DE LA ARGUMENTACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN A TRAVÉS DEL PLANTEAMIENTO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON PROGRAMACIÓN

Luis Gabriel Casilimas Sánchez

Autor

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Facultad de Educación

Bogotá, Colombia

2022

DE LA ARGUMENTACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN A TRAVÉS DEL PLANTEAMIENTO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON PROGRAMACIÓN

Autor

Luis Gabriel Casilimas Sánchez

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Magíster en Educación Matemática

Directora de Tesis

Dr. Mary Falk de Losada

Líneas de investigación:

Enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas.

Uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

Facultad de Educación

Bogotá, Colombia

2022

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. junio 14 de 2022

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a Dios por darme la oportunidad de avanzar durante todo el programa de una manera enriquecedora y gratificante.

Agradezco a mi directora de tesis la doctora Mary Falk de Losada por todas sus asesorías, brindar todo su conocimiento, su acompañamiento, toda su motivación para que esta investigación tuviera un aporte práctico significativo siguiendo la filosofía institucional de abordar el planteamiento y la resolución de problemas.

De igual manera agradezco a los docentes de la Universidad Antonio Nariño por todas sus enseñanzas en la educación matemática a nivel pedagógico, filosófico, didáctico y disciplinar.

Y un agradecimiento especial a los estudiantes de la institución educativa departamental Gonzalo Jiménez de Quesada por todo su compromiso y motivación al participar en el semillero matemático.

DEDICATORIA

Esta investigación se la dedico a Dios que me da la sabiduría y el privilegio de avanzar un paso más profesionalmente, a mi mamá María Isabel Sánchez, a mi papá Armando Casilimas, a mi futura esposa Jenny Alexandra Murillo, a mi hijo Aidan Samuel, a mis hermanos Luis Armando Casilimas y Luis Damian Casilimas y a mis sobrinos Ana María, Juan Diego, Sergio Alejandro, María Camila, Luisa Valentina y Adrian Leonardo.

SÍNTESIS

La educación matemática cada vez se enriquece más en la medida que varios grupos de investigación como se evidencia en los diferentes congresos internacionales siguen creciendo en el campo de la investigación, sin embargo, es notable que hay grupos que van surgiendo recientemente lo que lleva a pensar cómo se puede seguir avanzando en la educación matemática. La investigación tiene como objetivo caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación con estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad.

El sistema de actividades se sustenta en la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner, la resolución de problemas matemáticos retadores y el uso de programas como Scratch, en el cual se utiliza un lenguaje de programación adecuado para los niños, facilitando así el proceso de aprendizaje significativo, orientado desde la tecnología. En la investigación se utiliza una metodología basada en un enfoque cualitativo, con un diseño de investigación acción y una metodología propia de las actividades. La implementación del sistema de actividades propicia en los estudiantes el desarrollo cognitivo, el desarrollo del pensamiento matemático, la construcción de argumentos, la relación de la argumentación y la demostración, la creatividad, el aprendizaje autónomo, el trabajo cooperativo, el uso de programación y la creación de algoritmos, los resultados obtenidos de esta investigación sugieren que la argumentación da lugar a la demostración que se desarrolla en todo el proceso y la manera de mostrar las soluciones de los problemas es a través de la programación.

ABSTRACT

Mathematics education is becoming more and more enriched to the extent that several research groups, as evidenced in the different international congresses, continue to grow in the field of research, however it is notable that there are groups that are emerging recently, which leads us to think how you can continue advancing in mathematics education. The research aims to characterize the relationship between argumentation and demonstration through the approach and resolution of mathematical problems mediated by programming with students between twelve and thirteen years of age. The activity system is based on Jerome Bruner's discovery learning theory, the resolution of challenging mathematical problems and the use of programs such as Scratch, in which a programming language suitable for children is used, thus facilitating the learning process. meaningful learning, oriented from technology. The research uses a methodology based on a qualitative approach, with an action research design and a methodology specific to the activities. The implementation of the activity system fosters cognitive development in students, the development of mathematical thinking, the construction of arguments, the relationship between argumentation and demonstration, creativity, autonomous learning, cooperative work, the use of programming and the creation of algorithms, the results obtained from this research suggest that the argumentation gives rise to the demonstration that is developed throughout the process and the way to show the solutions of the problems is through programming.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁGINAS**

INTRODUCCIÓN

El propósito de la introducción, como lo expresa García, M. (2014) es realizar el diseño teórico integrado por el problema que hace referencia a (el ¿por qué?) de la investigación y se debe justificar en el contexto, los objetivos que son la razón del estudio que se encamina a (el ¿para qué?), el objeto de estudio, es sobre el cual, el investigador realiza la investigación que permite definir (el ¿qué?), el campo de acción es una estrecha parte del objeto de estudio, las preguntas científicas surgen de los sub problemas del problema de investigación, esto presupone un análisis profundo de lo que se desea alcanzar en la investigación y las tareas de investigación se formulan con la idea de organizar una planificación en relación a las etapas de la investigación, todos estos parámetros representan el núcleo básico a partir del cual se planifica, organiza, ejecuta y evalúa todo el proceso de la investigación.

A partir de los diferentes espacios de intercambio con la directora de tesis, se aborda un panorama en dos aspectos importantes de estudio en la investigación matemática, el primero es el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación y el segundo es la relación entre la argumentación y la demostración. Estos dos aspectos cada vez toman mayor importancia a nivel internacional como se evidencia en diferentes congresos, y eventos internacionales.

Durante el MEM 22 que se llevó a cabo del 17 al 19 de febrero del 2022 la Doctora Yuriko Baldín plantea la importancia de llevar al aula una metodología basada en la resolución de problemas, así como la relación entre la informática y la matemática (Knuth, 1974) necesaria para enseñar pensamiento computacional, en la que las ciencias de la computación interactúan de forma bidireccional con las matemáticas, según Knuth las ciencias de la computación estudian los algoritmos los cuales son reglas definidas para producir una información nueva a partir de una información de entrada, de modo que los algoritmos son un lenguaje organizado con lógica matemática en el que cada dato está representado por símbolos.

Baldín afirma que no se puede confundir la programación con el pensamiento computacional, y que, según Wólfram, (2020) las matemáticas tradicionales, así como el pensamiento computacional se puede caracterizar como un proceso de resolución de problemas, Ella concluye que es necesario poner al estudiante en el centro de su propio proceso de aprendizaje y utilizar la resolución de problemas como eje curricular y metodología para el desarrollo del pensamiento matemático.

Justificación de la investigación

En la actualidad el interés por esclarecer la relación e interacción que se dan entre la argumentación y la demostración en matemáticas, se ha venido evidenciado año tras año con mayor fuerza como las analizan diferentes investigaciones, por ejemplo, el documento Proof and Proving in Mathematics Education del ICMI (ICMI Study 19). En el grupo de trabajo 2 (WG2: Argumentación) y en el capítulo 15 "Argumentación y demostración en el aula de matemáticas" los investigadores concluyen que, al analizar las complejas relaciones entre la argumentación y la demostración en matemáticas desde perspectivas matemáticas y perspectivas educativas, notan la falta general de consenso sobre las interrelaciones entre las dos, tanto entre los matemáticos como entre los educadores matemáticos (Hanna, G., De Villiers, M. pág. 364, 2012).

En el ICME 14 (TSG 14) Teaching and Learning of Programming and Algorithms. La matemática y la informática, históricamente han estado estrechamente interrelacionadas. Algunos educadores han utilizado la programación para el aprendizaje, pero no necesariamente en matemáticas, legado que se remonta a la década de 1970 (Noss & Hoyles, 1996). Recientemente la programación y la algorítmica han logrado una adopción más generalizada debido al interés mostrado por los diferentes gobiernos que se desarrolle el pensamiento computacional de los estudiantes, lo que llevó a varios países del mundo a integrar la programación y el pensamiento computacional en la educación y en la educación matemática.

Aunque el TSG 24, el TSG 25 y el TSG 26 del ICME 14 están estrechamente relacionados con este tema, ya que se refieren a la tecnología digital, el TSG 14 se centra específicamente en la tecnología de programación.

En el congreso ICME 14 también es de interés para la presente investigación el grupo de estudio **(TSG 16) Reasoning, Argumentation and Proof in Mathematics Education**. El razonamiento, la demostración y la argumentación hacen parte de la matemática y cada vez tiene mayor importancia a nivel internacional, sin embargo, se expone que, aunque existe información sobre estas áreas todavía quedan interrogantes frente a las cuales se requieren respuestas bien sean teóricas o empíricas. Por ello uno de los temas importantes de investigación versa sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes con el razonamiento, y cómo los docentes carecen de recursos para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades en el razonamiento, la argumentación y la demostración. Esto a su vez da lugar a estudiar el papel de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento y la prueba y otras cuestiones en el campo digital.

Actualmente en el ICME 14 (TSG 17) titulado Problem Posing and Solving in Mathematics Education, se dedica a la resolución de problemas matemáticos que ha sido el foco de una larga línea de investigación que se remonta desde Dewey (1933), Polya (1945), entre otros investigadores, los aportes, vinculación en los planes de estudio como componente importante en la educación matemática. Sin embargo, el planteamiento de problemas matemáticos es un campo de investigación mucho más joven, esta fusión en este TSG 17 entre la resolución de problemas y el planteamiento de problemas, permite tener un campo de mayor interés en la investigación matemática, identificando nuevas tendencias de estos temas.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Qué relaciones pueden establecerse entre la argumentación y la demostración al resolver problemas matemáticos con el uso de programación?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y se infiere como **objetivo general** caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación con estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad.

Como **objetivos específicos** se tienen:

- Determinar el estado actual de los procesos de argumentación y demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos para estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad.
- Diseñar un sistema de actividades con una metodología propia de las actividades fundamentada en la teoría del aprendizaje por descubrimiento, direccionado hacia el uso de la programación y relacionado a los procesos de argumentación y demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos para estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad.
- Implementar un sistema de actividades con el uso de la programación, a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos para estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad.
- Analizar el desarrollo de las actividades relacionadas a los procesos de argumentación y demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos para estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza y aprendizaje a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos con programación.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Qué investigaciones se han realizado en torno al proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática relacionado al uso de herramientas tecnológicas en el campo de la programación?
2. ¿Cómo diseñar estrategias didácticas que promuevan en los estudiantes los procesos de argumentación y demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos?
3. ¿Cómo evaluar la validez del sistema de actividades implementadas en los procesos de argumentación y demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Construir el estado del arte del proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática relacionado a la resolución de problemas matemáticos.
2. Diseñar un sistema de actividades enfocadas en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación.
3. Implementar el sistema de actividades a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación.
4. Analizar los resultados obtenidos de la implementación del sistema de actividades en en los procesos de argumentación y demostración en la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación.

El **aporte práctico** radica en la creación de un sistema de actividades que caracterice la relación entre la argumentación y la demostración mediante el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y 5 anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se presentan estudios relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la matemática en dos epígrafes importantes, por un lado, las investigaciones relacionadas con los procesos de **argumentación y demostración** y, por otra parte, las en relación a los **problemas matemáticos mediados por la programación**.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática a través de la argumentación y la demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos

A partir de las teorías lingüísticas contemporáneas se plantea la hipótesis de que la demostración o prueba es un caso especial de argumentación y se propone el modelo de Toulmin como herramienta metodológica para compararlas (Pedemonte, B. 2007).

Sin embargo, la relación entre la argumentación y la demostración en la resolución de problemas matemáticos, se puede establecer de la siguiente manera:

La argumentación hace parte de la demostración en matemáticas, las diferentes maneras de argumentar indican lo que pretendemos hacer para realizar la demostración y la demostración es quien lleva a cabo está pretensión que viene del argumento (de Losada, M. F.).

1.1.1. Argumentative and proving activities in mathematics education research[1]

Esta investigación pretende identificar actividades de argumentación asociadas a la demostración en matemáticas y de esta manera discutir su importancia, se evidencia que la demostración es importante para los matemáticos sin embargo para los estudiantes se presentan dificultades al momento de realizar

[1] Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 88-93). Taipei: National Taiwan Normal University, The Department of Mathematics.

las demostraciones. De acuerdo con Harel & Sowder, (1998) se puede utilizar un esquema de prueba, el cual consiste en los procesos que utiliza la persona para tener certeza del enunciado matemático y convencer a los demás de la veracidad de este.

De Villiers (1990) propuso que la prueba tiene cinco funciones principales: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. Sugiere que estas funciones se puedan relacionar a las diferentes maneras de argumentación matemática.

Los resultados obtenidos en la investigación llevan a la discusión de que se pueden categorizar tres tipos de argumentación para abordar en la prueba. El primero hace referencia a la construcción de argumentos novedosos, el segundo es la lectura de argumentos dados por el profesor, un conferencista o presentado en algún libro y el tercer criterio es presentar argumentos que había leído previamente y explicar estos argumentos. Es importante resaltar las relaciones que se pueden establecer entre la argumentación y la demostración sin embargo es de gran relevancia que se pudiera abordar desde la resolución de problemas[2].

1.1.2. Technology as a Support for Proof and Argumentation: A Systematic Literature Review[3]

Este trabajo aborda la importancia de mediar con tecnología los componentes esenciales de argumentación y demostración, la revisión de la literatura examina a la tecnología como un soporte para la demostración y la argumentación, los resultados obtenidos muestran que la tecnología puede ayudar a otras investigaciones en el desarrollo de nuevas estrategias que permitan mediar la comprensión de las demostraciones por parte de los estudiantes (Campbell, T. G., & Zelkowski, J. 2020).

---

[2]Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 88-93)

[3] Campbell, T. G., & Zelkowski, J. (2020). Technology as a support for proof and argumentation: A systematic literature review. *The international journal for technology in mathematics education*, *27*(2).

Se resalta que en la actualidad la tecnología ha permitido brindar herramientas y alternativas en el proceso de enseñanza y aprendizaje en las diferentes investigaciones en educación matemática y específicamente en los procesos de argumentación y demostración[4].

1.1.3. The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms[5]

Esta investigación pretende relacionar los procesos de argumentación y prueba en matemáticas con la dimensión social, para esto plantea tres tipos de relaciones la primera va dirigida a la relación entre la dimensión social y argumentativa de la demostración en matemáticas académicas, la segunda es el proceso social que transforma la prueba matemática y la argumentación en el contexto en las aulas de matemáticas y la tercera es la interacción entre los antecedentes socioculturales de los estudiantes y las expectativas sociales en torno a la demostración y la argumentación (Knipping, C. 2012).

Los resultados obtenidos resaltan la importancia de la dimensión social en las aulas, dando lugar a que la demostración y la argumentación se den en otra necesidad, otros objetivos y contextos escolares[6].

1.1.4. Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema[7]

Este artículo pretende mostrar que el uso de un software de geometría dinámica en la búsqueda de la solución a un problema matemático se generan argumentos para comprobar afirmaciones y validarlas, Las diferentes actividades hacen parte de una sistematización y un refinamiento en el proceso de la argumentación y de este modo dar un sentido a lo que se entiende en las matemáticas por demostración. Para potencializar el software se plantean cuatro momentos: uno de exploración, uno de construcción,

---

[4]Campbell, T. G., & Zelkowski, J. (2020). Technology as a support for proof and argumentation: A systematic literature review. *The international journal for technology in mathematics education*, *27*(2).
[5] Knipping, C. (2012). The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms. *Online: http://www. icme12. org/upload/submission/1935_F. pdf. Accessed*, *30*.
[6]Knipping, C. (2012). The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms. *Online: http://www. icme12. org/upload/submission/1935_F. pdf. Accessed*, *30*.
[7] Acosta, E., Rodríguez, F., & Camargo, L. (2002). Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema.

uno de argumentación y uno de demostración. Dentro de los resultados obtenidos se destaca la combinación de los cuatro momentos que se relacionan permanentemente en el trabajo matemático dando lugar una visión clara en cada momento y su interacción con el software dinámico[8].

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación y los algoritmos

El currículo en educación matemática sugiere que se aborde las herramientas computacionales para que las utilicen los estudiantes en sus experiencias de aprendizaje y de esta manera genere oportunidades para que ellos adquieran habilidades para comprender y resolver problemas matemáticos (Santos, L. M. 2011). El uso de distintas herramientas computacionales ofrece a los maestros una variedad de formas de representar y explorar tareas matemáticas que amplían los enfoques en la resolución de problemas (Santos-Trigo, M., Machín, M. C. 2013).

1.2.1. Olimpiada Colombiana de Computación[9]

La Universidad Antonio Nariño en el año de 1989 realiza la primera Olimpiada de Computación y desde este momento se realiza una olimpiada anual a nivel nacional, la Olimpiada presenta su esencia al resolver problemas matemáticos a través de un lenguaje de programación.

Esta competencia maneja dos criterios: por un lado, los estudiantes deben desarrollar habilidades para resolver problemas y por otra parte los estudiantes deben dominar el lenguaje con el cual van a escribir el código que resuelva el problema. Las olimpiadas constan de dos niveles: un primer nivel con estudiantes de grados 6 - 9 y un nivel superior con estudiantes de grados 10 - 11.

---

[8]Acosta, E., Rodríguez, F., & Camargo, L. (2002). Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema.

1.2.2. Olimpiada Internacional de Informática IOI[10]

La IOI es una competición anual de programación para estudiantes de secundaria, la primera IOI se realizó en 1989 en Pravetz, Bulgaria. Esta competición se realiza durante dos días de programación en donde es importante contar con estudiantes que puedan programar y programadores que sean creativos. Para cada tema de las pruebas, los candidatos deben encontrar un algoritmo, luego programarlo en lenguaje C, C++ o Pascal, las soluciones proporcionadas por los candidatos son evaluadas automáticamente, y clasificadas de acuerdo a su exactitud (los bugs no son tolerados), y de acuerdo a su velocidad y utilización de memoria.

1.2.3. Problem solving by 5–6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case study[11]

Este estudio de caso exploratorio aborda la resolución de problemas matemáticos utilizando la programación con niños de jardín entre los cinco y los seis años de edad, utilizan un entorno basado en Logo allí los niños interactúan con una pizarra blanca, las notas del investigador permite dar una validez al uso de la programación informática teniendo la oportunidad de desarrollar conceptos matemáticos, los resultados muestran que los niños se familiarizan con el software de programación, además las actividades permiten alcanzar habilidades matemáticas en la resolución de problemas y los niños fueron introducidos a los conceptos de la programación[12].

1.2.4. Computational thinking and mathematics using Scratch: an experiment with sixth-grade students[13]

---

[10] http://www.france-ioi.org/ioi/index.php?sLanguage=es

[11] Fessakis, G., Gouli, E., & Mavroudi, E. (2013). Problem solving by 5–6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case study. *Computers & Education*, *63*, 87-97.

[12]Fessakis, G., Gouli, E., & Mavroudi, E. (2013). Problem solving by 5–6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case study. *Computers & Education*, *63*, 87-97.

[13] Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., & Sáez-López, J. M. (2020). Computational thinking and mathematics

Esta investigación potencia los beneficios de utilizar Scratch con estudiantes de grado sexto, estudiando cómo influye Scratch tanto en la adquisición de conceptos matemáticos como en el desarrollo del pensamiento computacional, los investigadores plantean dos fases una en relación a la instrucción con el programa Scratch en la adquisición de conocimientos del pensamiento computacional y la otra fase hace referencia a la implementación de tareas matemáticas y la resolución de problemas matemáticos en torno al mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

Los resultados arrojados indican que el programa de Scratch se puede utilizar para las desarrollar las concepciones matemáticas y para desarrollar el pensamiento computacional en los estudiantes.

1.2.5. Using Scratch: An Integrated Problem-solving Approach to Mathematical Thinking[14]

En este documento el autor expresa los beneficios que ofrece el programa de Scratch así como los niños lo pueden utilizar para potenciar un enfoque en la resolución de problemas del pensamiento matemático, los resultados muestran que el programa permitió ser un espacio atractivo para resolver problemas matemáticos y al mismo tiempo proporcionó una programación motivadora para explorar los conceptos matemáticos y de esta manera fomentar la comunicación y la colaboración entre los estudiantes, allí los estudiantes resuelven los problemas matemáticos de forma cooperativa lo cual beneficia el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático.

Conclusiones

Del contenido de este capítulo se pueden plantear las siguientes conclusiones:

---

using Scratch: an experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments*, *28*(3), 316-327.

[14] Calder, N. (2010). Using Scratch: An integrated problem-solving approach to mathematical thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(4), 9-14.

- ❑ Se analiza la situación a estudiar y se fundamenta su pertinencia con diferentes investigaciones y congresos internacionales lo que permite plantear el problema de investigación.
- ❑ Se describe cada uno de los parámetros que representan el núcleo básico para la construcción del diseño teórico como: el problema, la justificación, el objetivo general y los objetivos específicos, el objeto de estudio, el campo de acción, las preguntas científicas, las tareas de investigación y el aporte práctico como sustento de la exploración del estudio de investigación.
- ❑ Se construye el estado del arte a partir de dos epígrafes que le aporten un sustento al estudio de investigación.

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordan referentes filosóficos, referentes psicológicos y didácticos, referentes sobre la resolución de problemas, referentes sobre la argumentación y la demostración y referentes sobre el uso de la tecnología, lo que brindan a la investigación un marco teórico.

2.1. Referentes sobre fundamentos filosóficos

Hersh busca explicar que la existencia de un modelo matemático se basa en lo que piensa un matemático y la prueba es convincente porque está convencido de que ha podido verlo dentro de su propia mente, lo cual es muy diferente a utilizar la lógica a partir de axiomas y escritura formal que permitan llegar a la prueba, porque este último argumento lo acerca a la lógica de una máquina que tiene gran importancia en la lógica moderna, pero lo aleja de la matemática que hace al desarrollar pensamiento matemático (Hersh R, 2013).

Esto hace reflexionar sobre la importancia de pensar matemáticamente, de saber que todo está dentro de la propia mente y para luego comenzar a programar, como lo plantea Yamamoto, un programador programa y verifica si hay algún error pero no construye el algoritmo que va a utilizar, de ahí que un matemático pretende pensar y usar sus argumentos que crea en su mente, construye algoritmos como una colección de pasos en la resolución de problemas, ahí va desarrollando la demostración, luego comienza a programar conectando y justificando los argumentos y así validar la demostración.

2.2. Referentes sobre fundamentos psicológicos y didácticos

Teoría del aprendizaje por Descubrimiento - Jerome Bruner

En sus antecedentes, la teoría cognitiva constructivista del aprendizaje ha sido influyente desde la década de 1950. Jerome Bruner fue uno de los pioneros del constructivismo cognitivo y su libro de 1960, el Aprendizaje por descubrimiento (Discovery Learning) se ofrece como un modelo de instrucción para el aprendizaje de las ciencias con sus implicaciones para la educación científica. Se argumenta que el objetivo principal en la educación científica no es hacer que los estudiantes memoricen el conocimiento científico, sino ayudarlos a adquirir las actitudes, habilidades y conocimientos científicos que necesitan para comprender el mundo que los rodea, para resolver los problemas que encontrarán y para tomar decisiones informadas relacionadas con cuestiones científicas y sociocientíficas (Ozdem-Yilmaz, Y., & Bilican, K. 2020).

Dentro de los principales representantes que aportaron a esta teoría está el psicólogo, epistemólogo y biólogo suizo Jean Piaget, considerado el padre de la epistemología genética, reconocido por sus aportes al estudio de la infancia y por su teoría constructivista del desarrollo cognitivo. Para Piaget el aprendizaje por descubrimiento era importante ya que él afirmaba que sí a un niño se le enseñaba, se le privaba la oportunidad de que descubriera ese aprendizaje.

Jerome Bruner Nueva York, 1915 - 2016 Psicólogo y pedagogo estadounidense. Ejerció su cátedra de Psicología Cognitiva en la Universidad de Harvard y, junto con George Miller, fundó el Center for Cognitive Studies, considerado el primer centro de psicología cognitiva.

Para Bruner "*todo el conocimiento real es aprendido por uno mismo*" Bruner se interesó en especial por la evolución de las habilidades cognitivas que tienen los niños y por la necesidad de estructurar de manera adecuada los contenidos educativos, esto le dió el querer desarrollar una teoría que puede considerarse que tenga algunas características en común a las teorías planteadas por Jean Piaget, Lev Vygotski y David Ausubel.

"E*l aprendizaje por descubrimiento, además de ser un proceso de investigación y elaboración de un proyecto de trabajo, es también un aprendizaje significativo, porque adquiere sentido para la vida cotidiana*"[15].

Los fundamentos epistemológicos se centran en un paradigma constructivista, en donde el estudiante pueda ser capaz de construir significados de acuerdo a contenidos específicos del currículo, lo que hace que el estudiante tenga un papel activo y muy representativo, este constructivismo surge con teorías importantes como la teoría genética de Piaget, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel y la teoría del constructivismo social de Vygotski, tres teorías que se centraron en un paradigma constructivista que hace referencia a que las personas construyen ideas de cómo funciona el mundo.

"*El aprendizaje por descubrimiento recupera los mejores aportes de las corrientes pedagógicas del presente siglo, incluída la educación popular, las cuales parten de la realidad personal y social de los/as estudiantes*"[16].

Los supuestos teóricos que aborda esta teoría provienen de analizar cómo se concibe el aprendizaje desde una visión constructivista, cognitiva y social, destacando lo que plantea cada autor.

A continuación, se presentan las ideas de cada representante.

---

[15]González, M. (2003). Aprendizaje por descubrimiento o proyecto de investigación: posibilidades y límites. p. 4.
[16]González, M. (2003). Aprendizaje por descubrimiento o proyecto de investigación: posibilidades y límites. p. 5.

Tabla 1. Criterios de cuatro representantes, de cómo se efectúa el aprendizaje

Representantes	**Forma de concebir el aprendizaje.**
Jean Piaget	El aprendizaje se efectúa cuando el sujeto interactúa con el objeto.
Lev Vygotski	El aprendizaje se efectúa cuando el sujeto lo realiza en interacción con otros.
David Ausubel	El aprendizaje se efectúa cuando es significativo para el sujeto.
Jerome Bruner	El aprendizaje se efectúa cuando el sujeto lo descubre por sí mismo.

Elaboración propia.

De aquí que Bruner toma los aportes de estas teorías constructivistas, por un lado, de Piaget la interacción y manipulación de objetos lo que llama un modelo enactivo, por otra parte, de Vygotski cuando interactúa con otros lo que llama un modelo simbólico acerca del lenguaje, la comunicación y resalta el trabajo cooperativo, y finalmente, de Ausubel el busca que el descubrimiento del aprendizaje sea significativo para el estudiante y tenga sentido construido por el mismo estudiante.

Dentro de los componentes de la teoría de aprendizaje por descubrimiento, se abordan tres formas de descubrir el aprendizaje. Según Bruner, se pueden expresar tres tipos de descubrimiento.

Descubrimiento inductivo: **"***implica la colección y reordenación de datos para llegar a una nueva categoría, concepto o generalización"*[17].

[17]Cálciz, A. B. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista digital innovación y experiencias educativas, 7(40)*, p. 5.

Descubrimiento deductivo: "*el descubrimiento deductivo implicaría la combinación o puesta en relación de ideas generales, con el fin de llegar a enunciados específicos, como en la construcción de un silogismo"*[18].

Descubrimiento transductivo: "*en el pensamiento transductivo el individuo relaciona o compara dos elementos particulares y advierte que son similares en uno o dos aspectos"*[19].

La teoría del aprendizaje por descubrimiento, plantea tres formas, modelos o fases en que los sujetos pueden aprender, estos modelos son: el modelo enactivo, el modelo icónico y el modelo simbólico. Algunos autores hacen referencia a modelos y otros se refieren a fases, esto se debe a la dinámica en la que se aborde dicha teoría.Cuando se consideran de manera independiente se les nombra modelos de aprendizaje y cuando se consideran como parte de un proceso se denominan fases[20]

Para la presente investigación, las formas de aprendizaje, se van a considerar como un proceso y en este sentido se va a referir a ellas como fases del aprendizaje por descubrimiento.

- ❖ Fase Enactiva: Se aprende haciendo cosas, actuando o manipulando objetos.
- ❖ Fase Icónica: Se aprende haciendo uso de dibujos o imágenes abstractas producto de la manipulación.
- ❖ Fase Simbólica: Se precisa de un lenguaje de símbolos abstractos y estructurados propios, que dan lugar a generar un nuevo pensamiento abstracto[21].

---

[18]Cálciz, A. B. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista digital innovación y experiencias educativas, 7(40),* p. 5.
[19]Cálciz, A. B. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista digital innovación y experiencias educativas, 7(40),* p. 5.
[20]Coria Gonzalez, J. L. (2018). *Aprendizaje por descubrimiento en matemáticas: tres secuencias didácticas para 1° de secundaria* (Master's thesis). p. 33-34
[21]Coria Gonzalez, J. L. (2018). *Aprendizaje por descubrimiento en matemáticas: tres secuencias didácticas para 1° de secundaria* (Master's thesis). p. 35.

Estás fases se pueden contrastar analógicamente con los criterios de Piaget y Vygotski como se expone en la siguiente tabla.

Tabla 2. Contraste de las fases entre Piaget, Vygotski y Bruner

Fases o formas	Piaget	Vygotski	Bruner
Fase Enactiva	Estado sensoriomotor	Reacción natural sin uso de símbolos	Se aprende haciendo cosas, actuando y manipulando objetos
Fase Icónica	Estado pre operacional	Uso de símbolos externos	El uso de dibujos o imágenes
Fase Simbólica	Etapa lógico concreta y lógico abstracta	Uso de símbolos internos	Precisa el lenguaje de símbolos abstractos y estructurados

Elaboración propia.

El **objetivo** del aprendizaje por descubrimiento es, brindar competencias o acciones que conciba un desarrollo cognitivo, donde el docente utilice el andamiaje necesario a través de las fases y los principios de la instrucción de modo que los estudiantes lleguen a descubrir el mundo de una manera activa, constructiva, adquiriendo los conocimientos por sí mismos, fortaleciendo el pensamiento crítico, la autonomía, el trabajo cooperativo y la creatividad.

Las competencias o acciones generales que se adquieren al abordar la teoría de Bruner en el aprendizaje por descubrimiento pueden ser las siguientes:

- Observación
- Análisis
- Comparación
- Aprender a aprender
- Resolución de problemas

Según varios autores, algunos de los principios de la instrucción que aborda la teoría del aprendizaje por descubrimiento son los siguientes:

- Principio de motivación: Predisposición o disposición que se puede tener para aprender.
- Principio de secuenciación: Organización de los contenidos para que tenga una mejor comprensión del aprendizaje.
- Principio de reforzamiento: La respuesta favorable, afecta la conducta posterior en cada estudiante
- Principio de retroalimentación: El acompañamiento del docente es inversamente proporcional para que el estudiante cada vez pueda ser más capaz de evaluar su propio trabajo.
- Principio de estructuración y conceptualización: El estudiante llega al aprendizaje con el desarrollo cognitivo, es capaz de proponer.

El docente debe tener un papel de guía y mediador durante el proceso, dando el andamiaje suficiente (el apoyo eficaz que se ajusta a las competencias y varía en la medida que se tenga mayor responsabilidad), optimizando los recursos, para que los estudiantes alcancen el aprendizaje por sí mismos, utilizando cada uno de los principios de manera adecuada, aplicando con eficacia cada una de las fases o modelos que conciben el desarrollo cognitivo e impartiendo una evaluación continua del proceso y un acompañamiento inversamente proporcional. Bruner "*deja en libertad la creatividad de los maestros y maestras a 1a la hora de aplicar estas orientaciones metodológicas*"[22].

Los estudiantes deben tener un papel activo, con una disposición y motivación de aprender, asimilar las orientaciones metodológicas, aplicar las competencias y las acciones de aprendizaje, construir significados, trabajar cooperativamente, ser crítico y buscar hábitos de aprender a aprender siendo capaces de continuar el desarrollo del aprendizaje de manera autónoma.

La evaluación se concibe como un proceso continuo y progresivo con las fases del aprendizaje, a partir de la implementación de un sistema de actividades dentro de la orientación metodológica, que utilice cada uno de los principios de la instrucción y lleve una retroalimentación constante y un acompañamiento del docente como guía, que le brinde el andamiaje al estudiante y lo lleve a que sea capaz de evaluar el conocimiento que construye.

El aprendizaje por descubrimiento tiene el lugar que le corresponde entre el repertorio de técnicas aceptadas disponibles para los profesores. Para ciertos propósitos y bajo ciertas condiciones, tiene una justificación defendible y ventajas indudables. Por tanto, la cuestión no es si debería o no utilizarse en el aula, sino con qué fines y en qué condiciones (Ausubel, D. P. 1964).

"*Parece que existe un momento en el que las matemáticas pueden ser descubiertas y el aprendizaje, cabría afirmarlo, será más profundo y completo cuando se haya logrado por este medio, en lugar de utilizar la mera exposición" (Orton, 2003. p. 109).*"[23].

"*De igual forma se enfatiza el hecho de que en la actualidad la enseñanza de la matemática debe ser activa independientemente si se utiliza el descubrimiento, la investigación o la resolución de problemas*

[22]González, M. (2003). Aprendizaje por descubrimiento o proyecto de investigación: posibilidades y límites. p. 9.
[23]Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas.* Ediciones Morata. p.109.

como medio a utilizar en la clase. La autora Edith Biggs también ha escrito al respecto: "Los métodos de descubrimiento, investigación, o aprendizaje activo proporcionan a los alumnos la oportunidad de pensar por sí mismos y generan un interés real por las matemáticas" (Orton, 2003. p. 111)."[24].

2.3. Referentes sobre el planteamiento y la resolución de problemas

La resolución de problemas ha sido y viene siendo constantemente un tema de investigación, actualmente en el ICME 14 en el **(TSG 17) Problem Posing and Solving in Mathematics Education** se fusiona la resolución de problemas y el planteamiento de problemas, lo que da lugar a un campo mayor de investigación.

Para hablar de la resolución de problemas algunos autores definen inicialmente problema:

Para Krulik y Rudnik problema es: *"… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[25]

Un problema matemático debe ser una situación que permita: explorar, conjeturar, comprobar o demostrar y comunicar la solución.

Fases en la resolución de problemas

Estas se llevan a cabo a través de heurísticas (arte para resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento divergente).

Según Dewey (1933) se sienta una dificultad, se formula y se define la dificultad, se sugieren posibles soluciones, se obtienen consecuencias y se rechazan o se aceptan las soluciones.

---

[24]Coria Gonzalez, J. L. (2018). *Aprendizaje por descubrimiento en matemáticas: tres secuencias didácticas para 1° de secundaria* (Master's thesis). p. 32.
[25] Krulik, S. & Rudnik, J. (1980). Problem solving: a handbook for teachers. *Boston: Allyn and Bacon*. p. 4.

Para Polya (1945) primero se comprende el problema, se concibe un plan, se ejecuta el plan y se examina y supervisa la solución, para él tener un problema: *"… significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata"* [26]

En el modelo de Schoenfeld (1985) se analiza y se comprende el problema, luego se diseña y se planifica una solución, se exploran soluciones y se verifica la solución.

Mason, Burton y Stacey (1989) proponen un modelo con tres fases en el proceso de particularización está el abordaje y en el proceso de generalización está el ataque y la revisión.

Según Miguel de Guzmán (1994) se familiariza con el problema, se busca estrategias, se lleva a cabo la estrategia y se revisa el proceso y se saca consecuencias de él.

El problema retador, es un problema que invita al estudiante a pensar de manera autónoma y explicar sus razonamientos, Perez (2014).

Según Falk (2001) un problema retador: *"… exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos. Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático en sí"*[27].

2.4. Referentes sobre la argumentación y la demostración

Cuando se realizan las argumentaciones y las demostraciones en la matemática se encuentra que para los matemáticos el realizar demostraciones les puede resultar natural y fácil pero para los docentes que

---

[26] Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons, p. 117.

[27] Falk, M. (2001). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones*. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

no están habituados y para los estudiantes les resulta difícil debido a que no tienen la suficiente experiencia para generar un buen proceso al argumentar y al demostrar.[28] Con respecto a estas dos concepciones existen diferentes matices para definirlos y dependen de cada autor.

Para Duval la concepción de la demostración hace referencia al criterio de validez, y la concepción de la argumentación hace referencia al criterio de pertinencia.

Por otra parte, la falta de claridad de los dos procesos en el aula lleva a que los docentes y los estudiantes se les dificulte la resolución de problemas y no vean que estos procesos conllevan a generar diferentes maneras de razonar en el momento de solucionar diversas problemáticas (Crespo, 2014); (Saoríın, A., Torregrosa, G. y Quesada, H.2017).

Por una parte, la argumentación es un proceso que se realiza al iniciar la demostración, es decir que se inicia con argumentos en un pensamiento inicial de las matemáticas, los cuales se empiezan a validar y a comprobar. Al desarrollar algún tipo de programación, es necesario construir los argumentos antes de iniciar con la programación y por otra parte, la demostración o prueba es un proceso que se lleva a cabo antes, durante y después, por lo que se realiza la validación y comprobación en: los argumentos, los algoritmos y la programación, de aquí se permite llegar a la solución al problema planteado.

2.5. Referentes sobre el uso de las TIC

El uso de software educativo o un asistente matemático, facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el sentido de brindar diferentes funciones tales como: una función informativa, una función instructiva, una función evaluadora, una función motivadora, una función investigadora, una

[28] Duval, R. (2007). *Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In Theorems in school* (pp. 135-161). Brill Sense.

función expresiva, una función lúdica y una función innovadora. Esto le brinda las herramientas al estudiante que le facilitan el resolver problemas matemáticos.

Forsström, S. E., & Kaufmann, O. T. (2018) afirman que la programación en la educación matemática podría mejorar la motivación de los estudiantes para aprender matemáticas y el desempeño de los estudiantes en matemáticas, así como el trabajo colaborativo y colectivo a través de las discusiones entre los estudiantes.

Python: Es un programa de lenguaje de programación poderoso y fácil de aprender, cuenta con estructuras eficientes y de alto nivel, tiene una elegante sintaxis. El intérprete de Python y la extensa biblioteca es de libre acceso, desde el sitio web https://www.python.org/ puede distribuirse libremente y el mismo sitio web contiene muchos módulos de libre acceso (Van Rossum, G., Drake Jr, F. L. 2017), aunque este software es muy bueno para la programación como lo argumenta el autor, no es tan llamativo para estudiantes con edades entre los 12 y 13 años de edad y presenta una mayor complejidad a la hora de programar por lo cual no se utiliza para el desarrollo de la investigación.

Scratch: Es un programa que da la posibilidad de incorporar a los estudiantes desde muy pequeños en el mundo de la programación, abordando contenidos interdisciplinares de manera creativa y promueve la resolución de problemas (Molina, Á. 2014).

Este programa es un entorno de programación que permite el aprendizaje autónomo debido a que posibilita obtener resultados de manera muy fácil sin necesidad de escribir sintácticamente de forma correcta.

Según Molina el objetivo principal del Scratch, es hacer que la programación sea el medio para llevar a cabo el proceso de aprendizaje y es allí que busca una metodología de trabajo en la que se fomenta un aprendizaje por descubrimiento.

Algunos contenidos al trabajar matemáticas con Scratch como lo expresa Molina, Á. (2014) son:

- Coordenadas en el plano
- Desigualdades
- Variables

Esto conlleva unas ventajas y desventajas para el desarrollo de la investigación, ya que por un lado el programa ofrece una programación llamativa e interactiva para los estudiantes de las edades entre los 12 y 13 años, así como la relación a la teoría de aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas. Por estas razones este programa se utiliza para el desarrollo de la investigación viendo que es pertinente y apropiado utilizarlo como medio para el abordaje de los problemas de matemáticas.

Conclusiones

De este capítulo se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- Se analiza los referentes filosóficos, psicológicos y didácticos que dan lugar a la importancia de implementar una teoría basada en el aprendizaje por descubrimiento el cual brinda al estudiante la oportunidad de generar conocimiento por sí mismo con la guia del docente, lo que permite fomentar en los estudiantes la creatividad, un pensamiento crítico y un desarrollo cognitivo.
- Se concibe la resolución de problemas como una parte primordial en el desarrollo de la investigación teniendo en cuenta que tiene un amplio campo de investigación y que se relaciona con la teoría del aprendizaje por descubrimiento al desarrollar pensamiento matemático.
- Se enfatiza el proceso de argumentación y el proceso de demostración, las diferentes concepciones y sus relaciones entre sí y la manera de verlo dentro de la investigación.

- Se propicia un espacio tecnológico desde el campo de la programación y los algoritmos lo que lleve a relacionar la argumentación, la demostración, y la validación con el pensamiento computacional a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

El presente capítulo da una mirada en primer lugar, a la metodología de la investigación (el tipo de enfoque pedagógico y el diseño metodológico de la investigación, se identifica la población, el tipo de muestra para el estudio, las técnicas y las fases de la investigación). En segundo lugar, a la metodología propia de las actividades que se fundamenta con la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Bruner.

3.1. Metodología de la investigación

Para Bernal (2000), la metodología de la investigación la define como un plan o una estrategia concebida para dar respuesta al problema y alcanzar los objetivos de la investigación.

La metodología presenta las siguientes características:

- Introduce el acercamiento metodológico, señala el tipo de enfoque o paradigma
- Especifica los métodos para la recolección de la información de la investigación.
- Informa cómo se analizarán los resultados.
- Posibilita una justificación para la selección del sujeto.
- Explica cómo se selecciona la muestra.
- Describe las posibles limitaciones prácticas que podrían afectar la recolección de información.

La estrategia plantea diferentes etapas[29]:

[29]Hernadez & Sampieri, Fernández C., y Baptista L. (2014)). Aprendizaje por descubrimiento o proyecto de investigación:

1. Se selecciona el enfoque y tipo de paradigma
2. Dentro del enfoque o paradigma se selecciona el tipo de diseño, marco o abordaje que se selecciona de acuerdo a como está encaminada la pregunta de investigación y el objeto de estudio.
3. Se selecciona, la población y la muestra del estudio de investigación.
4. Se seleccionan los métodos y las técnicas a implementar de acuerdo al tipo de enfoque.
5. Se plantean las fases de la investigación de acuerdo al enfoque.
6. Se elabora un cronograma para alcanzar las tareas de investigación.

3.1.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

3.1.1.1. Enfoque Metodológico

Según Pérez (2009) es importante implementar un enfoque de tipo cualitativo en primer lugar "*…se desea conocer las razones por la que los individuos (aisladamente o en grupo) actúan en la forma en que lo hacen, tanto en lo cotidiano, como cuando un suceso irrumpe de forma tal que puede dar lugar a cambios en la percepción que tienen las cosas"*[30].

Por otra parte *"… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[31].

Estas razones expresadas, se presentan en los procesos desarrollados en la investigación, con el fin de analizar la realidad de los estudiantes desde su contexto.

posibilidades y límites. p. 4.

[30] Báez, J. y Pérez, T. (2009). La Investigación cualitativa. Madrid. *Segunda edición, 2009, ESIC*. p. 24.

[31] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 358.

Es así que se escoge un enfoque de tipo cualitativo que cuenta con las siguientes características.

