REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de maestría en educación matemática

ESTRATEGIA PARA FORTALECER LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE LICENCIATURA DE MATEMATICAS EN SOLUCION DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN LA CIUDAD DE TUNJA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

José Alberto Carrillo Chaparro

SANTA FE DE BOGOTA D.C.

2022

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de maestría en educación matemática

ESTRATEGIA PARA FORTALECER LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES DE LICENCIATURA DE MATEMATICAS EN SOLUCION DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN LA CIUDAD DE TUNJA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

José Alberto Carrillo Chaparro

Director de tesis:

Dr. Rafael Julio Sánchez Lamoneda

SANTA FE DE BOGOTA D.C.

2022

Agradecimientos

SÍNTESIS

Entendiendo que la didáctica de la matemática atiende, estructura y organiza la construcción de modelos teóricos para describir y explicar los distintos aspectos relacionados en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el marco de un sistema educativo en específico la formación de Licenciados en Matemáticas y conociendo que la componente didáctica y pedagógica es un aspecto transversal que se debe trabajar implícitamente dentro de todos los espacios académicos de formación de un Licenciado de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, donde se diseñen, elaboren y se apliquen estrategias didácticas o metodológicas que contribuyan a una formación significativa de los futuros docentes de Matemáticas donde exista aparte de recordar, comprender y aplicar una serie de conceptos matemáticos, situaciones contextualizadas no solo en la matemática sino también en contextos reales, manipulativos y recreativos que potencialicen competencias de un nivel cognitivo alto, en donde el estudiante deba analizar, justificar, evaluar y crear alternativa de solución a situaciones matemáticas no rutinarias. Por tal motivo en la investigación se propone un sistema de actividades que tienen una estructura pedagógica y didáctica sustentada en la teoría de resolución de problemas, en particular en los problemas retadores asociados a los pensamientos aritmético, algebraico y geométrico.

La realización de las actividades en las diferentes sesiones de clase sincrónica, permite que los estudiantes entiendan los conceptos, heurísticas y procesos metacognitivos que se relacionan en cada uno de los problemas que se desarrollaran en las sesiones del taller de capacitación, además les brinda herramientas conceptuales y prácticas para la elaboración de planes de clase fundamentados en problemas no rutinarios en los pensamientos aritmético, algebraico y geométrico para educación básica.

ABSTRACT

Understanding that the didactics of mathematics attend, structure, and organize the construction of theoretical models to describe and explain the different aspects related to the teaching-learning process of mathematics within the framework of a specific educational system, the training of Bachelors in Mathematics and knowing that the didactic and pedagogical component is a transversal aspect that must be worked implicitly within all the academic spaces of formation of a Mathematics Graduate of the Pedagogical and Technological University of Colombia, where didactic or methodological strategies are designed, elaborated and applied. that contribute to a significant training of future Mathematics teachers where apart from remembering, understanding and applying a series of mathematical concepts, contextualized situations exist not only in mathematics but also in real, manipulative and recreational contexts that potentiate skills of a cognitive level High native, where the student must analyze, justify, evaluate and create alternative solutions to non-routine mathematical situations. For this reason, the research proposes a system of activities that have a pedagogical and didactic structure based on the theory of problem solving, particularly in the challenging problems associated with arithmetic, algebraic and geometric thoughts.

Carrying out the activities in the different synchronous class sessions allows students to understand the concepts, heuristics and metacognitive processes that are related to each of the problems that will be developed in the training workshop sessions, as well as providing them with conceptual tools. and practices for the elaboration of class plans based on non-routine problems in arithmetic, algebraic and geometric thoughts for basic education.

Contenido

INTRODUCCION

Es bien conocido que las matemáticas son una habilidad necesaria para darle solución a un sin número de problemas cotidianos, ya que es una herramienta construida por el ser humano para comprender el mundo que lo rodea Por tal razón es fundamental su incorporación en todos los planes educativos en todos los niveles de escolaridad, ya que contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y analítico del ser humano, adicional a esto es la ciencia formal que aboca al análisis cuantitativo de las propiedades entre números, algebra y geometría entre otras ramas que la conforman.

El aprendizaje de las matemáticas enseña a pensar de una manera lógica y razonable a todo individuo que trabaja situaciones problémicas dentro de la matemática, desarrolla habilidades (heurísticas) para la solución de estas situaciones y la toma de decisiones. Estas clarifican la utilidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante la detección de los objetivos que se quieren alcanzar, la adecuada elección de las estrategias para conseguir los objetivos planteados, autobservación del propio proceso de elaboración de conocimientos para comprobar si las estrategias elegidas son adecuadas y la evaluación de los resultados para saber hasta qué punto se han logrado los objetivos; estas cuatro características destacan la importancia que tiene el uso de problemas matemáticos dentro del procesos de formación. En general, se consideran como factores teóricos y prácticos que deben intervenir en la formación y desarrollo de la estructura cognitiva de los estudiantes cuando se trata de lograr cambios significativos dentro del procesos de formación, como menciona Blanco, (2015)[1] la actividad matemática debe estar conformada por problemas o situaciones que reten al estudiante y conlleven a seguir un cambio profundo en las situaciones y actividades didácticas que se deben generar para visualizar la utilidad de la matemática dentro y fuera del salón de clase.

[1] Blanco. L. La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria. Colección manual UEX. 2015

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática ha sido abordado en eventos, congresos y reuniones a nivel internacional en el campo de la Educación Matemática, destacándose:

- International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), el International Congress on Mathematical Education (ICME),
- el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME),
- la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),
- la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM),
- la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME),
- los Congresos Colombianos de Matemática, entre otros.

En estos congresos y reuniones se presentan trabajos que muestran experiencias significativas y dificultades encontradas, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio de problemas no rutinarios y el proceso de capacitación de docentes. A continuación, se enumeran algunas investigaciones referentes al tema. Jaime, F (2011). En su investigación "Tesis Maestría- UAN" Señala que la resolución de problemas reto, genera una reflexión en el docente ya que evidencia las posibilidades de crecimiento que tienen los estudiantes respecto algunos conceptos o conocimientos matemáticos para ser conscientes que es necesaria una búsqueda diferente a la forma de enseñar tradicional.

Shulman reportado en Castillo, M (2013). Hasta hace unas décadas, los debates por definir los tipos de conocimientos y experiencias que los docentes de Matemática deberían desarrollar como parte de su formación se centraban, principalmente, en determinar la cantidad de contenidos matemáticos o pedagógicos que estos debían recibir, centrándose principalmente en contenidos disciplinares y asociando algunos cursos a la formación pedagógica y a la enseñanza de la matemática. Shulman analizó, entre otros, la importancia del conocimiento pedagógico del contenido, que abarca, por ejemplo, el aprendizaje a partir de la resolución de problemas.

Oxley, V (2017). Los resultados de la investigación de “Capacitación docente para la enseñanza de matemática” evidencia que los docentes con capacitación continua han logrado mayor eficacia en la enseñanza, pues se puede inferir esto del mayor porcentaje de alumnos que han alcanzado los niveles superiores en pruebas estatales. Investigación realizada en Paraguay y Uruguay.

Por otro lado, Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. CONFERENCIA: Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, 2007. Asocia como se deben relacionar los problemas matemáticos como el medio para hacer matemáticas, donde los problemas no se ven solo como una práctica de conceptos y teorías, sino que constituyen lo medular en el proceso de formación y permite construir el conocimiento matemático.

Ochoviet, C. & A. López (2014). En él, IV Congreso Internacional sobre Calidad de la Formación Virtual (CAFVIR 2014), capacitación a docentes para enseñanza accesible de la matemática: una experiencia en Universidades de América Latina. En esta investigación los autores asocian cómo se deben vincular herramientas como el geoplano para solucionar problemas matemáticos que asocian conceptos algebraicos como la ecuación y la ubicación de puntos en el plano cartesiano para la construcción de rectas y cómo estas contribuyen a la construcción del pensamiento matemático en personas con dificultades visuales.

De acuerdo con Rodríguez, García y Lozano (2015), el planteamiento de problemas es una de las capacidades básicas que debe favorecer los procesos de resolución de problemas. De hecho, en varias habilidades específicas o indicaciones puntuales dadas en el Programa de Estudio de Matemática del MEP se menciona que los estudiantes resuelvan problemas y luego formulen nuevos problemas a partir de alguna situación presentada de forma textual, gráfica, ilustrativa u operaciones aritméticas.

De igual forma Santos y Camacho (2013, en Santos 2015)[2], señalan que un ejercicio o problema rutinario puede ser modificado o adaptado en una actividad que demande mayor reflexión matemática, al solicitarle a los estudiantes plantear preguntas relacionadas con la comprensión de los enunciados y conceptos que se integran en la solución de estas situaciones que en muchos casos se transforman en situaciones no rutinarias. De esta forma, el plantear problemas no es una actividad nueva, sino que forma parte de la resolución de problemas desde hace ya varios años; sin embargo, es durante las últimas décadas cuando los investigadores en Educación Matemática le prestan más atención y la identifican como una línea de investigación significativa para la formación matemática. El diseño y elaboración de problemas es un proceso complejo, en el cual se construyen problemas a partir de la interpretación personal o significado que le da el estudiante a una situación concreta o a un problema previamente dado y este puede ocurrir antes, durante o después de la resolución de problemas.

Así, los estudiantes pueden inventar o reformular problemas durante la solución de un problema complejo al cambiar el tamaño de los números o estudiar un caso particular con el objetivo de comprenderlo mejor. Por ejemplo, en el trabajo de Polya (1979)[3], se menciona ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición?, estos y otros interrogantes contribuyen a relacionar presaberes y tareas cognitivas de un rango medio alto y también contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico, analítico y deductivo que potencializa la actividad matemática del estudiante.

Por último, el planteamiento de problemas también puede ocurrir después de la solución de un problema al modificar el objetivo, meta o condición de uno ya resuelto con el fin de generar nuevos problemas Silver

[2] Santos, L. (2015) La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (15), 333-346.
[3] Pólya, G. (1979). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

(1994). Por ejemplo, en la propuesta de Salazar (2014)[4], los estudiantes cambiaron algunas hipótesis o realizaron modificaciones a los requerimientos de problemas analizados previamente.

Por otra parte, los defensores de este tipo de actividades argumentan que los procesos de invención de problemas promueven la participación de los estudiantes en una auténtica actividad matemática Bonotto, (2013). Además, permiten adquirir aprendizajes significativos al exigir realizar una aportación personal, propia y creativa, e indaga en las capacidades matemáticas que tienen los estudiantes al establecer relaciones entre los distintos conceptos matemáticos, así como las estructuras numéricas (Ayllón et al., 2016)[5].

Ahora bien, en las jornadas que se han realizado para generar alternativas para la prosperidad del sector educativo de Colombia, se han hablado de las causas que intervienen para no tener una educación de calidad hoy en día; de donde se pudo concluir que años tras año se genera un abandono y decaimiento del nivel educativo nacional, ya que el proceso integral de formación de los educandos esta normalmente truncado por políticas que no garantizan la participación, cobertura y acción activa de la escuela en la búsqueda de estrategias que garanticen un mejoramiento de la educación en todos los niveles de escolaridad. Donde se centraliza el proceso educativo en un aprendizaje que satisfaga los lineamientos establecidos por un conjunto de pruebas como la SABER y la PISA; las cuales solo miden una parte de la calidad del sistema educativo nacional, no evaluando las componentes que inciden realmente en el proceso integral de formación de los educandos, por tal razón el Ministerio de Educación Nacional desde el 2010 activa una gran cruzada nacional la cual garantizara mejorar los índices de analfabetismo y

[4] Salazar, L. (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática. Revista Paradigma, 35(1), 55-77. Recuperado de : http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v35n1/art03.pdf
[5] Ayllón, M., Ballesta-Claver, J., & Gomez, I. (2016) . Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. Propósitos Y Representaciones, 4(1), 169–193. Recuperado de: https://doi.org/http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016. v4n1.89

optimizar la calidad de la educación mediante el plan sectorial de educación, para esto se realizó un llamado colectivo a todas las secretarias de educación del país, instituciones educativas, docentes, padres de familia entre otros organismos territoriales, para asumir el compromiso y la responsabilidad que cada uno tiene en el mejoramiento de la calidad de la educación en Colombia. En cuanto a la política de calidad y cobertura, "el énfasis está en la articulación de todos los niveles de enseñanza que existen en el país, desde la formación inicial pasando por la básica y media, hasta la superior, entorno al desarrollo de competencias básicas y especificas en educación técnica y superior, buscando que todas las instituciones educativas trabajen en planes de perfeccionamiento orientados a mejorar los desempeños de los estudiantes"[6]. Bajo este enfoque de la política de calidad, el de "fortalecer una institución educativa abierta, incluyente, donde todos puedan aprender, desarrollar las competencias básicas y específicas y convivir pacíficamente"[7], donde "tengamos un aumento de la educación gratuita para los jóvenes más vulnerables del país" los referentes de calidad son las instituciones educativas y las secretarías de educación.

Al interior de las instituciones educativas a su vez, los estudiantes, los docentes y los administrativos son los referentes de calidad, por lo que los resultados de las evaluaciones externas de los desempeños de los estudiantes, así como la gestión de las instituciones educativas y de las secretarías de educación permiten determinar si se avanza hacia la obtención de esa educación de calidad.

Se aplican las pruebas SABER en los grados 5 y 9, la prueba de estado ICFES en el grado 11 ahora conocida como prueba SABER 11 desde el 2010 y las ECAES más conocidas en las instituciones de

[6]Plan de Mejoramiento de Calidad del MEN, documento, junio, 2019 p12.

[7]Plan estratégico institucional: Plan Sectorial 2018-2022, MEN, documento pdf, version1, enero de 2019 p23.

educación superior del territorio nacional como Saber – PRO; al igual que las pruebas internacionales TIMMS, PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes) y SERCE.

En esta disposición, el razonamiento cuantitativo involucra competencias de naturaleza “genérica”. En lo referido a la formación en competencias genéricas en los diferentes niveles del sistema educativo nacional, es importante enmarcar en primera instancia que esta debe ser longitudinal, es de entender que lo referente a razonamiento cuantitativo debe desarrollarse a lo largo de la totalidad del proceso educativo en los niveles de básica y media. Por otro lado, la formación en competencias genéricas debe ser transversal. Este Sistema de formación de educadores posibilita la articulación de los subsistemas de formación inicial, en servicio y avanzada, para que, desde la autonomía de las instituciones formadoras de docentes, las secretarías de educación, los establecimientos educativos, los gremios y los maestros, se avance en el desarrollo de estrategias de formación efectivas para el fortalecimiento de las competencias básicas y profesionales de **los futuros docentes y de los educadores en servicio**. Esto es, incursionar en un proceso de formación integral, permanente y de mejoramiento continuo que permita al educador actuar ante las necesidades de la educación. De acuerdo con lo establecido en el Decreto Ley 1278 de 2002 sobre los profesionales de la educación, se concluye que los programas de formación inicial de docentes son:

Programas de Formación Complementaria, ofrecidos por las Escuelas Normales Superiores (ENS). Y programas de Licenciatura, ofrecidos por Instituciones de Educación Superior (IES). Las ENS y las IES tienen autonomía en el diseño de sus propuestas curriculares y están reguladas por un Sistema de Aseguramiento de la Calidad de los programas, que para el caso de los programas de licenciatura (registro calificado y acreditación de alta calidad), posibilita generar seminarios, talleres, cursos de capacitación, congresos, entre otros espacios formales complementarios; que contribuyan al fortalecimiento coherente y pertinente de los programas de licenciatura. Por tal razón se propone un proyecto para la formación inicial de Licenciados en Matemáticas donde los problemas no rutinarios en los pensamientos numéricos, algebraico y geométrico sean el campo de acción, les proporcionen no solo un cambio de conducta sino un cambio de perspectiva como menciona Freuerstein (2000) en su teoría de la modificabilidad cognitiva. A continuación, se realiza la descripción de la propuesta.

A partir de los expuesto anteriormente se tiene como **Problema de investigación:** ¿Cómo incidir en la formación matemática, en futuros Licenciados de manera tal que cambie su concepción (*acción de enseñar*) y perspectiva (*propósito de enseñar)* hacia la enseñanza de la matemática?

El **objeto de investigación es:** El proceso de capacitación de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en la Educación Básica.

Se infiere como objetivo general Fortalecer la formación matemática de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en el municipio de Tunja - Boyacá, mediante la construcción de una estrategia didáctica que contribuya al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de problemas no rutinarios.

Se plantean los siguientes **objetivos específicos**.

1. Desarrollar un taller de capacitación a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en resolución de problemas no rutinarios en la ciudad de Tunja.

2. Proponer una serie de problemas no rutinarios en diferentes temas de la matemática en educación básica secundaria y media, lo suficientemente motivadores como recurso didáctico en el fortalecimiento del proceso de formación de los futuros Licenciados en Matemáticas.

3. Orientar el diseño de actividades de clase con problemas o situaciones matemáticas retadoras construidas por los estudiantes en capacitación.

4. Documentar alcances, avances, posibilidades y limitaciones que tuvieron los estudiantes luego de realizar las diferentes actividades propuestas en la capacitación, frente a la resolución de problemas no rutinarios como estrategia de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación básica y media.

Como **campo de acción** se asocia**:** El proceso de capacitación de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas a través de problemas no rutinarios en los Pensamientos Numérico, Algebraico y Geométrico.

Para llevar a cabo el taller de capacitación a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la cuidad de Tunja, con respecto al proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas por medio de la solución de problemas no rutinarios; se proponen las siguientes acciones.

- Se contextualiza, socializa y prepara a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en el trabajo de problemas no rutinarios.
- Se realizan actividades en las cuales el estudiante pueda identificar, seleccionar, clasificar, solucionar e interactuar diferentes tipos de problemas no rutinarios.
- Se acompaña a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en el diseño y elaboración del plan de clases.

CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE

1.1. Investigaciones sobre la didáctica de la matemática y su ámbito de actuación.

La didáctica de la matemática atiende, estructura y organiza la construcción de modelos teóricos para describir y explicar los distintos aspectos relacionados en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el marco de un sistema educativo en específico, en este caso el sistema educativo colombiano. También se puede considerar como una disciplina científica que se encarga del diseño, elaboración y comunicación del conocimiento y como menciona Kieran (1998)[8], saber qué es lo que se está produciendo en una situación concreta de enseñanza es el objetivo fundamental de la didáctica.

Debido a la complejidad de los actores y procesos que se presentan en toda situación de enseñanza y aprendizaje, Schoenfeld (1987)[9] conjetura que, a pesar de la complejidad, las estructuras mentales de los estudiantes pueden ser comprendidas, y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El foco de interés es, por lo tanto, explicar que es lo que produce el pensamiento productivo y permite la construcción sistémica de las relaciones matemáticas y como las nociones informales e intuitivas que el estudiante adquiere en el proceso de aprendizaje contribuyen en la capacidad para resolver problemas significativos.

Para Steiner (1987)[10] la complejidad de los problemas planteados en la didáctica de las matemáticas produce dos reacciones extremas. En la primera están los que afirman que la didáctica de la matemática

[8] Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 29,5, pp 595-602.
[9] Schonfeld, A. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education. Lawrence Erlbaum Associated.

[10]Steiner, H.G. (1987). Theory of Mathematics Education: an introduction. For the learning og mathematics, 5(2), pp.11-15.

no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por lo tanto, la enseñanza de las matemáticas es esencialmente un arte. En la segunda postura encontramos aquellos que piensan que es posible la presencia de la didáctica como ciencia y reducen la complejidad de los problemas seleccionando a solo un aspecto parcial al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y perspectivas de esta. Steiner considera que la didáctica de las matemáticas debe tender hacia lo que Piaget denominó transdisciplinariedad; *una coexistencia de la conservación y el cambio.* Que sitúa a las investigaciones en educación matemática en centrarse en innovación en didáctica dentro de las interacciones entre las múltiples disciplinas, (psicología, pedagogía, sociología, epistemología entre otras sin dejar a un lado a la propia matemática como disciplina científica) que permite avanzar en los problemas planteados.

En si la didáctica como disciplina general ha tenido un amplio desarrollo en las últimas décadas sobre todo en los años 80 y 90 del siglo pasado, donde existía una lucha entre el idealista que se inclina por potenciar la comprensión mediante una visión amplia de la matemática y lo práctico, que clama por el restablecimiento de las técnicas básicas en el interés de la eficiencia en el aprendizaje. Estas posturas se pueden observar en docentes de matemáticas de todos los niveles educativos, que buscan innovar en prácticas metodológicas para fortalecer el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

El retornar a lo básico, que es el planteamiento que se sugirió a las escueles; volviendo a la práctica de los algoritmos y procedimientos básicos de cálculo, que después de un tiempo se evidenció, que tal retorno a lo básico no era la solución razonable y eficiente para mejorar la enseñanza de las matemáticas, puesto que los estudiantes en el mejor de los casos aprendían de memoria los procedimientos y la estructura de los ejercicios, sin comprender los objetos y conceptos matemáticos relacionados. Para inicios de los años 1980 se abordó el eslogan retorno a lo básico. En el III Congreso Internacional de

Educación Matemática (ICME)[11] celebrado en Berkeley, se establece que "la resolución de problemas" pueda ser la respuesta que dé solución a esta pregunta, y no se convierta en un eslogan más, por tal razón se concibe en una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar a cabo dentro del aula de clase.

1.2. Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula

El hecho de proponer los problemas reto como centro de esta investigación conduce a hacer una referencia absoluta y obligada a uno de los estudios realizados bajo los auspicios del ICMI y presentado en el ICME 11 de Monterrey, México en el año 2008. Se refiere a la comisión de trabajo que de forma magistral aparece compilada y muy bien comentada en: Edward J. Barbeau I Peter J. Taylor (Editores) **Matemáticas Retadoras dentro y fuera del aula**. El ICMI, Study 16. Springer[12].

A comienzos de julio de 2006, bajo los auspicios del ICMI se invitó aproximadamente cincuenta personas entre investigadores matemáticos y profesores de matemáticas de todo el mundo, a la Conferencia del Estudio que se realizó en Trondheim, Noruega. Se presentó un estudio a las preguntas que tiene que ver con las matemáticas retadoras dentro y fuera del aula: El impacto de la enseñanza y el aprendizaje en el aula de clase, las actividades fuera del aula, y la investigación: ¿qué investigación se ha realizado para evaluar el papel que ha cumplido la matemática retadora?, ¿qué puede decirnos la investigación acerca de los usos de retos en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática? En esta conferencia se concretó el estudio en tres grupos de trabajo: el primero dedicado a los problemas reto fuera del aula, y los otros dos grupos dedicado al estudio en el aula de clase, desde las dos perspectivas del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas: desde el punto de vista del estudiante y del docente. Los tres grupos de estudios que se establecieron fueron:

[11] ICME. III Congreso Internacional de Educación Matemática 1980.

[12]ICMI: Comisión Internacional de Instrucción Matemática, organiza estudios para investigar, a profundidad y en detalle, campos particulares de interés en educación matemática.

Grupo 1. Coordinado por Peter Kenderov, con la misión del *estudio de los retos "dentro y fuera del aula*". Con el resultado de tres aportes.

Grupo 2. Liderado por Mariolina Bartolini Bussi, con la ayuda de Mark Saul, encargado del *estudio de la matemática retadora "en el aula; Desde la perspectiva del estudiante"*, con dos aportes.

Grupo 3. Derek Holton coordinó el *estudio de la matemática retadora "en el aula; desde la perspectiva del profesor*", con tres aportes.

Cada estudio que realiza el ICMI tiene su propia génesis y evolución. En el caso de este estudio, consiste en los ocho aportes de los tres grupos y que se relacionan en los ocho capítulos de la obra que se describe brevemente a continuación: *Challenging Mathematics in and beyond the Classroom*. *The 16th ICMI Study Springer, New York, 336 pp.* Se describirán los ocho capítulos que comprende esta monumental obra.

1.2.1. Problemas retadores: Contenidos Matemáticos y Fuentes

En el capítulo 1. Problemas retadores: Contenidos Matemáticos y Fuentes (Challenging Problems: Mathematical Content and Sources), de los autores: Vladimir Protasov, Mark Applebaum, Alexander Karp, Romualdas Kasuba, Alexey Sossinsky, Ed Barbeau y Peter Taylor. Se propone una serie de problemas retadores. Los cuales están clasificados por edad y nivel educativo en que encuentran los participantes. También, caracterizan los problemas de acuerdo al contexto ya que es diferente un estudiante de ciudad que uno que se educa en la parte rural ya que hay varios aspectos culturales o sociales que no distinga o reconozca: "en el aula o fuera de ella". Muchos de ellos son pertinentes al salón de clases y otros problemas retadores, algunos de ellos de muy reciente origen (algunos muy populares entre la población en general), están dirigidos a competiciones o concursos de estudiantes de diferentes procedencias.

1.2.2. Retos más allá del aula de clase – Fuentes y cuestiones de organización

En el capítulo 2. Retos más allá del aula de clase – Fuentes y cuestiones de organización (Challenges Beyond the Classroom—Sources and Organizational Issues), de los autores: Petar Kenderov, Ali Rejali, Mariolina G. Bartolini Bussi, Valeria Pandelieva, Karin Richter, Michela Maschietto, Djordje Kadijevich y Peter Taylor. Se analiza la existencia de muchos tipos de problemas retos o desafíos en el salón de clases y fuera de él y que han aportado internacionalmente. Se describen los rasgos especiales de cada tipo de problema y propone un gran número de ejemplos que indican la amplia variedad de tipos de retos o desafíos que con mucho éxito se utilizan en el mundo.

1.2.3. Ambientes tecnológicos más allá de las aulas

En el capítulo 3. Ambientes tecnológicos más allá de las aulas (Technological Environments beyond the Classroom), de los autores: Viktor Freiman, Djordje Kadijevich, Gerard Kuntz, Sergey Pozdnyakov y Ingvill Stedoy. Se discuten diversas alternativas que a través de las TIC pueden contribuir a un proceso de enseñanza aprendizaje dinámico e interactivo para el planteamiento de problemas y su experimentación. Esto es de por sí un reto dentro y fuera del salón de clases, ya que es un medio que se ha convertido en una herramienta imprescindible en las escuelas contemporáneas. Además, se dirige a la creación de numerosos espacios virtuales donde las personas pueden encontrarse, hacer preguntas, discutir y colaborar en trabajos de tareas retadoras de aprendizaje de las matemáticas. Se analizan algunas experiencias de prácticas mundiales y se muestran ejemplos concretos que ahondan nuestra comprensión de las ventajas y desventajas relacionadas al integrar la tecnología a las actividades de una matemática retadora dentro y fuera del aula.

1.2.4. Tareas retadoras y el aprendizaje de las matemáticas

En el capítulo 4: Tareas retadoras y el aprendizaje de las matemáticas (Challenging Tasks and Mathematics Learning), de los autores: Arthur B. Powell, Inger Christin Borge, Gema Ines Fioriti, Margo

Kondratieva, Elena Koublanova y Neela Sukthankar. Se presenta una vista de los objetivos para una didáctica de la matemática retadora y la importancia cognoscitiva de los esquemas de resolución de problemas. Se hace una distinción entre las tareas matemáticas, ejercicios y problemas reto y se analizan cómo los problemas retadores promueven la construcción de esquemas para construcción de didácticas a temas complejos en la matemática. Se ofrecen seis ejemplos diversos de problemas reto de varios contextos culturales y académicos. Se interrelacionan los aspectos didácticos, cognoscitivos y matemáticos en cada ejemplo. Se muestra, en un anexo, ejemplos que ilustran cómo los problemas de matemática retadores son convenientes para un tipo de estudiante y las situaciones didácticas diversas que se pueden presentar. Además, cómo estos problemas pueden ser los instrumentos indicados para estimular la creatividad, animar la colaboración, y pueden apoyar la formación de los esquemas de la resolución de problemas. Finalmente, cómo con el uso de problemas retadores los docentes pueden motivar mejor el estudio de los nuevos contenidos de las matemáticas. La construcción de este capítulo tomo como referencia los aportes de numerosos autores, entre los que se destacan:

Anderson, J.R., Reder, L.M., Simon, H.A. (1996) Situated learning and education. Educational Researcher 25, pp. 5–11.

Applebaum, M., Leikin, R. (2007) Looking back at the beginning: Critical thinking in solving unrealistic problems. The Montana Mathematics Enthusiast 4, 2, pp. 258–265

Davis, R.B., Maher, C.A. (1997) How students think: The role of representations. In: English, L. (ed.), Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images, pp. 93–115. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ

De Corte, E., Greer, B., Verschaffel, L. (1996) Mathematics teaching and learning. In: Berlin, D.C.,Calfee, R.C. (eds.) Handbook of educational psychology, pp. 491–549. Macmillan, New York

Fioriti, G., Gorgorio, N. (2006) Mathematical challenge to widen excluded students‘ foreground. Submitted paper, ICMI Study 16

Francisco, J.M., Maher, C.A. (2005) Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. Journal of Mathematical Behavior 24, 3–4, pp. 361–372

Kondratieva, M. (2007) Understanding mathematics through resolution of paradoxes. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 6, pp. 127–138

Maher, C.A. (2005) How students structure their investigations and learn mathematics: Insights from a long-term study. The Journal of Mathematical Behavior 24, 1, pp. 1–14

Marshall, S.P. (1996) Schemas in problem solving. Cambridge University Press, New York

Mayer, R.E. (1992) Thinking, problem solving, cognition. 2nd edn. Freeman, New York

Mayer, R.E., Wittrock, M.C. (1996) Problem-solving transfer. In: Berlin, D.C., Calfee, R.C. (eds.) Handbook of educational psychology, pp. 47–62. Macmillan, New York

1.2.5. Las matemáticas en contexto: Centrarse en los estudiantes

En el capítulo 5. Las matemáticas en contexto: Centrarse en los estudiantes (Mathematics in Context: Focusing on Students), de los autores: Mariolina G. Bartolini Bussi, Sharada Gade, Martine Janvier, Jean-Pierre Kahane, Vincent J. Matsko, Michela Maschietto, Cecile Ouvrier-Buffet y Mark Saul. Se presentan nueve estudios de casos en que los estudiantes se comprometen con una matemática retadora fuera del salón de clases. Se anima a que los estudiantes colaboren en investigaciones que van más allá del plan de estudios normal y de forma creadora utilizan los recursos del contexto específico en cada caso. Se muestran las experiencias de problemas reales e interesantes en Italia, la India, Francia, Estados Unidos y se describen las técnicas de investigación utilizada en cada uno de los casos.

1.2.6. ¿Cómo proporcionar retos?

La matemática puede retar a los estudiantes tanto dentro como fuera del aula de clase, *IMCI Estudio 16. Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula.* El aprendizaje tiene lugar en muchos contextos. Los llamados círculos matemáticos, clubes, laboratorios, competencias, exhibiciones, materiales recreativos, o simples conversaciones con pares, pueden ofrecer oportunidades para que los estudiantes estén expuestos a retos, tanto en el aula como más allá de ella. En estas iniciativas, el papel del profesor es central; es el profesor quien enfrenta la tarea difícil de mantener vivas en el aula de clase la espontaneidad y creatividad que los estudiantes puedan mostrar fuera de ella.

El estudio evidencia que muchos profesores no seleccionan los problemas a tratar en una lección por su propia cuenta, sino simplemente siguen lo que se da en un texto. En este contexto el papel de buenos textos y libros con selecciones de problemas es muy importante. Para proveer un reto no sólo se debe incluir problemas retadores, sino también, algo que con frecuencia ayuda más, se debe construir pequeños conjuntos de problemas que conducen a un estudiante a partir de unos hechos y ejemplos muy sencillos hacia otros más profundos y retadores. Por medio de una cuidadosa selección de problemas y organización de la estructura de textos, los autores pueden ayudar mucho a los profesores a proporcionar retos a sus estudiantes. Puede suceder que un estudiante con un buen libro puede desarrollar un interés en la matemática sin ayuda del profesor.

Los autores mencionan también la importancia de retar a estudiantes de todo nivel de escolaridad, motivación, antecedentes y habilidades. Estudiantes que tengan una alta motivación necesitan retos para que no dejen de dirigir sus mentes activas hacia las matemáticas y abandonarlas por otras áreas que encuentran más atractivas. Los retos matemáticos pueden servir para atraer a estudiantes que llegan a la escuela con un menor nivel de motivación; tales estudiantes pueden aprender a partir de material retador más de lo que pueden aprender del dominio de algoritmos o métodos rutinarios.

Es particularmente importante, aunque difícil, proporcionar retos para estudiantes que deben luchar para aprender matemáticas, los estudios y las experiencias que se comparten conllevan a que es fundamental realizar actividades para estudiantes que tienen dificultades a la hora de aprender la matemática, las cuales relacionen cálculos y procedimientos algorítmicos para que puedan empezar a dominar los saberes matemáticos. Sin embargo, algunos docentes practicantes han encontrado que aun el aprendizaje de materiales rutinarios puede mejorarse cuando sucede en un ambiente retador y no rutinario.

Son particularmente valiosas las situaciones que pueden usarse para retar a todo estudiante, sin tener en cuenta sus antecedentes o su nivel motivacional y actitudinal.

El proceso de proporcionar a los estudiantes situaciones retadoras en sí presenta un reto para educadores. Algunos de estos retos son matemáticos. El profesor o maestro debe poseer un conocimiento amplio y profundo de la matemática que enseña, para poder apoyar a los estudiantes que están trabajando con materiales no estándar. Otros retos para el profesor son pedagógicos. Al ensanchar los tipos de experiencia que los estudiantes pueden tener, el profesor debe además incrementar su conocimiento de cómo el estudiante

aprende, así como afinar su habilidad de interpretar lo que el estudiante expresa. Es responsabilidad de la comunidad de matemáticos y de educadores de matemáticas apoyar al profesor en estos aspectos de su crecimiento[13].

[13]Comité Internacional de Programa. ICMI Study 16, *Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula*. http://www.wfnmc.org/icmis16ddspanish.html.

1.2.7. La formación del profesor y los retos matemáticos

En el capítulo 6. La formación del profesor y los retos matemáticos (Teacher Development and Mathematical Challenge), de los autores: Derek Holton, Kwok-cheung Cheung, Sesutho Kesianye, María Falk de Losada, Roza Leikin, Gregory Makrides, Hartwig Meissner, Linda Sheffield y Ban-Har Yeap. Se da una mirada a los problemas de la formación profesional del docente de matemáticas cuando se decide la utilización de los problemas reto en los salones de clases, se discute sobre qué matemática es la que se mira; por qué los problemas retadores de matemáticas son importantes en las aulas; muestran algunos ejemplos de problemas reto que pueden proporcionar verdaderas situaciones de desafío en el aula; y hace pensar en algunas barreras que podrían inhibir el uso de éstos. También se da una mirada a la investigación en educación matemática que es pertinente a este capítulo. Se continúa con una pedagogía para una preparación eficaz del profesor, que incluye aspectos teóricos, prácticos y sugerencias para quienes quieran diseñar un proyecto de formación profesional a través del uso de una matemática retadora.

1.2.8. ¿Qué es la matemática y qué es un reto matemático?

Se considera que este asunto se compone de dos partes interconectadas. Una de las partes es la obra que se ha desarrollado durante siglos y que cubre todos los hechos básicos del cálculo y más allá de él. Esta parte de la matemática contiene la mayoría de los contenidos que normalmente se enseñan y evalúan en los diferentes sistemas escolares. Contiene las reglas y los algoritmos con los que se está familiarizado el nivel de educación media y se inician los estudios superiores de pregrado. “Sin embargo, en la matemática hay más que esto. Existe también el lado creativo, los procesos que llevan a la solución de problemas abiertos y a la generación y consolidación del nuevo conocimiento matemático. Este lado creativo es un ingrediente importante en la investigación, en la historia de la disciplina, y en el desarrollo del pensamiento matemático de cada estudiante”. Si se define la **resolución de problemas** como *el* *solucionar problemas cuando la vía de solución no está completamente clara*, esta parte de las matemáticas alberga los procesos utilizados en la solución de problemas matemáticos retadores.

Solución de problemas. En este estudio, la expresión "solución de problemas" se emplea para significar el permitir a estudiantes trabajar en problemas cerrados que no están en capacidad de solucionar de manera inmediata. Luego, los estudiantes necesitan aplicar su conocimiento de contenidos matemáticos, así como su ingenio, intuición y un abanico de destrezas metacognitivas para poder llegar a una respuesta. También esta parte de la matemática es donde la experimentación es necesaria a fin de hacer conjeturas. Es decir, donde las conjeturas pueden fallar por refutación o promover pruebas, ambas deben ser logradas a través de ejemplos o de argumentos. Una discusión más completa puede apreciarse en los trabajos de: Hadamard (1945), Hardy (1969), Holton et al. (2001), Lakatos (1976), Polya (2004), Tall (1980) y Thomas and Holton (2003)[14].

1.2.9. Matemáticas retadoras: Prácticas en el aula

En el capítulo 7. Matemáticas retadoras: Prácticas en el aula (Challenging Mathematics: Classroom Practices), de los autores Gloria Stillman, Kwok-cheung Cheung, Ralph Mason, Linda Sheffield, Bharath Sriraman y Kenji Ueno. Se examinan los problemas en la práctica de aula relacionados con aquellos docentes que proporcionan problemas reto de matemáticas de forma cotidiana. Se examina cómo una matemática retadora puede transformar la esencia de las aulas de matemática; cómo puede diseñarse una matemática retadora para las clases; y cómo pueden diseñarse artefactos y prototipos para las prácticas en el aula en coherencia con la misma. Finalmente, se presentan cuestiones sobre la planeación

[14] En ingles en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 205

de investigaciones factibles asociadas con la práctica de una matemática retadora en el salón de clase; se ilustran direcciones adecuadas.

1.2.10. Planes de estudios y evaluación que aportan retos en las matemáticas

En el capítulo 8. Planes de estudios y evaluación que aportan retos en las matemáticas (Curriculum and Assessment that Provide Challenge in Mathematics), de los autores: María Falk de Losada, Ban-Har Yeap, Gunnar Gjone y Mohammad Hossein Pourkazemi. Se presentan valoraciones de estudios de una selección de 32 casos prácticos que proporciona la enseñanza de una matemática retadora e ideas para una discusión de los problemas de la evaluación respecto a la provisión de problemas reto de la matemática. En la primera parte del capítulo, estudios de casos prácticos de Singapur, también de Noruega, Brasil e Irán. En la segunda parte, la relación entre la concepción del rol de la evaluación, los rasgos de tareas evaluativas y la provisión de retos, cómo esta relación puede acarrear problemas al plan de estudios y se discute como puede variar bajo condiciones diferentes. En la parte final del capítulo se incluyen las posibles preguntas de la investigación en esta área.

1.2.11. Observaciones generales sobre problemas retadores dentro y fuera del aula

"*Las contribuciones del Estudio 16 del ICMI reflejan el estado del arte de las matemáticas retadoras dentro y fuera del aula, y las sugerencias sobre la dirección a seguir en cuanto al desarrollo de las investigaciones y en la puesta en práctica*"[15]. Se señala que la matemática puede retar a los estudiantes tanto dentro como fuera del aula de clase; el aprendizaje tiene lugar en muchos contextos; son particularmente valiosas las situaciones que pueden usarse para retar a todo estudiante, sin tener en cuenta sus antecedentes o su nivel motivacional. Para proveer un reto no sólo se debe incluir problemas retadores,

---

[15] En ingles en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 227.

sino también, algo que con frecuencia ayuda más, se debe construir pequeños conjuntos de problemas que conducen a un estudiante a partir de unos hechos y ejemplos muy sencillos hacia otros más profundos y retadores.

Respecto a las que tiene que ver con la formación de los docentes para el trabajo con problemas reto en el aula de clase, se afirma que el proceso de proporcionar a los estudiantes situaciones retadoras en sí presenta un reto para los educadores. Algunos de estos retos son matemáticos, el profesor debe poseer un conocimiento amplio y profundo de la matemática que enseña, para poder apoyar a los estudiantes que están trabajando con materiales no estándar. Otros retos para el profesor son pedagógicos. Al ensanchar los tipos de experiencia que los estudiantes pueden tener, el profesor debe, además incrementar su conocimiento de cómo el estudiante aprende, así como afinar su habilidad de interpretar lo que el estudiante expresa. Es responsabilidad de la comunidad de matemáticos y de educadores de matemáticas apoyar al profesor en estos aspectos de su crecimiento. Se puede tener éxito al medirse a un reto, o no tenerlo, pero el mismo proceso de enfrentar sus dificultades puede resultar en un entendimiento más amplio. La presentación de retos matemáticos puede proporcionar la oportunidad de experimentar el descubrimiento independiente, por medio del cual el individuo puede adquirir nuevo entendimiento profundo y un sentido de poder personal. Entonces, el enseñar por medio del uso de retos puede incrementar el nivel del entendimiento y de la atracción que siente el estudiante por las matemáticas.

Por otra parte, es necesario destacar las notas para una agenda de investigación acción de la WFNMC[16] dictadas por Mary Falk de Losada en Mathematics Competitions cuando dice "…*La idea de que todos los*

[16] WFNMC: World Federation of National Mathematics Competitions

estudiantes pueden disfrutar retos y enriquecer experiencias en matemáticas no es nueva…”[17] y luego la propone como una línea de investigación para la WFNMC.

1.3 Formación de docentes

El aparte sobre la formación de docentes se subraya en la importancia de planear los modelos de la enseñanza de los retos a los docentes con un enfoque que describa el vínculo entre la teoría y la práctica, desde la perspectiva del docente, ya que evidencia las concepciones que tiene este de la matemática, de los factores sociales, políticos, económicos, culturales que envuelven a una región y en si a una institución educativa. A continuación, se enunciarán dos premisas en la que están basados los comentarios de esta sección:

1. Muchos docentes no logran relacionar la matemática universitaria como estudiante con la matemática escolar (Franquea y Tuncali 2004, Moreira y David 2004).

2. Los docentes tienden a organizar su aula de clase y desarrollar su enseñanza, de la misma manera como les fue enseñada (Brown et al. 1990, Cobb et al. 1990, Scharm y Lappan 1988, Shulman 1987). Con respecto a la primera premisa, “*el objetivo está en que los docentes de matemáticas desarrollen una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales como un rasgo esencial en su formación. De esta manera, ellos pueden proporcionar una clase enriquecedora, retadora y llena de oportunidades creativas de una matemática superior relacionada con la matemática de la escuela (Ma 1999). Para ser consecuente con este fin, deben planearse las prácticas sobre la base de una pedagogía eficaz en matemáticas y que se ha caracterizado en las secciones anteriores cuando se ha hecho referencia a los programas de formación de docentes. Éstas son:*

---

[17] Falk de Losada, M. (2010) Notes on an Agenda for Research and Action for WFNMC. Mathematics Competitions, vol 23, no. 2. P. 13.

- ✓ *estableciendo significados y sus conexiones;*
- ✓ *siendo explícito sobre estas conexiones;*
- ✓ *describiendo conexiones con el conocimiento anterior;*
- ✓ *haciendo conexiones entre las ideas matemáticas*”[18].

En la segunda premisa, “*si la preparación específica en las matemáticas escolares y los retos matemáticos para la escuela no se encuentra en la formación de los docentes, los maestros recurren a su propia experiencia escolar de orientación en la presentación de las matemáticas de la escuela a sus estudiantes, lo que podría perpetuar el énfasis de los contenidos sobre el proceso y la ausencia de un reto matemático importante en las aulas de clase. Así en todas las actividades de formación de docentes, el facilitador debe servir como un modelo, mientras incorpora el reto como un aspecto fundamental de la matemática*”[19], tanto en los cursos para docentes en formación como en los de actualización y capacitación para docentes en ejercicio (Blanton 2002, McNeal y Simón 2000). (Para un reciente ejemplo, vea McGatha y Sheffield 2006.) Se referencia también, la experiencia de Leikin y Winicky-Landman (2001): considera un curso que se enfoca en las tareas retadoras, los tipos de tareas y los tipos de retos matemáticos. Los profesores sufren con la matemática retadora cuando inician el trabajo problemas reto, así que sufren las mismas experiencias que sus estudiantes enfrentarán cuando se encuentren con situaciones no rutinarias en clases de matemáticas. Aunque el propósito explícito del curso es la

---

[18] En inglés en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 227.

[19] En inglés en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 232.

formación en los conocimientos, se desarrollan implícitamente conocimientos pedagógicos y curriculares significativos a través de enfrentar las experiencias de aprendizaje de forma diferente y retadora.

1.3.1. La formación profesional y el desarrollo de los profesores de matemáticas

En el estudio número 15 del ICMI, se socializan varias investigaciones relacionadas al rol de docente de matemáticas y a su formación desde el punto de vista de cómo este vincula la teoría y la práctica en su quehacer docente y como factores curriculares, enfoques pedagógicos, planes de estudio rígidos, estacionarios y aislados de la realidad determinan la acción de preparar y orientar una clase de matemáticas. A continuación, se describen los aportes de este estudio que fundamentan la propuesta de esta investigación.

1.3.1.1. Los desafíos del cambio de los profesores de matemáticas en el contexto colombiano: el poder de las prácticas institucionales.

Bajo la promulgación de la ley general de educación, la cual establece un “modelo de matemáticas puras” prescriptivo (Robitaille & Dirks, 1982), basado en el aspecto formalista de una lista jerárquicamente organizada de temas. En consecuencia, el álgebra y su rigor era un curso empaquetado para ser enseñado en los grados 8 y 9; donde el único material curricular para la enseñanza de la matemática son los textos conductistas, con los mismos ejercicios y contextos ideales donde la Aritmética y el Álgebra funcionan con cantidades exactas y mágicas. Lo que a finales de los 80 e inicios de los 90 llevaron a niveles de mortalidad académica, especialmente en grado octavo; que en muchos casos llevaron a la deserción escolar en varias regiones del país y que hoy en día aún se evidencian secuelas. El objetivo de esta investigación es estudiar la relación entre las concepciones de los profesores de matemáticas del álgebra y sus concepciones de sus propias prácticas de enseñanza. De donde se concluye que, al estudiar las concepciones de los profesores de su propia enseñanza del álgebra, hicieron hincapié en los determinantes cruciales de sus prácticas de enseñanza.

Una categorización de las concepciones de los profesores de sus propias prácticas, llevan a cuatro tipos de docentes; docente de atribución externa, docente de atribución principalmente externa, atribución principalmente interna y atribución interna.

- El profesor de ‘atribuciones externas’

El profesor representa un subgrupo de aquellos que ven el conocimiento como creado externamente. Este profesor promueve una visión instrumentalista (Ernest, 1989) de las matemáticas. El maestro de “atribuciones externas” tiene una posición extremista dentro del grupo más grande de instrumentistas, ya que cree que su enseñanza está dictada por un libro de texto específico que considera el mejor, ya que lleva al alumno a través de cada paso y sigue una lista predeterminada y jerárquicamente ordenada de temas. Este maestro atribuye lo que ocurre en su aula de Grado 8 exclusivamente a factores externos.

- El profesor de ‘atribuciones principalmente externas’

El profesor cree que el conocimiento del álgebra es producido por autoridades matemáticas, contenido en libros de texto y poseído por los maestros. A diferencia del profesor de ‘atribuciones externas’, está de acuerdo en que los alumnos podrían participar en la creación de algunas ideas matemáticas, pero cree que es muy difícil para ellos; por lo tanto, necesitan ser informados. Este maestro reconoce la importancia del “conocimiento del maestro” de la enseñanza, pero atribuye lo que ocurre en su aula de Grado 8 principalmente a factores externos.

- El profesor de ‘atribuciones principalmente internas’

Este profesor sabe que, históricamente, el álgebra surgió del trabajo de los seres humanos en su búsqueda de soluciones a problemas y necesidades específicas y, por lo tanto, enfatiza las conexiones entre los temas a enseñar y el entorno del alumno y la actividad de la vida. Este profesor enfatiza el impacto de sus conocimientos y disposiciones en su enseñanza, pero también atribuye gran importancia a factores externos.

