Grafique cada función en el plano cartesiano.
C. Determine la masa de cada lingote y compruebe si es solución de las dos ecuaciones.

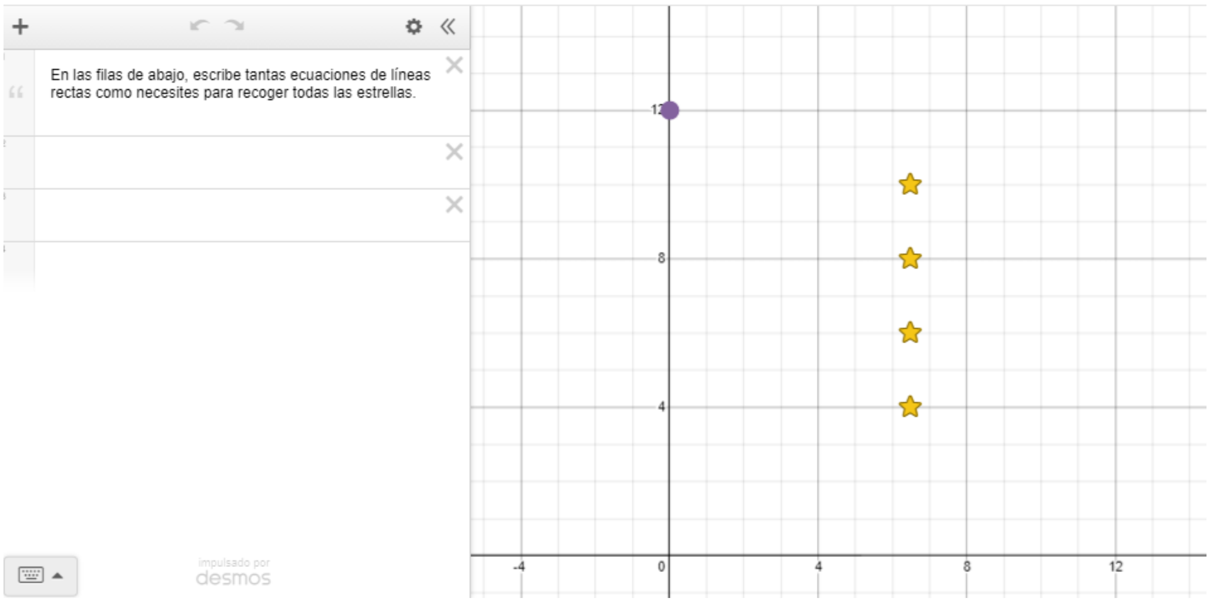




Compartir con la clase

Desafio con rectas #1

(Actividad tomada de Desmos, Marbleslides: Lines, 2020)



Aplicación de la función lineal.

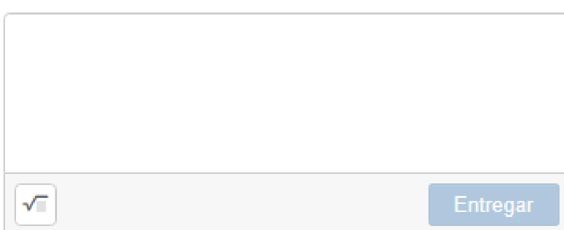
Toda relación entre magnitudes directamente proporcionales representa una variación lineal respecto a una de las magnitudes. por ejemplo, la ley de Ohm establece que la diferencia de potencial V que se aplica entre los extremos de un conductor es proporcional a la intensidad de la corriente I que circula por el conductor. El factor de proporcionalidad que aparece en la relación entre V e I es el valor de una resistencia eléctrica, es decir, V=IR.

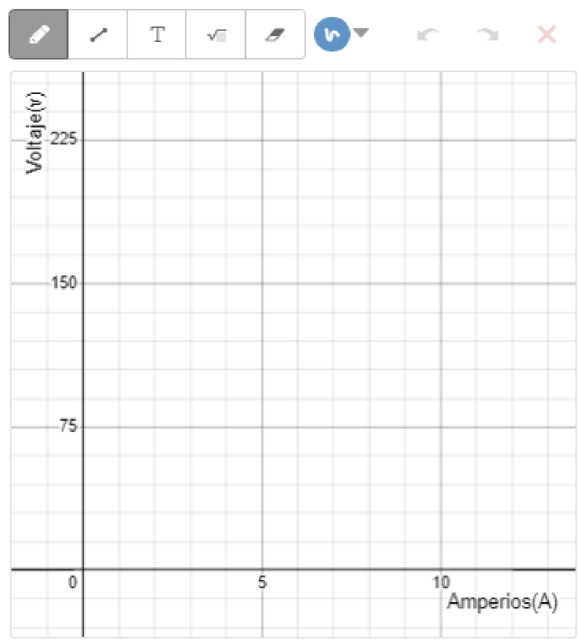
Si en un circuito eléctrico cuando I=8A entonces V= 120v y cuando I=10A entonces V=150v.

A. Realiza la gráfica de V en función de I.

B. Determina la ecuación de la gráfica.

C. Determina el valor de la corriente si V=220v.

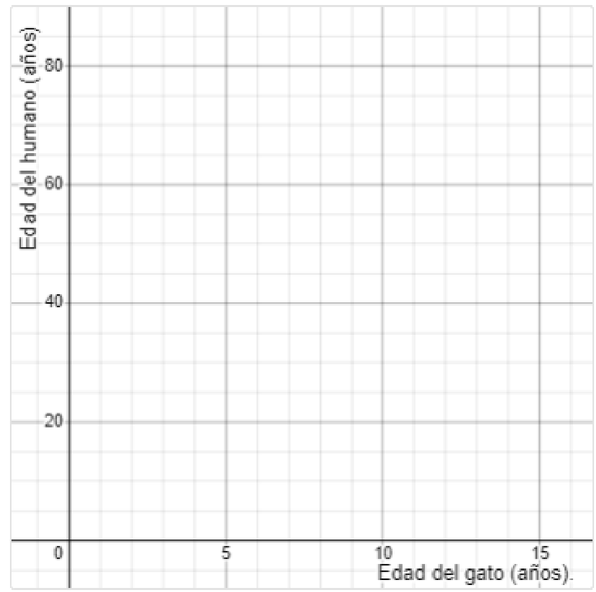




Aplicación de la función lineal.

Cada vez es más común tener como mascota un gato, pues estos son excelentes compañía.
Para identificar los cuidados que se deben tener con un gato se han realizado, por años, estudios que permiten identificar y asociar la edad de los gatos con la del humano. la relación entre la edad adulta de un gato y la de un humano puede modelarse con una ecuación lineal.
Observa la relación en la siguiente tabla:
A. Determina la ecuación de la función.
B. Grafica la función de la ecuación.
C. De acuerdo con la gráfica que puedes concluir con la relación de las edades del gato con la del humano (Hasta que edad deja de ser adulto y pasa a ser parte de la tercera edad).

Edad del gato (años)	Edad del humano (años)
2	24
3	28
4	32
5	36
...	...



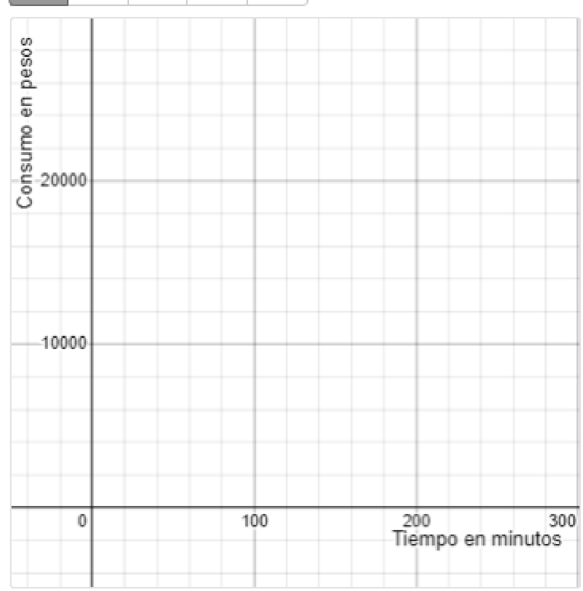
Aplicación de la función lineal.

¿Qué compañia telefonica me interesa más?

La compañía ***A*** me ofrece una cuota fija de ***$15 000*** pesos al mes más ***$50/min***.
La compañía ***B*** me ofrece pagar sólo por el consumo a ***$250/min***.
La compañía ***C*** me ofrece una cuota de ***$150/min*** con un mínimo de ***$15 000*** pesos.
De acuerdo con la información:
1. Determinar la función que describa el gasto en cada compañía.
2. Grafica cada función con diferente color.
3. Compara las funciones y escriba en qué casos es mejor cada una de ellas para tener mayor economía.

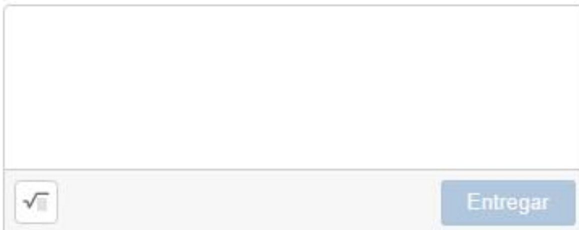
(Actividad modificada de: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_3eso_funciones_lineales/3eso_quincena10.pdf)

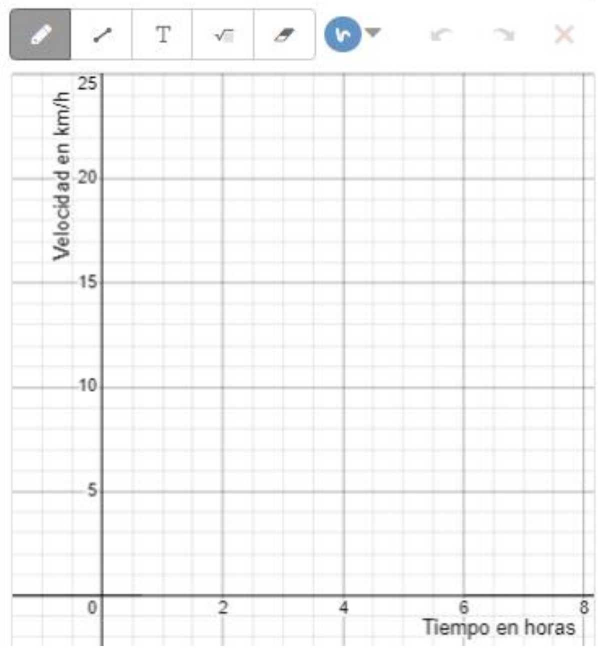
Entregar



Problema retador.

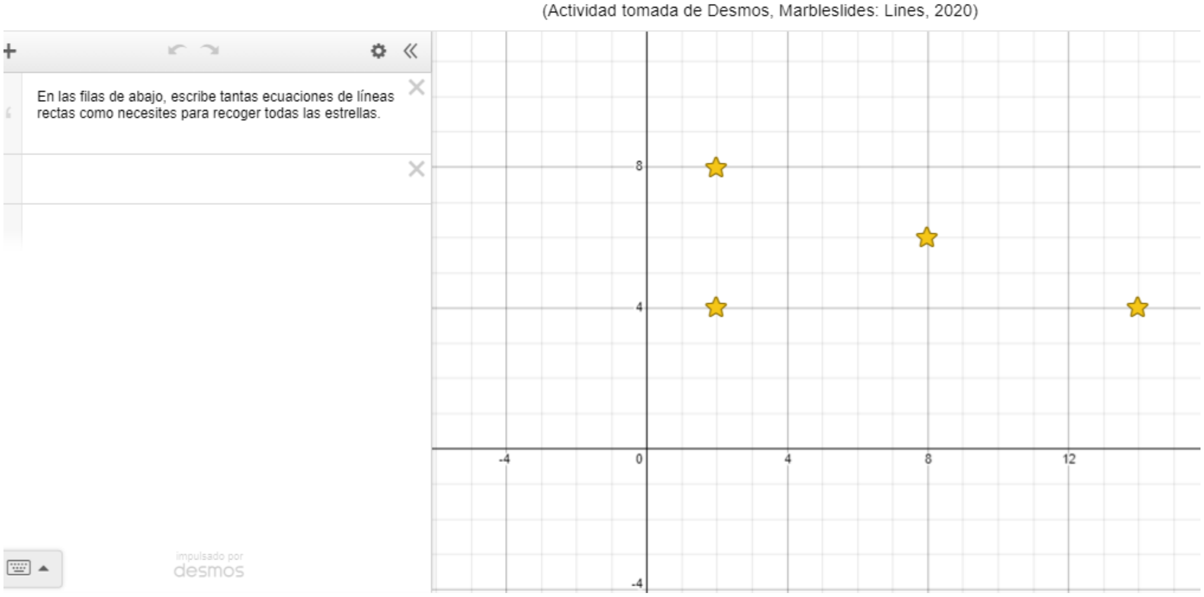
Sofía y Miguel recorren en bicicleta la misma distancia. si la velocidad de Sofía es de $15km/h$, la de Miguel es de $20km/h$ y Sofía emplea una hora más que Miguel.
Determinar:
A. El tiempo que emplea cada uno en realizar el recorrido.
B. La distancia que se ha recorrido.
Puedes apoyarte en el plano cartesiano.