- ❖Es importante estar dentro de la realidad y partir de la sociedad en su contexto.
- ❖Es pertinente que tanto el sujeto como el investigador tenga un papel activo dentro del proceso de investigación.
- ❖Es apropiado construir el diseño e ir generando hipótesis durante el proceso de investigación.
- ❖ Es relevante que los datos, el análisis, la recolección y los resultados tengan muchas alternativas y maneras de presentar que permitan describir el desarrollo investigativo.

3.1.1.2. Diseño Metodológico

Esta investigación asume un diseño de investigación – acción, utilizando un enfoque práctico y participativo, según varios autores se contempla diferentes perspectivas (visión técnico-científica, visión deliberativa, visión emancipadora)[32,33].

Este diseño *"… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría"*[34].

A continuación, se muestra la gráfica número 1 que relaciona las características del diseño metodológico de investigación-acción.

Figura 1. Elementos del diseño de investigación - acción[35].

[32] Lev … 111/j.1540-4560.1 …
[33] Ellio …
[34] Min …
[35] Herr … l. 3). Sexta edició …

3.1.2. Alcance del estudio

La investigación pretende brindar un aporte práctico que contribuya a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Este aporte se basa en el diseño e implementación de un sistema de actividades que permita la caracterización de la relación entre la argumentación y la demostración mediante el planteamiento de problemas matemáticos que puedan utilizar la tecnología por medio de la programación y el algoritmo.

3.1.3. Población y muestra o unidad de análisis

Al momento de seleccionar el tipo de muestra que la investigación va a utilizar los diferentes autores exponen que de acuerdo a los casos disponibles a los cuales se puede tener acceso es necesario tomar una muestra por conveniencia. (Battaglia 2008a); (Creswell 2013 b); (Hektner, 2010); & (Miles & Huberman, 1994).

Población: Los estudiantes de la I.E.D. Gonzalo Jiménez de Quesada del Municipio de Suesca – Cundinamarca

Muestra por conveniencia y auto selectiva (son los casos disponibles a los que se tiene acceso y que ellos mismo se seleccionan): Es un grupo de estudiantes que se auto seleccionaron por motivación a participar en un semillero que se realiza en jornada extra escolar, compuesto por 12 estudiantes con las edades entre los 12 y los 13 años de edad de la I.E.D. Gonzalo Jiménez de Quesada del Municipio de Suesca - Cundinamarca.

3.1.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos de investigación empírica[36].

3.1.4.1. Métodos Investigación empírica

En la investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica dentro de un sustento teórico y empírico. Se tienen los métodos teóricos tales como:

Análisis de fuentes: para construir el estado del arte y el marco teórico que sustenta la investigación.

Análisis-síntesis: para determinar las tendencias actuales y la pertinencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de las temáticas de: la resolución de problemas, la argumentación y la demostración, y la programación y los algoritmos, temáticas para elaborar el estado del arte.

[36] Dalle, P., Boniolo, P., Sautú R. & Elbert R. (2005) *Manual de metodología. Construcción del marco teórico, formulación de los objetivos y elección de la metodología.* Buenos Aires, Argentina, CLACSO, Consejo latinoamericano de Ciencias Sociales, (pp 47)

3.1.4.2. Técnicas para la recolección de datos

Se destacan técnicas para la recolección de datos, entre los cuales se emplean:

Observación participante: se realiza la observación en clases en jornada extraescolar, con el fin de recopilar información del proceso de enseñanza aprendizaje con un grupo auto seleccionado en un semillero.

Entrevista: se realiza entrevista a expertos que han investigado por varios años sobre la resolución de problemas matemáticos de olimpiadas computacionales y estudios acerca del pensamiento computacional en relación a la resolución de problemas matemáticos y la programación y el uso de algoritmos.

Trabajo de campo: Consiste en la inmersión dentro del contexto y el entorno para llevar a cabo la investigación. Según diferentes autores es necesario llevar registros de los participantes,realizar entrevistas iniciales, tomar evidencias fotográficas y escritos o argumentos que sean útiles para el desarrollo de la investigación[37].

3.1.5. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se llevará a cabo cuatro fases como se presenta a continuación:

Fase 1 Exploración, pertinencia y metodología de la investigación

En esta fase se pretende realizar el diseño teórico (la fundamentación de la investigación, la justificación de la investigación, la situación a estudiar, el problema de investigación, el objeto de estudio, el objetivo general, los objetivos específicos, el campo de acción, las preguntas de investigación, las tareas de

[37] Hernández & Sampieri, R., Fernández C. & Baptista L.. (2014). *Metodología de la Investigación (Vol. 3)* Sexta Edición. México, McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V. (pp 375-376)

investigación y el aporte práctico) y en la metodología (el enfoque, el diseño, la población, la muestra, los métodos, las técnicas, el trabajo de campo, las fases y el cronograma).

Fase 2 referentes teóricos y prácticos

En esta fase se buscará la literatura, relacionados con el objeto de estudio y el campo de acción para consolidar el estado del arte, y determinar los referentes teóricos y prácticos que constituyen el marco teórico de la investigación, así como el diseño de actividades preliminares que permitan evidenciar su pertinencia.

Fase 3 Diseño e implementación del sistema de actividades

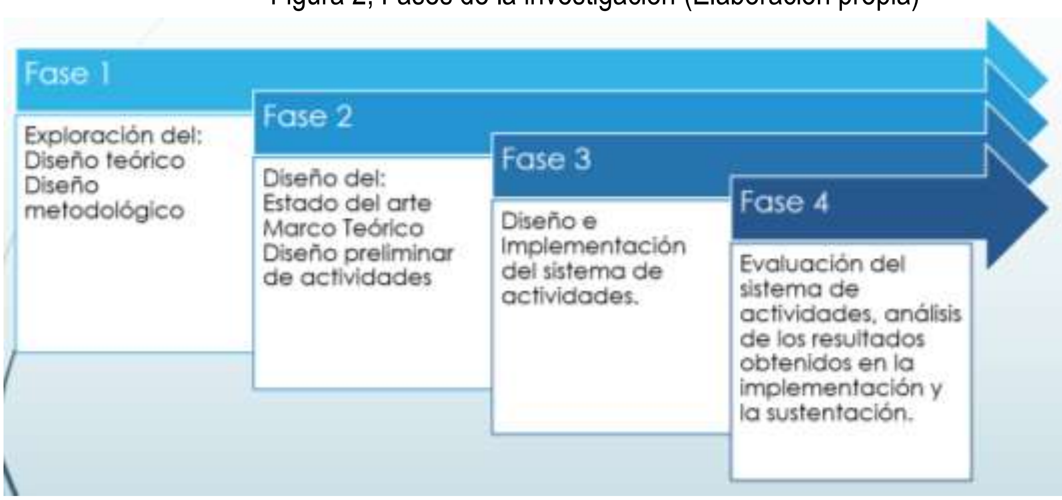
En esta fase se diseñará e implementará el sistema de actividades que permitan caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración a través de la resolución de problemas matemáticos computacionales con los estudiantes relacionados en la muestra.

Fase 4 Evaluación, análisis y sustentación

En esta fase se pretende evaluar el sistema de actividades, luego se analizarán los resultados obtenidos en la implementación del sistema de actividades y se realizará la presentación del proyecto.

Como se especifica en la figura número 2 que se presenta a continuación.

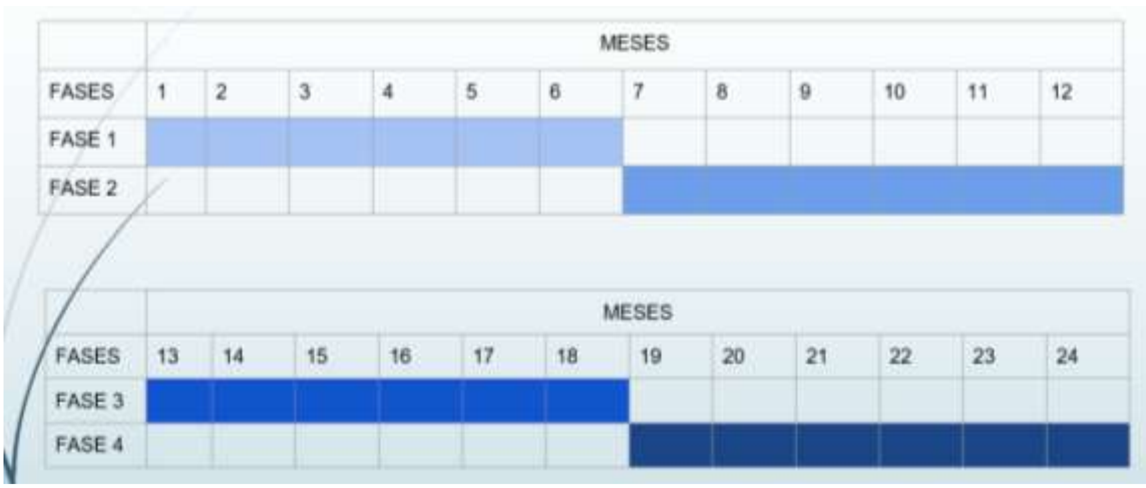
Figura 2, Fases de la investigación (Elaboración propia)



3.1.6. Cronograma

En la figura número 3, se especifica el cronograma relacionando las fases en los meses abordados para la realización de la investigación.

Figura 3. Cronograma de actividades (Elaboración propia)



	MESES											
FASES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
FASE 1												
FASE 2												

	MESES											
FASES	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
FASE 3												
FASE 4												

3.2. Metodología propia de las actividades

El docente organiza un semillero el cual es un grupo de estudiantes que asisten en jornada extra escolar, allí se realizan sesiones de trabajo donde se implementa un sistema de actividades en relación al planteamiento y la resolución de problemas matemáticos, y fundamentado en la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner, este abordaje dentro del sistema de actividades permite que a través del planteamiento y resolución de problemas se llegue a caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración, se organiza a los estudiantes de manera individual o grupal y se les brinda libertad en la construcción de argumentos y algoritmos para cada actividad.

3.2.1. Fundamentación de las actividades desde el marco teórico

El sistema de actividades busca implementar la teoría de aprendizaje por descubrimiento desarrollada por Jerome Bruner, centrándose en que todo el conocimiento, el estudiante lo aprende por sí mismo.

Al abordar esta teoría, el docente es guía y mediador durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, buscando que los estudiantes adquieran competencias por lo que las actividades van en relación a las fases y a los principios de la instrucción que se conectan entre sí, como se aclara en el marco teórico.

3.2.1.1. Estructura de la metodología de acuerdo a la teoría

A continuación, se presenta una estructura que relaciona las características de la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner lo cual es la base metodológica dentro del sistema de actividades.

Tabla 3. Metodología de acuerdo al aprendizaje por descubrimiento (Jerome Bruner)

METODOLOGÍA DE ACUERDO AL APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO (JEROME BRUNER)		
ETAPAS O PRINCIPIOS DE LA INSTRUCCIÓN	**COMPETENCIAS O ACCIONES GENERALES**	**FASES**
Principio de motivación	OBSERVA la descripción del problema matemático y sus características.	Enactiva
Principio de secuenciación	COMPARA la pregunta con el problema, iniciando la demostración, construyendo argumentos que le lleven a la solución.	Icónica
Principio de reforzamiento	ANALIZA la situación propuesta por el docente que le lleven a la solución de una nueva situación.	Simbólica

Principio de retroalimentación	PROPONE otros argumentos a situaciones similares presentadas al problema original de tal manera que le den la estrategia para llegar a la solución.	Simbólica
Principio de estructuración /conceptualización (Evaluación continua)	RESUELVE PROBLEMAS mediante la programación del algoritmo y genera la solución a dicho problema. APRENDE A APRENDER cada vez que pueda crear otra situación, argumento y algoritmo que lo lleve a otra solución en relación al problema matemático original.	Simbólica

Elaboración propia

3.2.2. Contextualización

El sistema de actividades en primera instancia, va dirigido a una muestra de estudiantes como se aclaró en la metodología de investigación y en segunda instancia, va enfocado a la caracterización de la relación entre la argumentación y la demostración se aborda a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos y los argumentos que planteen los estudiantes de manera cooperativa y de forma individual, en la cual se evidencie la construcción de algoritmos que permitan la utilización de la programación y la demostración.

3.2.3. Objetivos de las actividades

Dentro del sistema de actividades se elabora para cada actividad un objetivo puntual en relación al problema matemático que aborda y a la pregunta que se requiere brindar solución a través de la programación.

Actividad 1 *EL TAXI*

Objetivo: Elaborar argumentos y algoritmos que le permitan conocer el costo de la carrera que hace el taxista desde una casa hasta el lugar de destino, de tal manera que utilice la programación.

Actividad 2 *LA FINCA*

Objetivo: Construir argumentos y algoritmos que le permita conocer la longitud de la cerca (perímetro) y el área de un terreno rectangular dando la coordenada del vértice inferior izquierdo y la coordenada del vértice superior derecho, de tal manera que utilice la programación.

Actividad 3 *LAS CARTAS*

Objetivo: Establecer argumentos y algoritmos que le permitan saber cómo pueden ganar en el juego de cartas de tal manera que utilice la programación.

Actividad 4 *LA PIRÁMIDE*

Objetivo: Construir argumentos y algoritmos que le permitan organizar cuatro números en la base de una pirámide que permita obtener en la cima con un número de mayor o menor valor numérico, de tal manera que utilice la programación.

Actividad 5 *EL CUBO*

Objetivo: Elaborar los argumentos y algoritmos que le permitan construir un cubo en donde la suma de las tres caras opuestas tenga el mismo valor y sea múltiplo de tres, de tal manera que utilice la programación.

Conclusiones

De este capítulo se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- Se define el tipo de paradigma y enfoque que pretende utilizar la investigación, con sus características y etapas del proceso del plan metodológico del estudio, planteando el tipo de diseño de investigación apoyado en sus diferentes perspectivas y características.
- Se explica cada una de las etapas de la metodología como: la selección de la muestra, el trabajo de campo, los métodos y las técnicas de recolección de información, el planteamiento de las fases de la investigación y la elaboración del cronograma.
- Se presenta la metodología propia de las actividades en relación a la teoría del aprendizaje por descubrimiento (Jerome Bruner) y los objetivos elaborados para cada una de las actividades.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES

En este capítulo se presenta un sistema de actividades que benefician el proceso de enseñanza-aprendizaje a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos que ayudan a caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración. Este planteamiento de problemas matemáticos utiliza como medio tecnológico los algoritmos y la programación que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático de manera similar a como los que se abordan en la Olimpiada Colombiana de Computación (OCC) y la Olimpiada Internacional de Informática (IOI).

4.1. Propuesta de actividades

A continuación, se presentan las actividades planteadas para el aporte práctico en la presente investigación. Para cada una de las actividades una descripción metodológica (título, objetivo, pensamiento matemático y recursos), una solución dada por el docente, y el desarrollo de la actividad que sirva de guía para ser implementada.

4.1.1. Actividad 1 *EL TAXI*

4.1.1.1. Descripción metodológica de la actividad

El docente organiza a los estudiantes por parejas, les permite libertad en la construcción de argumentos y algoritmos para que ellos desarrollen pensamiento matemático y lleguen a la solución del problema a través del proceso de demostración y la programación.

Objetivo: Elaborar argumentos y algoritmos que le permitan conocer el costo de la carrera que hace el taxista desde una casa hasta el lugar de destino, de tal manera que utilice la programación.

Pensamiento Matemático: Pensamiento numérico y pensamiento variacional

Recursos para la actividad: lápiz y hojas carta.

Software para programación, Computador, internet.

4.1.1.2. Desarrollo de la actividad 1

Principio de motivación lo que realiza el docente

El docente permite que los estudiantes trabajen de manera individual y les presenta el problema matemático ***EL TAXI***: La mamá de Irene toma un taxi por la noche desde su casa para realizar una diligencia importante, al tomar el taxi desde su casa hay un costo inicial de banderazo o arranque de 2600 pesos, adicional tiene un recargo nocturno de 2400 pesos, además por cada minuto que pase detenido el taxista cobra 200 pesos y por cada kilómetro recorrido cobra 900 pesos, hasta llegar al lugar de destino.

Principio de motivación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **observan** el problema ***EL TAXI***.

Se sugiere que los estudiantes respondan lo siguiente.

¿Qué (variables) información importante pueden identificar en la descripción del problema?____

Principio de secuenciación lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente pregunta al problema matemático planteado para que hagan un programa que les permita saber:

¿Cuánto le cobró el taxista por llevar a la mamá de Irene desde su casa hasta su lugar de destino?

Principio de secuenciación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **comparan** la pregunta con el problema planteado de tal manera que les permita, plantear argumentos que le ayuden con el inicio de la demostración, se sugiere que los estudiantes expresen.

¿Cuáles son sus propios argumentos a este problema? ______________________________

Principio de reforzamiento lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente situación.

Si el costo de la carrera fue de 30000 pesos ¿Cuántos minutos estaría el taxi detenido y cuántos kilómetros habrá recorrido el taxista desde la casa hasta el lugar de destino?

Se les sugiere una situación similar para abordar la pregunta anterior, sí el costo inicial del banderazo o arranque es de 25 pesos, además, por cada minuto que esté el taxi detenido cobra 2 pesos y por cada kilómetro recorrido cobra 8 pesos, hasta llegar al lugar de destino.

Principio de reforzamiento lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **analizan** una situación similar al problema inicial ***EL TAXI***, se sugiere expresar un nuevo argumento. ____

____

Si el costo de la carrera fuese 225 pesos, ¿El problema similar abordado tiene solución en números enteros?

si __ no ___ ¿por qué? ____

¿Cuál es el máximo número de minutos que podría estar detenido el taxi? ___________________

¿Cuál es el máximo número de kilómetros que podría recorrer el taxi? ______________________

¿Cuáles son las soluciones? ____

¿Cuántas soluciones tiene? ____

¿Puede establecerse alguna relación entre los minutos y los kilómetros? _____________________

Principio de retroalimentación lo que realiza el docente

El docente invita a los estudiantes para que planteen unos argumentos ante la situación similar planteada que permita dar solución a dicho problema.

Principio de retroalimentación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **proponen** ante la nueva situación otros argumentos, se sugiere que los estudiantes expresen

Si el costo de la carrera fuese 300 pesos, ¿El problema similar abordado tiene solución en los números enteros?

si __ no __ ¿por qué? ____

sí la respuesta es sí, por favor responder las preguntas planteadas anteriormente _______________

si la respuesta es no, ¿Puede establecerse otro análisis? __________________________________

Si el costo de la carrera fuese de 30000 pesos, de acuerdo a los datos del problema inicial.

¿Cuáles son sus propios argumentos a la pregunta? ____________________________________

¿El problema abordado tiene solución en números enteros?

si __ no ___ ¿por qué? ____

¿Cuál es el máximo número de minutos que podría estar detenido el taxi? _____________________

¿Cuál es el máximo número de kilómetros que podría recorrer el taxi? ________________________

¿Cuáles son las soluciones? ____

¿Cuántas soluciones tiene? ____

¿Puede establecerse alguna relación entre los minutos y los kilómetros? ______________________

¿Cuál es la variación en los minutos y en los kilómetros? __________________________________

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el docente

El docente les plantea que resuelvan el problema al crear un algoritmo que dé solución a través de la programación con Scratch y puedan crear otro algoritmo de acuerdo a la segunda situación propuesta.

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **resuelven el problema**, al construir el algoritmo que lleve al programa a dar solución a la pregunta de la situación similar.

Los estudiantes modifican el enunciado para dar solución a la siguiente situación, construyen otro algoritmo de acuerdo al problema original presentado, de esta manera se evidencia que los estudiantes **aprenden a aprender** cada vez que puedan crear otra situación y otro algoritmo que dé solución al problema planteado.

4.1.1.3. Desarrollo de los argumentos y el algoritmo

Descripción del problema matemático: La mamá de Irene toma un taxi por la noche desde su casa para realizar una diligencia importante, al tomar el taxi desde su casa hay un costo inicial de banderazo o arranque de 2600 pesos, adicional tiene un recargo nocturno de 2400 pesos, además por cada minuto que pase detenido el taxista cobra 200 pesos y por cada kilómetro recorrido cobra 900 pesos, hasta llegar al lugar de destino.

Pregunta a problema matemático: Haga un programa que le permita saber:

¿Cuánto le cobró el taxista por llevar a la mamá de Irene desde su casa hasta su lugar de destino?

Inicio de la demostración:

$ENTRADA$: minutos de espera y kilómetros recorridos m, k ___ ___

$SALIDA$: costo de la carrera desde su casa hasta el lugar de destino ____

Continuación de la demostración (Argumentos posibles)

1. Hay un costo a pagar de banderazo o arranque el cual es constante siempre que se tome el taxi desde la casa y un costo constante de recargo nocturno al tomar el taxi en la noche.

2. Por cada minuto de espera hay un costo adicional en la carrera y por cada kilómetro recorrido hay un costo que se sube a la tarifa de la carrera.
3. Se plantea una ecuación a partir del inicio de la carrera, la variación del tiempo de espera y de la distancia del recorrido.
4. Al conocer el costo de la carrera se establece una relación entre el número de minutos detenido el taxi con el número de kilómetros que recorre el taxi, Si el número de minutos aumenta el número de kilómetros disminuye y está relación se da viceversa.
5. Se puede establecer dos casos particulares primero cuando el taxi permanece detenido es decir que no avanza ningún kilómetro por lo que se alcanza un máximo de minutos detenido y segundo cuando el taxi en ningún momento se detiene alcanza un máximo de kilómetros recorridos.
6. Se establece una regularidad entre el número de minutos y el número de kilómetros y esto permite establecer la cantidad de soluciones que hay en el problema o si por el contrario el problema no tiene solución en números enteros positivos.

Continuación de la demostración (Algoritmo posible)

variables de ENTRADA

$$m \ = equivale\ a\ los\ minutos\ de\ espera\ durante\ la\ carrera$$

$$k = equivale\ a\ los\ kilómetros\ recorridos\ durante\ la\ carrera$$

variables de SALIDA

$c = equivale\ al\ costo\ de\ la\ carrera\ desde\ la\ casa\ hasta\ el\ lugar\ de\ destino$

Algoritmo

$$banderazo\ o\ arranque\ tiene\ un\ costo\ de\ 2600\ pesos, recargo\ nocturno\ 2400\ pesos$$

$$c = 2600 + 2400 + 200 * m + 900 * k$$

Terminación de la demostración (Validación)

verificar cada argumento, verificar cada algoritmo utilizado y verificar la ENTRADA y la SALIDA a través de diferentes ejemplos.

ENTRADA: _*4*_ _*10*_ SALIDA: __*14800*__

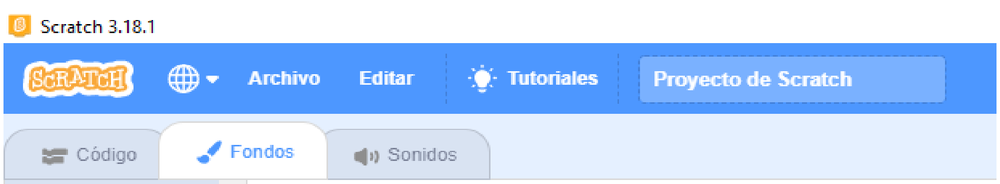
CASO 1 $c = 5000 + 200 * m + 900 * 0$ $c = 5000 + 200 * m$

CASO 2 $c = 5000 + 200 * 0 + 900 * k$ $c = 5000 + 900 * k$

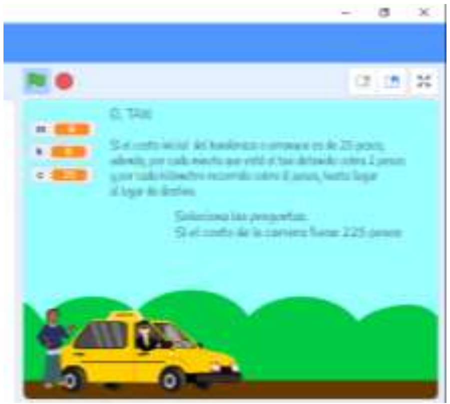
RELACIÓN por cada 2 kilómetros que recorre disminuye 9 minutos o por cada 9 minutos que avance disminuye 2 kilómetros.

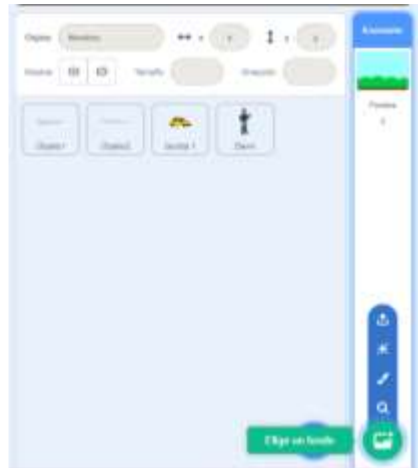
4.1.1.4. Desarrollo de la programación con Scratch

- Se abre el programa Scratch, en la primera vista hay tres pestañas, (código, disfraces y sonido)

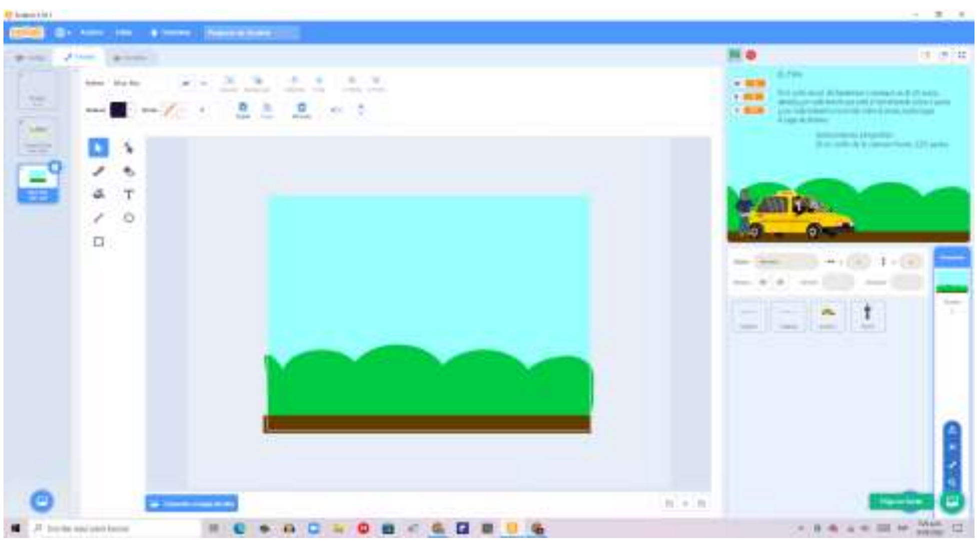


❖ En la otra vista se observa cómo se ejecuta el programa, se puede colocar en toda la pantalla y otra ventana inferior, donde se puede cambiar de objeto y de fondo.

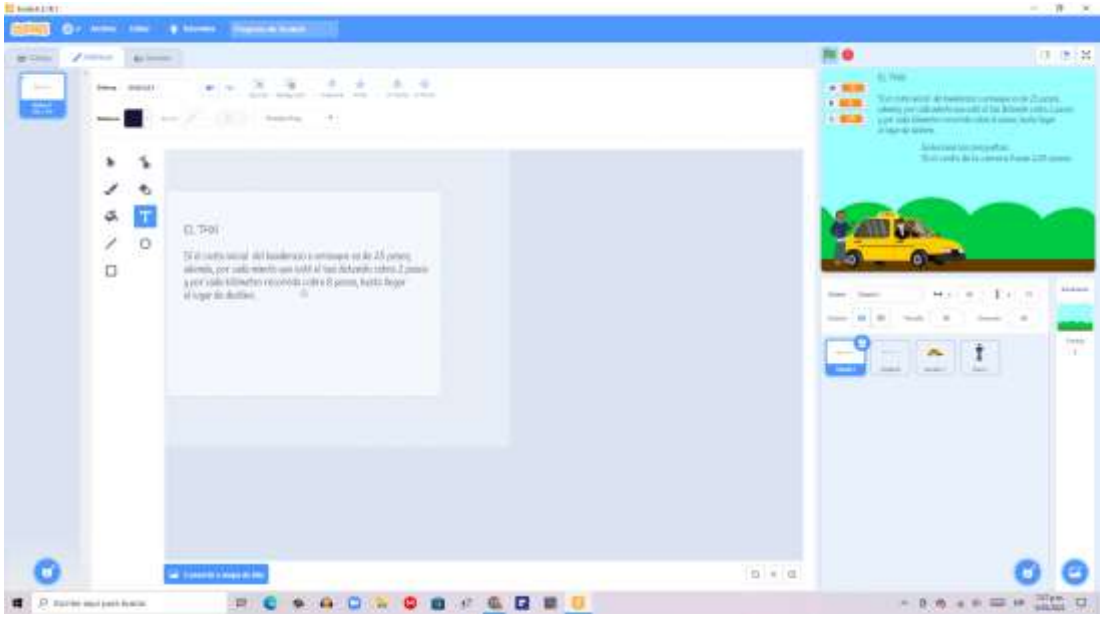




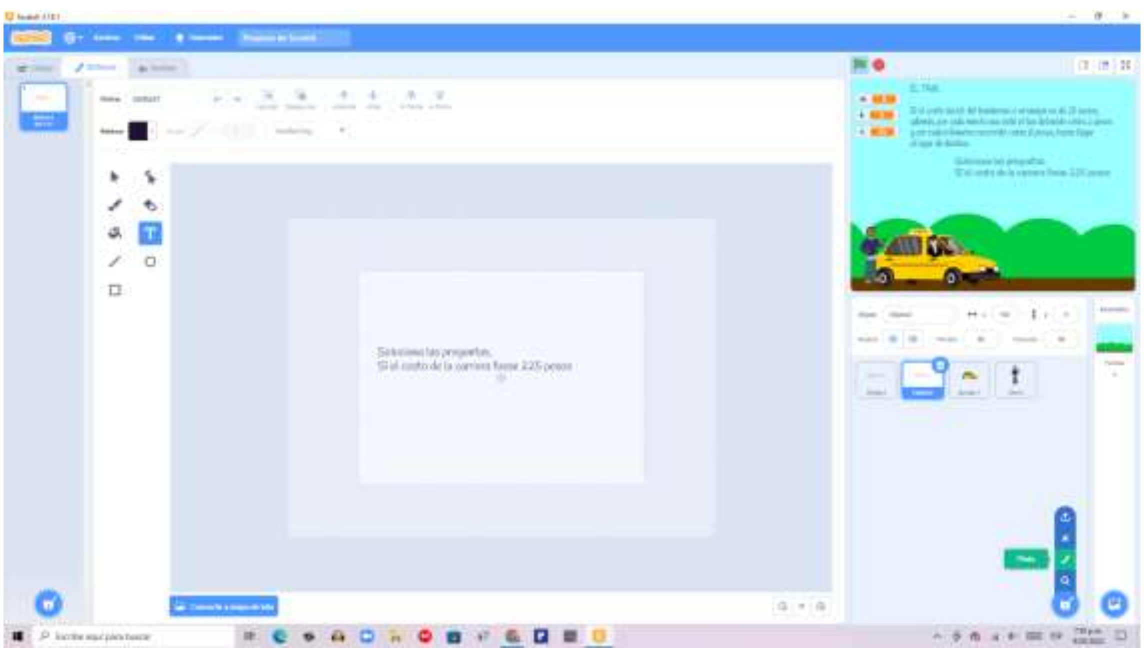
❖ En la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar una imagen predeterminada, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación planteada, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Se escribe una pregunta a solucionar de la misma manera que se agregó el texto de la situación problema.



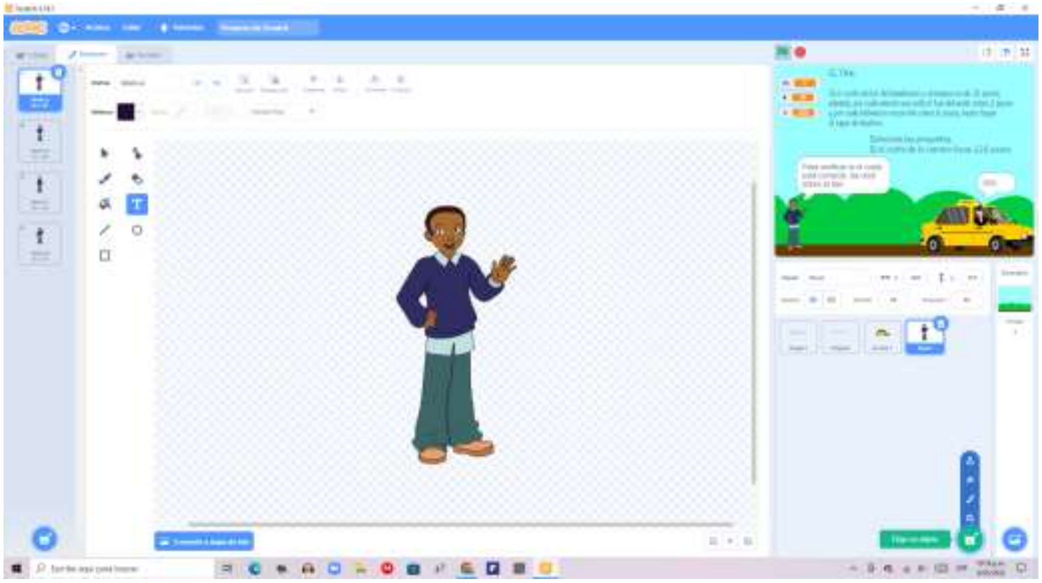
❖ En la pestaña código en cualquier objeto se selecciona la herramienta (variables) en el icono de color naranja, se pueden visualizar en la vista o se pueden ocultar y se nombran con una letra.

❖ Se crea un algoritmo con la herramienta evento inicia una acción haciendo click en la bandera. luego la herramienta control, puede controlar en este caso por siempre, luego la herramienta de variables, selecciona dar a c, y con la herramienta operaciones introduce el algoritmo en el espacio que está el 0.

❖ De esta manera queda el algoritmo.

❖ Para iniciar la animación cada vez, permite que al hacer click en la bandera se reinicie el algoritmo con las variables en cero

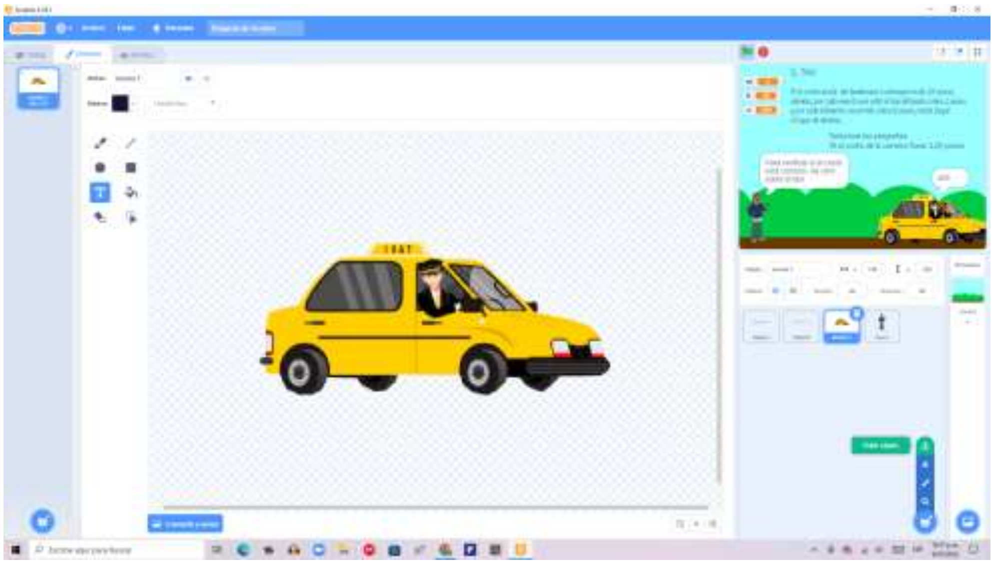
❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en personas, pestaña disfraces.



❖ Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí selecciona la opción al hacer click en este objeto, luego selecciona la herramienta apariencia y allí la opción decir y escribe un texto, después selecciona la herramienta sensores, allí selecciona la opción pregunta y escribe la pregunta, seguidamente la herramienta (variables) y la opción dar a se escribe cada variable.

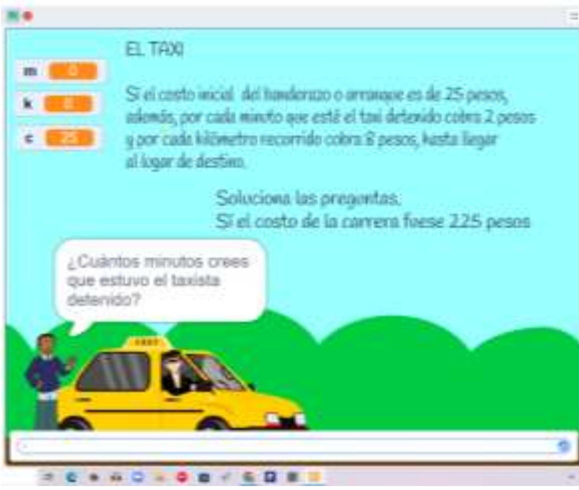
❖ Para iniciar la animación sobre la persona, permite que al hacer click sobre el objeto inicie con la programación.

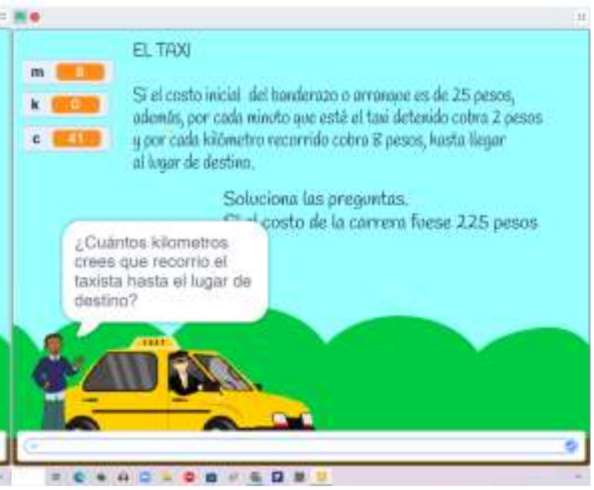
❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en subir objeto permite subir una imagen del ordenador, pestaña disfraces.



- Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí selecciona la opción al hacer click en este objeto, luego selecciona la herramienta movimiento y allí la opción ir a x: ___ y: ___, después selecciona la herramienta apariencia, allí selecciona la opción decir y dónde está el espacio coloca el algoritmo, seguidamente la herramienta variables y la opción dar a se escribe cada variable y finalmente se selecciona la herramienta control, en la opción repetir y esperar en algunos segundos, y se selecciona la herramienta movimiento y allí la opción mover ___ pasos.
- Para iniciar la animación sobre el taxi, permite que al hacer click sobre el objeto inicie con la programación.

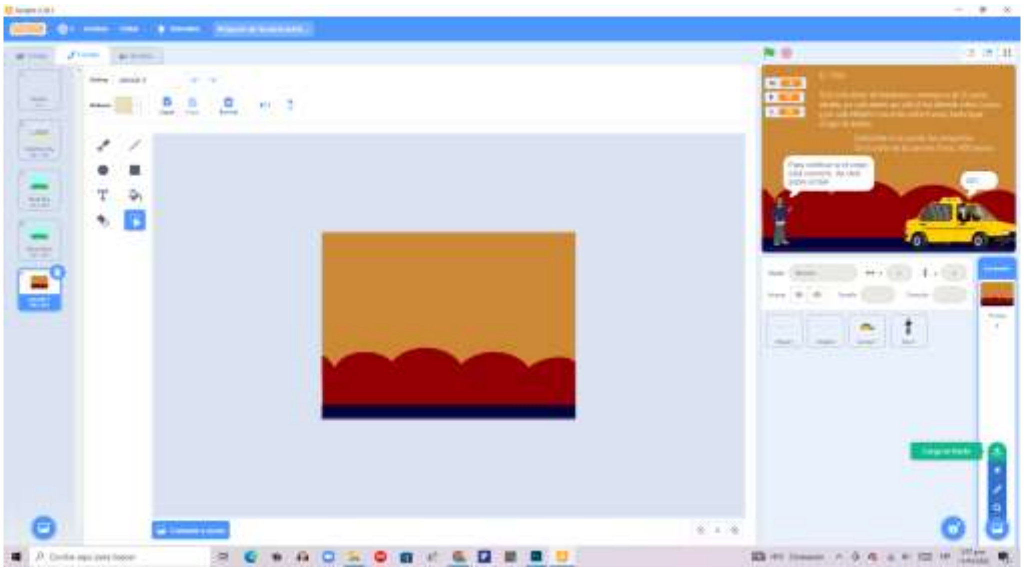
- l l dar click en la bandera.



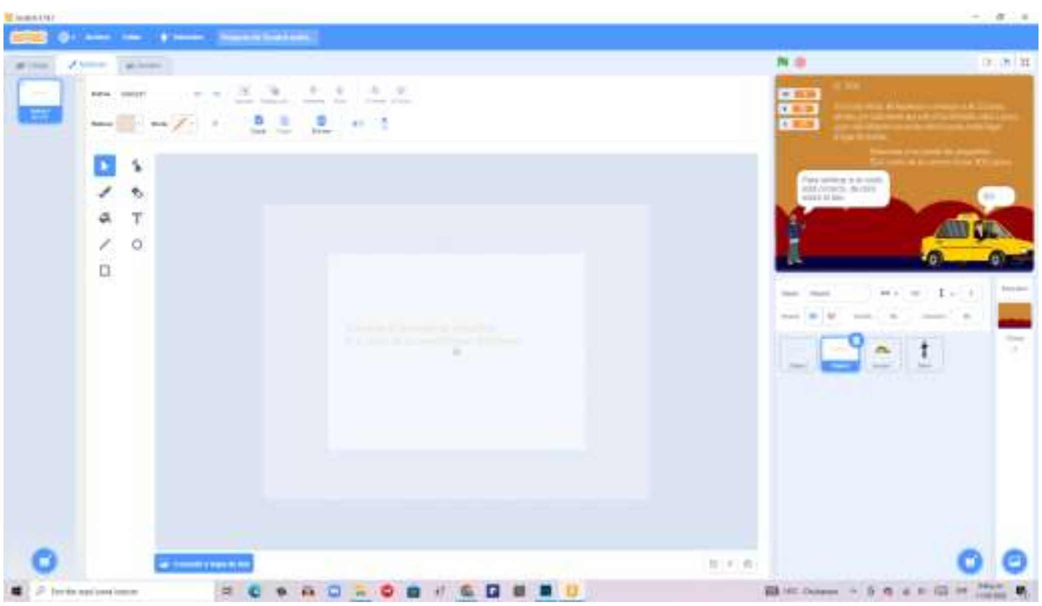


❖ En esta nueva situación el algoritmo no cambia.

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la nueva situación cambiando la tonalidad del color, esto se observa en la pestaña disfraces.