- El profesor de 'atribuciones internas'

Al igual que el profesor de «atribuciones principalmente internas», este profesor es consciente de que el álgebra, y las matemáticas escolares en general, deben involucrar a los estudiantes no sólo en la identificación de las conexiones entre los conceptos matemáticos, sino también de las interconexiones del conocimiento matemático y las actividades cotidianas de los alumnos. Este maestro también rechaza los libros de texto tradicionales porque quiere que el estudiante aprenda con significado. Sin embargo, a diferencia del profesor de "atribuciones principalmente internas" que enseña de acuerdo con los requisitos de un plan de estudios tradicional institucionalizado (es decir, un plan de estudios formalista cuyos objetivos son el estudio de las matemáticas en si misma), el profesor de "atribuciones internas" cuestiona la relevancia de dicho plan de estudios. Este profesor es consciente del papel que dicho currículo ha jugado en la reproducción de las desigualdades sociales. Es consciente de las implicaciones para la práctica en el aula de una educación matemática cuyo objeto en Colombia es desarrollar la mente crítica de los educandos necesaria para la ciudadanía y la democracia, tal como se especifica en la Ley de Educación. Ningún profesor de este estudio fue categorizado como profesor de "atribuciones internas".

1.3.1.2 ¿Cómo afectan los componentes y la estructura de un currículo al conocimiento del contenido de los profesores de matemáticas?

Los diseños curriculares juegan un papel importante en la estructura de un sistema educativo. En particular, definimos el diseño curricular como la planificación de cambios en lo que los estudiantes necesitan aprender, con el fin de elevar los estándares de la educación. Sin embargo, el currículo y las normas de evaluación establecen claramente que a medida que el plan de estudios evoluciona, los educadores también necesitan adaptarse y actualicen constantemente sus conocimientos. Es de señalar que los modelos curriculares integran estándares junto a contenidos sin especificar la relación, criterios y procesos por los cuales de construyen, asociando varias creencias "basadas en formas tradicionales de enseñanza en sus países de origen: desde un plan de estudios holístico en Francia, donde la enseñanza y el aprendizaje de álgebra, geometría y probabilidad son cíclicos dentro del mismo año académico, hasta un enfoque de asignatura separada en Colombia, que se parece más al plan de estudios tradicional de los Estados Unidos, donde varios campos de las matemáticas y las ciencias están claramente separados entre sí" (Alfaro, 2004). Es importante señara que la tarea del MEN es mejorar la relación entre los profesores y el currículo, así como potencializar y apoyar la investigación en currículos culturalmente relevantes y adaptables.

1.3.1.3. Estudio de las matemáticas para la enseñanza dentro de la formación del profesorado: Una sesión de trabajo interactiva.

En su encuesta de investigación relacionada con la formación de profesores de matemáticas, Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna afirman que la investigación de la formación del profesorado se lleva a cabo por los educadores de maestros que estudian a los profesores con los que están trabajando" (2004). Basaron esta afirmación en un análisis de la investigación reportada en el Journal of Mathematics Teacher Education desde su creación en 1998, y en PME 1999-2003. En el proyecto de investigación QUANTUM, estamos trabajando en un lenguaje de este tipo. Nuestro interés general son las *matemáticas para la enseñanza,* su descripción y las oportunidades relacionadas para el aprendizaje de los profesores. Una característica distintiva de la formación del profesorado de matemáticas es su doble, pero profundamente entretejido, objetos: *la enseñanza* (es decir, aprender a enseñar) y las *matemáticas* (es decir, aprender matemáticas para la enseñanza) – la tensión sujeto-método. Este objeto dual se escribe en grande en los programas de formación de maestros en servicio donde las nuevas y/o diferentes formas de conocer y hacer matemáticas se combinan con contextos nuevos y/o diferentes para la enseñanza. Estas son las condiciones para el desarrollo profesional continuo en Sudáfrica[20].

1.3.1.4. Preparación del profesor de matemáticas.

Este trabajo tiene como objetivo discutir el tema de la preparación del profesorado de matemáticas desde la perspectiva epistemológica y no didáctica y metodológica como normalmente se realiza. A continuación, se sacan a la luz dos cuestiones: las concepciones de las matemáticas transmitidas en los programas de licenciatura y la concepción misma de la preparación; al parecer, así se ha pensado la preparación de profesores de matemáticas; como un camino lineal que sigue una secuencia que va de lo más simple a lo más complejo y que encuentra su raíz en el conocimiento matemático producido por la comunidad de matemáticos. Eso significa que, para convertirse en un profesor de matemáticas, es vital y necesario previamente "***saber mucho de matemáticas***"; es decir que se piensa la matemática como algo ya fijo y terminado para trasmitirlo en las instituciones educativas. Donde **la preparación** se sigue entendiendo y conformando como un proceso en el que el futuro profesor recibe herramientas, pero no contribuye a la construcción de un lugar agradable para decidir y elegir procedimientos y conocimientos adecuados a la tarea del educador.

1.3.1.5 Una teoría del conocimiento matemático para la enseñanza.

El conocimiento de las matemáticas de los profesores juega un papel importante en la configuración de la calidad de su enseñanza. Sin embargo, el conocimiento de la matemática que se necesita para enseñar se entiende inadecuadamente. Estudios han revelado que no es suficiente con impartir espacios académicos donde se orientes conceptos y conocimientos sobre matemáticas, se necesitan actividades

---

[20] [32]Para una discusión más detallada de QUANTUM, véase Adler & Davis (2004). Este trabajo también elabora una primera fase en la investigación, y una exploración de la noción de 'desempaquetado' como descriptor de las matemáticas para la enseñanza.

generadoras de prácticas donde el estudiante o docente de matemáticas interactúe y evalué el quehacer como docente, ya que no se puede hablar de un docente capacitado para orientar una clase si no cuenta tanto con los conocimientos teóricos como de la práctica, también debe contar con habilidades comunicativas, psicológicas, motivacionales, entre otras especificaciones; ya que la docencia no se puede concebir como la acción de transferir e impartir conocimientos y construir actividades que validen dicho proceso. Adler y Davis (2004), creen que, para mejorar la calidad y la preparación profesionales de la educación en matemáticas, se deben recopilar e integrar los resultados obtenidos en diferentes investigaciones sobre formación de formadores, no como un proceso institucional sino como un proceso generalizado y liderado por los agentes gubernamentales o estatales.

Sin embargo, los análisis recientes de la práctica de los profesores proporcionan una nueva visión de estos problemas. “Estos análisis revelan dos cosas: en primer lugar, que las demandas matemáticas de la enseñanza son sustanciales y se deben investigar en todos los niveles educativos, y en segundo lugar, que un estudio de ese conocimiento está significativamente informado por el estudio concurrente del trabajo de la enseñanza es decir la actividad dentro del aula y la interacción de los docentes con los estudiantes. Un objetivo central del trabajo ha sido definir una teoría basada en la práctica del conocimiento matemático para la enseñanza” (Ball, Bass, Sleep & Thames 2004).

En esta sesión de trabajo interactiva, dirigida por Deborah Ball y conducida con Hyman Bass, Laurie Sleep y Mark Thames, presento: (a) un marco teórico para el conocimiento matemático para la enseñanza, (b) investigación sobre las demandas de conocimiento matemático evidentes en la enseñanza en el aula, y (c) se involucra a los participantes en la consideración de cómo se podrían desarrollar dominios de conocimiento basados en la práctica para su uso en la formación de maestros.

Un ejemplo de conocimiento matemático para la enseñanza. En el trabajo, Ball, Bass, Sleep & Thames se preguntaron: ¿Qué tipos de conocimientos y habilidades matemáticas comunes y especializadas se necesitan para el trabajo distintivo de la enseñanza? Para ilustrar, se examina un cálculo de resta simple:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 168 \\ \hline \end{array}$$

La mayoría recordará un algoritmo que produce la respuesta, 139:

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\,\overset{9}{\cancel{{}^{1}0}}\,{}^{1}7 \\ -\ 1\ 6\ 8 \\ \hline 1\ 3\ 9 \end{array}$$

Para enseñar, es necesario poder realizar este cálculo. **Este es el *conocimiento de contenido común (CCK)*,** *compartido* por la mayoría de los adultos educados. Pero poder llevar a cabo el procedimiento no es suficiente para enseñarlo. Por ejemplo, este algoritmo es uno con el que muchos estudiantes de tercer grado luchan, a menudo cometiendo errores. Un error común es:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 168 \\ \hline 261 \end{array}$$

Un maestro tiene que ser capaz de hacer algo más que detectar inmediatamente que 261 es incorrecto. La enseñanza calificada requiere estar equipado para ayudar a un estudiante a aprender a hacerlo bien. Un profesor con ***conocimientos especializados en contenido (SCK)*** puede analizar el sitio y la fuente de errores. Aquí, por ejemplo, un estudiante, en cada columna, ha calculado la diferencia entre los dos números, o restado el dígito más pequeño del más grande. Los profesores deben ser capaces de realizar dicho análisis de errores, de manera eficiente y fluida. Tal análisis a menudo requiere conocimientos especializados de matemáticas, detallados de maneras que la mayoría de los adultos no tienen al alcance de la mano.

Vayamos un paso más, porque el análisis de errores no es todo lo que hacen los profesores. La enseñanza también implica explicar procedimientos como este. Uno podría dar un conjunto de instrucciones de procedimiento específicas para este cálculo, pero esto no se generalizaría a, por ejemplo, 314 – 161, donde uno sólo “tacha” y “pone” una vez, no dos veces. Tampoco hace nada para mostrar por qué funciona el procedimiento. ¿Cuál es una manera efectiva de representar el significado del algoritmo de resta, no solo confirmar la respuesta, sino mostrar lo que significan los pasos del procedimiento y por qué tienen sentido? La enseñanza también implica considerar qué números son estratégicos para usar en un ejemplo. 307 y 168 pueden no ser opciones ideales para hacer visible la estructura conceptual del algoritmo. ¿Qué revelan los ejemplos numéricos que requieren dos reagrupamientos en lugar de uno, o una secuencia de ejemplos de los que no requieren reagrupación a los que requieren varios? ¿Y qué pasa con el papel de los ceros en diferentes puntos del procedimiento?” (Ball, Bass, Sleep & Thames 2004). Preguntas como estas requieren una especie de visión matemática y resolución de problemas única para la enseñanza. Es decir que no es suficiente con que un profesor de matemáticas sepa y maneje los conceptos y teorías, sino que tenga la capaz de interpretar los errores que los estudiantes cometen, como indicador de oportunidad para brindar nuevas alternativas para que el educando pueda asimilar los saberes y desarrolle habilidades matemáticas mediante el uso de diferentes herramientas que el docente brinda, asocia y contextualiza dentro y fuera del aula de clase.

1.4 Referentes para proponer problemas en matemáticas.

Para proponer problemas dentro del aula de clase, Blanco, Cárdenas y Caballero 2015[21], señalan que se debe enseñar a los estudiantes estrategias que conlleven a la comprensión, interpretación, análisis, planificación, ejecución y verificación del problema. Es importante establecer ejercicios y problemas

[21] Blanco. L, Cárdenas. J, Caballero A. La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria. Colección manual UEX. Cap 6. 2015.

relacionados con objetos, hechos y situaciones cotidianas o problemas formulados para permitir al estudiante disfrutar de aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios para la matemática y que contribuyan al desarrollo de habilidades cognitivas necesarias para la resolución de problemas y problemas no rutinarios. Igualmente, las fuentes utilizadas para plantear las tareas (problemas) deben ser diversas y familiares para los resolutores. Así, por ejemplo, se refiere a situaciones problemáticas relacionadas con temas de interés a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares. Por otra parte, se refiere a diferentes formas de presentar los problemas. Al respecto, se habla de problemas enunciados en texto escrito o a partir de gráficos y tablas. Igualmente, son numerosas las sugerencias que aparecen en los lineamientos currículo en referencia a los pensamientos numérico, algebraico y geométrico; que relacionan diferentes acciones que los estudiantes debieran realizar cuando formulan o resuelven problemas: comprender, aplicar, calcular, explicar oralmente y por escrito, generalizar, comprobar, entre otros. Atendiendo a estos aspectos se señalan cuatro referentes para formular los problemas matemáticos que se describirán en los siguientes apartados: 1. Contextos elegidos para formular la tarea; 2. Formatos en las que se proponen; 3. Fuentes de donde se obtienen los datos y situaciones y, 4. Tipo de acción que se proponen a los estudiantes para resolver los problemas.

Tabla 1. Describe y se caracteriza los referentes para la formulación de problemas.

REFERENTE	**CARACTERISTICAS**
	Al presentar un problema se enmarca en un contexto que puede reflejar una situación real, ficticia o lúdica con el que queremos darle sentido y/o aplicar los conceptos o procesos matemáticos. **1. Contexto real:** Se puede partir de una situación con un contexto real y del entorno de los estudiantes. Así, independientemente de los conceptos, se puede plantear el problema. <u>*Este tipo de contextos*</u> son los que normalmente <u>*se sugieren para los currículos*</u>, <u>*ya que permite darles sentido a los conocimientos matemáticos*</u>. La realidad

1. CONTEXTO	incluye la percepción del entorno físico y social del estudiante y componentes imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que las situaciones reales desde el punto de vista del adulto. **2. Contexto realístico:** La tarea es identificar y recordar la fórmula adecuada y aplicarla. *Su acción se limita a recordar el algoritmo a utilizar, sustituir los datos del enunciado y proceder al cálculo*; normalmente este tipo de problemas se ubican en la misma sección o capitulo donde aparece el concepto que se debe aplicar. Este tipo de problema se plantea para justificar la aplicación de las matemáticas a una situación real, pero la tarea que desarrolla el resolutor es claramente diferente a la que desarrollaría en el primer caso planteado para el contexto real. Ya que este tipo de problemas sugiere un tipo de procedimiento que en la mayoría de los casos se entiende como un ejercicio. **3. Contexto matemático:** Los enunciados sugeridos son muy similares al problema planteado en el contexto realístico. La invitación implícita al procedimiento viene sugerida por la estructura del enunciado y los ejemplos puestos en el tema del libro. *En este caso, el texto incluye de manera explícita la información de variables y constantes que intervienen en el problema*, excluye toda referencia a una situación real o simulada, y sólo establece un contexto matemático. No hay una referencia a la realidad y sí a conceptos y proceso matemáticos. **4. Contexto manipulativo y/o recreativo:** Normalmente *asociado a situaciones geométricas ya que permiten transformar, componer y descomponer formas y figuras*. Son situaciones que en la mayoría de los casos asocian definiciones y propiedades. También el resoluto se encontrará con dificultades que le sugieran otro tipo de procedimiento. No obstante, se caracterizan por *vincular diferentes métodos de solución,* diferentes a la aplicación de una formula y su *principal característica es el relacionar situaciones no rutinarias.* Blanco y Contreras, (2002)
	Normalmente los problemas pueden presentarse en diferentes formatos, así, por ejemplo, si se quiere proponer problemas aritméticos relativos a artículos de un supermercado se puede plantear un texto escrito, una tabla con los productos y los precios o simplemente una imagen obtenida del escaparate de una tienda o una propaganda de sus productos. Esta categoría se refiere a la forma en que se *presenta la información en el enunciado a los diferentes sistemas de representación que se pueden vincular, los cuales permiten un mejor aprendizaje de los objetos y conceptos matemáticos*. Chamorro y Vecino, (2003)

2. FORMATO DE PRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS	Tablas, graficas, imágenes y recurso manipulativos (geométricos), los cuales aportan información diversa presentada en diferentes formas. Un ejemplo puntual es: el *objetivo de la actividad es que el estudiante utilice la formula para calcular el área de un triángulo*. Para esto se presenta una figura totalmente diferente donde la base y la altura no se encuentran en la misma s*ituación normalista e idealista* que asocian los textos base en forma horizontal y altura en forma vertical *(formato estándar*), sino *se realiza una transformación al triángulo (rotación*), de tal forma que se deban realizar construcciones auxiliares que normalmente asocia otros procedimientos y cálculos que posibilitan la solución del problema. Azcarate, (1999)
3. FUENTES	Las diferentes actividades pueden plantearse a partir de situaciones diversas que de un modo general viene referidas en la malla curricular. El estudio realizado por Blanco refleja que *los estudiantes de diferentes niveles educativos no ponen ejemplos de estas situaciones cuando se les pregunta acerca de la utilidad de las matemáticas en su actividad cotidiana*. Esto lleva a sugerir un cambio profundo en las situaciones que sirven de apoyo para plantear los problemas. Blanco (2013),
	Cuando un resolutor enfrenta una actividad matemática son diferentes las tareas que puede realizar. Ello dependerá de la naturaleza de la actividad propuesta, del nivel de conocimiento y experiencia del resolutor o de los objetivos que se propongan, entre otros factores. Algunos autores como Chamorro y Vecino (2003) y Pino y Blanco (2008) han señalado algunas tareas específicas de los resolutores de problemas. Menciona que en las pruebas TIMMS del 2007 se clasifican las tareas matemáticas en tres dominios o procesos cognitivos: Conocer, Aplicar y Razonar, señalando diferentes actividades en cada caso: **Conocer:** Reconocer, Calcular, Recuperar, Medir y Clasificar/Ordenar. **Aplicar:** Seleccionar (p.ej. una operación, método o estrategia, algoritmos, etc. apropiado), Representar, Modelizar (p.ej. una ecuación o un diagrama, etc.), Aplicar, Resolver problemas rutinarios. **Razonar:** Analizar, Generalizar, Sintetizar/Integrar, Justificar, Resolver problemas no rutinarios (p. 78). Tomado de Blanco y Cárdenas, donde describen que al revisar diferentes currículos se *encontraron con numerosas referencias a las tareas que debieran propiciarse en las actividades matemáticas:* abstraer, analizar, aplicar, argumentar, calcular, clasificar, comparar, completar, conjeturar, contar, convencer, desarrollar modelos, diseñar estrategias, estimar, explicar oralmente y por escrito, formular, generalizar, idear, identificar, inferir, interpretar, inventar, investigar, medir, modelizar, ordenar,

4. TAREA	organizar, plantear problemas, proveer, proponer, representar, sintetizar, tomar decisiones y validar. Todas estas tareas demandan capacidades diferentes y han sido categorizadas de diferentes maneras. Por ejemplo, en la Gráfica 7, se representan **dos categorías**: la de Fortuny (2000) y la de Krathwohl (2002). Fortuny (2000), citado por Blanco y Cárdenas (2015) se refiere a: *tareas de bajo rango cognitivo, medio y alto*, donde las tareas de alto rango indican un nivel de reflexión cognitiva en el que se sintetizan informaciones, se establecen deducciones, etc., mientras que en tareas de bajo rango indica tareas capacidades o habilidades que implican acciones inmediatas de tipo reproductivo, donde se requiere que el estudiante comprenda la tarea y tenga una idea previa clara. Krathwohl (2002) citado por Blanco y Cárdenas (2015) agrupa estas tareas en seis 6 categorías diferentes: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. Esta categorización la hace modificando la Taxonomía de Blomm e incluyendo la tarea de crear como un nivel superior. Esto es, retoma como punto de partida las tareas que hacen referencia a la memorización y reproducción de conocimientos, y las tareas se van complejizando a medida que el estudiante debe hacer uso de su pensamiento productivo. Además, los diferentes tipos de tareas suelen estar vinculadas con mayor fuerza a cuestiones conceptuales o procedimentales[22]. GRAFICA 1.  Gráfica 1: Categorización de tareas según las capacidades demandadas a los estudiantes.

[22] Blanco. L, Cárdenas. J, Caballero A. La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria. Colección manual UEX. Cap 6. 2015

Conclusiones del capítulo 1

De acuerdo con las consultas realizadas sobre resolución de problemas no rutinarios, el papel del docente dentro y fuera del aula de clase y estrategias didácticas basadas en la PNR y como estos influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación básica y media se puede concluir que:

El aprendizaje de las matemáticas tiene lugar en muchos contextos como lo son: Los llamados círculos matemáticos, clubes, laboratorios, competencias, exhibiciones, materiales recreativos, o simples conversaciones con pares, pueden ofrecer oportunidades para que los estudiantes estén expuestos a retos, tanto en el aula como más allá de ella. En estas iniciativas, el papel del profesor es central y consiste en mantener viva en el aula de clase la espontaneidad y creatividad que los estudiantes puedan explorar con PNR y como estos contribuyen a un aprendizaje significativo.

Para que el estudiante desarrollo herramientas matemáticas y procesos cognitivos que contribuyan a un razonamiento matemático duradero y creciente; se requiere el trabajo con problemas no rutinarios en los cuales el estudiante deba realizar tareas cognitivas asociadas al aplicar, analizar y evaluar de tal forma que se pueda lograr una modificabilidad cognitiva y en si una matemática aplicada al contextos cotidianos del estudiante, es decir una matemática utilizable no solo dentro del aula de clase.

Para que esto último se logre el docente debe cambiar de concepción frente a la enseñanza de la matemática es decir debe tener una atribución interna donde se entienda que conceptos y objetos matemáticos no solo se deben enseñar en las sesiones de clase, si no que se debe vincular a los estudiantes a identificar las conexiones e interconexiones que tiene el conocimiento matemático de tal forma que se pueda asociar e integrar conceptos geométricos, algebraicos, numéricos y variacionales en la búsqueda de una estrategia de solución a una situación problémica.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referentes sobre la resolución de problema. Problemas retadores.

A continuación, se asocian los principales referentes sobre la resolución de problemas y pasos, fases o procesos que han asociado en su método para solucionar problemas matemáticos, como las heurísticas y los procesos metacognitivos que estos autores consideran relevantes.

2.1.1. La resolución de problemas

La heurística significa hallar o inventar, según su raíz griega. La heurística es vista como el arte de idear, ingeniar o inventar, con la intención de construir estrategias, métodos, criterios, que permitan resolver problemas a través de la creatividad, pensamiento divergente o lateral y en sí de la experiencia tanto individual o colectiva. Para Polya (1945) la heurística, trata de comprender el método que conduce a la solución de un problema, en particular las operaciones típicas útiles en el proceso.

Polya en su texto Mathematical Discovery (Polya 1961)[23], genera una definición haciendo una disertación de los procesos que interactúan en la resolución de problemas: Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata. Una definición muy parecida a la que dio Polya es la propuesta por Krulik y Rudnik, en la cual mencionan: un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980)[24].

De estas definiciones se puede generar la siguiente inferencia según la descripción que asocia tanto Polya como Krulik y Rudnik referente a un problema:

[23] Polya, G. (1962). Mathematical Discovery (vol 2). John Wiley Sons, New York.

[24]Krulik. S y J. Rudnik (1980). Problem Solving, a handbook for tearchers. Allyn & Bacon Inc.

- ✓ **Aceptación**: El individuo o el grupo de personas debe aceptar el problema, de tal forma que exista un compromiso, el cual puede ser debido a una motivación interna o externa.
- ✓ **Bloqueo:** Es evidente que en muchos casos cuando se empieza resolver un problema los primeros intentos no generen un fruto o las técnicas y conceptos empleados al abordar el problema no funcionen.
- ✓ **Exploración:** El compromiso adquirido bien sea personal o grupal, fuerzan a la exploración de nuevos métodos y estrategias para afrontar el problema desde otro punto de vista.

Polya (1973)[25] señala que el papel de las preguntas que puede realizar el docente en función de la resolución de problemas debe impulsar la actividad mental, cognitiva y en si genera una interacción directa entre el docente y el estudiante donde el lenguaje juega un papel primordial como mediador en la búsqueda de la vía que lleve a la solución de un problema. Debe contener acciones operativas que orientan al estudiante en identificar las estructuras y los instrumentos idóneos para lograr la solución al problema. También puede dar indicaciones, sugerencias o simplemente realizar interrogantes que movilizan la actividad mental en función de revisar y verificar las condiciones del problema y sobre todo generar un desarrollo cognitivo del pensamiento matemático del estudiante por medio de estos estímulos.

En la resolución de problemas **Muller** establece que, en los procedimientos propios de la heurística, se encuentran los principios generales que se emplean en la acción de resolución, donde la analogía es muy útil para estimular a los estudiantes para que descubran proposiciones, sugerirles el empleo de determinados métodos, criterios, procedimientos, o la vía de solución, a partir de la comparación de las semejanzas entre las estructuras interna y externa de los problemas. Otro principio es el de reducción, el

[25]POLYA, G. How solve it. A New Aspect of Mathematical Method. 2. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1973. 272 p.

cual posibilita la transformación de un problema desconocido a partir de otro ya conocido, la elaboración de un modelo que represente el problema de forma conveniente sin generar invariantes de este, donde se pueda generar la búsqueda de proposiciones generales a partir de resultados parciales. Por último, se tiene el principio de inducción, el cual es un razonamiento que permite evaluar o demostrar proposiciones particulares para poder generar propiedades o comportamientos explícitos del problema a solucionar. (Muller, 1978)[26].

Por otro lado tenemos que **Alan Schoenfeld** en su libro "Mathematical Problem Solving" (Schoenfeld, 1985)[27], considera insuficientes los procedimientos y las estrategias planteadas por Polya para la resolución de problemas; sostiene que, este proceso es más complejo e involucra más elementos, señalando los referentes a la parte metacognitiva, donde la capacidad de autorregular los procesos de aprendizaje, como lo es el conjunto de operaciones intelectuales asociados al conocimiento, control y regulación de los mecanismos cognitivos que intervienen en que una persona alcance, evalúe y produzca información, es decir que este aprendiendo; bien sea en forma directa e indirecta a la hora de solucionar problemas matemáticos, haciendo hincapié en que existe una diferencia en tener conocimientos matemáticos no es suficiente a la hora de solucionar problemas, se necesita conocer técnicas y cuando utilizarlas. Añadiendo que aspectos de carácter emocional afectivo, psicológicos, socioculturales, pedagógicos, entre otros, también hacen parte en la capacidad que una persona tenga a la hora de enfrentarse a una situación problémica.

La idea de Schoenfeld era, para que un estudiante aprenda a resolver problemas matemáticos de una manera correcta y eficiente, no es suficiente con que resuelva cada vez más problemas y adquiera un sin

---

[26] MÜLLER, H. El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la enseñanza general, politécnica y laboral. 1978. 80f. Disertación (Metodología de la Enseñanza de la Matemática) - Instituto Superior Pedagógico "Frank País García", Santiago de Cuba, 1978.

[27] Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, New York

número de estrategias, lo importante es que si se emplea un instrumento o una estrategia para solucionar un problema, se debe tener la capacidad de identificar sí está en el camino correcto o por lo contrario debe utilizar otro instrumento (técnica) y estrategia; señala Schoenfeld que lo realmente importante a la hora de solucionar un problema no es la estrategia o el instrumento que se elija para afrontar el problema, si no el control que se tenga de la situación, la cual involucra planificar, seleccionar metas y submetas y monitoreo constante durante el proceso de resolución. Finalmente, Schoenfeld establece cuatro aspectos transversales en la resolución de problemas y los caracteriza por ***dimensiones que influyen en la solución de problemas*** 1. Dominio del conocimiento, el cual incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el domino matemático, 2. Estrategias cognoscitivas, incluyen métodos heurísticos tales como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, realizar diagramas y representaciones gráficas, 3. Estrategias metacognoscitivas, se relaciona con el monitoreo constante empleado al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de seleccionar una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente y por último, 4. Sistema de creencias, este consiste en el conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes tienen acerca de la matemática y su enseñanza.

2.1.2. ¿Qué es un reto?

Normalmente se le dan diferentes significados, definiciones y sinónimos, pero todas estas convergen a considerar “un reto” a una pregunta o problema propuesto de forma intencionada para provocar un impacto positivo en el destinatario ya que este intentará una solución, de tal forma que ejercite y amplíe la comprensión y conocimiento sobre el tema relacionado. Una pregunta o problema será un desafío o reto en dependencia del destinatario; es decir, lo que puede ser un problema genuino para una persona puede ser un ejercicio rutinario o una cuestión trivial para otra con más experiencia. No obstante, se considera que. “*Un problema reto es inapropiado cuando el destinatario posee conocimientos tan débiles que no puede entender lo que se le está presentando o no posee o es incapaz de crear las herramientas* *matemáticas necesarias para poder resolverlo. Un buen desafío se da cuando la persona posee las herramientas matemáticas necesarias o la habilidad lógica, para utilizarlos de una forma creativa e innovadora. Es decir, involucrará a menudo la explicación, mientras está cuestionando y conjeturando. Se considera que un enfoque de esta naturaleza puede revertir los resultados de la educación matemática tradicional donde el rigor algebraico es la única fuente de validación del proceso de enseñanza de las matemáticas. De hecho, se afirma que un problema reto está en la capacidad de movilizar todo el esquema mental en aras de plantear una estrategia que posibilite su solución; transformando las matemáticas en una actividad dinámica donde existe el dialogo abierto entre los estudiantes y el docente, donde este último proporcione herramientas, actividades y espacios que contribuyan a que el estudiante no desfallezca en la solución de problemas y en si en el desarrollo de competencias de razonamiento lógico, intuitivo y deductivo, la identificación de patrones y las relaciones, el planteamiento y la verificación de hipótesis*."[28]. Las situaciones retadoras proporcionan una oportunidad para hacer matemáticas, y para pensar matemáticamente. Estas incluyen: Solución de problemas no rutinarios, creación y planteamiento de problemas, trabajo con solución de problemas sin lograr solución completa, investigaciones llevadas a cabo individualmente, investigaciones llevadas a cabo colaborativamente, proyectos de aula, investigaciones históricas, estrategias didácticas basadas en la solución de problemas no rutinarios, modelación matemática en diferentes contextos, modificabilidad cognitiva y aprendizaje significativo, entre otros aspectos.

---

[28]En ingles en el original. Introduction. In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science & Business Media, LLC 2009, p. 5

2.1.3. Problemas no rutinarios

Como campo de acción del estudio, la resolución de problemas es un tema consustancial en la educación matemática en todos los niveles de escolaridad y como menciona Arguello, Piñeros y Diaz (2015)[29], existen acuerdo internacional sobre las potencialidades que proporciona incluir en los salones de clases, actividades que permitan a los estudiantes razonar, probar, representar, argumentar y comunicar; procesos que la resolución de problemas involucra intrínsecamente. Una forma de clasificar los problemas es poniendo énfasis en la actividad del estudiante: rutinarios y no rutinarios. Entenderemos como rutinarios los problemas en los que el cálculo es evidente y se genera mediante el proceso sistémico de seguir una serie de pasos y no requiere un análisis mayor; en cambio un problema no rutinario (PNR), corresponden a situaciones en las que el camino a la solución no sea evidente, donde se requiere de la intuición y la lógica para elaborar una solución, recurriendo al conjunto de saberes y conocimientos adquiridos con antelación. Estos se destacan como una herramienta fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ya que desempeñan un papel complementario en dicho proceso y sobre todo habitúa al estudiante a enfrentarse a tareas no previstas y a encontrar algún tipo de respuesta adecuada; convirtiéndose en objeto de trabajo y estudio en diferentes currículos educativos en América, Asia y Europa, ya que proporciona una movilidad interna pasando de una matemática fría, aburrida, abstracta y basada en el formalismo y rigor algebraico, a una matemática que asocia conceptos y los representa en diferentes sistemas donde la intuición, la lógica y la contextualización juegan un papel fundamental en el fortalecimiento y desarrollo de competencias matemáticas, basada en la solución de problemas no rutinarios.

[29]Arguello. C., Piñeiro. J., Diaz, D. Uso de representaciones para resolver problemas rutinarios y no rutinarios por niños de 4º de primaria. Universidda de Granada – Pontificia Universidad Católica de Valparaiso. 2015

Para Diaz y Poblete, (2001)[30] clasifican los problemas considerando como criterio la naturaleza y el contexto de los mismos. Según su naturaleza tenemos problemas rutinarios y no rutinarios, y según el contexto mencionan: los problemas reales, problemas realistas, problemas fantasistas y problemas puramente matemáticos, considerados en su mayoría como problemas rutinarios. Consideran que los problemas no rutinarios son aquellos en que el estudiante no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrar la solución del mismo, el estudiante debe hacer uso de los conceptos aprendidos sobre el (los) tema(s) que se relacionan en el problema.

Fan y Zhu (2006)[31] hicieron un estudio comparativo de los distintos tipos de problemas de matemáticas que se presentan en textos escolares de China Continental y Estados Unidos. Para tal efecto, utilizaron las categorías de problemas que se dan a conocer a continuación. El criterio para clasificar que utilizaron estos autores se refiere a una mezcla de aportaciones basadas en libros de texto. Un problema rutinario es aquel para el cual el resolutor puede seguir un cierto algoritmo conocido, fórmula o procedimiento para obtener la solución, y, por lo general, el camino de acceso a la solución es inmediatamente evidente. Por otra parte, un problema no rutinario es una situación que no se puede resolver con sólo la aplicación de un algoritmo estándar, fórmula o procedimiento, que suele estar fácilmente disponible para resolver el problema por los estudiantes.

Blanco (1991)[32] plantea que hacer matemáticas en clase debería consistir en proponer a los estudiantes una serie de tareas que les permitan: abstraer, aplicar, convencer, clasificar, inferir, organizar,

---

[30] DÍAZ, MV; POBLETE, A. Categorizando tipos de problemas en algebra. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2001, nº 27, p. 93-103.

[31] FAN, L; ZHU, Y. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. International Journal of Science and Mathematics Education, 2006, nº 4, p. 609 - 626.

[32] BLANCO, LJ. Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de enseñanza general básica y estudiantes para profesores. Manuales UNEX, nº 11, Badajoz: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura, 1991.

representar, idear, generalizar, comparar, explicar, diseñar y desarrollar modelos, validar, conjeturar, analizar, contar, medir, sintetizar, ordenar, entre otros. El desarrollo de estas actividades puede plantearse a partir de diferentes propuestas que el autor citado ha ordenado en una clasificación de problemas, en la que ha considerado aportaciones anteriores realizadas por Butts (1980), Charles y Lester (1982) y Borasi (1986), y que ha sintetizado en Blanco (1991, p. 62), como criterio para establecer su tipología de problemas. No obstante, tenemos que considerar que ninguna clasificación puede ser exhaustiva, estableciéndose siempre intersecciones entre los diversos apartados y apareciendo actividades de difícil catalogación, todo esto por la enorme diversidad de problemas que pueden proponerse de diferentes niveles y contenidos. De acuerdo con lo anterior y de algunas otras aportaciones, Blanco (1993), establece los siguientes tipos de actividades en relación con la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Ejercicio de reconocimiento, ejercicios algorítmicos o de repetición, problemas de traducción simple o compleja, problemas de procesos o no rutinarios:* son problemas que se diferencian ya que el cálculo no aparece claramente delimitado, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución. Este tipo de problemas intenta ejemplificar los procesos inherentes a su solución. Ayudan a desarrollar estrategias generales de comprensión, planificación y de solución de problemas. No hay información precisa que permita traducir el enunciado a una expresión matemática.

Otros retos son atractivos de una manera distinta, llevando a quien los enfrenta hacia la matemática recreativa o lúdica donde se vinculan: juegos, rompecabezas, construcción de modelos y origami. En si se pueden encontrar y construir retos matemáticos y problemas no rutinarios en otros campos en una variedad de lugares y medios, incluyendo: las propias aulas de clase, clubes y laboratorios de matemáticas, libros, revistas, sitios web, centros y redes de ciencia, entre muchos más.

2.2. Referentes sobre el proceso de capacitación en estudiantes de pregrado en licenciatura en matemática y docentes en ejercicio.

El MEN establece en el plan estratégico institucional 2019 – 2022, con su lema “una educación de calidad para un futuro con oportunidades para todos” dos ejes estratégicos en los cuales se resaltan las siguientes acciones para el fortalecimiento del proceso de formación de estudiantes de licenciatura y docentes en ejercicio.

- ✓ **Realizar procesos de formación docente y capacitación permanente** para la mejora del servicio educativa en todos los niveles.

- ✓ **Diseñar y elaborar proyectos** junto con los docentes para el fortalecimiento de modelos pedagógicos y didácticos etnoeducativos y regionales flexibles para generar lineamientos para la mejora de la lectoescritura, matemáticas e idiomas.

De acuerdo con lo establecido en el **Decreto Ley 1278 de 2002.** sobre los profesionales de la educación, se concluye que los programas de formación inicial de docentes son:

1.**Programas de Formación Complementaria**, ofrecidos por las Escuelas Normales Superiores (ENS).

2.**Programas de Licenciatura**, ofrecidos por Instituciones de Educación Superior (IES).

3. **Programas de Pedagogía para Profesionales no Licenciados**, ofrecidos por (IES).

Las ENS y las IES tienen autonomía en el diseño de sus propuestas curriculares y están reguladas por un Sistema de Aseguramiento de la Calidad de los programas, que para el caso de los programas de licenciatura (registro calificado y acreditación de alta calidad), posibilita generar seminarios, talleres, cursos de capacitación, congresos, entre otros espacios formales complementarios; que contribuyan al fortalecimiento coherente y pertinente de los programas de licenciatura.

2.3. Fundamentos del pensamiento matemático, en particular Numérico, Algebraico y Geométrico en estudiantes.[33]

En la mayor parte de las actividades de la vida diaria de una persona y en la mayoría de las profesiones se exige el uso de la aritmética. El énfasis que se ha hecho en el estudio de los números ha ido cambiando a través de las diferentes propuestas curriculares. El énfasis que ahora solicita el MEN en el estudio de los sistemas numéricos es el desarrollo del pensamiento numérico. Donde una de las herramientas fundamentales para desarrollar dicho pensamiento son los sistemas numéricos. El cual incluye no sólo conceptos, sino también el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, entre otros. En los Estándares Curriculares y de evaluación para la Educación Matemática hoy conocidas como competencias y resultados de aprendizaje (NCTM, 1989), el sentido numérico es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número" (página 38). Los lineamientos curriculares afirman que los estudiantes con sentido numérico comprenden los números y sus múltiples relaciones, reconocen las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos, y han desarrollado puntos de referencia para cantidades y medidas. En este sentido el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. Así se refleja una inclinación y una habilidad para usar números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información proveniente de diferentes contextos, y se crea la expectativa de que los números son útiles y de que las matemáticas tienen una cierta regularidad.

[33] Lineamientos Curriculares para Matemáticas Ministerio de Educación Nacional de Colombia, Editorial Magisterio. 1998 actualización 2014.

2.3.1. El pensamiento numérico

Se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático. En particular es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos. La invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas. Cuando se usa un algoritmo ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora, el pensamiento numérico es importante cuando se reflexiona sobre las respuestas.

2.3.2. El pensamiento geométrico

El estudio de la geometría intuitiva en los currículos de las matemáticas escolares se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”. Desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría. Los lineamientos curriculares consideran a la geometría como fuente integradora de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial. La propuesta de que el MEN asocia en estos lineamientos curriculares se enfatizan en la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio. En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, entre otros), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

2.3.3. Pensamiento algebraico y variacional[34]

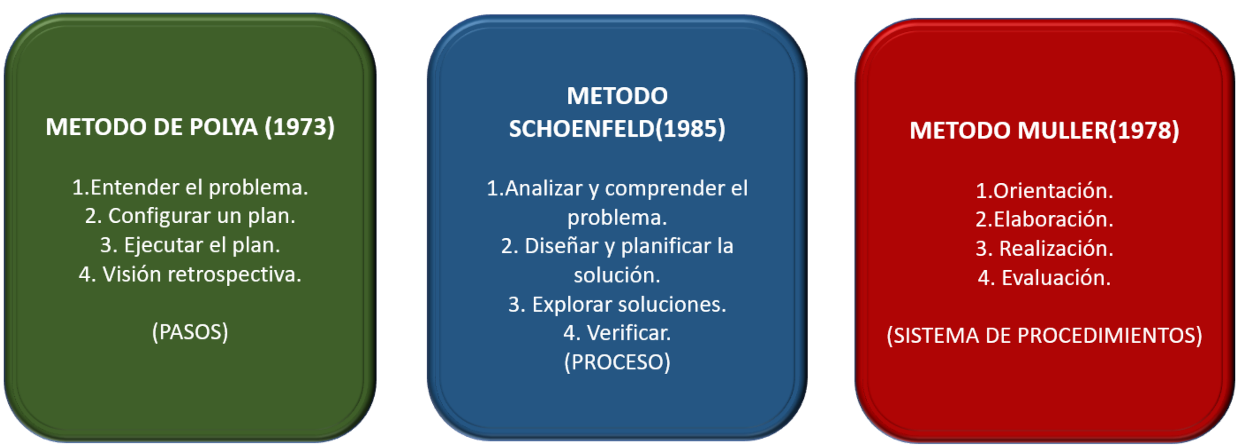
Por ultimo tenemos el pensamiento variacional y algebraico como uno de los logros para alcanzar en la educación básica y media, la cual presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del estudiante, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación y los procesos algebraicos se encuentre como sustrato de ellas. En esta forma se amplía la visión de la variación y el algebra, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes y poderlas describir en forma simbólica. Una rápida visión a la evolución histórica, desde las matemáticas,

[34] Lineamientos curriculares para Matemáticas, área obligatoria y fundamental. Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia, actualización 2016.

del estudio de la variación permite afirmar que ésta se inicia con las tablas babilónicas, con las gráficas de variación (Oresme en la Edad Media) y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista. Particularmente, el contexto de la variación proporcional para modelar las situaciones de variación cobra especial relevancia por ser la única teoría matemática con la que se contaba en la Edad Media. Pero es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el Cálculo. Esta breve e incompleta presentación histórica de la variación, hace necesario desmenuzar los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre esta y el algebra. Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación y el algebra: funciones, sucesiones, magnitudes, razones de cambio, proporcionalidad, definición y significado de las variables en contextos reales y realísticos.

Conclusiones del capítulo 2

Como conclusión se tiene la estructura de los métodos que varios autores asocian en la solución de problemas matemáticos, entre estos se destacan:



Normalmente se entendería que los pasos, procesos o sistemas de procedimientos que asocian los autores en sus métodos no tiene diferencias o se encuentran muy relacionados entre estos; para poder entender mejor la estructura de cada uno de los métodos es importante entender como es la consolidación de los mismos a continuación se muestra esta.

RESOLUCION DE PROBLEMAS: Consolidación de métodos

Polya en su texto Mathematical Discovery **(Polya 1961),** genera una **definición haciendo una disertación de los procesos que interviene en la resolución de problemas**: Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada que lleve en forma secuencial y coherente a la solución del problema. Donde la inspección retrospectiva es un paso fundamental.

Müller (1978) y Junk (1982) conciben todo un **sistema teórico que denominan instrucción heurística**, que incluye procedimientos para facilitar la búsqueda de la vía de solución y que se integran en un programa o **sistema de procedimientos cognitivos y del pensamiento matemático**.

Para **Schoenfeld (1984-92)** Considera que el **pensamiento matemático** se puede caracterizar con cuatro rasgos: el **dominio del conocimiento** o recursos, **los métodos heurísticos**, **el control y el sistema de creencias**. El cual aparta la **memorización y la solución de ejercicios** a un segundo o tercer plano en el procesos de enseñanza de las matemáticas.

En está caracterización se incluyen aspectos relacionados con la heurística y la lógica, pero considera además aspectos del **orden subjetivo como las creencias y los criterios** personales, necesarios para resolver problemas.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Diferentes instituciones y organizaciones como la UNESCO, establecen que existen factores que dificultan el desarrollo de la educación científica en diferentes regiones del mundo y en especial en aquellos que tiene deficiencias económicas, sociales y culturales; señalando como el principal de estos la falta de interés en las diciplinas científicas por parte de los jóvenes. Como segundo factor se asocia la falta de docentes de ciencias básicas en todos los niveles educativos. En Colombia estas faltas se centran en la educación básica y especialmente en matemáticas, ya que la mayoría de los docentes no tienen una formación profesional en matemáticas; por lo tanto, es especialmente en este nivel que *los docentes requieren una formación permanente y pertinente en esta área del conocimiento.* Hoy en día la tendencia es centrar el proceso de enseñanza aprendizaje en el estudiante. Así pues, el rol del docente dejará de ser únicamente el de transmisor de conocimientos para convertirse en un facilitador y orientador del conocimiento y en un participante del proceso de aprendizaje junto con el estudiante. Pero este nuevo rol no disminuye la importancia del docente, aunque si requiere de él, de nuevos conocimientos, estrategias, herramientas y habilidades. Es de entender que, tanto en la concepción tradicional del proceso de enseñanza – aprendizaje, como en su nueva concepción, el papel del docente es de vital importancia y por tanto se necesita de buenos docentes, competentes y capaces de dejar una huella positiva y duradera en el estudiante. Sin embargo, existen factores relacionados con los docentes de matemática que afectan el proceso de enseñanza aprendizaje de esta área del conocimiento, entre los que se pueden plantear los siguientes:

- Falta generalizada de profesores de ciencias en todos los niveles de los sistemas educativos (UNESCO, 2001).
- Existencia de profesores de ciencias que, aunque con un adecuado dominio del contenido matemático, carecen de una formación didáctica sólida que integre la teoría adquirida en el

proceso de formación como licenciado de matemáticas con la práctica en el aula de clase (ICMI 15).

Este trabajo, se propone con la finalidad de fortalecer el proceso de formación de estudiantes de licenciatura en matemáticas en el municipio de Tunja – Boyacá, mediante la construcción de una estrategia didáctica que contribuya al proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas a través de problemas no rutinarios. Además, se busca capacitar a los futuros docentes de matemáticas en prácticas pedagógicas que generen un fortalecimiento de los conceptos que conforman los lineamientos curriculares de matemáticas en la educación básica y media que establece el MEN, mediante la construcción, adecuación o transformación de problemas no rutinarios como eje fundamental de este proyecto.

3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

La tesis asume un enfoque de investigación cualitativo, ya que se pretende explorar el fenómeno de la enseñanza y aprendizaje de los pensamientos numérico, algebraico y geométrico de la educación básica, mediante el uso y la construcción de PNR como estrategia para fortalecer el proceso de formación de futuros Licenciados en Matemáticas.

La investigación cualitativa es una actividad sistemática, que se dirige a la comprensión de los fenómenos, los cuales son explorados desde el punto de vista de los participantes en un ambiente natural y en correspondencia con su contexto (Sampieri, Collado, Lucio & Pérez, 2014). El enfoque de investigación cualitativo *"… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y* *experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[35].

Hernández Sampieri, Fernández Collado, Baptista Lucio, y Pérez (2014) plantean que "… el proceso cualitativo no es lineal, sino iterativo o recurrente; las supuestas etapas en realidad son acciones para adentrarnos más en el problema de investigación y la tarea de recolectar y analizar datos es permanente"[36]. Sobre la base de estos planteamientos se desarrolla el proceso investigativo de la enseñanza aprendizaje de la matemática escolar donde se describe la incidencia de heurísticas y procesos metacognitivos en la solución de problemas no rutinarios.

También, en la investigación se aduce un diseño de investigación acción que *"… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría"*[37].

Este diseño de investigación, como proceso cíclico, permite evaluar de manera permanente, mediante procesos reflexivos, los resultados de las acciones adelantadas en el estudio de una situación social, que para este caso, es el propósito de comprender la incidencia que tiene el desarrollo de actividades que favorezcan el pensamiento aritmético, algebraico y geométrico, en estudiantes de Licenciatura de Matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación básica.

Hernández Sampieri, Fernández Collado, Baptista Lucio y Pérez (2014) plantean que en el diseño de investigación *"su precepto básico es que debe conducir a cambiar y por tanto este cambio debe*

---

[35] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p.358.
[36] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 356.
[37] Minerva, F. (2006). El proceso de investigación científica. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

incorporarse en el propio proceso de investigación. Se indaga al mismo tiempo que se interviene"[38]*.* La implementación de este diseño para la investigación de la enseñanza aprendizaje de la aritmética, algebra y geometría, busca contribuir significativamente a la construcción y desarrollo de tareas cognitivas que se necesitan para solucionar y construir problemas no rutinarios en educación básica.

3.2. Población y muestra

La población está conformada por estudiantes de los programas de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC de Tunja y la unidad de análisis la integran 6 estudiantes que realizan práctica docente en educación básica y media en diferentes instituciones educativas de la cuidad de Tunja.

Las actividades se realizaron de manera virtual por medio de MEET, debido a la pandemia, garantizando la conectividad a los encuentros sincrónicos. La investigación se ha desarrollado durante el segundo semestre del 2021.

3.3. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Revisión sistémica: se recopila información bibliográfica para generar, estructurar y construir ideas que contribuyan a identificar, documentar alcances, avances, posibilidades y limitaciones que tiene los individuos participantes en la investigación.