Desafío con rectas #2

(Actividad tomada de Desmos, Marbleslides: Lines, 2020)



Anexo 7. Mostrar con mayor detalle la actividad 3

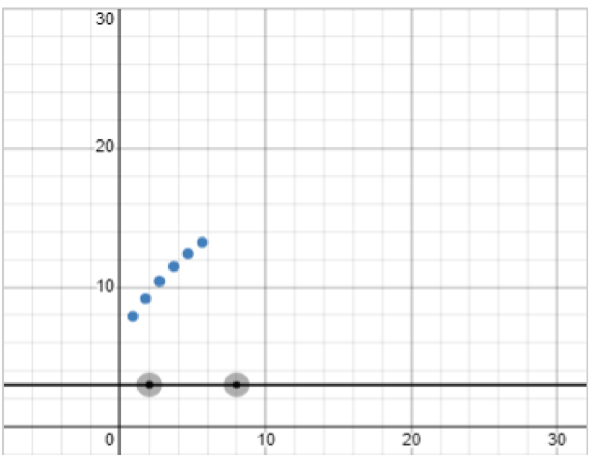
Introducción a la función cuadrática.

Las funciones cuadráticas son utilizadas en muchas áreas como en física, economía,medicina, biología, arquitectura, deportes y toda situacion que involucre o describa una parabola.
Porque son útiles para describir y modelar movimientos como la aceleración constante, trayectoria de proyectiles, ganancias, costos de empresas y obtener así información como, por ejemplo, los valores máximos o mínimos en alguna situación mencionada anteriormente.

Imagen tomada y modificada de DocPlayer, Función Cuadrática, 2022.

Crea la mejor línea de ajuste

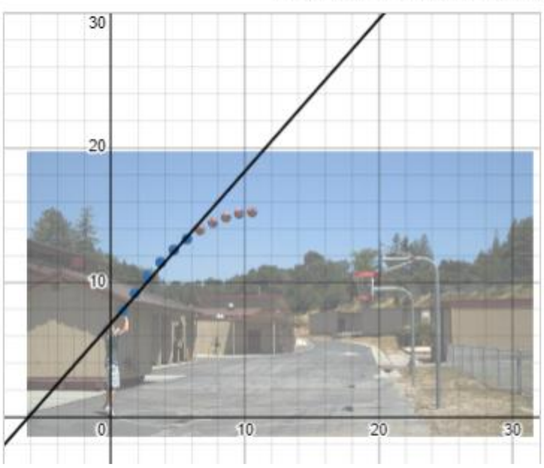
(Actividad tomada de Desmos, Will It Hit the Hoop?, 2020)



Arrastra los puntos negros para crear una línea que sirva como modelo para los puntos azules.

Crea la mejor línea de ajuste

(Actividad tomada de Desmos, Will It Hit the Hoop?, 2020)

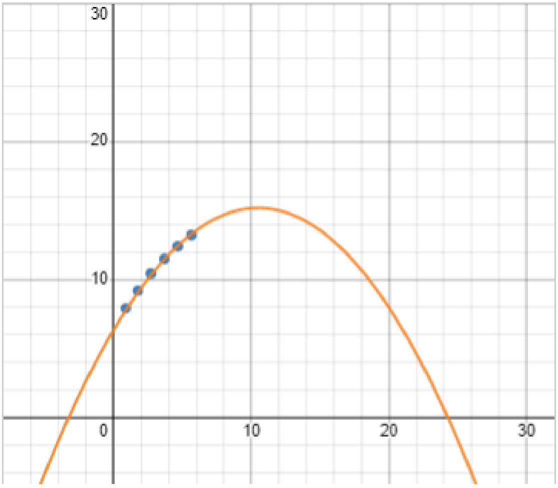


Hasta ahora tan solo hemos usado líneas rectas para modelar una relación matemática, ya que muchos modelos forman líneas rectas.

Pero una línea recta no es el modelo apropiado para esta situación. ¿Según tu línea, qué sucederá con el balón?

Crea la mejor línea de ajuste

(Actividad modificada de Desmos, Will It Hit the Hoop?, 2020)



En este caso, necesitamos una función cuadrática, la cual es útil cuando hay problemas relacionados con la fuerza gravitacional. Esta actividad es una introducción a la función cuadrática y describir su comportamiento desde los puntos de vista geométrico, numérico y simbólico aplicando la modelación matemática con problemas de la vida cotidiana.

Concepto de función cuadrática.

La trayectoria de una pelota puede representarse por la gráfica de la función $y = f(t) = 100t - 25t^2$, donde ***y*** representa la altura que alcanza la pelota (en centímetros) y ***t*** es el tiempo (en segundos) trascurridos después del golpe.

La función definida por la ecuación anterior es un ejemplo de ***función cuadrática.***

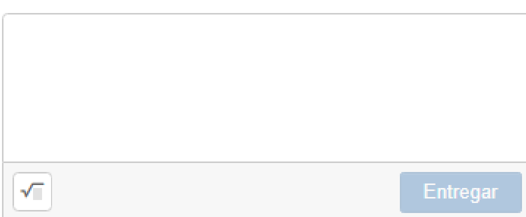
De acuerdo con la información anterior completa la tabla para los tiempos que se indican.

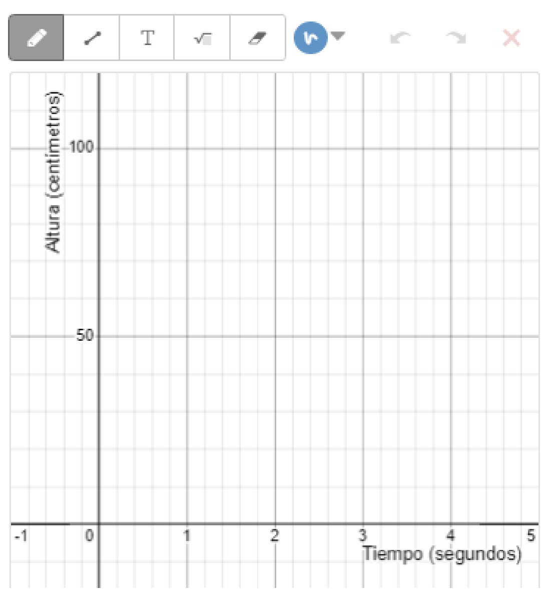
Tiempo (segundos)	Altura (centímetros)
0	
0,6	
1	
1.5	
2	
3	
4	

Concepto de función cuadrática.

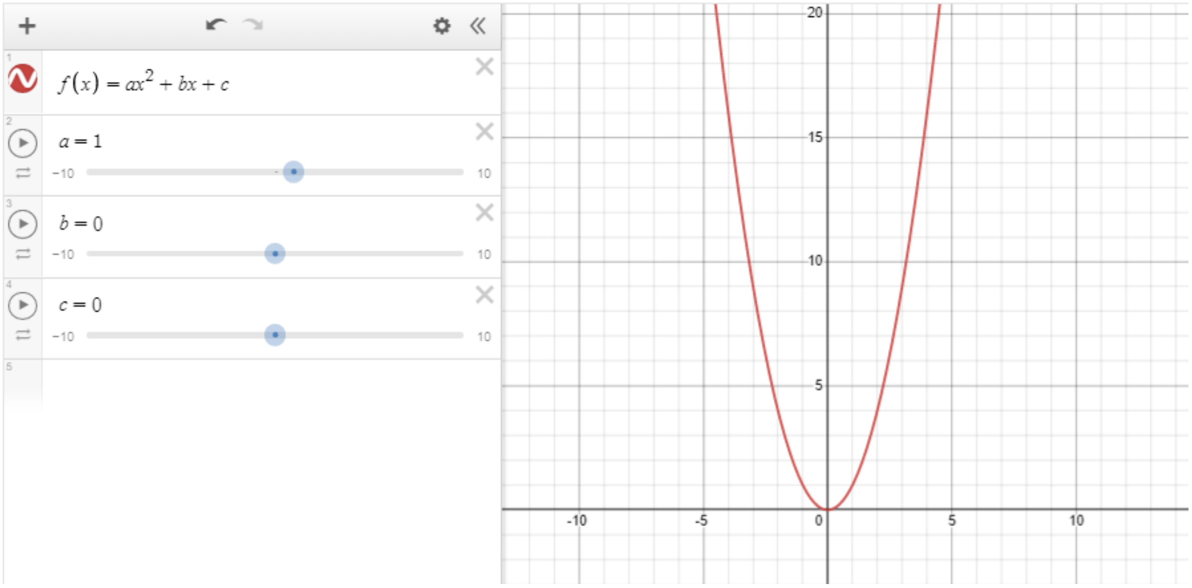
De acuerdo con la tabla anterior, ubica las coordenadas en el plano cartesiano y traza la gráfica, luego responde y justifica las siguientes preguntas en el siguiente recuadro:

A. ¿Qué tipo de gráfica se forma?
B. ¿Cuál es la altura máxima?, ¿Que nombre recibe?
C. ¿Qué intervalo es creciente, decreciente y si es cóncava hacia arriba o hacia abajo? (Graficar)



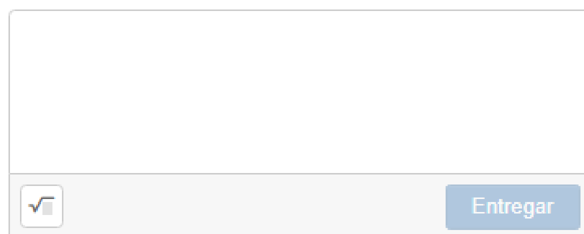


Observa lo que sucede al cambiar los deslizadores a, b y c.

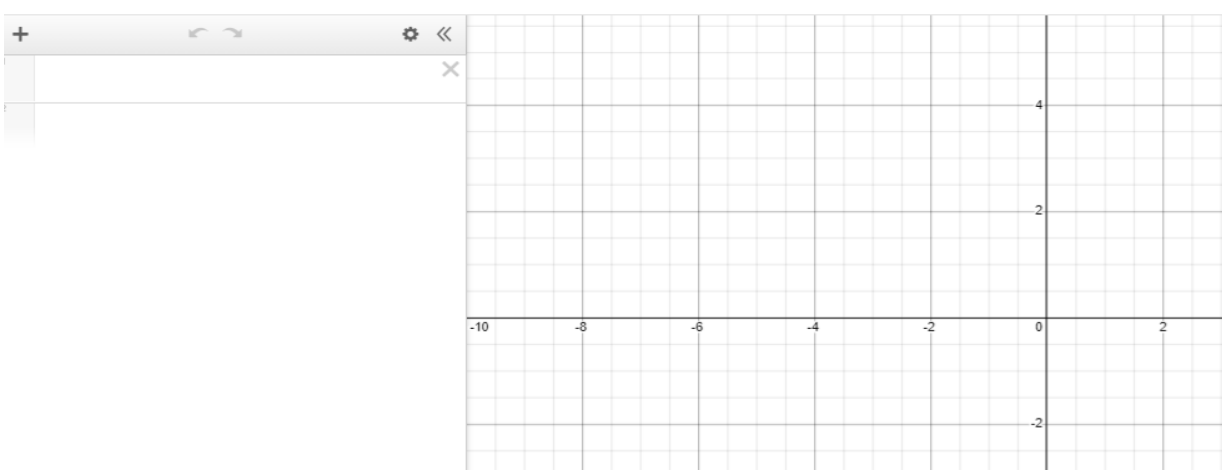


Interpretación de los coeficientes a, b y c de la función cuadrática.