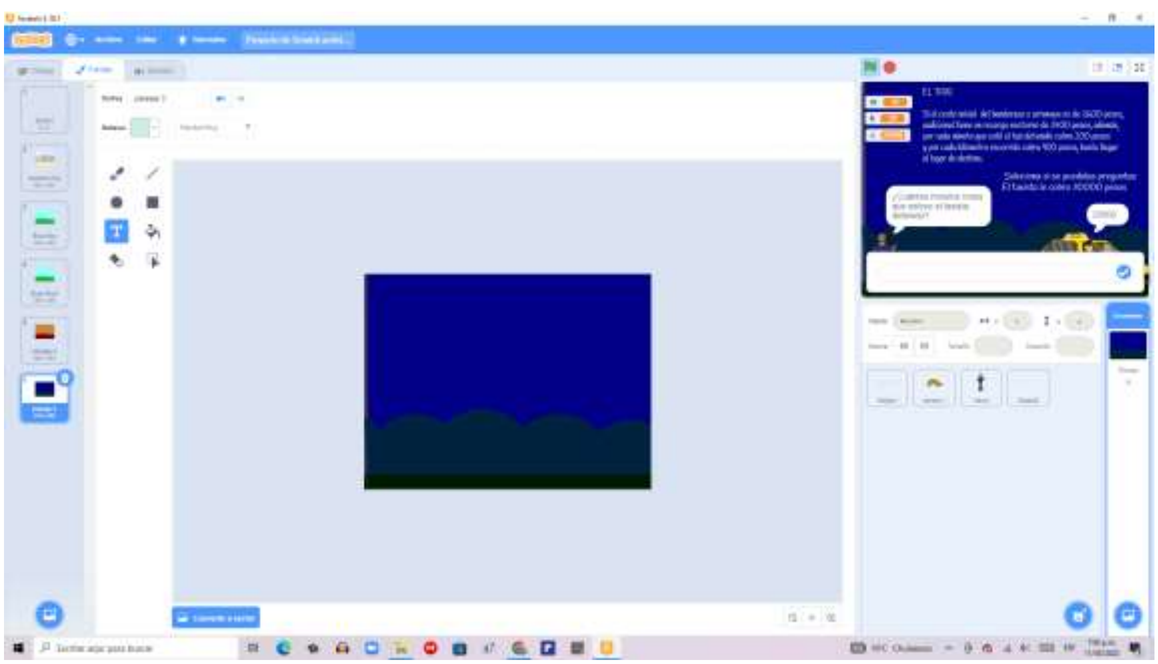


❖ Puede iniciar la ejecución de la programación a la segunda situación, al dar click en la bandera.

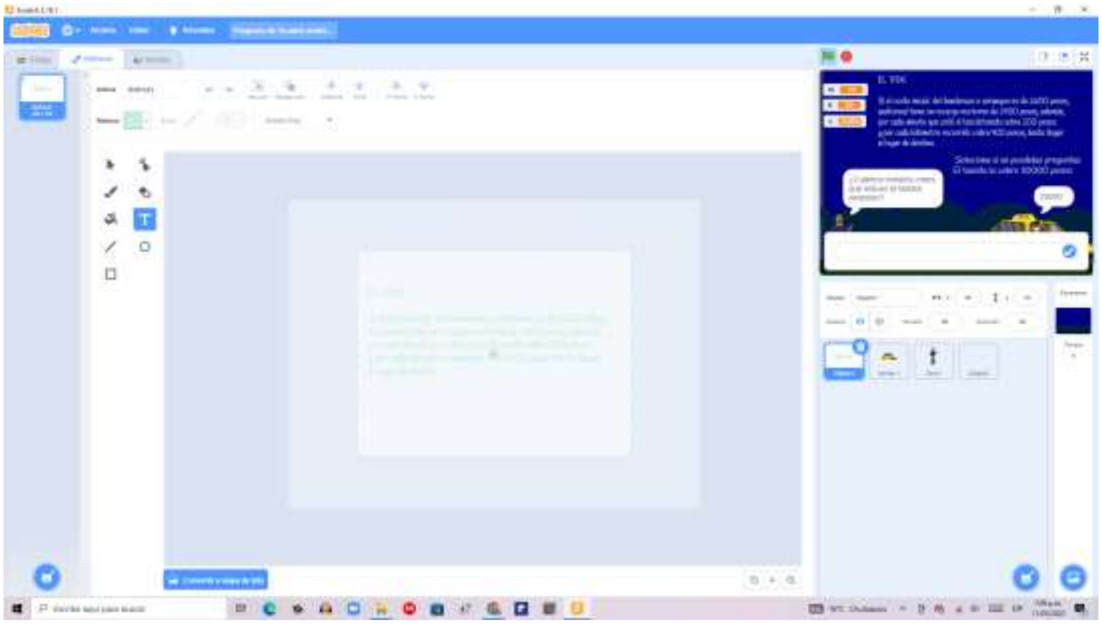
❖ En este momento el algoritmo cambia con los datos reales de la situación planteada

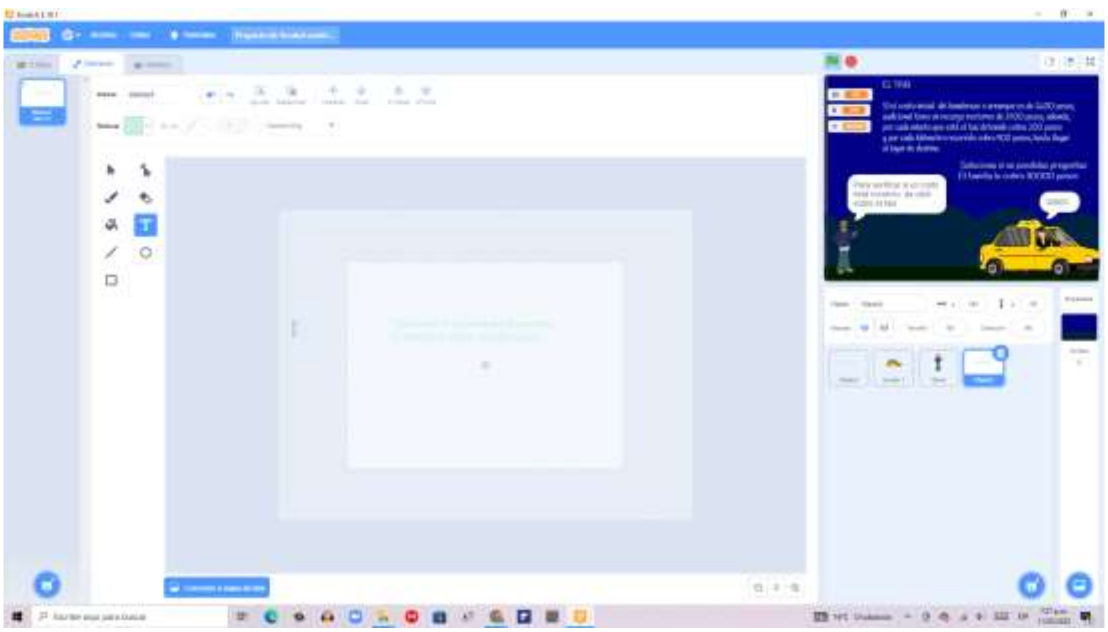
La mamá de Irene toma un taxi por la noche desde su casa para realizar una diligencia importante, al tomar el taxi desde su casa hay un costo inicial de banderazo o arranque de 2600 pesos, adicional tiene un recargo nocturno de 2400 pesos, además por cada minuto que pase detenido el taxista cobra 200 pesos y por cada kilómetro recorrido cobra 900 pesos, hasta llegar al lugar de destino.

❖ Se coloca un fondo nocturno en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación real cambiando la tonalidad del color, esto se observa en la pestaña disfraces.





❖ Puede iniciar la ejecución de la programación a la situación real, al dar click en la bandera.

4.1.2. Actividad 2 *LA FINCA*

4.1.2.1. Descripción metodológica de la actividad 2

El docente organiza en grupos de a tres estudiantes, en donde cada grupo tenga libertad para construir argumentos y algoritmos que le lleven a desarrollar las competencias, dando soluciones a problemas o situaciones a través del proceso de demostración y la programación.

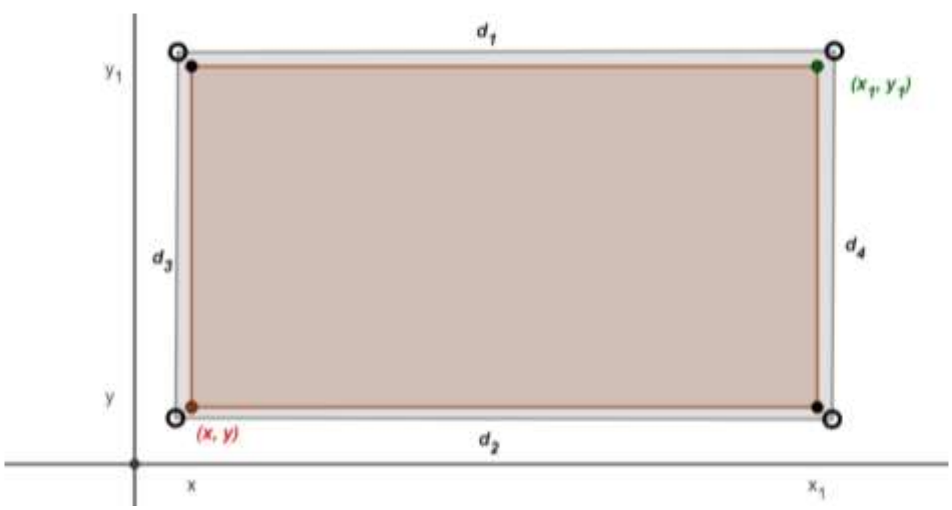
Objetivo: Construir argumentos y un algoritmo que le permita conocer el perímetro y el área de un terreno rectangular dando la coordenada del vértice inferior izquierdo y la coordenada del vértice superior derecho, de tal manera que utilice la programación.

Pensamiento Matemático: Pensamiento espacial, pensamiento numérico, pensamiento métrico y pensamiento variacional

Recursos para la actividad:

lápiz, regla, escuadra y hojas carta.

Software para programación, computador, internet.



4.1.2.2. Desarrollo de la actividad 2

Principio de motivación lo que realiza el docente

Inicialmente el docente organiza a los estudiantes en grupos de trabajo de a tres estudiantes, y se les entrega hojas blancas para que construyan diferentes rectángulos, se les permite la libertad para que **exploren** a través de la construcción gráfica y **manipulen** diferentes parejas de coordenadas que le permitan realizar construcciones gráficas.

El docente le describe el problema matemático ***LA FINCA:*** Los papás de María Fernanda quiere construir una finca en un terreno rectangular, para esto se diseña un plano en donde se conoce la coordenada del vértice inferior izquierdo y la coordenada del vértice superior derecho, dado por parejas de números enteros positivos, de tal manera que se pueda obtener el perímetro que hace referencia a la longitud de la cerca para delimitar el terreno y el área que hace referencia al terreno rectangular formado por los vértices dados, formando lados paralelos a los ejes de las coordenadas.

Principio de motivación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes realizan diferentes construcciones gráficas de rectángulos a partir de coordenadas en un plano cartesiano, el docente les plantea algunas preguntas.

¿Cuáles son las características de un rectángulo? ____

¿Qué relación se establece entre las coordenadas de los vértices de un rectángulo y las longitudes de los lados de un rectángulo, que están paralelos a los ejes de las coordenadas? ________________

Los estudiantes **observan** la descripción del problema ***LA FINCA***

¿Qué (variables) información importante pueden identificar en la descripción del problema? ____

Principio de secuenciación lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente pregunta del problema matemático para que hagan un programa que les permita saber:

¿Cuál es la longitud de la cerca (perímetro) y el área del terreno rectangular a partir de las coordenadas dadas por los vértices inferior izquierdo y superior derecho?

Principio de secuenciación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **comparan** por parejas la pregunta con el problema de tal manera que les permita, plantear argumentos que le ayuden con el inicio de la demostración, se sugiere que los estudiantes expresen.

¿Cuáles son sus propios argumentos a este problema? ___________________________________

Principio de reforzamiento lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente situación, Si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1,1),* la longitud de la cerca (perímetro) es de 26 metros y el área rectangular correspondiente es de 30 metros cuadrados ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo?

Principio de reforzamiento lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **analizan** por grupo esta nueva situación, de tal manera que les permita, plantear otros argumentos, se sugiere que los estudiantes expresen otros argumentos nuevos.

Principio de retroalimentación lo que realiza el docente

El docente invita a cada pareja para que planteen unos argumentos ante otra situación similar en donde se da la coordenada del vértice inferior derecho y el área rectangular del terreno.

Principio de retroalimentación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **proponen** por parejas ante la nueva situación similar otros argumentos, se sugiere que los estudiantes expresen.

Si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1,1),* y el área correspondiente al terreno es de 30 metros cuadrados ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo, que permita obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

____

¿Cuál podría ser la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

____

¿Qué relación tiene el valor del área con los divisores de esta cantidad? _________________________

¿Cuáles son los divisores de 30? ____

¿De cuántas maneras se puede calcular la longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 30 metros cuadrados? ___________________________________

¿Cuáles son los valores de la longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 30 metros cuadrados? ____

¿Cuáles son los valores de los vértices que permiten obtener las diferentes longitudes de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 30 metros cuadrados?

____

Si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1000,1000),* y el área del terreno es de 8 hectáreas ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo, que permita obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular? ______

¿Qué relación tiene el valor del área con los divisores de esta cantidad? ________________________

¿Cuáles son los divisores de 80000 metros cuadrados? _____________________________________

¿De cuántas maneras se puede calcular la longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 8 hectáreas? ____

¿Cuáles son los valores de la longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 8 hectáreas? ____

¿Cuál podría ser la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

____

¿Cuáles son los valores de los vértices que permiten obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 8 hectáreas?

____

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el docente

El docente les plantea que resuelvan el problema al crear un algoritmo que dé solución a través de la programación. Adicional a esto que construyan otro algoritmo de acuerdo a la segunda situación planteada, y otro algoritmo de acuerdo al nuevo problema propuesto.

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **resuelven el problema**, al construir el algoritmo que lleve al programa a dar solución a la pregunta del problema matemático inicial.

Los estudiantes construyen otro algoritmo de acuerdo a la segunda situación planteada, de esta manera se evidencia que los estudiantes **aprenden a aprender** cada vez que puedan crear otra situación y otro algoritmo que dé solución al problema planteado.

4.1.2.3. Desarrollo de los argumentos y el algoritmo

Descripción del problema matemático: Los papás de María Fernanda quiere construir una finca en un terreno rectangular, donde se conoce la coordenada fija del vértice inferior izquierdo y la coordenada variable del vértice superior derecho, dado por parejas de números enteros positivos, se puede obtener el perímetro que hace referencia a la longitud de la cerca para delimitar el terreno y el área que hace referencia al terreno rectangular formado por los vértices dados, formando lados paralelos a los ejes de las coordenadas.

Pregunta a problema matemático: Haga un programa que le permita saber:

¿Cuál es la longitud de la cerca (perímetro) y el área del terreno rectangular a partir de las coordenadas dadas por los vértices inferior izquierdo y superior derecho?

Inicio de la demostración:

$ENTRADA$: coordenada del vértice fijo inferior izquierdo y coordenada del vértice variable superior derecho $(1,1)\ y\ (x, y)$ enteros positivos, con $1 < x, 1 < y$ ___ ___

$SALIDA$: perímetro y área del rectángulo *p* ____ *a* ____

Continuación de la demostración (Argumentos posibles)

1. Las coordenadas en un plano cartesiano dan la posición horizontal y la posición vertical, teniendo en cuenta que para evitar infinitas soluciones se tiene un vértice fijo y un vértice variable.

2. El rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos son iguales entre sí y que si todos los lados tienen la misma longitud se denomina cuadrado.
3. La longitud de la cerca (perímetro) de un terreno rectangular es la suma de todos sus lados.
4. El área del terreno rectangular es el producto de dos de sus lados contiguos.
5. Se requiere obtener la longitud de los lados del terreno rectangular paralelos a los ejes de las coordenadas a partir de las coordenadas dadas.
6. Se requiere organizar una ecuación para encontrar la longitud de la cerca (perímetro) del terreno rectangular y otra ecuación para encontrar el área del terreno rectangular.
7. Si se tiene un área dada, es importante encontrar los divisores de este valor, que permitan determinar las posibles longitudes de los lados del terreno rectangular paralelos a los ejes.
8. Se establece una regularidad entre los divisores desde los extremos hacia los internos.
9. Al obtener los diferentes divisores se encuentran las posibles longitudes de cerca (perímetro) que satisfacen el área dada y determina la menor longitud de cerca (perímetro).

Continuación de la demostración (Algoritmo posible)

variables de ENTRADA

$$x = equivale\ a\ la\ abscisa\ de\ la\ coordenada\ del\ vértice\ superior\ derecho$$

$$y = equivale\ a\ la\ ordenada\ de\ la\ coordenada\ del\ vértice\ superior\ derecho$$

variables de SALIDA

$p = equivale\ al\ perímetro\ del\ rectángulo$

$$a = equivale\ al\ área\ del\ rectángulo$$

procedimiento algorítmico

$$l = longitud\ del\ lado \quad l_1 = x - 1\ l_3 = y\ - 1$$

como los lados opuestos son iguales

$l_1 = l_2\ l_3 = l_4\, p = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \qquad p = l_1 + l_1 + l_3 + l_3$

$p = 2l_1 + 2l_3\ p = 2(l_1 + l_3) \qquad p = 2((x - 1) + (y\ - 1))$

$a = l_1 * l_3 \qquad a = (x - 1) * (y\ - 1)$

Terminación de la demostración (Validación)

verificar cada argumento, verificar cada algoritmo utilizado y verificar la ENTRADA y la SALIDA a través de diferentes ejemplos.

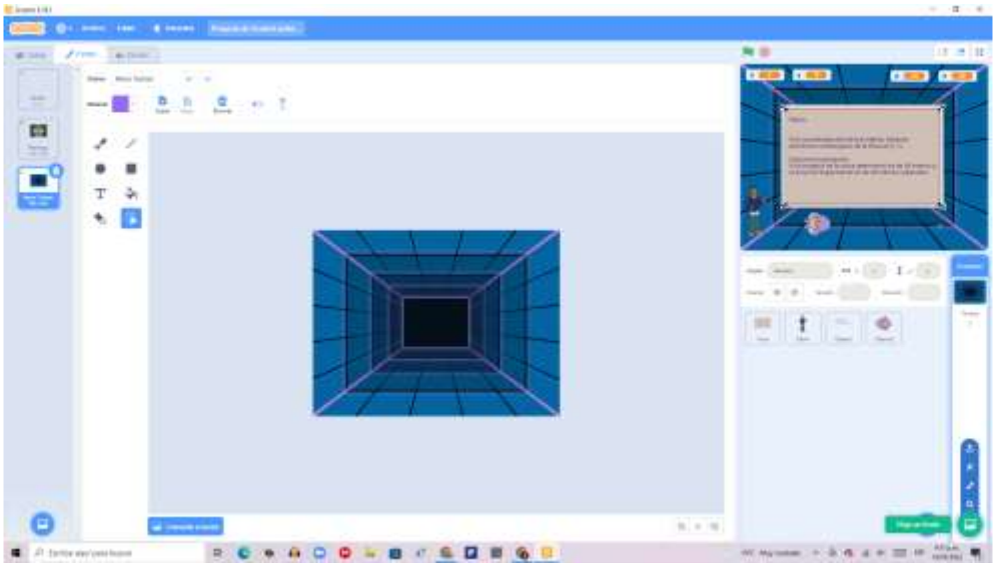
$$EJEMPLO$$

ENTRADA: _7__ __6_ $SALIDA$: p __26__ a __30__

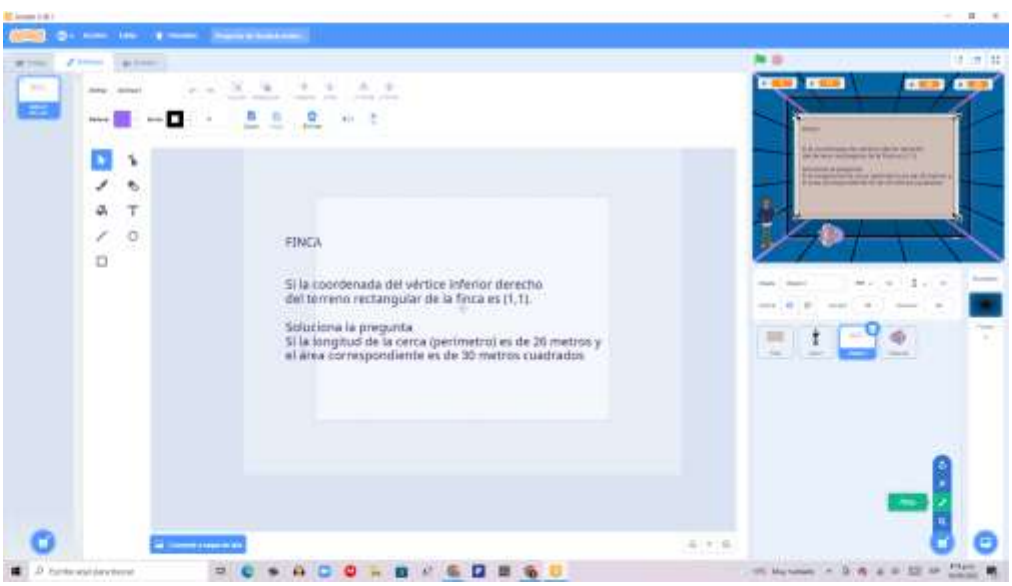
Encontrar los factores del valor numérico del área.

4.1.2.4. Desarrollo de la programación con Scratch

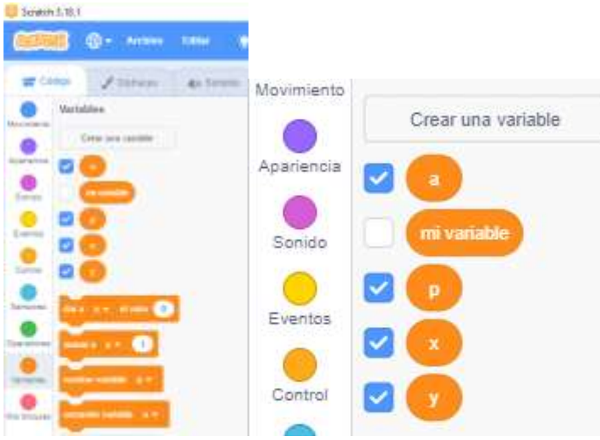
- ❖ Se abre el programa Scratch, en la primera vista hay tres pestañas, (código, disfraces y sonido)
- ❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar una imagen predeterminada, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación planteada y una pregunta a solucionar, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ En la pestaña código en cualquier objeto se selecciona la herramienta (variables) en el icono de color naranja, se pueden visualizar en la vista o se pueden ocultar y se nombran con una letra.

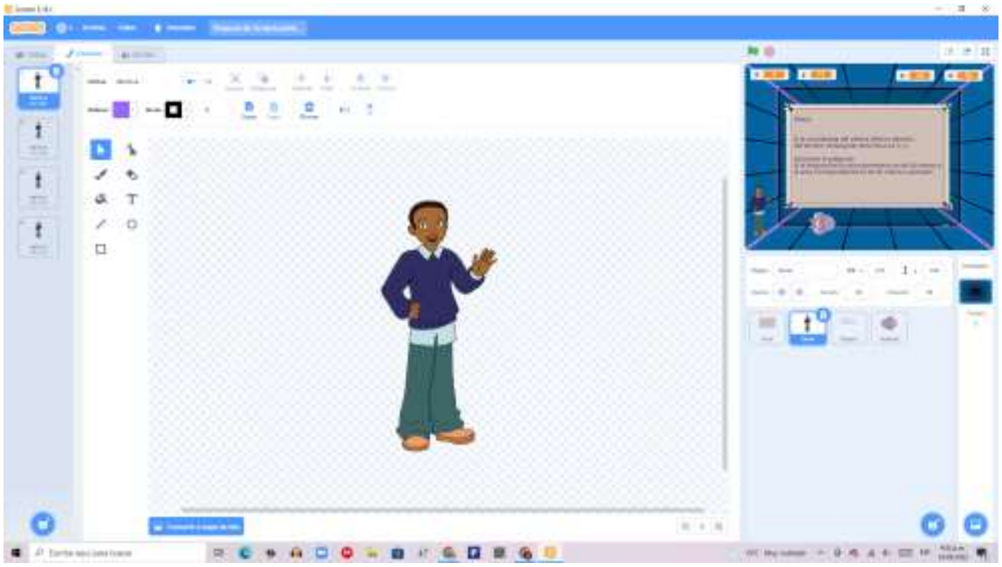


- ❖ Se crea un algoritmo con la herramienta evento inicia una acción haciendo click en la bandera. luego la herramienta control, puede controlar en este caso por siempre, luego la herramienta de variables, selecciona dar a c, y con la herramienta operaciones introduce el algoritmo en el espacio que está el 0.

- ❖ De esta manera queda el algoritmo.

- ❖ Para iniciar la animación cada vez, permite que al hacer click en la bandera se reinicie el algoritmo con las variables en cero

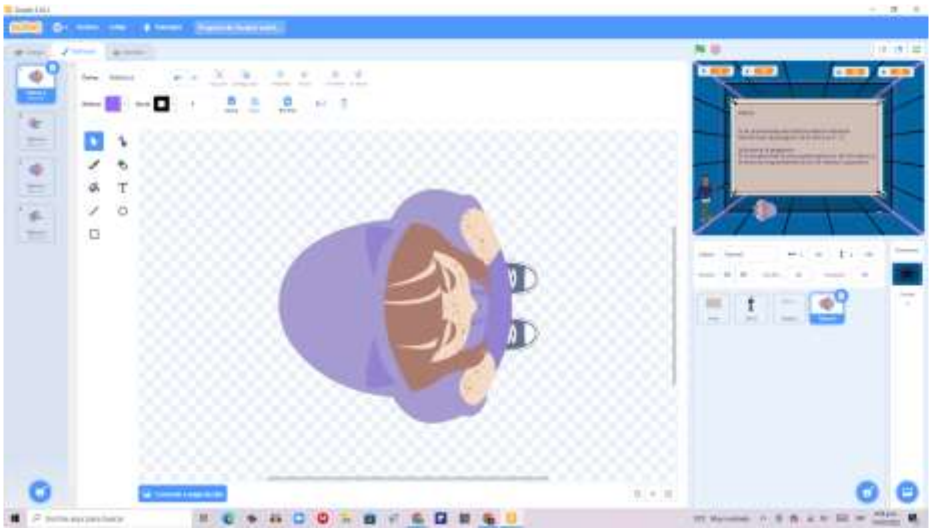
❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en personas, pestaña disfraces.



❖ Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí selecciona la opción al hacer click en este objeto, luego selecciona la herramienta apariencia y allí la opción decir y escribe un texto, después selecciona la herramienta sensores, allí selecciona la opción pregunta y escribe la pregunta, seguidamente la herramienta (variables) y la opción dar a se escribe cada variable.

❖ Para iniciar la animación sobre la persona, permite que al hacer click sobre el objeto inicie con la programación.

❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en elige un objeto y selecciona la pestaña disfraces.



❖ Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí selecciona la opción al hacer click en este objeto, luego en la herramienta movimiento, la opción girar y la opción ir a x: ___ y: ___., después selecciona la herramienta apariencia, allí selecciona la opción decir y dónde está el espacio coloca el algoritmo, seguidamente la herramienta variables y la opción dar a se escribe cada variable y finalmente se selecciona la herramienta control, en la opción repetir y esperar en algunos segundos, y se selecciona la herramienta movimiento y allí la opción mover ___ pasos.

Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera y luego click sobre el joven, te dará un mensaje y luego dirá dos preguntas.


FINCA
Si la coordenada del vértice inferior derecho del terreno rectangular de la finca es (1,1).
¿Cuál podría ser la posición en x?


FINCA
Si la coordenada del vértice inferior derecho del terreno rectangular de la finca es (1,1).
¿Cuál podría ser la posición en y?

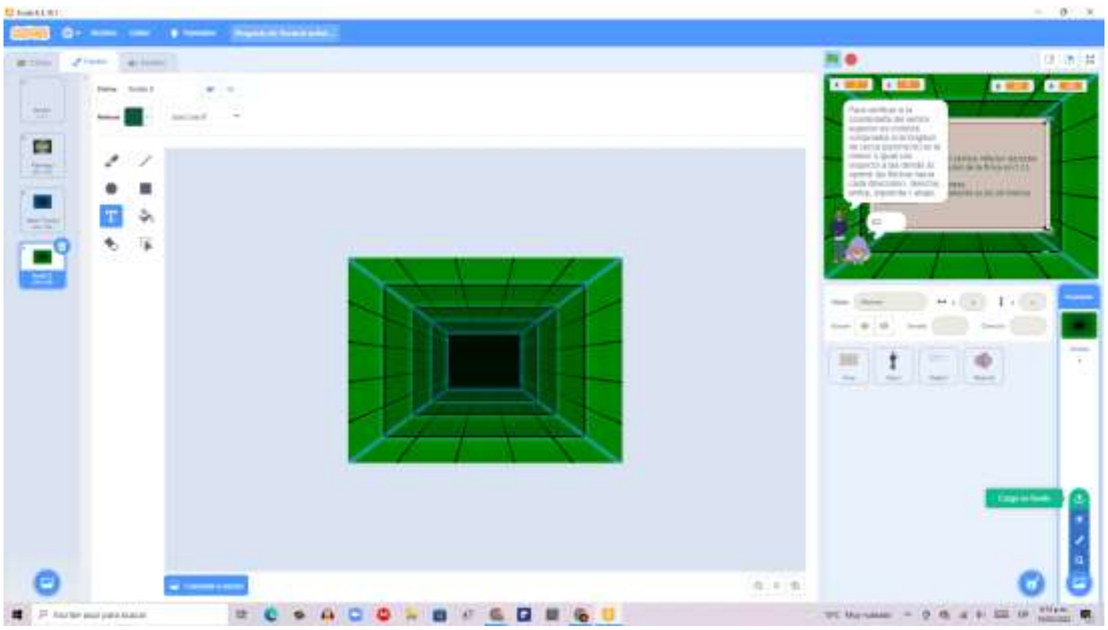

Para verificar si la coordenada del vertice superior es correcta, comprueba si el perímetro y el área corresponden a la situación planteada al, dar click sobre la niña y luego el botón espacio


Para verificar si la coordenada del vertice superior es correcta, comprueba si el perímetro y el área corresponden a la situación planteada al, dar click sobre la niña y luego el botón espacio
26

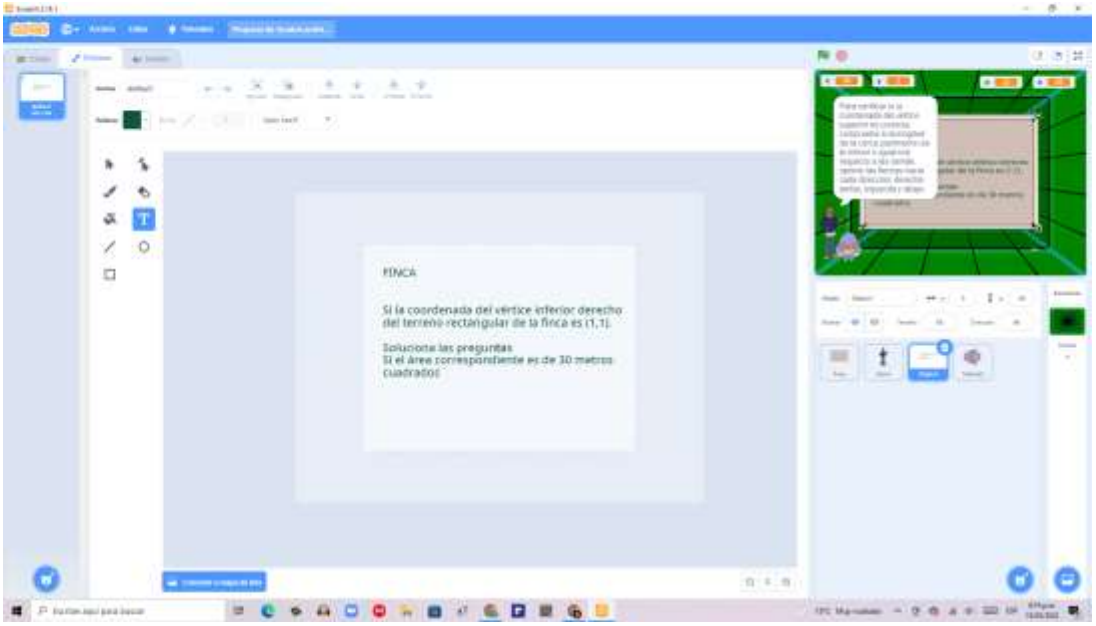

Para verificar si la coordenada del vertice superior es correcta, comprueba si el perímetro y el área corresponden a la situación planteada al, dar click sobre la niña y luego el botón espacio
30

Al avanzar la niña por el borde, se puede comprobar la longitud de la cerca (perímetro) y el área rectangular del terreno de la finca.

- ❖ En esta nueva situación el algoritmo no cambia.
- ❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.

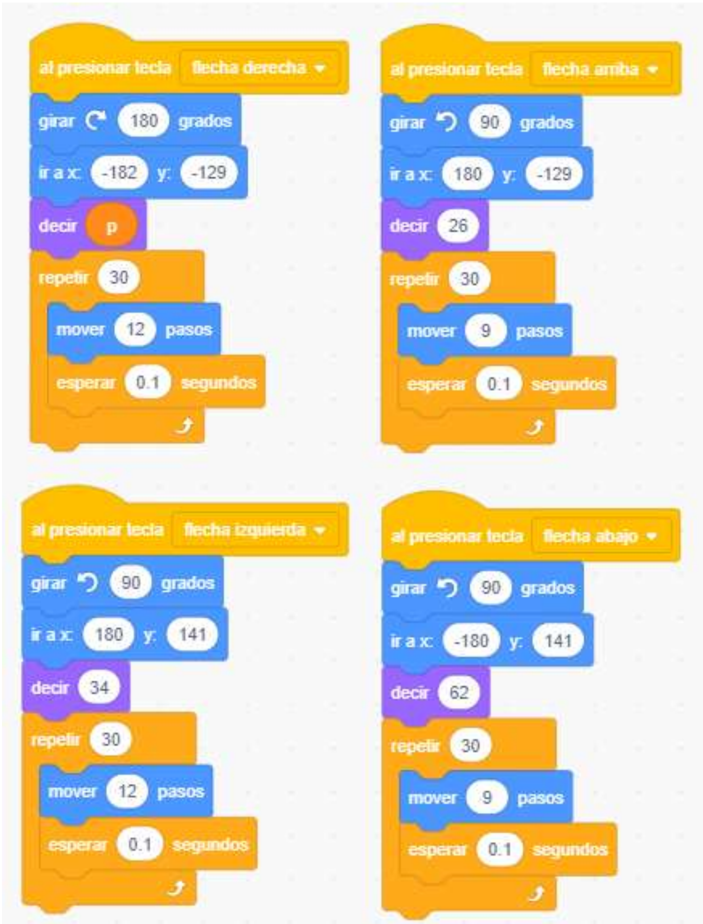


- ❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la nueva situación cambiando la tonalidad del color, esto se observa en la pestaña de disfraces.



❖ Inicia una nueva animación sobre el joven para cambiar las preguntas.

❖ Inicia una nueva animación sobre la niña, que permita comprobar el perímetro que se puede obtener en comparación al área rectangular del terreno al oprimir las flechas direccionales, derecha, arriba, izquierda y abajo, de esta manera la niña se mueve por el contorno del terreno rectangular de la finca.



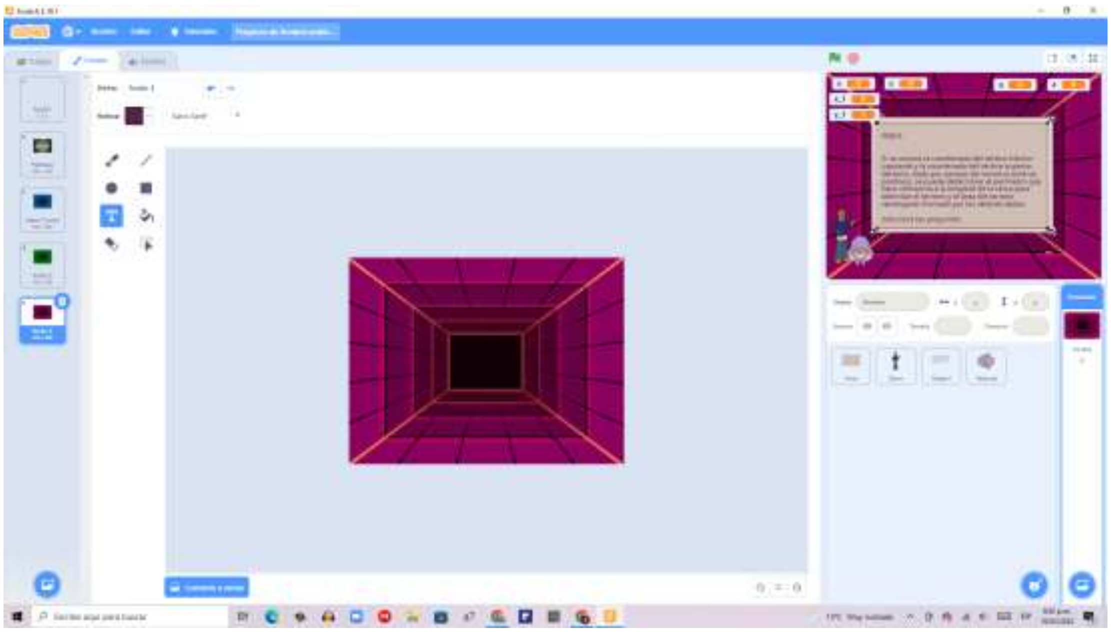
❖ Puede iniciar la ejecución de la programación a la segunda situación, al dar click en la bandera y luego click sobre el joven, te dará un mensaje y luego dirá dos preguntas

- ❖ En esta nueva situación el algoritmo cambia a los datos reales de la situación planteada.

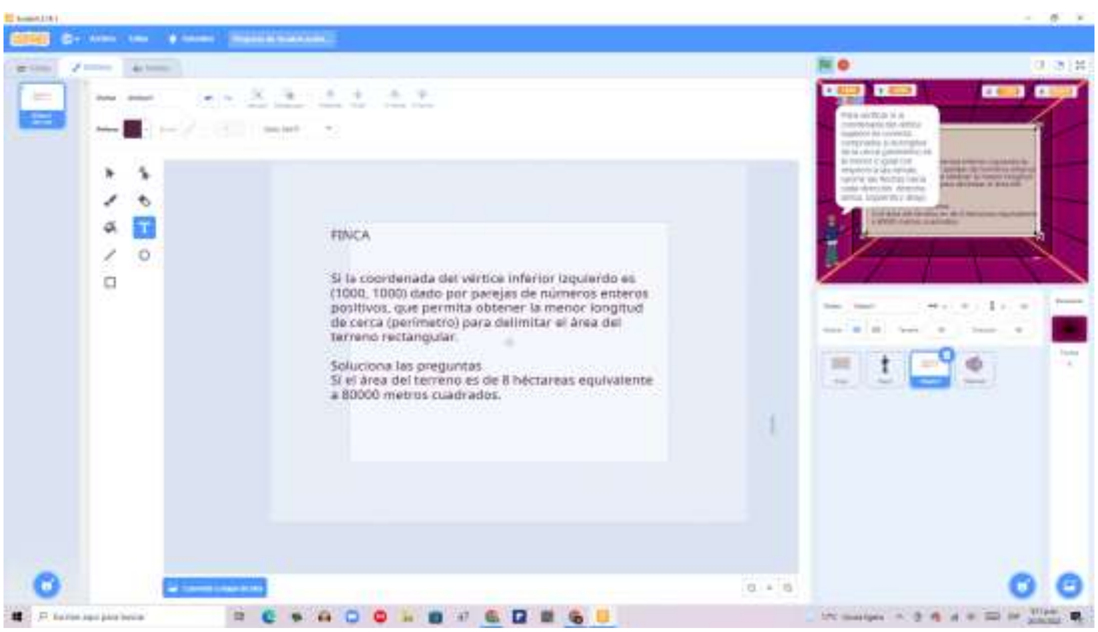
Los papás de María Fernanda quieren construir una finca en un terreno rectangular, donde se conoce la coordenada del vértice *(1000, 1000)* inferior izquierdo y la coordenada del vértice variable superior derecho, dado por parejas de números enteros positivos, que permita obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular, sí el área del terreno es de 8 hectáreas.

- ❖ Se mantienen las variables y se plantea el algoritmo con una posición fija de *(1000,1000)*. como 1 hectárea equivale a 100 áreas o 10000 metros cuadrados, entonces se plantea este nuevo algoritmo.

❖ Se coloca otro fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación real cambiando la tonalidad del color, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Puede iniciar la ejecución de la programación a la situación real, al dar click en la bandera.

4.1.3. Actividad 3 *LAS CARTAS*

4.1.3.1. Descripción metodológica de la actividad

El docente organiza a los estudiantes por grupos de a cuatro, y a cada grupo le brinda ocho cartas de poker, les permite libertad en el juego con ciertas reglas establecidas para que ellos desarrollen pensamiento matemático y lleguen a la solución del problema a través del proceso de demostración y la programación.

Objetivo: Establecer argumentos y algoritmos que le permitan saber cómo pueden ganar en el juego de cartas de tal manera que utilice la programación.

Pensamiento Matemático: Pensamiento aleatorio

Recursos para la actividad: Ocho cartas de poker, los cuatro ases y los cuatro reyes.

Software para programación, Computador, internet.

4.1.3.2. Desarrollo de la actividad 3

Principio de motivación lo que realiza el docente

Inicialmente el docente organiza a los estudiantes en grupos de trabajo de a cuatro estudiantes, y se les entrega ocho cartas de poker, se les permite cierta libertad para que **exploren** y **manipulen** con las cartas, explicando en qué consiste el juego y algunas reglas sencillas. Primero para iniciar el juego se colocan los 4 ases y los 4 reyes en una pequeña baraja de 8 cartas, un jugador selecciona una carta de la baraja sin poder ver las demás cartas, anota la carta seleccionada y la reemplaza en la baraja, el segundo jugador hace lo mismo y así sucesivamente el tercero y el cuarto jugador.

Finalmente, para ganar el juego cada jugador debe sacar la carta de acuerdo a una condición específica:

Estudiante 1, gana si toma una carta de color rojo.

Estudiante 2, gana si toma una carta de color negro.

Estudiante 3, gana si toma una carta con el símbolo del As de cualquier color.

Estudiante 4, gana si toma una carta con el símbolo del rey (king) de cualquier color.

Principio de motivación lo que realiza el estudiante

Al jugar varias veces el juego ***LAS CARTAS*** los estudiantes **observan** que cartas lo hacen ganar o perder y cómo puede ganar cada jugador de acuerdo a la condición específica para ganar el juego, el docente en su acompañamiento desde lejos les pregunta lo siguiente.

¿Algún jugador tendría una mayor probabilidad de ganar, sí o no? ___,

¿por qué? ____

¿Cuál es su probabilidad de ganar en el juego de las cartas? ___________________________

____

Principio de secuenciación lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente situación dando un nombre a cada jugador en el orden del alfabeto, (Andrés, Betty, Carlos y Danna).

Andrés, gana si toma una carta de color rojo.

Betty, gana si toma una carta de color negro.

Carlos, gana si toma una carta con el símbolo del As de cualquier color.

Danna, gana si toma una carta con el símbolo del rey (king) de cualquier color.