Análisis-síntesis: en la investigación para la elaboración del estado del arte y en la estructura teórica, también para establecer el significado de los hechos para interpretar, sintetizar los resultados y elaborar

[38] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. P. 496.

las conclusiones y recomendaciones acerca de la solución, construcción de problemas no rutinarios y planes de clase basados en PNR.

3.4. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se conciliaron las siguientes fases:

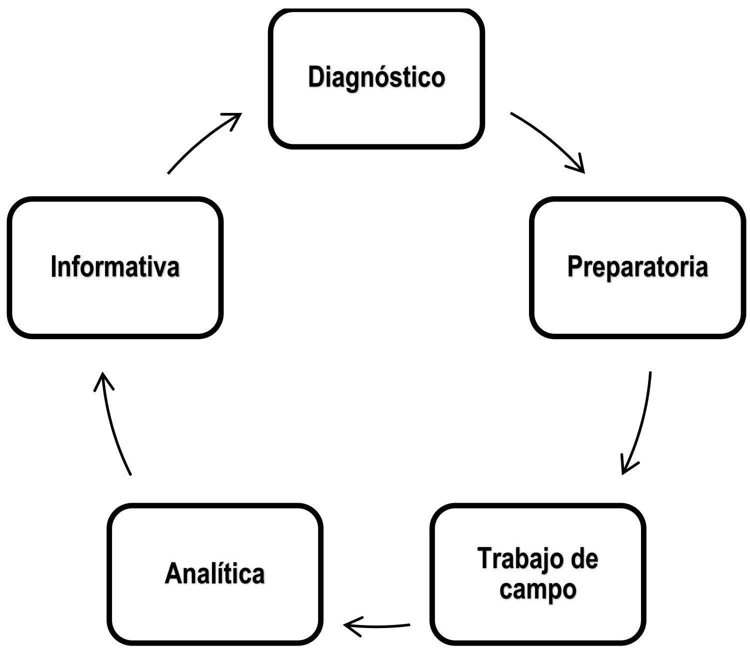


Figura 1. Fases de la investigación. Fuente: Autor

Fase 1: Diagnóstico. En esta fase se dedica a: diseño de instrumentos: en este caso encuesta a estudiantes, aplicación de la misma, recogida de datos arrojados por instrumento, planteamiento inicial del problema de investigación y el objetivo general.

Fase 2: Preparatoria. En esta fase se hace una búsqueda exhaustiva del estado del arte, la cual permite confirmar el problema de investigación, restructurar el objetivo general y determinar métodos, estructuras y procesos cognitivos asociados a la resolución de problemas no rutinarios. Además, se concreta el marco teórico de la tesis. También considerando el estado del arte y el marco teórico se elabora un sistema de actividades para fortalecer la formación matemática de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en la solución de problemas no rutinarios.

Las actividades propuestas son presentadas a expertos en educación matemática para su revisión, aportes y validación.

El presente proyecto tiene tres componentes, en su orden: formativa, teórico – conceptual y operativa. La propuesta asociada a cada una de estas componentes es:

Componente formativa. Propuesta: Fortalecimiento, capacitación, preparación y entrenamiento en la identificación, selección y solución de problemas no rutinarios en educación básica secundaria.

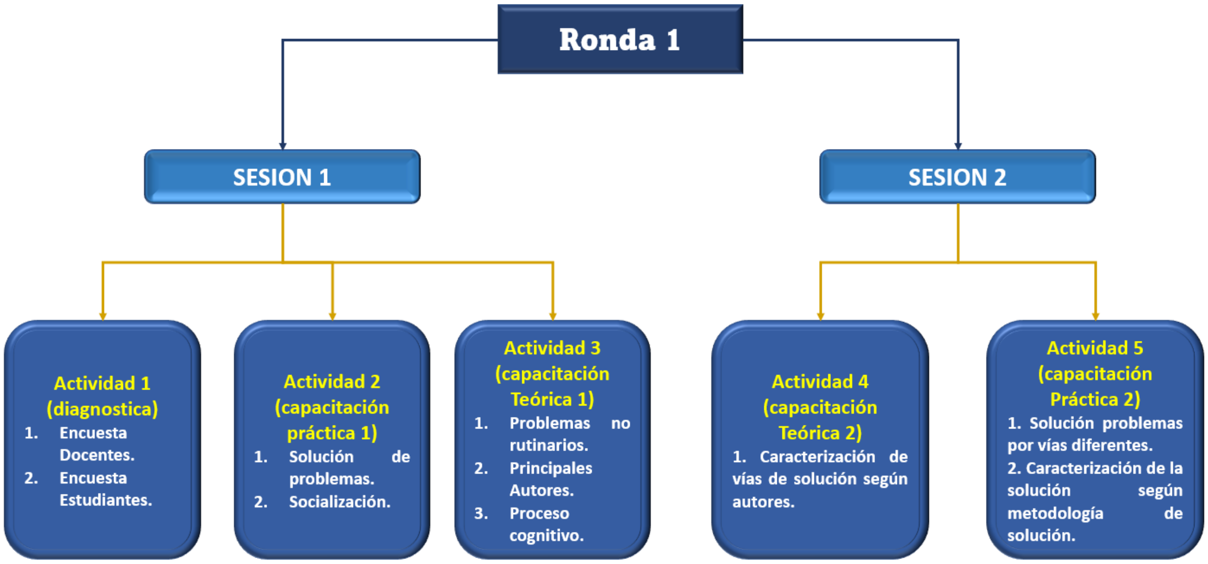
Componente Teórico – Conceptual. Propuesta: Problemas matemáticos no rutinarios métodos, estrategias y construcción. Recopilación de problemas no rutinarios de diferentes fuentes y construidos por el autor de la investigación.

Componente Operativa. Propuesta: Acompañamiento a estudiantes de Licenciatura de Matemáticas en la construcción de planes de clase que fortalezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas medida por problemas no rutinarios (PNR).

Fase 3: Trabajo de campo. En esta fase se desarrolla un estudio exploratorio de las actividades en dos etapas para mejorar su estructura y afinarla acorde al objetivo de la investigación. Se implementa el sistema de actividades.

Las sesiones y actividades que componen la etapa 1 se describen a continuación en el siguiente diagrama:

Diagrama 1. Temas de las sesiones de la etapa 1



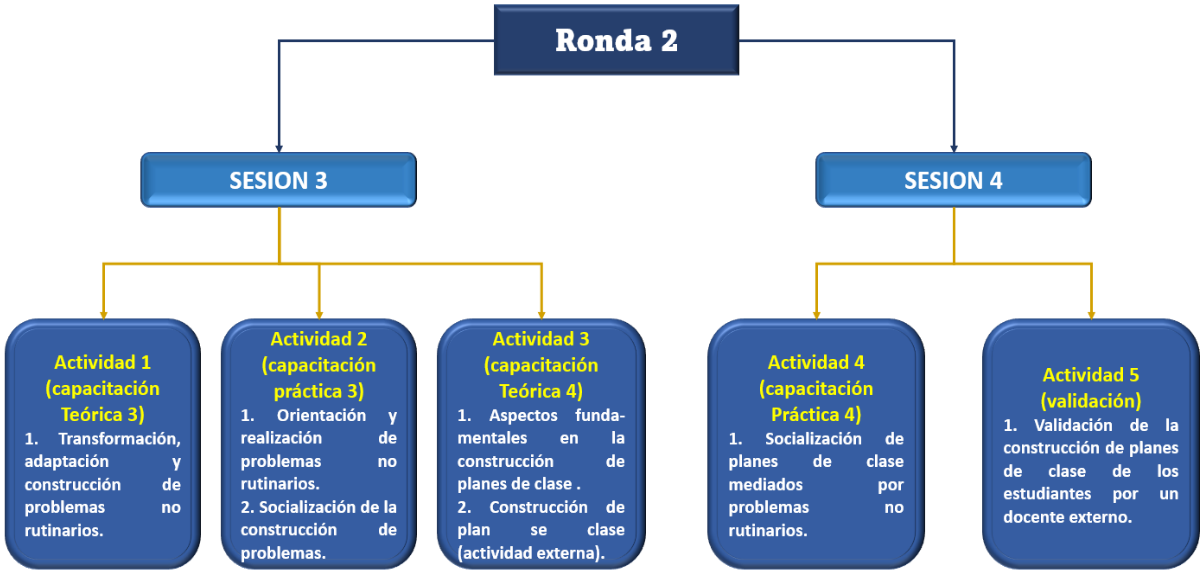
La etapa 1 está conformada por dos sesiones en las cuales se realizan actividades diagnosticas, teóricas y también prácticas. En la primera sesión sincrónica se trabajan tres actividades las cuales son secuenciales y permiten orientar y comunicar la importancia de los problemas no rutinarios como recurso fundamental del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En concordancia a esto la primera actividad que se realiza es una prescripción mediante una encuesta que se aplica a los estudiantes participantes de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (ANEXO1). Seguida de esto se les compartió una guía que está conformada por 5 problemas no rutinarios los cuales se deben solucionar y socializar en un tiempo delimitado; cabe señalar que los problemas son seleccionados, adaptados, transformados y creados en base a las olimpiadas matemáticas mexicanas y las colombianas que organiza, diseña y aplica la Universidad Antonio Nariño para estudiantes de educación básica y media. Esta guía también tiene un ítem en el cual cada estudiante debe describir cuál de los problemas le pareció más sencillo y en cual presento dificultad para resolverlo, ver (ANEXO 2). Finalmente se realiza una socialización (ANEXO 3) sobre los factores, características, estudios, actividades, investigaciones, autores principales entre otros aspectos relacionados a la resolución de problemas en matemáticas.

La segunda sesión, se inicia con la caracterización de los problemas que se trabajaron en la primera sesión mediante la metodología de cinco de los principales autores en resolución de problemas matemáticos en su orden: el primer problema se caracteriza por los 4 pasos de Polya, el segundo por los cuatro procesos de Schoenfeld, el tercer problema esta caracterizado por los cuatro pasos del sistema de procedimientos de Muller, en el cuarto problema se asocian las cinco etapas de Krulik- Rudnick, y por ultimo tenemos que el quinto problema se caracteriza por las cuatro acciones y efectos que asocian los autores latinoamericanos. Luego de esta socialización se les comparte la segunda guía de trabajo (ANEXO 4), en la cual se enuncian tres problemas que se deben solucionar empleando una vía de acceso diferente en cada uno de estos, donde deben describir cada uno de los procesos, pasos, etapas, entre otros aspectos que relaciona el autor en su método de solución de problemas. La finalidad de la actividad primero que todo es que los estudiantes reconozcan los diferentes métodos que existen en la solución de problemas matemáticos y cuáles son sus características. Y que puedan identificar la estructura de estos a la hora de construir las actividades del plan de clases de la etapa 2.

Es importante señalar que esta primera etapa lo que busca es dar a conocer los aspectos fundamentales que se deben tener en cuenta cuando se quiere solucionar problemas no rutinarios en matemáticas. También se busca generara herramientas que desarrollan el pensamiento lógico-matemático y estructuras mentales dinámicas y creativas.

Las sesiones y actividades que componen la etapa 2 se describen a continuación:

Diagrama 2. Temas de las sesiones de la etapa 2



La etapa 2 del proyecto, también está conformada por dos sesiones, en las cuales se aplicarán actividades que van orientadas a la construcción y diseño de planes de clase que vincule la solución de problemas no rutinarios (PNR) como eje fundamental del proceso de enseñanza de las matemáticas; para esto se realizan las siguientes actividades. Sesión 3, está conformada por una actividad teórica, socialización (ANEXO 5) donde se muestran algunos ejemplos sobre la transformación, adaptación y construcción de problemas no rutinarios en temas de educación básica en las componentes del pensamientos aritmético, algebraico y geométrico. A continuación, cada estudiante deberá construir, transformar o adaptar un problema en base a un tema en específico que se relaciona a un ejercicio o problema rutinario, en esta actividad el estudiante debe describir todos los factores y dificultades que se le presentan a la hora de generar problemas no rutinarios, de tal forma que se pueda realizar una socialización sobre esta experiencia.

Para finalizar esta sesión se comparte el esquema las especificaciones necesarias para que cada estudiante realice el diseño y construcción de un plan de clase que vincule la resolución de problemas no rutinarios. La última sesión del taller de capacitación está orientada a que los estudiantes socialicen el plan de clases con la finalidad de realizar las observaciones pertinentes, de tal forma que puedan hacer los ajustes para la entrega final de los mismos. Por último, se le pedirá la colaboración a algunos docentes de la Escuela de Licenciatura en Matemáticas para que validen los planes de clase con énfasis en resolución de problemas no rutinarios en educación básica.

Fase 4: Analítica. En esta fase se realiza el análisis de los resultados de la implementación del sistema de actividades descritas anteriormente.

Fase 5: Informativa. En esta fase se perfecciona el documento escrito y se socialización los resultados a través de la sustentación.

Conclusiones del Capítulo 3

La tesis asume un enfoque cualitativo, con un diseño de investigación acción. Para lograr los resultados esperados se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. El fortalecimiento del proceso de formación de la matemática en estudiantes de Licenciatura de Matemáticas bajo este diseño investigativo permite contribuir significativamente a la construcción robusta de este contenido, mediante la solución y construcción de problemas no rutinarios. Esta metodología propicia que la tesis sea innovadora y pertinente como una estrategia que favorezca la formación de futuros docentes de matemáticas.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES

El proyecto se desarrolla en dos etapas las cuales estructuran las diferentes actividades que se realizan en la jornada de capacitación a estudiantes de Licenciatura de Matemáticas en la solución de problemas no rutinarios como estrategia para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en futuros formadores en educación básica y media, a continuación, se asocia la descripción de las fases.

En la **etapa 1** del proyecto, se realiza un diagnóstico sobre el conocimiento de problemas no rutinarios y su uso en el aula de clase como estrategia para fortalecer el proceso de enseñanza de las matemáticas por parte de los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas, por medio de una encuesta; posterior a esto se efectúa la capacitación tanto teórica como práctica sobre problemas no rutinarios a estudiantes.

En la **etapa 2** del proyecto, se realiza el diseño, socialización y la validación del plan de clases mediante el acompañamiento y asesoramiento, de tal forma que se establezca y se desarrolle habilidades en la selección, transformación y solución de problemas no rutinarios por parte de los estudiantes participantes en las diferentes sesiones de trabajo. Finalmente se aplica una encuesta para determinar la percepción de los estudiantes sobre la utilidad de problemas no rutinarios en su quehacer como futuros docentes.

4.1. Metodología para las actividades

Entendiendo que la matemática en el aula de clase es un procesos en el cual existe una interacción del docente y del estudiante por medio de los conocimientos, conceptos y objetos que conforman el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, por lo que cada estrategia metodológica, didáctica o propuesta de mejora que se realice a este proceso, requiere del conocimiento de las fortalezas y deficiencias de lo estudiantes, para ser tenidas en cuenta en el momento de diseñar, elaborar y ejecutar una clase, por lo tanto, en este proyecto **se propone un modelo de capacitación a Licenciados en Matemáticas en formación** mediado por problemas no rutinarios (PNR) en los pensamientos matemáticos de: aritmética, algebra y geometría que contribuyan al desarrollo de las competencias profesionales necesarias de los futuros docentes de matemáticas que les permitirá desenvolverse como agentes dinamizadores y transformadores de la cultura matemática y del entorno social. De tal modo que lleguen a integrar en sus prácticas pedagógicas, actividades significativas que fortalezcan el desarrollo de competencias como el recordar, el comprender, el aplicar, el analizar, el evaluar y el crear, las cuales generan en forma implícita herramientas y saberes para poder abordar problemas matemáticos no rutinarios en contextos reales, realísticos, manipulativos y recreativos.

Los estudiantes participantes del taller de capacitación tendrán un acercamiento a problemas no rutinarios (PNR) mediante dos talleres que contienen problemas en las componentes de aritmética, algebra y geometría. Ambos talleres en la etapa inicial (etapa 1) del proyecto. La solución del primer taller proporciona al estudiante de Licenciatura de Matemáticas disfrutar de aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios que contribuyen al desarrollo de habilidades cognitivas necesarias para resolver problemas no rutinarios. También contribuye con el diseño de métodos de abordaje para validar conjeturas generadas en la solución de cada uno de los problemas planteados en el taller y por su puesto establece espacios de reflexión sobre los ambientes que se pueden generar cuando se trabaja el aprendizaje de las matemáticas por medio de problemas no rutinarios o cuando se integran este tipo de actividades al aula de clase como estrategia de enseñanza de las matemáticas.

El segundo taller, suministra herramientas cognitivas y conceptuales que le sirven al estudiante para estructurar un plan de abordaje a la hora de solucionar uno de los tres problemas que conforman esta actividad, mediante el uso de una de las metodologías que se utilizan para resolver problemas no rutinarios en matemáticas por mencionar algunas de estas tenemos los cuatro pasos de Polya, el método de procesos de Schoenfeld, el sistema de procedimientos de Muller entre otros. Por otra parte, esta actividad contribuye en el entendimiento de la estructura que tienen los diferentes métodos que se emplean para solucionar problemas, puesto que algunos de ellos, están enmarcados en las situaciones cognitivas que conlleva la resolución de situaciones no rutinarias, es decir orientados a la construcción de problemas (labor del docente) y otros en los procedimentales y verificaciones que deben realizar los resolutos (estudiantes) cuando se enfrentan a estas situaciones matemáticas.

Sesiones de trabajo con estudiantes. Para realizar la capacitación a los estudiantes participan del taller se programan sesiones sincrónicas de trabajo por Google meet y asesoría por correo electrónico, en las mismas sesiones o por whats app. En las sesiones sincrónicas con los estudiantes se trabaja con problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría que le permitan apreciar los logros y las debilidades propias, reflexionar sobre las potencialidades mentales a la hora de realizar interpretaciones, elecciones, cálculos, construcciones, inferencias, pruebas y demás tareas matemáticas que se deben realizar cuando se resuelven problemas no rutinarios.

Cada una de las tres sesiones sincrónicas tiene una duración entre 4 a 5 horas. En cada una de estas sesiones se orientan actividades de práctica como también teóricas. En las actividades de práctica los estudiantes deben resolver los dos talleres relacionados a problemas no rutinarios, para poder facilitar el abordaje de los problemas se asocian preguntas orientadoras, las cuales se utilizan como estrategia para poder solucionar cada uno de estos, las preguntas tienen dos categorías esenciales y de contenido. ***Las preguntas esenciales*** están orientadas al análisis que se debe realizar a la hora de abordar el problema. ***Las preguntas de contenido*** asocian conceptos que se deben tener presente cuando se esté solucionando el problema o se esté construyendo la estrategia o el plan a seguir. En las sesiones teóricas se les socializa aspectos referentes a métodos de solución, contenidos específicos en PNR, estructuración curricular en problemas no rutinarios, referentes para la formulación de problemas matemáticos, educación matemática y la resolución de problemas como centro de investigación didáctica, características del pensamiento matemático y resolución de problemas, entre otros. Estas actividades teóricas se realizan por medio de presentaciones elaboradas, estructuradas y diseñadas que el docente capacitador.

4.2. Generalidades de la fase de trabajo en campo.

El proyecto de Formación Matemática de los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas en Solución de Problemas no Rutinarios en la ciudad de Tunja, inicio el día 4 de noviembre del 2021 con la inscripción de los estudiantes participantes de octavo y noveno semestre del programa de Licenciatura de Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) de Tunja. La cual tuvo una aceptación y acogida de 13 estudiantes, a los cuales se les compartió por un formulario de Google vía correo electrónico, una encuesta que asocia ítems bajo una escala Likert (***1 = Definitivamente no, 2 = Probablemente no, 3 =Indeciso (afirmación), 4 = Probablemente si, 5 = Definitivamente sí).*** referentes a los siguientes *factores: resolución de problemas, características que se consideran para el trabajo con problemas matemáticos y aspectos que se relacionan a la formación como Licenciados de Matemáticas*.

No obstante, en la fase de trabajo en campo del proyecto se capacita y se entrena a los estudiantes con problemas no rutinarios los cuales fueron tomados, adaptados, construidos y transformados de diversas fuentes entre estas las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas organizadas por la Universidad Antonio Nariño (UAN) y la Olimpiada Mexicana de Matemáticas OMM del Departamento de Matemáticas UNAM. Dentro de los talleres de capacitación se realizaron charlas y presentaciones en las cuales se describen los principales aspectos que se relacionan a PNR, como lo son los marcos de referencia, consideraciones que se deben tener cuando se trabaja con PNR y componentes pedagógicas, didácticas y metodológicas.

A continuación, se muestra el sistema de actividades.

4.3. Propuesta del sistema de actividades

Seguidamente, se presentan cada una de las actividades diseñadas, las cuales se estructuran en título, participantes, dificultades en el desarrollo de la actividad, objetivo, descripción de la actividad, materiales para el desarrollo de las sesiones sincrónicas y guía de trabajo (actividad).

4.3.1. Etapa 1: Presentación del taller de capacitación. Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría. Socialización teórica sobre la caracterización del pensamiento matemático en PNR.

Esta primera sesión tiene una duración de 4 horas, la cual está dividida en tres momentos, introductorio, práctica y socialización. En el momento introductoria se da la bienvenida a los estudiantes participantes y se definen las actividades que se realizaran y cuales deben ser los entregables de cada una de las sesiones. Seguido de este momento se continua con la práctica, se entrega el taller 1 sobre problemas no rutinarios en matemáticas y por último tenemos la actividad de socialización en la cual el docente que está orientando el taller de capacitación realizar una intervención de no más de una hora en la cual explica y socializa los factores, características, estudios, actividades, investigaciones, autores principales entre otros aspectos relacionados a la resolución de problemas en matemáticas y problemas no rutinarios (PNR).

4.3.1.1. Presentación del taller de capacitación.

Se da una bienvenida a los estudiantes que participan del taller de capacitación sobre problemas no rutinarios. Se describe las actividades que se van a realizar y se deben entregar en las tres sesiones sincrónicas que conforma el taller de capacitación, las cuales se realiza por meet. También se informa y se comparte las carpetas en Google Drive que cada uno de los estudiantes tiene a su disposición para cargar las actividades.

a. Número de participantes: <u>8 estudiantes.</u>

b. Dificultades en el desarrollo de la actividad: La iniciación de la actividad estaba programada para las 8am del martes 9 de noviembre del 2021, por problemas de conectividad de algunos de los estudiantes la sesión inicia a las 8:15am.

c. Materiales: Presentación en ppt de la generalidad del taller de capacitación.

4.1.2.2. Actividad 1: Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría parte 1.

a. Número de participantes: 8 estudiantes.

b. Dificultades en el desarrollo de la actividad: Se tiene que los tiempos programados para las sesiones sincrónicas son limitados, lo que genera que no se puede realizar una realimentación y acompañamiento de las actividades programadas.

c. Objetivo de la actividad: Identificar la estrategia que emplean los estudiantes participantes en la solución de problemas no rutinarios.

d. Descripción de la actividad: Se entrega una guía de trabajo individual a los participantes vía correo electrónico, la cual contiene 5 problemas que se deben solucionar. No obstante, debe realizar la explicación de la estrategia empleada en la solución de cada uno de estos en forma escrita en un tiempo máximo de 60 minutos. Después se realizará la socialización de la solución de los problemas, para esto se les pedirá la participación a cinco de los estudiantes.

Se presenta el primer taller sobre resolución de problemas no rutinarios por medio de una lectura de cada uno de estos a los estudiantes. Haciendo hincapié en que cada problema tiene preguntas orientadoras una esencial y una de contenido, las cuales pueden solicitar al docente orientador del taller en cualquier momento, lo que se debe hacer es abrir el micrófono y realizar la solicitud.

A continuación, se realiza una descripción de procedimientos, conceptos, y métodos que emplearon los estudiantes para resolver cada uno de los problemas.

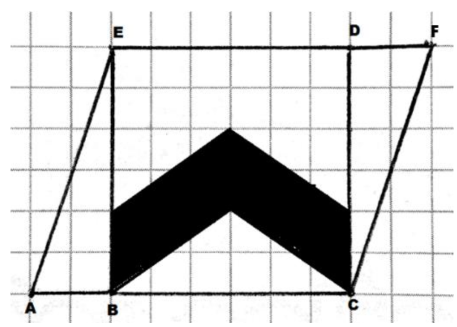
e. Materiales: Sesión virtual por meet, útiles escolares especialmente papel y lápiz, guía de trabajo y presentación ppt.

f. Actividad:

GUIA DE TRABAJO[39]

A continuación, se enuncia cinco problemas los cuales debe solucionar en un tiempo máximo de 50 minutos. Adicional a esto debe realizar una breve explicación de la estrategia que empleo en la solución de cada uno de los problemas. Es importante que no tachen o borren los procesos geométricos, aritméticos y/o algebraicos que relacionen en la solución de los diferentes problemas, ya que ellos contribuyen al análisis de la actividad.

1. **El paralelogramo ACEF tiene un área total de 48cm^2, a cuánto equivale el área de la región sombreada.**

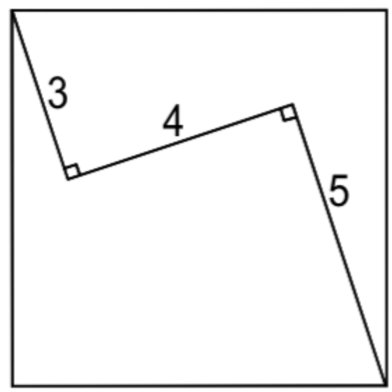


2. **Ana y Miguel trabajan en el diseño y elaboración de arreglos florares y de plantas para jardines de edificaciones, Ana quien tiene más experiencia puede hacer un arreglo para**

[39] Problemas tomados y adaptados de: Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Universidad Antonio Nariño 2014-16. http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas/pruebas. Olimpiada Mexicana de Matemáticas OMM. Departamento de Matemáticas UNAM 2007. https://www.ommenlinea.org/portfolio-items/21-omm introductorio/?portfolioCats=26%2C25

jardín en 3 horas, en cambio Miguel se tarda en hacer el mismo arreglo 5 horas. Si Ana y Miguel trabajan juntos. Cuánto tiempo tardaran aproximadamente.

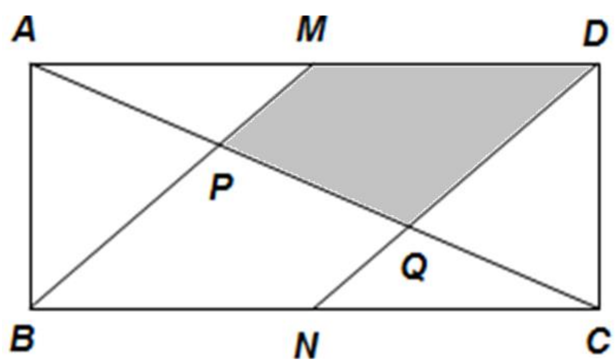
3. Calcular el área del siguiente cuadrado con una poligonal, con propiedades tal como está indicado en la figura siguiente:



4. Si se escribe 1998 como producto de dos números enteros positivos, tales que la diferencia entre ellos sea la menor posible, entonces la diferencial es:

a) 8 b) 15 c) 17 d) 47 e) 93

5. En el rectángulo de la siguiente figura, M y N son los puntos medios de AD y BC. P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Si AD mide 5 cm y AB mide 3 cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MPQD?



Al finalizar la solución de los problemas contestar las siguientes preguntas en forma breve y puntual:

1. En cuál problema presento menos dificultad y por qué:
2. En cuál problema presento mayor dificultad y por qué:

PREGUNTAS ORIENTADORAS PARA LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS NO RUTINARIOS (parte 1)

PREGUNTAS ESENCIALES	PREGUNTAS DE CONTENIDO
PROBLEMA 1	
¿Cómo se puede comparar el área del paralelogramo con respecto al área sombreada?	En geometría. ¿Qué transformaciones se pueden realizar de tal forma que se pueda realizar una representación más sencilla del área sombreada?
PROBLEMA 2	
¿Cómo comparar el tiempo que tarda Ana en realizar un arreglo con respecto al tiempo que necesita Miguel?	En aritmética o algebra. ¿Qué procedimiento matemático se debe aplicar para solucionar en forma eficiente el tiempo que tardan juntos en realizar un arreglo floral?
PROBLEMA 3	
¿Cómo relacionar las medidas de la poligonal para realizar una construcción auxiliar en la obtención de la solución del problema?	En geometría ¿Cuál o cuáles de los siguientes conceptos semejanza, proporcionalidad, propiedades entre rectas paralelas y transversales, se deben vincular para la construcción de la solución del problema?
PROBLEMA 4	
¿Mediante qué procesos aritméticos o algebraicos se puede hacer un planteamiento que relacione las condiciones del problema ya que es una pregunta de selección múltiple con única respuesta? Afirmación: ¿Se puede interpretar cómo un problema de máximos y mínimos? Y ¿por qué?	En aritmética. ¿Qué concepto es fundamental para poder generar una relación entre las operaciones aritméticas de resta y multiplicación?
PROBLEMA 5	

¿Qué conceptos geométricos son evidentes y contribuyen en la construcción de un método de solución del problema? ¿Qué construcción auxiliar se debe aplicar para poder plantear un método de solución del problema?	En geometría. ¿Qué transformaciones se deben realizar mediante la construcción auxiliar que se asoció, de tal forma que se pueda calcular el área sombreada?

4.3.1.2. Actividad 2: Conceptos teóricos relacionados a problemas matemáticos, autores y caracterización del pensamiento matemático.

a. Número de participantes: 8 estudiantes**.**

b. Dificultades en el desarrollo de la actividad: Al realizar una socialización en forma sincrónica, se presenta dificultades de comunicación ya que las personas que reciben la capacitación normalmente no generan una interacción con el expositor, ya que se generan fallas en la conectividad, en la red o el servidor que conllevan a que los estudiantes se desconcentren.

c. Objetivo de la actividad: Capacitar y documentar a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que participan del taller sobre problemas no rutinarios en matemáticas.

d. Descripción de la actividad: En primera estancia se realiza una presentación en la cual se compara y analiza las diferencias y similitudes sobre los programas heurísticos generales propuestos por Polya, Schoenfeld, Muller, Krulik – Rudnick, Santos entre otros autores sobre resolución de problemas. También se socializa las características y la consolidación de cada uno de los métodos, se describe y caracteriza el pensamiento matemático cuando se trabaja problemas no rutinarios.

En la segunda sesión se realiza el día 9 de noviembre del 2021, en la cual se socializa sobre temas referentes a:

- Qué es un problema matemático.
- Qué es la resolución de problemas matemáticos.
- Problemas rutinarios y no rutinarios.

- Principales autores

- Estudio número 16 del ICMI

- Educación matemática y la resolución de problemas como centro de investigación didáctica.

- Propuesta para la solución de problemas matemáticos.

- Consolidación de métodos

- Características del pensamiento matemático y resolución de problemas.

- Dimensiones del pensamiento matemático.

- Sistemas de representación y la modificabilidad cognitiva.

Cada uno de estos apartes se introduce en forma específica, mediante descripciones, representaciones, comparaciones, explicaciones, donde se emplean ejemplos, referentes históricos, esquemas y mapas conceptuales.

e. Materiales: Sesión virtual por meet y presentación ppt.

f. Actividad: Presentación y socialización sobre factores, características, estudios, autores principales entre otros aspectos relacionados a la resolución de problemas en matemática

4.3.1.3. Actividad 3: Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría parte 2.

a. Número de participantes: 7 estudiantes

b. Dificultades en la realización de la actividad: La actividad se realiza inicialmente con diez estudiantes, pero en la carpeta compartida en Google Dive los estudiantes no realizan la actividad en forma completa y no entregan en los tiempos dados. Es evidente que como el taller de capacitación es una actividad voluntaria, los estudiantes no están obligados a realizar las diferentes actividades que se propongan.

c. Objetivo de la actividad: Resolver problemas no rutinarios en matemáticas, mediante la caracterización de la estructura propuesta por tres de los siguientes autores Polya, Schoenfeld, Muller, Krulik – Rudnick, Santos y autores latinoamericanos.

Favorecer la actividad mental y entender las diferentes vías de acceso que existen a la hora de resolver problemas no rutinarios en matemáticas.

d. Descripción de la actividad: Se comparte tres problemas no rutinarios los cuales cada estudiante debe resolver mediante una vía diferente que asocian los siguientes autores (Polya, Schoenfeld, Muller, Krulik – Rudnick, Santos y autores latinoamericanos.). También deben caracterizar los pasos, etapas, fases o demás aspectos que estos relacionan en el método para afrontar problemas no rutinarios en matemáticas. Finalmente se compartirán las opiniones de varios de los estudiantes participantes de la actividad con la intensión de conocer los pros y los contras que encuentran ellos al momento de caracterizar un problema mediante las diferentes vías que asocian los diferentes autores. Para esta actividad se cuenta con un tiempo aproximado de 60 minutos.

e. Materiales: Sesión virtual por meet, útiles escolares especialmente papel y lápiz, guía de trabajo y presentación ppt.

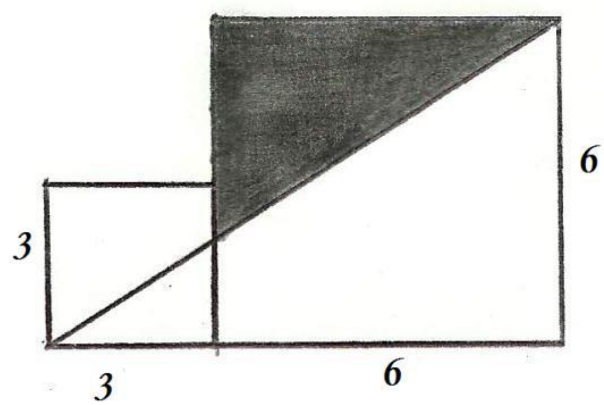
f. Actividad.

GUIA DE TRABAJO[40]

Resolver cada uno de los siguientes problemas empleando una vía diferente de acceso, asociando los pasos (Polya), los procesos (Schoenfeld), sistema de procedimientos (Muller), etapas (Krulik-Runick), acciones y efectos (autores latinoamericanos) o fases (Santos) en la solución del problema.

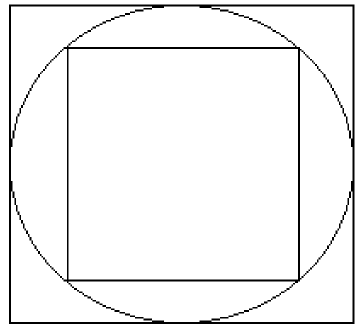
1. En la siguiente sucesión de números, cada número a partir del tercero (de izquierda a derecha) es igual a la suma de los dos anteriores ¿cuánto suma los dos últimos términos de la sucesión?

2. En la siguiente figura, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 y cada lado del cuadrado más grande mide 6, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



3. En una circunferencia dada se puede inscribir y circunscribir cuadrados, sabiendo que el cuadrado inscrito tiene un área de 9 unidades cuadradas $(9\ u^2)$. ¿Cuál es el área del cuadrado circunscrito?

[40] Problemas tomados y adaptados de: Olimpiada Mexicana de Matemáticas OMM. Departamento de Matemáticas UNAM 2007. https://www.ommenlinea.org/portfolio-items/21-omm introductorio/?portfolioCats=26%2C25.



Contestar la siguiente pregunta: cuál vía de acceso a la hora de resolver problemas no emplearía y por qué.

PREGUNTAS ORIENTADORAS PARA LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS NO RUTINARIOS (parte 2)

PREGUNTAS ESENCIALES	PREGUNTAS DE CONTENIDO
PROBLEMA 1	
¿Cómo se puede establecer una relación entre la sucesión de números de tal forma que se garantice la condición del problema?	En algebra. ¿Qué proceso algebraico contribuyen en la solución o validación de conjeturas para poder dar solución al problema?
PROBLEMA 2	
¿Cómo relacionar el área sombreada con las medidas suministradas en el enunciado del problema?	¿De los siguientes conceptos geométricos semejanza, proporcionalidad y/o congruencia se puede o pueden asociar en la solución del problema?
PROBLEMA 3	
¿Cómo generar una relación entre el cuadrando inscrito y el circunscrito?	En geometría ¿Qué construcción auxiliar facilita el poder generar una relación entre las áreas de los dos cuadrados?

4.3.2. Etapa 2: Socialización sobre la construcción de problemas no rutinarios y construcción de PNR por parte de los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas participantes del taller.

Esta etapa está dividida en dos momentos, socialización respecto a la construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios por parte del docente capacitador. En el segundo momento los estudiantes participantes del taller deben construir uno o dos problemas no rutinarios basándose de una serie de problemas y ejercicios que se comparte en un documento PDF (ANEXO 11) o de actividades y temas que estén trabajando en su práctica docente.

4.3.2.1. Actividad 4: Conceptos teóricos en la construcción de problemas no rutinarios.

a. Número de participantes: 10 estudiantes.

b. Dificultades en la realización de la actividad: Los estudiantes volvieron a participar en la actividad programadas en el taller de capacitación y están entrando a las sesiones sincrónicas en los tiempos estipulados (10 minutos).

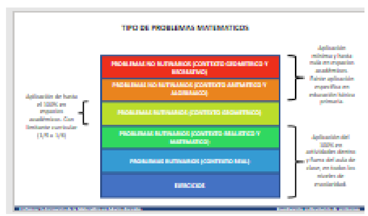
c. Objetivo de la actividad: Comprender los referentes en la formulación de problemas matemáticos no rutinarios en contextos realísticos, reales, matemáticos, manipulativos y recreativos.

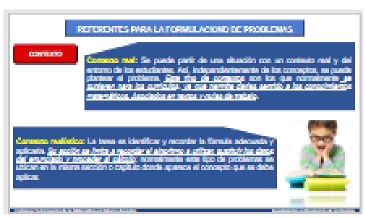
d. Descripción de la actividad: Se realiza una socialización (ANEXO 5) por medio de una presentación en la cual se inicia hablando sobre los contenidos específicos que referencia los lineamientos curriculares que asocia el MEN para la asignatura de matemáticas y la importancia de captar la información significativa de situaciones cotidianas y de ser capaces de formularla en términos matemáticos. Es decir, anima a utilizar las matemáticas para describir, analizar, interpretar y comprender la realidad. Luego, se continúa haciendo una disertación sobre los contextos, fuentes, formatos de presentación y tareas que se deben relacionar al momento de construir situaciones no rutinarias que asocien conceptos e información matemática.

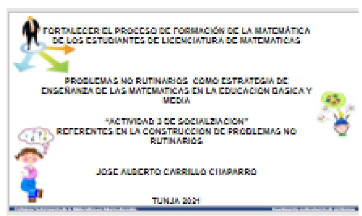
Donde se categorizan las tareas que debe realizar el estudiante según la clasificación que asocia Fortuny y Krathwolh, en la cual especifican que las tareas que se enmarcan en las categorías de analizar, evaluar y crear se consideran de un alto rango cognitivo como se muestra en el siguiente cuadro.

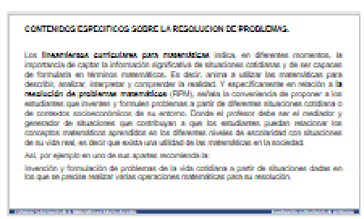
e. Materiales: Sesión virtual por meet y presentación ppt.

f. Actividad: Referentes teóricos en la construcción de problemas no rutinarios en los diferentes contextos y como asociar tareas de un nivel cognitivo alto que permita la construcción, transformación y adaptación de problemas a PNR.









4.3.2.2. Actividad 5: Socialización construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios.

a. Número de participantes: 8 estudiantes

b. Dificultades en la realización de la actividad: No se presenta ninguna dificultad en la realización de la actividad ya que los estudiantes participan activamente de la construcción de problemas.

c. Objetivo de la actividad: Interpretar y comprender la construcción de problemas no rutinarios mediante la elaboración, transformación o adaptación de situaciones desde contextos reales, realísticos, matemáticos, manipulativos o recreativos concernientes a los pensamientos numérico, algebraico y geométrico.

d. Descripción de la actividad: Se explica a los estudiantes participantes del taller, como es la construcción de problemas no rutinarios, bajo los referentes característicos que estos deben tener, luego se ejemplifica la construcción de problemas mediante diferentes situaciones asociadas a los pensamientos numérico, algebraico y geométrico.

e. Materiales: Presentación en ppt y documento PDF con la construcción, transformación y adaptación de problema.

f. Actividad: En esta actividad se les da ejemplos concretos a los estudiantes sobre la construcción, adaptación y transformación de PNR en los pensamientos aritmético, algebraico y geométrico en la educación básica.

Ejemplo 1. Construcción del problema.

1. Pre-cosntrucción del problema: Se asocian los conceptos, elementos y representaciones para la construcción del problema; en este caso área del triángulo y del cuadrado.

Calcular el área de las siguientes figuras triángulo rectángulo isósceles y cuadrado, las cuales tiene una base de 3cm.

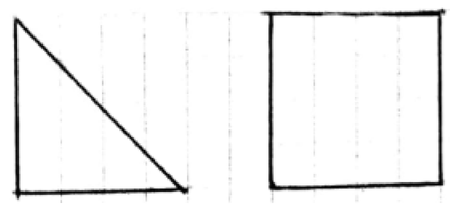


Figura 2: Fuente autor Carrillo J.

2. Construcción del problema: En esta sección normalmente se caracteriza por tener tres momentos "inicial, intermedia y final". Las actividades iniciales e intermedias normalmente se utilizan como problemas de contexto real, realístico o matemático, en este caso tenemos un contexto matemático.

a. Momento Inicial: Se realizan algunas transformaciones básicas, como las que se pueden observar en la figura 1a. Donde normalmente se incorporan otros conceptos u objetos matemáticos. Para este problema se incorpora otro objeto matemático (el trapecio o bien el paralelogramo), adicional a esto se asocian los conceptos de: semejanza, congruencia, operaciones entre números racionales (fracciones), aparte de las ya vinculadas en el paso anterior.

A cuánto equivale la región sombreda con respecto a la figura (Trapecio o paralelogramo).

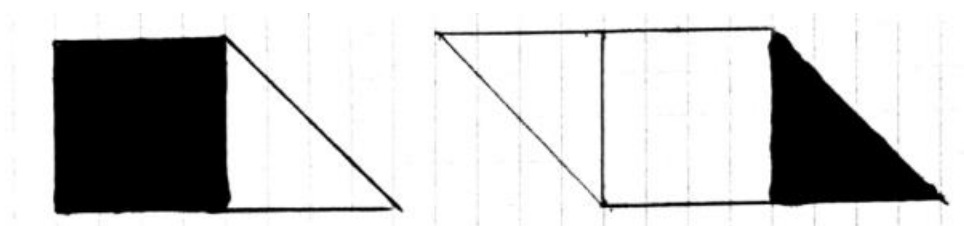


Figura 3: Fuente autor Carrillo J.

b. Momento Intermedio: Se siguen integrando transformaciones de tal forma que se pueda vincular otros objetos y conceptos matemáticos como los que se relacionan en la figura 2. Donde aparte de tener figuras geométricas como el cuadrado, triangulo, trapecio y paralelogramo, se asocia el rectángulo. También se incorpora la comparación de áreas y transformaciones. En algunos casos estas adaptaciones ya se pueden considerar como problemas no rutinarios dependiendo del destinatario.

A cuánto equivale la región sombreda con respecto a la figura que se asocia a continuación (trapecio o paralelogramo).

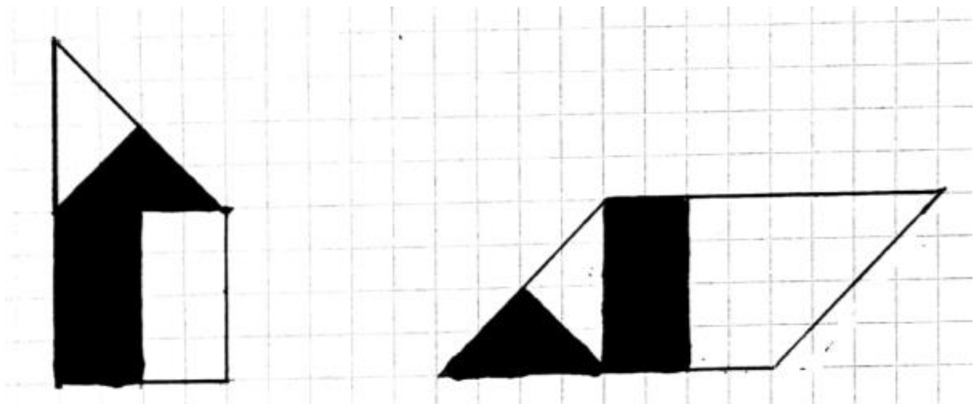


Figura 4: Fuente autor Carrillo J.

c. Momento final: En este momento se realizan las últimas adecuaciones como se evidencia en la figura 3 y se asocian más objetos o conceptos matemáticos. También se define el enunciado del problema, se puede asociar un proceso particularizado o generalizado, donde el estudiante deba realizar construcciones auxiliares para determinar la solución del mismo.

PROBLEMA NO RUTINARIO CONSTRUIDO:

P1: A cuánto equivale la región sombreada con respecto al paralelogramo.

P2: Si el área del paralelogramo es "x" a cuánto equivale el área sombreada.

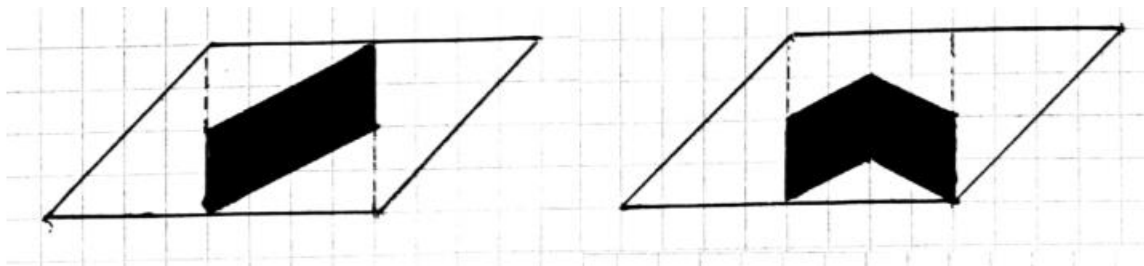


Figura 5: Fuente autor Carrillo J.

Ejemplo 2. Construcción del problema.

1. Pre-cosntrucción: Se asocian los conceptos, elementos y representaciones para la construcción del problema. En este caso operación entre números enteros “multiplicación”.

En un teatro de cine hay 65 sillas si para una función entran 34 personas y el valor de la boleta o el ticket es de 9.500 pesos. Cuánto dinero recaudo la administración del teatro en dicha función.

2. Construcción del problema: En esta sección normalmente se caracteriza por tener tres momentos “inicial, intermedia y final”. Las actividades iniciales e intermedias normalmente se utilizan como problemas de contexto real, realístico o matemático, para este caso tenemos un contexto real.

a. Momento Inicial: Se asocia el caso complementario, adicionando una operación al problema la resta.

En un teatro de cine hay 65 sillas si para una función entran 34 personas y el valor de la boleta o el ticket es de 9.500 pesos Cuánto dinero deja de recaudar la administración del teatro en dicha función.

b. Momento intermedio: Se puede adicionar otras operaciones o/y realizar una adecuación a otro contexto. En este problema se asocia los números racionales y otro tipo de representación; números decimales. Si se tienen las herramientas suficientes se puede asociar conceptos algebraicos de ecuaciones.

Un estudiante del Colegio Nacionalizado contrato una línea telefónica móvil con un operador regional, en la cual paga 20,5 pesos por el primer minuto de llamada local y 11 pesos por cada minuto adicional. Una vez habló con su mamá le quedo un saldo de $2814,5. Qué saldo tenía antes de llamar a su mamá si le realizo una de 5 minutos y luego otra de 12,3 minutos.

c. Momento final: Se asocian objetos y conceptos matemáticos referentes al pensamiento numérico y también sistemas de representación fracción - razón - porcentaje. Adicional se solicita al destinatario que dé la respuesta bajo unas especificaciones matemáticas puntuales.

PROBLEMA NO RUTINARIO CONSTRUIDO: En un teatro hay 20 filas con 15 sillas cada una de estas. El valor del ticket en las primeras 8 filas es de 11.000 pesos y para el resto es de 8.500 pesos. En una función hay 80 personas en las sillas de 11.000 pesos y 125 personas en las sillas de 8.500 pesos.