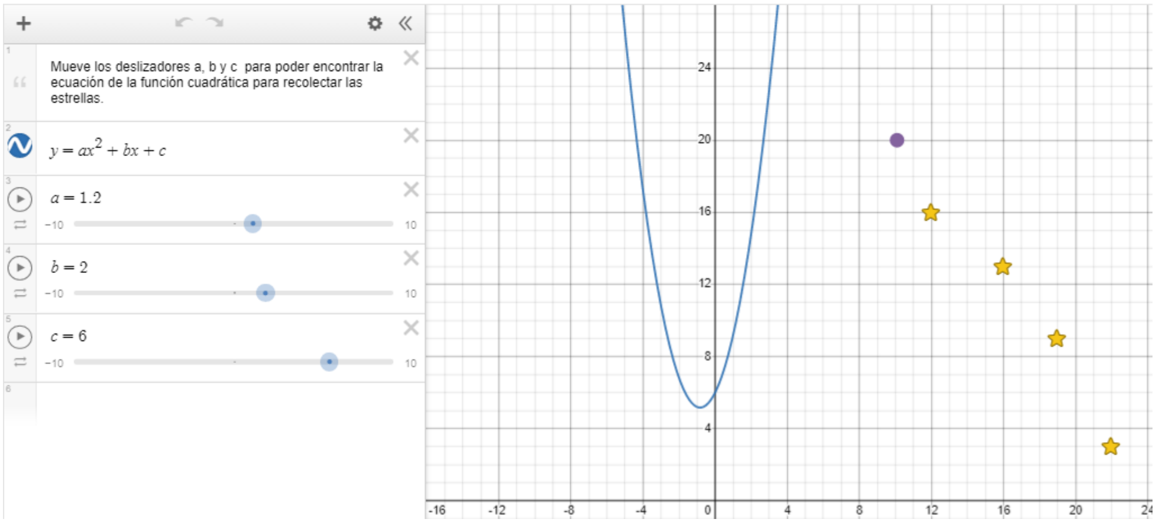
1. De acuerdo con la actividad anterior, escribe que sucede con el deslizador a cuando $a < 0$ y $a > 0$.
2. Escribe que sucede con el deslizador b cuando $b < 0$, $b = 0$ y $b > 0$.
3. También, escribe que sucede con el deslizador c cuando $c < 0$, $c = 0$ y $c > 0$.
4. Escribe tres ecuaciones de funciones cuadráticas que abran hacia arriba, la primera con una solución, la segunda con dos soluciones y la tercera sin solución.
5. Escribe tres ecuaciones de funciones cuadráticas que abran hacia abajo, la primera con una solución, la segunda con dos soluciones y la tercera sin solución.
6. Graficar tres funciones anteriores en el plano cartesiano en la siguiente diapositiva, y escribir el vértice y los puntos de corte con los ejes.



Grafica de las funciones cuadráticas.

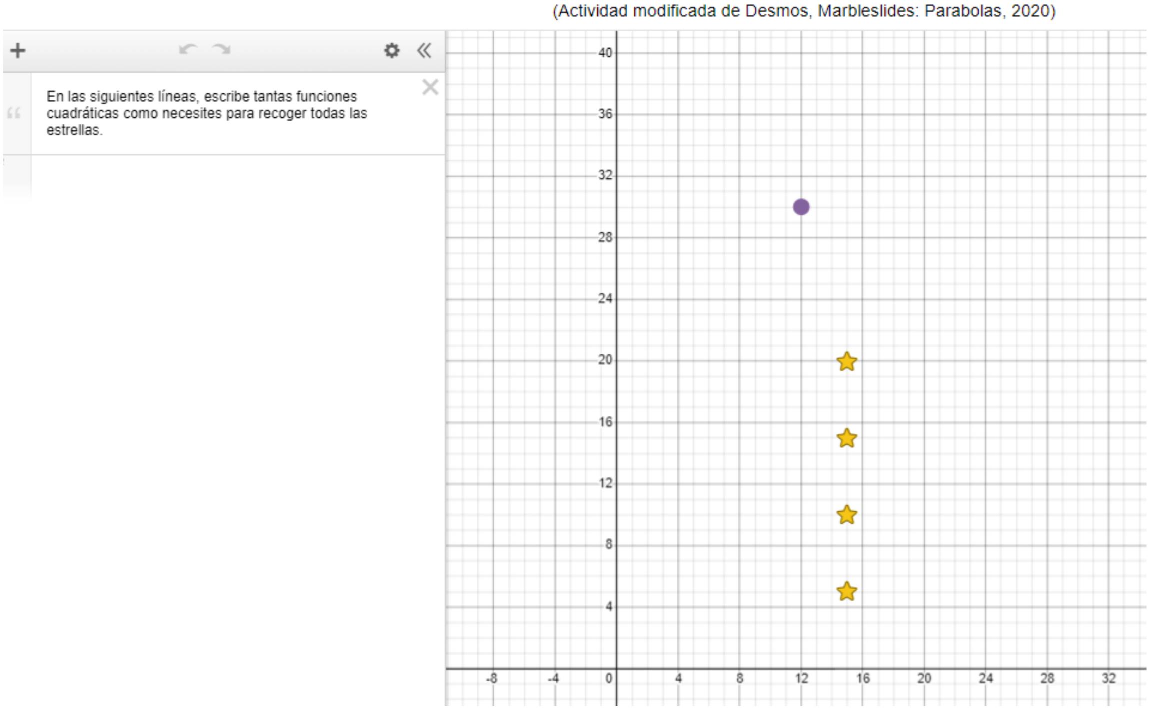


Desafío #1. Recolecta todas las estrellas.



Desafío #2. Recolecta todas las estrellas.

(Actividad modificada de Desmos, Marbleslides: Parabolas, 2020)

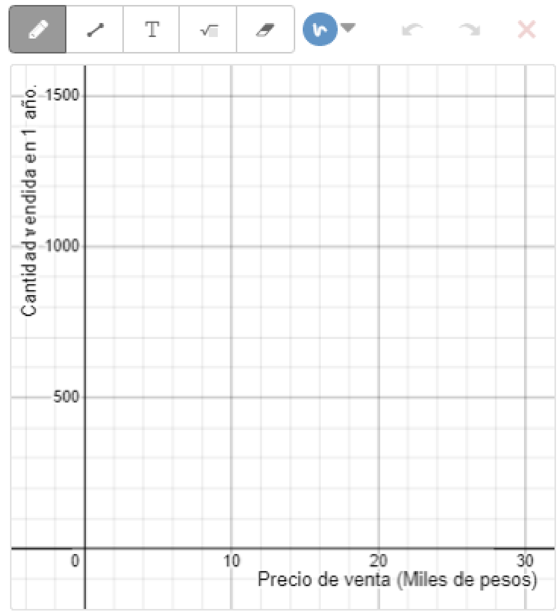


Aplicación de la función cuadrática.

La relación entre el costo de un artículo y la cantidad vendida es normalmente lineal. En otras palabras, por cada $1000 de incremento en el precio hay un decremento correspondiente en la cantidad vendida. (Piénsalo: si el precio de algo sube, ¿compras más o menos? ¡Esperemos que menos!).
Una vez que determinamos la relación entre el precio de venta de un artículo y la cantidad vendida, podemos pensar en cómo generar la máxima ganancia.

La siguiente tabla nos muestra el precio de venta de balones de futbol con la cantidad vendida en un año. De acuerdo con la tabla ubica las coordenadas en el plano cartesiano y traza la gráfica.

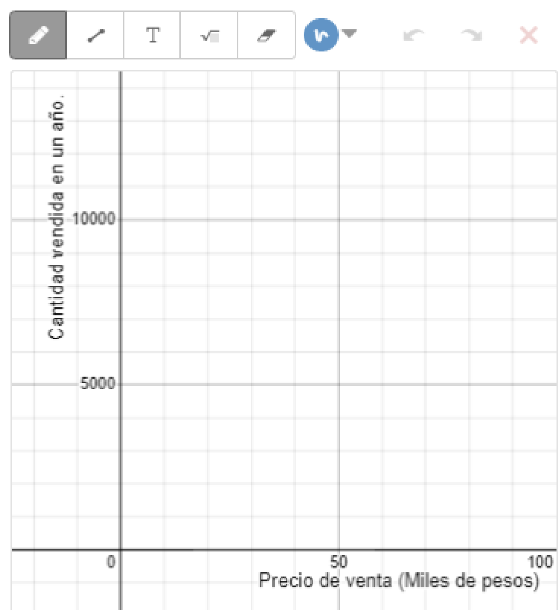
Precio de venta (Miles de pesos).	Cantidad vendida en 1 año.
$10	1000
$15	900
$20	800
$25	700



Aplicación de la función cuadrática.

De acuerdo con la información anterior:
A. Determina la ecuación que representa la gráfica.
B. Escribe una ecuación para la ganancia G teniendo en cuenta $G =$ Ingresos Totales – Costos de Producción.
(Ingresos Totales = precio • cantidad vendida), (Costos de Producción = costo por artículo • cantidad vendida)
C. Determine la ecuación de la función que relaciona el precio de venta con la ganancia anual, si el costo de producir cada balón es de $10 000 pesos.
D. Grafique la función y determine el precio de venta que produce la ganancia anual máxima.

Compartir con la clase



Aplicación de la función cuadrática.

(Actividad modificada de https://www.youtube.com/watch?v=pbJqxByKPhg, 2019)

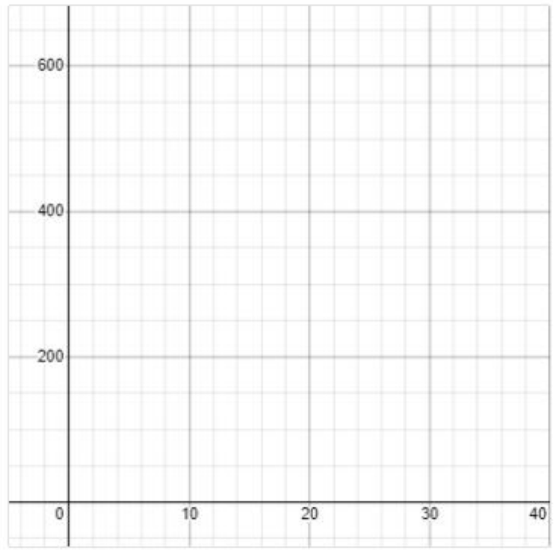
Una población de abejas se introducen en una isla para estudiar su evolución, la cual sigue un patrón de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $f(0) = 150$, la suma de sus raíces es $\frac{55}{2}$ y su producto es -75. Determinar:

a) La función que representa la población de las abejas.
b) En que día se tuvo la máxima población de abejas y cuantas había.
c) Cuantas abejas había en el día 15.
d) La grafica que describe la población de abejas.

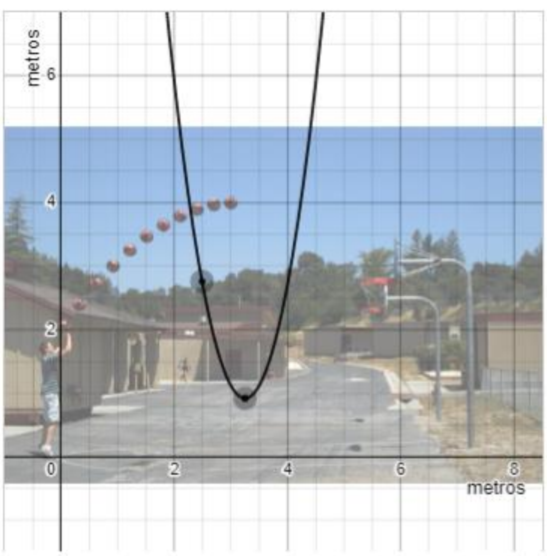
Imagen tomada de la revista El español, 2021.

Entregar



Modelando una situación.