Principio de secuenciación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **comparan** la situación cuando gane o pierda cada jugador el juego de tal manera que les permita, plantear argumentos que le ayuden con el inicio de la demostración.

Se sugiere que los estudiantes respondan lo siguiente.

Asigne una letra a cada jugador preferiblemente en minúscula ________________________________

Asigne una letra a la carta As y la carta del rey (King) preferiblemente en mayúscula ______________

Asigne una letra a la carta de cada tipo de símbolo (corazones, diamantes, picas y tréboles) preferiblemente en mayúscula ____

¿Cuáles son las cuádruplas para que Andrés gane? ____

¿Cuáles son las cuádruplas para que Betty gane? ____

¿Cuáles son las cuádruplas para que Carlos gane? ____

¿Cuáles son las cuádruplas para que Danna gane? ____

¿Cuáles son las cuádruplas cuando Andrés pierde? ____

¿Cuáles son las cuádruplas cuando Betty pierde? ____

¿Cuáles son las cuádruplas cuando Carlos pierde? ____

¿Cuáles son las cuádruplas cuando Danna pierde? ____

¿Establece el tamaño del espacio muestral? ____

Principio de reforzamiento lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente situación dentro del juego de las cartas.

¿Cómo podrían ganar siempre las mujeres?

Principio de reforzamiento lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **analizan** una nueva situación dentro del juego ***LAS CARTAS***, se sugiere expresar un nuevo argumento a la pregunta ¿Cómo podrían ganar siempre las mujeres?

____

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Andrés? ________________________________

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Betty? ________________________________

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Carlos? _______________________________

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Danna? _______________________________

¿Puede establecerse alguna relación entre las cuádruplas? _______________________________

Principio de retroalimentación lo que realiza el docente

El docente invita a los estudiantes para que planteen unos argumentos ante otra situación planteada que permita dar solución a dicho problema.

¿Cómo ganaría en algunas ocasiones uno, los dos o ningún hombre?

Principio de retroalimentación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **proponen** otros argumentos ante la nueva situación presentada.

¿Cómo ganaría en algunas ocasiones uno o los dos hombres, aunque en ocasiones puedan perder todos?

se sugiere que desarrollen lo siguiente.

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Andrés? ________________________________

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Betty? ______________________________

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Carlos? _____________________________

¿Cuáles son las cuádruplas a tener en cuenta para Danna? ____________________________

¿Puede establecerse alguna relación entre las cuádruplas? ____________________________

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el docente

El docente les plantea que resuelvan el problema al crear un algoritmo que dé solución a través de la programación con Scratch y puedan crear otro algoritmo de acuerdo a la segunda situación propuesta.

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **resuelven el problema**, al construir el algoritmo que lleve al programa a dar solución a la pregunta de la situación similar.

Los estudiantes modifican el enunciado para dar solución a la siguiente situación, construyen otro algoritmo de acuerdo al problema original presentado, de esta manera se evidencia que los estudiantes **aprenden a aprender** cada vez que puedan crear otra situación y otro algoritmo que dé solución al problema planteado.

4.1.3.3. Desarrollo de los argumentos y el algoritmo

Descripción del problema matemático: Andrés, Betty, Carlos y Danna juegan a las cartas que contienen los 4 ases y los 4 reyes (king) que se colocan en una pequeña baraja de 8 cartas, un jugador selecciona una carta de la baraja sin poder ver las demás cartas, anota la carta seleccionada y la reemplaza en la baraja, el segundo jugador hace lo mismo, así sucesivamente el tercero y el cuarto jugador.

Finalmente, para ganar el juego cada jugador debe sacar la carta de acuerdo a una condición específica:

Andrés, gana si toma una carta de color rojo.

Betty, gana si toma una carta de color negro.

Carlos, gana si toma una carta con el símbolo del As de cualquier color.

Danna, gana si toma una carta con el símbolo del rey (king) de cualquier color.

Pregunta a problema matemático: Haga un programa que le permita mostrar: ¿Cuándo los jugadores pueden ganar o perder de acuerdo a las condiciones al seleccionar de manera aleatoria una carta?

Inicio de la demostración:

$VARIABLES\ DE\ ENTRADA\ Y\ SALIDA$:

$A = equivale\ a\ los\ ases$

$$K\ = equivale\ a\ los\ reyes$$

$$C\ = equivale\ a\ las\ cartas\ de\ corazones$$

$$D\ = equivale\ a\ las\ cartas\ de\ diamantes$$

$$P\ = equivale\ a\ las\ cartas\ de\ picas$$

$$T\ = equivale\ a\ las\ cartas\ de\ tréboles$$

$$a\ = equivale\ al\ nombre\ de\ Andrés$$

$$b\ = equivale\ al\ nombre\ de\ Betty$$

$$c\ = equivale\ al\ nombre\ de\ Carlos$$

$$d\ = equivale\ al\ nombre\ de\ Danna$$

Continuación de la demostración (Argumentos posibles)

1. Se identifica que la probabilidad de ganar y perder es igual para los cuatro jugadores.
2. Se establece el tamaño del espacio muestral.
3. Se establece una variable para los cuatro jugadores (a, b, c, d)
4. Se establece una variable para el tipo de carta si es As o rey (A, K)
5. Se establece una variable para el tipo de carta si es de corazones, de diamantes, de picas o de tréboles (C, D, P, T)
6. Cada persona gana de acuerdo a una condición específica diferente.
7. Se plantean las cuádruplas para que cada uno de los jugadores (Andrés, Betty, Carlos y Danna) gane el juego de cartas.
8. Se plantean las cuádruplas para que cada uno de los jugadores (Andrés, Betty, Carlos y Danna) pierda el juego de cartas.

Continuación de la demostración (Algoritmo posible)

Algoritmo

El espacio muestral está dado por la regla de la multiplicación de 8 cartas con 4 personas por lo que el Tamaño del Espacio muestral se obtiene de la siguiente manera, $TE = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$

Cuádruplas, Andrés gana si toma una carta de color rojo.

$$AC = equivale\ al\ as\ de\ corazones$$

$$AD = equivale\ al\ as\ de\ diamantes$$

$$KC\ = equivale\ al\ rey\ de\ corazones$$

$$KD\ = equivale\ al\ rey\ de\ diamantes$$

Cuádruplas, Betty gana si toma una carta de color negro.

$$AP = equivale\ al\ as\ de\ picas$$

$$AT = equivale\ al\ as\ de\ tréboles$$

$$KP\ = equivale\ al\ rey\ de\ picas$$

$$KT\ = equivale\ al\ rey\ de\ tréboles$$

Cuádruplas, Carlos gana si toma una carta con el símbolo del As de cualquier color.

$$AC = equivale\ al\ as\ de\ corazones$$

$$AD = equivale\ al\ as\ de\ diamantes$$

$$AP = equivale\ al\ as\ de\ picas$$

$$AT = equivale\ al\ as\ de\ tréboles$$

Cuádruplas, Danna gana si toma una carta con el símbolo del rey (king) de cualquier color.

$$KC\ = equivale\ al\ rey\ de\ corazones$$

$$KD\ = equivale\ al\ rey\ de\ diamantes$$

$$KP\ = equivale\ al\ rey\ de\ picas$$

$$KT\ = equivale\ al\ rey\ de\ tréboles$$

Cuádruplas para que pierda Andrés

$$AP, AT, KP, KT = equivale\ a\ las\ cartas\ con\ las\ que\ gana\ Betty$$

Cuádruplas para que pierda Betty

$$AC, AD, KC, KD = equivale\ a\ las\ cartas\ con\ las\ que\ gana\ Andrés$$

Cuádruplas para que pierda Carlos

$$KC, KD, KP, KT = equivale\ a\ las\ cartas\ con\ las\ que\ gana\ Danna$$

Cuádruplas para que pierda Danna

$$AC, AD, AP, AT = equivale\ a\ las\ cartas\ con\ las\ que\ gana\ Carlos$$

Terminación de la demostración (Validación)

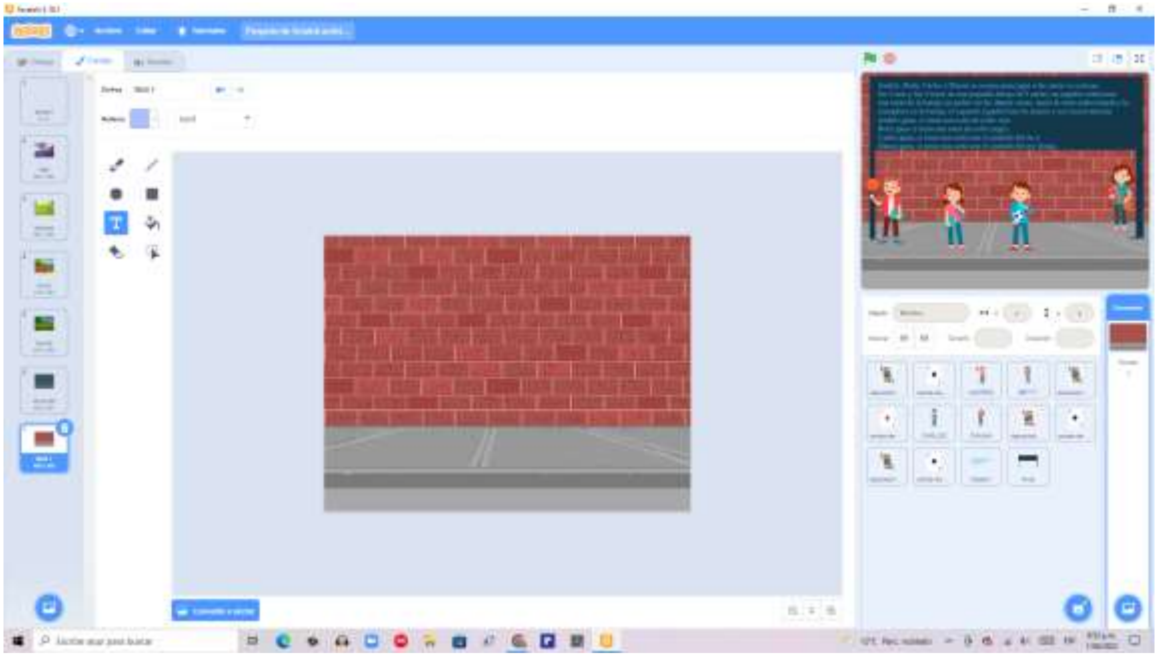
verificar cada argumento, verificar cada algoritmo utilizado y verificar la solución a través de diferentes ejemplos.

a KD gane *b KT gane* *c AT gane* *d AP perdi*

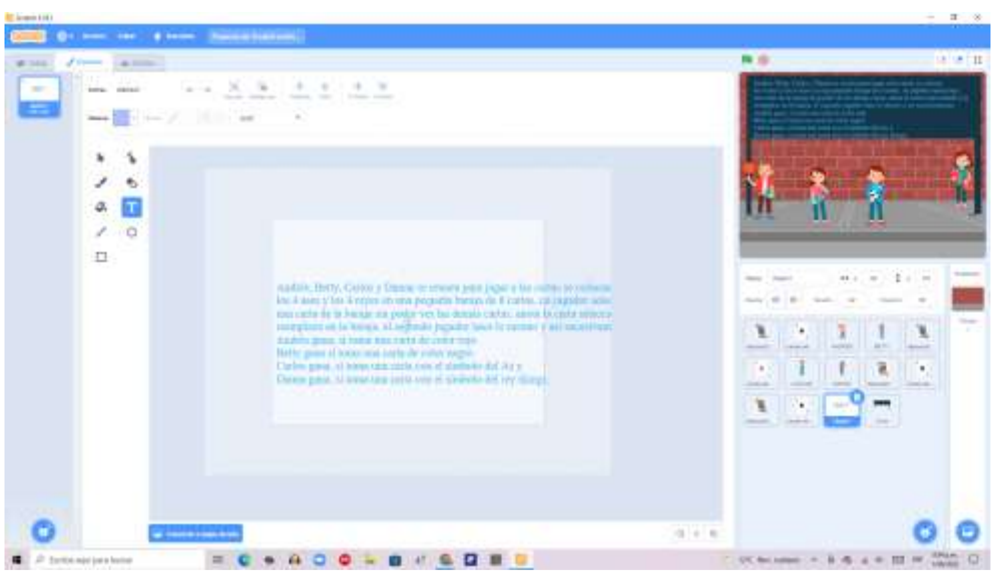



4.1.3.4. Desarrollo de la programación con Scratch

- Se abre el programa Scratch, en la primera vista hay tres pestañas, (código, disfraces y sonido)
- Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar una imagen predeterminada, esto se observa en la pestaña disfraces.



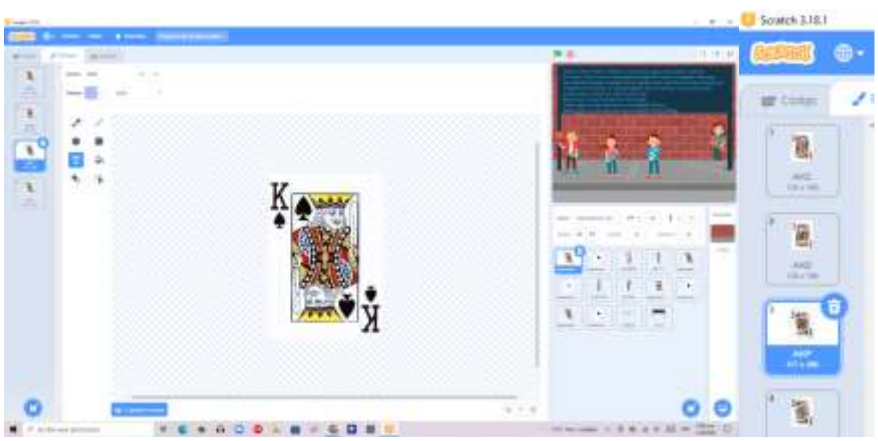
❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación planteada y una pregunta a solucionar, esto se observa en la pestaña disfraces.



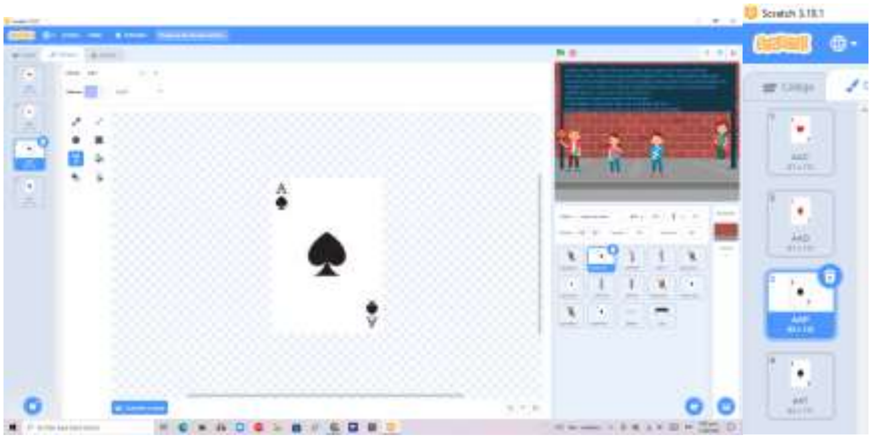
❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, subir la imagen de los cuatro jugadores, pestaña disfraces.



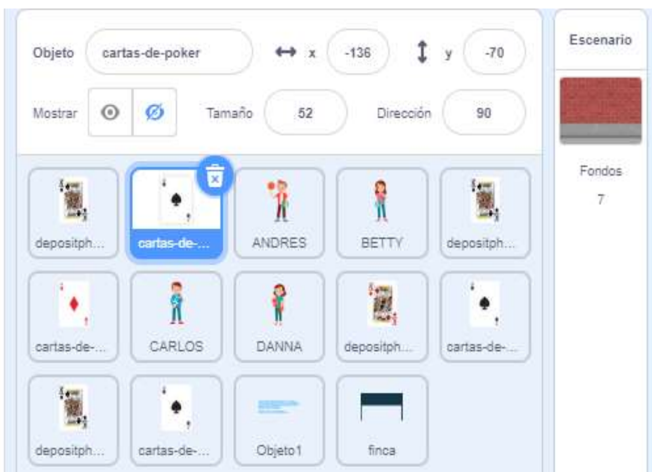
❖ Se selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, para subir la imagen de las cartas, pestaña disfraces. se crean unos disfraces para cada tipo de rey.



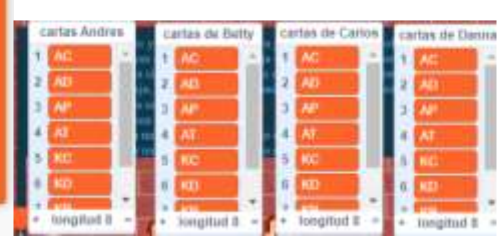
❖ Se selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, para subir la imagen de las cartas, pestaña disfraces. se crean unos disfraces para cada tipo de as.



❖ Este proceso en las cartas de rey y de as se realiza cuatro veces es decir para cada jugador.



❖ Se crea una variable para cada jugador (a, b, c, d) Andrés, Betty, Carlos y Danna, y se crean unas listas para cada jugador donde contienen las ocho cartas.



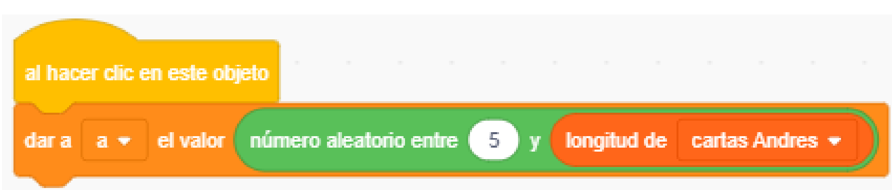
❖ Se crea un pareo entre un mensaje que se envía a través de la variable en relación al número dentro de la lista creada y el disfraz correspondiente, de esta manera se hacen las cuádruplas para ganar y las cuádruplas para perder con un condicional si p entonces q.

❖ Para cada carta de rey se esconde el disfraz al iniciar y cuando se da click en la carta recibe un mensaje que muestra el disfraz, para las cartas de rey.

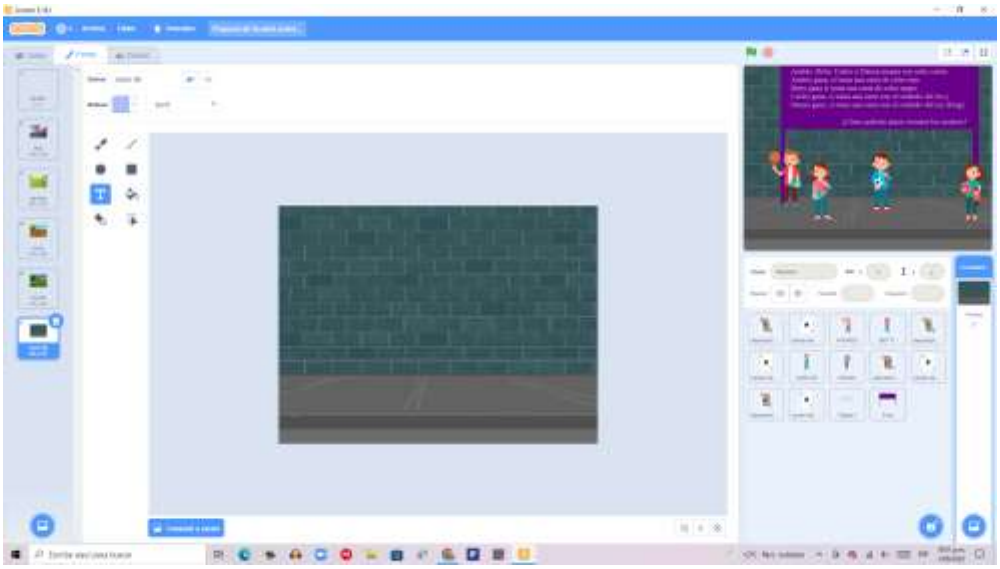
❖ de igual manera sobre cada carta de as.

Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera y luego click sobre cada uno de los jugadores en cualquier orden.

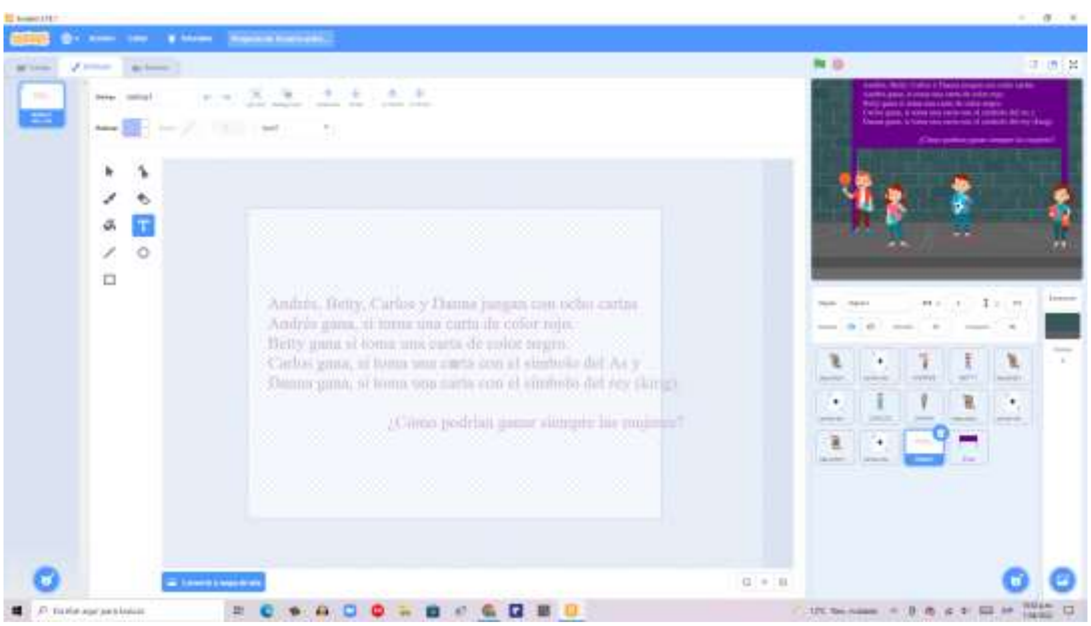
❖ En esta nueva situación se condiciona para todos los jugadores el número aleatorio entre un número y la lista de cartas de tal manera que ya no es desde 1 si no desde 5 y se organiza cuáles son las opciones que quiere mostrar.



❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la nueva situación cambiando la tonalidad del color, esto se observa en la pestaña de disfraces.

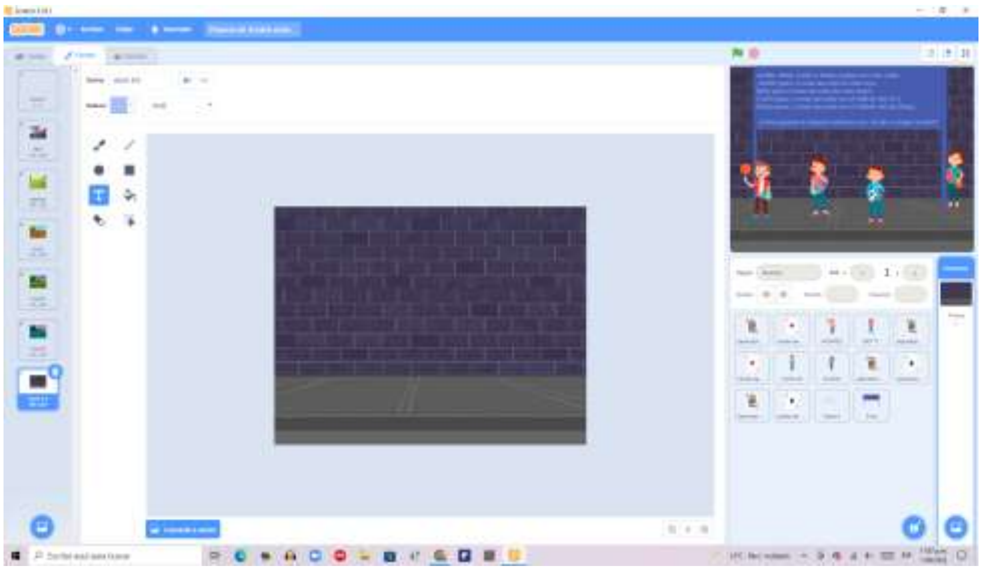


❖ Se ajusta el pareo con el mensaje que se envía de tal manera que permita mostrar lo que responde la situación.

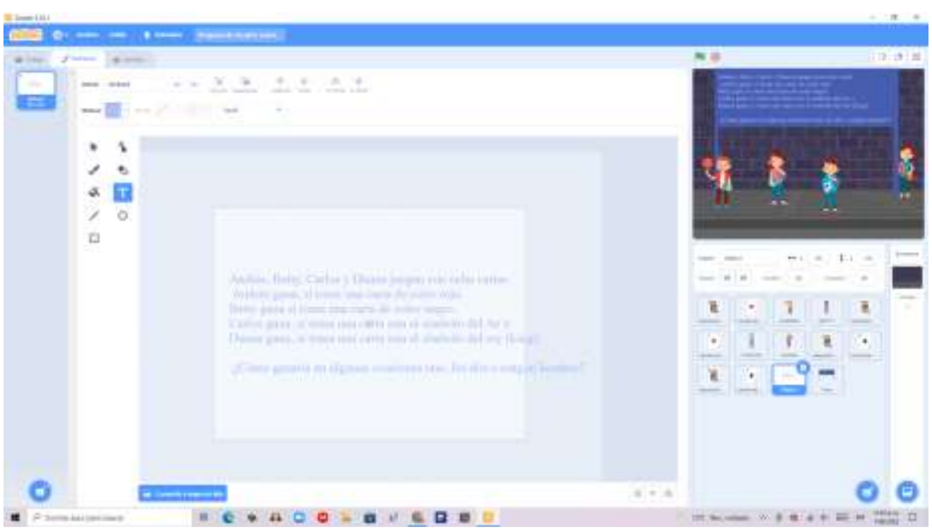
❖ Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera y luego click sobre cada uno de los jugadores en cualquier orden.

❖ En esta otra situación se condiciona solo las mujeres en el número aleatorio entre un número y la lista de cartas de tal manera que ya no es desde 1 si no desde 5 y se organiza cuáles son las opciones que quiere mostrar.

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la nueva situación cambiando la tonalidad del color, esto se observa en la pestaña de disfraces.



- ❖ Se ajusta el pareo con el mensaje que se envía de tal manera que permita mostrar lo que responde la situación.

- ❖ Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera y luego click sobre cada uno de los jugadores en cualquier orden.


4.1.4. Actividad 4 *LA PIRÁMIDE*

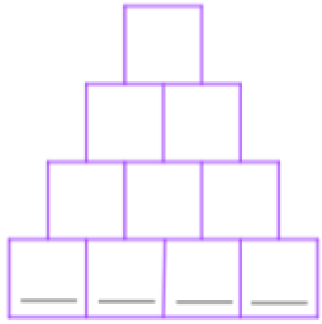
4.1.4.1. Descripción metodológica de la actividad

El docente organiza a los estudiantes de manera individual, y les permite libertad en la construcción de argumentos para que ellos desarrollen pensamiento matemático y lleguen a la solución del problema a través del proceso de demostración y la programación.

Objetivo: Construir argumentos y algoritmos que le permitan organizar cuatro números en la base de una pirámide que permita obtener en la cima con un número de mayor o menor valor numérico, de tal manera que utilice la programación.

Pensamiento Matemático: Pensamiento espacial, pensamiento numérico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional.

Recurso: La pirámide de bloques.



Software para programación, Computador, internet.

4.1.4.2. Desarrollo de la actividad 4

Principio de motivación lo que realiza el docente

El docente permite que los estudiantes trabajen de manera individual y les presenta el problema matemático ***LA PIRÁMIDE*****:** Angie quiere construir una pirámide y escribir en cada bloque un número entero positivo de manera que cada número por encima de la fila inferior debe ser la suma de los dos números de los bloques de la fila sobre los que está apoyado, teniendo en cuenta que la base contiene los números 1, 2, 3 y 4 en cualquier orden y sin repetir.

Principio de motivación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **observan** el problema ***LA PIRÁMIDE***

Se sugiere que los estudiantes respondan lo siguiente.

¿Qué (variables) información importante pueden identificar en la descripción del problema?

____

Principio de secuenciación lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente pregunta al problema matemático para que hagan un programa que les permita saber:

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de mayor valor numérico?

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de menor valor numérico?

Principio de secuenciación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **comparan** la pregunta con el problema de tal manera que les permita, plantear argumentos que le ayuden con el inicio de la demostración, se sugiere que los estudiantes expresen.

¿Cuáles son sus propios argumentos a este problema? ___________________________________

Principio de reforzamiento lo que realiza el docente

El docente les plantea que busquen algunas posibles combinaciones que les permita identificar relaciones.

Principio de reforzamiento lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **analizan** una situación, se sugiere responder lo siguiente.

¿Qué características tienen los bloques de la pirámide?

____

¿Qué valores numéricos se pueden encontrar en la cima de la pirámide?

____

Principio de retroalimentación lo que realiza el docente

El docente invita a los estudiantes para que planteen unos argumentos ante la situación que permita dar solución a dicho problema.

Principio de retroalimentación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **proponen** posibles combinaciones al intercambiar los números de la base. ____

Se sugiere una nueva situación.

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de mayor valor numérico?

¿Puede establecerse alguna relación en las posiciones de los números? ______________________

¿Cuáles son las soluciones? ____

¿Cuántas soluciones tiene? ____

Se aborda otra situación opuesta.

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de menor valor numérico?

¿Puede establecerse alguna relación en las posiciones de los números? ______________________

¿Cuáles son las soluciones? ____

¿Cuántas soluciones tiene? ____

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el docente

El docente les plantea que resuelvan el problema al crear un algoritmo que dé solución a través de la programación con Scratch y puedan dar respuesta al problema planteado.

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **resuelven el problema**, al construir el algoritmo que lleve al programa a dar solución a la pregunta de la situación similar.

Los estudiantes modifican el enunciado para dar solución a la siguiente situación, construyen otro algoritmo de acuerdo al problema original presentado, de esta manera se evidencia que los estudiantes **aprenden a aprender** cada vez que puedan crear otra situación y otro algoritmo que dé solución al problema planteado.

4.1.4.3. Desarrollo de los argumentos y el algoritmo

Descripción del problema matemático: Angie quiere construir una pirámide y escribir en cada bloque un número entero positivo de manera que cada número por encima de la fila inferior debe ser la suma de los dos números de los bloques de la fila sobre los que está apoyado, teniendo en cuenta que la base contiene los números 1, 2, 3 y 4 en cualquier orden y sin repetir.

Pregunta a problema matemático: Haga un programa que le permita a Angie saber:

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de mayor valor numérico?

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de menor valor numérico?

Inicio de la demostración:

$ENTRADA$ Los cuatro números 1, 2, 3, y 4 en cualquier orden sin repetir ____ ___ ____ ____

$SALIDA$ El número de mayor valor numérico de la cima ____

Continuación de la demostración (Argumentos posibles)

1. La fila de la base contiene los números 1, 2, 3 y 4 en cualquier orden y sin repetir.

2. Los bloques de la segunda fila corresponden a la suma de los dos números de los bloques de la fila sobre los que está apoyado.
3. Los bloques de la tercera fila corresponden a la suma de los dos números de los bloques de la fila sobre los que está apoyado
4. El bloque de la cima corresponde a la suma de los dos números de los bloques de la fila sobre los que está apoyado.
5. Si se escriben los números de mayor valor numérico al interior, se obtiene en la cima el número de mayor valor numérico.
6. Si se escriben los números de mayor valor numérico al extremo, se obtiene en la cima el número de menor valor numérico.
7. Los números que están en el exterior se suman una sola vez, por lo cual, si son números de un valor numérico mayor, se obtiene en la cima el número de menor valor numérico y si son números de un valor numérico menor se obtiene en la cima el número de mayor valor numérico.
8. Los números que están en el interior se suman dos veces, esto significa que, si son números de un valor numérico mayor, se obtiene en la cima el número de mayor valor numérico y si son números de un valor numérico menor se obtiene en la cima el número de menor valor numérico.

Continuación de la demostración (Algoritmo posible)

variables de ENTRADA

en cualquier orden sin repetir

$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1, 2, 3\ y\ 4$

variables de SALIDA

$$b_{10} = El\ número\ de\ de\ la\ cima$$

procedimiento algorítmico

primera fila

$$b_1 = 1, 2, 3\ y\ 4\ b_2 = 1, 2, 3\ y\ 4\ b_3 = 1, 2, 3\ y\ 4\ b_4 = 1, 2, 3\ y\ 4$$

segunda fila

$b_5 = b_1 + b_2 \quad b_6 = b_2 + b_3 \quad b_7 = b_3 + b_4$

tercera fila

$b_8 = b_5 + b_6 \quad b_9 = b_6 + b_7$

cima de la pirámide

$b_{10} = b_8 + b_9 \qquad\qquad b_{10} = b_1 + 3b_2 + 3b_3 + b_4$

Terminación de la demostración (Validación)

verificar cada argumento, verificar cada algoritmo utilizado y verificar la ENTRADA y la SALIDA a través de diferentes ejemplos.

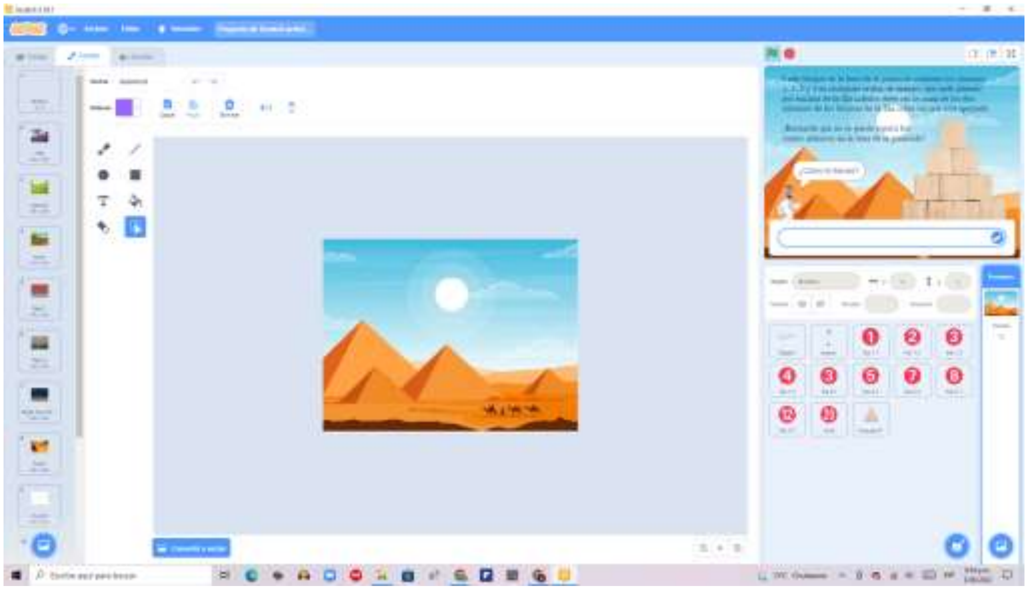
$ENTRADA$ __2__ __4__ __3__ __1__ $SALIDA$ __24__

$ENTRADA$ __4__ __2__ __1__ __3__ $SALIDA$ __16__

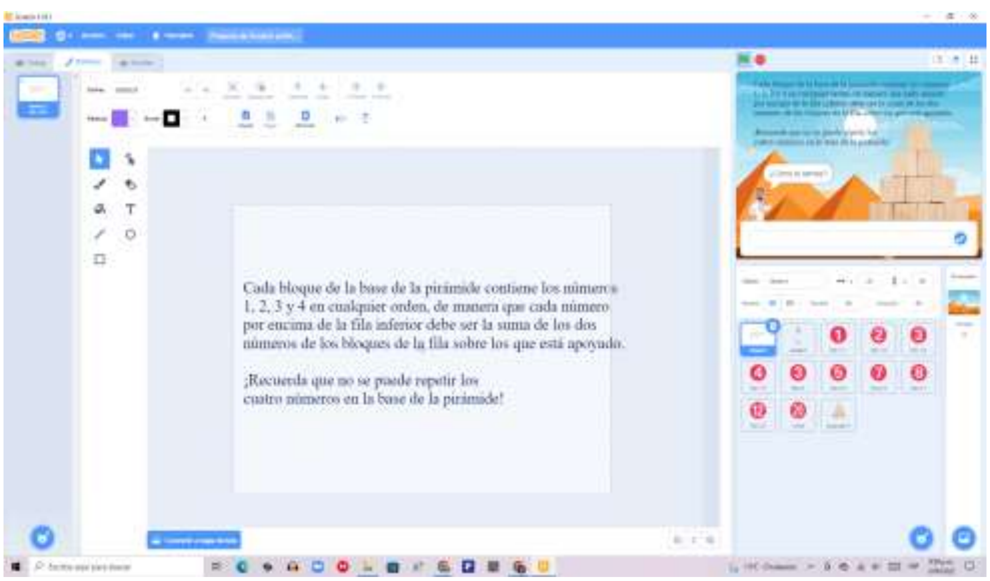
4.1.4.4. Desarrollo de la programación con Scratch

- Se abre el programa Scratch, en la primera vista hay tres pestañas, (código, disfraces y sonido)

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar una imagen predeterminada, esto se observa en la pestaña disfraces.

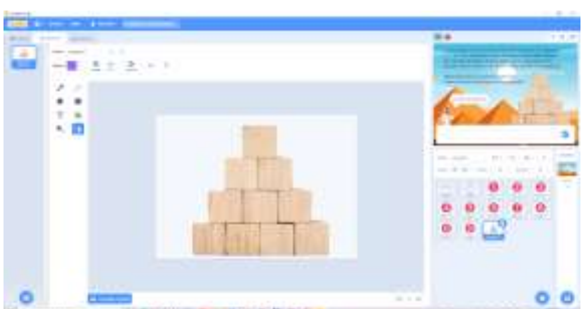


❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación planteada.



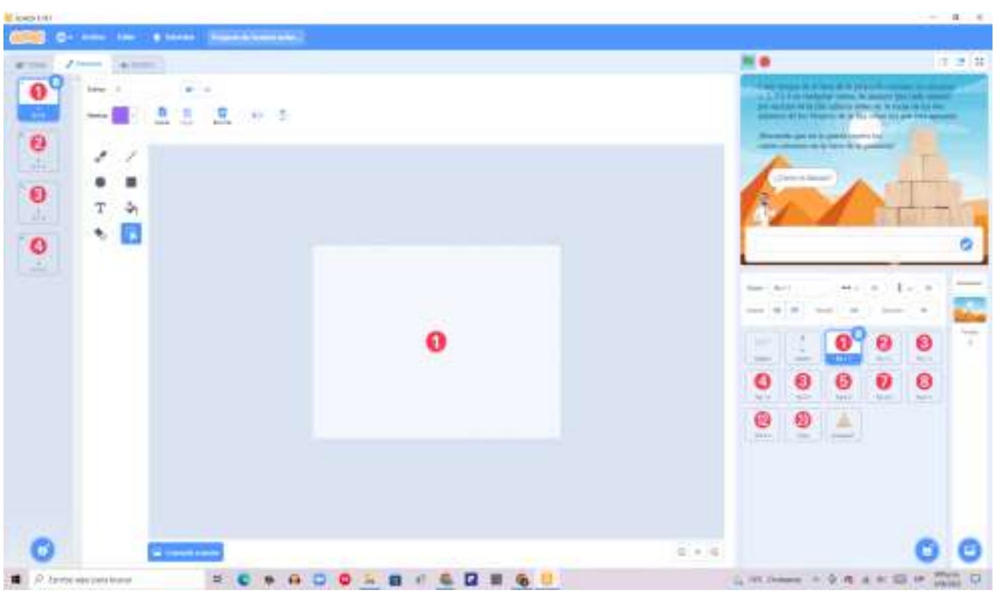
❖ En la pestaña código en cualquier objeto se selecciona la herramienta (variables) en el icono de color naranja, se pueden visualizar en la vista o se pueden ocultar y se nombran con una letra.

❖ Selecciona el botón y elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en subir objeto.

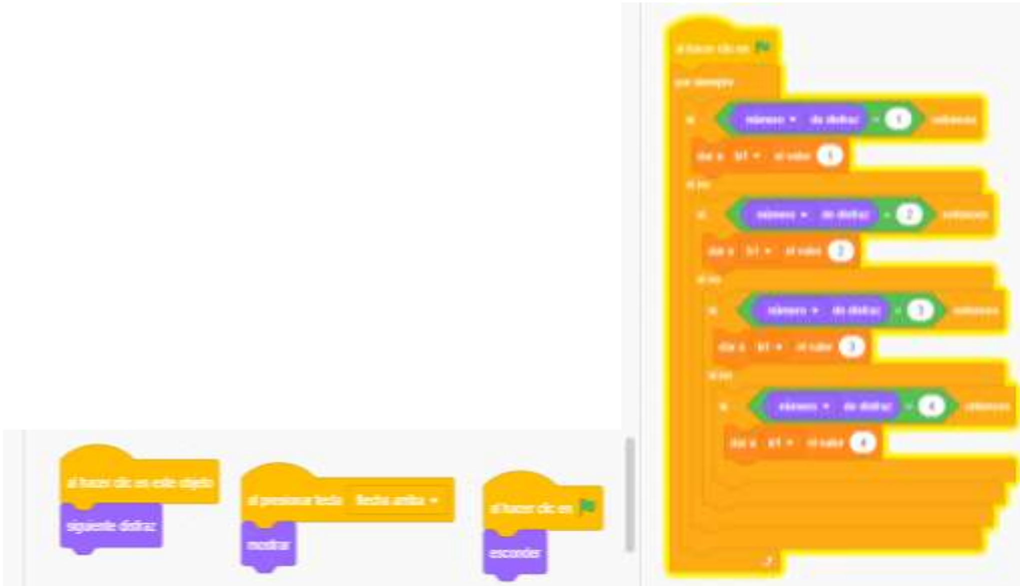


❖ Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí selecciona la opción al hacer click en este objeto, luego selecciona la herramienta apariencia y allí la opción decir y escribe un texto, después selecciona la herramienta sensores, allí selecciona la opción pregunta y escribe la pregunta, seguidamente una serie de indicaciones para que con el teclado se presione lo que indique y de esta manera los números en la pirámide se puedan visualizar.