P1: Exprese la asistencia como una fracción de la máxima asistencia posible, dando su respuesta en forma simplificada.

P2: Exprese la asistencia como un valor porcentual de la máxima asistencia posible.

Ejemplo 3. Construcción del problema.

1. Pre-cosntrucción: Se asocian los conceptos, elementos y representaciones para la construcción del problema. En este problema operación entre números enteros.

Solucionar la siguiente suma y calcular el valor numérico de cada letra.

				1	
	B	U	1	C	8
				U	2
	M	U	2	D	8
1	E	R	E	2	8

Tomado en Matemáticas en Compañía. http://matematicasprimaria56.blogspot.com/2017/03/retos-y-desafios-matematicos.html

2. Construcción del problema: Se quiere relacionar la suma con letras junto al concepto de ecuación, ya que se piensa introducir este último concepto a los estudiantes de grado sexto. Donde este tipo de sumas con letras contribuye a la construcción de los conceptos desde la experimentación que el estudiante debe hacer con los objetos matemáticos, generando estrategias que lo conlleve a una solución del problema. En este caso se realiza una adaptación de la suma con letras la cual se considera una situación manipulativa y recreativa para poder relacionar el concepto de ecuación, medidas de capacidad y operaciones básicas entre números enteros.

Lo que se realiza es una adaptación de un problema manipulativo y recreativo, suma con letras que ya se considera como una situación no rutinaria dentro de un contexto matemático, al cual se le adiciona una transformación a un problema no rutinario con contexto real.

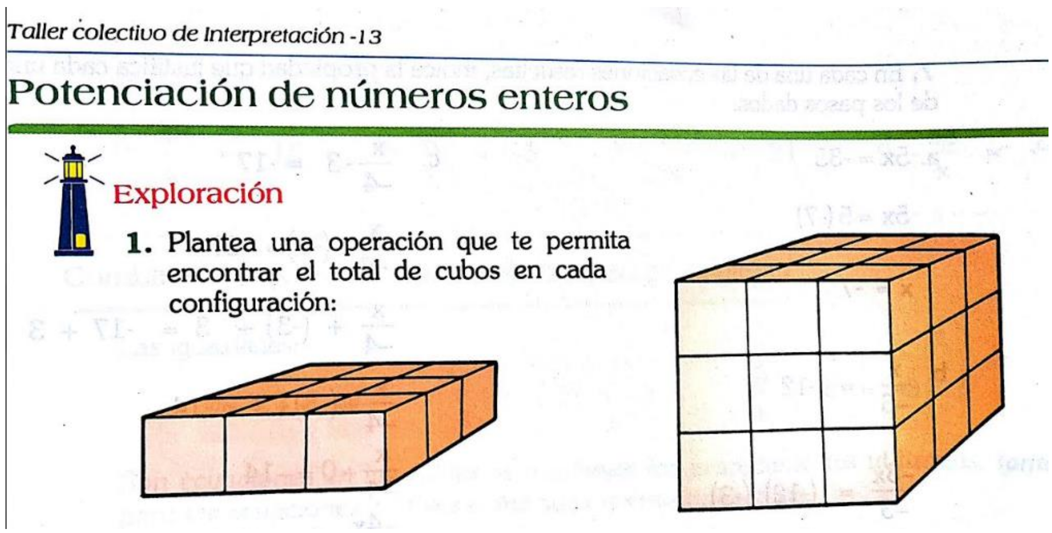
PROBLEMA NO RUTINARIO CONSTRUIDO: Hallar el peso en gramos de los tres objetos juntos (botella, plástico y papel), de tal forma que la balanza este en equilibrio. Los valores de las letras asociados son los dígitos del 1 al 9, como se muestra en la figura a1. Se debe señalar, que los dígitos del peso de la botella son impares.

Objeto	PESO DE LOS OBJETOS
 Vidrio	a b c
 Plástico	d e f
 Papel	g h i

Figura 6. Fuente autor Carrillo J.

Ejemplo 4. Construcción del problema.

1. Pre-cosntrucción: Se asocian los conceptos, elementos y representaciones para la construcción del problema. En este caso identificación de conceptos y objetos geométricos en figuras tridimensionales.



Tomado del Libro Matemática 2000 grado 7 de la editorial Voluntad segunda edición 1994.

2. Construcción del problema: En esta sección normalmente se caracteriza por tener tres momentos "inicial, intermedia y final". Las actividades iniciales e intermedias normalmente se utilizan como problemas de contexto real, realístico o matemático, para este problema tenemos un contexto matemático - geométrico.

a. Momento Inicial: Se realiza una adaptación a la figura para generar una complejidad que conlleve al estudiante a realizar esquemas mentales sobre la totalidad de cubos que la conforman; no obstante, el estudiante se enfrenta a una situación de conteo característico, es decir que esta situación ya se puede considerar como un problema no rutinario puesto que existen varias estrategias de abordaje y de validación de conjeturas.

Los cubos que se emplean para formar la figura 6, inicialmente eran de color negro. Después de haber construido la (figura 5), fue pintada de color blanco. Qué cantidad de cubos que conforman la figura tiene solamente dos caras blancas. Es posible transformar la figura A en un cubo, justifique su respuesta.

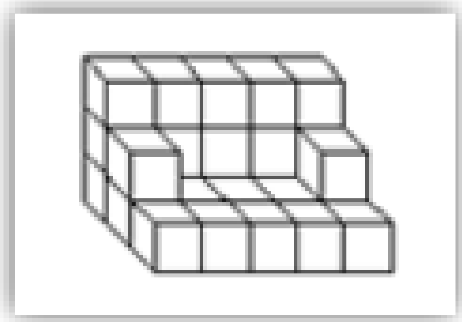


Figura 6. Fuente autor Carrillo J.

b. Momento intermedio y final: Por la estructura del problema el momento intermedio y el final se pueden concebir en un solo proceso. Es importante mencionar que en la construcción de este problema no rutinario se pueden asociar varios niveles de complejidad todo depende de la composición que se asocie.

PROBLEMA NO RUTINARIO CONSTRUIDO: Los cubos que forman la figura 6, inicialmente eran de color negro. Después de haber construido la (figura 7), fue pintada de color blanco. Qué cantidad de cubos que conforman la figura tiene solamente dos caras blancas, exprese su respuesta como una razón de la totalidad de cubos que conforman la figura 7.

También podemos asociar otro tipo de interrogante: Al haber pintado las tres figuras siguientes de color blanco. Cuál es el porcentaje de cubos que siguen de color negro en cada una de estas. Se puede construir un cubo donde todas sus caras sean blancas o negras.

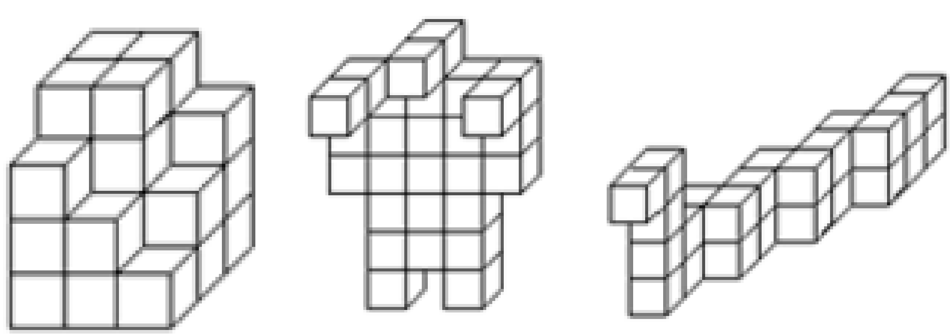


Figura 7. Fuente autor Carrillo J.

Este tipo de problemas que asocian conceptos de transformaciones geométricas generan un sin número de posibilidades de situaciones no rutinarias con diferentes niveles de complejidad.

Ejemplo 5. Construcción del problema.

1. Pre-cosntrucción del problema: Se asocian los conceptos, elementos y representaciones para la construcción del problema; en este caso área del triángulo y del rectángulo. Este es un problema en el cual el destinatario o el estudiante debe tener conocimientos previos sobre área de figuras geométricas, semejanza y congruencia de triángulos y medidas. Es decir que para algunos de ellos se puede considerar un reto o desafío el poder fundamentar el por qué las dos figuras tienen la misma área.

Fundamente por qué el área del rectángulo ABCD es igual a la del triángulo ABE ver figura 8, entendiendo que la altura del triángulo es igual al doble de la altura del rectángulo.

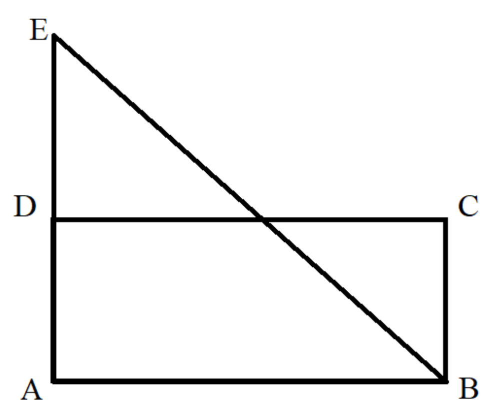


Figura 8. Fuente autor Carrillo J.

a. Momento Inicial: Se asocia un triángulo isósceles, en este caso se deben hacer otras verificaciones bajo los mismos conceptos asociados de semejanza, congruencia y medidas de área o segmentos.

Fundamente por qué el área del rectángulo ABCD es igual a la del triángulo isósceles ABE (ver figura 9), entendiendo que la altura del triángulo es igual al doble de la altura del rectángulo.

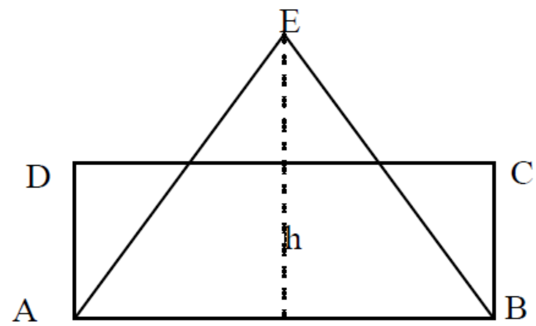


Figura 9. Fuente autor Carrillo J.

b. Momento intermedio: En este caso surge un interrogante y es el poder validar la situación general del problema; es decir, poder establecer la relación para cualquier tipo de triangulo, bien sea acutángulo, obtusángulo o rectángulo. Por lo tanto, se genera el siguiente problema no rutinario.

PROBLEMA NO RUTINARIO CONSTRUIDO: Fundamente por qué el área del rectángulo ABCD es igual a la del triángulo ABE entendiendo que la altura del triángulo es igual al doble de la altura del rectángulo, si las dos figuras están sobrepuestas.

4.3.2.3. Actividad 6: Construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios.

a. Número de participantes: 6 estudiantes

b. Dificultades en la realización de la actividad: El número de participantes vuelve a disminuir solo 8 estudiantes participan de la realización de la actividad y entregan 6 estudiantes la construcción de problemas no rutinarios.

c. Objetivo de la actividad: Construir problemas no rutinarios mediante la elaboración, transformación o adaptación de situaciones desde contextos reales, realísticos, matemáticos, manipulativos o recreativos concernientes a los pensamientos numérico, algebraico y geométrico.

d. Descripción de la actividad: Cada estudiante debe construir un problema no rutinario, empleando uno o varios de los tres pensamientos aritmético, algebraico o geométrico, adicional a esto debe caracterizar la tarea que se debe realizar en un nivel cognitivo alto y realiza una descripción especifica de la construcción el problema.

Esta actividad se valida mediante una tabla que asocia las tareas, nivel cognitivo de estas, pensamiento matemático asociado al problema, clasificación y descripción de la pregunta, a continuación se da un ejemplo.

TAREA(S): Determinar, Examinar y Justificar	**PENSAMIENTO: Aritmético y Algebraico**
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Comprender, Analizar y Evaluar	
CLASIFICACION: Problema no rutinario.	
DESCRIPCION: Las preguntas que se asocian a la situación problémica conllevan a que el estudiante deba emplear diferentes herramientas matemáticas (heurísticas) para poderle dar respuesta a cada uno de los interrogantes; adicional a esto las tareas cognitivas tienen niveles de dificultad en forma progresiva partiendo de comprender pasando por el analizar hasta llegar al evaluar.	

e. Materiales: Presentación en ppt y documento PDF con la construcción, transformación y adaptación de problema.

f. Actividad: Cada estudiante debe construir uno o dos problemas bajo las cacarteristicas, teorías y ejemplos que se le han orientado en el taller de capacitación.

4.3.2.4. Actividad 7: Construcción de plan de clase basado en problemas no rutinarios para educación básica.

a. Número de participantes: 6 estudiantes

b. Dificultades en la realización de la actividad: No se presenta ninguna dificultad en la realización de la actividad.

c. Objetivo de la actividad: Construir un plan de clase basado en problemas no rutinarios mediante la elaboración, transformación o adaptación de situaciones desde contextos reales, realísticos, matemáticos, manipulativos o recreativos concernientes a los pensamientos numérico, algebraico y geométrico.

d. Descripción de la actividad: Cada estudiante debe construir un plan de clase basado en problemas no rutinario, empleando uno o varios de los tres pensamientos aritmético, algebraico o geométrico, adicional a esto debe solucionar y describir el problema mediante uno de los métodos de solución vistos durante el taller de capacitación por mencionar *Palya, Schoenfeld, Muller, entre otros*. También debe realizar la estructura curricular del plan de clase basado en problemas no rutinarios, donde se debe elaborar y construir; competencia, eje temático, tarea, contextos entre otros aspectos que se muestran a continuación en la siguiente ilustración.

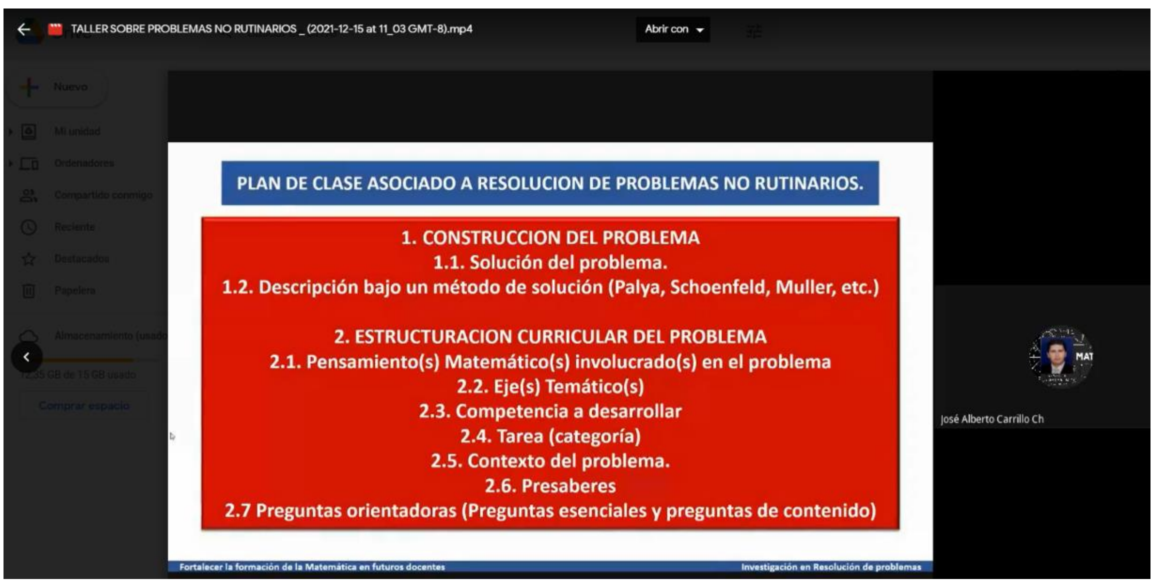


Ilustración 1: Socialización sobre construcción de plan de clase basado en problemas no rutinarios.

Cada uno de los planes de clase se evalúa mediante una rubrica de evaluación la cual calificara por medio de aspectos cualitativos la construcción, solución, descripción bajo una metodología de solución, redacción de competencia, tareas cognitivas que vinculan el problema, presaberes, preguntas orientadoras entre otros aspectos que se describen puntualmente en la rúbrica de evaluación (ANEXO).

__4.1.2.3. Actividad 8: Valoración de las actividades del taller de capacitación sobre PNR.__

a. Número de participantes: 9 estudiantes.

b. Dificultades en la realización de la actividad: No se presenta ninguna dificultad en la realización de la actividad.

c. Objetivo de la actividad: Conocer el grado de satisfacción de los estudiantes participantes en las diferentes actividades que se programaron para el taller de capacitación sobre construcción y solución de problemas no rutinarios en los pensamientos aritméticos, algebraico y geométricos de la educación básica.

d. Descripción de la actividad: Se les comparte a los estudiantes vía correo electrónico el link de un formulario de Google el cual tiene 9 preguntas que asocian aspectos fundamentales del taller de capacitación para que le den una valoración bajo la escala Likert asociada (1 = Malo, 2 = Regular, 3 =Bueno, 4 =Muy bueno, 5 = Excelente); y una pregunta abierta donde cada uno de los estudiantes debe dar una calificación numérica al taller en un intervalo de (0 - 5). A continuación, se asocia la ponderación de cada uno de los aspectos. La siguiente ilustración muestra la realización del cuestionario.

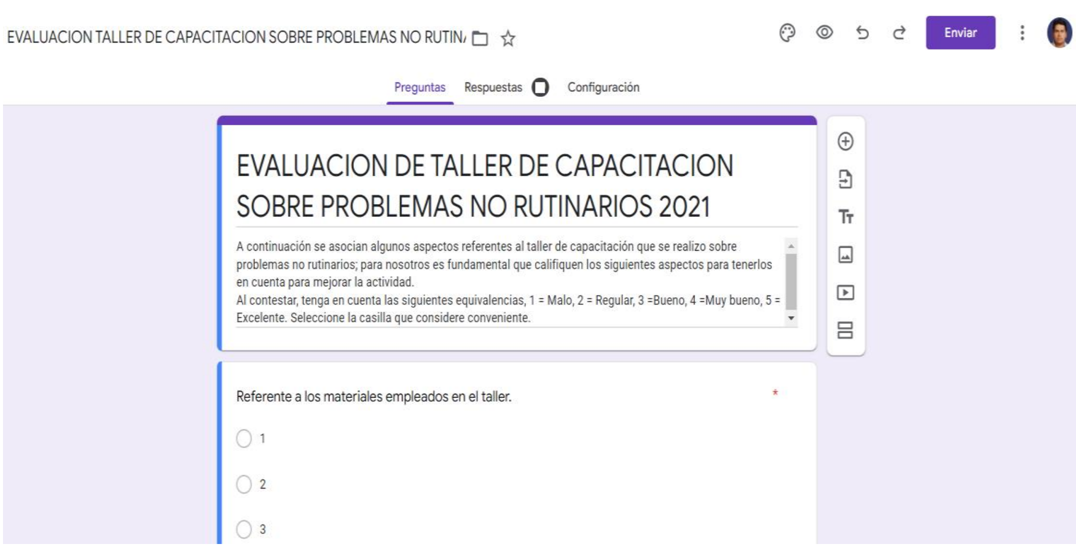


Ilustración 2: Formulario para la valoración del taller de capacitación.

Conclusiones capítulo 4

Las actividades planteadas en las dos etapas de la fase de trabajo de campo son diseñadas y elaboradas de forma secuencia de tal forma que contribuyan a fortalecer la formación matemática de los estudiantes de octavo y noveno semestre de Licenciatura de Matemáticas. No obstante, se subraya en la importancia de planear los modelos de la enseñanza de la matemática por medio de PNR de tal forma que se vincule la teoría y la práctica.

Además, se asocian métodos de solución de Polya (1973), Shoenfeld (1985), Muller (1978), entre otros, de tal forma que el estudiante pueda describir, interpretar, interiorizar y apropiarse de uno o varios de estos cuando este solucionando o planteando problemas no rutinarios. Las actividades de la segunda etapa se enmarcan específicamente en la transformación, adaptación y construcciones PNR, mediante tareas cognitivas de un nivel alto, preguntas orientadoras, presaberes y construcciones de competencias; las cuales contribuyen en la diseño y elaboración de planes de clase en matemáticas en educación básica.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL SISTEMA DE ACTIVIDADES

Para iniciar el análisis se realiza una interpretación bajo una estadística descriptiva de algunos de los aspectos que se asocian a los factores de resolución de problemas, trabajo con problemas matemáticos y formación de Licenciados en Matemáticas, a continuación, se muestra y se describe la información recopilada con el instrumento.

5.1. Análisis cualitativo referente a resolución de problemas como estrategia didáctica en la educación matemática.

Para identificar el conocimiento y el trabajo de problemas matemáticos - problemas no rutinarios y su uso en el aula de clase como estrategia para fortalecer el proceso de enseñanza de las matemáticas, se aplica una encuesta a los 13 estudiantes inscritos en el taller de capacitación, en la cual solo 6 estudiantes dieron respuesta oportuna al formulario que se compartió vía correo electrónico. Los resultados se muestran tabulados y analizados en los siguientes diagramas:

En la encuesta realizada a estudiantes se emplea la siguiente escala Likert:

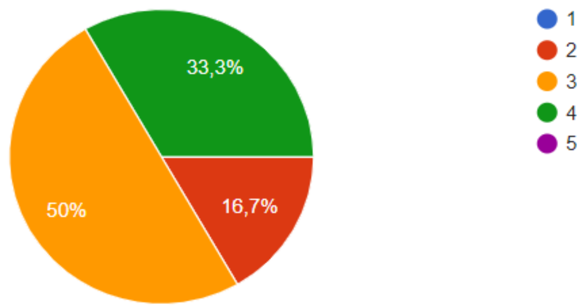
1 = Definitivamente no, 2 = Probablemente no, 3 =Indeciso (afirmación), 4 = Probablemente si, 5 = Definitivamente sí.

El instrumento (encuesta) está conformado por tres factores y cada uno de ellos tiene un conjunto de aspectos relacionados al tema de interés de este proyecto, los cuales se debe valorar mediante las categorías relacionadas en la escala Likert descrita anteriormente. En la parte final se asocian tres preguntas sobre la caracterización de problemas matemáticos, métodos de solución y autores de PNR.

5.1.1. Factor 1: Resolución de problemas matemáticos

Aspecto 1.

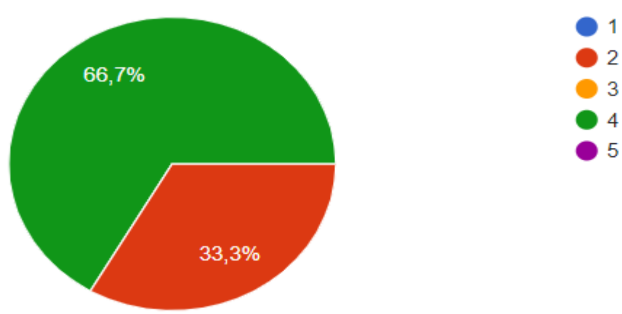
En el proceso de formación como futuro Licenciado en Matemáticas, en las asignaturas de pedagogía y didáctica; que tanto ha trabajado sobre solución de problemas en matemáticas.



El 66.7% de los estudiantes afirman que la componente de resolución de problemas en asignaturas de didáctica o pedagogía es un tema que poco se aborda dentro de las sesiones de clase. Cabe señalar que el promedio en la escala Likert es de 3,17 lo que confirma que los estudiantes se encuentran indecisos en poder afirmar que han trabajo marcos teóricos relacionados a problemas matemáticos.

Aspecto 2.

En la(s) práctica(s) didáctica(s) que usted ha realizado, en su proceso de formación; que tanto emplea el uso de problemas matemáticos como estrategia didáctica en la construcción o explicación de conceptos.

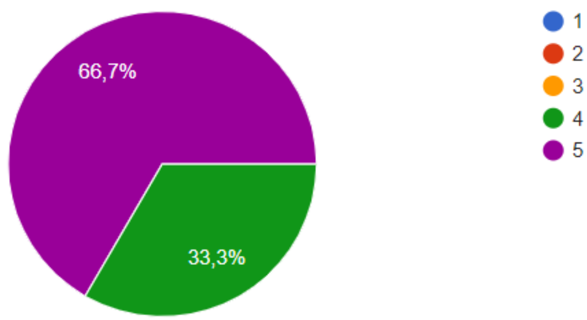


El 100% de los estudiantes afirman el haber trabajado problemas matemáticos como estrategia en la construcción o explicaciones de conceptos en prácticas didácticas que se adelantan en quinto y séptimo semestre durante un periodo académico en instituciones educativas de carácter público en la ciudad de Tunja. En charlas posteriores con los estudiantes se pudo aclarar que los problemas que normalmente han empleado en estas actividades son de contexto real, realístico y matemático tomados de diferentes fuentes especialmente de textos guía y de cartillas, en escasas ocasiones incorporan problemas recreativos y lúdicos.

Aspecto 3.

Considera que la resolución de problemas es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático.

6 respuestas

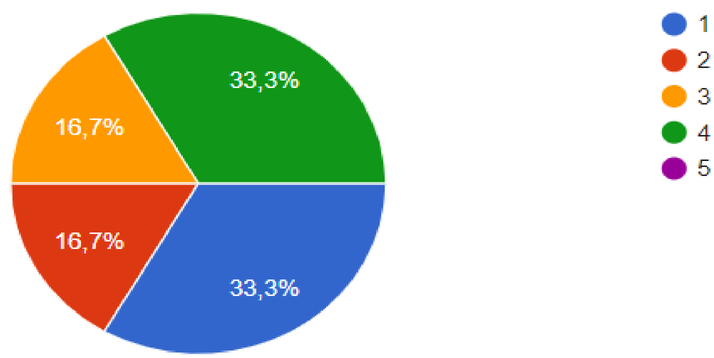


Con respecto a considerar si la resolución de problemas es fundamental para desarrollar el pensamiento matemático el 66,7% de los estudiantes considera que probablemente si, mientras que el 33.3% definitivamente considera que sí. Este ítem en la escala valorativa tiene un promedio de 4.67; lo que nos referencia que el 100% de los estudiantes considera que la resolución de problemas matemáticos es un referente importante que se debe vincular en los currículos de educación básica y media. Hay que señalar que no se está haciendo referencia explicita hacia problemas matemáticos que requieran de tareas como analizar, evaluar y crear las cuales son de un nivel de rango cognitivo alto y que normalmente se asocian a problemas no rutinarios. También se hace referencia a problemas que trabajan y desarrollan tareas cognitivas de niveles bajos y medios, donde el estudiante debe reconocer, comprender y aplicar estructuras un poco más sencillas, que requieren de la utilización de algoritmos, cálculos, representaciones y modelizaciones mediante ecuaciones y expresiones algebraicas básicas.

5.1.2. Factor 2: Características que se consideran para el trabajo con problemas matemáticos

Aspecto 1.

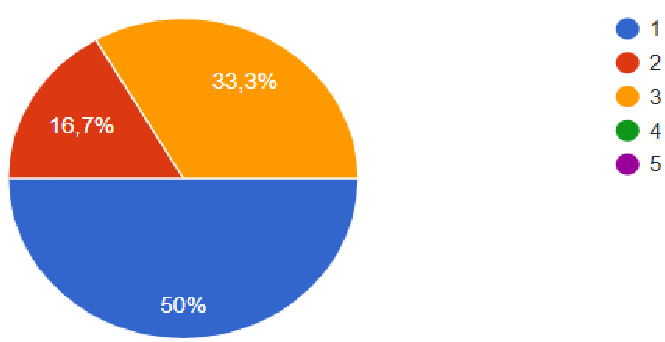
Un problema matemático solo tiene una respuesta correcta.

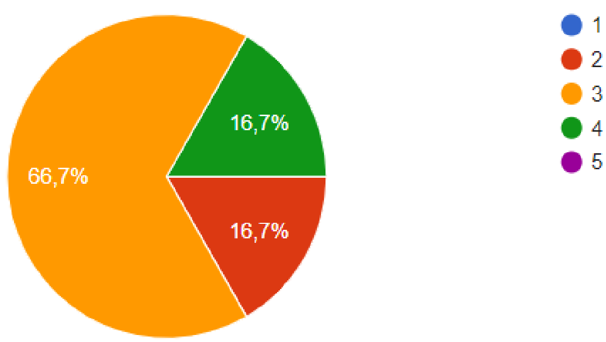


En este aspecto es evidente percibir una división de opiniones, ya que su coeficiente de variación es del 55.14%. Donde tenemos que el 50% de los estudiantes participantes creen que los problemas pueden tener diferentes respuestas, esto permite afirmar la postura de Schoenfeld, cuando hace referencia al conjunto de operaciones intelectuales asociados al momento de solucionar problemas matemáticos, donde el estudiante debe controlar, alcanzar, evaluar y producir información, es decir que este aprendiendo; bien sea en forma directa e indirecta a la hora de solucionar problemas matemáticos, haciendo hincapié en que existe una diferencia en tener conocimientos matemáticos no es suficiente a la hora de solucionar problemas, se necesita conocer técnicas y saber cuándo utilizarlas, para poder percibir e inferir si un problema tiene una única respuesta o varias; o por lo contrario no tiene respuesta.

Aspecto 2.

Solo existe un método de solución.

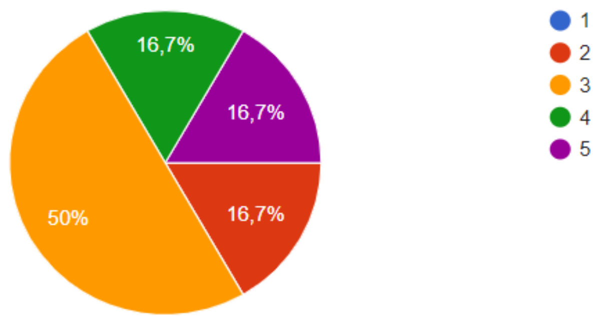


El 66.7% de los estudiantes cree que existen diferentes caminos de solución al momento de trabajar con problemas matemáticos, y tenemos un 33,3% de estudiantes que están indecisos, pero afirman, que solo existe un método de solución al momento de resolver un problema. Esto se puede deber a que en la mayoría de los espacios académicos se trabaja con problemas que tiene un contexto real, realístico y matemático que relacionan tareas donde normalmente se deben resolver problemas mediante la aplicación de conocimientos, hechos o técnicas previamente adquiridas en una manera diferente. Fortuny,(2002).
Aspecto 3. Si alguien sabe resolverlo, solo debe aplicar los algoritmos suficientes para dar su solución. 
El 83.4% de los estudiantes están indecisos, pero afirman en que solo se deben aplicar los algoritmos cuando se solucionan problemas, es decir que creen que solo existen problemas rutinarios en los que el cálculo es evidente y se genera mediante el proceso sistémico de seguir una serie de pasos y no requiere un análisis mayor. Esto permite concluir que desconocen los aspectos cognitivos que integran y se interrelacionan cuando se soluciona problemas matemáticos no rutinarios, donde se relacionan situaciones en las que el camino a la solución no es evidente, donde se requiere de la intuición y la lógica para elaborar una solución, recurriendo al conjunto de saberes y conocimientos adquiridos con antelación.

5.1.3. Factor 3: Aspectos que se relacionan a la formación como Licenciados de Matemáticas

Aspecto 1.

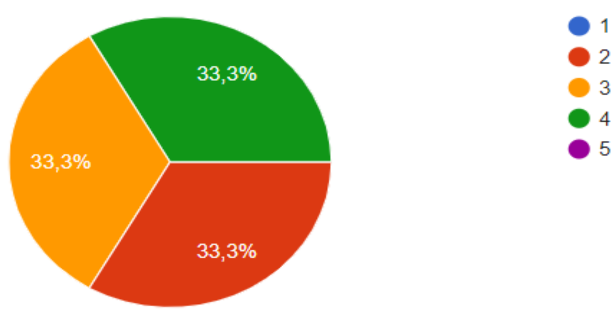
Con que frecuencias en las asignaturas que ha cursado dentro del plan de estudios de Licenciatura en Matemáticas, el docente contextualiza los conceptos teóricos de la matemática, con la práctica docente.



En este aspecto tenemos una división del grupo ya que la valoración promedio es de 3.33 con una variación de 1.03, lo cual genera un coeficiente de variación del 30.98%; lo que se evidencia en el diagrama, donde que el 50% de los estudiantes están indecisos en poder afirmar si los docentes contextualizan los conceptos teóricos matemáticos en las sesiones de clase en los diferentes espacios académicos.

Aspecto 3.

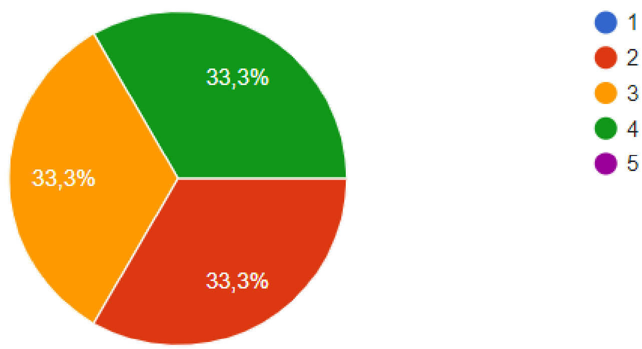
En asignaturas teóricas como cálculo, estadística, geometría, entre otras, que tanto el docente asocia actividades que relacionen la construcción de didácticas o metodologías para la enseñanza de las mismas.



Con respecto a la construcción de didácticas o metodologías para la enseñanza de asignaturas como cálculo, estadísticas, geometría entre otras asignaturas de la componente aptitudinal de la matemática. Tenemos una clase trimodal como se puede observar en el diagrama. Al calcular el valor promedio de la escala valorativa se genera una ponderación de 3.0, de donde se puede evidenciar que el grupo está indeciso en afirmar si los docentes integran didácticas o metodologías para enseñar los conceptos de las asignaturas propias de la componente matemática.

Aspecto 4.

En el desarrollo de las clases, con qué frecuencia el docente asocia diferentes sistemas de representación para explicar un concepto matemático en particular.



En este aspecto tenemos nuevamente una distribución trimodal la cual genera un valor promedio en la escala Likert empleada de un puntaje de 3.0, con un coeficiente de variación del 29.81%; lo que conlleva a que los estudiantes están indecisos en afirmar si los docentes integran diferentes sistemas de representación cuando están explicando un concepto.

Análisis general del factor 3 referente a: Aspectos que se relacionan a la formación como Licenciados de Matemáticas.

Los estudiantes en términos generales se encuentran indecisos al momento de afirmar sobre los aspectos relacionados a la formación de Licenciados en Matemáticas. Ya que aspectos como la utilización de sistemas de representación al momento de explicar conceptos matemáticos, creación de didácticas o metodologías que contribuyan a la construcción de objetos o conceptos matemáticos no se emplean o no se realizan en las clases. También tenemos que todos los estudiantes tienen la percepción de que los docentes siguen al pie de la letra los temas y subtemas que referencia el texto guía. Al relacionar la categorización de las concepciones de los profesores realizada por Ernest (1989), se puede afirmar que los docentes tienen una **atribución externa o principalmente externa**; este tipo de docentes se caracterizan por:

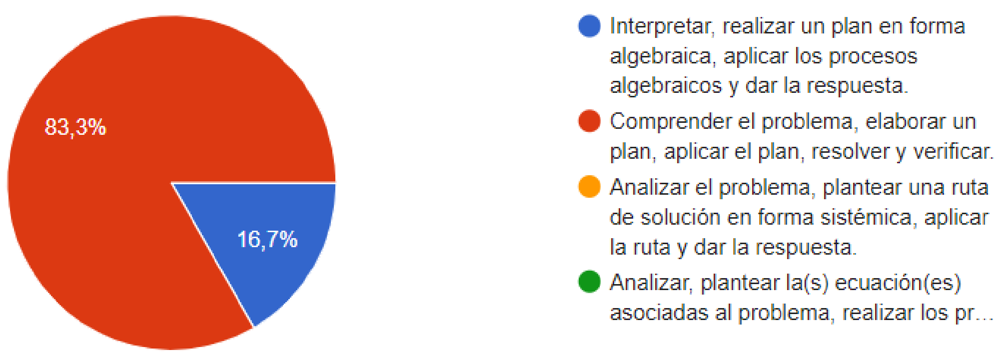
- Referenciar un conjunto de textos como las principales fuentes de conocimiento.

- Las clases son orientadas en forma magistral donde se explica los procedimientos pasos a paso.
- Facilitan la interpretación de conceptos y problemas a los estudiantes.
- Siguen una lista predeterminada y jerárquica de temas y subtemas.
- Cree que el conocimiento matemático solo es generado por autoridades matemáticas.
- Reconoce que las sesiones de clase solo pueden ser orientadas por el docente.

5.1.4. Pregunta de caracterización.

Pregunta 2.

2. Para usted cuales de los siguientes procedimientos se ajusta mejor a la solución de un problema.



Es evidente que el 83.3% de los estudiantes están familiarizados con el método de Polya en la solución de problemas matemáticos. Pero está familiarización se puede deber al trabajo que se realiza en espacios académicos como matemática aplicada, donde se generan modelos que describen situaciones particulares y además se deben realizar verificaciones de parámetros o condiciones iniciales. Para Codina y Rivera (2000)[41] este tipo de afirmaciones se generan por la reflexión que constantemente se deben hacer con el trabajo de problemas que asocian a la matemática aplicada donde la modelación y la verificación son tareas adyacentes secuenciales.

[41] CODINA, A Y RIVERA, A. (2000) Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. México

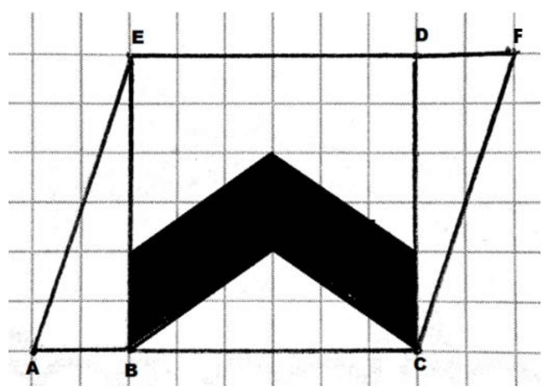
5.2. Análisis de actividades desarrollas en el taller de capacitación.

En este capítulo se realiza el análisis de los resultados durante la aplicación de las actividades con los estudiantes, se tiene en cuenta los siguientes parámetros para la caracterización de la misma: procedimientos, conceptos y métodos, los cuales son fundamentales en la solución de problemas matemáticos y en la solución de PNR, como lo menciona Schoenfeld(1985) en la estructuración de su método de procesos en donde relaciona las heurísticas y la metacognición como pilares fundamentales al momento de solucionar un problema no rutinario.

5.2.1. Actividad 1: Solución de problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría parte 1.

Problema 1.

El paralelogramo ACEF tiene un área total de 48cm^2, a cuánto equivale el área de la región sombreada.



<u>Procedimientos:</u> Los estudiantes en general, realizan comparaciones del área del paralelogramo y del cuadrado con respecto a la figura sombreada. Donde tres de ellos descomponen la figura sombreada en dos paralelogramos congruentes y calculan el área de uno de esos para poder generar el área de la figura sombreada y así poderla compara con el área total. Tres estudiantes realizan transformaciones del paralelogramo y de la figura sombreada a rectángulos, para que la comparación entre áreas sea más sencilla; las figuras que asocian evidencian transformaciones diferentes que conllevan a procesos totalmente diferentes. Un estudiante asocia procesos directamente algebraicos sin realizar construcciones auxiliares o transformaciones a las figuras asociadas en el problema.

Conceptos: Los conceptos que todos emplean están asociados al cálculo del área de figuras geométricas planas como el cuadrados, triángulos, rectángulos y paralelogramos.

Métodos: Los métodos que emplean los estudiantes para la solución de este primer problema son; en primera instancia se tiene el *método analítico* ya que descomponen las figuras para poder generar mediante un proceso de distinción y de diferenciación cuales son los elementos básicos que integran las figuras geométricas que componen el problema, es decir van de lo compuesto (general) a lo simple (especifico). En segunda instancia se tiene que algunos estudiantes generan una reconstrucción del problema, realizando una descomposición en figuras simples que componen el problema, de tal forma que emplean un *método sintético*. Hay que mencionar que ningún estudiante deja descrito un proceso que evidencie una verificación de los procedimientos que se asocian, los estudiantes solicitan solamente la pregunta orientadora esencial. En la siguiente figura se muestra la descomposición que realiza uno de los estudiantes para solucionar el problema (ver figura 10).

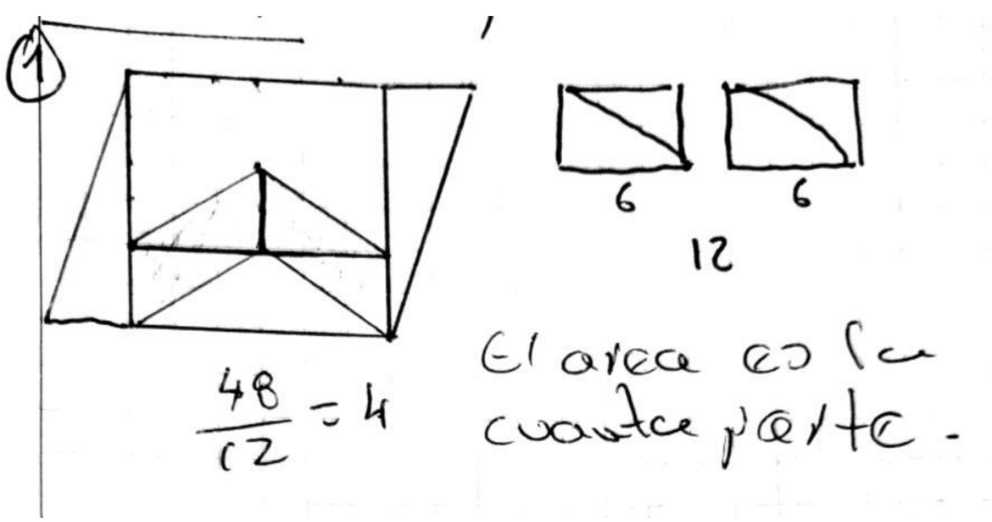


Figura 10. Estrategia empleada por uno de los estudiantes.

Problema 2.

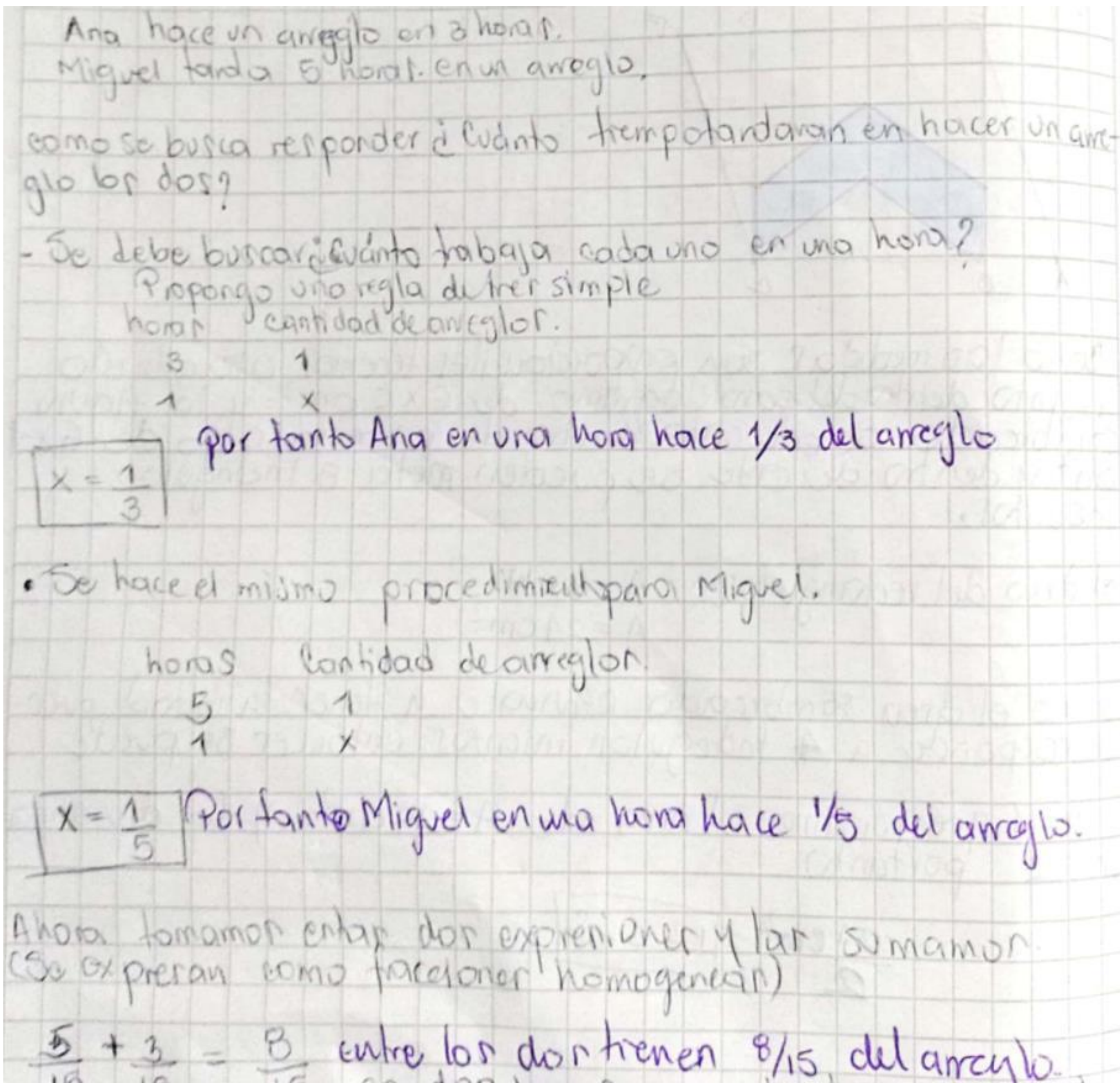
Ana y Miguel trabajan en el diseño y elaboración de arreglos florares y de plantas para jardines de edificaciones, Ana quien tiene más experiencia puede hacer un arreglo para jardín en 3 horas, en cambio Miguel se tarda en hacer el mismo arreglo 5 horas. Si Ana y Miguel trabajan juntos. Cuánto tiempo tardaran aproximadamente.

Procedimientos: Los proceso que asocian los dos estudiantes que resolvieron el problema en forma correcta sin aproximación, lo realizan empleando procesos aritméticos donde establecen la cantidad de trabajo que realiza cada uno en una hora para luego establecer el trabajo que realizan los dos juntos. Uno de los estudiantes establece una ecuación y una regla de tres simple en forma simultánea, es de mencionar que la solución está estructurada y no deja ningún supuesto a la deriva. El otro estudiante plantea el porcentaje del trabajo realizado y lo que se debe realizar, junto con una regla de tres. Tres estudiantes realizan una inspección del problema hacen cálculos estimados y dan un valor entero aproximado del tiempo que deben emplear tanto Ana como Miguel para realizar el arreglo del jardín. El resto de los estudiantes asocian procesos errados en la solución del problema.

Conceptos: Los conceptos asociados en la solución del problema son aritméticos y algebraicos donde relacionan reglas de tres, representación de una razón como un valor porcentual.

Métodos: El método analítico es el empleado por los estudiantes que realizan el problema en forma correcta, puesto que describen el trabajo que Ana y Miguel deben realizar en una hora, de tal forma que se pueda emplear el algebra y/o la aritmética limitando la solución del problema, permitiendo generar validación de la estrategia empleada. No obstante, la aplicación de conceptos, la organización de la información, deducir consecuencias son indicadores que evidencian el uso del razonamiento lógico deductivo en la solución de un problema, esto se evidencia en la solución que adjuntan estos estudiantes.

Por otro lado, los estudiantes que asocian una solución al problema en forma descriptiva o dan una solución deficiente, se puede deber a la dificultad que tiene al momento de relacionar presaberes o técnicas que le permitan diseñar y planificar una estrategia de solución. Es importante señalar que los estudiantes solicitan preguntas orientadoras (esencial y de contenido). En la siguiente figura se muestra ell método de solución de uno de los estudiantes, el cual emplea procesos que le sirven para validar información y llegar a una solución correcta al problema, (ver figura 11).