(Actividad tomada de Desmos, Will It Hit the Hoop?, 2020)



Entra | No entra

Enviar

Analicemos el lanzamiento de la figura con las matemáticas.

Arrastra los puntos negros para transformar la función cuadrática y úsala para decidir si el balón entra o no entra entra en la canasta.
Luego determina la ecuación de la funcion cuadratica que modela el lanzamiento.

Entregar

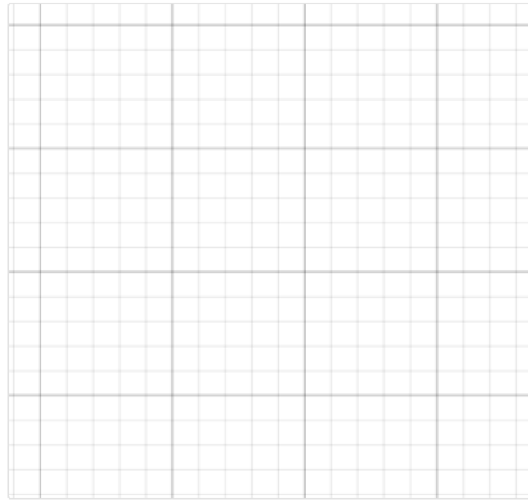
Aplicación de la función cuadrática.

(Actividad modificada de https://www.youtube.com/watch?v=TzMag8fMyks, 2020)

Un granjero quiere limitar un terreno rectangular, él cuenta con 500 metros de cerca. Si uno de los lados del terreno tiene un muro que no necesita limitar. Determinar:

a) Una gráfica que represente la situación.
b) La función que relacione el área con la longitud.
c) La longitud para el área máxima.
d) El área máxima que se puede cercar.

Entregar

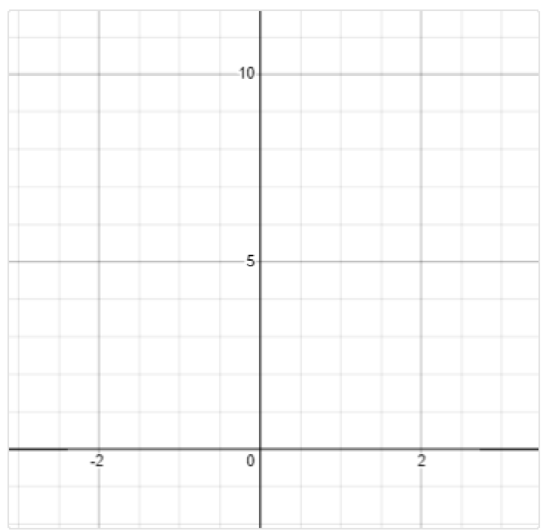


Problema retador

Problema modificado del AMC 12A del 2005.

Hay dos valores de a para los cuales la ecuación de la función $f(x) = 4x^2 + ax + 8x + 9$ tiene una sola solución para x. Determinar las dos funciones y luego realiza la gráfica.

Compartir con la clase



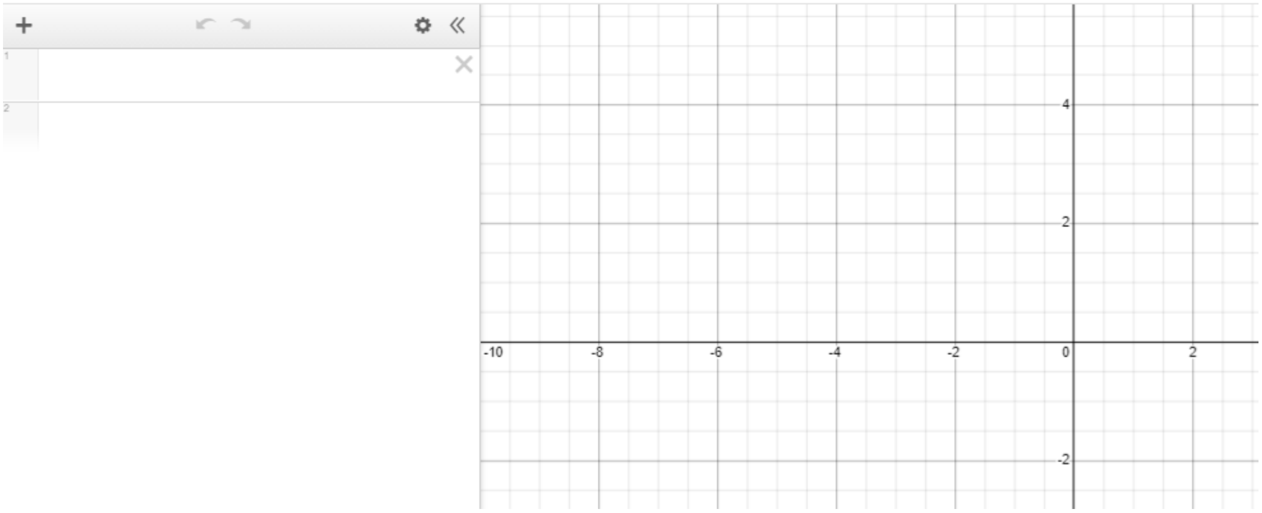
Problema retador

Problema modificado del AMC 10A del 2018.

Determinar el o los valores enteros posibles de ***k*** para los cuales las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $h(x) = x^2 - 5x + k$, tengan un punto en común entre ellas y el eje ***x***.

Compartir con la clase

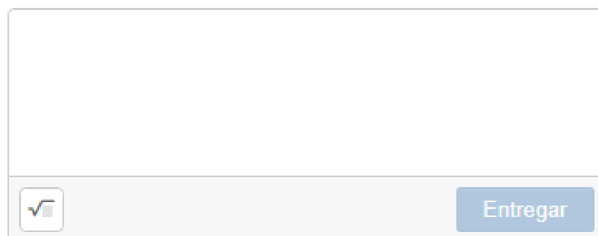
De acuerdo con el problema anterior escribe las funciones y muestra la solución.



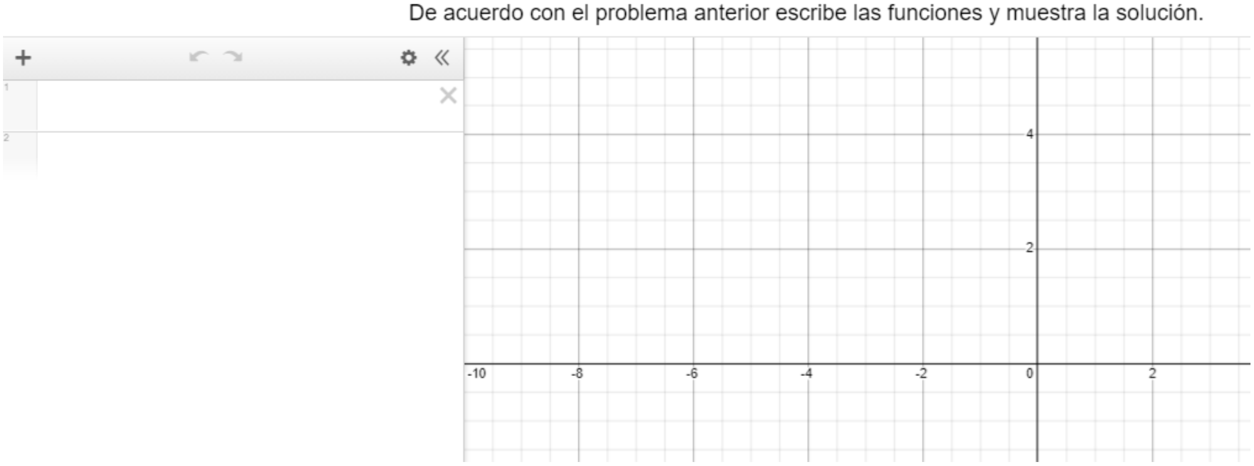
Problema retador

Problema modificado del AMC 12B del 2005.

La función cuadrática $f(x)=x^2+mx+n$ tiene un corte con el eje ***x*** y es dos veces la distancia del corte con el eje ***x*** de la función $g(x)=x^2+px+m$, teniendo en cuenta que n, m son diferentes de cero y $p=8$.
Determinar las ecuaciones que cumplen las condiciones dadas.



De acuerdo con el problema anterior escribe las funciones y muestra la solución.



Anexo 8. Mostrar con mayor detalle la actividad 4

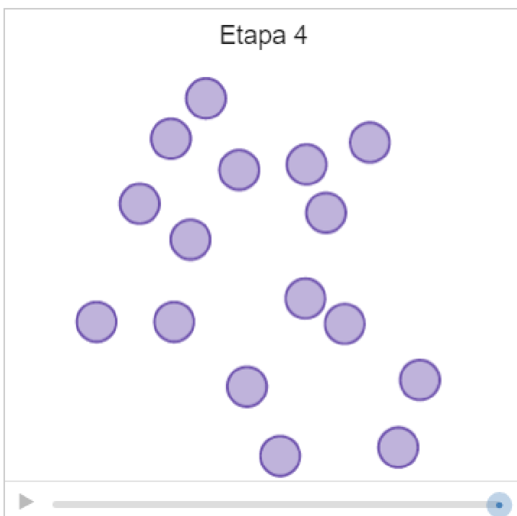
Introducción a la función exponencial.

Las funciones exponenciales son utilizadas en muchas áreas como en biología, economía, medicina, física y en situaciones que puedan experimentar un crecimiento o una disminución muy rápida.
Son útiles para describir y modelar un gran número de comportamientos de la vida cotidiana, por ejemplo, el crecimiento de algunas poblaciones, el crecimiento de un capital invertido a una determinada tasa de interés, el tiempo que tarda un material en disolverse, la tasa de disminución o decaimiento radioactivo de una sustancia, etc.

Imagen tomada y modificada de https://es.calameo.com/read/0052106511452f69be369

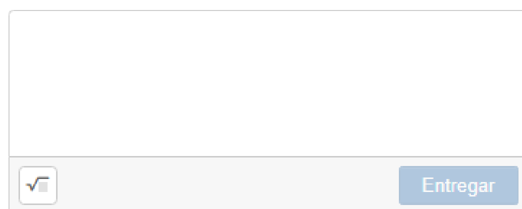
Crecimiento de una población.

El crecimiento de un cultivo de bacterias en un ambiente controlado está dado por la siguiente situación por etapas:



Presiona el botón "Play".

1. De acuerdo con la situación, responde las siguientes preguntas:
A. ¿Qué puedes observar en cada etapa?
B. ¿Qué patrón puedes describir con la situación?
C. ¿Conoces el tipo de reproducción que se genera en estos organismos?

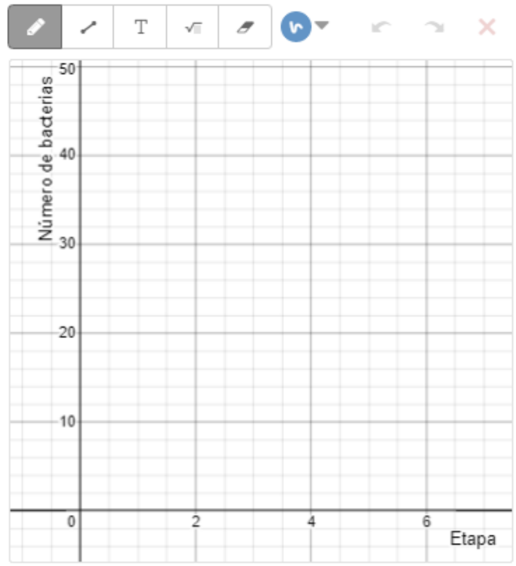


Actividad modificada de Desmos, Circles, 2021.

¿Cuántas bacterias hay?