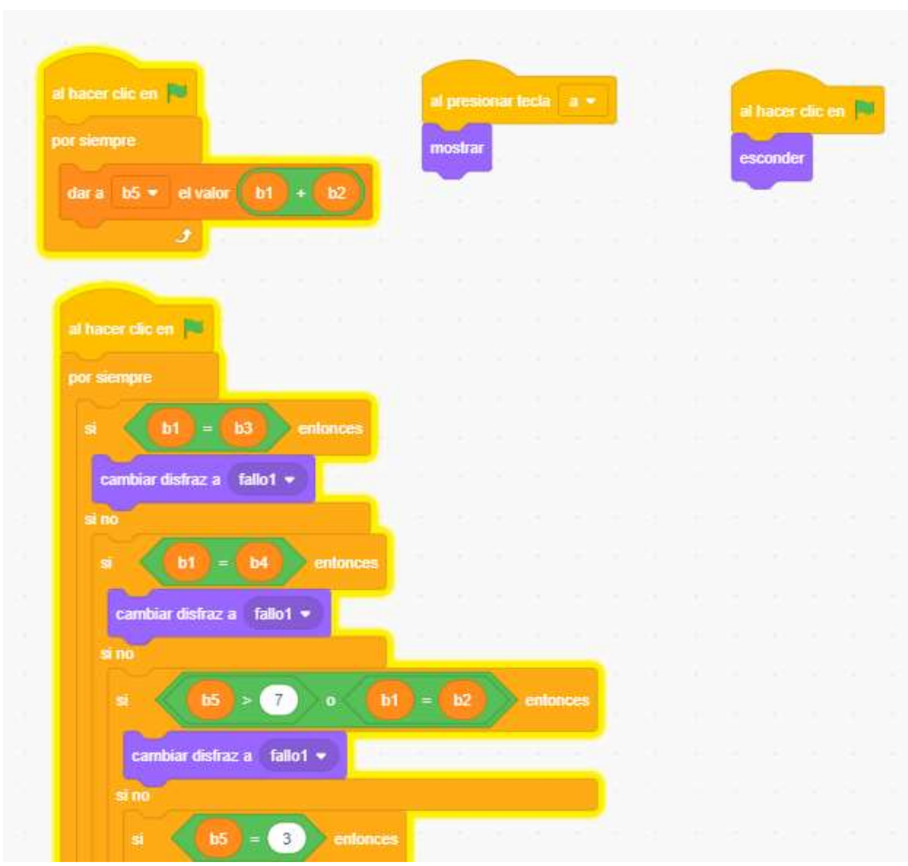
❖ Para los cuatro números de la base se esconde el objeto inicialmente, luego se muestra al presionar alguna letra y muestra otro disfraz para cambiar entre los cuatro números.



❖ Ahora siempre se tendrá una condición de si, entonces y pues se relacionan los disfraces al fijar la variable del bloque el valor correspondiente al mismo número de la variable.



❖ En los números de la segunda fila es necesario colocar la suma de los bloques sobre los que está apoyado el bloque.

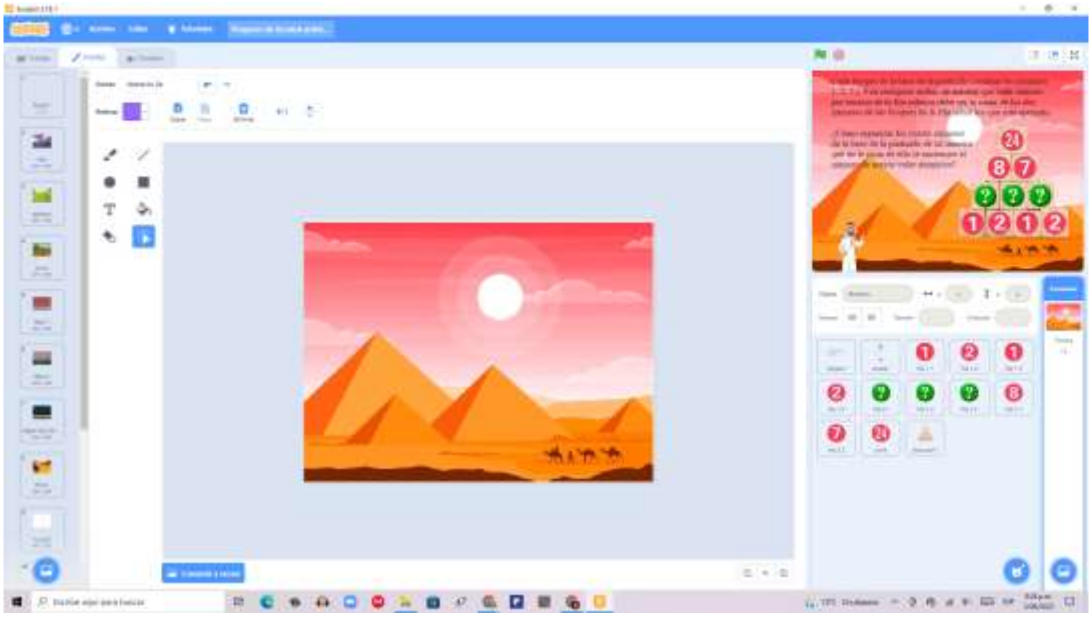


❖ En los demás objetos de cada fila, los números tienen disfraces y las condiciones se aplican a cada uno de ellos.

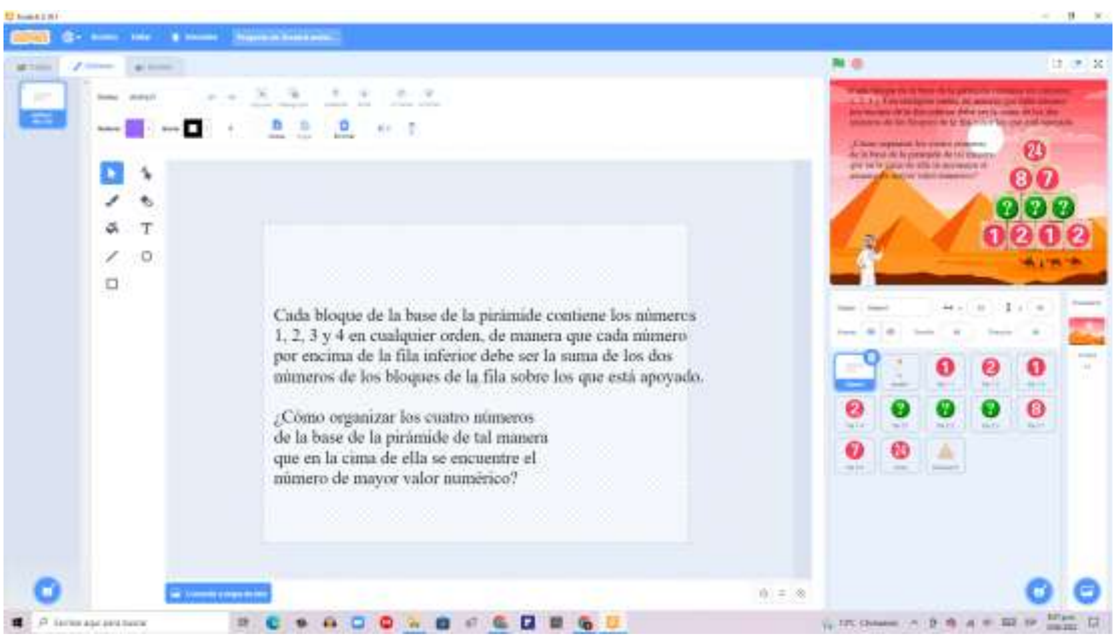
❖ Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera.

❖ En esta nueva situación el algoritmo no cambia.

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.

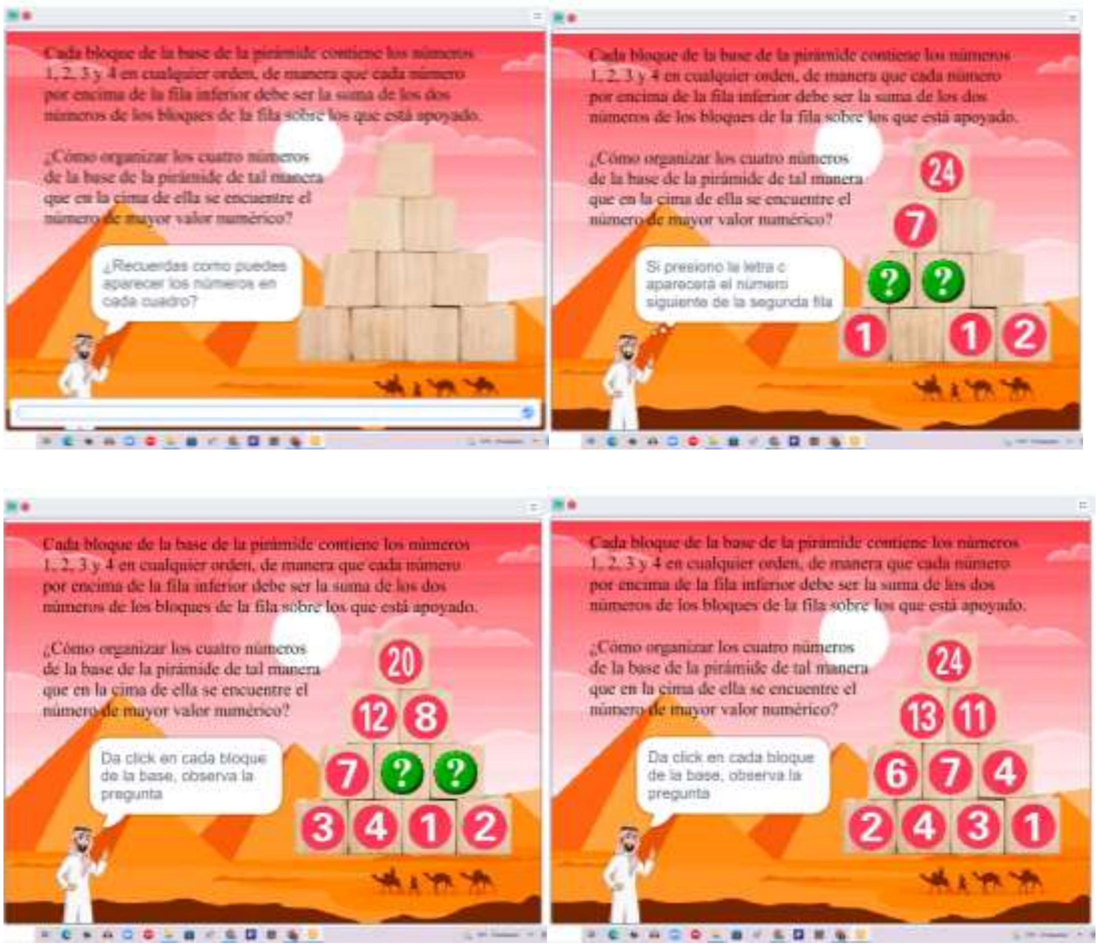


❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la nueva situación agregando una pregunta, esto se observa en la pestaña disfraces.



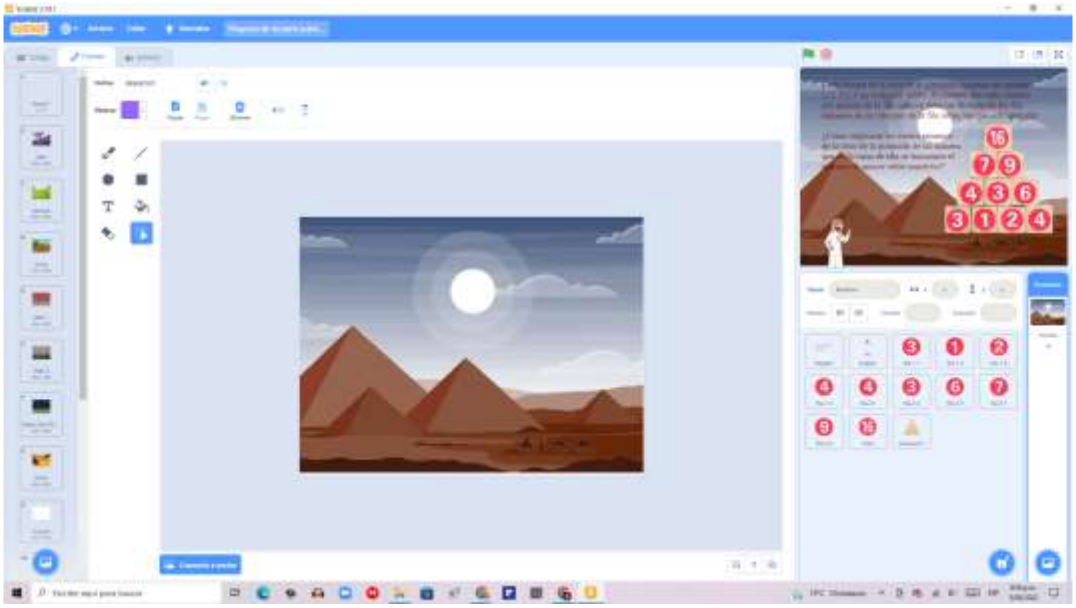
❖ Se hacen algunas modificaciones solamente en los objetos de la segunda fila es decir el b_5, b_6 y el b_7. Esto permite condicionar el problema a la pregunta.

❖ Puede iniciar la ejecución de la programación a la segunda situación, al dar click en la bandera

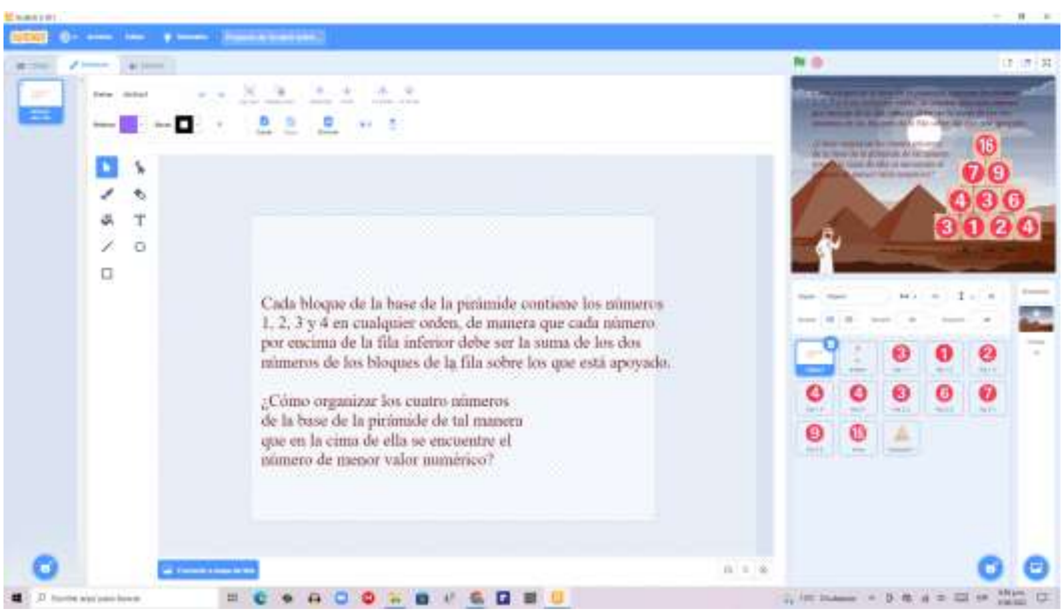


❖ En esta nueva situación el algoritmo no cambia.

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.

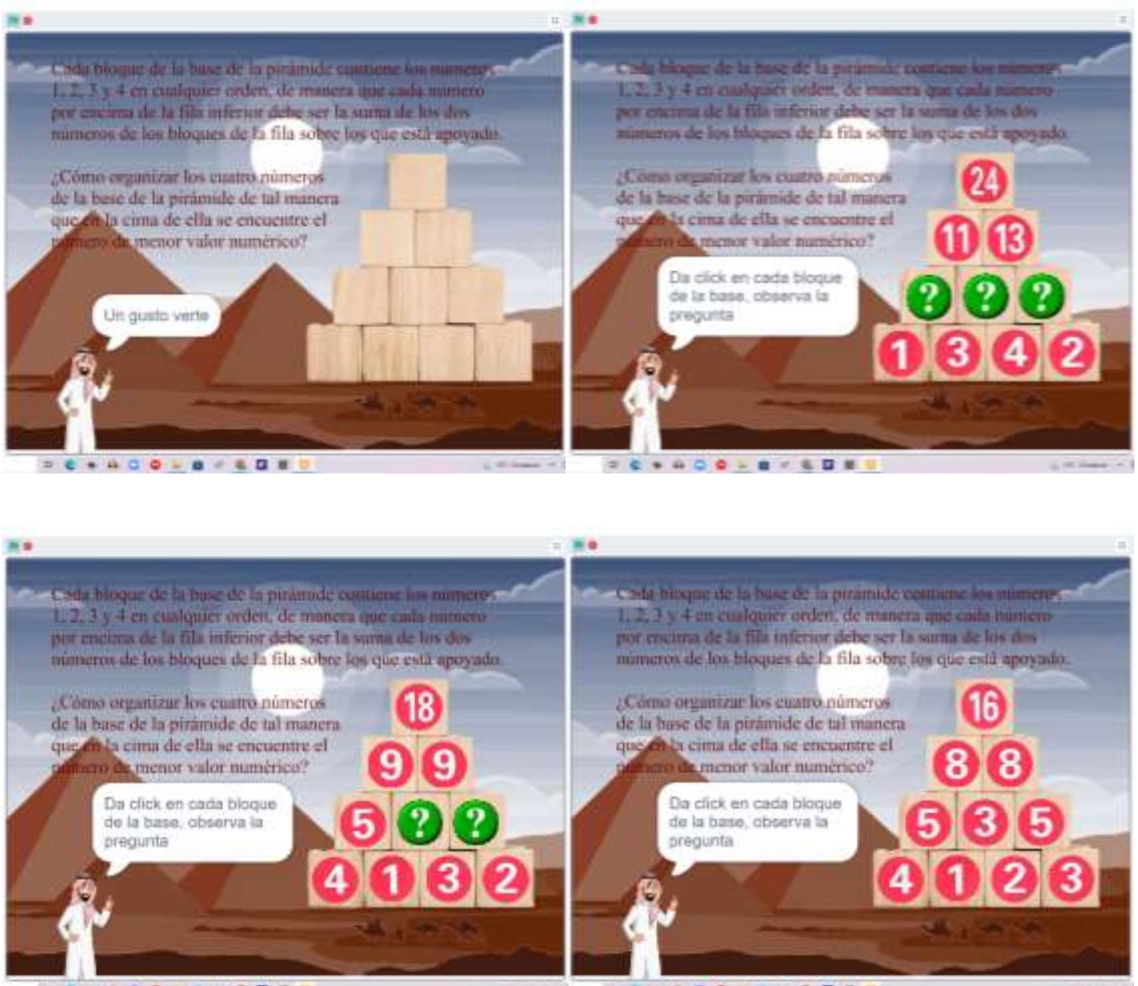


❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la nueva situación agregando una pregunta, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Se hacen algunas modificaciones solamente en los objetos de la segunda fila es decir el b_5, b_6 y el b_7. Esto permite condicionar el problema a la pregunta.

❖ Puede iniciar la ejecución de la programación a la segunda situación, al dar click en la bandera.



4.1.5. Actividad 5 *EL CUBO*

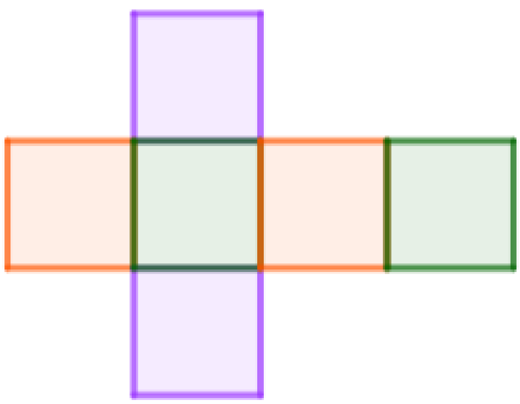
4.1.5.1. Descripción metodológica de la actividad

El docente organiza a los estudiantes de manera individual, y les permite libertad en la construcción de argumentos para que ellos desarrollen pensamiento matemático y lleguen a la solución del problema a través del proceso de demostración y la programación.

Objetivo: Elaborar los argumentos y algoritmos que le permitan construir un cubo en donde la suma de las tres caras opuestas tenga el mismo valor y sea múltiplo de tres, de tal manera que utilice la programación.

Pensamiento Matemático: Pensamiento numérico, pensamiento métrico y pensamiento espacial

Recurso: Estructura del cubo y sus tres pares de caras opuestas con colores diferentes.



Software para programación, Computador, internet.

4.1.5.2. Desarrollo de la actividad 5

Principio de motivación* *lo que realiza el docente

El docente permite que los estudiantes trabajen de manera individual y les presenta el problema matemático ***EL CUBO***: Sara quiere construir un cubo que tenga asignado a cada cara un número y estos seis números de las caras sean consecutivos, de tal manera que la suma de los números en los tres pares de caras opuestas sea el mismo valor numérico.

Principio de motivación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **observan** el problema ***EL CUBO***

Se sugiere que los estudiantes respondan lo siguiente.

¿Qué (variables) información importante pueden identificar en la descripción del problema? ____

¿Cuántas caras tiene un cubo? ____

¿Cómo puedo colorear un cubo con tres colores? _______________________________________

Principio de secuenciación lo que realiza el docente

El docente les plantea la siguiente pregunta al problema matemático para que hagan un programa que les permita saber:

¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor de la suma de los tres pares de caras opuestas?

Principio de secuenciación lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **comparan** la pregunta con el problema de tal manera que les permita, plantear argumentos que le ayuden con el inicio de la demostración, se sugiere que los estudiantes expresen.

¿Cuál es el número consecutivo de 5? ____

¿Cuál es el siguiente número consecutivo? ____

¿Cuál es el número consecutivo de n? ____

***Principio de reforzamiento** lo que realiza el docente*

El docente les plantea que escriban seis números consecutivos para analizar de qué manera los puede emparejar o asociar.

***Principio de reforzamiento** lo que realiza el estudiante*

Los estudiantes **analizan** una situación, se sugiere responder lo siguiente.

¿Cómo asociaría un par de números de los seis consecutivos?

____

¿Qué pasa si sumo esa pareja de números que asocie?

____

¿En algún momento se puede dar que la suma de las tres parejas sea la misma, sí o no? _______

¿por qué? ____

***Principio de retroalimentación** lo que realiza el docente*

El docente invita a los estudiantes para que planteen unos argumentos ante la situación que permita dar solución a dicho problema.

***Principio de retroalimentación** lo que realiza el estudiante*

Los estudiantes **proponen** posibles combinaciones al intercambiar los números de la base. ____

Se sugiere una nueva situación.

¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor obtenido de la suma de los tres pares de caras opuestas?

¿Cómo puedo encontrar el valor de la suma al dar el primer número de los seis números consecutivos?

____

Se aborda otra situación.

¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor obtenido de la suma de los tres pares de caras opuestas y al mismo tiempo sea múltiplo de tres?

¿Cuáles son los múltiplos de tres? ____

¿Cómo se puede obtener una suma que sea múltiplo de tres? ______________________________

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el docente

El docente les plantea que resuelvan el problema al crear un algoritmo que dé solución a través de la programación con Scratch y puedan dar respuesta al problema planteado.

Principio de estructuración / conceptualización lo que realiza el estudiante

Los estudiantes **resuelven el problema**, al construir el algoritmo que lleve al programa a dar solución a la pregunta de la situación similar.

Los estudiantes modifican el enunciado para dar solución a la siguiente situación, construyen otro algoritmo de acuerdo al problema original presentado, de esta manera se evidencia que los estudiantes **aprenden a aprender** cada vez que puedan crear otra situación y otro algoritmo que dé solución al problema planteado.

4.1.5.3. Desarrollo de los argumentos y el algoritmo

Descripción del problema matemático: Sara quiere construir un cubo que tenga asignado a cada cara un número y estos seis números de las caras sean consecutivos, de tal manera que la suma de los números en los tres pares de caras opuestas sea el mismo valor numérico.

Pregunta a problema matemático: Haga un programa que le permita a Angie saber:

¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor de la suma de los tres pares de caras opuestas y sea múltiplo de tres?

Inicio de la demostración:

$ENTRADA$ Los seis números consecutivos $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$

$SALIDA$ Que la suma de los números en los tres pares de caras opuestas sea la misma.

$$2n+5$$

Continuación de la demostración (Argumentos posibles)

1. Un cubo tiene seis caras
2. Los seis números son consecutivos
3. Un cubo tiene tres pares de caras opuestas que se pueden identificar con tres colores uno para cada par de caras opuestas.
4. Las sumas de los tres pares de caras opuestas en un cubo.
5. La suma de las caras opuestas es igual
6. La suma de las caras opuestas es múltiplo de tres
7. La suma de las caras opuestas es impar
8. $2n = 3t + 1$. entonces, que *t* sea impar.

Continuación de la demostración (Algoritmo posible)

variables de ENTRADA

$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$

variables de SALIDA

$$2n+5$$

procedimiento algorítmico

se tiene los números consecutivos

$$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$$

Se busca la suma de los tres pares de caras opuestas.

$n+n+5 \qquad n+1+n+4 \qquad n+2+n+3$

La suma es igual $\quad 2n+5$

Se quiere que la suma sea múltiplo de tres $\quad 2n+5=3t$

Como la suma es impar $\quad 2n=3t+1$

$$t \text{ es impar}$$

Terminación de la demostración (Validación)

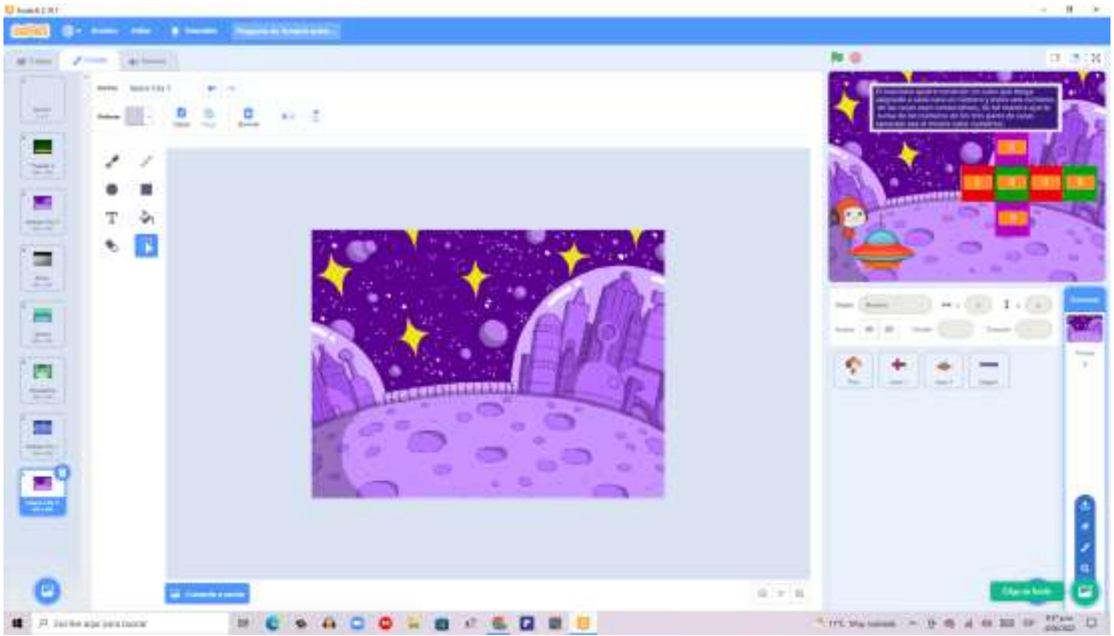
verificar cada argumento, verificar cada algoritmo utilizado y verificar la ENTRADA y la SALIDA a través de diferentes ejemplos.

$ENTRADA$ _11_ _12_ _13_ _14_ _15_ _16_ $SALIDA$ __27__

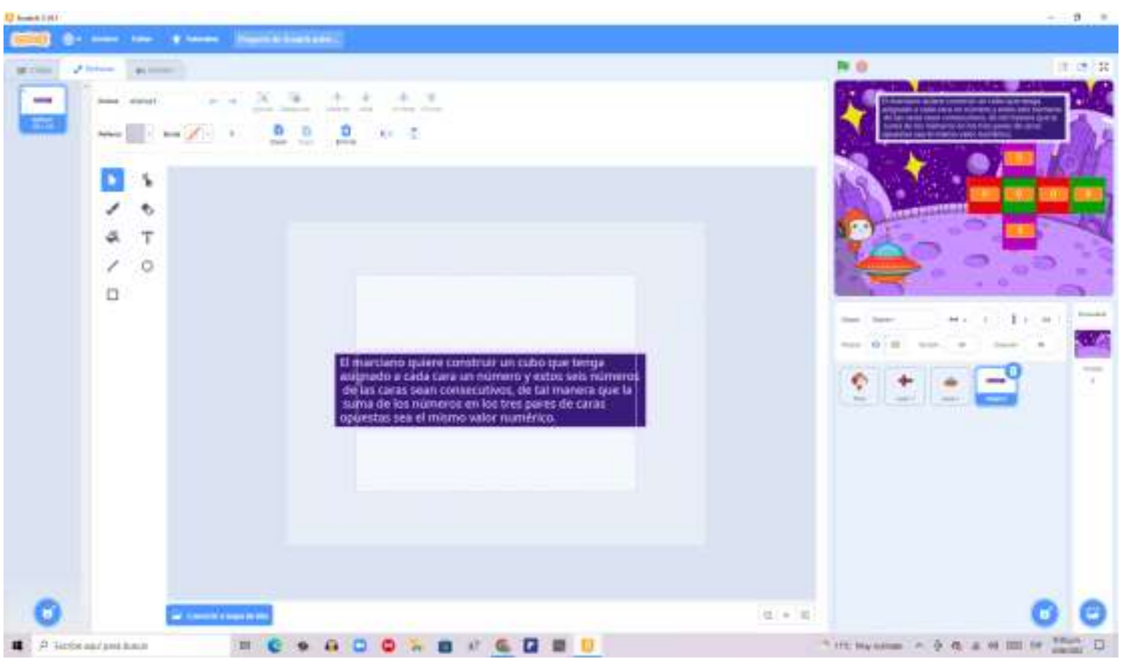
4.1.5.4. Desarrollo de la programación con Scratch

- ❖ Se abre el programa Scratch, en la primera vista hay tres pestañas, (código, disfraces y sonido)

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar una imagen predeterminada, esto se observa en la pestaña disfraces.

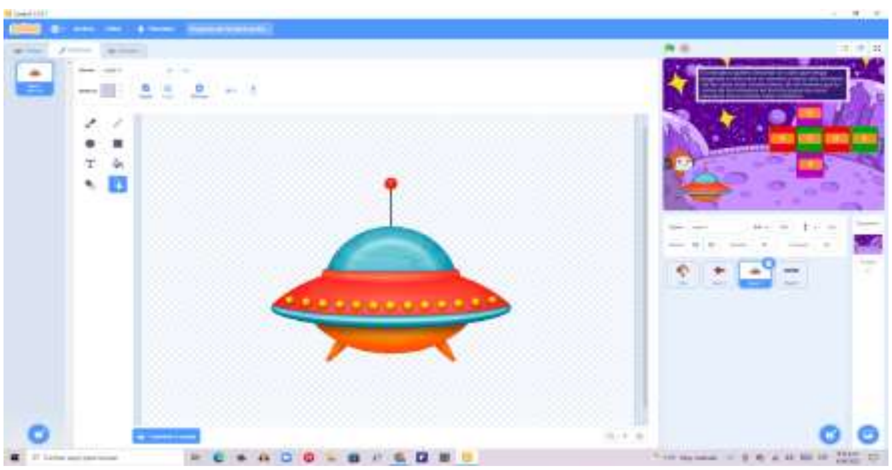


❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación planteada.



❖ En la pestaña código se selecciona la herramienta de variables en el icono de color naranja, se crean seis variables, se pueden visualizar y se ubican en las seis caras del cubo de manera que concuerden las caras opuestas con las variables que se suman.

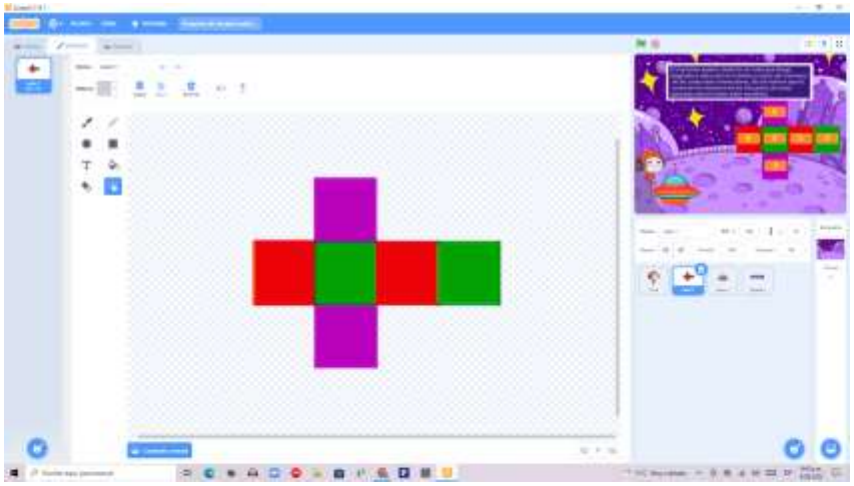
❖ Selecciona el botón y elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en subir objeto, en la nave espacial puede organizar para siempre el algoritmo de la suma.



❖ Selecciona el botón y elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en subir objeto.

❖ Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí las seis variables se fijan para que inicien en cero, luego selecciona la herramienta apariencia y allí la opción decir y escribe un texto, después selecciona la herramienta sensores, allí selecciona la opción pregunta, seguidamente cada variable le suma 1, este proceso se hubiera podido hacer solo con una variable pero fue necesario así para que todas las variables se pudieran visualizar en las seis caras del cubo y por último otro mensaje.

❖ Selecciona el botón y elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en subir objeto se ubica el cubo y sobre él se ubican las seis variables.

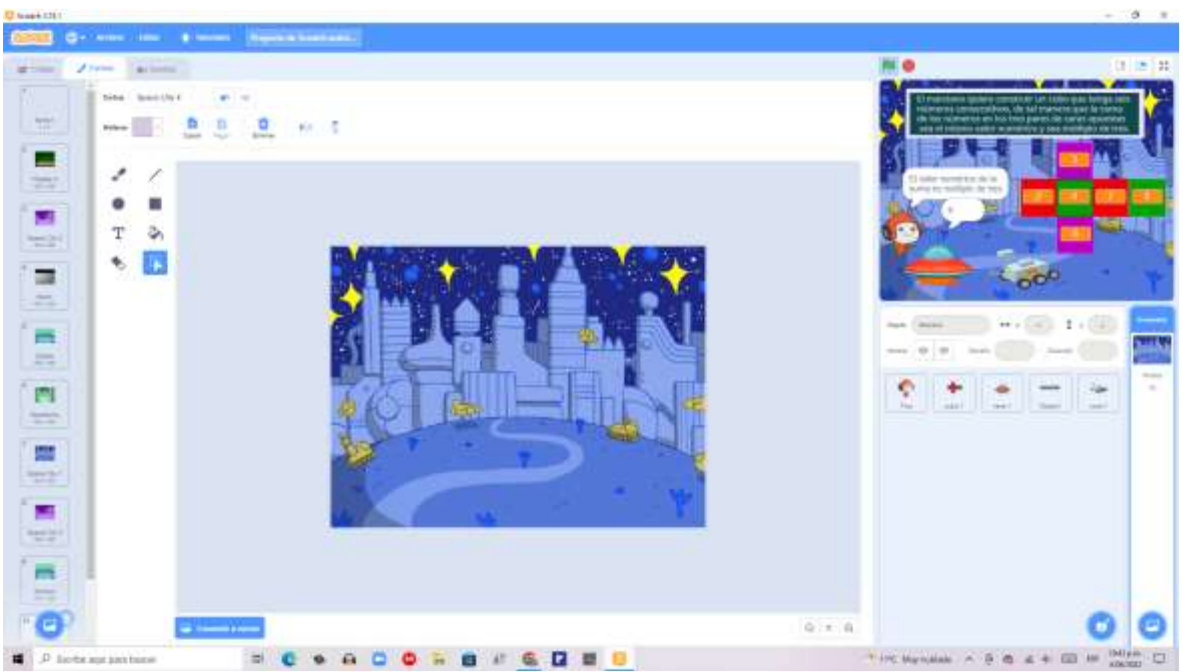


❖ Es importante fijar el objeto, es decir el cubo para que no se arrastre y tape las variables.

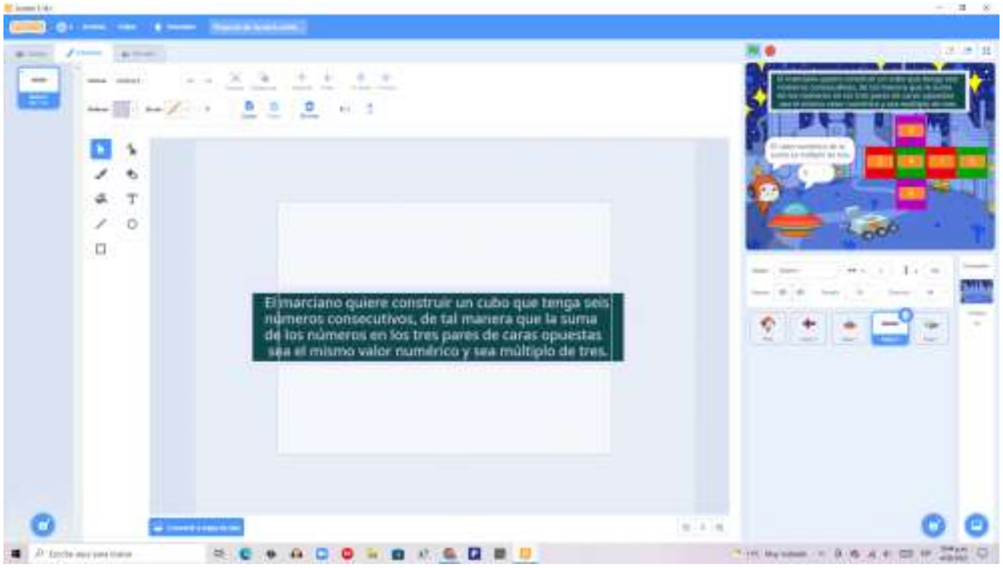
❖ Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera.

❖ En esta nueva situación el algoritmo no cambia.

❖ Se coloca un fondo en la opción elige un fondo en la parte inferior derecha, se puede seleccionar cargar un fondo, esto se observa en la pestaña disfraces.



❖ Selecciona el botón elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego la opción pinta y con el botón de texto se escribe la situación planteada.

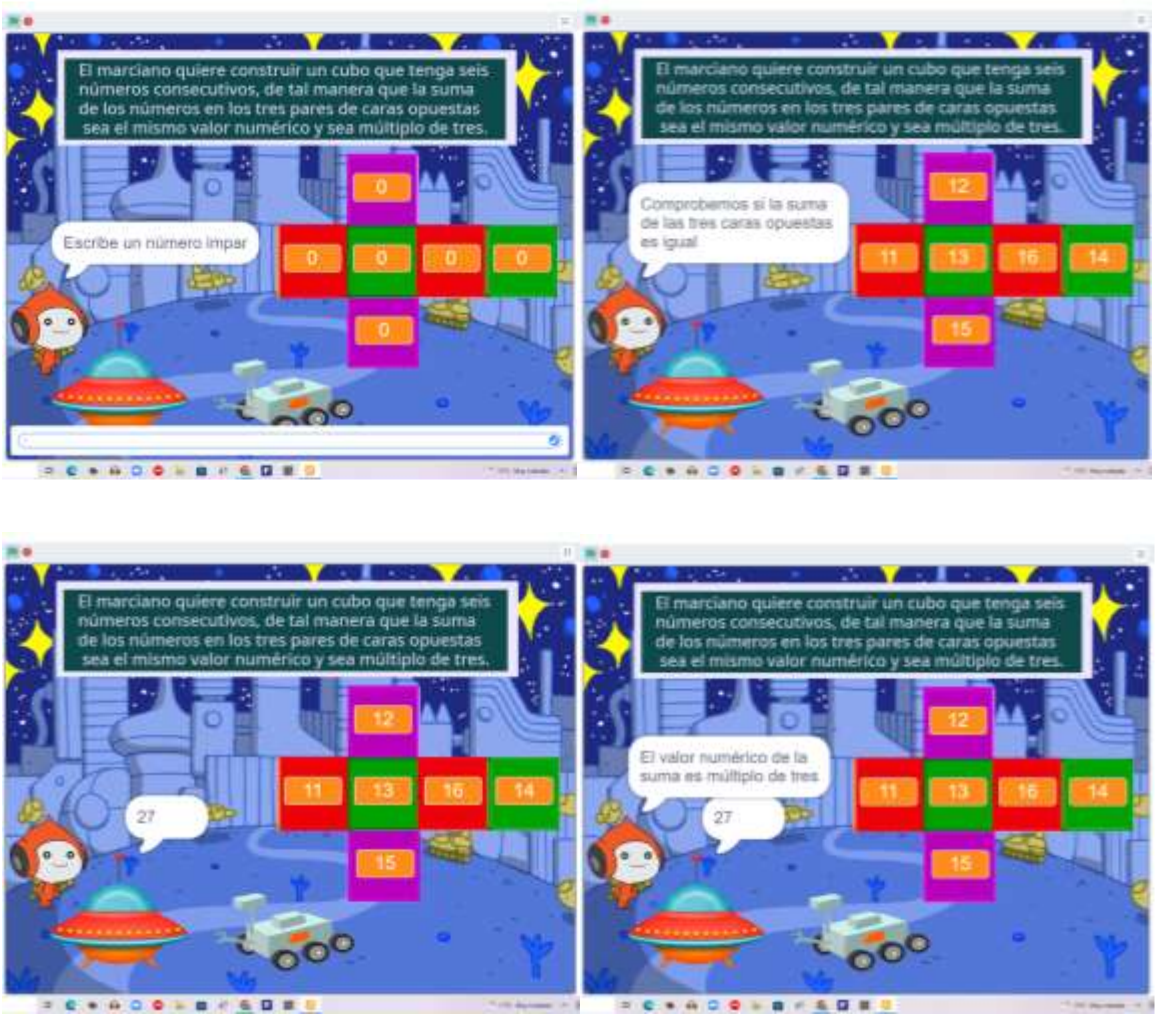


❖ Se crea una variable adicional (t) y no se visualiza.

❖ Inicia una animación, con la herramienta eventos, allí se agrega cambiar la pregunta de dar el primer número de los seis consecutivos a dar un número impar, luego se fija a la variable t a una respuesta, luego fijar la variable 1 a un algoritmo en relación a t y además el marciano de recibir un mensaje del carro robótico en donde responda que la solución es múltiplo de tres.

❖ Selecciona el botón y elige un objeto, que se encuentra en la parte inferior derecha, luego en subir objeto se sube el carro robótico al dar click en el objeto siempre envía un mensaje al marciano


❖ Puede iniciar la ejecución de la programación al dar click en la bandera.



Conclusiones

De este capítulo se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- Se fundamenta un sistema de actividades basado en la teoría del aprendizaje por descubrimiento el cual brinda al estudiante la oportunidad de generar conocimiento por sí mismo a través de la guía y el acompañamiento del docente.
- Se prioriza el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos como un eje fundamental en la elaboración del sistema de actividades, el cual brinda al estudiante herramientas para desarrollar el pensamiento matemático.
- Se plantean cinco actividades, cuya estructura se basa en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos, con un objetivo y un desarrollo metodológico.
- Se aborda el proceso de argumentación y el proceso de demostración, dentro del sistema de actividades con el fin de poder caracterizar la relación que hay entre ellos a través de unas preguntas guiadas.
- Se fomenta un espacio tecnológico desde el campo de la programación y los algoritmos incorporados dentro del sistema de actividades, permitiendo el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se realiza un análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de acuerdo a la metodología propia de las actividades, fundamentado en la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner, los resultados se analizan en dos categorías:

CATEGORÍA 1 (descriptiva)

El análisis se establece para cada criterio en cada una de las actividades de manera descriptiva de la observación en el alcance de logros y la presentación de dificultades.