Ana hace un arreglo en 3 horas.
Miguel tarda 5 horas en un arreglo.
como se busca responder ¿Cuánto tiempo tardaran en hacer un arreglo los dos?
- Se debe buscar ¿cuánto trabaja cada uno en una hora?
Propongo una regla de tres simple
horas cantidad de arreglos.
3 1
1 x
$\boxed{x = \frac{1}{3}}$ por tanto Ana en una hora hace 1/3 del arreglo
• Se hace el mismo procedimiento para Miguel.
horas cantidad de arreglos
5 1
1 x
$\boxed{x = \frac{1}{5}}$ Por tanto Miguel en una hora hace 1/5 del arreglo.
Ahora tomamos estas dos expresiones y las sumamos (Se expresan como fracciones homogeneas)
$\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$ entre los dos tienen 8/15 del arreglo.

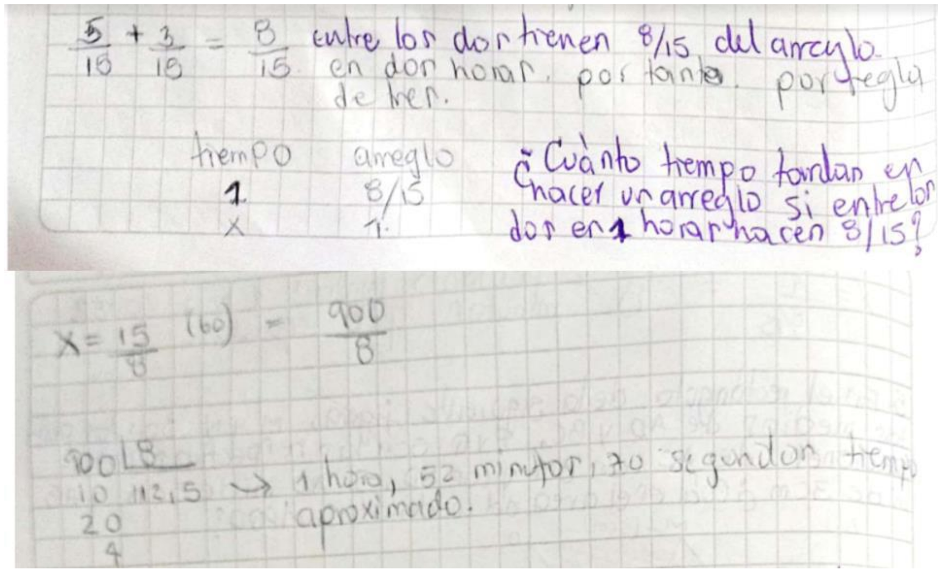
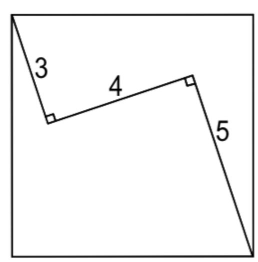


Figura 11. Estrategia empleada por uno de los estudiantes.

Problema 3.

Calcular el área del siguiente cuadrado con una poligonal, con propiedades tal como está indicado en la figura siguiente:



<u>Procedimientos:</u> Los cuatro estudiantes que intentan solucionar el problema, realizan construcciones auxiliares para poder generar una estrategia de solución, Donde intentan vincular la pregunta de contenido que se solicita. (*En geometría ¿Cuál o cuáles de los siguientes conceptos, semejanza, proporcionalidad, propiedades entre rectas paralelas y transversales, se deben vincular para la construcción de la solución del problema*?). Es de señalar que tan solo un estudiante genera una construcción, que permite relacionar el concepto de semejanza mediante el uso de proporcionalidad de segmentos en triángulos rectángulos. El resto de los estudiantes no logran relacionar ninguno de los conceptos que asocia la pregunta de contenido en las construcciones que realizan.

Conceptos: Los estudiantes referencian en su estrategia de solución semejanza, congruencia y proporcionalidad en triángulos rectángulos.

Métodos: Los estudiantes referencian en la construcción de la solución del problema aspectos como: aplicar conceptos y proposiciones, organizar y representar la información que brinda el problema, deducir consecuencias de los datos del problema, argumentar y demostrar proposiciones; estos indicadores describen el uso del pensamiento lógico-deductivo. También se puede señalar que cuando se buscan nexos y relacionar conceptos, en este caso congruencia, semejanza y proporcionalidad entre triángulos, se referencia el uso de tareas como idear, ingeniar o inventar, los cuales son indicadores relacionados al uso de la heurística. En la siguiente figura se muestra la construcción auxiliar que realiza un estudiante para darle solución al problema (ver figura 12).

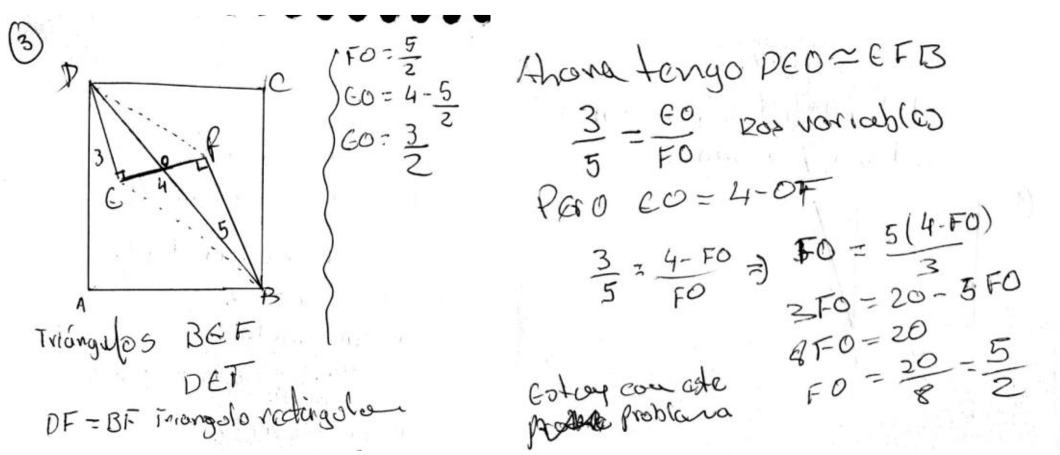


Figura 12. Estrategia empleada por uno de los estudiantes.

Problema 4.

Si se escribe 1998 como producto de dos números enteros positivos, tales que la diferencia entre ellos sea la menor posible, entonces la diferencial es:

a) 8 b) 15 c) 17 d) 47 e) 93

Procedimientos: Los estudiantes solicitan la pregunta de contenido del problema, ya que quieren saber cuál o cuáles conceptos se asocian al mismo. En aritmética. ¿Qué concepto es fundamental para poder generar una relación entre las operaciones aritméticas de resta y multiplicación? para poder iniciar a construir una estrategia de solución del mismo. Un estudiante asocia factores cuyo resultado es 1998, es decir que asocia el pensamiento analítico, ya que luego de esto realiza comparaciones para validar cual es a la situación diferenciadora que solicita el problema. El resto de los estudiantes, realizan una descomposición en factores primor del número 1998 que asocia en el problema. Es decir, emplean un concepto matemático para simplificar los procesos, de tal forma que aplican el pensamiento lógico-deductivo. Es importante mencionar que en este problema cuatro estudiantes realizan una visión retrospectiva o verificación de la estrategia empleada en la solución del problema, ya que asocian varias productos que generan 1998 y realizan la resta de cuatro o más parejas para generar la situación diferenciadora solicitada en el enunciado.

Conceptos: Los conceptos que relaciona los estudiantes en la solución del problema son aritméticos, descomposición en factores primos, operaciones básicas de multiplicación y resta.

Métodos: La solicitud de la pregunta orientadora de contenido; genera que los estudiantes asocian conceptos y proposiciones (pensamiento lógico-deductivo) referentes a las dos operaciones aritméticas que se describen en la pregunta. Además, los resolutos empiezan a generar nexos (heurísticas) que relacionen las operaciones, es decir, que emplean técnicas y presaberes que causen vínculos entre estas operaciones; lo que conduce a que todos empleen la descomposición del número 1998 en factores primos. Es evidente que la pregunta orientadora estaba infiriendo en forma directa en la estrategia que se debe emplear para la solución de problemas no rutinarios. Por tal razón, es fundamental calibrar las preguntas para que no infiera en el diseño, configuración y planificación del plan que cada estudiante debe producir en aras de solucionar el problema.

Es importante señalar que, en la estrategia generada para la solución del problema, el 66% de los resolutos asocian el paso, el proceso o como la denomina Krulik y Rudnick etapa final, que se integra en los diferentes métodos de solución de problemas matemáticos estamos refiriéndonos a la verificación o retro inspección al problema. Como se puede observar en la siguiente figura (ver figura 13).

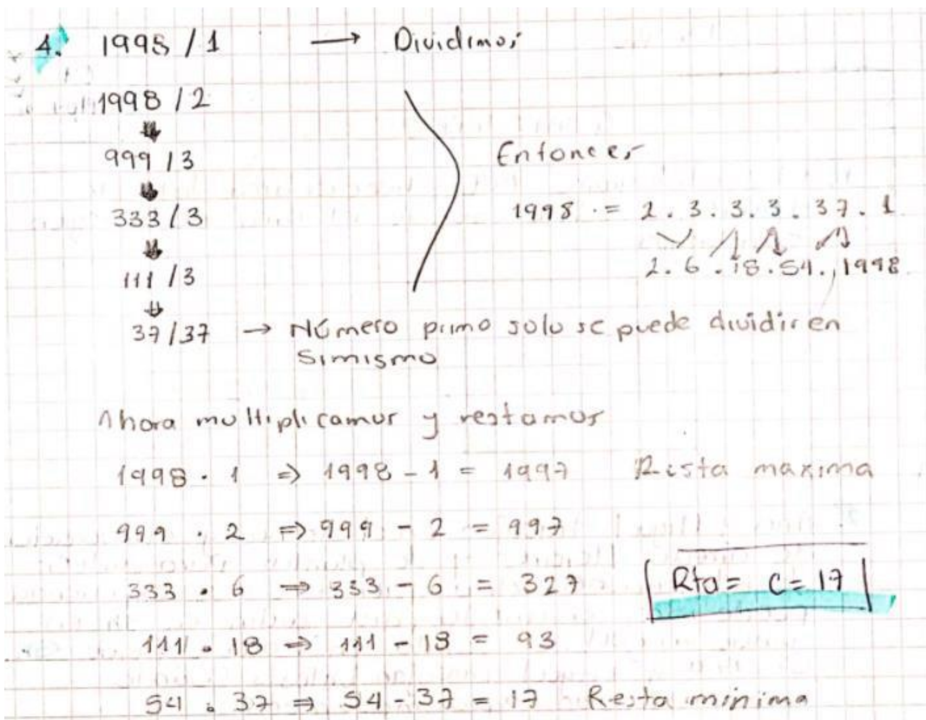
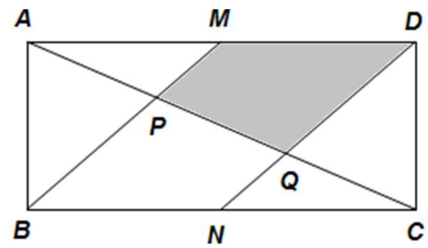


Figura 13. Estrategia empleada por uno de los estudiantes.

Problema 5.

En el rectángulo de la siguiente figura, M y N son los puntos medios de AD y BC. P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Si AD mide 5 cm y AB mide 3 cm. <u>¿Cuál es el área del cuadrilátero MPQD?</u>



Procedimientos: El 83% de los estudiantes realizan construcciones auxiliares para poder identificar patrones, diferencias y encaminar la construcción de una estrategia que permita resolver el problema. En las diferentes construcciones auxiliares que se generan se evidencian diferentes técnicas (Heurísticas) y Tareas (metacognición) que los estudiantes emplean para dar una solución en forma eficiente. Como se ha referenciado con anterioridad, los problemas matemáticos manipulativos generan una variedad de procesos y tareas cognitivas que describen el pensamiento matemático que los estudiantes tienen al momento de abordar y solucionar una situación no rutinaria de una forma explícita y evidente.

Conceptos: Descomposición y composición de figuras geométricas, relaciones de congruencia mediante construcciones auxiliares y cálculo de áreas.

Métodos: Cinco de los seis estudiantes que dan solución al problema integran en el diseño y planificación de la estrategia construcciones auxiliares; de tal forma que puedan organizar y representar la información de una manera más simple y así poder deducir propiedades y condiciones del problema (pensamiento lógico-deductivo). No obstante, se evidencia en los procedimientos realizados en el desarrollo de la estrategia vinculada; la variación de las condiciones iniciales del problema (Heurísticas). Un estudiante realiza una descomposición total de la figura, para iniciar a calcular el área de cada una de estas y poder explorar diferentes vías de solución mediante nexos entre las partes de la figura y la figura (Razonamiento Analítico - Heurísticas) (ver figura 14).

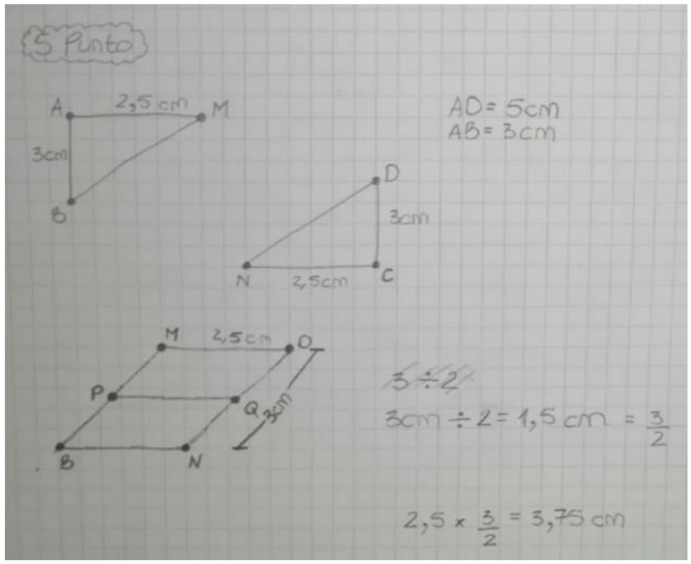


Figura 14. Estrategia empleada por uno de los estudiantes.

A continuación, se asocia la participación de los estudiantes en la actividad asocia al primer taller sobre resolución de problemas no rutinarios; también se asocia la motivación de algunos estudiantes que buscaron otros métodos de solución a algunos problemas que le llamaron la atención, se debe señara que esta actividad no fue relazada dentro de las sesiones sincrónicas programadas para el taller.

Tabla 2. Participación de estudiantes de la actividad.

	ENTREGARON	NO ENTREGARON	VALOR PORCENTUAL
Problema 1	8	0	100%
Problema 2	7	1	87,50%
Problema 3	5	3	62,50%
Problema 4	6	2	75%
Problema 5	8	0	100%

Tabla.2

Tenemos que el 100% de los estudiantes entregaron el problema 1 y el problema 5, los cuales relaciona conceptos geométricos de áreas sombreadas. El 87,5% entregaron el segundo problema, referente la elaboración de arreglos de jardín, el 75% entrego la solución del problema de selección múltiple con única respuesta y el 62,5% realizo una construcción auxiliar geométrica al problema de la poligonal dentro de un cuadrado.

Preguntas sobre el taller Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría.

Al finalizar la solución de los 5 problemas que conforman el primer taller sobre solución de problemas no rutinarios, los estudiantes debían contestar en forma breve y puntual dos preguntas:

1. *En cuál problema presento menos dificultad y por qué*: Los estudiantes asocian que el primer problema y dan argumentos como: La representación gráfica del problema contribuye a generar transformaciones a la figura y la ilustración de la figura genera que las verificaciones en el planteamiento de la solución sean más eficientes.

2. *En cuál problema presento mayor dificultad y por qué*: Tenemos que el problema 3 presenta la mayor dificultad para los estudiantes puestos que: no tiene casi información para construir una estrategia viable de solución.

Otras estrategias empleadas en la solución de problemas no rutinarios. Las siguientes son otras estrategias de solución que emplearon algunos estudiantes en la resolución de los problemas que conforman el taller 1.

Problema 1.

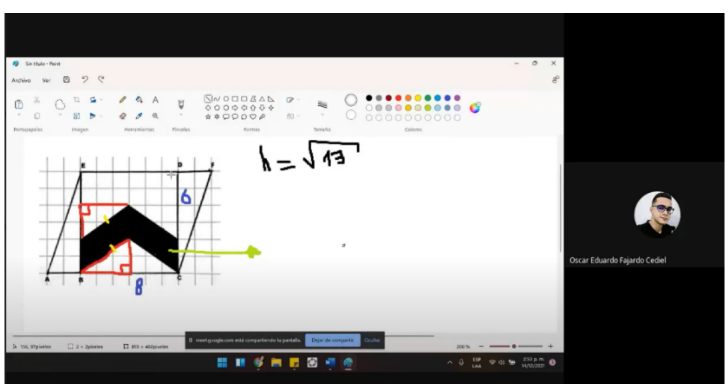


Ilustración 3: Solución del problema número 1 empleando otra estrategia de solución.

El estudiante realiza una estrategia en la cual emplea construcciones auxiliares donde emplea un rectángulo que enmarca el área de la figura sombreada; rectángulo cuya base mide 8 unidades y cuya altura es de 4 unidades. Luego de esto calcula el área de los triángulos rectángulos construido en color rojo y calcula la diferencia de área para obtener la relación del área sombreada con respecto a la del paralelogramo ACEF. Se evidencia que el estudiante emplea el razonamiento lógico deductivo en la solución del problema puesto que organiza la información que brinda el problema, deduce consecuencias de los datos suministrados en el enunciado y la figura; por último, argumenta las proposiciones elaboradas dentro de la estrategia.

Problema 2.

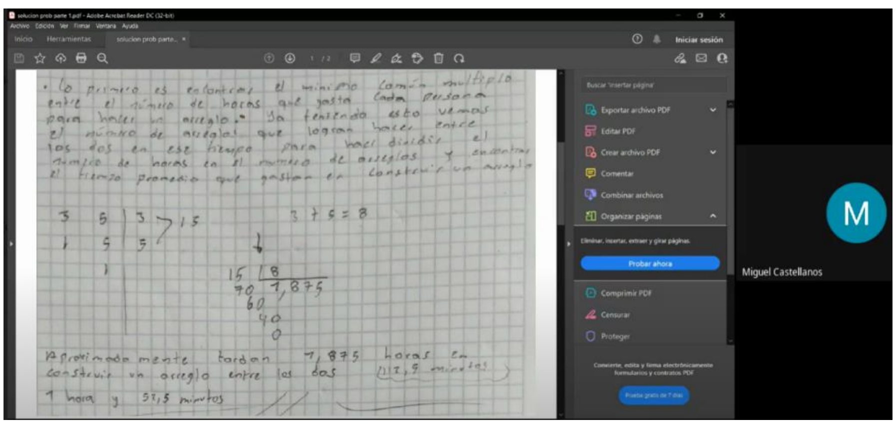


Ilustración 4: Solución del problema número 2 empleando otra estrategia de solución.

La estrategia que emplea el estudiante en la solución del problema número 2, consiste en calcular el Mínimo Común Múltiplo (m.c.m) entre el número de horas que emplea cada uno en realizar un arreglo floral; para luego asociar una relación de proporcionalidad entre el tiempo empleado 15 horas y el número de arreglos que realizan tanto Ana como Miguel que es 8. En este caso el estudiante explorar otras vías de solución, de tal forma que se simplifique el número de pasos que se deben realizar para resolver el problema. Lo anterior evidencia el uso de heurísticas y procesos metacognitivos en la solución del problema.

Problema 5.

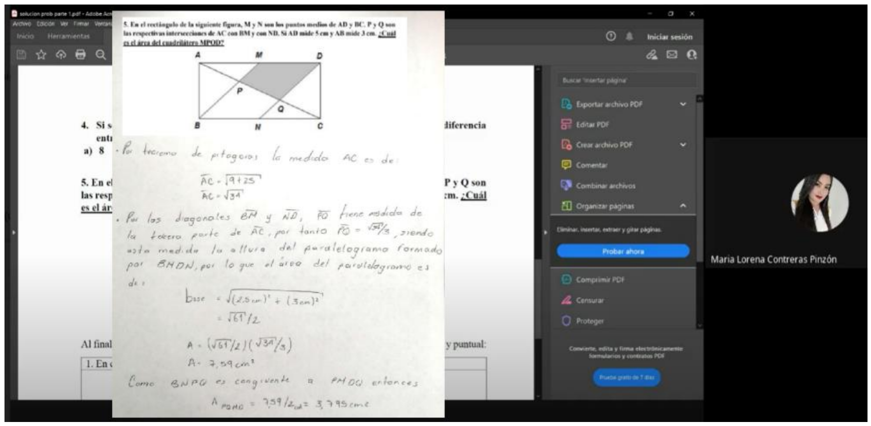


Ilustración 5: Solución del problema número 5 empleando otra estrategia de solución.

En este caso la estudiante realiza una descripción de la estrategia que asocia para poder solucionar el problema, en la cual genera una proposición en la cual afirma que los puntos P y Q dividen la medida del segmento Ac en tres partes iguales. Adicional a esto da el punto medio del segmento CD el cual lo llama W, calcula el área del triángulo rectángulo que se forma, el cual tiene como vértices los puntos DMW. Afirma que el doble del área de este triángulo es igual a la del cuadrilátero sombreado. En este caso la estudiante aplica conceptos y formula proposiciones (pensamiento lógico-deductivo), explora otras vías de solución y valida nexos relacionados a conceptos geométricos de triángulos y cuadriláteros (heurísticas). Controla la vía de solución del problema e identifica alternativas en la estrategia de solución, puesto que sabe cuál es la respuesta que busca (metacognición).

5.2.2. Actividad 2: Socialización sobre conceptos teóricos relacionados a problemas matemáticos, autores y caracterización del pensamiento matemático.

El docente que realiza la socialización, en varios momentos efectúa preguntas sobre los temas que se están describiendo y explicando, con la intensión de poder tener una interacción con los estudiantes, pero no existe una recepción por parte de estos, ya que no dan respuesta oportuna a las preguntas que se realizan, puesto que se generan problemas de conectividad. Es importante denotar que un componente pedagógico fundamental es la comunicación, ya que posibilita la interacción del profesor y del estudiante y garantiza un proceso de formación.

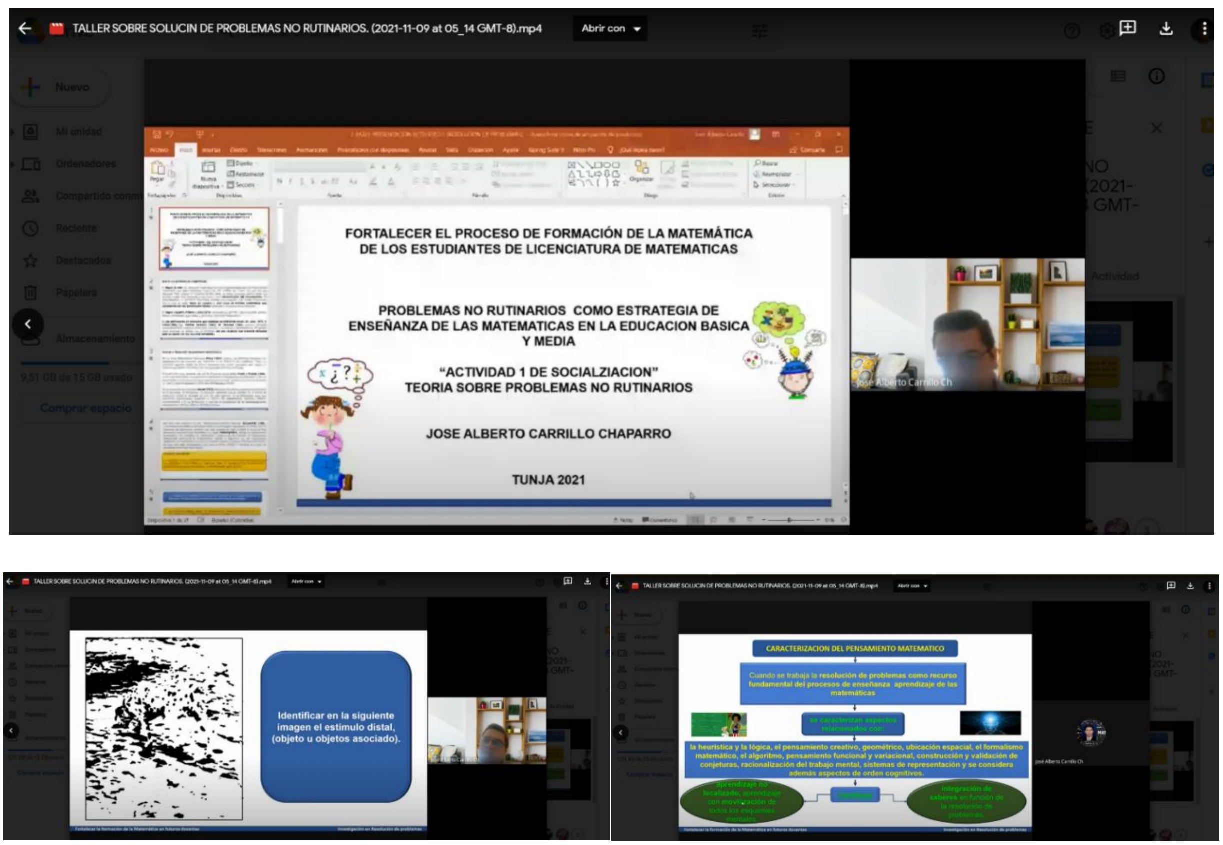


Ilustración 6: Se evidencia la socialización de los aspectos referentes a problemas no rutinarios mediante ejemplos y mapas conceptuales.

La primera sesión de la primera etapa finaliza realizando una descripción de los temas y conceptos que se trabajaran en el próximo encuentro. Los estudiantes participantes manifiestan que tienen tiempo los martes y jueves en horas de la mañana para participar del taller sobre problemas no rutinarios, ya que otro horario se cruza con alguna clase. La actividad que queda pendiente por parte de los estudiantes se debe revisar y cargar en las carpetas que se compartió en Google Drive.

5.2.3. Actividad 3: Solución de problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría parte 2.

A continuación se muestra el desarrollo que dieron algunos estudiantes al segundo taller realizado sobre solución de problemas no rutinarios.

PROBLEMA 1.

1. En la siguiente sucesión de números, cada número a partir del tercero (de izquierda a derecha) es igual a la suma de los dos anteriores ¿cuánto suma los dos últimos términos de la sucesión

Estudiante 1.

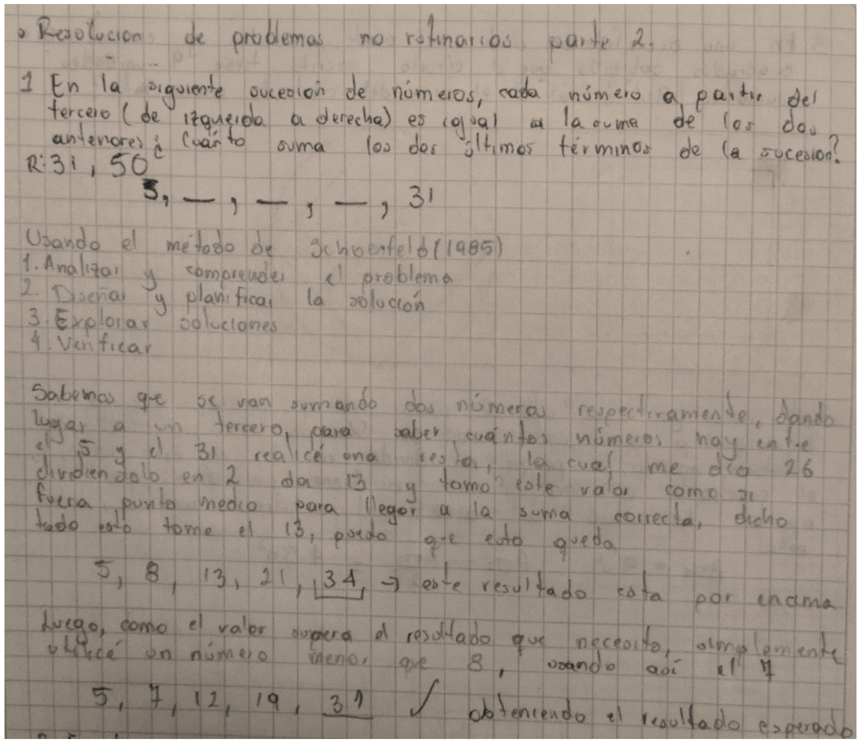

• Resolución de problemas no rutinarios parte 2.
1 En la siguiente sucesión de números, cada número a partir del tercero (de izquierda a derecha) es igual a la suma de los dos anteriores ¿Cuánto suma los dos últimos términos de la sucesión?
R: 31, 50
5, __, __, __, 31
Usando el método de Schoenfeld (1985)
1. Analizar y comprender el problema
2. Diseñar y planificar la solución
3. Explorar soluciones
4. Verificar
Sabemos que se van sumando dos números respectivamente, dando lugar a un tercero, para saber cuántos números hay entre el 5 y el 31 realicé una resta, la cual me dio 26 dividiendolo en 2 da 13 y tomo este valor como si fuera punto medio para llegar a la suma correcta, dicho todo esto tome el 13, puedo que esto queda
5, 8, 13, 21, 34 → este resultado esta por encima
Luego, como el valor supera el resultado que necesito, simplemente utilicé un número menor que 8, usando así el 7
5, 7, 12, 19, 31 ✓ obteniendo el resultado esperado

Figura 15: Solución y descripción del método empleado por uno de los estudiantes (Schoenfeld).

El estudiante emplea el método basado en los cuatro procesos de Schoenfeld. El estudiante realiza una descripción verbal donde asocia el análisis y la comprensión del problema mediante: la suma de dos números respectivamente hasta completar a la secuencia. Luego diseña y planifica la solución donde afirma que: existen 26 números entre el 5 y el 31, para luego dividir el 26 en dos de tal forma que tiene como cociente a 13. Realiza la exploración de la solución, afirmando que el 13 es el punto medio entre 5 y 31, aplica las condiciones del problema y se da cuenta que no se satisfacen las mismas, es decir que verifica los supuestos establecidos en el diseño de la solución. Adiciona, diciendo: “este resultado está por encima” al solicitado por el problema. Planifica de nuevo la solución y decide que el número no debe ser el 8 sino uno menor, determina que el valor de la segunda posición de la secuencia es el 7, realiza la verificación y se da cuenta que las condiciones del problema se cumplen. Es de señalar que esta solución es planteada mediante ensayo y error.

Estudiante 2.

Actividad #2

11 Nov

1. Sucesión

$$\underbrace{5 \quad x}_{+} \quad \underbrace{= \; y}_{+} \quad \underbrace{= \; z}_{+} \quad = \; 31$$

$5 + x = y \quad \Rightarrow \quad 5 + x = y \quad (1)$

$x + y = z \quad \Rightarrow \quad x - z = y \quad (2)$

$y + z = 31. \quad \Rightarrow \quad z - 31 = y \quad (3).$

Igualamos (1) y (2)

$5 + x = x - z \quad \Rightarrow \quad 2x - z = -5 \quad (4)$

Igualamos (2) y (3)

$x - z = z - 31 \quad \Rightarrow \quad x - 2z = -31 \quad (5)$

Teniendo las ecuaciones (4) y (5) lo realizamos por el metodo de igualación

$2x - z = -5 \quad (4)$
$x - 2z = -31 \quad (5)$

Despejamo x de las dos

$$x = \frac{z - 5}{2}$$

$$x = 2z - 31$$

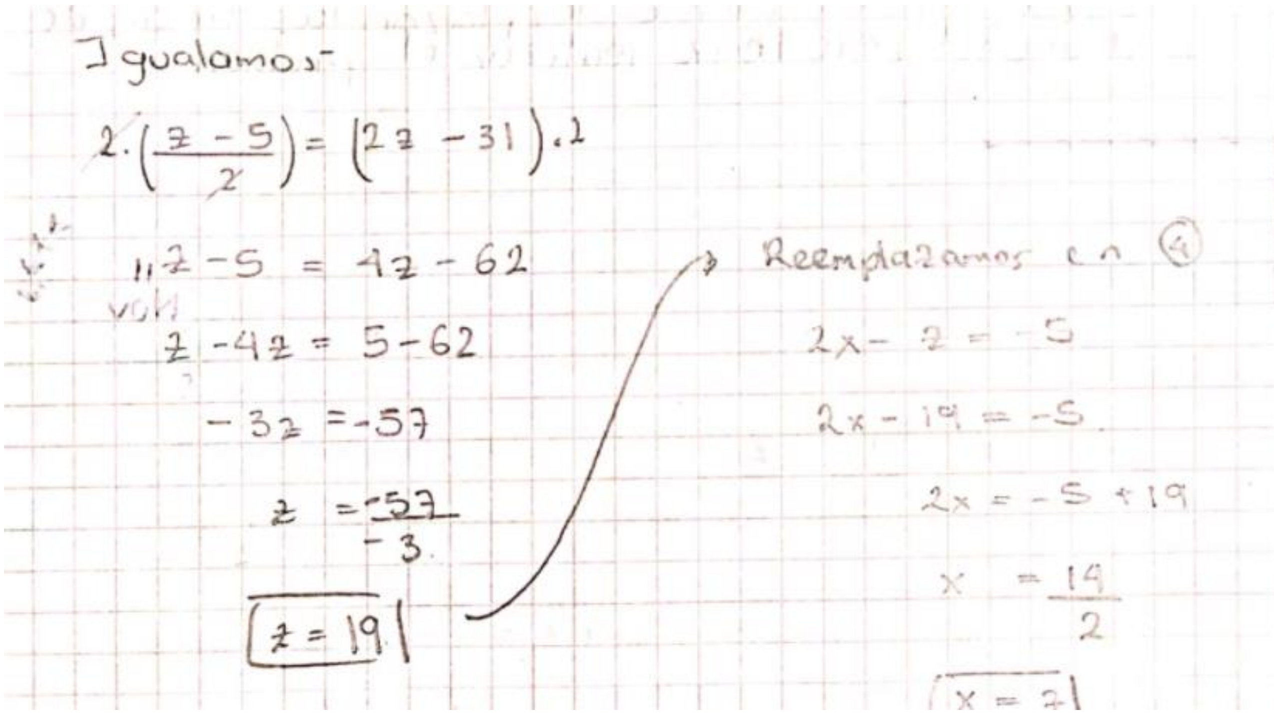
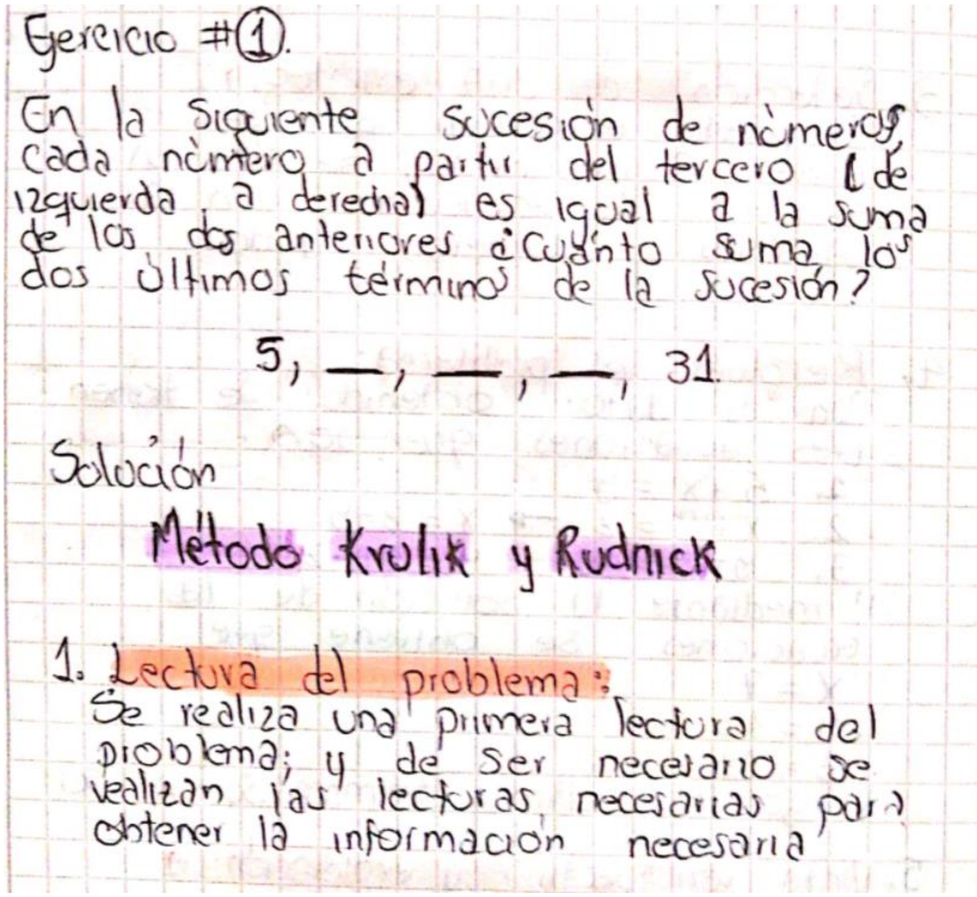


Figura 16: Solución y descripción del método empleado por uno de los estudiantes.

El segundo estudiante asocia directamente la estrategia de solución del problema sin realizar una descripción sobre el método que decidió emplear para esta actividad. Es evidente que la estrategia asociada relaciona el algebra como elemento primordial para poder garantizar una limitación del problema mediante el manejo de variables y conceptos referentes a sistemas de ecuaciones.

Estudiante 3.



Ejercicio #1.

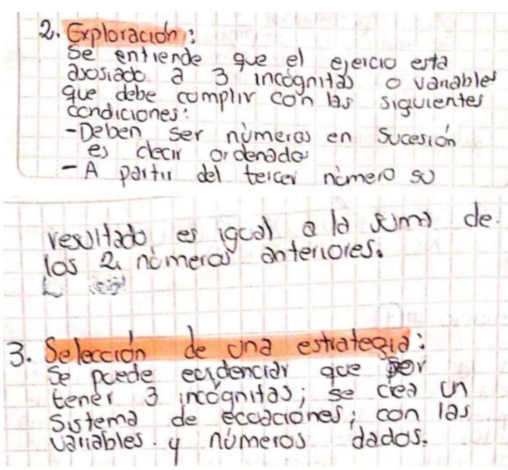
En la siguiente sucesión de números, cada número a partir del tercero (de izquierda a derecha) es igual a la suma de los dos anteriores ¿Cuánto suma los dos últimos términos de la sucesión?

5, __, __, __, 31

Solución

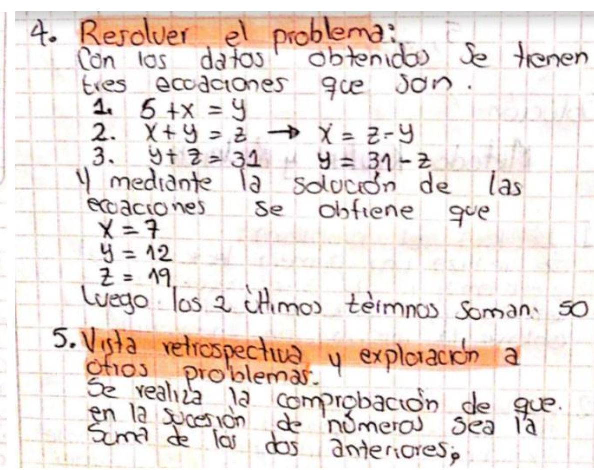
Método Krulik y Rudnick

1. Lectura del problema:
Se realiza una primera lectura del problema; y de ser necesario se realizan las lecturas necesarias para obtener la información necesaria



2. Exploración:
Se entiende que el ejercicio esta asociado a 3 incógnitas o variables que debe cumplir con las siguientes condiciones:
- Deben ser números en sucesión es decir ordenados
- A partir del tercer número su resultado es igual a la suma de los 2 números anteriores.

3. Selección de una estrategia:
Se puede evidenciar que por tener 3 incógnitas; se crea un sistema de ecuaciones; con las variables y números dados.



4. Resolver el problema:
Con los datos obtenidos se tienen tres ecuaciones que son.
1. $5 + x = y$
2. $x + y = z \rightarrow x = z - y$
3. $y + z = 31 \quad y = 31 - z$

y mediante la solución de las ecuaciones se obtiene que
$x = 7$
$y = 12$
$z = 19$
Luego los 2 últimos términos suman: 50

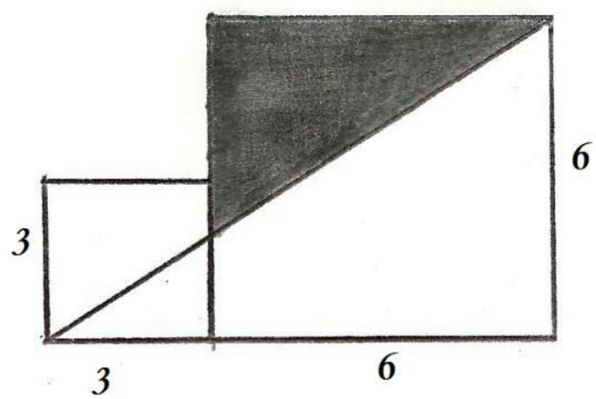
5. Vista retrospectiva y exploración a otros problemas:
Se realiza la comprobación de que en la sucesión de números sea la suma de los dos anteriores.

Figura 17: Solución y descripción del método empleado por uno de los estudiantes (Krulik y Rudnick).

El estudiante describe las cinco etapas del método de Krulik y Rudnick, en forma específica, indicando la importancia de realizar no solo una lectura al problema, puesto que están ayudan a entender el problema y a obtener la información necesaria y suficiente del problema. La estrategia que emplea en la solución es algebraica ya que asocia variables y ecuaciones a las condiciones que establece el enunciado. Soluciona el sistema de ecuaciones que plantea y realiza la comprobación de la respuesta en forma directa sin emplear procesos algorítmicos o algebraicos.

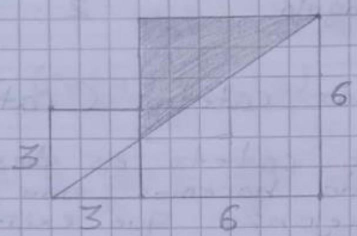
PROBLEMA 2.

2. En la siguiente figura, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 y cada lado del cuadrado más grande mide 6, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



Estudiante 5.

2. En la siguiente figura, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 y cada lado del cuadrado más grande mide 6. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



Por el método de Polya:

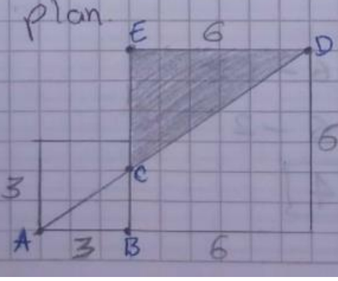
1. Entender el problema.

Se observan el la figura dos cuadrados uno pequeño y uno grande, además hay una linea que los divide y se observa un área sombreada que tiene forma de triángulo rectángulo, dicha área sombreada está contenida en el cuadrado de área 36 u^2 y finalmente se debe determinar esta área desconocida o del triángulo sombreado.

2. Configurar un plan.

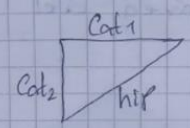
Se buscara construir figuras geométricas conocidas como triángulos, cuadrados o rectángulos, esto con trazados adicionales, también se buscara propiedades entre las figuras que se presentan, tales como semejanza o proporcionalidad.

3. Ejecutar el plan.



Se observa que los triángulos ABC y CDE son dos triángulos rectángulos ya que sus catetos se encuentran sobre los lados del cuadrado en que que se encuentran inscritos respectivamente.

Por tanto el área sombreada es el valor del área del triángulo CDE



$$\text{Área de triángulo rectángulo} = \frac{(Cat_1)(Cat_2)}{2}$$

De donde uno de los catetos $(Cat_1 = \overline{ED})$ mide 6.
El valor del segundo cateto es desconocido, para hallar su medida hacemos uso de la proporcionalidad de semejanza que existe entre los triángulos ABC y CDE.

Primero observe que: $EC = 6 - CB$

Luego por la proporcionalidad de semejanza de los triángulos ABC y CDE, se tiene:

$$\frac{3}{6} = \frac{CB}{EC}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{CB}{6 - CB}$$

$$3(6 - CB) = (CB)6$$

$$18 - 3CB = 6CB$$

$$18 = 6CB + 3CB$$

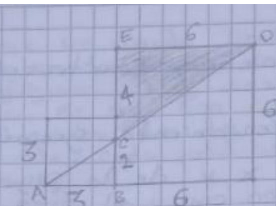
$$18 = 9CB$$

$$\boxed{2 = CB}$$

Luego de $EC = 6 - CB$

se tiene $EC = 6 - 2$

$$\boxed{EC = 4}$$



Por lo tanto: $Cat_1 = |\overline{ED}| = 6$

$Cat_2 = |\overline{EC}| = 4$

Luego $A_{\triangleright} = \frac{(Cat_1)(Cat_2)}{2}$

$$A_{\triangleright} = \frac{6 \cdot 4}{2} u^2 = \frac{24}{2} = 12\, u^2$$

4. Visión retrospectiva.

Para verificar que el procedimiento realizado sea el correcto se realiza una revisión completa del planteamiento y el desarrollo del plan, revisando cada paso realizado.

Figura 18: Solución y descripción del método empleado por uno de los estudiantes en el problema 2 (Polya).

En la solución del problema 2, el estudiante emplea como método de solución los cuatro pasos de Polya, como se evidencia en la ilustración 1; la descripción es muy detallada y asocia todos los procedimientos que se requieren en la ejecución del plan, donde se evidencia la representación y organización de la información (pensamiento lógico-deductivo), identifica relaciones de proporcionalidad y semejanza como lo describe en el paso dos (configuración del plan) es decir que emplea heurísticas. Para el último paso (visión retrospectiva), el estudiante realiza una descripción verbal en la cual señala que se debe volver a verificar los procesos aritméticos, algebraicos y geométricos que se asocian en la solución del problema.

Estudiante 6.

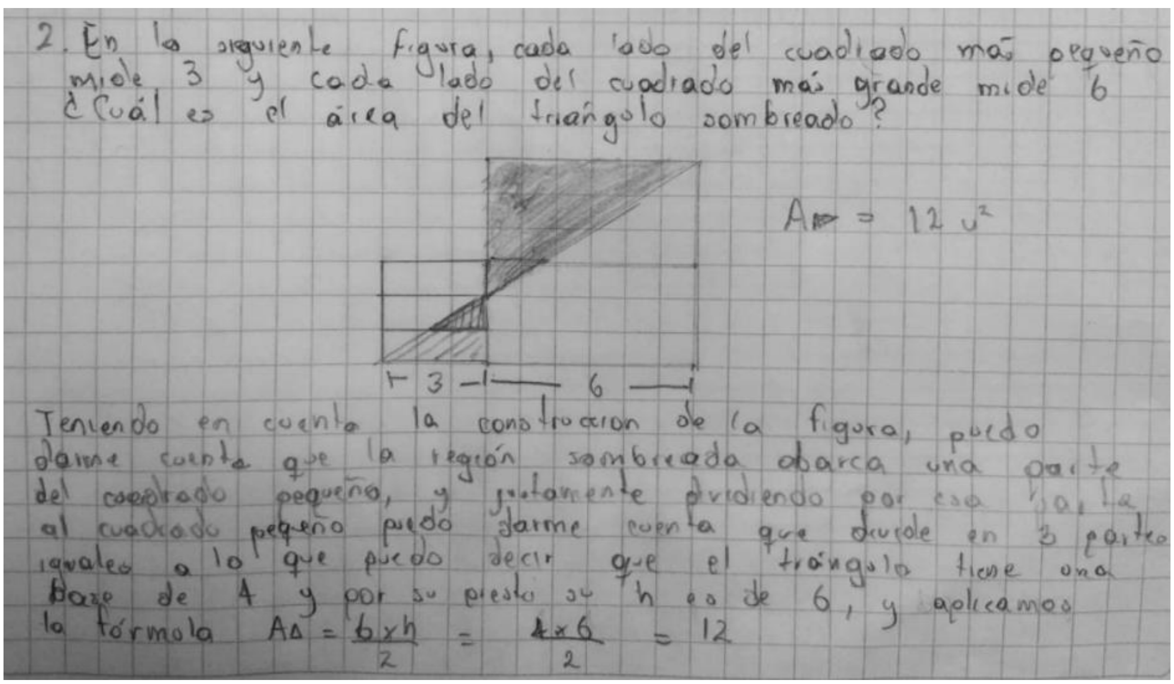
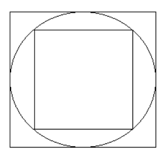


Figura 19: Solución y descripción del método empleado por uno de los estudiantes en el problema 2 (Schoenfeld).