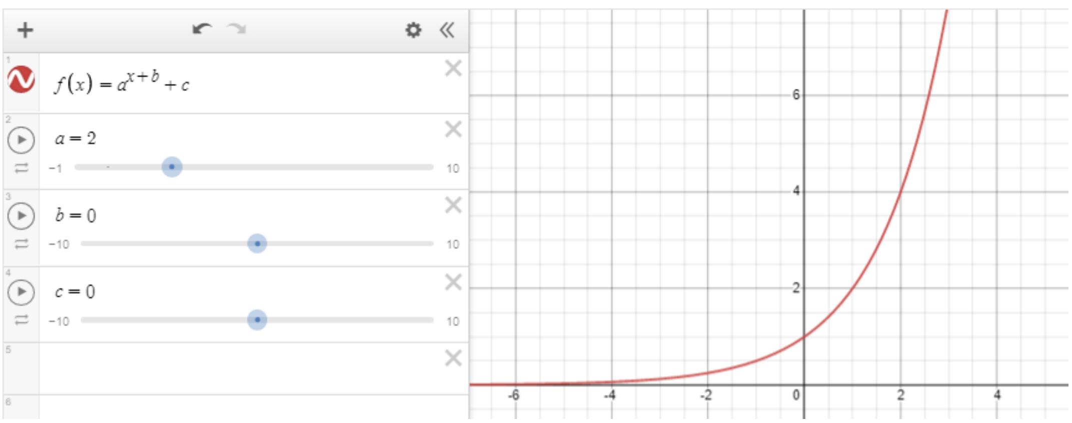
2. Escribe el número de bacterias que corresponde a cada etapa en el cuadro inferior.
Luego, realiza la gráfica que representa la situación.
3. Por último, determina:
A. La ecuación de la función que representa la situación.
B. El número de bacterias para las etapas 10 y 50.
C. La etapa más cercana para una cantidad de $1\,000\,000\,000$ bacterias.

Etapa	Número de bacterias
0	
1	
2	
3	
4	
5	



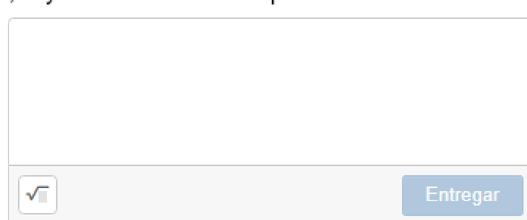
Primer análisis de la función exponencial.

Observa lo que sucede al cambiar los deslizadores a, b y c.



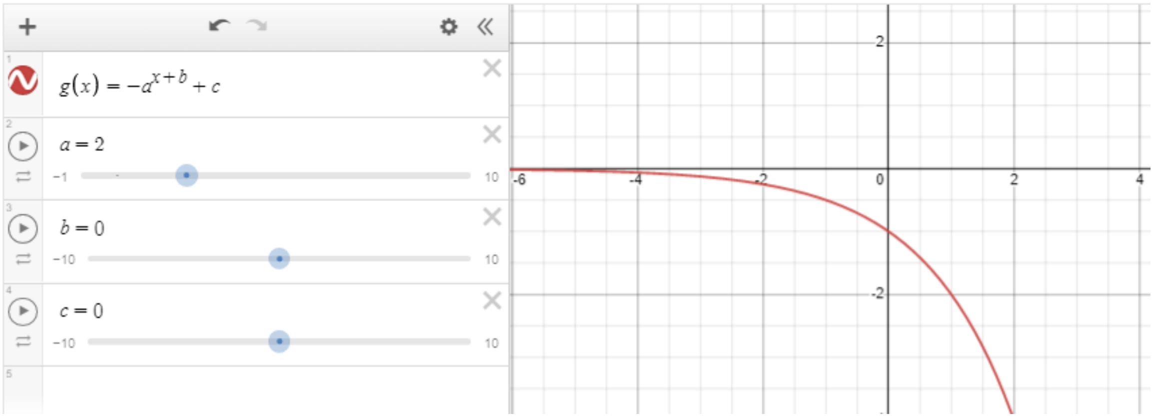
Interpretación de los coeficientes a, b y c de la función exponencial.

1. De acuerdo con la actividad anterior, escribe que comportamiento tiene la función exponencial con relación al deslizador a si:
A. $0 < a < 1$.
B. $a > 1$.
2. Explique cómo se comporta la función $f(x) = a^{x+b} + c$ cuando $a < 0$ y $a = 1$
3. Escribe que comportamiento tiene la función de acuerdo con el deslizador b cuando:
A. $b < 0$
B. $b = 0$
C. $b > 0$.
4. También, escribe que comportamiento tiene la función de acuerdo con el deslizador c cuando:
A. $c < 0$
B. $c = 0$
C. $c > 0$.



Segundo análisis de la función exponencial.

Observa lo que sucede al cambiar los deslizadores a, b y c.



Interpretación de la función exponencial

1. Al compara las funciones exponenciales $f(x)$ y $g(x)$, cuando los deslizadores tienen los mismos valores, ¿Qué se puede observar?

2. Traza la gráfica de cada función siguiente con diferente color en el plano cartesiano:

$h(x) = 2^x$

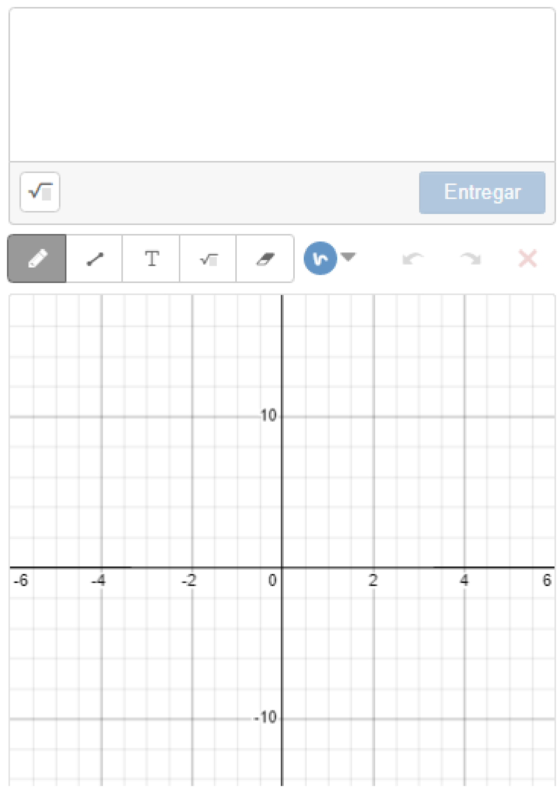
$i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$j(x) = -2^x$

3. Escribe lo que se puede observar al comparar las siguientes funciones:

A. $h(x)$ con $i(x)$

B. $h(x)$ con $j(x)$



Razonar a partir de la función básica.

1. Escribe y grafica una función exponencial que cumpla cada condición.

A. Sea decreciente en donde $a > 1$ y tiene asíntota horizontal $y = -1$.

B. Sea creciente con $0 < a < 1$ y $b = -2$.

C. Sea decreciente y su rango es el conjunto de los números reales negativos.

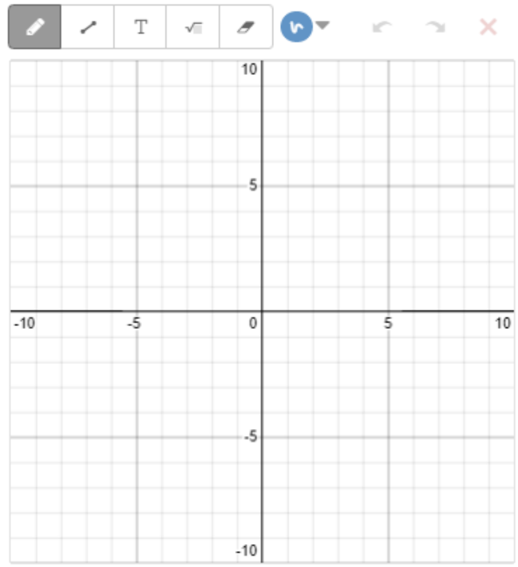
D. Sea creciente y su rango sea el conjunto $(3, \infty)$

2. Para cada función, determina la función exponencial básica de la cual puede obtenerse, a partir de traslaciones horizontales o verticales, luego describe las traslaciones.

A. $f(x) = 4^{(x-1)} + 2$

B. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)} - 3$

C. $h(x) = -2^{(2-x)} + 5$



La función exponencial natural.

La función exponencial $f(x) = e^x$, con base $e = 2{,}718281\ldots$, se conoce como **función exponencial natural** y surge de manera natural en muchas aplicaciones de las matemáticas.

1. Completa la tabla.
2. Responde las siguientes preguntas.

A. ¿Qué se puede deducir a partir de la tabla con relación al número e?

B. ¿Como se puede hallar más dígitos decimales del número e?¿Cuál sería el siguiente digito decimal?

C. ¿Quién fue el primer matemático en referirse al número e?

D. ¿Quién fue el primer matemático en calcular el número e?

E. ¿Quién fue el primer matemático en demostrar que e es un número irracional?

Número natural	Aproximación al número e
n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10	
100	
1 000	
10 000	
100 000	
1 000 000	

La función exponencial natural.

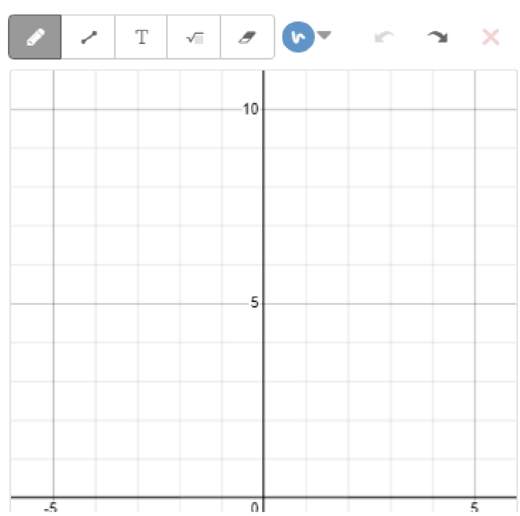
De acuerdo con la información anterior.
Cuando el entero n toma cada vez valores mayores, entonces el valor de la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tiende al número de Euler "e", es decir, cuando $n \to \infty$, entoces $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$.

3. Grafica las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

4. Para cada función, determina la función exponencial básica de la cual puede obtenerse, a partir de traslaciones horizontales o verticales, luego describe las traslaciones.

A. $f(x) = e^{(x+3)} - 4$

B. $g(x) = e^{(2-x)} + 3$



Aplicación de la función exponencial natural en la desintegración radioactiva.

Observa el video sobre la desintegración radioactiva y desarrolla el problema.

Video tomado y modificado de
https://www.youtube.com/watch?v=JQCcPnO_iMA

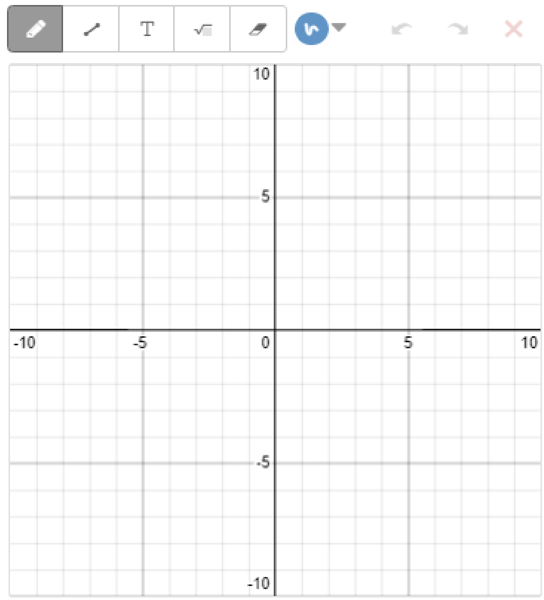
Un elemento radiactivo se desintegra de modo que después de t años el número de miligramos presentes está dado por la expresión $N(t) = 1\,000 \cdot e^{-0.05t}$.

A. ¿Cuántos miligramos había inicialmente?
B. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?
C. ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 y 100 años?