CATEGORÍA 2 (estadística)

El análisis se establece para cada criterio en cada una de las actividades y para cada actividad de forma general de manera estadística en los niveles en que los estudiantes alcanzan los logros.

Tabla 4 Niveles del alcance de los logros

Característica	Frecuencia
Todos los estudiantes	12
La mayoría de los estudiantes	9
Algunos de los estudiantes	6
Pocos estudiantes	3

Ninguno de los estudiantes	0

Elaboración propia

Criterios a analizar: Los criterios establecidos para cada actividad, son los siguientes:

Principio de motivación.

Principio de secuenciación.

Principio de reforzamiento.

Principio de retroalimentación.

Principio de estructuración / conceptualización.

5.1. Actividad 1*EL TAXI*

5.1.1. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 1 (descriptiva)

Objetivo: Elaborar argumentos y algoritmos que le permitan conocer el costo de la carrera que hace el taxista desde una casa hasta el lugar de destino, de tal manera que utilice la programación.

Problema matemático *EL TAXI*: La mamá de Irene toma un taxi por la noche desde su casa para realizar una diligencia importante, al tomar el taxi desde su casa hay un costo inicial de banderazo o arranque de 2600 pesos, adicional tiene un recargo nocturno de 2400 pesos, además por cada minuto que pase detenido el taxista cobra 200 pesos y por cada kilómetro recorrido cobra 900 pesos, hasta llegar al lugar de destino.

Pregunta al problema matemático: Si el costo de la carrera fué de 30000 pesos ¿Cuántos minutos estaría el taxi detenido y cuántos kilómetros habrá recorrido el taxista desde la casa hasta el lugar de destino?

Principio de motivación

Logros

1. La mayoría de los estudiantes observan el problema matemático e identifican la información importante, como por ejemplo que cuando se coge el taxi desde la casa hay un costo de banderazo, y al coger el taxi en la noche hay un costo de recargo nocturno.
2. Algunos estudiantes relacionan que por cada minuto detenido se cobra un valor y por cada kilómetro recorrido también se cobra otro valor.

Dificultades

- ➢ Falta de comprensión lectora y reconocimiento de la información.
- ➢ Los diferentes ritmos de aprendizaje entre los estudiantes.

Principio de secuenciación

Logros

3. La mayoría de los estudiantes comprenden la pregunta abordada ¿Cuánto le cobró el taxista por llevar a la mamá de Irene desde su casa hasta su lugar de destino?, y la comparan con el problema planteado inicialmente.
4. Algunos estudiantes difieren en que no la podrían solucionar si no se conoce cuánto duró. detenido el taxista y no se conoce cuánto recorrió hasta llegar a l lugar de destino.
5. Pocos estudiantes plantean argumentos iniciales para esta situación en correspondencia a la pregunta abordada.
6.

Dificultades

- ➢ No hay claridad en el planteamiento del problema inicial.
- ➢ No presentan un razonamiento tan estructurado.

Principio de reforzamiento

Ante la nueva situación presentada, sí el costo inicial del banderazo o arranque es de 25 pesos, además, por cada minuto que esté el taxi detenido cobra 2 pesos y por cada kilómetro recorrido cobra 8 pesos, hasta llegar al lugar de destino y sí el costo de la carrera fuese 225 pesos. ¿Cuántos minutos estaría el taxi detenido y cuántos kilómetros habrá recorrido el taxista desde la casa hasta el lugar de destino?

Logros

7. Todos los estudiantes tienen claridad en que se puede encontrar una solución al problema planteado pues se necesita encontrar el número de minutos detenidos y el número de kilómetros recorridos, pero ya se conoce el costo de la carrera.
8. La mayoría de los estudiantes determinan que el valor a encontrar es de 200 pesos al restar al costo de la carrera el valor del banderazo y encuentran una solución, unos encuentran más de una solución.
9. Pocos estudiantes encuentran el valor máximo de los kilómetros recorridos que es de 25 km y el valor máximo de minutos detenidos que es 100 min es decir 1 hora y 40 min.
10. Pocos estudiantes encuentran la cantidad de soluciones que tiene el problema en total 26 soluciones y escribe todas las soluciones.
11. Pocos estudiantes encuentran la relación que sí los kilómetros aumentan de uno en uno los minutos disminuyen de cuatro en cuatro y viceversa.

Dificultades

- Se presenta dificultad en organizar la información para encontrar alguna solución.
- Se dificulta generar un razonamiento para encontrar los valores máximos, los valores mínimos, la cantidad de soluciones y determinar todas las soluciones.

Principio de retroalimentación

Se plantea una situación similar en donde el costo de la carrera fuese 300 pesos ¿El problema similar abordado tiene solución en los números enteros?

Y se aborda, si el costo de la carrera fuese de 30000 pesos, de acuerdo a los datos del problema inicial. ¿Cuáles son sus propios argumentos a la pregunta?

Logros

12. Algunos estudiantes encuentran que no hay solución cuando el costo fuese 300 pesos, puesto que el valor al quitar el banderazo es de 275 y este no es múltiplo ni de 2 ni de 8 y al realizar la división entre 275 y 2 o entre 275 y 8 deja un resto, por lo cual el costo de la carrera sería de 301 pesos.
13. Todos los estudiantes determinan que el valor a encontrar es de 25000 pesos al restar al costo de la carrera el valor del banderazo y del recargo nocturno y encuentran alguna solución.
14. La mayoría de los estudiantes relacionan esta situación con el problema planteado similar.
15. Pocos estudiantes encuentran el valor máximo de los kilómetros recorridos que está entre 27 y 28 km y el valor máximo de minutos detenidos que es 125 min es decir 2 hora y 5 min.
16. Pocos estudiantes encuentran que la cantidad de soluciones que tiene el problema, son 14 soluciones y escriben todas las soluciones.

17. Pocos estudiantes encuentran la relación que sí los kilómetros aumentan de dos en dos los minutos disminuyen de nueve en nueve y viceversa.

Dificultades

- ➢ Se dificulta generar argumentos ante la situación que se presenta, debido a que no es muy clara y se tiene un razonamiento poco estructurado.
- ➢ Presenta un mayor esfuerzo encontrar, el total de soluciones y la relación entre los minutos y los kilómetros y no se precisa tan fácilmente que hay un aumento o disminución de dos para los kilómetros y de cuatro para los minutos.

Principio de estructuración / conceptualización

Logros

18. Algunos estudiantes han utilizado el programa Scratch y pueden animar el taxi.
19. Pocos estudiantes identifican las variables que intervienen dentro del problema y por consiguiente crear el algoritmo y la programación.

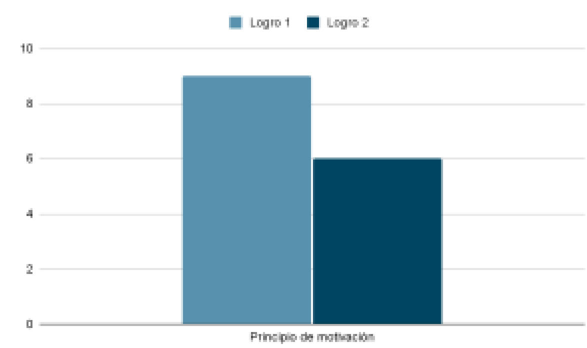
Dificultades

- ➢ Es un programa nuevo de usar para los estudiantes por lo que no se sienten familiarizados.
- ➢ Se dificulta introducir las variables de minutos, kilómetros y costo para realizar un algoritmo que lleve a la solución del problema planteado.
- ➢ La creación de algoritmos, animaciones y la programación es nueva para los estudiantes y por ende se les dificulta.

5.1.2. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 2 (estadística)

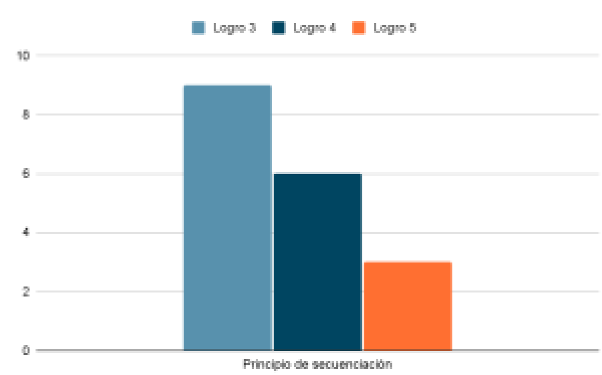
Principio de motivación

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 1	La mayoría de los estudiantes	9
Logro 2	Algunos de los estudiantes	6



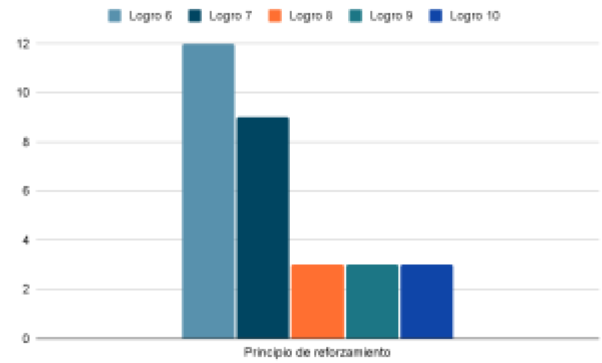
Principio de secuenciación

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 3	La mayoría de los estudiantes	9
Logro 4	Algunos de los estudiantes	6
Logro 5	Pocos estudiantes	3

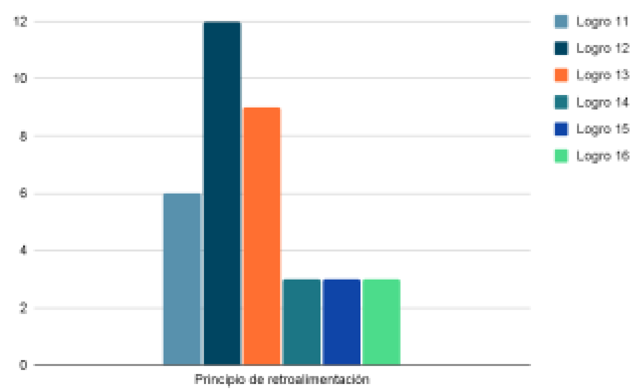


Principio de reforzamiento

Logros	Característica	Frecuencia	

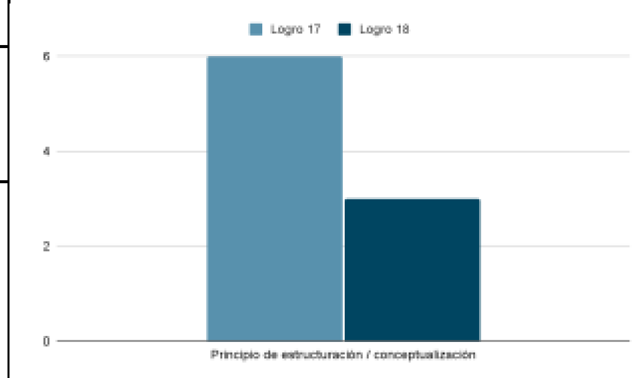
Logro 6	Todos los estudiantes	12	
Logro 7	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 8	Pocos estudiantes	3	
Logro 9	Pocos estudiantes	3	
Logro 10	Pocos estudiantes	3	

Principio de retroalimentación

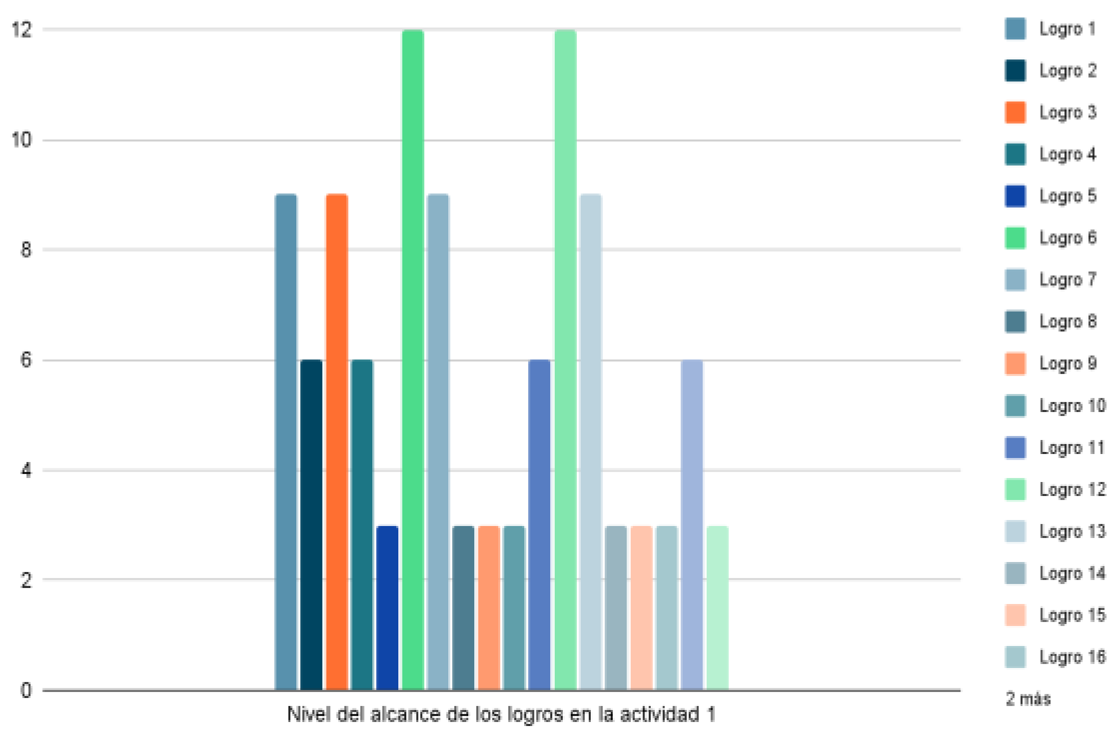
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 11	Algunos estudiantes	6	
Logro 12	Todos los estudiantes	12	
Logro 13	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 14	Pocos estudiantes	3	
Logro 15	Pocos estudiantes	3	
Logro 16	Pocos estudiantes	3	

Principio de estructuración / conceptualización

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 18	Algunos de los estudiantes	6
Logro 19	Pocos estudiantes	3

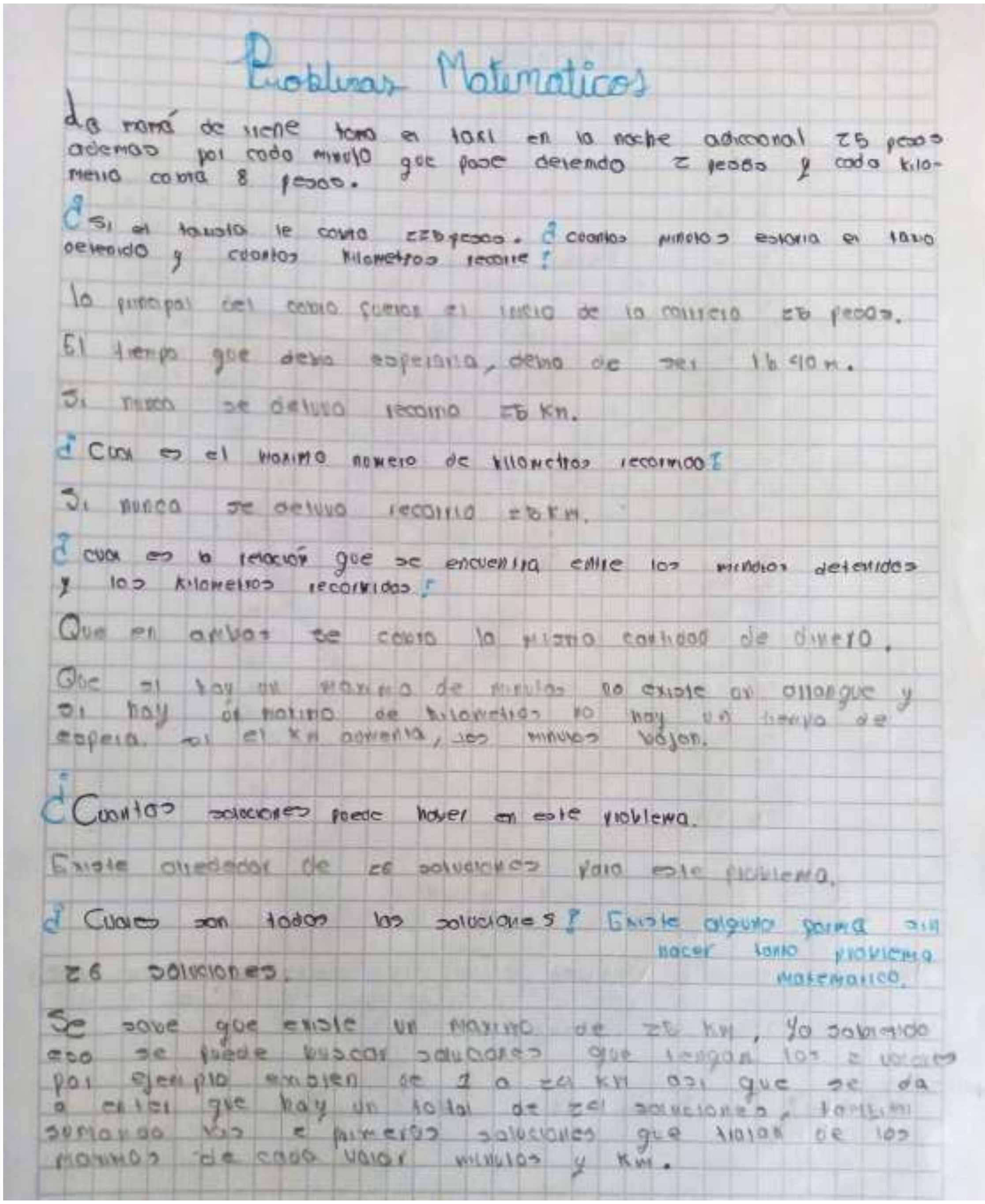


Nivel del alcance de los logros en la actividad 1 EL TAXI



5.1.3. Evidencia de la actividad 1

Argumentos de los estudiantes


Problemas Matematicos

la mamá de liene toma en taxi en la noche adicional 25 pesos ademas por cada minuto que pase detenido 2 pesos y cada kilometro cobra 8 pesos.

¿Si el taxista le cobro 250 pesos. ¿cuantos minutos estaria en taxi detenido y cuantos kilometros recorre?

lo principal del cobro fueron el inicio de la corrida 25 pesos.

El tiempo que debio esperarla, debio de ser 1 h 40 m.

Si nunca se detuvo recorrio 25 Km.

¿Cual es el maximo numero de kilometros recorrido?

Si nunca se detuvo recorrio 28 Km.

¿cual es la relación que se encuentra entre los minutos detenidos y los kilometros recorridos?

Que en ambos se cobra la misma cantidad de dinero.

Que si hay un maximo de minutos no existe un aunque y si hay un maximo de kilometros no hay un tiempo de espera. si el Km aumenta, los minutos bajan.

¿Cuantas soluciones puede haver en este problema.

Existe alrededor de 26 soluciones para este problema.

¿Cuales son todas las soluciones? Existe alguna forma sin hacer tanto problema matematico.

26 soluciones.

Se sabe que existe un maximo de 25 km, ya sabiendo eso se puede buscar soluciones que tengan los 2 valores por ejemplo tambien de 1 a 24 km asi que se da a entender que hay un total de 26 soluciones, tambien sumando los 2 numeros soluciones que tienen de los maximos de cada valor minutos y km.

Soluciones

Kilometros	Metros
0 Km	1h 40 m -> 100 m
1 km	1h 36 m -> 96 m
2 Km	1h 32 m -> 92
3 km	1h 28 m -> 88
4 Km	1h 24 m -> 84
5 Km	1h 20 m -> 80
6 Km	1h 16 m -> 76
7 Km	1h 12 m -> 72
8 Km	1h 8 m -> 68
9 Km	1h 4 m -> 64
10 Km	1h 0 m -> 60
11 Km	56 m
12 Km	52 m
13 Km	48 m
14 Km	44 m
15 Km	40 m
16 Km	36 m
17 Km	32 m
18 Km	28 m
19 Km	24 m
20 Km	20 m
21 Km	16 m
22 Km	12 m
23 Km	8 m
24 Km	4 m
25 Km	0 m

Esta herramienta es denominada los polos opuestos ya que existe un valor que aumenta y otro disminuye. Logramos entender que entre más km recorridos el salen menos minutos deteniendo, por lo cual no existe un cargo adicional que permita subir la tarifa del costo inicial.

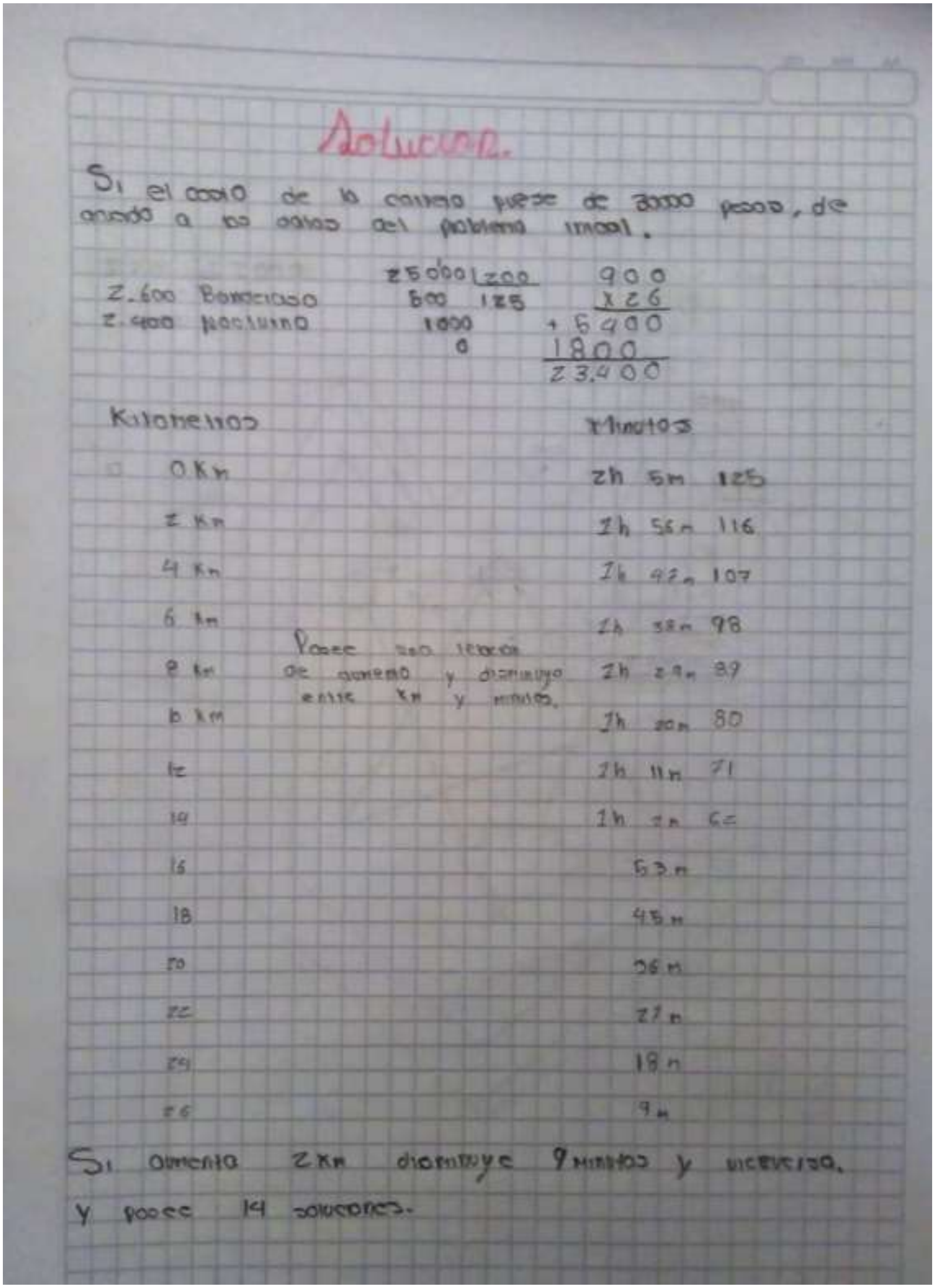
250 - 300 pesos

No existe solución. Debido a que el [illegible] [illegible] y no posee un par o un multiplo de 2 o 3, que en este caso son numeros pares.

226 | 2 — 000 113

1h 13m - 113 m

226 | 8 — 66 2



Solución.

Si el costo de la carrera parte de 30000 pesos, de acuerdo a los datos del problema inicial.

2.600 Banderazo
2.400 recorrido

25000 | 200
500   125
1000
0

900
× 26
+ 5400
1800
23,400

Kilometros	Minutos	
0 Km	2h 5m	125
2 Km	1h 56m	116
4 Km	1h 47m	107
6 Km	1h 38m	98
8 Km	1h 29m	89
10 Km	1h 20m	80
12	1h 11m	71
14	1h 2m	62
16	53 m	
18	45 m	
20	36 m	
22	27 m	
24	18 m	
26	9 m	

Posee una relación de aumento y disminuyo entre Km y minutos.

Si aumenta 2 Km disminuye 9 minutos y viceversa.
Y posee 14 soluciones.

Evidencia fotográfica de la actividad 1

5.2. Actividad 2 *LA FINCA*

5.2.1. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 1 (descriptiva)

Objetivo: Construir argumentos y algoritmos que le permita conocer la longitud de la cerca (perímetro) y el área de un terreno rectangular dando la coordenada del vértice inferior izquierdo y la coordenada del vértice superior derecho, de tal manera que utilice la programación.

Problema matemático *LA FINCA:* Los papás de María Fernanda quiere construir una finca en un terreno rectangular, para esto se diseña un plano en donde se conoce la coordenada del vértice inferior izquierdo y la coordenada del vértice superior derecho, dado por parejas de números enteros positivos, de tal manera que se pueda obtener el perímetro que hace referencia a la longitud de la cerca para delimitar el terreno y el área que hace referencia al terreno rectangular formado por los vértices dados, formando lados paralelos a los ejes de las coordenadas.

Pregunta al problema matemático: Si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1000,1000),* y el área del terreno es de 8 hectáreas ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo, que permita obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

Principio de motivación

Logros

1. La mayoría de los estudiantes grafican rectángulos y reconocen las características como: que tiene cuatro lados, en donde los lados opuestos son iguales entre sí, tienen ángulos rectos.
2. Pocos estudiantes relacionan las coordenadas de los vértices del rectángulo con las longitudes de los lados del mismo.
3. Algunos estudiantes reconocen la información en el problema especialmente el perímetro y el área de un rectángulo.

Dificultades

- ➢ Falta de conocimiento de todas las características del rectángulo.
- ➢ Se dificulta establecer que hay una longitud entre los vértices, es complejo pasar de coordenadas a longitudes y viceversa.
- ➢ Faltan conocimientos previos acerca del perímetro y el área de un rectángulo.

Principio de secuenciación

Logros

4. Algunos estudiantes comprenden la pregunta abordada ¿Cuál es la longitud de la cerca (perímetro) y el área del terreno rectangular a partir de las coordenadas dadas por los vértices inferior izquierdo y superior derecho?, y la comparan con el problema planteado inicialmente.
5. La mayoría de estudiantes le dan un valor a las longitudes de los lados del rectángulo y pueden obtener el perímetro y el área rectangular.
6. Pocos estudiantes plantean argumentos iniciales para esta situación en correspondencia a la pregunta abordada.

Dificultades

- ➢ No hay claridad en la relación entre las coordenadas de los vértices con las longitudes, el perímetro y el área rectangular.
- ➢ No presentan un razonamiento tan estructurado para dar varios argumentos.

Principio de reforzamiento

Ante la nueva situación presentada, si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1,1),* la longitud de la cerca (perímetro) es de 26 metros y el área rectangular correspondiente es de 30 metros cuadrados ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo?

Logros

7. La mayoría de los estudiantes tienen claridad en encontrar la coordenada del vértice superior izquierdo a partir de la coordenada fija inferior derecha (1,1), pueden avanzar alguna longitud y de esta manera encontrar el valor de la coordenada.

8. Algunos estudiantes encuentran las longitudes de 3 metros y 10 metros dado que se tiene que el área rectangular es de 30 metros cuadrados y por consiguiente se obtiene que el perímetro establecido es de 26 metros.

9. Pocos estudiantes encuentran que hay dos soluciones debido a que el orden del producto cambia, el área no cambia, ni el perímetro cambia, pero la coordenada del vértice superior izquierdo puede variar o bien es (4,11) o es (11,4).

Dificultades

- ➢ Se presenta dificultad en el razonamiento de obtener las longitudes a partir del perímetro dado y el área rectangular dada.
- ➢ Se dificulta pensar que se puede formar un rectángulo de igual área e igual perímetro de dos maneras diferentes.

Principio de retroalimentación

Se plantea una situación similar, si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1,1),* y el área correspondiente al terreno es de 30 metros cuadrados ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo, que permita obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

Y se aborda, si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es *(1000,1000),* y el área del terreno es de 8 hectáreas ¿Cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo, que permita obtener la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

Logros

10. La mayoría de los estudiantes relacionan esta situación con el problema similar planteado anteriormente e identifican que hay varios factores que permiten encontrar el área rectangular pero que se obtiene un perímetro diferente

11. Algunos estudiantes encuentran que la menor cantidad de cerca (perímetro) es de 22 metros cuando las longitudes son 6 metros y 5 metros y por ende se obtienen dos soluciones o bien es (7,6) o es (6,7).

12. Pocos estudiantes entienden el problema planteado con el área de 8 hectáreas, por lo que realizan el análisis en el problema anterior del área de 30 metros cuadrados, obteniendo los divisores de 30 (1,2,3,5,6,10,15,30) de esta forma se pueden ordenar como divisores y determinar cuatro productos conmutativos.

13. Pocos estudiantes relacionan las 8 hectáreas en una equivalencia a 80000 metros cuadrados y obtienen los 40 divisores de 80000.

14. Pocos estudiantes encuentran que si llega a los valores medios de los divisores encuentran la menor longitud de cerca (perímetro), en este caso los divisores son 250 y 320, el área es 80000 metros cuadrados y el perímetro es 1140 metros y se tienen dos soluciones de la coordenada superior derecha (1250,1320) y (1320,1250).

Dificultades

- Se dificulta generar argumentos ante la situación que se presenta, debido a que es de mayor rigor.

- ➢ Presenta un mayor esfuerzo encontrar los divisores de una cantidad tan grande y por ende saber cuáles son los valores que permiten obtener la menor longitud de cerca posible al identificar que el primero con el último, el segundo con el antepenúltimo y así sucesivamente se van encontrado los factores que dan el mismo resultado.

Principio de estructuración / conceptualización

Logros

15. Pocos estudiantes llegan a tener los argumentos suficientes para buscar la manera de crear un algoritmo en el programa de Scratch

16. Ningún estudiante puede crear el algoritmo de relacionar el perímetro y el área en función de las coordenadas.

Dificultades

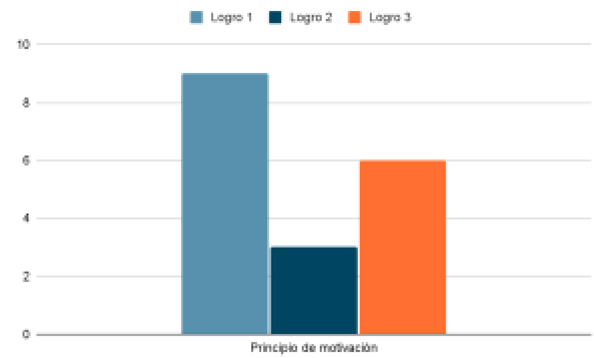
- ➢ Hay muchas dificultades para organizar el algoritmo en el programa de Scratch, que determine el área y el perímetro en función de las coordenadas dadas.

- ➢ El tiempo durante las sesiones en el semillero es muy corto y no permite avanzar bien en la programación.

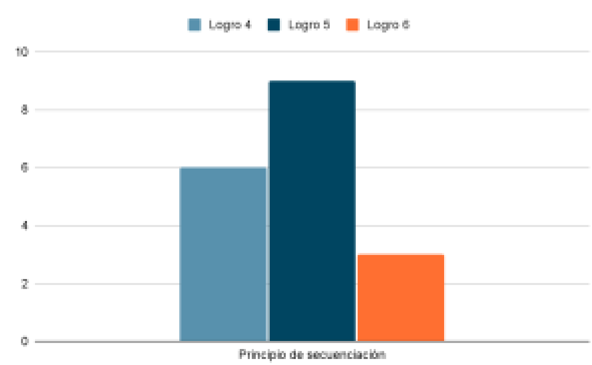
5.2.2. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 2 (estadística)

Principio de motivación

Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 1	La mayoría de los estudiantes	9	

Logro 2	Pocos estudiantes	3	
Logro 3	Algunos de los estudiantes	6	

Principio de secuenciación

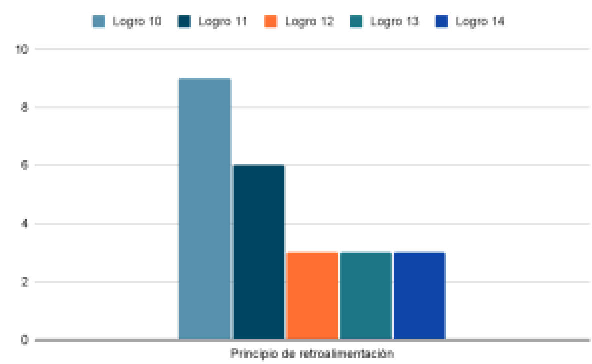
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 4	Algunos de los estudiantes	6	
Logro 5	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 6	Pocos estudiantes	3	

Principio de reforzamiento

Logros	Característica	Frecuencia	

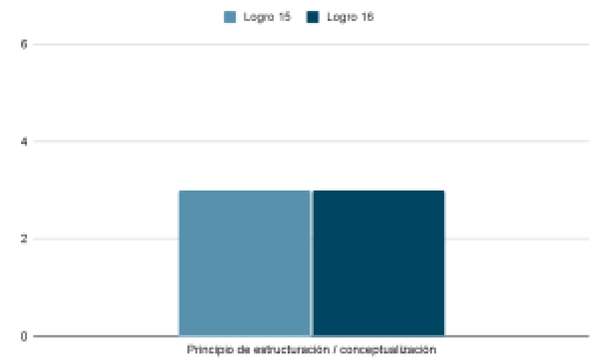
Logro 7	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 8	Algunos estudiantes	6	
Logro 9	Pocos estudiantes	3	

Principio de retroalimentación

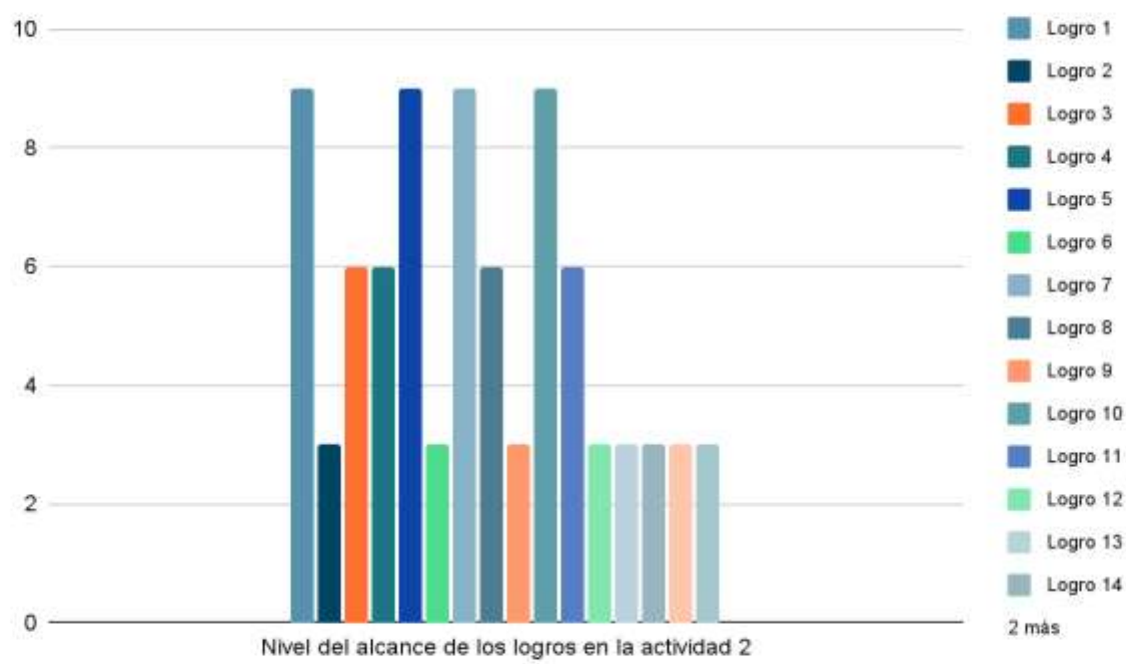
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 10	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 11	Algunos estudiantes	6	
Logro 12	Pocos estudiantes	3	
Logro 13	Pocos estudiantes	3	
Logro 14	Pocos estudiantes	3	

Principio de estructuración / conceptualización

Logros	Característica	Frecuencia	

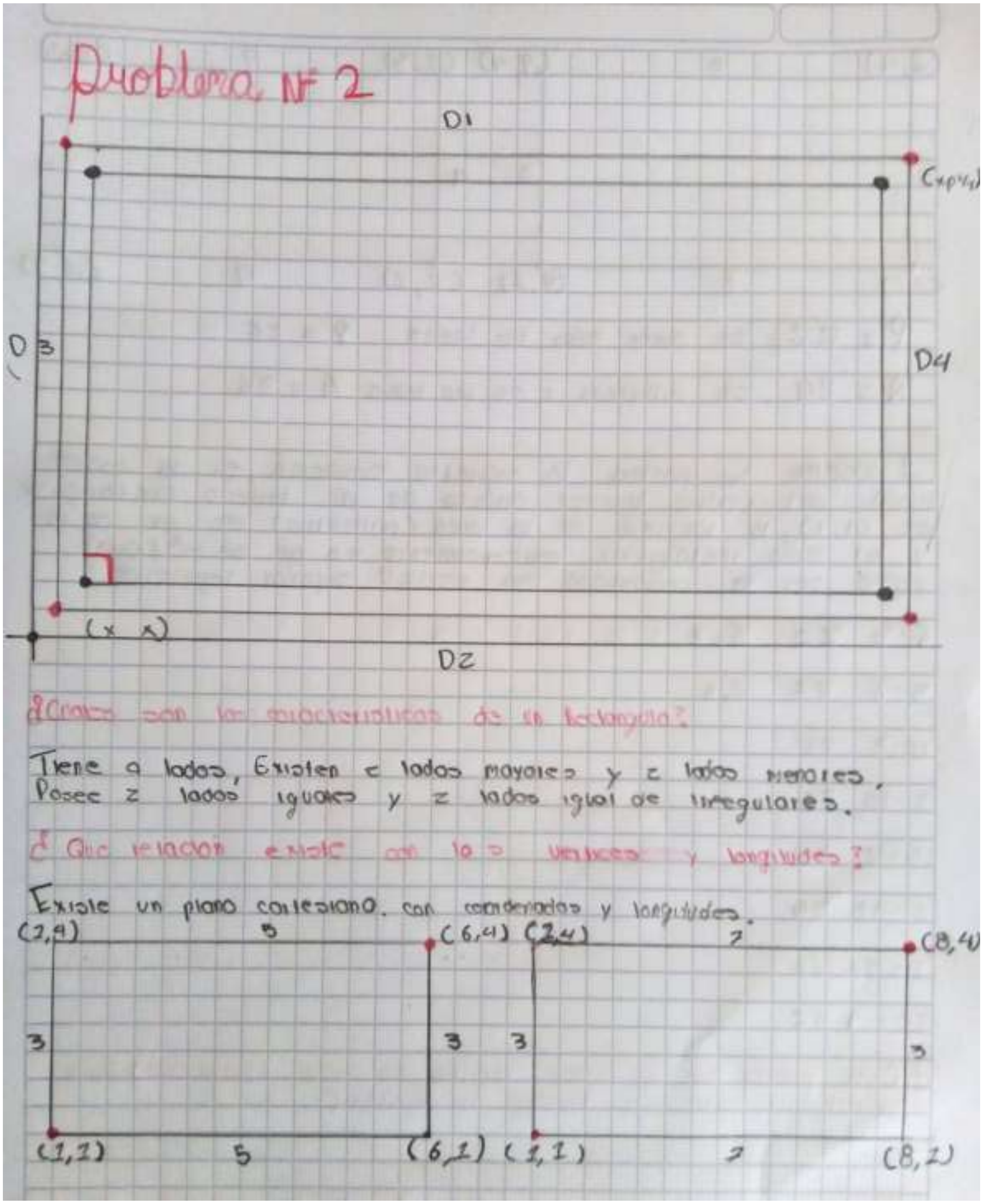
Logro 15	Pocos estudiantes	3	
Logro 16	Pocos estudiantes	3	

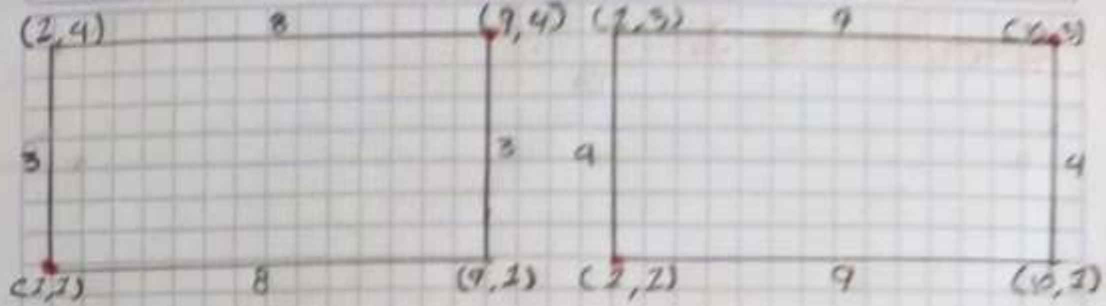
Nivel del alcance de los logros en la actividad 2 LA FINCA



5.2.3. Evidencia de la actividad 2

Argumentos de los estudiantes





P = 22 se suman todos los lados P = 26

A = 24 se multiplican 2 de los lados A = 36

El docente les plantea la siguiente situación, si la coordenada del vértice inferior derecho de un terreno rectangular es (1,1), la longitud de la cerca (perímetro) es de 26 m y el área rectangular correspondiente es de 30 m² ¿cuál podría ser la coordenada del vértice superior izquierdo?