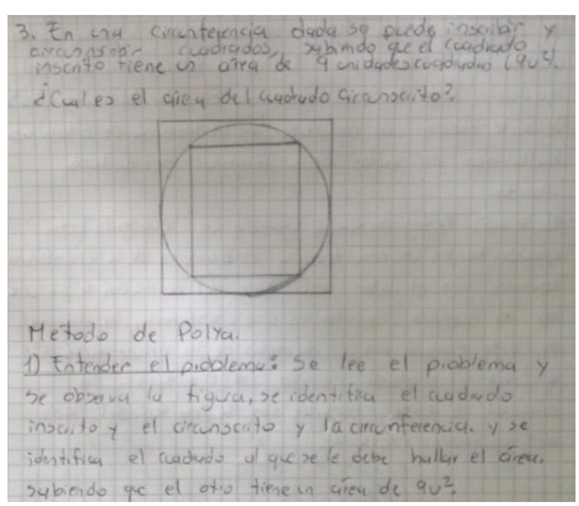
El estudiante asocia la estrategia que aplica para solucionar el problema, en la cual realiza construcciones auxiliares (razonamiento analítico-sistémico), generando un supuesto en la construcción de la figura del problema; como se pueden observan en la *ilustración 11*. Sin realizar una descripción del método a emplear. Supone que la diagonal que cruza los dos cuadrados corta el segmento del cuadrado de menor tamaño en una tercera parte. Sin realizar la validación de esta conjetura, desde un punto de vista matemático. Según lo descrito en la solución del problema, el estudiante supone semejanzas y congruencias de triángulos, sin realizar las respectivas distinciones y verificaciones que conlleva el realizar una construcción auxiliar en la solución de problemas geométricos no rutinarios.

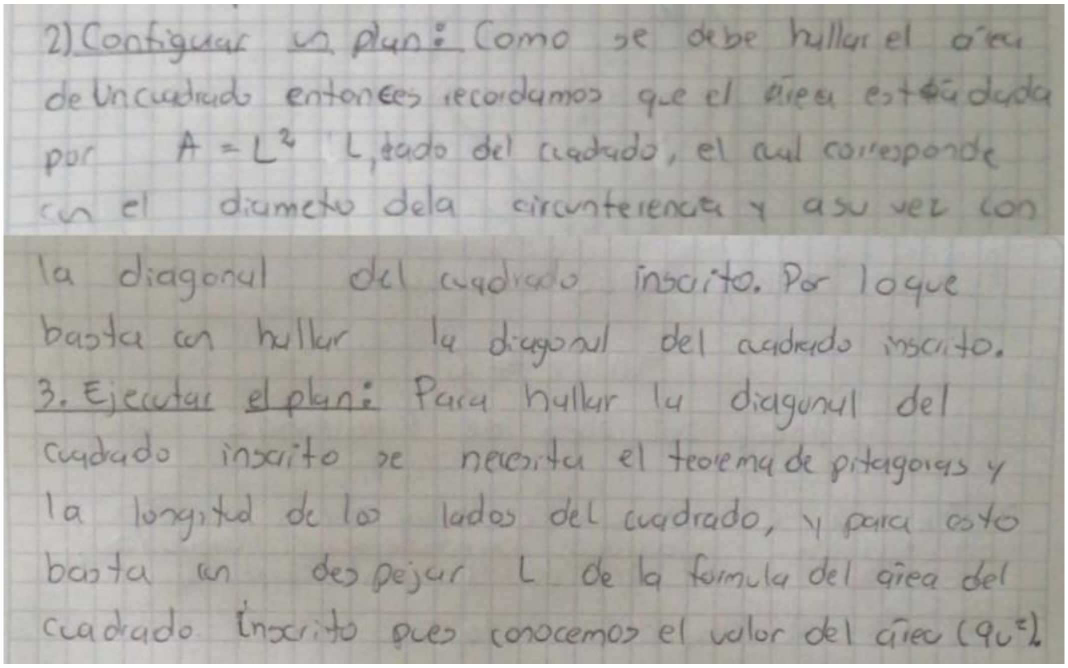
PROBLEMA 3.

3. En una circunferencia dada se puede inscribir y circunscribir cuadrados, sabiendo que el cuadrado inscrito tiene un área de 9 unidades cuadradas $(9\ u^2)$. ¿Cuál es el área del cuadrado circunscrito?



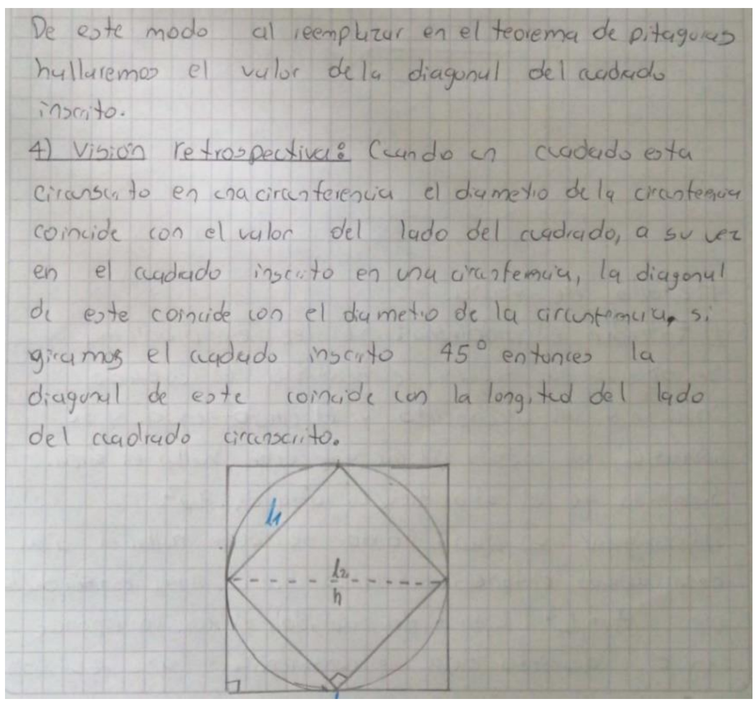
Estudiante 7.





2) Configurar un plan: Como se debe hallar el área de un cuadrado entonces recordamos que el área está dada por $A = L^2$ L, lado del cuadrado, el cual corresponde con el diámetro de la circunferencia y a su vez con la diagonal del cuadrado inscrito. Por lo que basta con hallar la diagonal del cuadrado inscrito.

3. Ejecutar el plan: Para hallar la diagonal del cuadrado inscrito se necesita el teorema de pitagoras y la longitud de los lados del cuadrado, y para esto basta con despejar L de la formula del área del cuadrado inscrito pues conocemos el valor del área ($9u^2$).



De este modo al reemplazar en el teorema de pitagoras hallaremos el valor de la diagonal del cuadrado inscrito.

4) Visión retrospectiva: Cuando un cuadrado esta circunscrito en una circunferencia el diámetro de la circunferencia coincide con el valor del lado del cuadrado, a su vez en el cuadrado inscrito en una circunferencia, la diagonal de este coincide con el diámetro de la circunferencia, si giramos el cuadrado inscrito 45° entonces la diagonal de este coincide con la longitud del lado del cuadrado circunscrito.

Figura 20: Solución y descripción del método empleado por uno de los estudiantes (Polya).

El estudiante describe los cuatro pasos que conforman el método de solución de problemas matemáticos que asocia Polya. En la descripción que asocian en los pasos uno y dos refieren a los conceptos que se deben aplicar, representación y propiedades de los objetos matemáticos que se relacionan en el problema (pensamiento matemático) y al realizar construcciones auxiliares como la de generar una rotación de 45 grados del cuadrado inscrito evidencia el uso de las heurísticas y de tareas como medir, comparar, transformar y construir se consideran de un nivel cognitivo alto.

PREGUNTA

Con respecto de la pregunta sobre, cuál vía de acceso a la hora de resolver problemas no emplearía y por qué. En conversación dentro de las sesiones de trabajo, los estudiantes manifiestan que el método de Polya o el de Schoenfeld son los más adecuados para iniciar el trabajo con problemas no rutinarios, ya que en los otros métodos se deben realizar más pasos o se debe examinar la exploración a otros problemas, también manifiestan que el método de Santos está orientado a la solución de problemas en términos generales. Es decir, comprenden que las fases que normalmente se deben realizar para solucionar un problema matemático, son tediosas y van en contra de la intensión de solucionar un problema, manifiestan también que existen métodos como el de Krulik y Rudnick, que están orientados a la planificación de clases donde se quiera vincular la solución de problemas no rutinarios como estrategia del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Luego de haber realizado las diferentes actividades programadas en las dos sesiones de la fase 1 del proyecto para Fortalecer la formación matemática de los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas en la solución de problemas no rutinarios; se efectúa la aplicación de la fase 2 del proyecto la cual esta conformada por dos sesiones en las cuales los estudiantes participantes deben realizar la construcción, adaptación o transformación de problemas no rutinarios, luego de esto debe construir un plan de clases que tenga unas especificaciones puntuales entre estas competencia, tareas, preguntas orientadores, presaberes entre otras, que relacionen problemas no rutinarios en los pensamientos aritméticos, algebraico y/o geométrico de la educación básica. Cada estudiante debe elaborar, construir y socializar su plan de clase de tal forma que realice las adecuaciones que sean pertinentes para la entrega final. Por último, se debe diligenciar un formulario de Google, el cual contiene una serie de preguntas que evalúan el taller de capacitación sobre solución y construcción de problemas no rutinarios en matemáticas en educación básica.

5.2.4. Fortalecer la formación matemática de los estudiantes de licenciatura de matemáticas en solución de problemas no rutinarios.

La segunda etapa del proyecto, continua el martes 14 de diciembre y finaliza el día 16 de diciembre del 2021; en la cual se instruye a los estudiantes en la construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios en conceptos matemáticos en educación básica. Dentro de las diferentes sesiones de capacitación se realizaron charlas y presentaciones en las cuales se describen los principales aspectos que se relacionan a la construcción de PNR, como lo son los marcos de referencia para la construcción de problemas, fuentes, contextos, formato de presentación de situaciones problémicas en matemáticas, tareas dentro de la actividad matemática y construcción de problemas no rutinarios. A continuación, se describe el trabajo con los estudiantes los alcances y las dificultades presentadas en la construcción de problemas no rutinarios.

5.2.5. Actividad 4: Socialización sobre la construcción de problemas no rutinarios y construcción de PNR por parte de los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas participantes del taller.

Esta tercera sesión tiene una duración de 3 horas, la cual está dividida en dos momentos, socialización respecto a la construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios por parte del docente capacitador. En el segundo momento los estudiantes participantes del taller deben construir uno o dos problemas no rutinarios basándose de una serie de problemas y ejercicios que se comparte en un documento PDF (ANEXO 11) o de actividades o temas que estén trabajando en su práctica docente.

5.2.6. Construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios por parte de los estudiantes participantes.

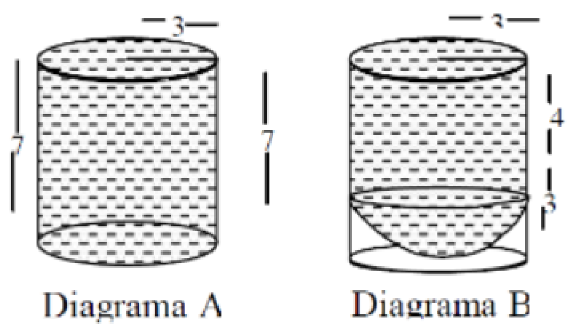
Los siguientes son los problemas construidos por los estudiantes, bajo las especificaciones que se orientaron en la socialización sobre construcción, adaptación y transformación de problemas no rutinarios; como contextos, fuentes, tareas cognitivas a realizar empleando conceptos referentes a los pensamientos aritmético, algebraico y/o geométrico.

Estudiante 1.

Problema construido.

Situación problema 8: Pensamiento métrico y geométrico

El costo del medicamento contenido en el envase del diagrama A era de $80 y el del nuevo envase es de $70. ¿Cuál de los dos envases es más económico para el usuario?. justifique



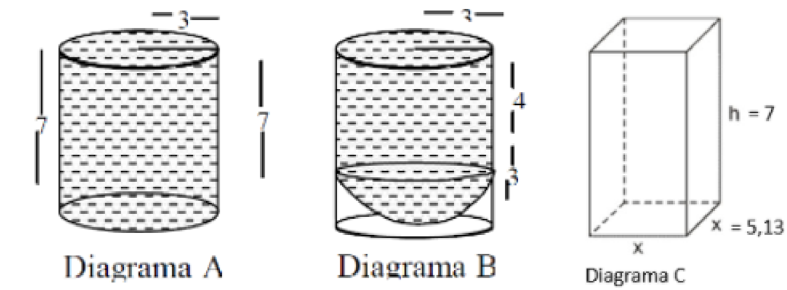
Momento inicial Se asocian conceptos de volúmenes de diferentes sólidos, como es el cilindro y esfera. además de una relación directamente proporcional de costo y cantidad.

Momento intermedio redefinir sólidos irregulares como una composición de sólidos regulares

Momento final

Construcción del problema

- La competencia decidió cambiar de envase a sus medicamentos del diagrama A al diagrama B y con ello cambió el precio de $80 a $70, por lo tanto la farmacéutica decidió hacer un cambio de presentación del producto del diagrama C, para poder bajar el precio del medicamento de $75 a $70 . ¿Diseñe un prototipo de envases no regular del perfil del diagrama B, que pueda ofrecer menor producto a igual precio que la competencia?

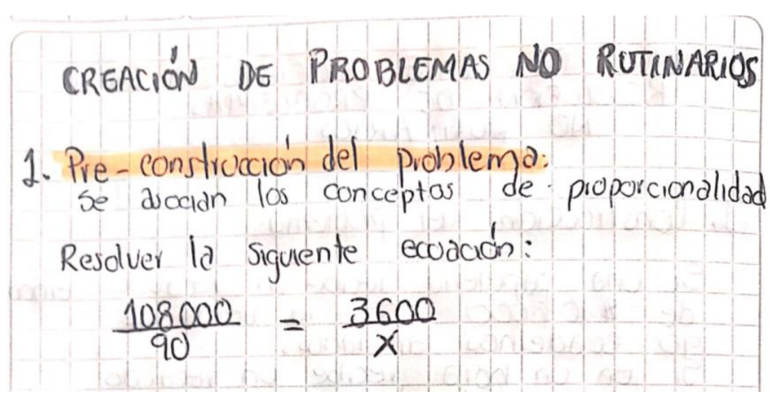


Análisis de la construcción.

TAREA(S): Comparar y Construir	PENSAMIENTO: Geométrico
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Analizar y Crear - Nivel cognitivo alto	
CLASIFICACION: Problema en camino a transformarse en no rutinario.	
DESCRIPCION: El problema exige que el estudiante deba realizar una construcción de un envase que almacene la menor cantidad de medicamento comparado con el de la competencia, lo que exige que deba generar un proceso matemático para comparar formas y capacidades.	

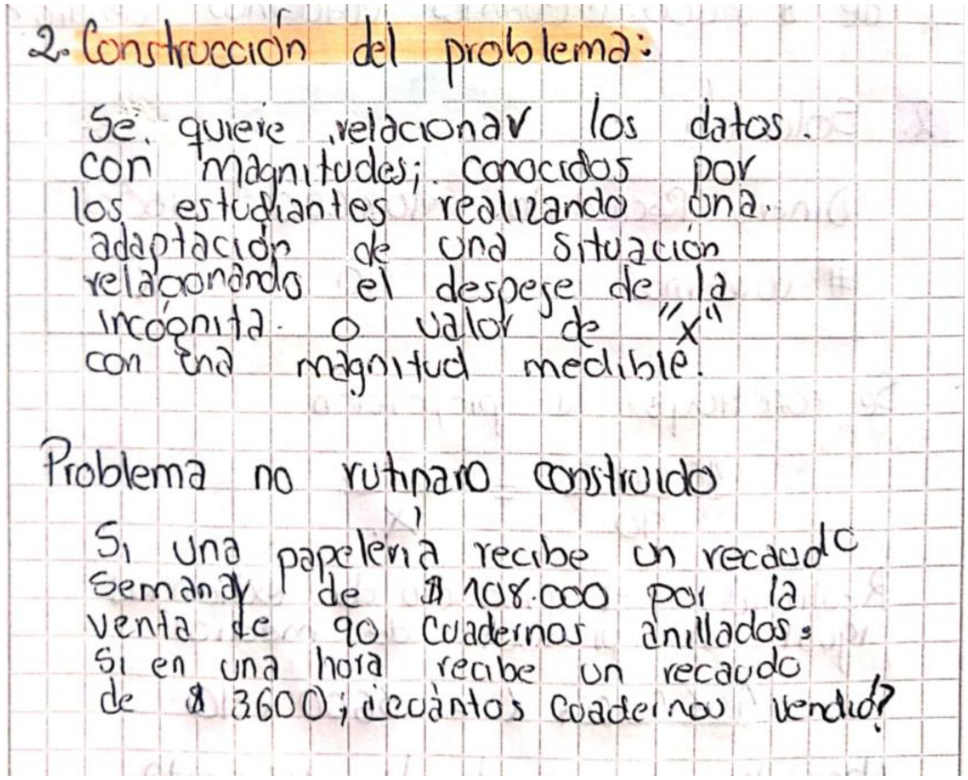
Estudiante 2.

Problema construido.


CREACIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS

1. Pre-construcción del problema:
Se asocian los conceptos de proporcionalidad
Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{108000}{90} = \frac{3600}{x}$$



2. Construcción del problema:

Se quiere relacionar los datos con magnitudes; conocidos por los estudiantes realizando una adaptación de una situación relacionando el despeje de la incógnita o valor de "x" con una magnitud medible.

Problema no rutinario construido

Si una papelería recibe un recaudo semanal de $108.000 por la venta de 90 Cuadernos anillados. Si en una hora recibe un recaudo de $3600; ¿cuántos Cuadernos vendió?

Análisis de la construcción.

TAREA(S): Encontrar y diferenciar	PENSAMIENTO: Algebraico
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Analizar - Nivel cognitivo alto.	
CLASIFICACION: En camino a convertirse en una situación no rutinaria.	
DESCRIPCION: Aunque la información que se suministra no es clara para poder establecer una estrategia de solución o una respuesta puntual, se puede entender que la construcción de la situación no rutinario se está generando.	

Estudiante 3.

Problema construido.

Problema original: Rutinario.

2 personas pintan una casa en 36 horas si esta labor la realizan 6 personas ¿En cuanto tiempo la pintarían?

-Problema No-Rutinario.

2 personas pintaron una casa en 36 horas, si se quiere pintar la casa en 24 horas, y uno de los trabajadores derrama un galón de pintura que equivale a un día de trabajo.

¿Cuántas personas se necesitan?

Cambios:

Se cambio la pregunta ahora se busca el número de personas, y se agrega una situación cotidiana que es que se derrame un galon de pintura con lo cual retrasa el trabajo 24h.

Se puede solucionar por proporcionalidad o modelando una ecuación.

Solución: por proporciones.

# Persona	# horas
$\frac{2}{x}$	$\frac{36 + 1\ \text{día}}{24}$

1 día → 24h.

Proporción Inversa.

$$\frac{2}{x} = \frac{36+24}{24}$$

Proporcion directa.

$$\frac{x}{2} = \frac{60}{24}$$

Teorema fundamental de Proporciones.

$$x \cdot 24 = 2 \cdot 60$$

$$x = \frac{120}{4}$$

$$\boxed{x = 5}$$

Rta: 5 personas.

Análisis de la construcción.

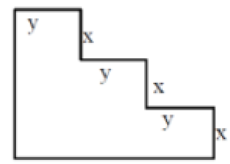
TAREA(S): Calcular	PENSAMIENTO: Algebraico
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Aplicar - Nivel cognitivo medio.	
CLASIFICACION: En camino a transformarse en un problema no rutinario (problema rutinario).	
DESCRIPCION: La información que se suministra no es pertinente para poder establecer una situación no rutinaria ya que no se dan las condiciones iniciales del problema. La situación que se asocia es de calcular un valor numérico, lo que conlleva solo el uso de una ecuación algebraica para solucionar la situación problémica rutinaria.	

Estudiante 4.

Problema construido.

EJEMPO 7: construcción del problema.

*Hallar los valores de x, y de la figura, sabiendo que su perímetro es de 300cm y el área encerrada es de 3600*cm^2

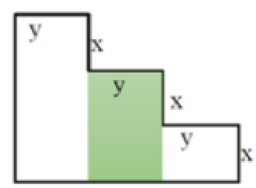


1. Pre - construcción: En este caso construcción y solución de sistemas de ecuaciones, área y perímetro de las figuras.

2. Construcción del problema:

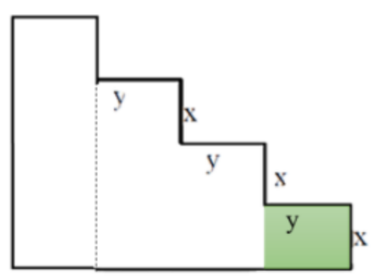
a. Momento Inicial:

*Hallar el valor del área de la región sombreada, sabiendo que el perímetro total es de 300cm y el área total es de 3600*cm^2.



b. Momento intermedio: En este problema se asocia sistemas de ecuaciones (construcción y solución), operaciones básicas según contexto, área y perímetro de figuras, sucesiones.

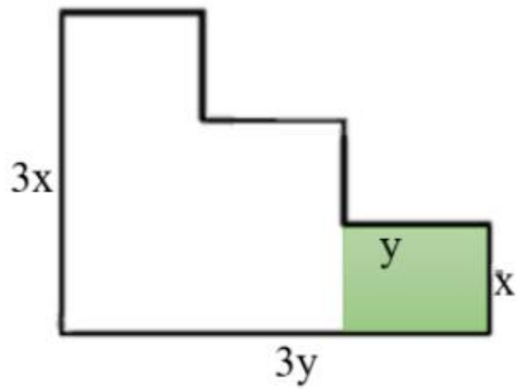
*Si se construye una escalera de esta forma y el área de un ladillo es x*y, entonces cuantos ladrillos se necesitan para construir 4 escalones y cuál será el área total, sabiendo que el perímetro de los tres primeros escalones es de 300cm y el área es de 3600*cm^2.



c. Momento final:

PROBLEMA NO RUTINARIO CONSTRUIDO:

*Para construir una escalera se necesitan rectángulos de área x*y, los primeros tres escalones tienen un perímetro de 300cm y un área de $3600cm^2$.*



P1: Cuál es el área del rectángulo.

P2: Cuántos rectángulos se necesitan para construir 5 escalones.

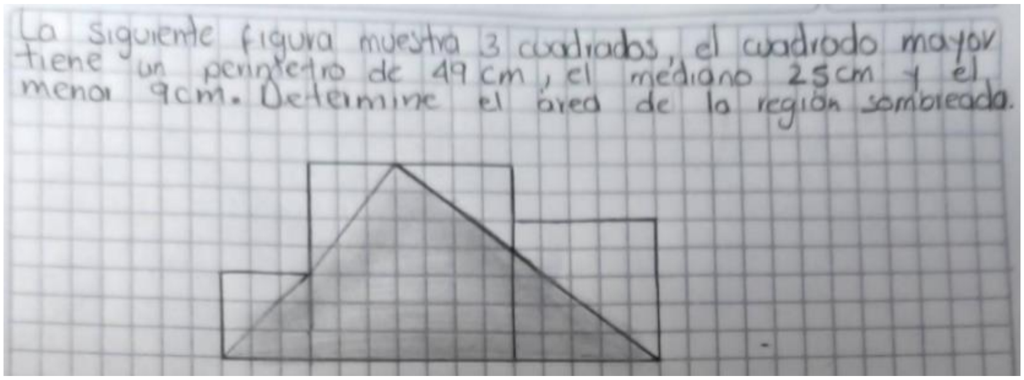
P2: Cuál es el área total de la escalera si se han construido 6 escalones.

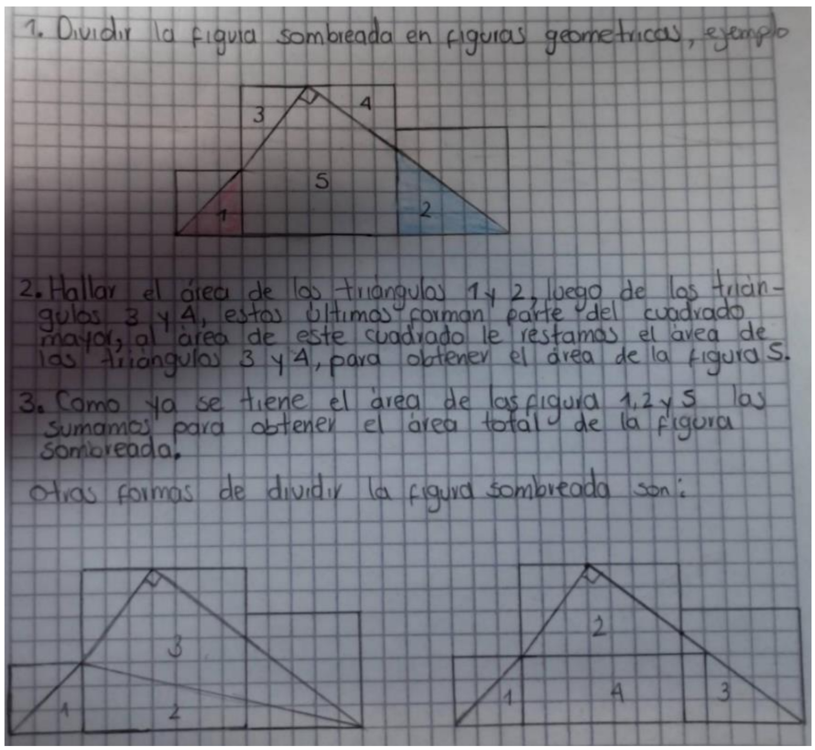
Análisis de la construcción.

TAREA(S): Calcular, Examinar, comparar y construir	**PENSAMIENTO: Geométrico**
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Analizar, Evaluar y Crear - Nivel cognitivo Alto	
CLASIFICACION: Situación no rutinaria o en camino a serlo.	
DESCRIPCION: El estudiante realiza un planteamiento en la construcción del problema en forma ordenada y estructurada, describiendo los momentos para poder generar una situación problémica en la que el estudiante deba aparte de calcular y examinar, construir y comparar las cuales se consideran como tareas de un nivel cognitivo alto.	

Estudiante 5.

Problema construido.





Análisis de la construcción.

TAREA(S): Determinar	**PENSAMIENTO: Geométrico**
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Comprender - Nivel cognitivo Bajo	
CLASIFICACION: En camino a transformarse en una situación no rutinaria.	

DESCRIPCION: El estudiante no realiza la descripción en la construcción del problema no rutinario, por lo tanto, se establece como una situación rutinaria que se está empezando a transformar en n PNR.

Estudiante 6.

Problema construido.

PROBLEMA NO RUTINARIO

La administración de un restaurante paga a un camarero un salario semanal de $A. Este salario es el resultado de una asignación fija de $60, más 11 centavos por cada uno de los **n** clientes que atiende.

a) Calcule el salario que el camarero recibió en una semana que atendió a 240 usuarios.

CONSTRUCCION DEL PROBLEMA

a). <u>Momento inicial</u>

Lo primero es cambiar el sentido de la pregunta esta es la que hace rutinario el problema, ya que es solo cuestión de remplazar para encontrar el valor.

La administración de un restaurante paga a un camarero un salario semanal de $A. Este salario es el resultado de una asignación fija de $60, más 11 centavos por cada uno de los **n** clientes que atiende.

a) Determinar el número de clientes que tiene que atender el camarero para que su salario sea un numero entero.

b.) <u>Momento intermedio</u>

En este problema se van asociar números enteros, irracionales, radicales, además de expresiones algebraicas. Además, se le dará otro contexto al problema para evitar confusiones.

La administración de un restaurante paga a un camarero un salario semanal de $A^2\ USD$. Este salario es el resultado de una asignación fija de 60 USD, más 11 USD por cada uno de los **n** clientes que atiende.

a) Determinar el número de clientes que tiene que atender el camarero para que su salario sea un numero entero.

C.) Momento final

Se asocian conceptos matemáticos en pensamiento numérico, representación decimal, además se dan condiciones especiales referentes a representaciones algebraicas

La administración de un restaurante paga a un camarero un salario semanal de $A^2\ USD$. Este salario es el resultado de una asignación fija de 60 USD, más 11 USD por cada uno de los n clientes que atiende.

a) Determinar el número de clientes que tiene que atender el camarero para que su salario sea un numero entero.
b) ¿Qué clase de número se tiene cuando el salario del camarero no es un numero entero?
c) ¿Es practica la forma de pago de la administración del restaurante?

Análisis de la construcción.

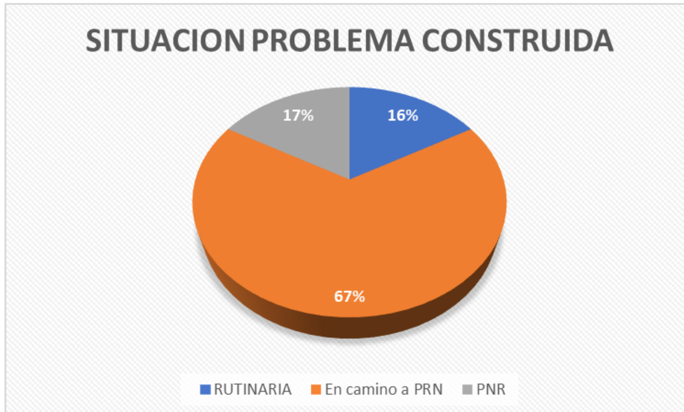
TAREA(S): Determinar, Examinar y Justificar	**PENSAMIENTO: Aritmético y Algebraico**
NIVEL COGNITIVO TAREA(S): Comprender, Analizar y Evaluar	
CLASIFICACION: Problema no rutinario.	
DESCRIPCION: Las preguntas que se asocian a la situación problémica conllevan a que el estudiante deba emplear diferentes herramientas matemáticas (heurísticas) para poderle dar respuesta a cada uno de los interrogantes; adicional a esto las tareas cognitivas tienen niveles de dificultad en forma progresiva partiendo de comprender pasando por el analizar hasta llegar al evaluar.	

5.2.6.1. Descripción estadística de la realización de problemas no rutinarios.

Las siguientes graficas describen en forma cuantitativa la construcción de problemas no rutinarios, nivel cognitivo de las tareas que se indican en cada uno de los problemas y el eje temático y pensamiento matemático que se asocia.

a. Problemas no rutinarios construidos.

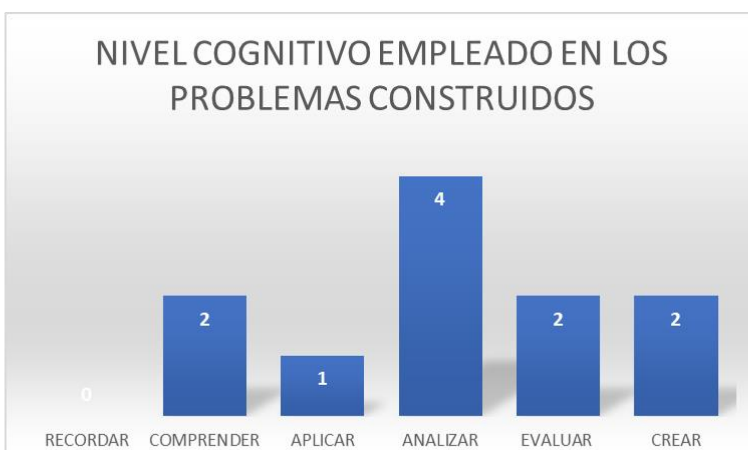
En la siguiente grafica se puede especificar que tan solo un estudiante genero una situación totalmente rutinaria en el problema que construye, también se tiene que 4 de los estudiantes participantes generaron situaciones que están a punto de convertirse en problemas rutinarios y por último se tiene que solo un estudiante logro construir un problema no rutinario.



Gráfica 2.

b. Nivel cognitivo de los problemas.

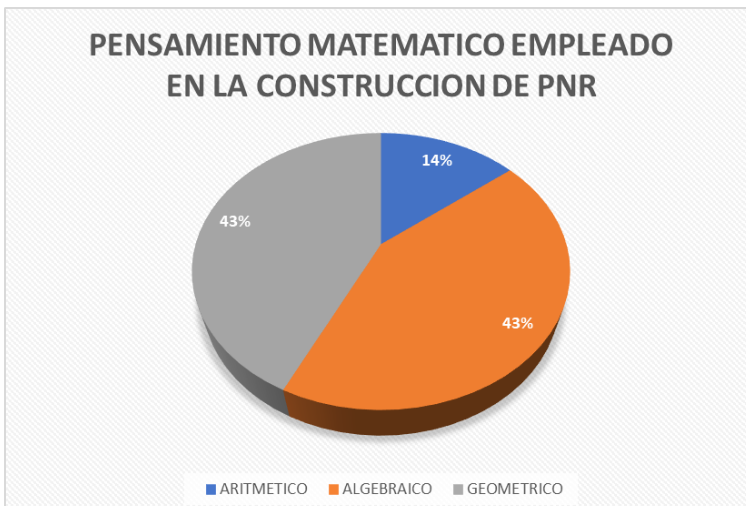
Se observa en el siguiente grafico que el 36,6% de los estudiantes emplea tareas cognitivas asociadas al nivel de analizar mientras el 18,1% prefieren asociar tareas como examinar, justificar, construir que se asocian al máximo nivel cognitivo que se tiene el cual es crear. Es evidente que 72,2% relaciona tareas de un nivel cognitivo alto y tan solo el 27,8% relaciona tareas de un nivel cognitivo bajo y medio en los problemas que construyeron.



Gráfica 3.

c. Pensamiento matemático asociado.

Se observa que la misma cantidad de estudiantes se inclinan por emplear el pensamiento algebraico y geométrico en la construcción de situaciones problemas no rutinarios y tan solo el 14% de los estudiantes emplean el pensamiento aritmético en la construcción de PNR. Es de señalar que en las explicaciones que se dieron sobre los contextos que se emplean normalmente en la construcción de situaciones problémicas no rutinarios se emplea contextos geométricos o recreativos para la construcción de PNR ya que por su naturaleza genera la relación de presaberes y la manipulación de conceptos y objetos matemáticos de una forma libre donde se asocian construcciones auxiliares y transformaciones que contribuyen a la creación de estrategias de solución a los problemas.



Grafica 4.

5.2.7. Plan de cases con problemas no rutinarios construidos por estudiantes de Licenciatura de Matemáticas.

En esta última actividad se les dan a los estudiantes las indicaciones pertinentes para la construcción del plan de clase basado en problemas no rutinarios, ellos deben construir un plan de clase el cual debe contener los siguientes aspectos:

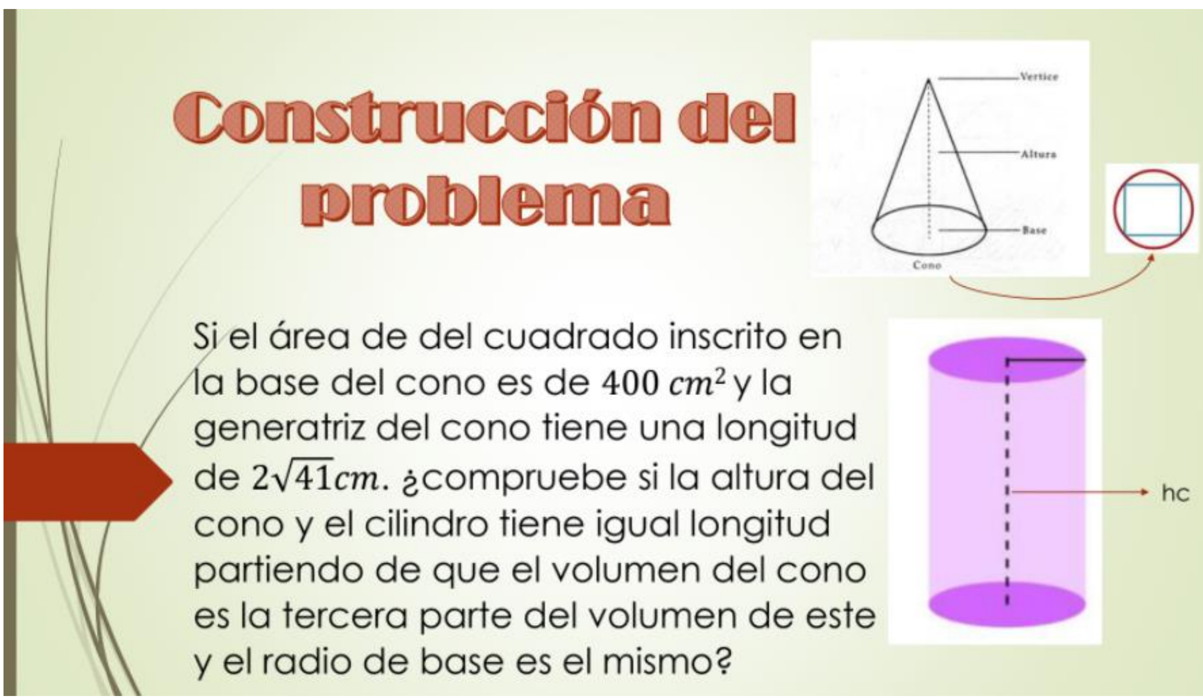
- ✓ Construcción, solución y descripción del problema no rutinarios.
- ✓ Estructuración curricular del problema.

Deben socializar el plan de clase para realizar las adecuaciones, cambios y demás aspectos que se vean esenciales para poder realizar la entrega final de esta actividad.

Los siguientes son los planes de clase construidos por los estudiantes, bajo las especificaciones que se orientaron en la socialización sobre construcción de planes de clase basado en problemas no rutinarios, cada uno de estos es evaluado por una rubrica de evaluación que especifica el nivel de cumplimiento de cada uno de los 10 aspectos que se evalúan en la construcción del plan de clase (ANEXO 12).

ESTUDIANTE 1

PLAN DE CLASE



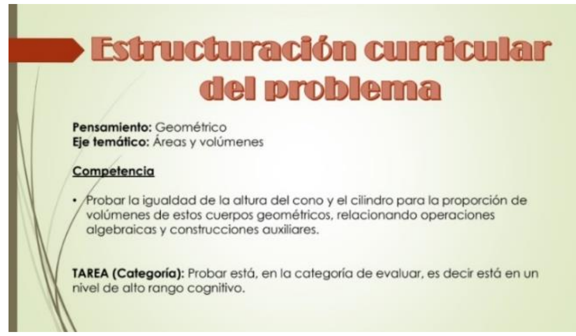


Ilustración 7: Plana de clase basado en PNR estudiante 1.

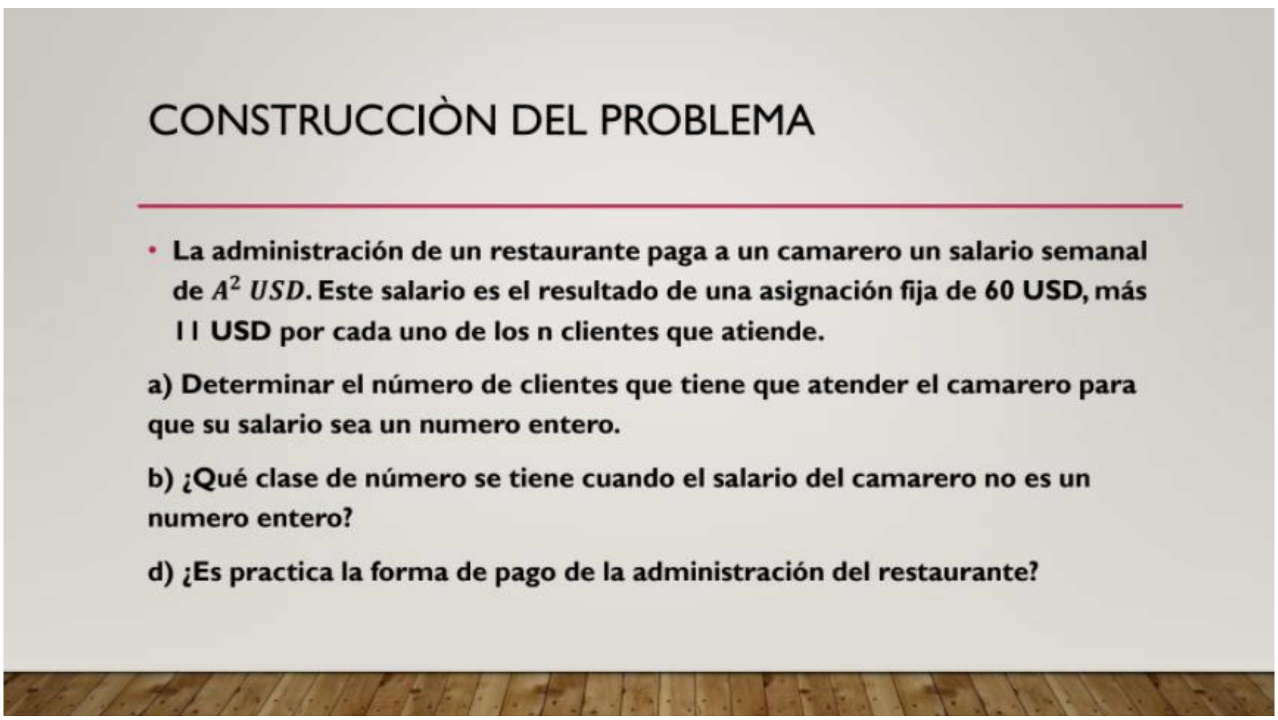
RUBRICA DE EVALUACION

		ESCALA VALORATIVA PARA LAS ACTIVIDADES ASOCIAS EN EL PLANDE CLASE BASADO EN PRN					
		1	2	3	4	5	TOTAL
COSNTRUCCION DE PROBLEMA NO RUTINARIO	PROBLEMA	El problema es rutinario	El problema presenta una estructura básica para transformarse en PNR	El problema presenta una estructura elaborada para transformarse en PNR.	El problema tiene estructura de PNR	El problema es una PNR	4,6
	SOLUCION	No tiene solución	La solución es incompleta y no está ordenada.	La solución no está explicada.	La solución tiene esplicacion básica, ordenada y estructurada.	La solución esta bien especificada y asocia explicaciones verbales.	
	DESCRPCION	No hay descripción	La descripción no está completa y no describe los pasos, etapas o porcesso que lo conforman.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma implícita que la conforman, pero no es clara.	a descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman, pero no es clara.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman y es clara.	
ESTRUCTURACION CURRICULAR	PENSAMIENTOS MATEMATICIS	No asocia los pensamientos.		Asocia los pensamientos en forma incompleta.		Asocia los pensamientos.	4,6
	EJES TEMATICOS	No asocia los ejes temáticos.		Asocia los ejes temáticos en forma incompleta.		Asocia los ejes temáticos.	
	COMPETENCIA	No hay competencia relacionada.	La competencia no asocia objeto conceptual, finalidad y condición de referencia.	La competencia no asocia 2 de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia no asocia uno de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia esta bien estructurada.	
	TAREA(S)	No asocia la(s) tareas.		Asocia la(s) tarea(s) en forma incompleta.		Asocia la(s) tarea(s)	
	CONTEXTO DEL PROBLEMA	No asocia el contexto del problema		Asocia en contexto del problema en forma incompleta		Asocia el contexto en forma adecuada.	
	PRESABERES	No asocia los presaberes del PNR		Asocia los presaberes en forma incompleta.		Asocia los presaberes en forma correcta.	
	PREGUNTAS ORIENTADORAS	No hay preguntas orientadoras	Las preguntas orientadoras no contibuyen en la solucion del problea, son muy genericas.	La pregunta esencial o la pregunta de contenido contribuyen en la solucion del problema.	Las preguntas son claras y bien elaboradas pero no contribuyen en forma clara y puntual en la solución del problema.	Las preguntas contrubuyen en la solución del problema.	
						TOTAL	4,6

DESCRIPCION: En cuanto a la construcción del problema el estudiante presenta una nota sobresaliente de 4.6, donde la ponderación más baja la obtiene en la construcción del problema. En cuanto a la estructura curricular se obtiene una nota también sobre saliente de 4.6 donde la ponderación más baja la obtiene en el contexto del problema ya que no los relaciona todos. En términos generales tenemos un plan de clase con una nota de 4.6. (Anexo 13).

ESTUDIANTE 2

PLAN DE CLASE



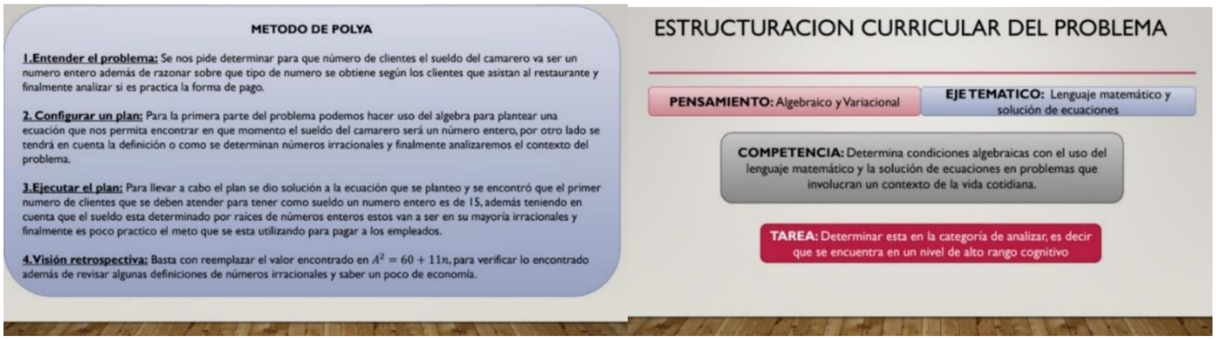


Ilustración 8: Plana de clase basado en PNR estudiante 2.