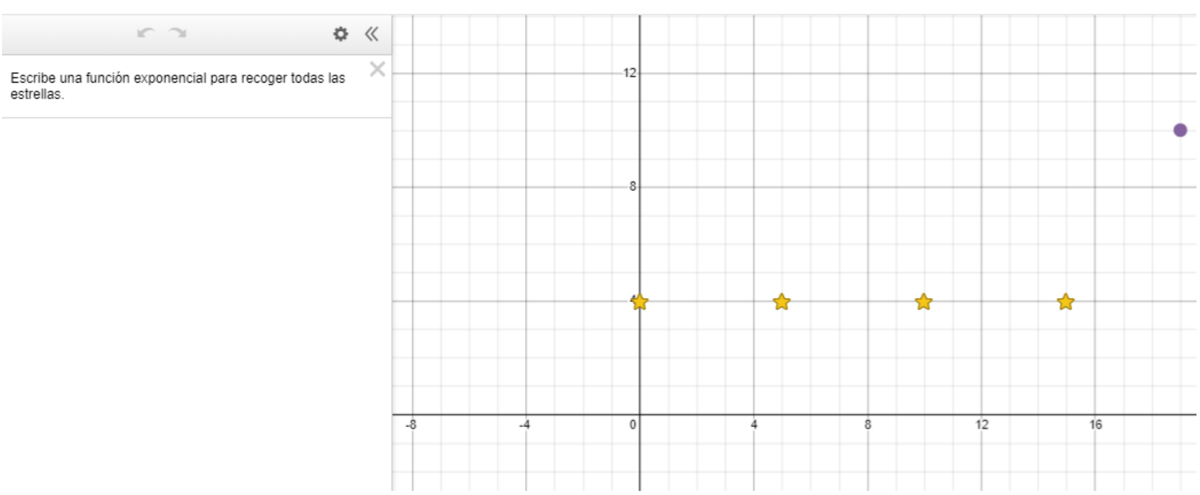
Aplicación de la función exponencial natural.

De acuerdo con el problema anterior.
1. Completa la tabla de valores.
2. Traza la gráfica de la función.
3. Determina el tiempo aproximado para que el número presente del elemento radiactivo sea de 200 miligramos.

tiempo (años)	Cantidad de miligramos
0	
10	
20	
30	
40	
50	

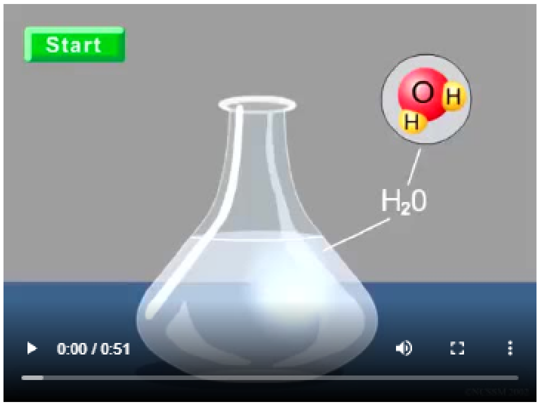


Desafío #1



Aplicación de la función exponencial en la disolución.

Observa el video sobre la disolución del azúcar en agua y desarrolla el problema.



Video tomado y modificado de
https://www.youtube.com/watch?v=k2VPHcFBnHk

El azúcar se disuelve en agua, siguiendo la ecuación $A(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$, donde "$c$" y "$k$" son constantes y $A(t)$ es la cantidad de azúcar no disuelta.

Si en un recipiente que contiene agua, inicialmente se colocan 30 kg de azúcar, después de 5 horas esta cantidad se reduce a 10 kg. Determinar la ecuación de la función que representa la situación.

Entregar

Aplicación de la función exponencial en la disolución.

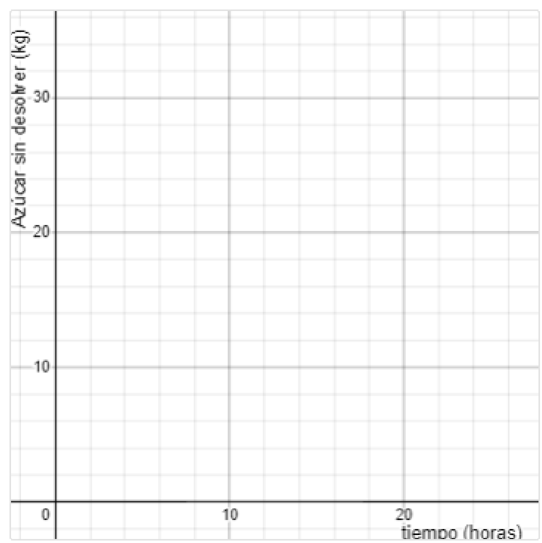
De acuerdo con el problema anterior.

A. Completa la tabla de valores.

B. Traza la gráfica de la función.

C. Halla el tiempo para el cual el azúcar no disuelta se reduce a 2 kg.

Tiempo (horas)	Azúcar sin desolver (kg)
0	
5	
10	
15	
20	
25	



Aplicación de la función exponencial con el coronavirus.

El crecimiento del número de contagios por el coronavirus en España está dado por la expresión $N(x) = N_0 \cdot (1+r)^t$, siendo N_0 el número de contagio inicial, t el tiempo en días y r la razón de crecimiento de contagios por día.

Si el número oficial de personas contagiadas el 9 de marzo del 2020 era de 999 personas y tres días después el número de contagiados ascendió a 2950. Suponiendo que el crecimiento de contagios diarios es constante, determinar:

A. La razón de crecimiento de contagios.

B. La ecuación de la función

C. El número de personas contagiadas el 18 de marzo.

D. El tiempo que tarda en triplicarse el número de contagios.

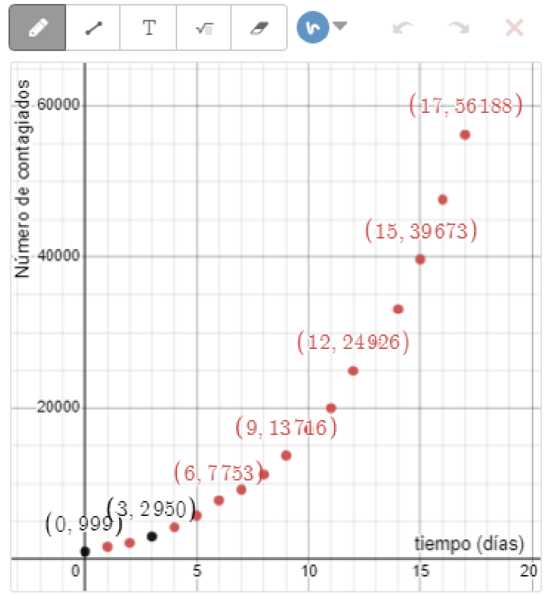
Entregar

Aplicación de la función exponencial con el coronavirus.

De acuerdo con el problema anterior.
1. Completa la tabla de valores.
2. Traza la gráfica de la función.
3. Al Comparar las dos gráficas, que se puede observar.

CORONAVIRUS EN ESPAÑA DEL 9 AL 26 DE MARZO DEL 2020.

Fecha	Contagios reales en España.	Número de contagiados aproximados
09 – Marzo	999	
12 – Marzo	2 950	
15 – Marzo	7 753	
18 – Marzo	13 716	
21 – Marzo	24 926	
24 – Marzo	39 673	
26 – Marzo	56 188	



Aplicación de la función exponencial en inversiones.

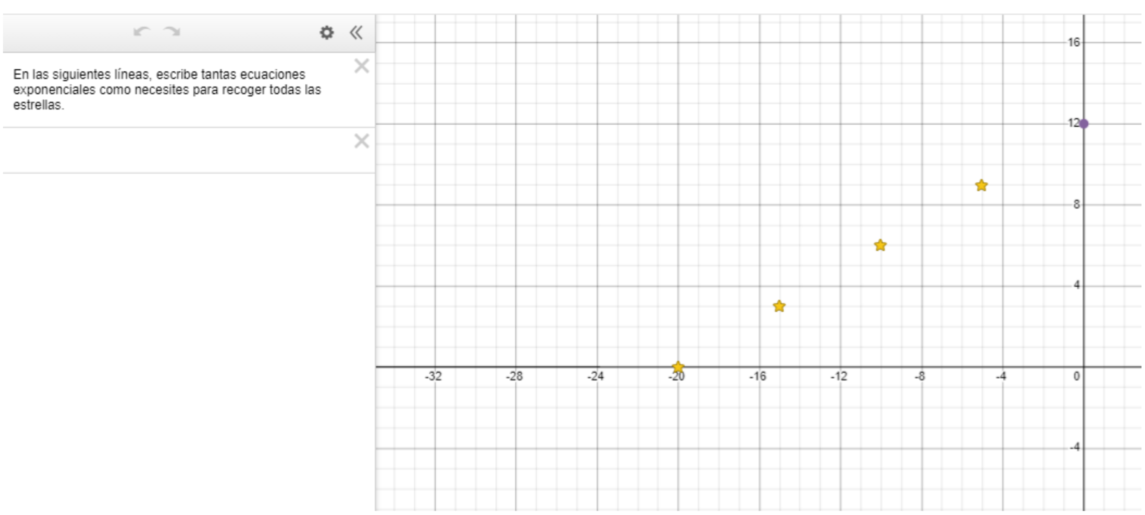
La función que modela la cantidad de dinero C que se obtiene al invertir P dinero a una tasa anual r después de t años, la cual tiene n capitalizaciones anuales es: $C(t) = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Una compañía requiere una inversión que le permita tener $\$20\,000\,000$ en 5 años. Si la compañía invierte en una entidad financiera que ofrece un interés mensual del 3,5%.

1. Determinar:
A. La mínima inversión que se debe realizar.
B. La ecuación de la función que modele la situación.
2. Completar la tabla de valores para cada año.
3. Traza la gráfica de la función.

tiempo (años)	Cantidad de dinero
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Desafío #2

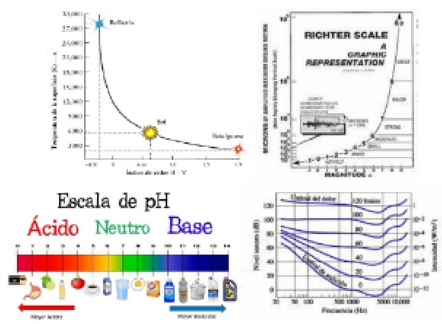


Anexo 9. Mostrar con mayor detalle la actividad 5

Introducción a las funciones logarítmicas

A principios del siglo XVII, John Napier introdujo los logaritmos como una herramienta en los cálculos de grandes multiplicaciones y divisiones. A causa de esta situación, el trabajo con los logaritmos aumento considerablemente.

Las funciones logarítmicas son utilizadas en varias ramas, porque nos permiten modelar ciertas situaciones de la vida real. Por ejemplo, en astronomía para establecer la luminosidad visible de una estrella, en geología podemos usar escalas logarítmicas para medir las intensidades de terremotos (escala de Richter), en química para establecer la escala del pH, en música identificar la intensidad del sonido por medio de las escalas de los decibeles del sonido, entre otras más.



Imagenes tomadas de Soporte de Minitab® 20

Propiedades de los logaritmos.

1. Determina el valor de las siguientes expresiones:

A. $\log 1000$ D. $\ln 34$

B. $\log_2 124$ E. $2 \ln 265$

C. $\log_5 2500$ F. $\log_3 3^9$

2. Escribe cada expresión usando un solo logaritmo.

A. $\log(x) + 2\log(y) - 3\log(z)$

B. $\log(4) - \log(3) + \log(\pi) + 3\log(5)$

C. $\log(2) + \log(\pi) - 0.5\log(2)$

3. Usa las propiedades para evaluar las siguientes expresiones.

A. $\log_2(6.4) + \log_2(2.5)$

B. $\log_3(16.2) - \log_3(0.6)$

C. $\ln\left(e^2 - e\right) - \ln(e-1)$

D. $\log(0.125) + \log(8)$

4. Completa la tabla con la correspondiente forma exponencial o logarítmica.

Propiedades de Logaritmos	
Logaritmo de un producto	$log_a(m.n) = log_a m + log_a n$
Logaritmo de un cociente	$log_a\left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n$
Logaritmo de una potencia	$log_a m^r = r.log_a m$
Logaritmo de una raíz	$log_a \sqrt[n]{m} = log_a m^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.log_a m$
Logaritmo de uno	$log_a a = 1$
Cambio de base	$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$
Regla de la cadena	$log_b a.log_c b.log_a c = log_a a$

Imagen tomada de MateMovil.

Logarítmica.	Exponencial.
$\log_3(27) = 3$	
	$7^3 = 343$
$\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$	
	$4^{\frac{3}{2}} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	

Cálculo de productos y cocientes, mediante logaritmos.