6·5 22 6,7

5·6 22 7,6

10·3 26

3·10 26

15·2 34

2·15 34

1·30 62

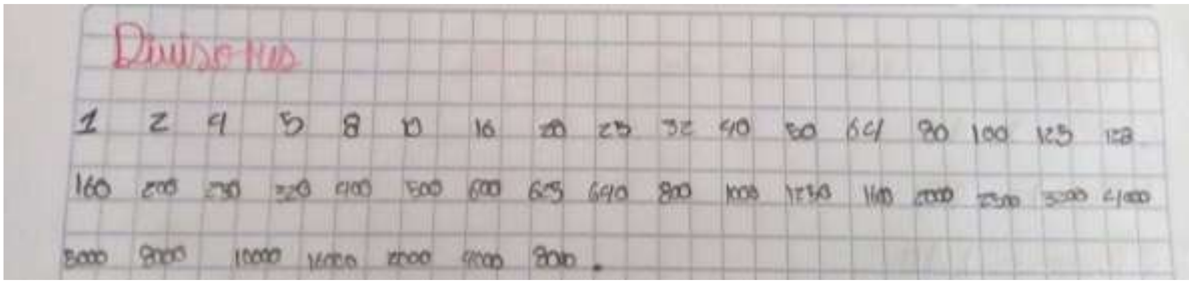
30·1 62

¿Cuál podría ser la menor longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular?

22

¿De cuántas maneras se puede calcular la longitud de cerca (perímetro) para delimitar el área del terreno rectangular correspondiente a 30 m cuadrados?

8.



Evidencia fotográfica de la actividad 2

5.3. Actividad 3 *LAS CARTAS*

5.3.1. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 1 (descriptiva)

Objetivo: Establecer argumentos y algoritmos que le permitan saber cómo pueden ganar en el juego de cartas de tal manera que utilice la programación.

Problema matemático: Andrés, Betty, Carlos y Danna juegan a las cartas, el juego tiene unas reglas sencillas, el juego contiene los 4 ases y los 4 reyes (king) que se colocan en una pequeña baraja de 8 cartas, un jugador selecciona una carta de la baraja sin poder ver las demás cartas, anota la carta seleccionada y la reemplaza en la baraja, el segundo jugador hace lo mismo que el primer jugador y así sucesivamente el tercero y el cuarto jugador.

Finalmente, para ganar el juego cada jugador debe sacar la carta de acuerdo a una condición específica:

Andrés, gana si toma una carta de color rojo.

Betty, gana si toma una carta de color negro.

Carlos, gana si toma una carta con el símbolo del As de cualquier color.

Danna, gana si toma una carta con el símbolo del rey (king) de cualquier color.

Pregunta al problema matemático:

¿Cuándo los jugadores pueden ganar o perder de acuerdo a las condiciones al seleccionar de manera aleatoria una carta?

Principio de motivación

Logros

1. La mayoría de los estudiantes comprenden en qué consiste el juego y las condiciones que tienen cada jugador para ganar o perder.
2. Algunos estudiantes razonan que ningún jugador tiene una mayor probabilidad de ganar puesto que la probabilidad es la misma.
3. Algunos estudiantes establecen que todos los jugadores tienen una probabilidad de ganar del 50% debido a que cada jugador puede ganar con cuatro cartas de las ocho que hay en la baraja.

Dificultades

- ➢ Se dificulta la comprensión lectora al abordar el juego, sus reglas y condiciones específicas para que gane alguno de los cuatro jugadores.
- ➢ Faltan algunos conocimientos previos acerca de la probabilidad de un evento.

Principio de secuenciación

El docente les plantea la siguiente situación dando un nombre a cada jugador en el orden del alfabeto, (Andrés, Betty, Carlos y Danna) con las condiciones específicas del juego.

Logros

4. La mayoría de los estudiantes pueden asignarles una variable a los nombres de los jugadores (a, b, c, d) y a los símbolos de las cartas as, rey (king), corazones, diamantes, picas y tréboles, A, K, C, D, P, T
5. La mayoría de estudiantes crean las cuádruplas para que gane cada jugador o sea el caso pueda perder, AC, AD, AP, AT, KC, KD, KP, KT.
6. Pocos estudiantes determinan el tamaño del espacio muestral al analizar que si se realizara un diagrama de árbol podría encontrar las diferentes alternativas de salir las cartas por lo que obtienen que es 8x8x8x8 = 4096.

Dificultades

- ➢ Falta claridad al entender las preguntas planteadas para crear las cuádruplas para cada jugador.
- ➢ Se dificulta encontrar el tamaño del espacio muestral al no tener suficientes conocimientos previos.

Principio de reforzamiento

Ante la nueva situación presentada.

¿Cómo podrían ganar siempre las mujeres en el juego de las cartas?

Logros

7. Algunos estudiantes crean las cuádruplas de cada jugador para que los hombres pierdan y las mujeres ganen.

8. Pocos estudiantes razonan que Andrés y Betty tienen las mismas cuádruplas, mientras que Carlos y Danna tienen las mismas cuádruplas cuando ganan las mujeres.

Dificultades

- Crear las cuádruplas para esta situación no es muy claro.
- Se presenta dificultad al razonar la relación que hay entre las cuádruplas de los jugadores.

Principio de retroalimentación

Se plantea una situación similar.

¿Cómo ganaría en algunas ocasiones uno o los dos hombres, aunque en ocasiones puedan perder todos?

Logros

9. Algunos estudiantes crean las cuádruplas de cada jugador para que los hombres ganen o pierdan y las mujeres pierdan.

10. Pocos estudiantes razonan que Andrés y Betty tienen las mismas cuádruplas, mientras que Carlos y Danna tienen las mismas cuádruplas en las que ganan los hombres.

Dificultades

- ➢ Crear las cuádruplas para esta situación no es muy claro.
- ➢ Se dificulta razonar la relación que hay entre las cuádruplas de los jugadores.

Principio de estructuración / conceptualización

Logros

11. Pocos estudiantes tienen dominio del programa para crear un algoritmo en el programa de Scratch.
12. Pocos estudiantes pueden crear un algoritmo para relacionar a cada jugador una lista con posibilidades aleatorias de las ocho cartas.

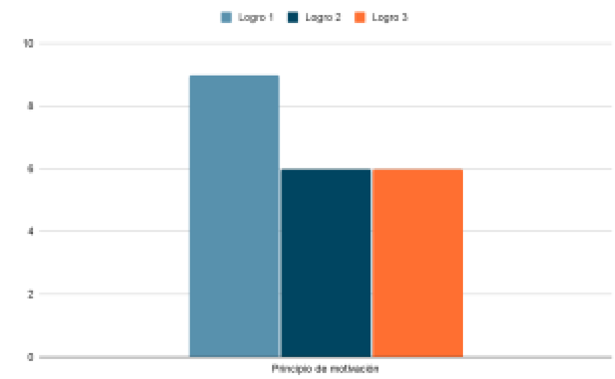
Dificultades

- ➢ Hay muchas dificultades al organizar un algoritmo o una programación en el programa de Scratch.
- ➢ Se dificulta crear una lista aleatoria de las ocho cartas para cada jugador.

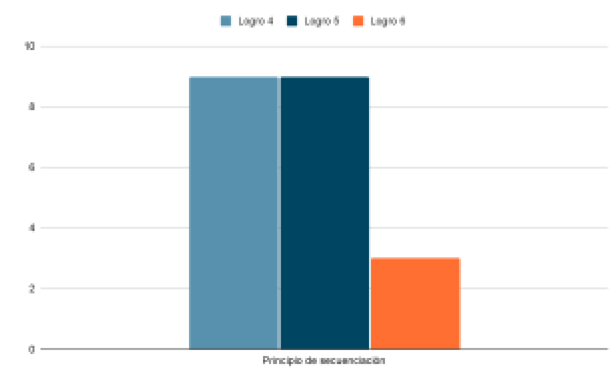
5.3.2. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 2 (estadística)

Principio de motivación

Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 1	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 2	Algunos de los estudiantes	6	

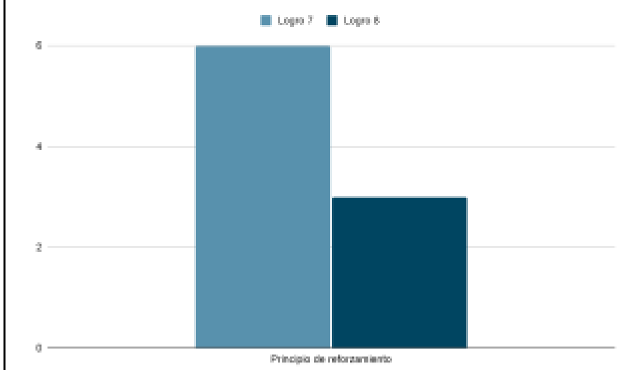
Logro 3	Algunos de los estudiantes	6	

Principio de secuenciación

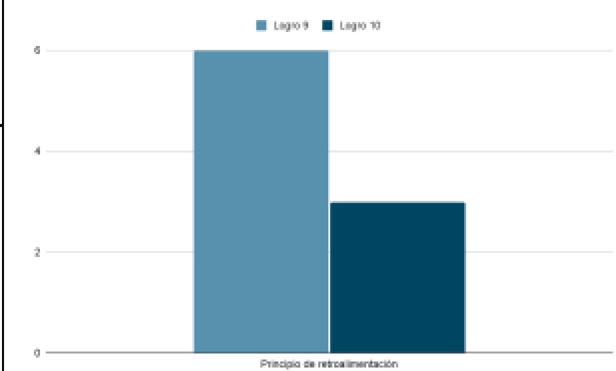
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 4	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 5	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 6	Pocos estudiantes	3	

Principio de reforzamiento

Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 7	Algunos de los estudiantes	6	

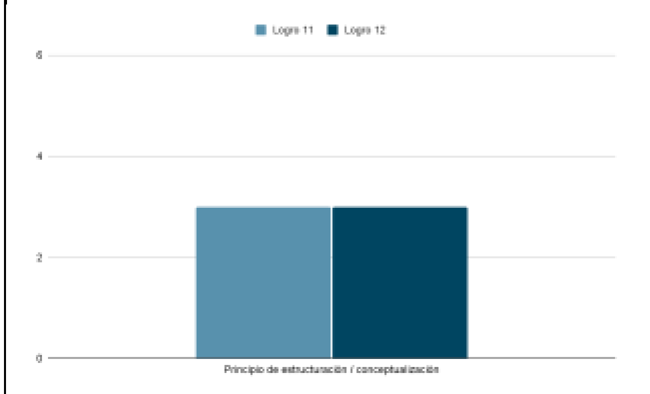
Logro 8	Pocos estudiantes	3	

Principio de retroalimentación

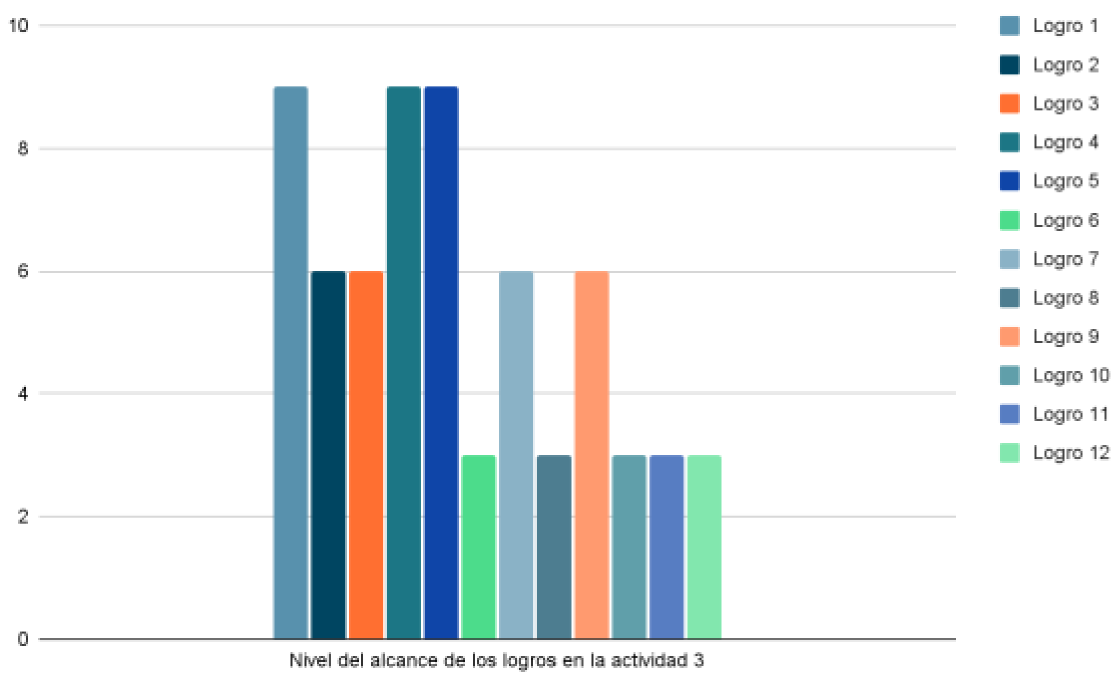
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 9	Algunos estudiantes	6	
Logro 10	Pocos estudiantes	3	

Principio de estructuración / conceptualización

Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 11	Pocos estudiantes	3	

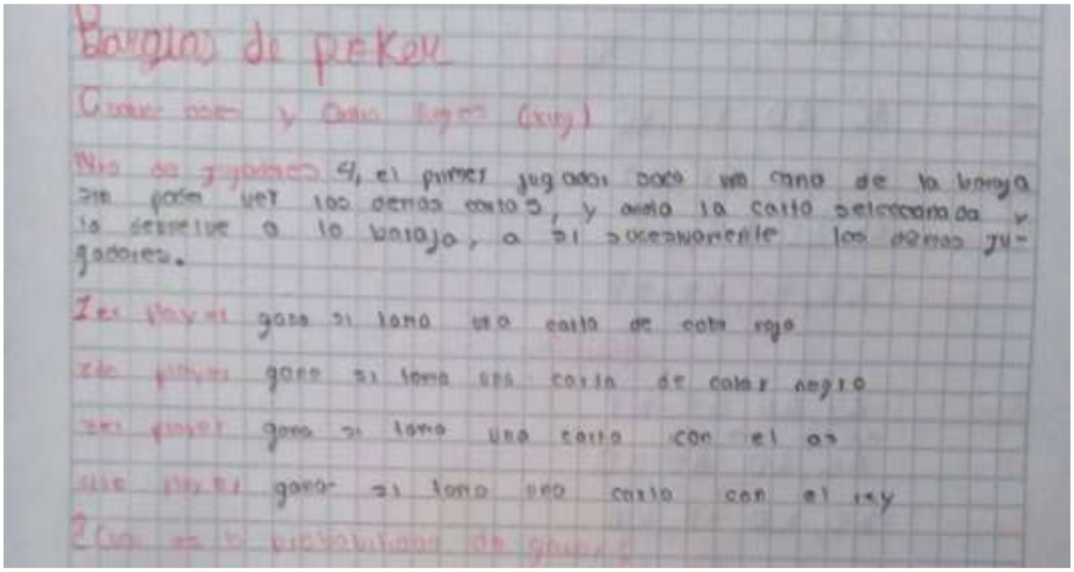
Logro 12	Pocos estudiantes	3	

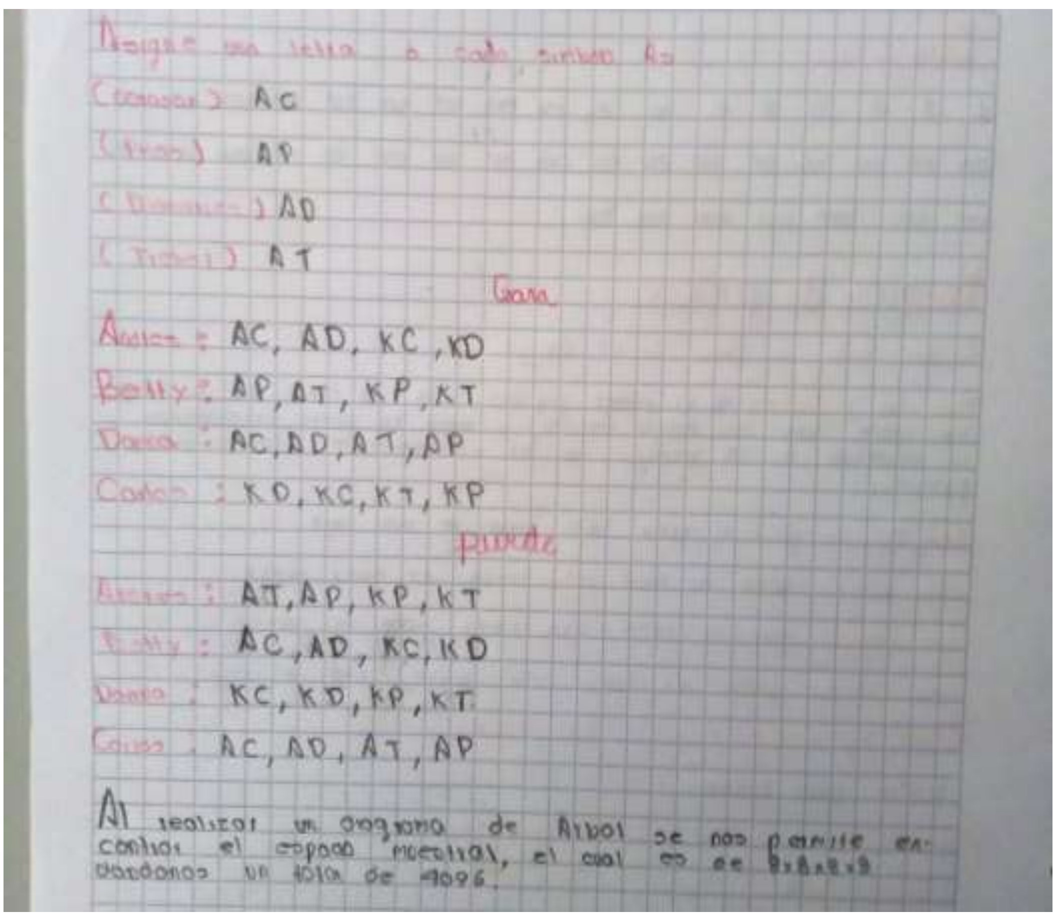
Nivel del alcance de los logros en la actividad 3 LAS CARTAS

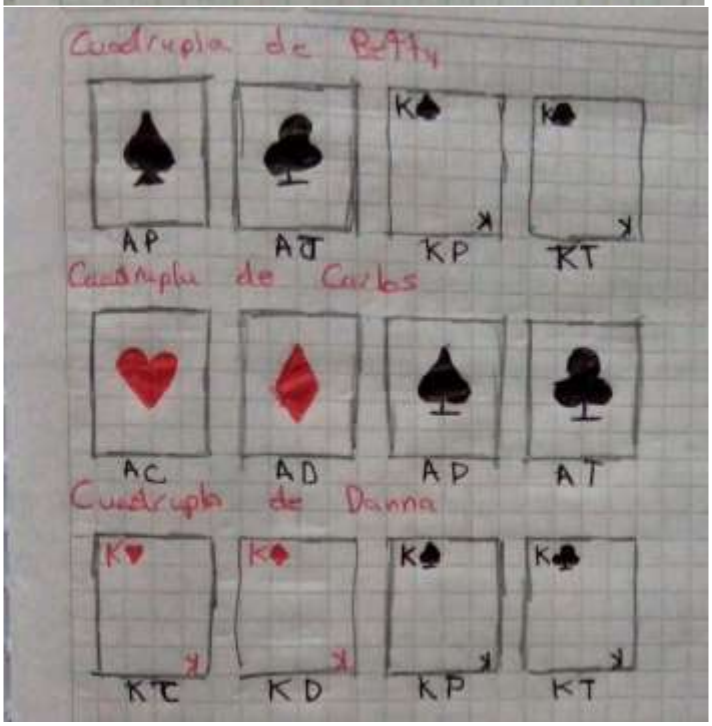


5.3.3. Evidencia de la actividad 3

Argumentos de los estudiantes







Evidencia fotográfica de la actividad 3

5.4. Actividad 4 *LA PIRÁMIDE*

5.4.1. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 1 (descriptiva)

Objetivo: Construir argumentos y algoritmos que le permitan organizar cuatro números en la base de una pirámide que permita obtener en la cima con un número de mayor o menor valor numérico, de tal manera que utilice la programación.

Problema matemático: Angie quiere construir una pirámide y escribir en cada bloque un número entero positivo de manera que cada número por encima de la fila inferior debe ser la suma de los dos números de los bloques de la fila sobre los que está apoyado, teniendo en cuenta que la base contiene los números 1, 2, 3 y 4 en cualquier orden y sin repetir.

Pregunta al problema matemático:

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de mayor valor numérico?

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de menor valor numérico?

Principio de motivación

Logros

1. Todos los estudiantes comprenden en qué consiste el problema de la pirámide y encuentran diferentes soluciones.
2. Algunos estudiantes razonan que hay 24 combinaciones diferentes de organizar la pirámide.

Dificultades

- ➢ Se plantean diferentes exploraciones y por ende se dificulta encontrar una manera efectiva de encontrar la cantidad de soluciones.

Principio de secuenciación

El docente les plantea las siguientes preguntas.

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de mayor valor numérico?

¿Cómo organizar los cuatro números de la base de la pirámide de tal manera que en la cima de ella se encuentre el número de menor valor numérico?

Logros

3. La mayoría de los estudiantes comparan estas preguntas y determinan que hay un rango de solución de diferentes valores en la cima de la pirámide.

Dificultades

- ➢ Falta claridad al entender las preguntas planteadas para obtener de manera efectiva las soluciones

Principio de reforzamiento

Logros

4. Algunos estudiantes observan que en los bloques se puede mantener unos valores fijos y solamente cambiar unos específicos.
5. La mayoría de los estudiantes encuentran los valores numéricos en la cima de la pirámide 16, 18, 20, 22, 24.

Dificultades.

- ➢ Se presenta dificultad al razonar las diferentes formas de combinar los valores de la base de la pirámide.

Principio de retroalimentación

Logros

6. Pocos estudiantes observan una particularidad al obtener en la cima el número 24 y al obtener en la cima el número 16.
7. Pocos estudiantes argumentan que para obtener el mayor valor en la cima de 24 se tienen cuatro soluciones y que en el centro deben estar el 3 y el 4 en diferente orden en relación al 1 y al 2 y que, para obtener el menor valor en la cima de 16, se tienen cuatro soluciones y que en el centro deben estar el 1 y el 2 en diferente orden en relación al 3 y al 4.

Dificultades

- ➢ Se dificulta obtener el argumento al identificar que los valores medios si son mayores dan un valor mayor y si son menores dan un valor menor.

Principio de estructuración / conceptualización

Logros

8. Pocos estudiantes creen tener idea de crear el algoritmo en el programa de Scratch.
9. Pocos estudiantes pueden organizar la programación para desarrollar la construcción de la pirámide.

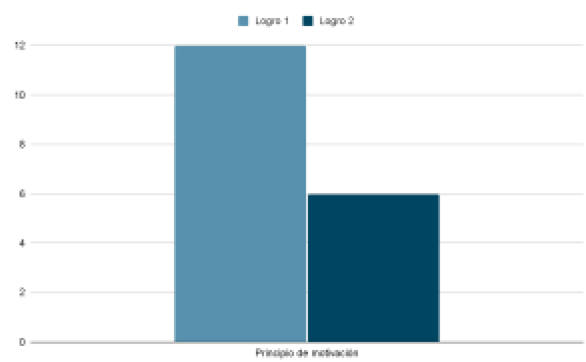
Dificultades

- ➢ Se dificulta bastante crear condiciones que permitan bloquear parámetros para que se dé la situación planteada.

5.4.2. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 2 (estadística)

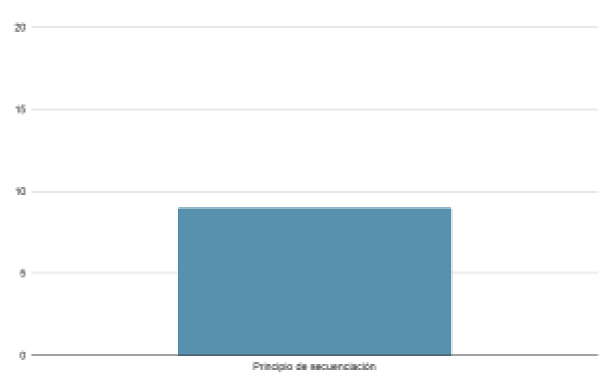
Principio de motivación

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 1	Todos los estudiantes	12
Logro 2	Algunos de los estudiantes	6



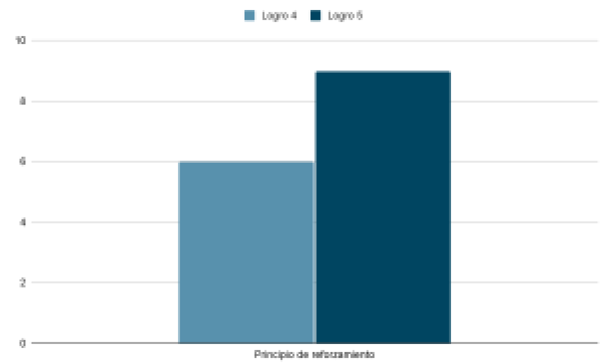
Principio de secuenciación

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 3	La mayoría de los estudiantes	9



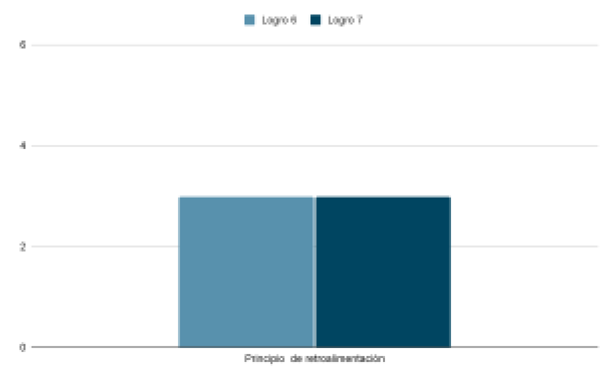
Principio de reforzamiento

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 4	Algunos de los estudiantes	6
Logro 5	La mayoría de los estudiantes	9



Principio de retroalimentación

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 6	Pocos estudiantes	3
Logro 7	Pocos estudiantes	3

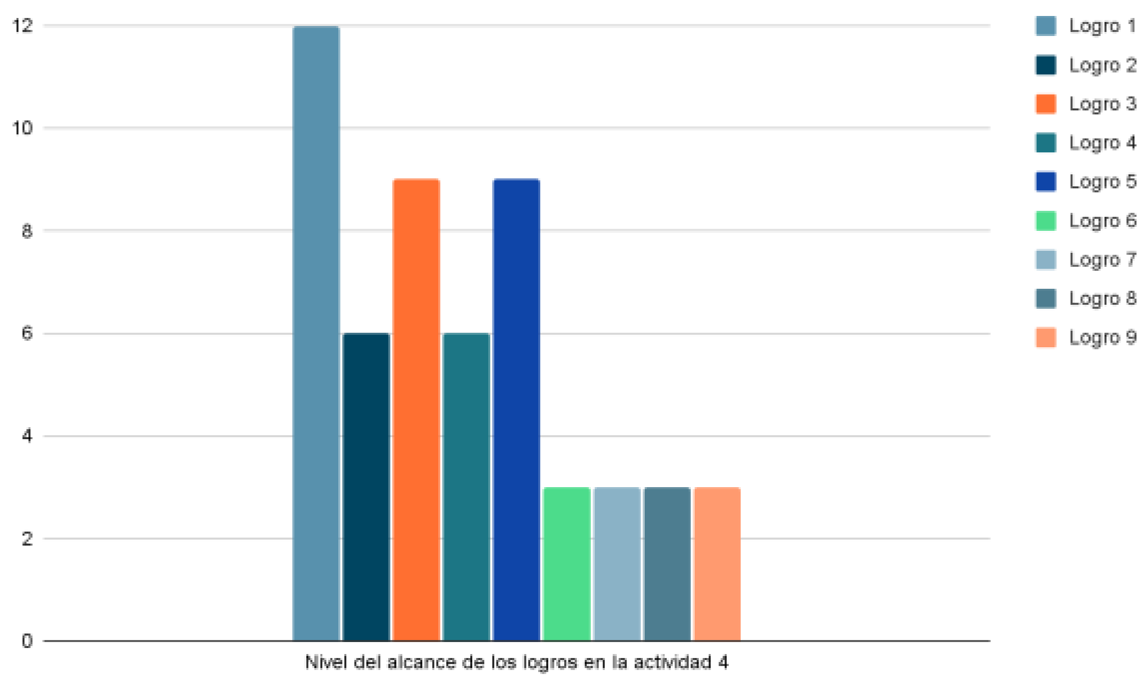


Principio de estructuración / conceptualización

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 8	Pocos estudiantes	3

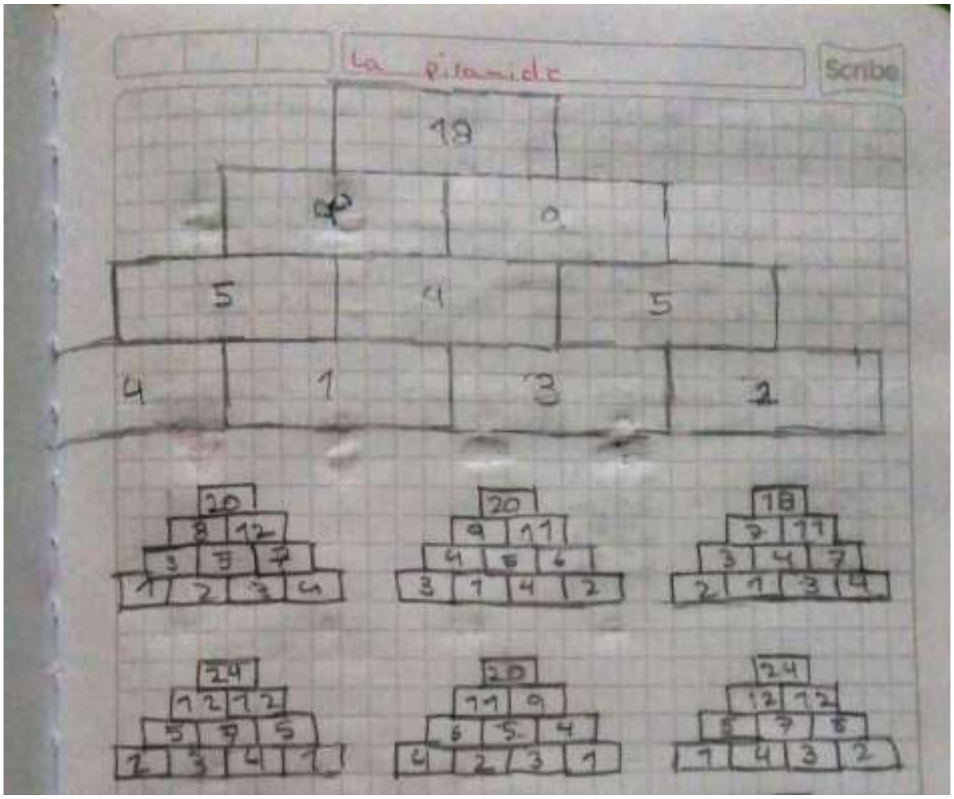
Logro 9	Pocos estudiantes	3	

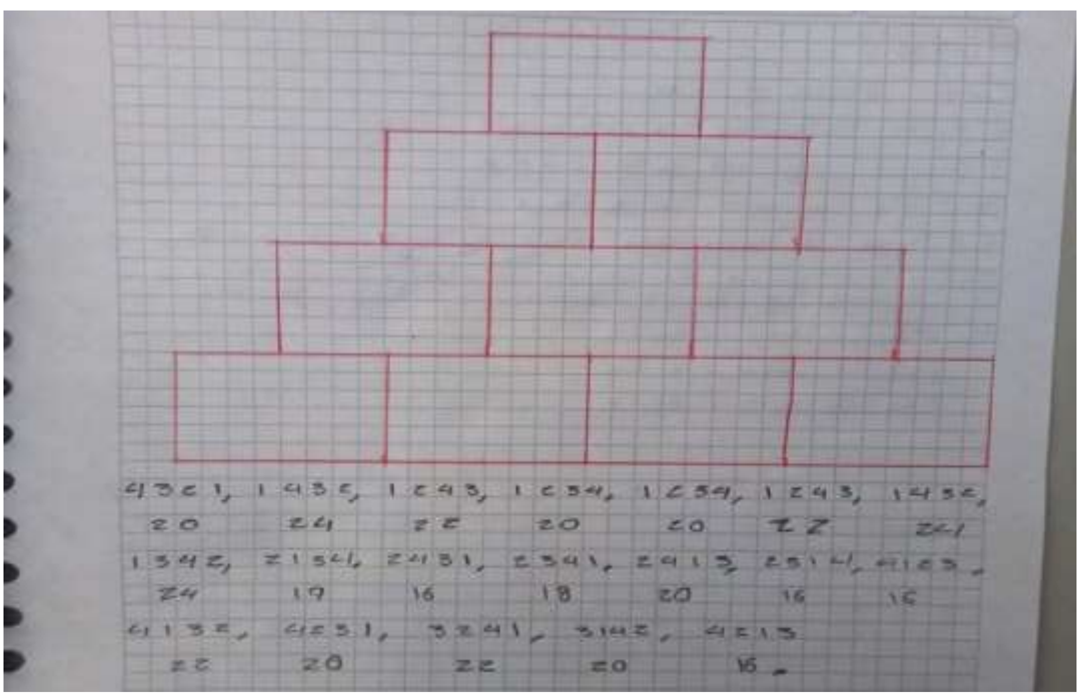
Nivel del alcance de los logros en la actividad 4 LA PIRÁMIDE



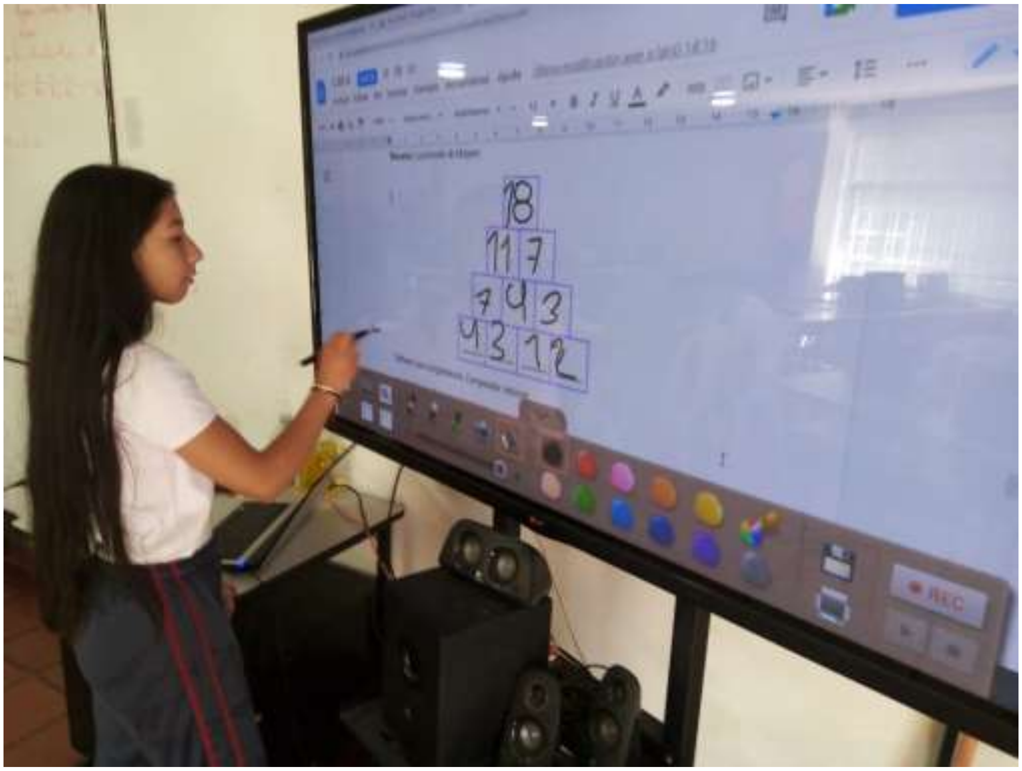
5.4.3. Evidencia de la actividad 4

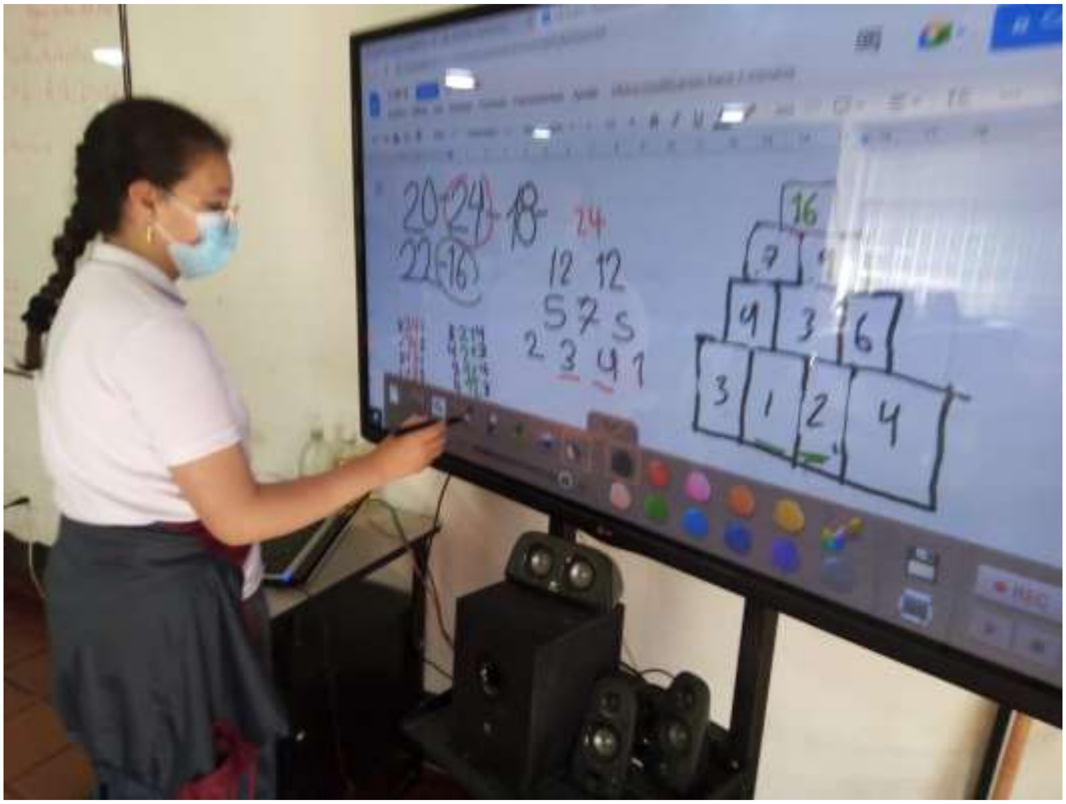
Argumentos de los estudiantes





Evidencia fotográfica de la actividad 4





5.5. Actividad 5 *EL CUBO*

5.5.1. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 1 (descriptiva)

Objetivo: Elaborar los argumentos y algoritmos que le permitan construir un cubo en donde la suma de las tres caras opuestas tenga el mismo valor y sea múltiplo de tres, de tal manera que utilice la programación.

Problema matemático: *EL CUBO*: Sara quiere construir un cubo que tenga asignado a cada cara un número y estos seis números de las caras sean consecutivos, de tal manera que la suma de los números en los tres pares de caras opuestas sea el mismo valor numérico.

Pregunta al problema matemático: ¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor obtenido de la suma de los tres pares de caras opuestas y al mismo tiempo sea múltiplo de tres?

Principio de motivación

Logros

1. La mayoría de los estudiantes reconocen la información presentada en la descripción del problema.
2. Todos los estudiantes identifican que un cubo tiene seis caras y cuáles son los tres pares de caras opuestas.
3. La mayoría de los estudiantes dan ejemplos de seis números consecutivos.

Dificultades

➢ Faltan algunos conocimientos previos acerca de un número consecutivo.

Principio de secuenciación

El docente les plantea la siguiente pregunta, ¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor de la suma de los tres pares de caras opuestas?

Logros

4. Todos los estudiantes reconocen que el número siguiente a 5 es 6 y que el siguiente es 7
5. Pocos estudiantes reconocen que el número siguiente a n es n+1

Dificultades

- ➢ Se dificulta generalizar los números consecutivos de dar los ejemplos

Principio de reforzamiento

Logros

6. La mayoría de los estudiantes asocian diferentes parejas de números dentro de los seis y encuentran el valor de la suma entre ellos.
7. Algunos estudiantes encuentran que se pueden asociar de otra manera y concluyen que la suma es igual
8. Pocos estudiantes encuentran similitud al problema anterior cuando se organizaban los divisores, es decir el primer número con el número de la última posición.

Dificultades

- ➢ No hay mucha claridad al sumar una pareja de números de los números consecutivos.

Principio de retroalimentación

Se plantea una situación similar.

¿Cómo obtener un número al escribir seis números consecutivos que sea el mismo valor de la suma de los tres pares de caras opuestas y sea múltiplo de tres?

Logros

9. Algunos estudiantes identifican los seis números de manera general n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5.

10. Pocos estudiantes razonan que el valor de la suma es de la forma $2n + 5$

    $n + n + 5 = 2n + 5$ $n + 1 + n + 4 = 2n + 5$ $n + 2 + n + 3 = 2n + 5$

11. Todos los estudiantes reconocen los múltiplos de tres

12. Pocos estudiantes encuentran la solución a la situación planteada, es decir que $2n + 5 = 3t$

    y que esto implica que $2n = 3t + 1$ y que hay dos casos posibles si t es par no se cumple la igualdad y si t es impar si se cumple la igualdad, por lo tanto se despeja n de la siguiente manera $n = (3t+1)/2$.

Dificultades

- Pocos conocimientos de álgebra.
- Se dificulta bastante razonar y encontrar un parámetro t impar que permita obtener sumas que sean múltiplos de 3.

Principio de estructuración / conceptualización

Logros

13. Pocos estudiantes llegan a tener los conocimientos necesarios para buscar la manera de crear un algoritmo en el programa de Scratch.

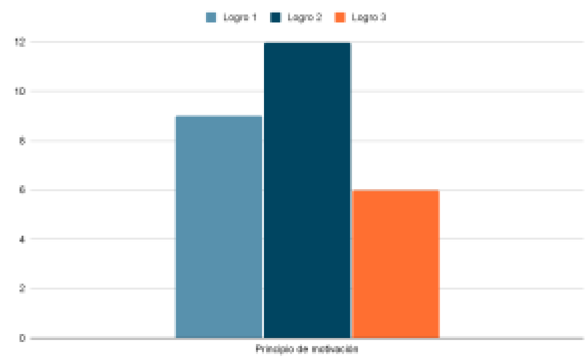
14. Pocos estudiantes reconocen la importancia de tener argumentos que permitan a través de la programación demostrar soluciones del problema.

Dificultades

- ➢ Hay dificultades al organizar un algoritmo o una programación en el programa de Scratch.
- ➢ Se dificulta crear una programación para ubicar las variables en un cubo.