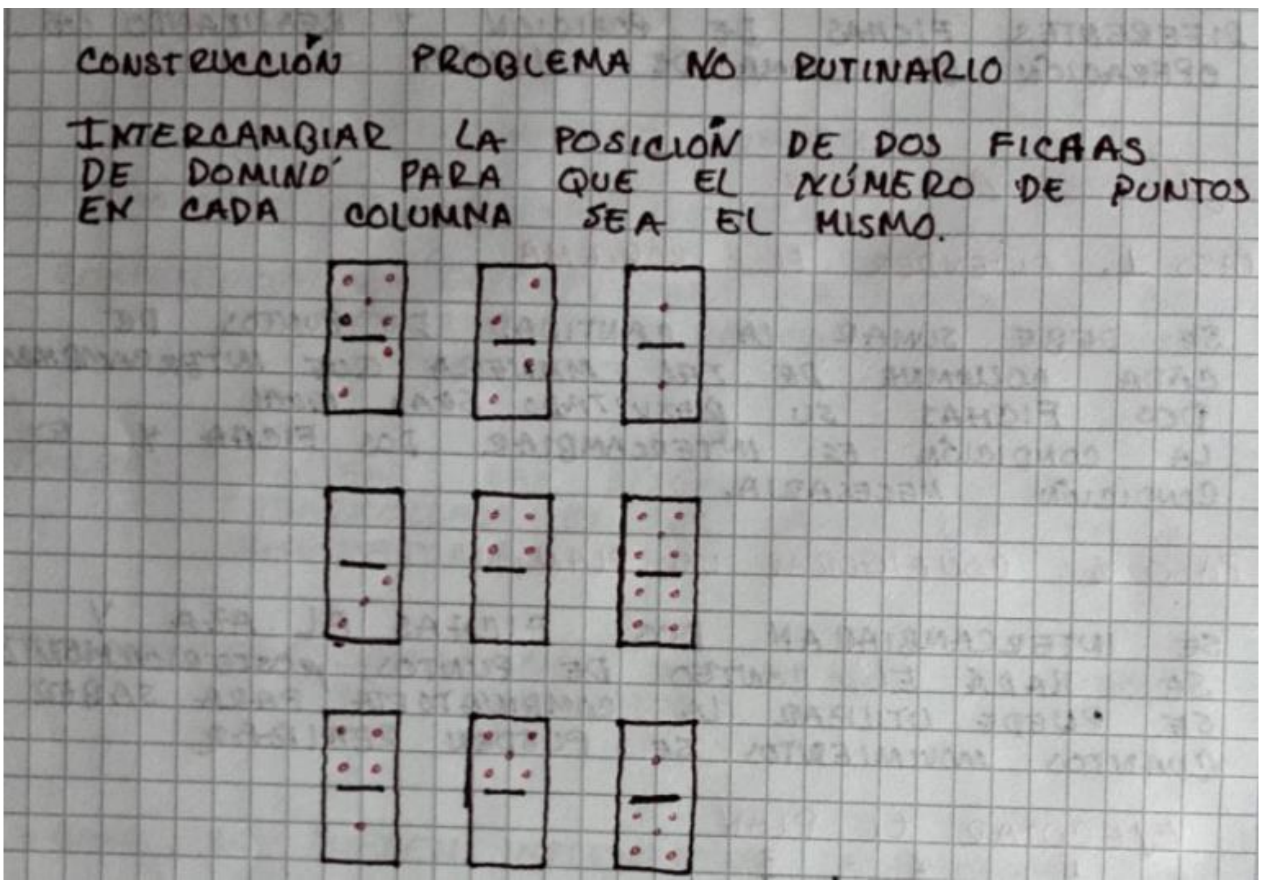
RUBRICA DE EVALUACION

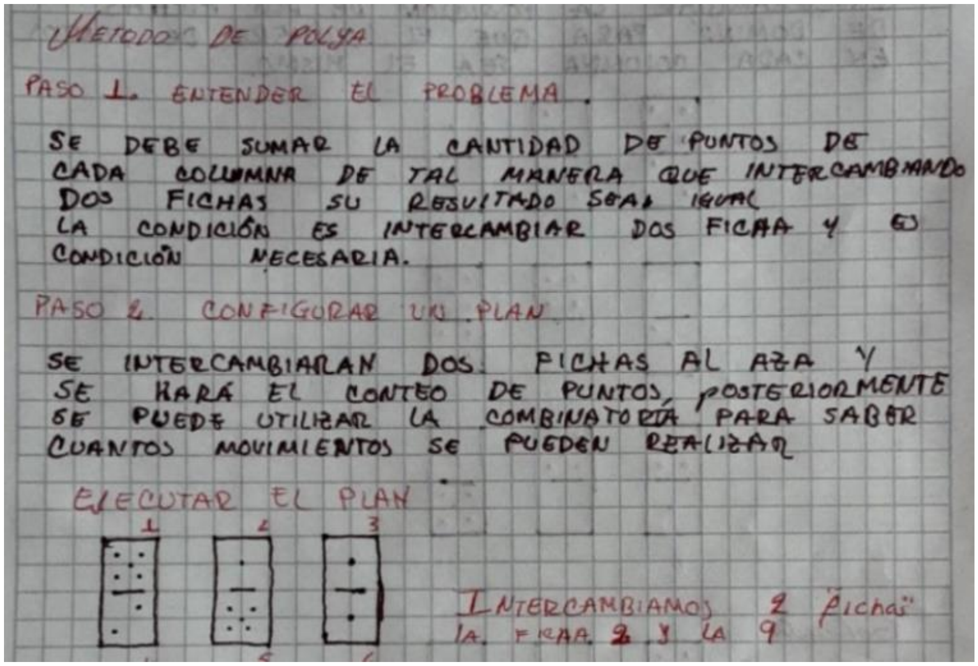
		ESCALA VALORATIVA PARA LAS ACTIVIDADES ASOCIAS EN EL PLANDE CLASE BASADO EN PRN					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**TOTAL**
COSNTRUCCION DE PROBLEMA NO RUTINARIO	**PROBLEMA**	El problema es rutinario	El problema presenta una estructura básica para transformarse en PNR	El problema presenta una estructura elaborada para transformarse en PNR.	El problema tiene estructura de PNR	El problema es una PNR	4,3
	SOLUCION	No tiene solución	La solución es incompleta y no está ordenada.	La solución no está explicada.	La solución tiene esplicacion básica, ordenada y estructurada.	La solución esta bien especificada y asocia explicaciones verbales.	
	DESCRPCION	No hay descripción	La descripción no está completa y no describe los pasos, etapas o porcesso que lo conforman.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma implícita que la conforman, pero no es clara.	a descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman, pero no es clara.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman y es clara.	
ESTRUCTURACION CURRICULAR	**PENSAMIENTOS MATEMATICIS**	No asocia los pensamientos.		Asocia los pensamientos en forma incompleta.		Asocia los pensamientos.	4,8
	EJES TEMATICOS	No asocia los ejes temáticos.		Asocia los ejes temáticos en forma incompleta.		Asocia los ejes temáticos.	
	COMPETENCIA	No hay competencia relacionada.	La competencia no asocia objeto conceptual, finalidad y condición de referencia.	La competencia no asocia 2 de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia no asocia uno de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia esta bien estructurada.	
	TAREA(S)	No asocia la(s) tareas.		Asocia la(s) tarea(s) en forma incompleta.		Asocia la(s) tarea(s)	
	CONTEXTO DEL PROBLEMA	No asocia el contexto del problema		Asocia en contexto del problema en forma incompleta		Asocia el contexto en forma adecuada.	
	PRESABERES	No asocia los presaberes del PNR		Asocia los presaberes en forma incompleta.		Asocia los presaberes en forma correcta.	
	PREGUNTAS ORIENTADORAS	No hay preguntas orientadoras	Las preguntas orientadoras no contibuyen en la solucion del problea, son muy genericas.	La pregunta esencial o la pregunta de contenido contribuyen en la solucion del problema.	Las preguntas son claras y bien elaboradas pero no contribuyen en forma clara y puntual en la solución del problema.	Las preguntas contrubuyen en la solución del problema.	
						TOTAL	4,6

DESCRIPCION: En la construcción del problema el estudiante obtiene una nota de 4.3, donde las ponderaciones bajas se obtienen en los aspectos de la construcción del problema y la solución de este, ya que el problema presenta una estructura acorde a un PNR y la solución es básica, ordenada y estructurada pero no es clara y explícita. En los aspectos asociados a la estructura curricular presenta una ponderación baja en las peguntas orientadoras que contribuyen con la solución del problema; no obstante, la nota para la estructura curricular es sobresaliente y es de 4.8. En términos generales el plan de clase construido por el estudiante tiene una nota de 4.6. (ANEXO 14).

ESTUDIANTE 3

PLAN DE CLASE





METODO DE POLYA

PASO 1. ENTENDER EL PROBLEMA.

SE DEBE SUMAR LA CANTIDAD DE PUNTOS DE CADA COLUMNA DE TAL MANERA QUE INTERCAMBIANDO DOS FICHAS SU RESULTADO SEA IGUAL
LA CONDICIÓN ES INTERCAMBIAR DOS FICHA Y ES CONDICIÓN NECESARIA.

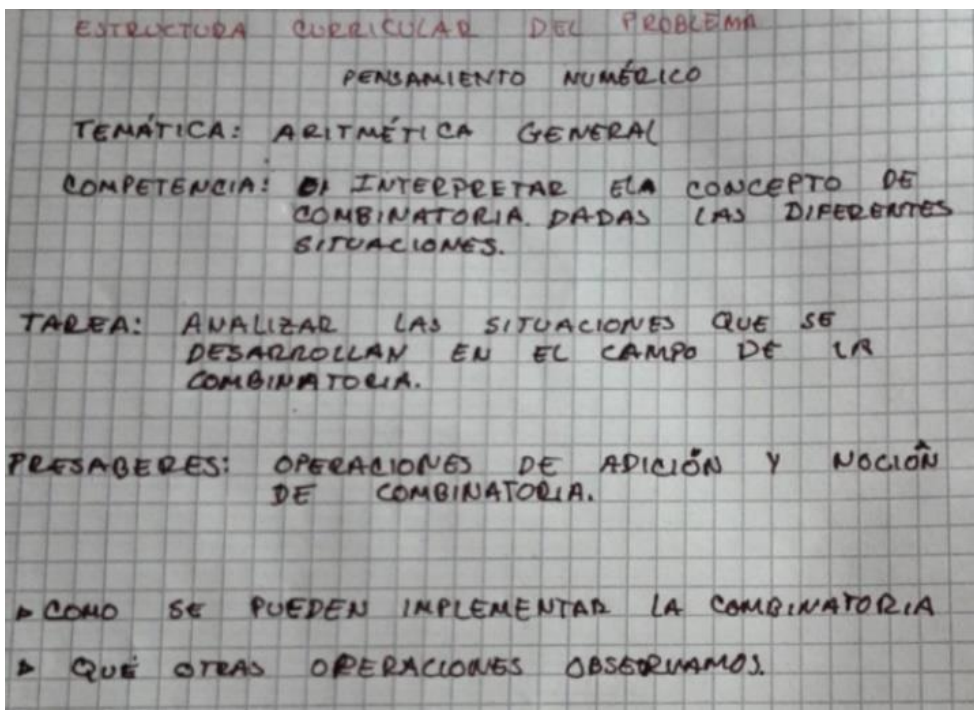
PASO 2. CONFIGURAR UN PLAN

SE INTERCAMBIARAN DOS FICHAS AL AZA Y SE HARÁ EL CONTEO DE PUNTOS, POSTERIORMENTE SE PUEDE UTILIZAR LA COMBINATORIA PARA SABER CUANTOS MOVIMIENTOS SE PUEDEN REALIZAR

EJECUTAR EL PLAN

1 2 3

INTERCAMBIAMOS 2 FICHAS
LA FICHA 2 Y LA 9



ESTRUCTURA CURRICULAR DEL PROBLEMA

PENSAMIENTO NUMÉRICO

TEMÁTICA: ARITMÉTICA GENERAL

COMPETENCIA: ~~EI~~ INTERPRETAR ~~EL~~A CONCEPTO DE COMBINATORIA DADAS LAS DIFERENTES SITUACIONES.

TAREA: ANALIZAR LAS SITUACIONES QUE SE DESARROLLAN EN EL CAMPO DE LA COMBINATORIA.

PRESABERES: OPERACIONES DE ADICIÓN Y NOCIÓN DE COMBINATORIA.

- COMO SE PUEDEN IMPLEMENTAR LA COMBINATORIA
- QUÉ OTRAS OPERACIONES OBSERVAMOS.

Ilustración 9: Plana de clase basado en PNR estudiante 3.

RUBRICA DE EVALUACION

		ESCALA VALORATIVA PARA LAS ACTIVIDADES ASOCIAS EN EL PLANDE CLASE BASADO EN PRN					
		1	2	3	4	5	TOTAL
COSNTRUCCION DE PROBLEMA NO RUTINARIO	**PROBLEMA**	El problema es rutinario	El problema presenta una estructura básica para transformarse en PNR	El problema presenta una estructura elaborada para transformarse en PNR.	El problema tiene estructura de PNR	El problema es una PNR	4,6
	SOLUCION	No tiene solución	La solución es incompleta y no está ordenada.	La solución no está explicada.	La solución tiene esplicacion básica, ordenada y estructurada.	La solución esta bien especificada y asocia explicaciones verbales.	
	DESCRPCION	No hay descripción	La descripción no está completa y no describe los pasos, etapas o porcesso que lo conforman.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma implícita que la conforman, pero no es clara.	a descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman, pero no es clara.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman y es clara.	
ESTRUCTURACION CURRICULAR	**PENSAMIENTOS MATEMATICIS**	No asocia los pensamientos.		Asocia los pensamientos en forma incompleta.		Asocia los pensamientos.	4
	EJES TEMATICOS	No asocia los ejes temáticos.		Asocia los ejes temáticos en forma incompleta.		Asocia los ejes temáticos.	
	COMPETENCIA	No hay competencia relacionada.	La competencia no asocia objeto conceptual, finalidad y condición de referencia.	La competencia no asocia 2 de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia no asocia uno de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia esta bien estructurada.	
	TAREA(S)	No asocia la(s) tareas.		Asocia la(s) tarea(s) en forma incompleta.		Asocia la(s) tarea(s)	
	CONTEXTO DEL PROBLEMA	No asocia el contexto del problema		Asocia en contexto del problema en forma incompleta		Asocia el contexto en forma adecuada.	
	PRESABERES	No asocia los presaberes del PNR		Asocia los presaberes en forma incompleta.		Asocia los presaberes en forma correcta.	
	PREGUNTAS ORIENTADORAS	No hay preguntas orientadoras	Las preguntas orientadoras no contibuyen en la solucion del problea, son muy genericas.	La pregunta esencial o la pregunta de contenido contribuyen en la solucion del problema.	Las preguntas son claras y bien elaboradas pero no contribuyen en forma clara y puntual en la solución del problema.	Las preguntas contrubuyen en la solución del problema.	
						TOTAL	4,3

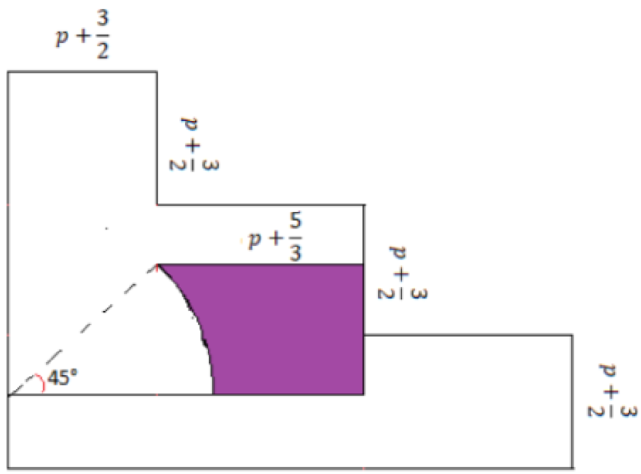
En los aspectos referentes a la construcción del problema el estudiante obtiene una calificación sobresaliente de 4.6, donde se resalta que el problema construido es PNR, ya que asocia un contexto manipulativo y es evidente que el problema tiene diferentes vías de solución. En cuanto a los aspectos que se asocian en la estructuración curricular el estudiante obtiene una valoración de 4.0 ya que no asocia preguntas orientadoras que contribuyan en la solución del mismo. Es de señalar que el plan de clases elaborado tiene una nota de 4.3. (ANEXO 15).

ESTUDIANTE 4

PLAN DE CLASE

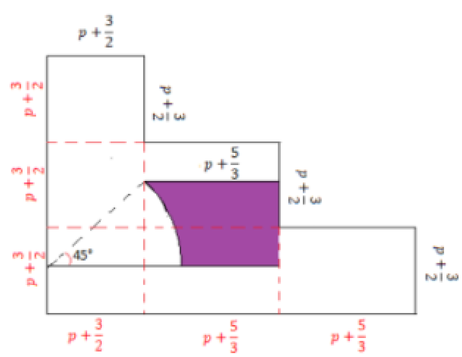
1. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA

Si el perímetro de la figura es de $222{,}6\ m$ y el área total encerrada es de $2067{,}51\overline{407}\ m^2$. Encuentre el área de la región sombreada.



1.1. Solución del problema

Lo primero que debemos hacer es hallar el valor de $\boldsymbol{p}$; para ello novamos a valer del perímetro de la figura, ya que conocemos su valor y sabemos que el perímetro de la figura es la sus de todos sus lados, en este caso tiene12 lados.



2. ESTRUCTURACIÓN CURRICULAR

2.1. Pensamiento(s) matemático(s) involucrado(s) en el problema

Geométrico, Algebraico y Numérico.

2.2. Eje(s) temático(s)
Medida de áreas y perímetro en figuras geométricas
Procedimientos Algebraicos
Manejo de operaciones básicas.

2.3. Competencia a desarrollar
Desarrollar situaciones geométricas que permitan encontrar el área encerrada de figuras geométricas por medio de sistemas algebraicos dentro del conjunto de los números reales.

Ilustración 10: Plana de clase basado en PNR estudiante 4.

Conclusiones capítulo 5.

Descripción estadística de la realización de plan de clase basado en PNR.

Las siguientes tablas describen en forma cuantitativa las ponderaciones y el promedio que obtuvieron los estudiantes en cada uno de los aspectos que conforman la construcción de problema y la estructura curricular que conforman el plan de clase basado en problemas no rutinarios.

a. Aspectos referentes a la construcción de PNR.

Tabla 3. Muestra las ponderaciones obtenidas por estudiantes en los aspectos relacionados a construcción de PNR y el valor promedio de cada uno de estos.

CONSTRUCCION PROBLEMA NO RUTINARIO		
Construcción	**Solución**	**Descripción**
4	5	5
4	4	5
5	4	5
5	5	5
5	4	5
3	4	5
4,3	**4,3**	**5,0**
4,6		

Tabla 3.

Se pude observar que los tres aspectos que conforman la construcción de problemas no rutinarios los estudiantes presentan una ponderación superior a 4.0. Donde tan solo un estudiante, es decir el 16,6% de los estudiantes participantes tiene dificultades al momento de construir un PNR. También se tiene que los estudiantes realizan descripciones muy específicas y completas de la solución el problema bajo una metodología, siguiendo los pasos, etapas o procesos que conforman el método de solución; donde el 83,3% de los estudiantes utilizan los cuatro pasos (entender, configurar, ejecutar y visión retrospectiva) del método de Polya como metodología de solución de PNR. En términos generales y realizando las ponderaciones pertinentes se puede concluir que en los aspectos que determinan la construcción (construcción del problema, solución y descripción bajo una metodología) de problemas no rutinarios los estudiantes obtienen una calificación ponderada de 4,6.

b. Aspectos referentes a la estructura curricular.

Tabla 4. Muestra las ponderaciones obtenidas por estudiantes en los aspectos de relacionados en la estructura curricular y el valor promedio en cada uno de los siete aspectos.

ESTRUCTURA CURRICULAR DEL PROBLEMA NO RUTINARIO						
Pensamiento	**Ejes Tematicos**	**Competencia**	**Tareas**	**Contexto**	**Presaberes**	**Preguntas**
5	5	4	5	3	5	5
5	5	5	5	5	5	4
5	5	4	5	5	3	1
5	5	4	5	5	5	4
5	3	3	5	5	5	4
5	5	1	3	5	5	4
5,0	**4,7**	**3,5**	**4,7**	**4,7**	**4,7**	**3,7**
4,4						

Tabla 4.

Respecto a los aspectos que conforman la estructura curricular del plan de clase, se tiene que la mayor falencia se tiene en la redacción de la competencia (calificación 3.5) que se relaciona al problema, ya que la 66,6% de los estudiantes se le olvida ubicar uno o dos de los siguientes elementos: objeto conceptual, finalidad o condición de referencia. Un estudiante no asocia la competencia relacionada al problema y se tiene que 16,6% de los estudiantes asocian todos los elementos de la competencia relacionada al problema que construye para el plan de clase. La mejor ponderación se obtiene en el pensamiento matemático asociado al problema, donde el 50% de los estudiantes se inclina por relacionar conceptos referentes al pensamiento geométrico para la construcción de problemas no rutinarios. Es importante mencionar que de los siete aspectos que conforma la estructura curricular los estudiantes obtiene una nota ponderada de 4.7 o superior en el 71,4% de estos, lo que fundamenta que respecto a los componentes curriculares los estudiantes tienen un manejo suficiente para poder contextualizar, asociar presaberes, redactar preguntas orientadoras, relacionar tareas para la solución de problemas no rutinarios y sobre todo redactar competencias matemáticas basadas en PNR.

CONCLUSIONES

La propuesta para fortalecer la formación matemática de los estudiantes de Licenciatura de Matemáticas en la cuidad de Tunja en solución de problemas no rutinarios, esta direccionada para que los futuros formadores expongan la utilidad que tiene la matemática no solo dentro del aula de clase sino de ser capaces de captar la información significativa de situaciones cotidianas y de formularla en términos matemáticos. Es decir, anima a utilizar las matemáticas para describir, analizar, interpretar y comprender la realidad. Y específicamente en relación a la resolución de problemas matemáticos no rutinarios los cuales son portadores de tareas de un nivel cognitivo alto y contribuyen a una formación significativa de saberes.

A lo largo del desarrollo de este trabajo se ha podido mostrar, que las premisas que fundamentaron esta investigación fueron lo suficientemente pertinentes y medibles como para verificar el cumplimiento de los objetivos que se propusieron en el diseño de la misma. Es por ello que se considera que:

- ✓ Los problemas matemáticos no rutinarios permiten a los futuros formadores ampliar sus conocimientos sobre los contenidos matemáticos, explorar las fuentes, los contextos y las tareas cognitivas relacionadas al analizar, evaluar y crear, de tal forma que se pueda mejorar las practicas didácticas dentro y fuera del aula de clase.

- ✓ En los diferentes apartes que constituyen los capítulos tres y cuatro de este trabajo de investigación, se puede evidenciar que la experiencia que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas tuvieron con la solución y construcción de problemas no rutinarios, se puede considera como una estrategia metodológica viable para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática mediada por PNR en cualquier nivel de educación bien sea básico, medio o superior.

- ✓ La solución y construcción de problemas no rutinarios y en si la construcción de un plan de clase basada en PNR, permite al estudiante de Licenciatura de Matemáticas relacionar aspectos como presaberes, preguntas orientadoras que contribuyan con la construcción de conocimiento matemático pertinente y útil ya que se asocian contextos matemáticos, reales, realísticos o manipulativos en aras de fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- ✓ La elección de un conjunto de problemas no rutinarios en los pensamientos aritmético, algebraico y geométrico dieron las pautas y brindaron los conceptos teórico - prácticos en la construcción de problemas no rutinarios y la creación de planes de clase basados en PNR. No obstante, contribuyen a que los futuros Licenciados de Matemáticas integren en sus prácticas y sesiones de trabajo, problemas con contextos manipulativos y recreativos que contribuyan al fortalecimiento de la educación matemática.
- ✓ Es evidente que no todos los estudiantes lograron el objetivo primordial del taller de capacitación, el cual era realizar un plan de clase basado en PNR ya que el 16,6% de los estudiantes participantes realizaron la construcción de un plan de clase con un problema de un nivel cognitivo medio. También es evidente que otra de las dificultades que se observaron es que 33,4% de los estudiantes tiene dificultades al momento de redactar una competencia puesto que no logran vincular los tres aspectos fundamentales que conforman esta, objeto conceptual, finalidad y condición de referencia.
- ✓ Con respecto a los avances y alcances de los estudiantes se puedo concluir que los estudiantes saben describir en forma clara, especifica, coherente y explicita los pasos, etapas y procesos que se deben seguir al momento de solucionar un problema no rutinarios. Donde los estudiantes prefieren utilizar principalmente los cuatro pasos de Polya seguido del método de procesos de Schoendfeld o el sistema de procedimientos de Muller.

- ✓ En las diferentes sesiones del taller, se les brindo a los estudiantes conceptos, referentes, métodos, contextos, fuentes y caracterización de las tareas que se deben vincular y desarrollar en el trabajo con PNR en matemáticas; y como se deben generar actividades secuenciadas y estructuradas que contribuyan al desarrollo de competencias que lleven al estudiante de calcular, mediar y clasificar a seleccionar un método, algoritmo, operación o estrategia y poder vincular problemas no rutinarios que lleven al estudiante a un estadio cognitivo de alto nivel en el cual pueda analizar, generalizar, justificar, sintetizar, integrar y resolver no solo problemas matemáticos no rutinarios o reto si no que vea la importancia y el significado que tiene la matemática en la solución de situaciones cotidianas.
- ✓ La recurrencia de los estudiantes a emplear estrategias que relacionen la aritmética o el algebra es evidente, en la solución de los problemas que se asociaron en las primeras actividades del taller de capacitación, esto se debe a que en la mayoría de las asignaturas con énfasis matemático se le centra al estudiante en el rigor algebraico y el formalista; por tal razón se requiere vincular en los espacios académicos actividades que vinculen problemas manipulativos y de contexto real o recreativo en los cuales normalmente se vinculan estrategias donde el estudiante debe realizar construcciones auxiliares, transformaciones entre otras adaptaciones que enlazan heurísticas y procesos metacognitivos significativos en el procesos de enseñanza a aprendizaje.
- ✓ En la actualidad un docente de matemáticas debe vincular contenidos para enseñar con pedagogías y estrategias didácticas o metodológicas que le allana el camino por la senda más efectiva y optima, que le contribuya a la presentación de material y contenidos de en forma clara y significativa; debe ser capaz de construir situaciones en las cuales se estimule la participación, tomando las ideas de sus estudiantes para redirigirlos hacia la meta cognitiva. En la realización

del taller se evidencia que una de una forma de lograr esta finalidad es mediante la aplicación de planes de clase mediados por PNR, los cuales tienen una meta clara (competencia), redirigen a los estudiantes mediante preguntas orientadoras y tiene una finalidad definida el desarrollar en el estudiante un concepto significativo de la matemática para la vida y no solo para el aula de clase.

- ✓ Por último es importante señalar que la participación de los estudiantes de práctica docente del programa de Licenciatura de Matemáticas de la UPTC encontraran herramientas y estrategias que contribuyan a su formación como docentes de matemáticas, ya que al haber participado de las diferentes socializaciones, haber realizado construcciones de problemas no rutinarios, el diseñar, construir y estructurado un plan de clase mediado por PNR, los promueve como docentes que tengan una atribución *principalmente interna* en su quehacer como futuros formadores; puesto que serán conscientes de que las matemáticas escolares, deben involucrar a los estudiantes no sólo en la identificación de las conexiones entre los conceptos matemáticos, sino también de las interconexiones del conocimiento matemático y las actividades cotidianas de los alumnos. Para reconocer que la información no solo se encuentra en los libros sino ellos pueden construir y ser generadores de situaciones problémicas que sean significativas al estudiante, generando estrategias que modifiquen y mejoren los currículos escolares de todas las instituciones de la región.

RECOMENDACIONES

A continuación, se presentan algunas sugerencias o alternativas para la realización de talleres de capacitación o situaciones específicas que relaciones la solución de problemas no rutinarios como eje fundamental.

1. Fortalecer la formación de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en construcción de situaciones problémicas no rutinarias en espacios académicos dentro de la malla curricular del programa.
2. Programar la capacitación de futuros formadores de matemáticas y docentes en ejercicio, como un proceso formal y certificado por la Secretaria de Educación Municipal y/o Departamental, con la finalidad de tener una participación activa y constante en este tipo de actividades curriculares externas.
3. Los tiempos programados para la realización de las actividades no pueden ser limitados por un número de sesiones presenciales o sincrónicas que no permitan una flexibilidad de tiempos en la realización y entrega de las diferentes actividades, puesto que varias de estas y sobre todo la construcción de PNR y planes de clase basado en PNR necesita la interacción del docente y los estudiantes para poder lograr los objetivos establecidos en el taller de capacitación; por tal motivo es fundamental tener un espacio para sesiones de acompañamiento o tutorías.
4. La revisión de los planes de clase y en si de la construcción del problema no rutinario se debe centrar principalmente en hacerle entender a los estudiantes que: en la construcción de problemas no rutinarios no se puede pensar en vincular un concepto a un contexto; por otro lado tampoco se puede buscar resaltar la importancia del conocimiento del contenido para la enseñanza ya que esto es lo que se debe evitar cuando se trabaja con PNR.

5. El analizar los encuentros sincrónicos, los cuestionarios y al tener charlas directas con algunos estudiantes, revela que la mayoría abogan por un enfoque de la enseñanza de las matemáticas a través y sobre la resolución de problemas, no considerando la enseñanza de las matemáticas exclusivamente para resolver problemas; por lo que se hace necesario seguir investigando en esta línea e indagar sobre prácticas eficientes que contribuyan a estructurar una didáctica de las matemáticas fundamentada en la resolución de problemas.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENTES

1. Sala de prensa ministerio de ecuación nacional, octubre 10,2018. Citio oficial mineducación. La educación es para todos.:https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-377460.html?_noredirect=1.

2. Plan de Mejoramiento de Calidad del MEN, documento, junio, 2019.

3. Plan estratégico institucional: Plan Sectorial 2018-2022, MEN, documento pdf, version1, enero de 2019.

4. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2012). Challenges in basic mathematics education [Desafíos para la educación de las matemáticas básicas]. París, Francia: UNESCO. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/ images/0019/001917/191776e.pdf.

5. Marco de referencia para la evaluación ICFES. Módulo de razonamiento cuantitativo 2019.

6. Acosta, D. A. y Vasco, C. E. (2003). Habilidades, competencias y experticias: más allá del saber qué y el saber cómo. Bogotá, D. C.: Unitec.

7. Torrado, M. C. (2000). Educar para el desarrollo de las competencias: una propuesta para la educación colombiana. En D. Bogoya et al. (Eds.), Competencias y proyecto pedagógico (pp. 31-54). Bogotá, D. C.: Universidad Nacional de Colombia.

8. Tomado del informe nacional resultados nacionales 2012-2017 ICFES, 2018.

9. Plan estratégico 2019 – 2022. Documento versión 1-2.

10. Informe resultados prueba saber, ICFES 2018.

11. Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 29,5, pp 595-602.

12.Schonfeld, A. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education. Lawrence Erlbaum Associated.

13. Steiner, H.G. (1987). Theory of Mathematics Education: an introduction. For the learning og mathematics, 5(2), pp.11-15.

14. ICME. III Congreso Internacional de Educación Matemática 1980.

15. Polya, G. (1962). Mathematical Discovery (vol 2). John Wiley Sons, New York.

16. Krulik. S y J. Rudnik (1980). Problem Solving, a handbook for tearchers. Allyn & Bacon Inc.

17. POLYA, G. How solve it. A New Aspect of Mathematical Method. 2. Ed. New Jersey: Princeton University Press, 1973. 272 p.

18. MÜLLER, H. El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la enseñanza general, politécnica y laboral. 1978. 80f. Disertación (Metodología de la Enseñanza de la Matemática) – Instituto Superior Pedagógico "Frank País García", Santiago de Cuba, 1978.

19. Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, New York.

20. Arguello. C., Piñeiro. J., Diaz, D. Uso de representaciones para resolver problemas rutinarios y no rutinarios por niños de 4º de primaria. Universidda de Granada – Pontificia Universidad Católica de Valparaiso. 2015

21.Introduction. In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science & Business Media, LLC 2009, p. 5

22. ICMI: Comisión Internacional de Instrucción Matemática, organiza estudios para investigar, a profundidad y en detalle, campos particulares de interés en educación matemática.

23. Comité Internacional de Programa. ICMI Study 16, *Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula*. http://www.wfnmc.org/icmis16ddspanish.html.

24. En ingles en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 205

25. En ingles en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 227.

26. WFNMC: World Federation of National Mathematics Competitions.

27. Falk de Losada, M. (2010) Notes on an Agenda for Research and Action for WFNMC. Mathematics Competitions, vol 23, no. 2. P. 13.

28. En inglés en el original. Chapter 6: Teacher Development and Mathematical Challenge, In E.J. Barbeau, P.J. Taylor (eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12, DOI 10.1007/978-0-387-09603-2_7, _ Springer Science Business Media, LLC 2009, p. 227.

29. QUANTUM, véase Adler & Davis (2004). Este trabajo también elabora una primera fase en la investigación, y una exploración de la noción de 'desempaquetado' como descriptor de las matemáticas para la enseñanza.

30. MORENO, Luis y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. Documento septiembre, 2010.

31. CHAMORRO, Carmen. El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas. España 2001.

32. CARRILLO, J. (1995-97). "La resolución de problemas en matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación?". En: *Investigación en la Escuela.* Sevilla (España). No. 25. Pp. 79-86.

33. BLANCO, LJ. Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de enseñanza general básica y estudiantes para profesores. Manuales UNEX, nº 11, Badajoz: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura, 1991.

34. DÍAZ, MV; POBLETE, A. Categorizando tipos de problemas en algebra. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2001, nº 27, p. 93-103.

35. FAN, L; ZHU, Y. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. International Journal of Science and Mathematics Education, 2006, nº 4, p. 609 - 626.

36. Kondratieva, M. (2007) Understanding mathematics through resolution of paradoxes. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 6, pp. 127–138

37. Maher, C.A. (2005) How students structure their investigations and learn mathematics: Insights from a long-term study. The Journal of Mathematical Behavior 24, 1, pp. 1–14

38. Marshall, S.P. (1996) Schemas in problem solving. Cambridge University Press, New York

39. Mayer, R.E. (1992) Thinking, problem solving, cognition. 2nd edn. Freeman, New York

40.Mayer, R.E., Wittrock, M.C. (1996) Problem-solving transfer. In: Berlin, D.C., Calfee, R.C. (eds.) Handbook of educational psychology, pp. 47–62. Macmillan, New York .

41. BLANCO, LJ; CONTRERAS, LC. Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. Revista Unión, 2012, 30, pp. 101-123. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/30/Archivo_11_de_volumen_30.pdf.

42. Blanco. L, Cárdenas. J, Caballero A. La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria. Colección manual UEX. 2015

43.Fortuny, J. Enseñar Matemáticas. Serie didáctica de las matemáticas. Barcelona: Editorial Graó. España 2002.

44. Sepúlveda, A. La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México, 2009.

45. CODINA, A Y RIVERA, A. (2000) Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. México

46. Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p.356-8.

47. Minerva, F. (2006). El proceso de investigación científica. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

48. Salazar, L. (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática. Revista Paradigma, 35(1), 55-77. Recuperado de : http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v35n1/art03.pdf.

49. Santos, L. (2015) La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (15), 333-346.

50. Ayllón, M., Ballesta-Claver, J., & Gomez, I. (2016) . Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. Propósitos Y Representaciones, 4(1), 169–193. Recuperado de: https://doi.org/http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016. v4n1.89.

51.Bonotto, C. (2013) . Artifacts as source for problem-posing activities. Educational Studies in Mathematics, 83 (1), 37-55. Recuperado de: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

52.Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2), 33-115.

ANEXOS

ANEXO 1. Encuesta a estudiantes.

ENCUESTA INICIAL ESTUDIANTES

Objetivo de la actividad: Cualificar el conocimiento de los estudiantes participantes, en cuanto a la resolución de problemas como estrategia didáctica en la educación matemática y como está, contribuye al proceso de formación de los futuros docentes de matemáticas.

Descripción de la actividad: Se aplica una encuesta inicial en donde el estudiante contesta una serie preguntas fundamentales sobre la resolución de problemas matemáticos en un tiempo no mayor a 15 minutos.

ENCUESTA

PROYECTO: FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE FORMACION DE LOS FUTUROS DOCENTES DE MATEMATICAS

Respetado estudiante, le solicitamos contestar con la mayor veracidad y entereza la presente encuesta, ya que su opinión es valiosa para lograr culminar con éxito la investigación.

Al contestar, tenga en cuenta las siguientes equivalencias, 1 = Definitivamente no, 2 = Probablemente no, 3 =Indeciso (afirmación), 4 = Probablemente si, 5 = Definitivamente si. Marque una **X** en la casilla que considere conveniente.

ASPECTOS	**ESCALA VALORATIVA**				
	1	2	3	4	5
Los siguientes aspectos están relacionados a la resolución de problemas matemáticos.					
1.1 En el proceso de formación como futuro Licenciado en Matemáticas, en las asignaturas de pedagogía y didáctica; que tanto ha trabajado sobre solución de problemas en matemáticas.					
1.2 En la(s) práctica(s) didáctica(s) que usted ha realizado, en su proceso de formación; que tanto emplea el uso de problemas matemáticos como estrategia didáctica en la construcción o explicación de conceptos.					
1.3 Considera que la resolución de problemas es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático.					

1.4 Cuando le plantean un problema o reto matemático lo considera como un desafío.					
1.5 Considera que una persona que no tiene conocimientos suficientes sobre el área (algebra, geometría, aritmética, entre otras) puede solucionar un problema de matemáticas.					
Las siguientes son algunas características que se consideran para el trabajo con problemas matemáticos.					
2.1 *Solo tiene una respuesta correcta.*					
2.2 *Solo existe un método de solución.*					
2.3 Si alguien sabe resolverlo, solo debe aplicar los algoritmos suficientes para dar su solución.					
2.4 Si alguien sabe sobre el tema y no puede resolverlo en un corto tiempo, entonces es porque el problema no tiene solución.					
2.5 Es una situación en la cual el estudiante debe tener conocimientos matemáticos previos asociados a la temática del problema, de tal forma que se sienta motivado a solucionarlo.					
2.6 Se asocian únicamente procesos algebraicos que determinan la solución.					
2.7 Si existe manejo de los conceptos matemáticos no es necesario realizar verificaciones de procesos en la solución.					
Los siguientes son aspectos que se relacionan a la formación como Licenciado de Matemáticas.					
3.1 Con que frecuencias en las asignaturas que ha cursado dentro del plan de estudios de Licenciatura en Matemáticas, el docente contextualiza los conceptos teóricos de la matemática, con la práctica docente.					
3.2 Se considera que para ser docente de matemáticas es suficiente con tener una muy buena aptitud matemática.					
3.3 En asignaturas teóricas como cálculo, estadística, geometría, entre otras, que tanto el docente asocia actividades que relacionen la construcción de didácticas o metodologías para la enseñanza de las mismas.					

3.4 En el desarrollo de las clases, con qué frecuencia el docente asocia diferentes sistemas de representación para explicar un concepto matemático en particular.					
3.5 El contenido temático de los textos guía que normalmente se emplean en las diferentes asignaturas de licenciatura de matemáticas se trabajan al pie de la letra.					

En las siguientes preguntas seleccione solamente uno de los ítems que se asocian a cada una de estas, mediante una X sobre la enumeración alfabética.

1. Cuál de los siguientes enunciados describe mejor lo que es un problema matemático.
   a. Es una expresión algebraica que describe una situación determinada que requiere de una solución mediante procesos algebraicos en forma sistémica.
   b. Consiste en buscar una determinada entidad matemática de entre un conjunto de entidades del mismo tipo que además satisfaga las llamadas *condiciones del problema*.
   c. Es una situación en donde se relacionan datos, variables e incógnitas con el fin de ser resuelta; para ello el estudiante no obtiene la solución de inmediato debe realizarse algún tipo de procedimiento para encontrarla.
   d. Es un procedimiento sistémico y único que determina en forma coherente la solución de una situación problémica, la cual requiere del manejo de lenguaje matemático por la persona que lo quiere solucionar.

2. Para usted cuales de los siguientes procedimientos se ajusta mejor a la solución de un problema.
   a. Interpretar, realizar un plan en forma algebraica, aplicar los procesos algebraicos y dar la respuesta.
   b. Comprender el problema, elaborar un plan, aplicar el plan, resolver y verificar.
   c. Analizar el problema, plantear una ruta de solución en forma sistémica, aplicar la ruta y dar la respuesta.
   d. Analizar, plantear la(s) ecuación(es) asociadas al problema, realizar los procesos algebraicos necesarios y dar la respuesta.

3. Cuál de los siguientes investigadores en educación matemática, se considera como el principal aportante en el conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas matemáticos.
   a. George Polya
   b. Miguel de Guzmán
   c. Bruno D'Amore
   d. Lev Vigotsky
   e. *Morris Kline*

ANEXO 2. Solución taller de capacitación. Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría, problema 1.

1 El paralelogramo ACPF tiene un área total de 48 cm^2, a cuánto equivale el área de la región sombreada

Teniendo en cuenta la cuadrícula, se puede ver que el paralelogramo ACEF es una transformación del cuadrado BEDC, y así mismo partiendo de este concepto, a la región sombreada le podemos hacer una transformación cuadrando un rectángulo, además también podemos hallar el área haciendo un conteo de la cuadrícula

Por lo tanto el área de la región sombreada es de 12 cm^2

$A_{▱} = 48\ cm^2$

$A_{▱} = b.h = 8\ cm \times 6\ cm$

$A_{▭} = b \times h$

$A_{▭} = 6cm \times 2cm$

$A_{▭} = 12\ cm^2$

$A_S = A_{▱} - A_{▭}$

$A_S = 48cm^2 - 12cm^2$

$A_S = 36\ cm^2$

1 Punto

$ACEF = 48 cm^2$

Cuadrado $BCDE = 36 cm^2$

La parte sombreada se divide en dos paralelogramos iguales, el area de alguno seria

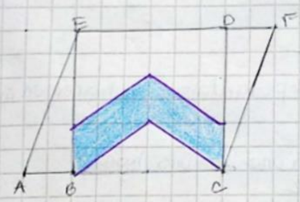
$A = 6 cm^2$, ent el area con sombro es de $12 cm^2$.

$A_{\square} = 48 cm^2$

$A_{\square} = 36 cm^2 = (6 cm \times 6 cm)$

$A_T = 48 cm^2 - 36 cm^2 = 12 cm^2$

1. El paralelogramo ACEF tiene un área total de 48 cm^2, a cuanto equivale el área de la región sombreada



Como las medidas son proporcionales tenemos cuadrado inscrito dentro del paralelogramo de 6×6 cm^2 y la figura sombreada se encuentra dentro de un rectángulo de 6×4 cm^2 y dentro de este se pueden meter 8 triangulos inscritos.

el área del rectangulo es $A = B \times H$

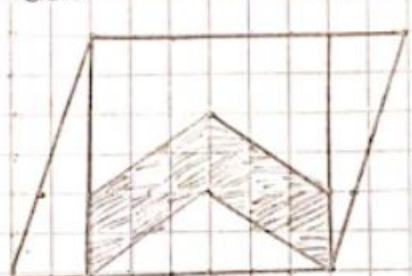
$A = 24 cm^2$

como el área sombreada equivale a tener la mitad pues corresponde a 4 triangulos inscritos. entonces se puede decir que tomamos el área de $A = 24 cm^2$ y lo dividimos en 2 portanto

$\frac{24 cm^2}{2} = \boxed{12 cm^2}$

① Como el area del paralelogramo ACEF es de $48cm^2$, entonces el area del cuadrado BCDE es de $36cm^2$.
La franja sombreada la puedo dividir en dos paralelogramos iguales si hallo el area de uno de ellos sería $A_1 = 6cm^2$ por tanto el area sombreada es de $12cm^2$.

1. El paralelogramo ACEF tiene un área total de $48cm^2$, ¿a cuánto equivale el área de la región sombreada

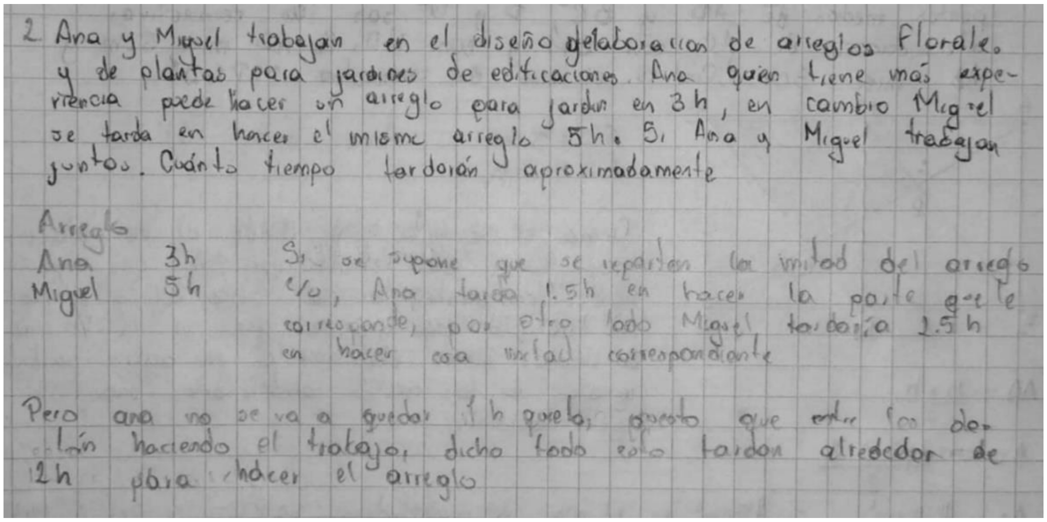


$A_T = 48cm^2$

$A_s = 12cm^2$

$6 + 2 + 2 + 2$

Solución taller de capacitación. Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría, problema 2.

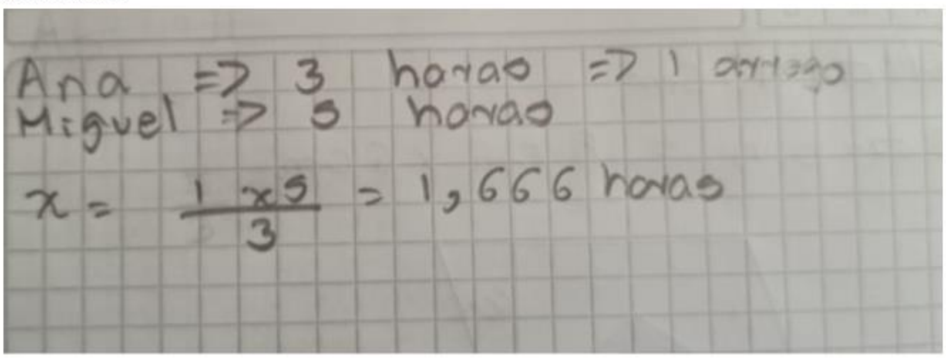

2 Ana y Miguel trabajan en el diseño y elaboración de arreglos florales y de plantas para jardines de edificaciones. Ana quien tiene más experiencia puede hacer un arreglo para jardín en 3 h, en cambio Miguel se tarda en hacer el mismo arreglo 5 h. Si Ana y Miguel trabajan juntos. Cuánto tiempo tardarán aproximadamente

Arreglo
Ana 3h
Miguel 5h

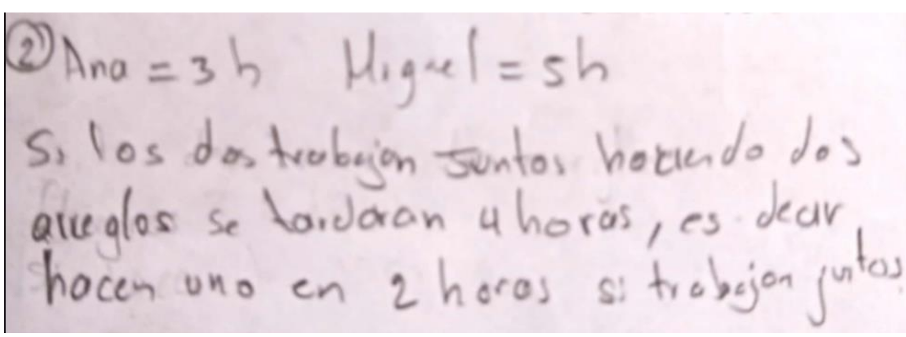
Si se supone que se reparten la mitad del arreglo c/u, Ana tarda 1.5 h en hacer la parte que le corresponde, por otro lado Miguel tardaría 2.5 h en hacer esa mitad correspondiente

Pero ana no se va a quedar 1 h quieta, puesto que entre los dos irán haciendo el trabajo, dicho todo esto tardan alrededor de 2h para hacer el arreglo

RTA: Si Ana hace un arreglo para jardín en 3 horas y Miguel se tarda en hacer el mismo arreglo 5 horas, al trabajar los dos gastarían aproximadamente 1 hora con 7 minutos aproximadamente


Ana => 3 horas => 1 arreglo
Miguel => 5 horas

$x = \frac{1 \times 5}{3} = 1{,}666$ horas


(2) Ana = 3 h Miguel = 5 h
Si los dos trabajan juntos haciendo dos arreglos se tardarán 4 horas, es decir hacen uno en 2 horas si trabajan juntos

2. Ana y Miguel trabajan en el diseño y elaboración de arreglos florares y de plantas para jardines- de edificaciones, Ana quien tiene mas experiencia puede hacer un arreglo para jardin en 3h. en cambio miguel se tarda en hacer el florero 5h. Si Ana y Miguel trabajan juntos ¿ Cuánto tiempo tardaran aproximadamente.