De acuerdo con la tabla logarítmica en base 10, que se encuentra en el video:

1. Determine los siguientes logaritmos:

A. $\log(25)$

B. $\log(502)$

C. $\log(8780)$

2. Halla el antilogaritmo de las siguientes valores:

A. $10^{2.8698}$

B. $10^{3.5132}$

C. $10^{5.0719}$

3. Calcula por medio de logaritmos los siguientes productos:

A. $32\,200 \cdot 26\,300$

B. $418\,000 \cdot 21\,600$

4. Calcula por medio de logaritmos los siguientes cocientes:

A. $\dfrac{858\,000}{1\,730}$

B. $\dfrac{903\,000}{418}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989

0:00 / 0:44

Video modificado de you tube "039. Tabla de logaritmos".

Compartir con la clase

Aplicación de la función logarítmica en la intensidad del sonido.

El nivel de intensidad de una onda sonora está dado por una escala logarítmica que compara la intensidad, I, del sonido con la intensidad más baja perceptible por el oído humano y se expresa como:

$B = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_o}\right) dB$, donde I_o es la intensidad correspondiente a $10^{-12}\ \dfrac{W}{m^2}$ e I es la intensidad del sonido a la que nos referimos.

La función definida por la ecuación anterior es un ejemplo de ***función logarítmica.***

Completa la siguiente tabla y escribe el precedimiento en el siguiente recuadro.

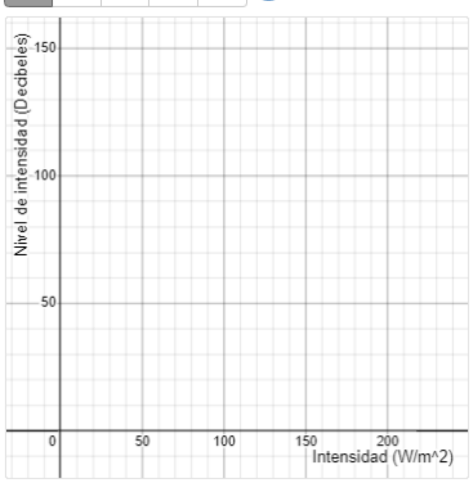
Sonido	Intensidad (W/m^2)	Nivel de intensidad
Motor de reacción	10^2	
Umbral del dolor	1	
Automóvil sin silenciador	10^{-2}	
Fábrica con máquinas	10^{-4}	
Conversación en voz alta	10^{-6}	
Biblioteca tranquila	10^{-8}	
Susurro	10^{-10}	
Umbral de audición	10^{-12}	

Aplicación de la función logarítmica en la intensidad del sonido.

De acuerdo con la información anterior.

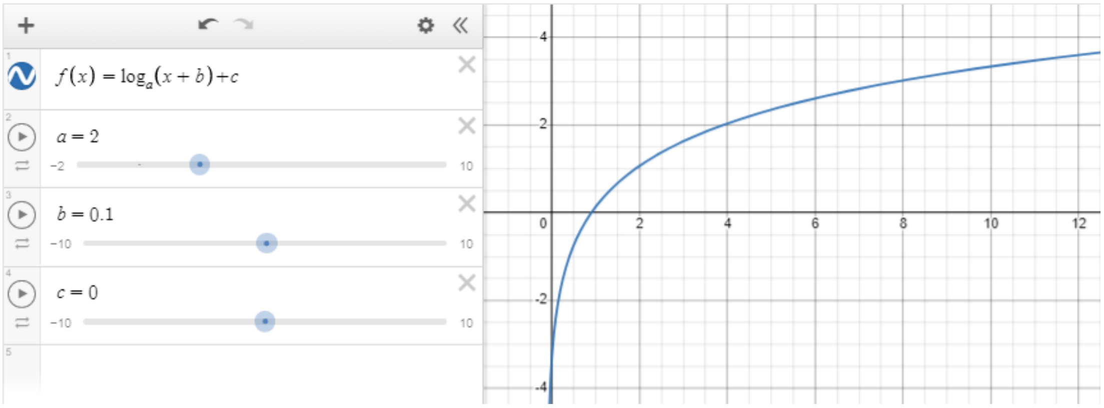
1. Grafica la función
2. Determina la intensidad para un nivel de intensidad de 50 dB.
3. Investiga y escribe el intervalo del nivel de intensidad que produce dolor y daños en el oído.
4. Pasar el intervalo anterior a la intensidad en $\left(\dfrac{W}{m^2}\right)$.
5. ¿Cuál es el nivel de intensidad permitido por la ***Organización mundial de la salud***?

Entregar



Primer análisis de la función logarítmica

Observa lo que sucede al cambiar los deslizadores a, b y c.



Interpretación de los coeficientes a, b y c de la función logarítmica.

1. De acuerdo con la actividad anterior, escribe que comportamiento tiene la función logarítmica con relación al deslizador a si:

A. $0 < a < 1$.

B. $a > 1$.

2. Escribe que comportamiento tiene la función de acuerdo con el deslizador b cuando:

A. $b < 0$

B. $b = 0$

C. $b > 0$.

3. También, escribe que comportamiento tiene la función de acuerdo con el deslizador c cuando:

A. $c < 0$

B. $c = 0$

C. $c > 0$.

Compartir con la clase

Razonar a partir de la función básica.

1. Escribe y grafica una función logarítmica $f(x) = \log_a(x+b)+c$, que cumpla cada condición.

A. Sea decreciente en donde $a > 1$ y tiene asíntota vertical $x = -2$.

B. Sea creciente con $0 < a < 1$ y $b = -5$.

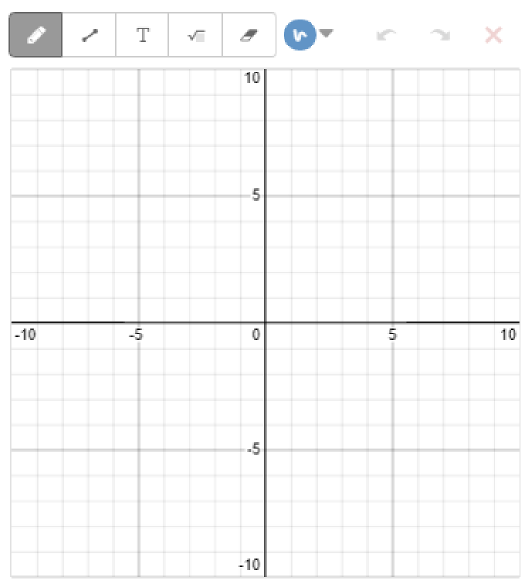
C. Sea decreciente y su dominio sea el conjunto $(-3, \infty)$

2. Para cada función, determina la función logarítmica básica de la cual puede obtenerse, a partir de traslaciones horizontales o verticales, luego describe las traslaciones.

A. $f(x) = \log_2(x) - 2$

B. $g(x) = \log_3(x-5)+4$

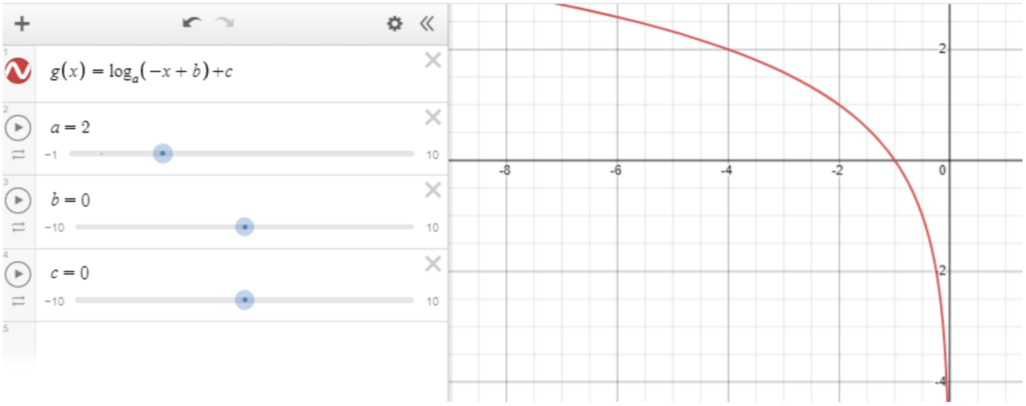
C. $h(x) = \log_{0.5}(x+3) - 5$



Entregar

Segundo análisis de la función logarítmica.

Observa lo que sucede al cambiar los deslizadores a, b y c.



Interpretación de la función logarítmica.

1. Escribe y grafica una función logarítmica $f(x) = \log_a(x+b)+c$, que cumpla cada condición.

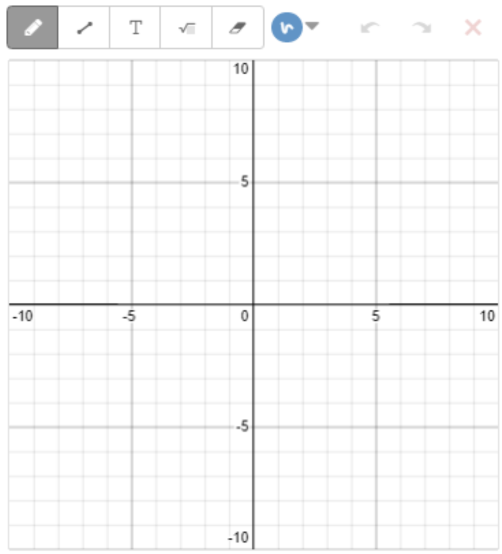
A. Sea decreciente en donde $a > 1$ y su dominio es el conjunto de los reales negativos.
B. Sea creciente con $0 < a < 1$ y $b = -5$.
C. Sea decreciente y su dominio sea el conjunto $(-\infty, -5)$.

2. Determina la inversa de cada función y traza las gráficas en el plano cartesiano.

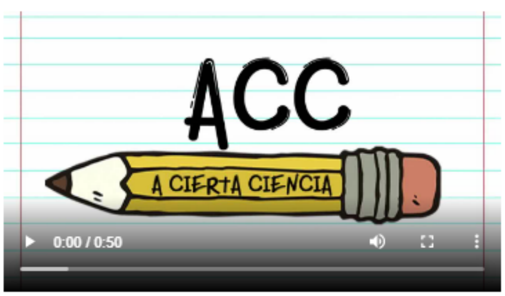
A. $f(x) = \log_3(x)$

B. $g(x) = \log_2(x+1)$

Entregar



Aplicación de la función logarítmica en el pH de una sustancia.



Video modificado de you tube "¿Qué es el pH? Escala de pH, EJEMPLOS".

Sustancia	H	pH
limón	0.01	
café	0.000001	
vinagre		3.0
jabón liquido	0.000003	
leche		6.5

El pH en las disoluciones se puede medir matemáticamente como el logaritmo negativo de la actividad de los iones de hidrogeno:

$pH = -\log(H)$, donde ***pH*** representa el grado de acidez de una sustancia y ***H*** es la concentración de iones de hidrogeno.

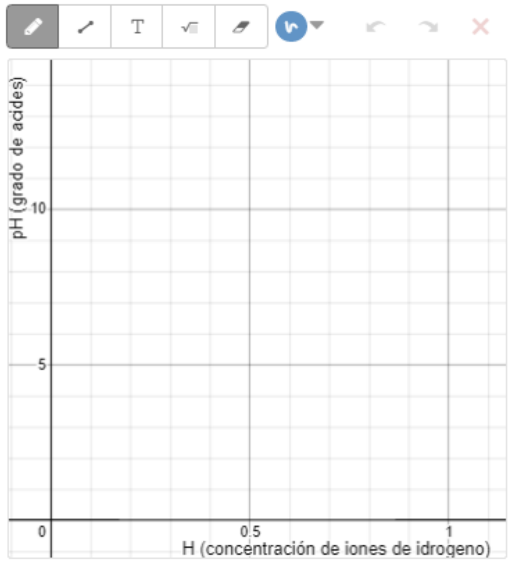
De acuerdo con la información anterior completa la tabla para las sustancias que se indican y escribe el procedimiento en el siguiente recuadro.

Compartir con la clase

Aplicación de la función logarítmica en el pH de una sustancia.