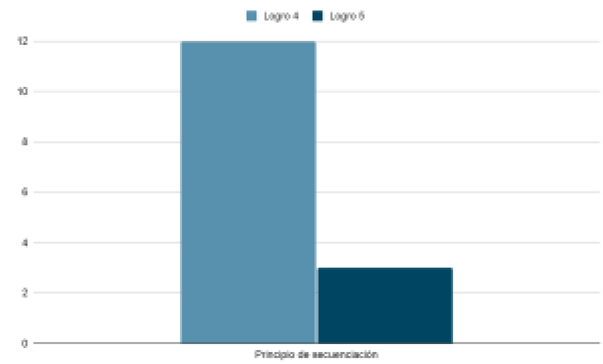
5.5.2. Análisis de los resultados de la CATEGORÍA 2 (estadística)

Principio de motivación

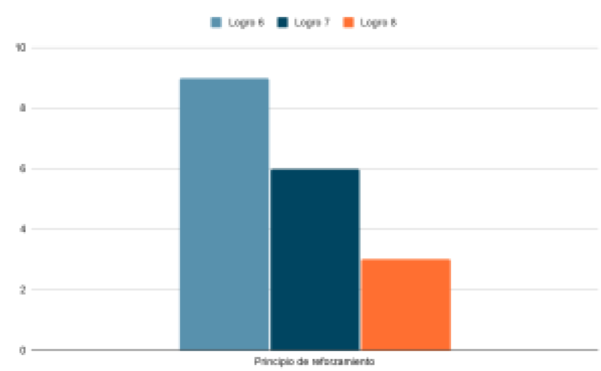
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 1	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 2	Todos los estudiantes	12	
Logro 3	Algunos de los estudiantes	6	

Principio de secuenciación

Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 4	Todos los estudiantes	12	

Logro 5	Pocos estudiantes	3	

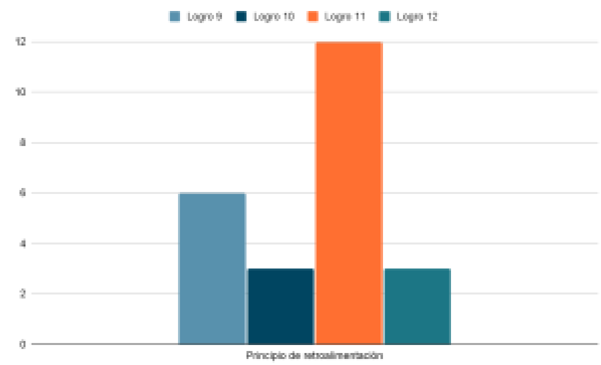
Principio de reforzamiento

Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 6	La mayoría de los estudiantes	9	
Logro 7	Algunos de los estudiantes	6	
Logro 8	Pocos estudiantes	3	

Principio de retroalimentación

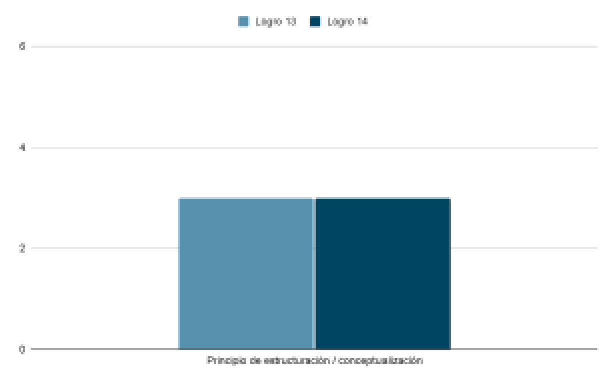
Logros	Característica	Frecuencia	
Logro 9	Algunos estudiantes	6	

Logro 10	Pocos estudiantes	3
Logro 11	Todos los estudiantes	12
Logro 12	Pocos estudiantes	3

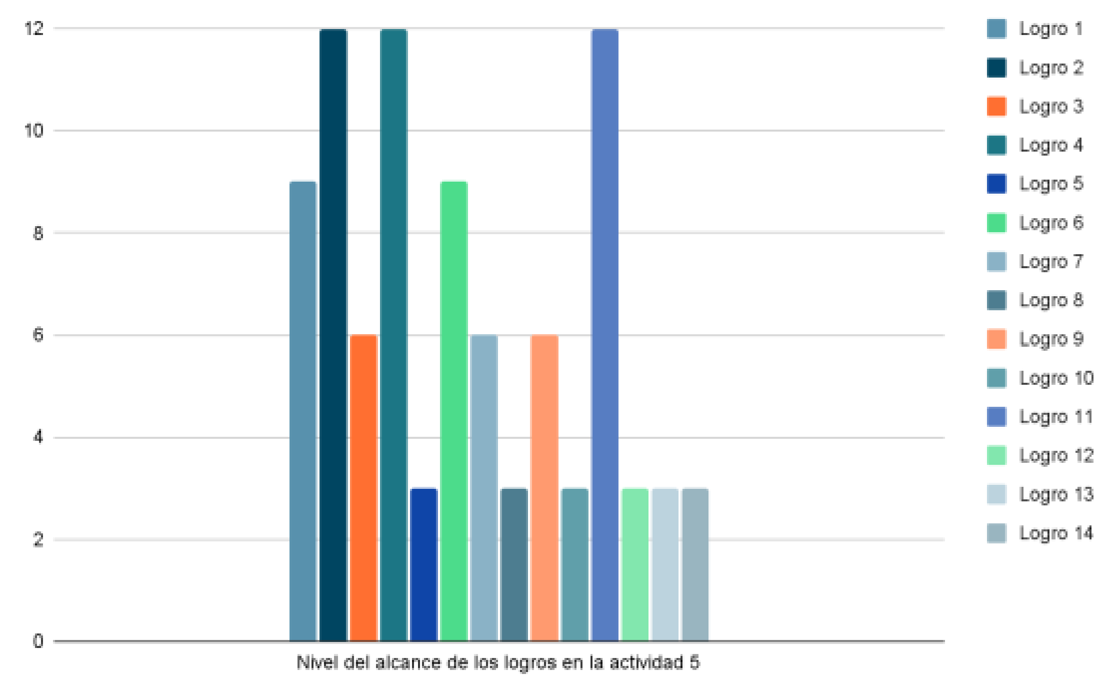


Principio de estructuración / conceptualización

Logros	Característica	Frecuencia
Logro 13	Pocos estudiantes	3
Logro 14	Pocos estudiantes	3

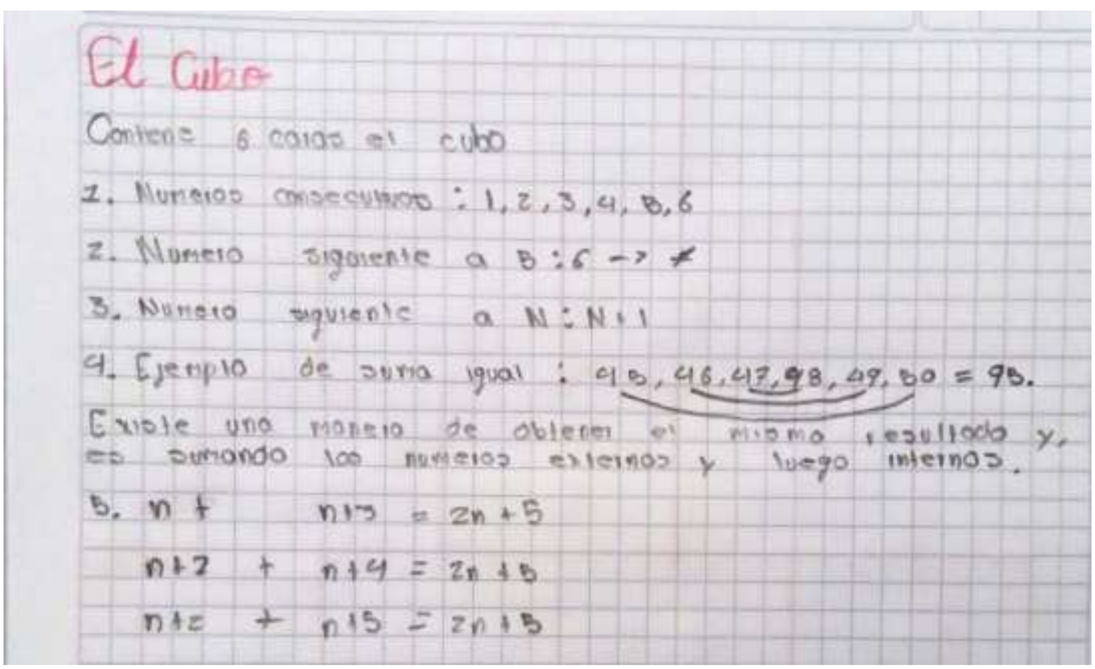


Nivel del alcance de los logros en la actividad 5 EL CUBO

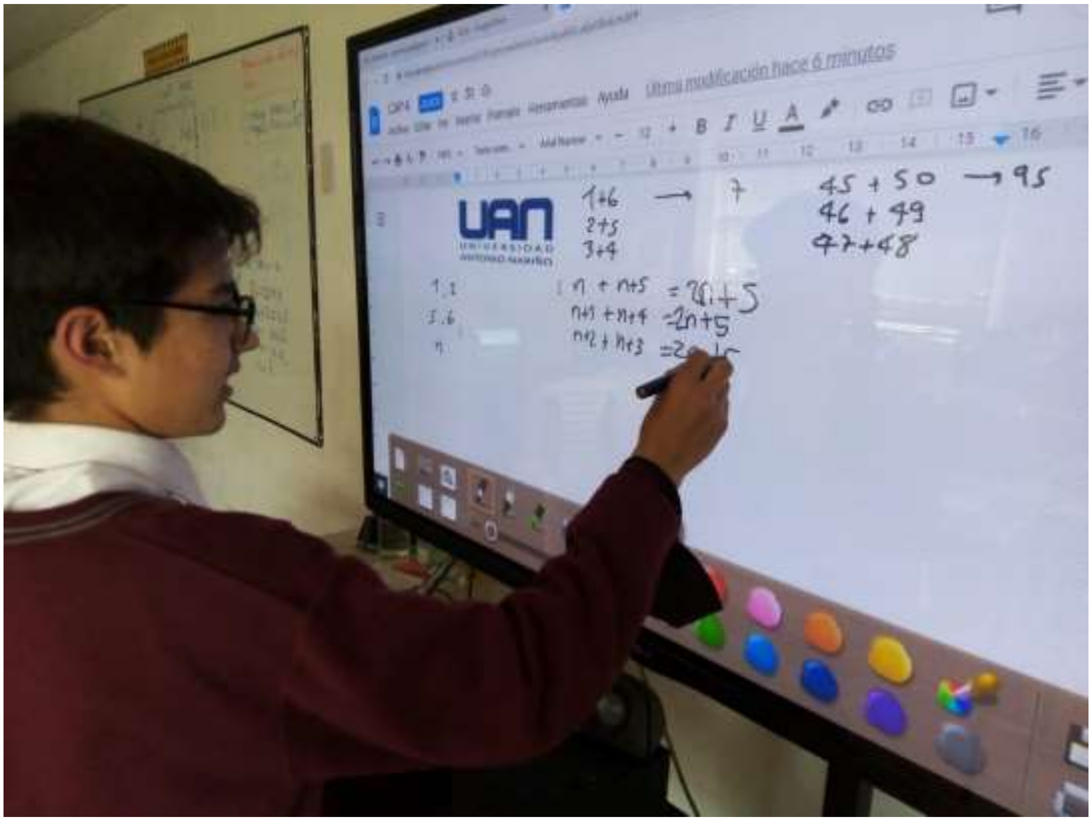


5.5.3. Evidencia de la actividad

Argumentos de los estudiantes



Evidencia fotográfica de la actividad 5



Conclusiones

De este capítulo se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- Los estudiantes tuvieron un papel activo, se motivaron a partir de los recursos ofrecidos por el docente, asimilaron cada una de las actividades aplicando las competencias que se adquieren al desarrollar la teoría del aprendizaje por descubrimiento, llevándolos hacia un pensamiento matemático.
- El docente fue guía durante el proceso, dando el andamiaje (el apoyo eficaz que se ajusta a las competencias y varía en la medida que se tenga mayor responsabilidad) optimizando recursos tecnológicos y físicos para que los estudiantes alcanzaran el aprendizaje por sí mismos.

- Se concibe un proceso de evaluación continuo y progresivo a partir de la implementación de cada actividad dentro del sistema de actividades, esto llevó a una constante motivación, secuencia, refuerzo, retroalimentación y estructuración como principios de la instrucción en la teoría del aprendizaje por descubrimiento.
- En la categoría 1 (descriptiva), el análisis de los resultados nos muestra de manera general que los estudiantes alcanzan en cierta medida los logros y permiten brindar diferentes argumentos que se abordaron a través del planteamiento y la resolución de problemas.
- En la categoría 2 (estadística) el análisis de los resultados nos muestra de manera general en cada una de las actividades. Al iniciar el problema la mayoría de los estudiantes lo interpretan y cada vez que se vuelve de mayor rigor son pocos los estudiantes que producen argumentos y que cuando se llega a la etapa de la programación son muy pocos los estudiantes que presentan ideas para la creación de un algoritmo que lleve a la demostración del problema planteado.
- Este análisis en las dos categorías nos indica que los objetivos trazados en cada una de las actividades se alcanzaron en cierto grado, en la medida de construir argumentos y en la medida de crear algoritmos para que la programación sea el medio que vislumbre la demostración.

CONCLUSIONES

La presente investigación propicia caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación con estudiantes entre los 12 y los 13 años de edad dando respuesta al objetivo inicial.

- La presente investigación relaciona y unifica los avances epistemológicos de la educación matemática, proporcionados por los tres grupos de investigación que tienen auge en la actualidad, el primero en relación a la argumentación y la demostración dentro de la matemática, el segundo se refiere a la importancia del planteamiento y la resolución de problemas que generen pensamiento matemático y el tercero incorpora la programación y los algoritmos en la educación matemática.
- La caracterización de la relación entre la argumentación y la demostración se da al mostrar cómo el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos llevan a los estudiantes al explorar y generar argumentos que se comunican y se comprueban a partir de la programación dando lugar a la demostración, es así como se pasa de la argumentación a la demostración, en donde los argumentos se brindan antes de la programación, mientras que la demostración se da antes, durante y después de la programación.
- El diseño del sistema de actividades presenta cuatro aspectos de suma importancia, en primer lugar, se fundamenta en la teoría del aprendizaje por descubrimiento el cual brinda al estudiante la oportunidad de generar conocimiento por sí mismo y lo cual lleve a un desarrollo cognitivo, autónomo y al propiciar de la creatividad, en segundo lugar, el planteamiento y la resolución de problemas retadores le dan un rigor al aporte práctico, al fomentar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento matemático, en tercer lugar el incorporar situaciones diversas y preguntas

sugeridas que lleven al estudiante a la construcción de argumentos y en cuarto lugar el uso de la programación con el programa Scratch como medio para llevar los argumentos a la demostración de los problemas planteados.

- Durante la implementación del sistema de actividades, se evidencia que a medida que avanza el problema se va generando alguna situación cada vez de mayor rigor, esto motiva al estudiante a buscar la solución y estas preguntas guían al estudiante en la creación de sus argumentos lo cual es muy enriquecedor, sin embargo al abordar la programación se observa que necesita de un mayor acompañamiento debido a la falta de domino del programa, al tiempo limitado y a la falta de conocimientos suficientes para crear el algoritmo, por consiguiente la programación si se presenta durante la demostración y al mostrar la solución.
- Los resultados obtenidos muestran que el nivel del alcance de los logros en cada actividad es bueno y los estudiantes van de la argumentación a la demostración a través del planteamiento y la resolución de problemas mediados por la programación, es allí donde se evidencia un alto grado del desarrollo cognitivo y del pensamiento matemático siendo el estudiante un agente activo y el docente un guía que optimice los recursos para llevar al estudiante a que adquiera un aprendizaje autónomo.
- Se crea el semillero de matemáticas en la jornada extraescolar con estudiantes entre los doce y los trece años de edad, espacio donde se utiliza el programa Scratch, que brinda una programación llamativa y de fácil uso para los estudiantes en estas edades, además es un entorno que potencializa el aprendizaje por descubrimiento, la creatividad y la resolución de problemas, muestra cómo a partir de la argumentación se llega a la demostración y permite que los estudiantes trabajen de manera colaborativa y colectiva, es aquí donde ellos se motivan por

abordar la resolución de problemas matemáticos a través de la programación enriqueciendo los avances en el pensamiento matemático y el desarrollo cognitivo.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades relacionadas con la enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos, que pretende caracterizar la relación entre la argumentación y la demostración mediada por la programación, sugiere las siguientes recomendaciones:

- ❖ Continuar los estudios de investigación que permitan caracterizar relaciones entre la argumentación y la demostración a partir del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos.
- ❖ Generar más actividades a través del planteamiento y la resolución de problemas matemáticos y llegar a demostraciones por medio de la programación y los algoritmos.
- ❖ Fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático y construcción de argumentos fundamentados en la teoría del aprendizaje por descubrimiento.
- ❖ Brindar espacios donde se pueda abordar, la argumentación, la demostración, la resolución de problemas matemáticos, el pensamiento matemático y el pensamiento computacional a partir de la programación y el uso del programa Scratch.

REFERENCIAS

11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11). (2019). Proceedings. Utrecht, Netherlands

13th International Congress in Mathematics Education (ICME 13). (2016). Acta de encuentro. Hamburgo, Alemania

14th International Congress in Mathematics Education (ICME 14). (2020-21). Acta de encuentro. Shanghai, China

Acosta, E., Rodríguez, F., & Camargo, L. (2002). Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema.

Albano, G., Dello Iacono U. & Mariotti, M.A. (2019). *A computer-based environment for argumenting and proving in geometry* (CERME 11). Proceedings. Utrecht, Netherlands, (pp. 729-730)

Aguilera, N. (2021). *Matemáticas y programación con Python para ingenierías*.

Ausubel, D. P. (1964). *Some psychological and educational limitations of learning by discovery. The arithmetic teacher, 11(5), 290-302.*

Báez, J. y Pérez, T. (2009). *La Investigación cualitativa*. Madrid. Segunda edición, 2009, ESIC. p. 24.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction. Cambridge, MA: Harvard University Press.*

Bruner, J. S. (1961). *The act of discovery. Harvard educational review.*

Bruner, J. (1960). *The process of education. Cambridge, MA: Harvard University Press.*

Cálciz, A. B. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista digital innovación y experiencias educativas, 7(40), 1-11.*

Calder, N. (2010). Using Scratch: An integrated problem-solving approach to mathematical thinking.

Australian Primary Mathematics Classroom, 15(4), 9-14.

Campbell, T. G., & Zelkowski, J. (2020). Technology as a support for proof and argumentation: A systematic literature review. *The international journal for technology in mathematics education*, *27*(2).

Crespo Crespo, C. (2014). *La importancia de la argumentación matemática en el aula,* Buenos Aires, Argentina, (pp. 23-25)

Coria Gonzalez, J. L. (2018). *Aprendizaje por descubrimiento en matemáticas: tres secuencias didácticas para 1° de secundaria* (Master's thesis).

Dalle, P., Boniolo, P., Sautú R. & Elbert R. (2005) *Manual de metodología. Construcción del marco teórico, formulación de los objetivos y elección de la metodología.* Buenos Aires, Argentina, CLACSO, Consejo latinoamericano de Ciencias Sociales, (pp 47)

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-367). Springer, Dordrecht.

Duval, R. (2007). *Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In Theorems in school* (pp. 135-161). Brill Sense.

Elliot, J. (2000) *La investigación-acción en educación*. Cuarta Edición. Ediciones Morata, S.L.

Falk, M. (2001). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones*. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Fessakis, G., Gouli, E., & Mavroudi, E. (2013). Problem solving by 5–6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case study. *Computers & Education*, *63*, 87-97.

Forsström, S. E., & Kaufmann, O. T. (2018). A literature review exploring the use of programming in mathematics education.

García, M. (2014). *Metodología de la Investigación Educativa*, Bogotá, Colombia, (pp 15-22)

González, M. (2003). *Aprendizaje por descubrimiento o proyecto de investigación: posibilidades y límites*.

Hanna, G., De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education:* The 19th ICMI study (Vol. 15). Springer Science Business Media.

Hernández & Sampieri, R., Fernández C. & Baptista L. (2014). *Metodología de la Investigación (Vol. 3)* Sexta Edición. México, McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V. (pp 375-376)

Hersh, R. (2013). Experiencing Mathematics: What do we do, when we do mathematics? (Vol. 83). American Mathematical Soc.

Knipping, C. (2012). The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms. *Online: http://www. icme12. org/upload/submission/1935_F. pdf. Accessed*, *30*.

Lewin, K. (1946) *Action research and minority problems.* Journal of Social Issues, http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-4560.1946.tb02295.x

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 88-93). Taipei: National Taiwan Normal University, The Department of Mathematics.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

Molina, Á. (2014). *Aprender programando con Scratch*.

Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Ediciones Morata.

Ozdem-Yilmaz, Y., & Bilican, K. (2020). *Discovery Learning—Jerome Bruner. In Science*

Education in Theory and Practice (pp. 177-190). Springer, Cham.

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analyzed?.Educational studies in mathematics,* 66(1), 23-41.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons, p. 117.

Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., & Sáez-López, J. M. (2020). Computational thinking and mathematics using Scratch: an experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments*, *28*(3), 316-327.

Santos-Trigo, M., Mach´ın, M. C. (2013). *Framing the use of computational technology in problem solving approaches.* The Mathematics Enthusiast, 10(1), 279-302.

Santos, L. M. (2011). *La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales.* Cuadernos, 8, 35-54.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). *Configural reasoning and argumentation in proof processes in geometrical context.* (SEIEM XXI). Proceedings. Zaragoza, Spain, (pp. 467-468)

Soto, B. D. G., Soto, R. O., Espinoza, V. M. I., & García, F. G. *La Vee y los MMCC en la resolución de problemas computacionales en ingeniería en computación del IPN*, en México. *CMC 2010*, 273.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., Morselli, F. (2016). *Proof and argumentation in mathematics education research. In The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Brill Sense.

Van Rossum, G., Drake Jr, F. L. (2017). *El tutorial de Python*. Python Software Foundation

http://psicoaprendizajeucab.blogspot.com/2017/12/jerome-bruner-teorias_1.html

XXI Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (XXI SEIEM). (2017). Investigación en Educación Matemática XXI. Zaragoza, España

http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-computacion

http://www.france-ioi.org/ioi/index.php?sLanguage=es

https://www.youtube.com/watch?v=lYrS1Xn7KWw

ANEXOS

Anexo 1. Entrevista a especialistas

Especialista: Profesor Mario Cruz - Olimpiada Colombiana de computación

Objetivo: Indagar la situación actual del proceso de enseñanza y aprendizaje referente a la argumentación y la demostración en la resolución de problemas matemáticos en relación a las olimpiadas de informática.

Desarrollo: Se planteó una serie de preguntas y se describe su aporte a la investigación.

La importancia de la retroalimentación a través de la programación de manera que identifique si está bien resuelto. Tener una teoría matemática que le permita como emplear a la hora de solucionar un problema de olimpiadas de informática.

Preguntas: ¿Qué piensa o analiza un estudiante al comenzar a escribir en lenguaje de programación de tal manera que llegue a la solución de un problema matemático de la olimpiada de computación?

Desde su experiencia, ¿Cómo define y concibe la argumentación en un problema matemático de la olimpiada de computación?

Desde su experiencia, ¿Cómo define y concibe la demostración en un problema matemático de la olimpiada de computación?

¿Qué lenguaje de programación es pertinente para que los estudiantes de grado sexto lo utilicen?

Evidencia fotográfica

Especialista: Doctora Yuriko Yamamoto

Objetivo: Indagar la situación actual del proceso de enseñanza y aprendizaje referente a la argumentación y la demostración en la resolución de problemas matemáticos en relación a programación y los algoritmos.

Desarrollo: Se planteó una serie de preguntas y se describe su aporte a la investigación.

Establece las siguientes relaciones

El argumento - antes = al mismo tiempo de los algoritmos

El algoritmo - antes = colección de pasos justificados

La demostración - antes, durante y después = algoritmo, programación

La programación - durante La validación - después

El pensamiento computacional - antes, durante y después = resolución de problemas

Preguntas

En su ponencia abordó la diferencia que hay entre el pensamiento computacional y la programación, ¿es decir qué la resolución de problemas matemáticos mediados por la programación, desarrolla uno de los dos criterios, o desarrolla los dos de diferentes maneras? ¿Cómo los puede desarrollar?

Desde su experiencia, ¿Cómo se puede relacionar el pensamiento computacional o la programación con la argumentación en un problema matemático mediado por la programación?

Desde su experiencia, ¿Cómo se puede relacionar el pensamiento computacional o la programación con la demostración o prueba en un problema matemático mediado por la programación?

¿Qué lenguaje de programación es pertinente para que los estudiantes edades entre los 12 y los 13 años de edad lo utilicen?

¿Qué estrategias se pueden utilizar en la programación que le permitan al estudiante solucionar problemas matemáticos mediados por la programación?

Evidencia fotográfica

Anexo 2 Observación de la aplicación

Especialista: Doctor Nicolás Bolívar

Objetivo: Observar la implementación de las actividades en el aula.

Desarrollo: El doctor observó al grupo de estudiantes y la manera de abordar la actividad, la presentación de un problema, después el docente sugiere una serie de situaciones similares y preguntas de tal manera que guían el proceso y realiza un andamiaje permitiendo que los estudiantes construyan argumentos y los comuniquen, luego el doctor observa cómo los estudiantes interactúan con el programa Scratch de tal manera construyan algoritmos y una programación que permita demostrar los argumentos planteados y al mismo tiempo una animación.

Evidencia Fotográfica:

Anexo 3 Encuesta a docentes del área de matemáticas

Objetivo: Indagar la situación actual del proceso de enseñanza referente a los procesos de argumentación y demostración en la resolución de problemas matemáticos con estudiantes de básica secundaria en las aulas.

Apreciado docente, su opinión y experiencia es muy valiosa para el desarrollo de esta investigación, que pretende favorecer los procesos de argumentación y demostración en la resolución de problemas matemáticos para la enseñanza de las matemáticas en educación básica. Agradezco su participación.

Es usted Licenciado en matemáticas:

Sí

No

Cuántos años de experiencia tiene orientado cursos de matemáticas

Cuestionario

Valora en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, a las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1. ¿En sus clases propone problemas que permitan el desarrollo de los procesos de argumentación y demostración en los estudiantes?					
2. ¿Considera usted que la resolución de problemas matemáticos aporta al desarrollo de procesos de argumentación y demostración en los estudiantes?					
3. ¿Utiliza materiales didácticos que favorezcan los procesos de argumentación y demostración, en la enseñanza de las matemáticas en el aula?					
4. ¿En el desarrollo de las clases propone usted problemas matemáticos que les permita a sus estudiantes generar procesos de argumentación y demostración?					

5. ¿Considera que el uso de herramientas tecnológicas en la clase de matemáticas favorece los procesos de argumentación y demostración?					
6. ¿Considera que sus estudiantes solucionan problemas matemáticos llevando a cabo procesos de argumentación y demostración?					

Responde las siguientes preguntas abiertas.

1. Exprese algún tipo de problema o actividad propuesta por usted, en la clase de matemáticas, en la que sus estudiantes llevaron a cabo procesos de argumentación y demostración.
2. Explique un problema matemático, en el que, de acuerdo a su experiencia, obtuvo soluciones llevando a cabo procesos de argumentación y demostración.
3. Mencione que tipo de materiales ha utilizado, en la clase de matemáticas, que según su criterio favorecen el desarrollo de procesos de argumentación y demostración
4. ¿Considera la importancia de generar procesos de argumentación y demostración en el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos? Justifique su respuesta

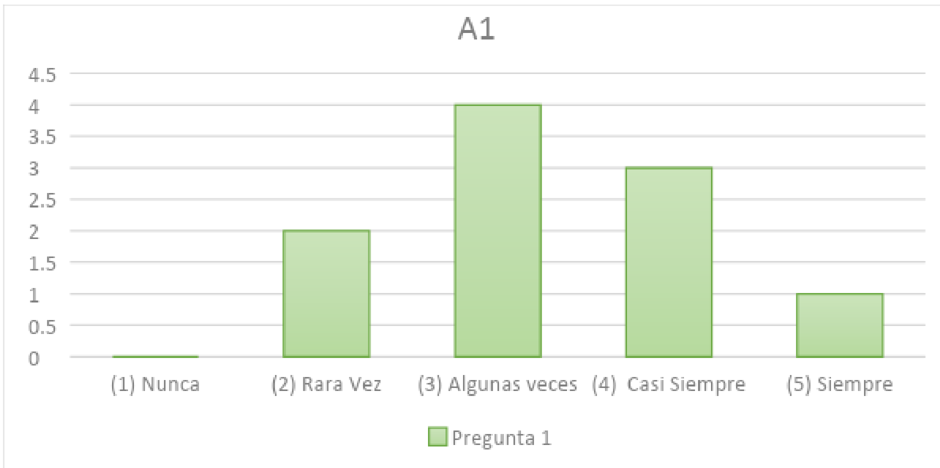
Anexo 4 Análisis de la encuesta y validación por el método Delphi

Gráficos estadísticos de cada una de las preguntas cerradas

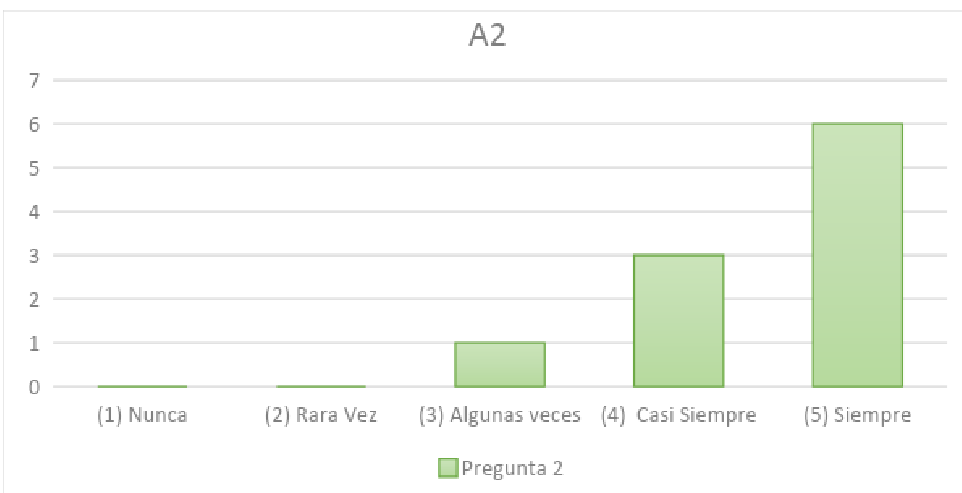
Se encuestaron 10 docentes de matemáticas

Valora en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, a las siguientes preguntas.

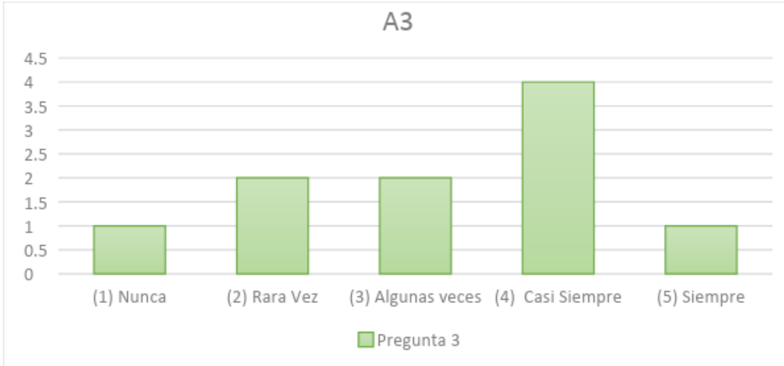
¿En sus clases propone problemas que permitan el desarrollo de los procesos de argumentación y demostración en los estudiantes?



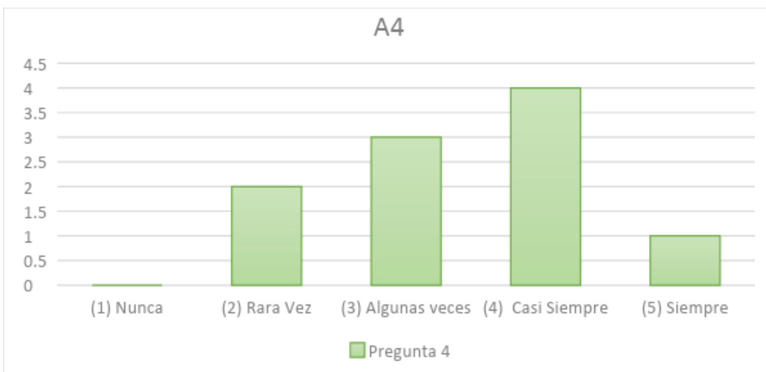
¿Considera usted que la resolución de problemas matemáticos aporta al desarrollo de procesos de argumentación y demostración en los estudiantes?



¿Utiliza materiales didácticos que favorezcan los procesos de argumentación y demostración, en la enseñanza de las matemáticas en el aula?

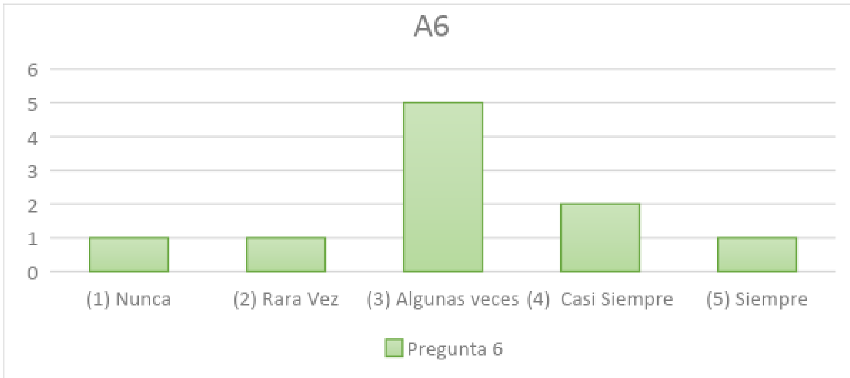


¿En el desarrollo de las clases propone usted problemas matemáticos que les permita a sus estudiantes generar procesos de argumentación y demostración?



¿Considera que el uso de herramientas tecnológicas en la clase de matemáticas favorece los procesos de argumentación y demostración?

¿Considera que sus estudiantes solucionan problemas matemáticos llevando a cabo procesos de argumentación y demostración?



Método Delphi

Tabla de frecuencias de valores absolutos

INDICADORES	5	4	3	2	1
A1	1	3	4	2	0
A2	6	3	1	0	0
A3	1	4	2	2	1
A4	1	4	3	2	0
A5	4	4	2	0	0
A6	1	2	5	1	1

Tabla de frecuencias de valores absolutos

INDICADORES	5	4	3	2	1
A1	1	4	8	10	10
A2	6	9	10	10	10
A3	1	5	7	9	10
A4	1	5	8	10	10
A5	4	8	10	10	10
A6	1	3	8	9	10

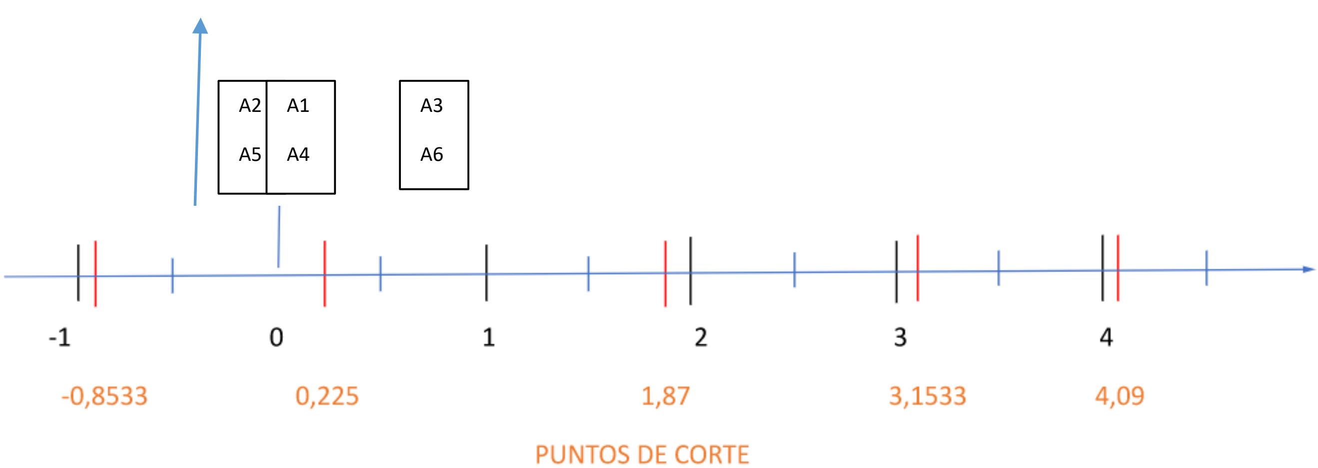
Tabla de frecuencias relativas acumuladas

INDICADORES	5	4	3	2	1
A1	0,1	0,4	0,8	1	1
A2	0,6	0,9	1	1	1
A3	0,1	0,5	0,7	0,9	1
A4	0,1	0,5	0,8	1	1
A5	0,4	0,8	1	1	1
A6	0,1	0,3	0,8	0,9	1

Tabla de la función recíproca de la distribución normal

INDICADORES	5	4	3	2	1	SUMA	PROM	N - PROM
A1	-1,28	-0,25	0,84	4,09	4,09	7,49	1,498	0,199
A2	0,25	1,28	4,09	4,09	4,09	13,8	2,76	-1,063
A3	-1,28	0	0,52	1,28	4,09	4,61	0,922	0,775
A4	-1,28	0	0,84	4,09	4,09	7,74	1,548	0,149
A5	-0,25	0,84	4,09	4,09	4,09	12,86	2,572	-0,875
A6	-1,28	-0,52	0,84	1,28	4,09	4,41	0,882	0,815
SUMA	-5,12	1,35	11,22	18,92	24,54	50,91	10,182	//////////
PUNTOS DE CORTE	-08533	0,225	1,87	3,1533	4,09	8,485	/ 6	1,697
PROMEDIO DE PROMEDIOS = **N**	//////////	/////////	////////	//////////	////////	/ 5	1,697	

Gráfica de la distribución normal y los puntos de corte



Análisis de Resultados

A partir de la distribución de datos se pueden apreciar los puntos de corte y la ubicación de las preguntas (A1, A2, A3, A4, A5 y A6) dentro de la gráfica, se evidencia que las preguntas A2 y A5 están antes del primer punto de corte y esto implica que están de acuerdo plenamente, las preguntas A1 y A4 se encuentran en el primer intervalo antes del segundo punto de corte y las preguntas A3 y A6 se encuentran cerca del segundo punto de corte, es decir que están de acuerdo en un grado alto y esto nos permite concluir que las preguntas son pertinentes y adecuadas para el desarrollo de la investigación.

Anexo 5 Actividades desde Scratch

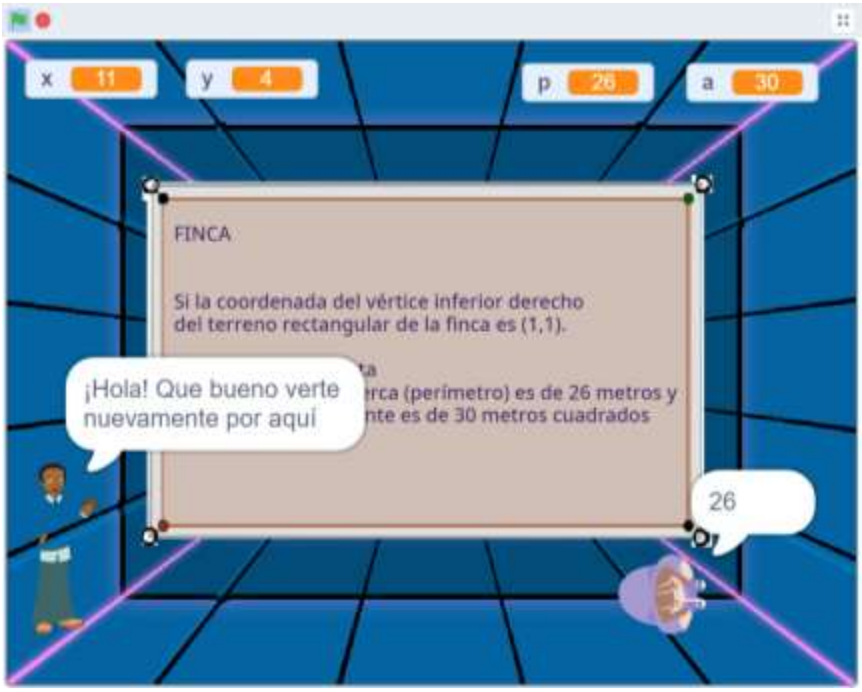
Actividad 1 EL TAXI

https://scratch.mit.edu/projects/699326338

https://scratch.mit.edu/projects/699326611

https://scratch.mit.edu/projects/699326884

Actividad 2 LA FINCA



https://scratch.mit.edu/projects/699325341

https://scratch.mit.edu/projects/699324684

https://scratch.mit.edu/projects/699324311

Actividad 3 LAS CARTAS

https://scratch.mit.edu/projects/699179413

https://scratch.mit.edu/projects/699323732

https://scratch.mit.edu/projects/699323225

Actividad 4 LA PIRÁMIDE

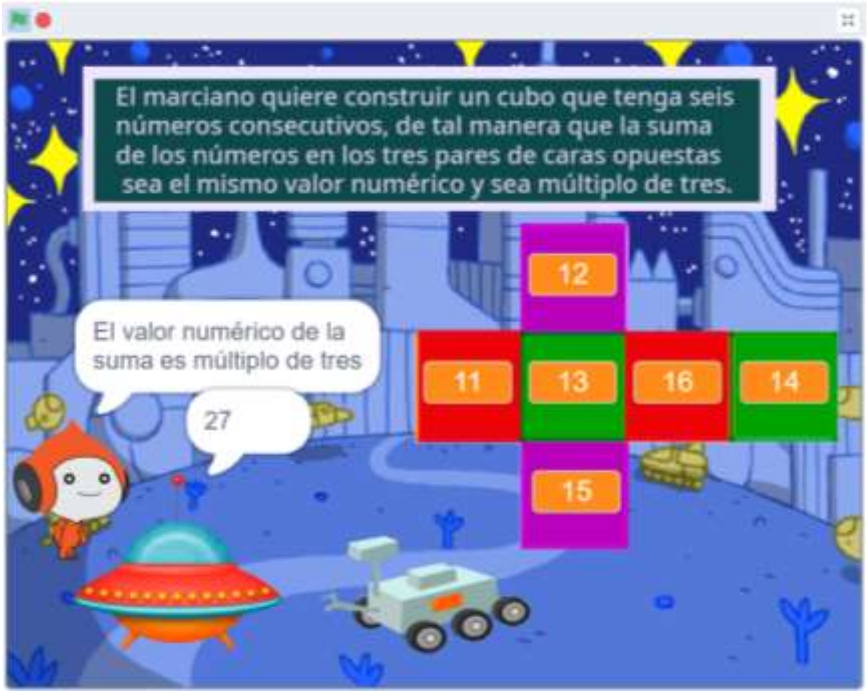
https://scratch.mit.edu/projects/699386882

https://scratch.mit.edu/projects/699407931

https://scratch.mit.edu/projects/699408147

Actividad 5 EL CUBO

https://scratch.mit.edu/projects/701174901



https://scratch.mit.edu/projects/701175424