Como se va a trabajar en parejas consideramos que cada uno gasta la mitad del tiempo. A= 1.5h y Miguel = 2.5h. pero como ana quedaria 30min sin hacer nada ayudaria a Miguel los cuales realizarian en 2h el arreglo

(2) Ana = 3horas
Miguel = 5 horas } mismo arreglo

Si Ana y miguel trabajan juntos. Cuanto tiempo tardaran aproximadamente?

La diferencia que hay es de 2 horas sí

Ana dura las mismas 3 horas y le colabora con una hora a Miguel tardarian 4 horas aproximadamente.

ó $3+5 = 8/2 = 4$ (2 # de personas)

Ana hace un arreglo en 3 horas.
Miguel tarda 5 horas. en un arreglo.

como se busca responder ¿Cuánto tiempo tardarán en hacer un arreglo los dos?

- Se debe buscar ¿Cuánto trabaja cada uno en una hora?

Propongo una regla de tres simple

horas	cantidad de arreglos.
3	1
1	x

$\boxed{x = \frac{1}{3}}$ por tanto Ana en una hora hace 1/3 del arreglo

• Se hace el mismo procedimiento para Miguel.

horas	cantidad de arreglos
5	1
1	x

$\boxed{x = \frac{1}{5}}$ Por tanto Miguel en una hora hace 1/5 del arreglo.

Ahora tomamos estas dos expresiones y las sumamos (Se expresan como fracciones homogeneas)

$\frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$ entre los dos tienen 8/15 del arreglo en dos horas. por tanto por regla de tres.

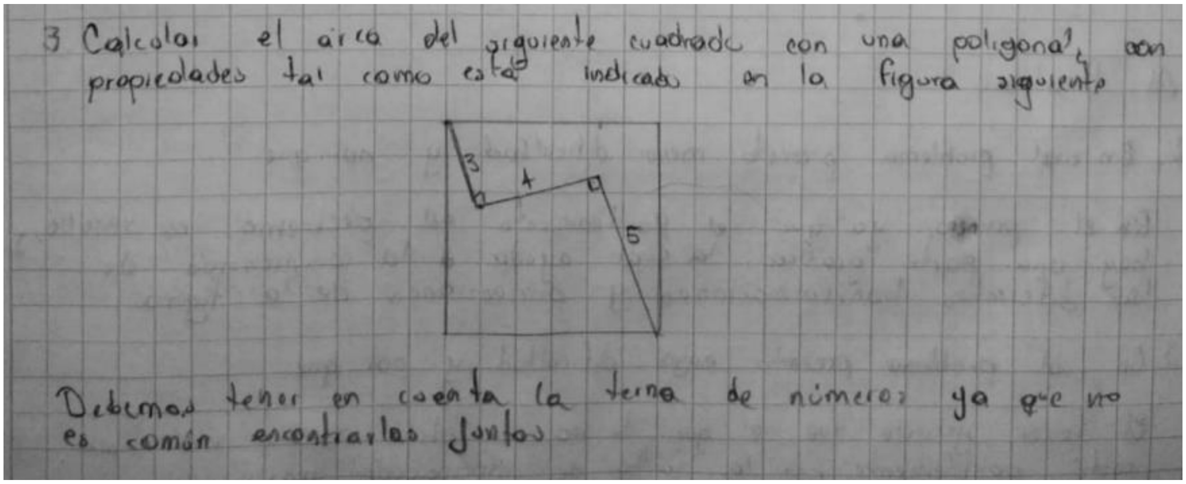
tiempo	arreglo
1	8/15
x	1

¿Cuánto tiempo tardan en hacer un arreglo si entre los dos en 1 horas hacen 8/15?

$x = \frac{15}{8}(60) = \frac{900}{8}$

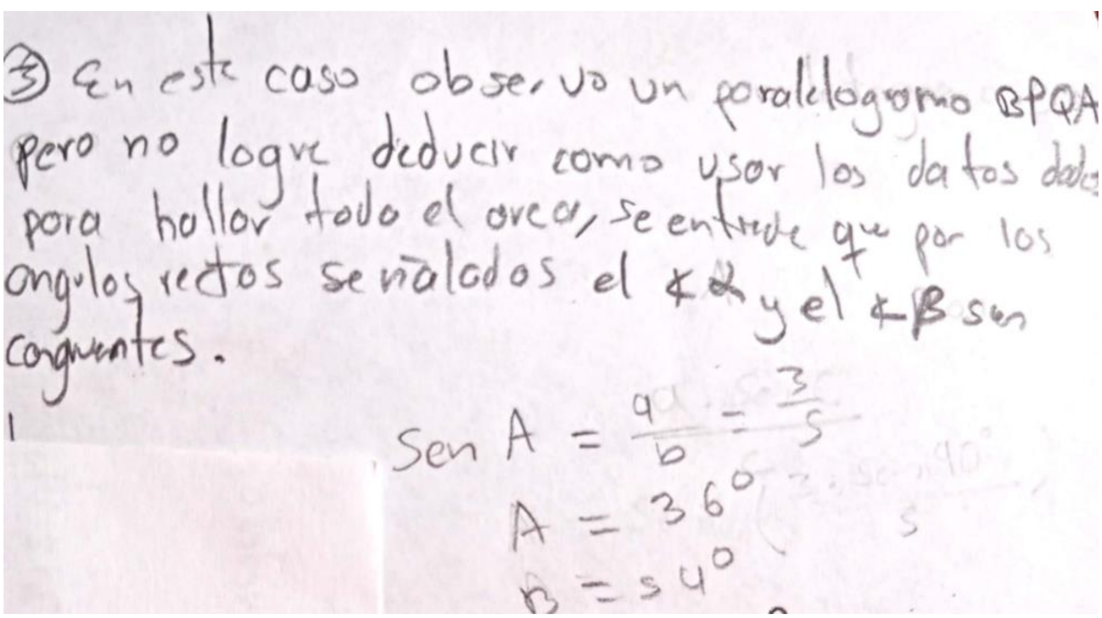
900 |8
10 112,5 → 1 hora, 52 minutos, 30 segundos tiempo aproximado.
20
4

Solución taller de capacitación. Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría, problema 3.



3 Calcular el área del siguiente cuadrado con una poligonal, con propiedades tal como está indicado en la figura siguiente

Debemos tener en cuenta la terna de números ya que no es común encontrarlos juntos

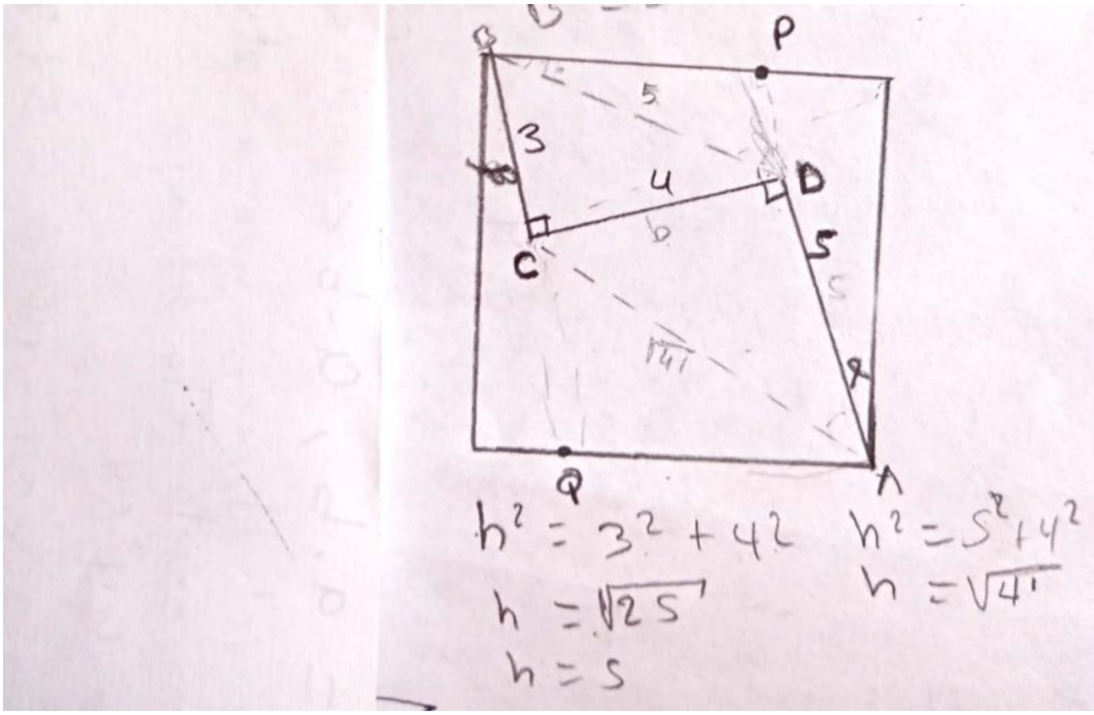


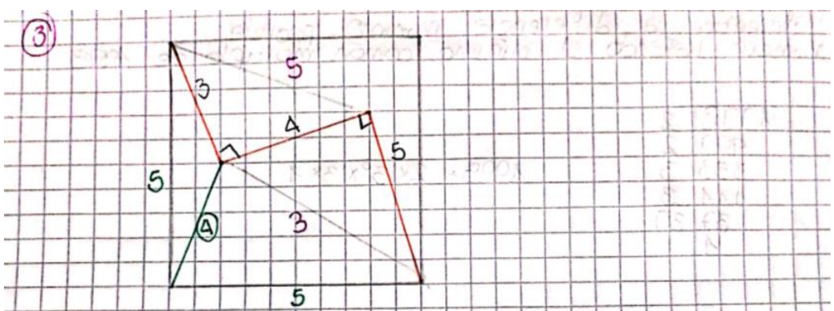
③ En este caso observo un paralelogramo BPQA pero no logre deducir como usar los datos dados para hallar todo el area, se entiende que por los angulos rectos señalados el ∡α y el ∡β son congruentes.

$$\text{Sen } A = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

$$A = 36^\circ$$

$$B = 54^\circ$$





Como tenemos una poligonal dentro del cuadrado entonces por medio de la terna pitagórica construimos dos triángulos rectángulos y hallamos el área

$$\text{Área} = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$A_{\Delta_1} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\,cm^2$$

$$A_{\Delta_2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10\,cm^2$$

Con ayuda de las ternas pitagóricas tenemos que.

$$\text{Área} \square = l \times l$$

Solución taller de capacitación. Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría, problema 4.

4. Si se escribe 1998 como producto de dos números enteros positivos, tales que la diferencia entre ellos sea la menor posible entonces la diferencial es

a) 8 b) 15 $\boxed{\text{c) 17}}$ d) 47 e) 93

1998	2
999	3
333	3
111	3
37	37

$2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 37 = 1998$

6 18 54

$54 \cdot 37 = 1998 \wedge 54 - 37 = 17$ c) 17

4. Si se escribe 1998 como producto de dos números enteros positivos, tales que la diferencia entre ellos sea la menor posible, entonces la diferencial es:

a) 8 **b) 15** **c) 17** **d) 47** **e) 93**

RTA:

Si expresamos a 1998 en sus factores primos tenemos que

1998	2
999	3
333	3
111	3
37	37

37 Nº primo, solo divisible entre el 1 y el mismo

$\Rightarrow 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 1$

$1998 \times 1 \Rightarrow 1998 - 1 = 1997$ "Diferencia máxima"

$999 \times 2 \Rightarrow 999 - 2 = 997$

$111 \times 18 \Rightarrow 111 - 18 = 93$

$54 \times 37 \Rightarrow 54 - 37 = 17$ "Diferencia Mínima"

4. 1998 / 1 → Dividimos

1998 / 2

999 / 3

333 / 3

111 / 3

37 / 37 → Número primo solo se puede dividir en simismo

Entonces

1998 = 2 . 3 . 3 . 3 . 37 . 1

2 . 6 . 18 . 54 . 1998

Ahora multiplicamos y restamos

1998 . 1 ⇒ 1998 − 1 = 1997 Resta maxima

999 . 2 ⇒ 999 − 2 = 997

333 . 6 ⇒ 333 − 6 = 327

111 . 18 ⇒ 111 − 18 = 93

54 . 37 ⇒ 54 − 37 = 17 Resta minima

$\boxed{Rta = C = 17}$

(4) Hallaremos la diferencia minima posible
Primero hallando el minimo común multiplo de 1998

1998	2
999	2
333	3
111	3
37	37
1	

$1998 = 2 \times 3^3 \times 3 \times 1$

Ahora hallaremos la diferencia menor posible

1998 × 1 = 1998 ⟶ 1998 − 1 = 1997

999 × 2 = 1998 ⟶ 999 − 2 = 997

333 × 6 = 1998 ⟶ 333 − 6 = 327

111 × 18 = 1998 ⟶ 111 − 18 = 93

54 × 37 = 1998 ⟶ 54 − 37 = 17

Así vemos que 17 es la diferencia minima

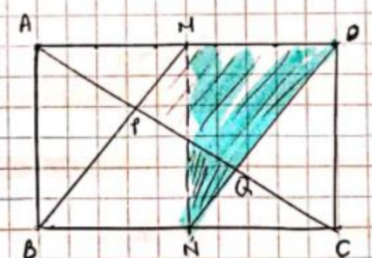
Solución taller de capacitación. Problemas no rutinarios en aritmética, algebra y geometría, problema 5.

5. M y N ⇒ Puntos Medios de AD y BC.

P y Q ⇒ son intersecciones de AC con BM. y con MD.,

AD = 5cm. | – Area del cuadrilatero MPQD.

AB = 3 cm.



Area Total = $15\ cm^2$

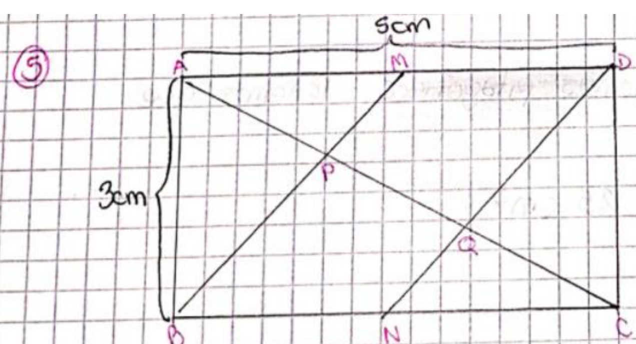
MD = 2.5 cm

MN = 3 cm

$\frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = A_t$

$\frac{2.5\ cm \times 3\ cm}{2} = \frac{7.5\ cm^2}{2}$

$A_t = 3.75\ cm^2$



Vemos que si juntamos los triángulos AMB y NDC, estos forman un rectángulo de 2.5 cm x 3cm y que el área MPQD es la mitad del área restante de MBND para el rectángulo total, así:

$A_{ABCD} = 5 \times 3 = 15 cm^2$, $A_{MBND} = 2,5 \times 3 = 7,5\ cm^2$

$A_{MPQD} = (15 - 7,5)/2 = 3.75\ cm^2$

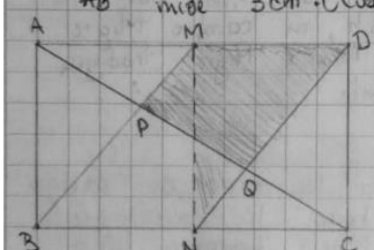
(5) Como M y N son puntos medios
Los triangulos ABM y DCN son congruentes
hallamos el area de uno de ellos

$A_{ABM} = \frac{3(2.5)}{2} = \frac{15}{4} = 3,75\,cm^2$

Ahora MDQP es la mitad el paralelogramo
BMDN.

El area de BMDN es $(2.5)3 = \frac{15}{2} = 7.5$
Como MDQP es la mitad entonces
el area de este es 3,75.

5 En el rectángulo de la siguiente figura, M y N son los puntos medios de AD y BC, P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Si AD mide 5cm y AB mide 3cm. ¿Cual es el area del cuadrilatero MPQD?



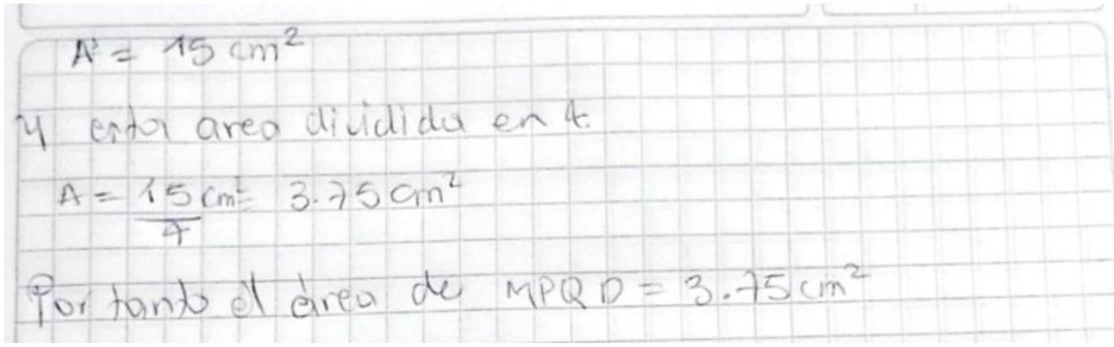
$\overline{AD} = 5\,cm$ Area $= b \cdot h = 15\,cm^2$
$\overline{AB} = 3\,cm$

Como el segmento MN divide al cuadrilatero nos hace dar cuenta que hay dos triangulos congruentes, lo cual nos ayudo a ver un triangulo mas grande que, si lo tenemos en cuenta, divide exactamente en cuatro partes iguales de las cuales identificamos una perfectamente

$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$

$A_\Delta = \frac{2.5 \times 3}{2}$

$A_\Delta = \frac{7.5\,cm^2}{2} = 3.75\,cm^2$ es el area del cuadrilatero MPQD, y del Δ MND


$A = 15\ cm^2$

y esta area dividida en 4

$A = \frac{15\ cm^2}{4} = 3.75\ cm^2$

Por tanto el área de $MPQD = 3.75\ cm^2$

5. En el rectángulo de la siguiente figura, M y N son los puntos medios de AD y BC. P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Si AD mide 5 cm y AB mide 3 cm. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MPQD?

RTA: Observemos que, si juntamos los triángulos ABM y DNC, éstos formarán un rectángulo de 2.5×3, y que el área de MPQD es la mitad del área restante MBND para el rectángulo total, esto es: $5 \times 3 - (2.5 \times 3/2) = 3.75$.

ANEXO 3. Ejercicios y problemas rutinarios para la construcción de situaciones no rutinarias.

Situación problémica 1. Pensamiento aritmético.

Calcular

a) $5 \bullet 20 \bullet 1{,}50 + 10 \bullet 20 \bullet 1$

b) i) $\dfrac{70+175}{300}$

ii) ¿qué % es 280 de 350?

Situación problémica 2. Pensamiento algebraico.

- Resolver la siguiente ecuación:

a. $\dfrac{108000}{90} = \dfrac{3600}{x}$

b. $\dfrac{30000}{x} = 60$

Situación problémica 3. Pensamiento geométrico.

- Calcula el volumen de un cilindro circular recto de 20 cm de diámetro y 8 cm de altura.

Situación problémica 4. Pensamiento geométrico.

- ¿Cuántos ángulos centrales consecutivos de 15 grados de amplitud, pueden trazarse desde el centro de una circunferencia cualquiera?

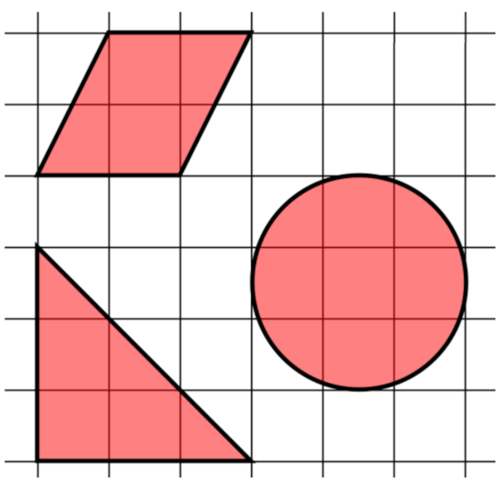
Situación problémica 5. Pensamiento algebraico.

La administración de un restaurante paga a un camarero un salario semanal de $A. Este salario es el resultado de una asignación fija de $60, más 11 centavos por cada uno de los **n** clientes que atiende.

a) Calcule el salario que el camarero recibió en una semana que atendió a 240 usuarios.

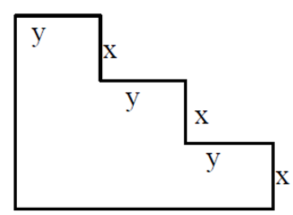
Situación problémica 6. Pensamiento geométrico.

Calcular el área de cada una de las siguientes figuras si se sabe que la cuadricula en la cual estan ubicadas es de 2cm



Situación problémica 7. Pensamiento geométrico.

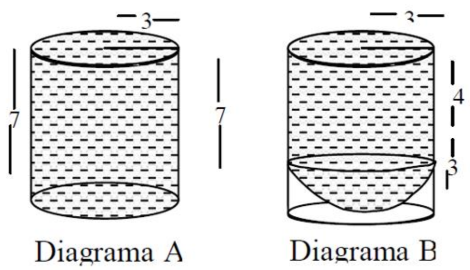
- Hallar los valores de x, y de la figura, sabiendo que su perímetro es de 300 cm y el área encerrada es de 3600 cm^2.



Fortalecer la formación de la Matemática en futuros docentes Investigación en Resolución de problemas

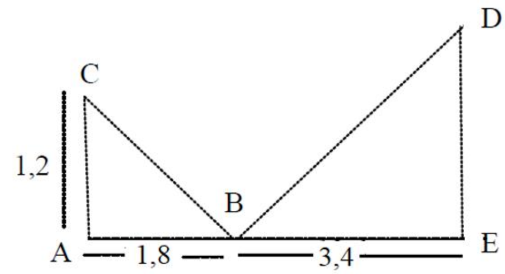
Situación problémica 8. Pensamiento métrico y geométrico.

El costo del medicamento contenido en el envase del diagrama A era de \$80 y la del nuevo envase es de \$70. ¿Cuál de los dos envases es más económico para el usuario?. Justifique



Situación problémica 8. Pensamiento geométrico.

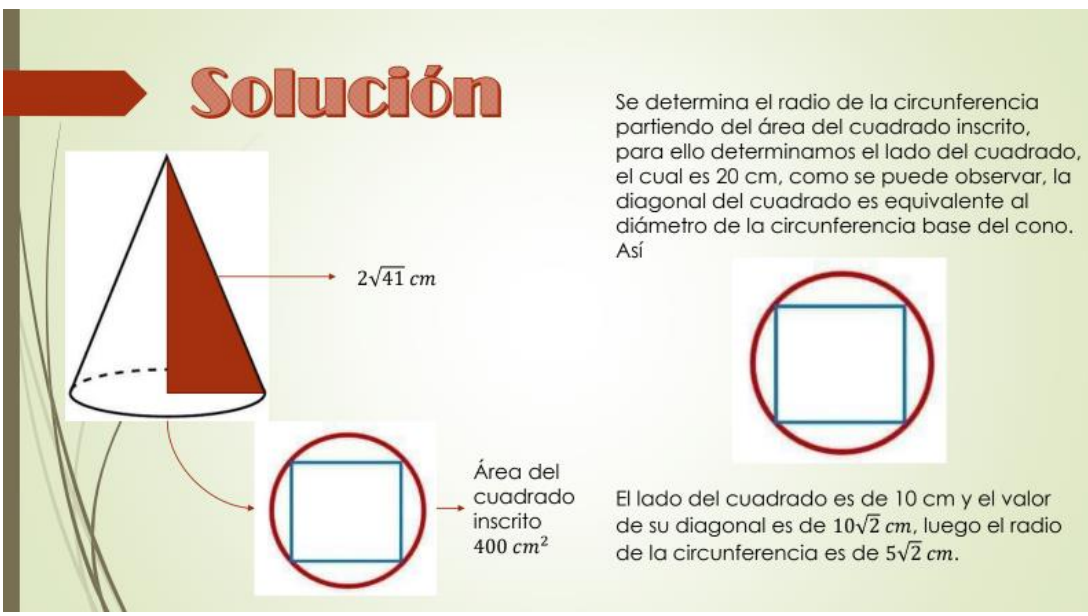
Calcular la longitud del segmento BD



ANEXO 4. Rúbrica de evaluación plan de clase basado en problemas no rutinarios.

		ESCALA VALORATIVA PARA LAS ACTIVIDADES ASOCIAS EN EL PLANDE CLASE BASADO EN PRN					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**TOTAL**
COSNTRUCCION DE PROBLEMA NO RUTINARIO	**PROBLEMA**	El problema es rutinario	El problema presenta una estructura básica para transformarse en PNR	El problema presenta una estructura elaborada para transformarse en PNR.	El problema tiene estructura de PNR	El problema es una PNR	
	SOLUCION	No tiene solución	La solución es incompleta y no está ordenada.	La solución no está explicada.	La solución tiene esplicacion básica, ordenada y estructurada.	La solución esta bien especificada y asocia explicaciones verbales.	
	DESCRPCION	No hay descripción	La descripción no está completa y no describe los pasos, etapas o porcesso que lo conforman.	La descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma implícita que la conforman, pero no es clara.	a descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman, pero no es clara.	a descripción tiene todos los pasos , etapas o procesos en forma explícita que la conforman y es clara.	
ESTRUCTURACION CURRICULAR	**PENSAMIENTOS MATEMATICIS**	No asocia los pensamientos.		Asocia los pensamientos en forma incompleta.		Asocia los pensamientos.	
	EJES TEMATICOS	No asocia los ejes temáticos.		Asocia los ejes temáticos en forma incompleta.		Asocia los ejes temáticos.	
	COMPETENCIA	No hay competencia relacionada.	La competencia no asocia objeto conceptual, finalidad y condición de referencia.	La competencia no asocia 2 de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia no asocia uno de los tres elementos que la conforman (objeto conceptual, finalidad y condición de referencia).	La competencia esta bien estructurada.	
	TAREA(S)	No asocia la(s) tareas.		Asocia la(s) tarea(s) en forma incompleta.		Asocia la(s) tarea(s)	
	CONTEXTO DEL PROBLEMA	No asocia el contexto del problema		Asocia en contexto del problema en forma incompleta		Asocia el contexto en forma adecuada.	
	PRESABERES	No asocia los presaberes del PNR		Asocia los presaberes en forma incompleta.		Asocia los presaberes en forma correcta.	
	PREGUNTAS ORIENTADORAS	No hay preguntas orientadoras	Las preguntas orientadoras no contibuyen en la solucion del problea, son muy genericas.	La pregunta esencial o la pregunta de contenido contribuyen en la solucion del problema.	Las preguntas son claras y bien elaboradas pero no contribuyen en forma clara y puntual en la solución del problema.	Las preguntas contrubuyen en la solucion del problema.	
						TOTAL	

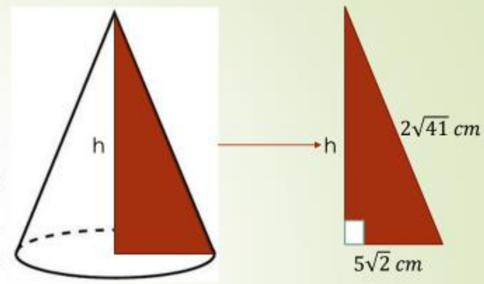
ANEXO 5. Evidencia plan de clases.
Plan de clase estudiante 1.



Ahora para calcular la altura del cono se construye el triangulo rectángulo que se conforma con la generatriz y el radio de la base del cono, y así se puede calcular la altura h, mediante el Teorema de Pitágoras.

Por lo tanto la altura del cono es de $\sqrt{114}\,cm$

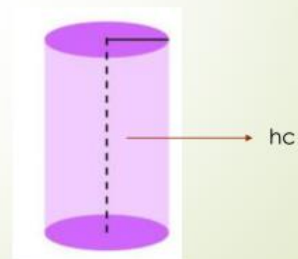
Y usando la ecuación del volumen del cono $v = \frac{1}{3}h\pi r^2$ obtenemos que su volumen es del $559{,}05\ cm^3$



Como el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro entonces el volumen del cilindro es de $1677{,}151\ cm^3$ y partiendo de que el radio de base es el mismo tenemos que

$v = \pi hcr^2$, luego $hc = \frac{v}{\pi r^2}$

$$\boldsymbol{hc} = \sqrt{114}\,cm$$



MÉTODO DE POLYA

1. **Entender el problema:** Se debe identificar qué datos proporciona el problema y como empezar a trabajar con ellos, además se debe tener en cuenta las proporciones en los volúmenes del cono y el cilindro y el uso del teorema de Pitágoras.
2. **Configurar un plan:** Se asocian los conceptos característicos del problema como el radio a partir del cuadrado inscrito, el formar el triangulo rectángulo con el radio, y la generatriz y la altura para poder calcular dicha altura. Después usando la proporción de volúmenes poder comprobar la altura del cilindro.
3. ***Ejecutar el plan:*** Se inicia calculando el radio de la base del cono (el cual es el mismo para las bases del cilindro), luego a través de Pitágoras se determina h y a la vez el volumen del cono, con la proporción se obtiene el volumen del cilindro y finalmente se determina la altura hc.
4. **Visión retrospectiva:** El proceso se verifica de manera automática si se llega a que la altura tanto en el cono como en el cilindro es la misma. Puesto para que la proporción entre el volumen del cono y el cilindro se dé estos deben tener el mismo radio de base y la misma altura.

Estructuración curricular del problema

Pensamiento: Geométrico
Eje temático: Áreas y volúmenes

Competencia

- Probar la igualdad de la altura del cono y el cilindro para la proporción de volúmenes de estos cuerpos geométricos, relacionando operaciones algebraicas y construcciones auxiliares.

TAREA (Categoría): Probar está, en la categoría de evaluar, es decir está en un nivel de alto rango cognitivo.

Contexto del problema: Matemático.

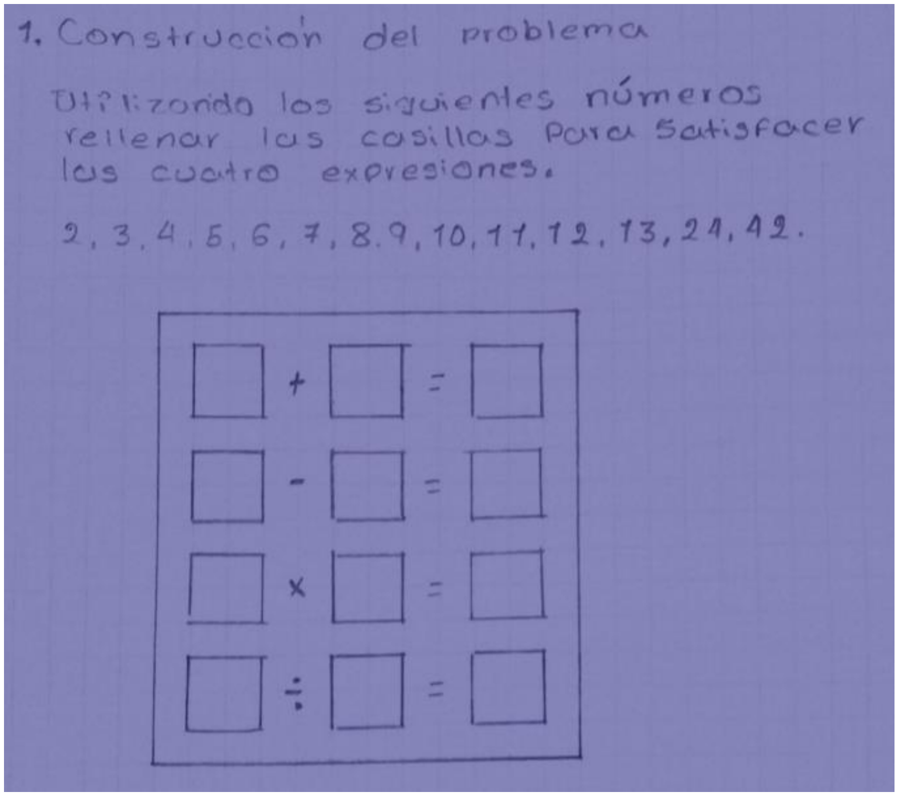
Presaberes:

- Cálculo de volúmenes y áreas.
- Triángulos rectángulos.
- Proporcionalidad.
- Solución de ecuaciones.

Preguntas orientadoras

- Pregunta esencial: ¿Cómo se puede establecer una relación entre el cuadrado inscrito y la circunferencia, de tal forma que se puede calcular el radio de esta.
- Pregunta de contenido: ¿Qué significa que el volumen del cono sea la tercera parte del volumen del cilindro?

Plan de clase estudiante 2.



1. Construcción del problema

Utilizando los siguientes números rellenar las casillas Para Satisfacer las cuatro expresiones.

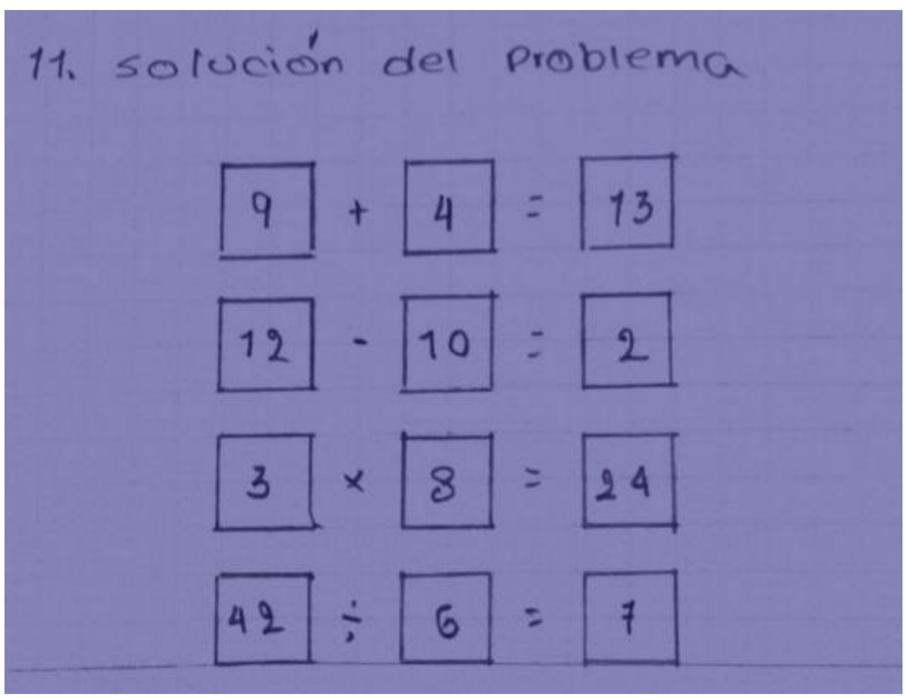
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 24, 42.

$\square + \square = \square$

$\square - \square = \square$

$\square \times \square = \square$

$\square \div \square = \square$



11. solución del Problema

$\boxed{9} + \boxed{4} = \boxed{13}$

$\boxed{12} - \boxed{10} = \boxed{2}$

$\boxed{3} \times \boxed{8} = \boxed{24}$

$\boxed{42} \div \boxed{6} = \boxed{7}$

Se empezo ordenando los números según las operaciones, se comenzo por la multiplicación y división dejando la suma y la resta para el final.

1.2 Metodo de muller

1. Orientación: se realizo una lectura del problema el cual presento una serie de operaciones basicas las cuales tienen las casillas en blanco, y nos pide que se coloquen unos números dados preservando las operaciones.

2. Elaboración: se fuerón ubicando los números comenzando con la división y luego la multiplicación y por ultimo la suma y resta, tratando de colocar los números mas grandes en la división y multiplicación.

3. Realización: Se ubico el número mas grande en el dividendo y buscando otros dos números para realizar la division, con la multiplicación se ubico el segundo numero mas grande como resultado, y se buscaron dos numeros que satisfacieran el resultado, el tercer número mas grande se colocó como resultado de la adición, y se

ubicarón dos números que se satisfaga la operación, con la sustración se hizo ensayo y error con los otros números.

4. Evaluación: se verificarón los operaciones y se evidencio que el resultado es veridico.

2. Estructura curricular del problema

2.1 Pensamiento: númerico.

2.2 Eje tematico: aritmética.

2.3. Competencia a desarrollar: Interpretar operaciones combinadas de los diferentes números enteros.

2.4. Tarea (categoria), Analizar y evaluar.

2.5. Contexto problema: Matemático y combinatorio.

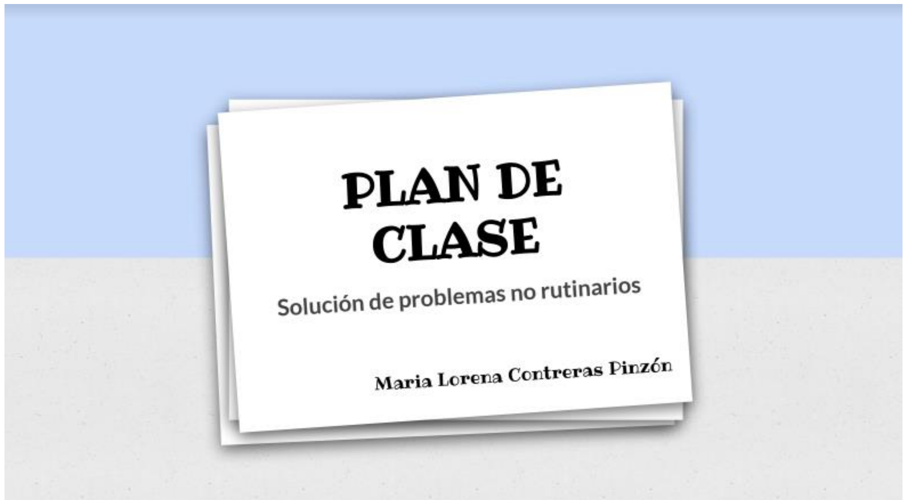
Presaberes

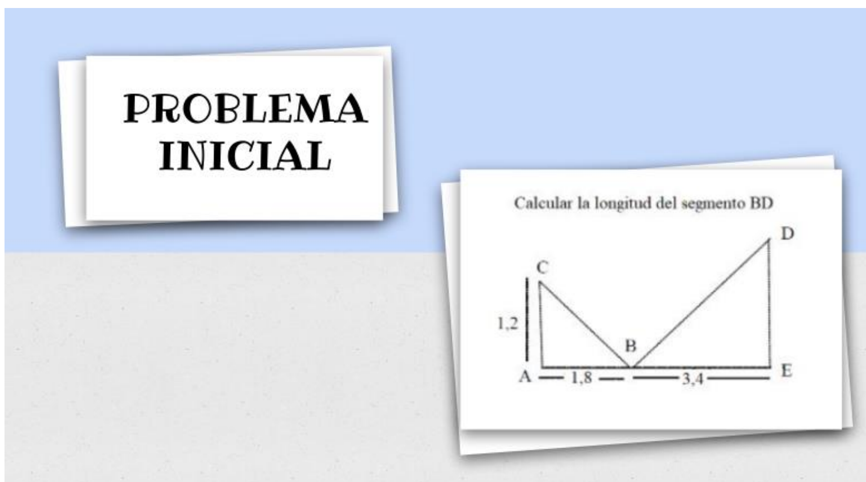
• operaciones basicas con números enteros

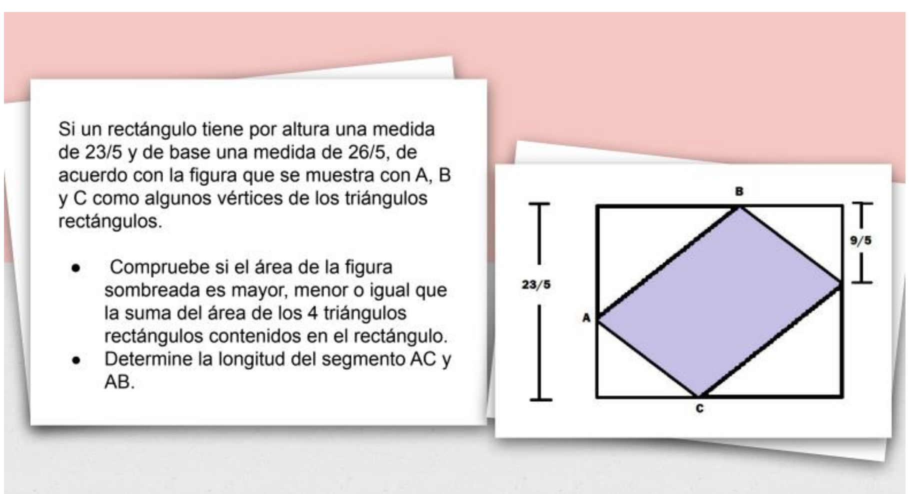
2.7 preguntas orientadoras

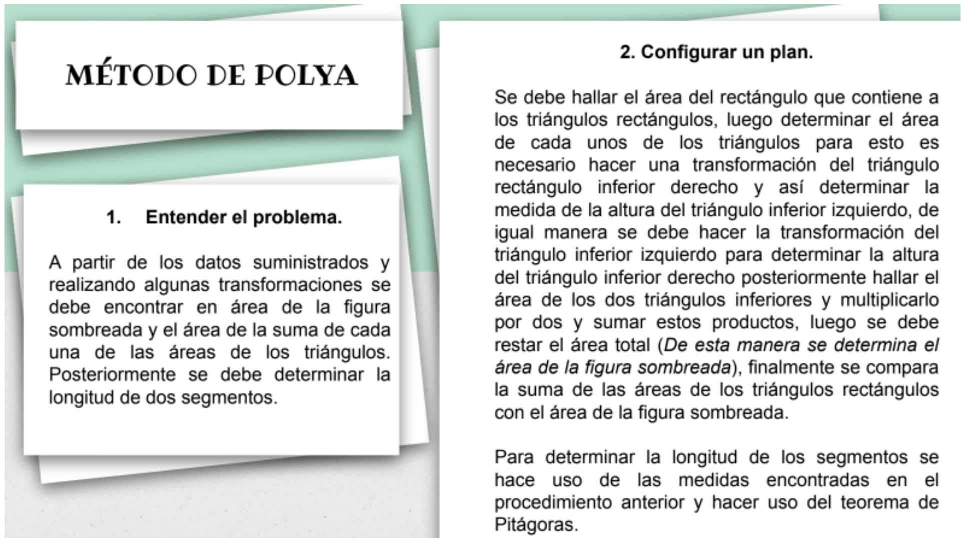
Pregunta esencial. Como podemos ordenar los números para satisfacer las operaciones.

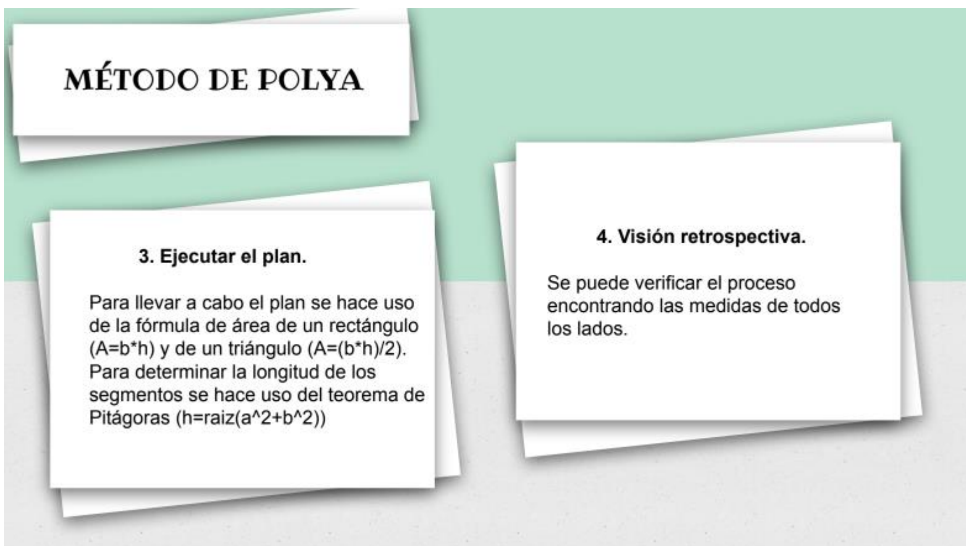
Plan de clase estudiante 3.








MÉTODO DE POLYA
1. Entender el problema.
A partir de los datos suministrados y realizando algunas transformaciones se debe encontrar en área de la figura sombreada y el área de la suma de cada una de las áreas de los triángulos. Posteriormente se debe determinar la longitud de dos segmentos.
2. Configurar un plan.
Se debe hallar el área del rectángulo que contiene a los triángulos rectángulos, luego determinar el área de cada unos de los triángulos para esto es necesario hacer una transformación del triángulo rectángulo inferior derecho y así determinar la medida de la altura del triángulo inferior izquierdo, de igual manera se debe hacer la transformación del triángulo inferior izquierdo para determinar la altura del triángulo inferior derecho posteriormente hallar el área de los dos triángulos inferiores y multiplicarlo por dos y sumar estos productos, luego se debe restar el área total (*De esta manera se determina el área de la figura sombreada*), finalmente se compara la suma de las áreas de los triángulos rectángulos con el área de la figura sombreada.
Para determinar la longitud de los segmentos se hace uso de las medidas encontradas en el procedimiento anterior y hacer uso del teorema de Pitágoras.


MÉTODO DE POLYA
3. Ejecutar el plan.
Para llevar a cabo el plan se hace uso de la fórmula de área de un rectángulo (A=b*h) y de un triángulo (A=(b*h)/2). Para determinar la longitud de los segmentos se hace uso del teorema de Pitágoras (h=raiz(a^2+b^2))
4. Visión retrospectiva.
Se puede verificar el proceso encontrando las medidas de todos los lados.

DATOS:

- Altura: 23/5
- Base: 26/5

SOLUCIÓN.

Área del rectángulo

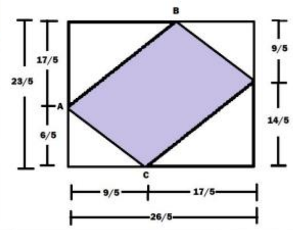
$$A = b * h$$

$$A = \frac{26}{5} * \frac{23}{5}$$

$$A = \frac{598}{25}$$

Por tanto, el área del rectángulo que contiene a los triángulos rectángulos es de 598/25

Dimensiones de triángulo con vértices A y C.
Para esto realizamos una resta entre la medida de la base con la medida de la base del triángulo que nos proporcionan.



Área del triángulo con vértice A.C

$$A = 2\left(\frac{b * h}{2}\right)$$

$$A = b * h$$

$$A = \frac{9}{5} * \frac{6}{5}$$

$$A = \frac{54}{25}$$

Entonces el área de dos triángulos es de 54/25

Área del triángulo con vértice A, B

$$A = 2\left(\frac{b * h}{2}\right)$$

$$A = b * h$$

$$A = \frac{14}{5} * \frac{17}{5}$$

$$A = \frac{238}{25}$$

Entonces el área de los otros dos triángulos es de 238/25

Por tanto, el área de los cuatro triángulos es de 292/25.

Como el área total es de 598/25 entonces el área de la figura sombreada es de 306/25

En consecuencia, el área de la figura sombreada es mayor que el área de los triángulos que la conforman.

Por teorema de Pitágoras, el segmento AC tiene una longitud de:

$$AC = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2}$$

$$AC = \frac{3\sqrt{13}}{5}$$

Por teorema de Pitágoras, el segmento AB tiene una longitud de:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{17}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2}$$

$$AB = \frac{\sqrt{485}}{5}$$

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

- Geométrico.
- Algebraico.

COMPETENCIA A DESARROLLAR

EJE TEMÁTICO

- Área de figuras regulares.
- Longitudes.
- Transformaciones geométricas

TAREA

Al ser una demostración y una medición, estos

CONTEXTO DEL PROBLEMA

- Matemático- manipulativo

PRESABERES

- Áreas
- Teorema de Pitágoras
- Operaciones básicas y algebraicas
- Transformaciones geométricas

PREGUNTAS ORIENTADORAS

PREGUNTA ESENCIAL

- ¿Qué relación existe entre el área sombreada y la suma de área de los triángulos que la conforman ?

PREGUNTA DE CONTENIDO

- ¿Cómo se relaciona el teorema de Pitágoras con la determinación de áreas?