1. Recordemos que la escala del pH varía entre 0 y 14 ¿Cuáles son el mínimo y máximo valor que puede tomar H (concentración de iones de Hidrogeno)?
2. Escribe los valores del pH y H en la tabla de valores.
3. Grafique la función $pH = -\log(H)$ en el plano cartesiano.

H	pH



Aplicación de la función logarítmica en Geología.

En 1935 Charles Richter definió la magnitud de un terremoto como $M = \log \frac{I}{S}$, donde ***I*** es la intensidad del terremoto (medido por la amplitud de una lectura de sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto) y ***S*** es la intensidad de un terremoto de amplitud $1\ micrón = 10^{-4}$ cm (este se considera el terremoto de menor intensidad).
Así, la magnitud del terremoto de menor intensidad es $M = \log \frac{S}{S} = \log\ 1 = 0$.

Por ejemplo, uno de los mayores terremotos de la historia sacudió el centro-sur de **Chile** en el 2010, con una intensidad de $10^{8.8}S$

De acuerdo con la información, responde las siguientes preguntas:

A. ¿Cuál es la magnitud y efectos del terremoto que sacudio a Chile en el 2010?
B. ¿Cuál es la intensidad y efectos de un terremoto de grado 5?
C. ¿Cuántas veces es mayor un terremoto de grado 7 con relación al de grado 5?
D. ¿Qué magnitud tendrá un sismo 5 veces más intenso que uno de 6.9 y que efectos produce?

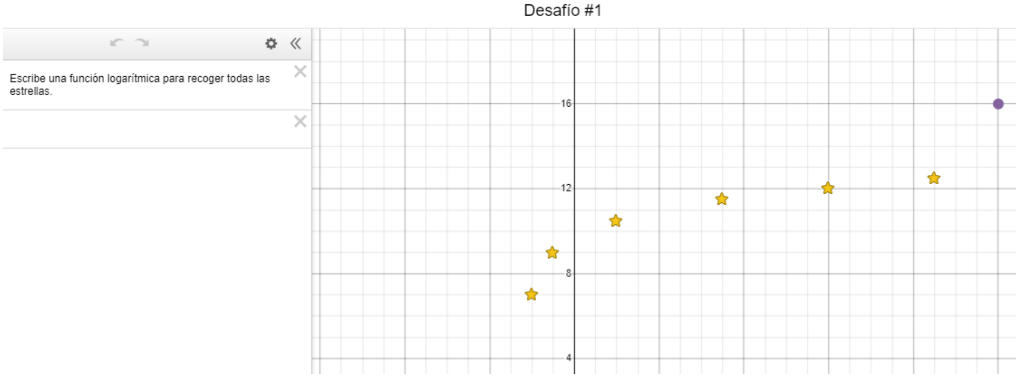
Escala de Richter

Magnitud	Efectos del terremoto
menos de 3.5	Generalmente no se siente, pero se registra.
3.5 a 5.4	Se siente, pero sólo causa daños menores cerca de donde se produce.
5.5 a 6.0	Ocasiona daños ligeros a edificios mal construidos y otras estructuras en un radio de 10 km.
6.1 a 6.9	Puede ocasionar daños severos en áreas donde vive mucha gente.
7.0 a 7.9	Terremoto mayor. Causa graves daños a las comunidades en un radio de 100 km.
8.0 o más	Gran terremoto. Destrucción total de comunidades cercanas y daños severos en un radio de más de 1000 km de distancia.

Imagen tomada de Protección Civil Jerez.

Entregar

Desafío #1

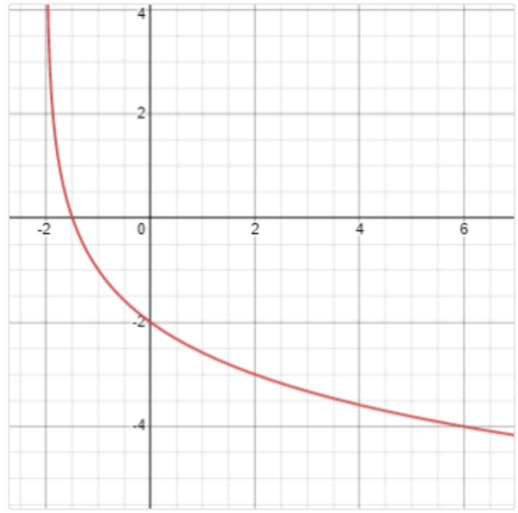


La función logarítmica desde el punto de vista analítico.

La siguiente gráfica muestra una función de la forma $f(x) = \log_a(x+b)+c$.

1. Determine analíticamente los valores a, b y c de la función.
2. Determine analíticamente el corte con el eje x.
3. Completa la tabla de valores.
4. Ubica las coordenadas en el plano cartesiano de la gráfica.

x	f(x)
−1,5	
−1	
'0	
2	
6	



Aplicación del logaritmo natural.

El logaritmo natural, $\ln(x)$, es el inverso de la función exponencial e definido en x sólo para números reales positivos, es decir: $\ln(x) = \log_e(x)$.

La experiencia de un grupo de personas sobre un video juego puede establecerse por sus habilidades de memoria. Cuantas más horas juegue, más experiencia tiene y es mejor su desempeño. El siguiente modelo determina la experiencia que va adquiriendo el jugador a partir del tiempo que va acumulando en horas: $M(t) = 5\ln(t+4)+45$.

Determinar:

A. La experiencia inicial de un jugador.
B. La experiencia al acumular 5 y 10 horas.
C. Determina el dominio de la función.

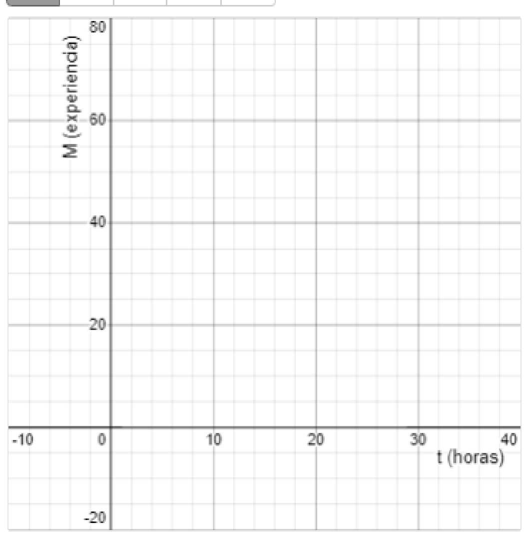
Imagen tomada de Google Play.

Aplicación del logaritmo natural.

De acuerdo con el problema anterior.

1. Completa la tabla de valores.
2. Traza la gráfica de la función.
3. ¿Cómo puede describir el crecimiento de la función?
3. Determina el tiempo aproximado para que el número de experiencia sea de 80.

t (horas)	M(t)
0	
5	
10	
15	
20	
25	



Aplicación de la función logarítmica en el crecimiento poblacional.

Un microbiólogo quiere modelar el crecimiento poblacional de un cultivo de bacterias, el cual sigue una ecuación de la forma: $p(t) = \log_a(t+b)+c$,

donde a,b y c son constantes y $p(t)$ es la cantidad de bacterias en millones durante t días. Si inicialmente se cuenta con 2 millones, después de 3 días la cantidad aumenta a 3 millones.
¿Cuál es la ecuación de la función que cumple con las condiciones?

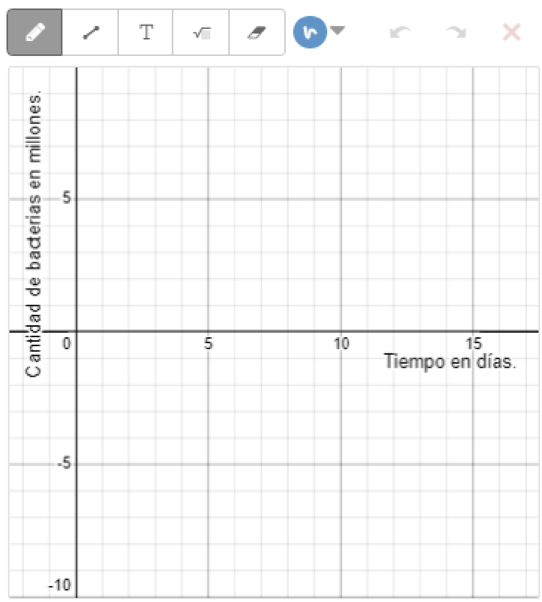
Entregar

Imagen tomada de dreamstime.

Aplicación de la función logarítmica en el crecimiento poblacional.

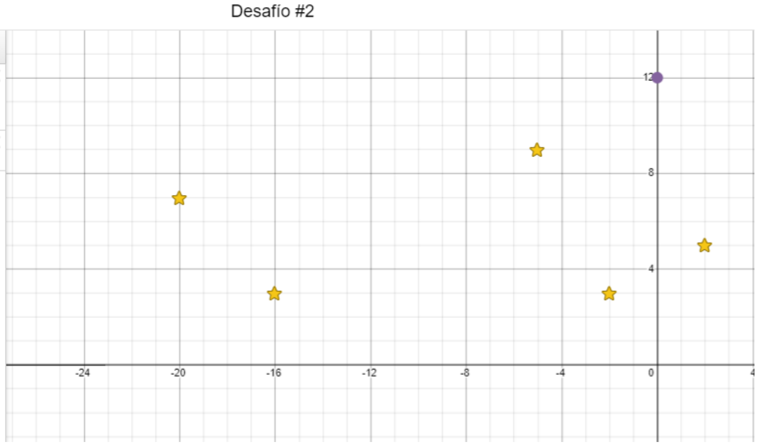
De acuerdo con el problema anterior.
1. Completa la tabla de valores.
2. Grafica la función que representa la situación.
3. Responde las siguientes preguntas.
A. ¿Cuántas bacterias hay después de pasar 15 días?
B. ¿Cuánto tiempo tarda en haber 5 millones de bacterias?

t	p(t)
0	
3	
6	
9	
12	
15	



Desafío #2

En las siguientes líneas, escribe tantas ecuaciones logarítmicas como necesites para recoger todas las estrellas.



Anexo 10. Evidencias de la actividad 6

Objetivo: Exponer con mayor detalle la actividad 6, realizada por cada estudiante.

La tabla a continuación contiene los enlaces del trabajo de cada estudiante, para replicar una caricatura por medio de funciones en la plataforma digital Desmos.

Nombre del estudiante	Enlace
Luna Gutiérrez	https://www.desmos.com/calculator/axu5ffjvzd?lang=es
Valentina González	https://www.desmos.com/calculator/qvo5ot8u86?lang=es
Tomas Suarez	https://www.desmos.com/calculator/sh8reinb47?lang=es
Luna Fajardo	https://www.desmos.com/calculator/ufjfakffgn
Sofia Rodríguez	https://www.desmos.com/calculator/mdfyhhacyk?lang=es
Juliana Brand	https://www.desmos.com/calculator/kksz1vigvd?lang=es
Martin Espinosa	https://www.desmos.com/calculator/p6r6xyzxex?lang=es
Camila Tolosa	https://www.desmos.com/calculator/usw3xhjurq?lang=es
Jhon Fredy Talero	https://www.desmos.com/calculator/zk1vfhkp8k
Ana María Arias	https://www.desmos.com/calculator/uoo6rhteud?lang=es
Jhojan Manzano	https://www.desmos.com/calculator/vbpyhsnbow?lang=es
Samuel Martínez	https://www.desmos.com/calculator/y6zwj8arrq?lang=es
Paula Ardila	https://www.desmos.com/calculator/7cihivsxhj?lang=es
Gabriela Diaz	https://www.desmos.com/calculator/5nlcdxnkp4?lang=es
Nicolas Calderón	https://www.desmos.com/calculator/aa0yvthvdr?lang=es
Andrés Castellanos	https://www.desmos.com/calculator/lpucuignsw?lang=es
Kalefth Parra	https://www.desmos.com/calculator/lzdgmq1yj7?lang=es
María Sánchez	https://www.desmos.com/calculator/cpkucbwvmx?lang=es
Dayanna Ariza.	https://www.desmos.com/calculator/bprsg3vxol?lang=es
Luis Espitia	https://www.desmos.com/calculator/8bdn9fk7ua?lang=es