La factorización a través del álgebra geométrica. Experiencia de enseñanza aprendizaje con estudiantes de grado octavo.

William Alberto López Pinzón

10101512540

Universidad Antonio Nariño

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Educación

Bogotá, Colombia

21 de noviembre de 2022

La factorización a través del álgebra geométrica. Experiencia de enseñanza aprendizaje con estudiantes de grado octavo.

William Alberto López Pinzón

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

Modalidad

Monografía de investigación

Directora:

Zaida Mabel Angel Cuervo

Universidad Antonio Nariño

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Educación

Bogotá, Colombia

21 de noviembre de 2022

NOTA DE ACEPTACIÓN

El trabajo de grado titulado

La factorización a través del álgebra geométrica. Experiencia de enseñanza aprendizaje con estudiantes de grado octavo.

Cumple con los requisitos para optar

Al título de Licenciatura en Matemáticas.

Zaida Mabel Angel Cuervo

Nombre del Tutor

Grace Judith Vesga Bravo

Nombre del Jurado

Diego Fabian Vizcaino Arévalo

Nombre del Jurado

Bogotá, 21 de noviembre de 2022.

Dedicatoria

De manera especial dedico este trabajo a mi familia que me ha acompañado por completo en el proceso personal y profesional durante el transcurso de mi permanencia en la academia.

A mi directora de trabajo de grado quien ha orientado mi proceso investigativo, su compromiso para el desarrollo de este trabajo fue arduo, gracias por instruirme para poder finalizar mi trabajo investigativo.

Por último, dedico este trabajo a todos los docentes de matemáticas que día a día lo entregan todo en las aulas de clase, por enseñar, cambiar y más que ello aportar a la sociedad hombres y mujeres que puedan ver el mundo matemático como una opción de vida.

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein

Agradecimientos

Agradezco primero a Dios por concederme el conocimiento y la salud para poder finalizar mi monografía de grado, a los docentes de mi carrera de pregrado por sus enseñanzas, su motivación y entusiasmo en cada sesión, me he convertido en una persona que se preocupa y profundiza en los factores didáctico-matemáticos que han inundado el sector educativo.

Es imprescindible agradécele a mi familia, la cual me ha acompañado durante este propósito en mi vida, sin ellos esto no sería posible; a mi esposa por hacer de mis noches de estudio poco abrumadoras y por acompañarme. Mi alegría por poder compartir este logro con mis seres queridos, quienes pacientemente comprendieron mis ausencias durante el proceso, fueron mi voz de aliento en puntos álgidos y ese motor que inundaba de fuerza las pocas ganas que tenía en ciertos momentos.

A mis compañeros de estudio por hacer de este proceso una de las mejores etapas de mi vida, donde vivimos experiencias que cotidianamente nos formaron como docentes dentro y fuera de las aulas.

Admiración y gratitud infinita por mi asesora Zaida Mabel Ángel Cuervo, quien de manera generosa compartió su conocimiento y respetuosamente me condujo a un mejor camino, por sus enseñanzas, su motivación y entusiasmo en cada sesión, todo este apoyo se unificó de manera sorprendente para obtener el resultado que en el presente documento se materializa.

William Alberto López Pinzón

Contenido

Lista de Figuras

Lista de tablas

Resumen

La presente monografía nace de la reflexión del quehacer docente, al abordar el concepto de factorización algebraica con estudiantes. Por ende, en la búsqueda de fortalecer este proceso, se propuso el diseño de una estrategia didáctica para enseñar a factorizar desde la relación algebra-geometría. Estos dos pensamientos como mediadores en las guías didácticas bajo el modelo didáctico Concreto, Pictórico y Simbólico (COPISI) basado en la teoría del aprendizaje significativo crítico de Moreira (2005).

La implementación se realizó con los estudiantes del grado octavo del Colegio Andrés Rosillo, de la localidad de Bosa, quienes a través de la aplicación de las guías didácticas se apropiaron del concepto de factorización. Los resultados evidencian que los alumnos encuentran significados a los conceptos abordados con el fin de resolver problemáticas mediante la factorización. Esta relación permite obtener resultados positivos, dado que, el estudiante analiza, argumenta e interpreta nuevos conocimientos.

Palabras clave: Factorización, COPISI, álgebra geométrica, álgebra y aprendizaje significativo.

Abstract

This monograph was born from the reflection of the teaching task, when approaching the concept of algebraic factoring with students. Therefore, in the search to strengthen this process, the design of a didactic strategy to teach factoring from the algebra-geometry relationship was proposed. These two thoughts as mediators in the didactic guides under the pedagogical model Concrete, Pictorial and Symbolic (COPISI) based on Moreira's (2005) theory of critical meaningful learning.

The implementation was carried out with eighth grade students of the Andrés Rosillo School, in the district of Bosa, who through the application of the didactic guides appropriated the concept of factorization. The results show that the students find meanings to the concepts approached to solve problems through factoring. This relationship allows obtaining positive results, since the student analyzes, argues and interprets new knowledge.

Key words: Factorization, COPISI, geometric algebra, algebra and meaningful learning.

Introducción

Se desarrollaron procesos de enseñanza-aprendizaje significativos a través del uso del modelo didáctico COPISI con jóvenes de octavo grado de secundaria de un colegio privado de la localidad de Bosa, los contenidos abordados fueron los asociados al concepto de factorización algebraica; lo anterior, teniendo en cuenta que al observar el contexto en el que se desenvuelven los estudiantes es posible evidenciar las problemáticas a las que se enfrentan al abordar dicha temática lo que permitió el desarrollo de está monografía. En el documento encontrarán las causas que originaron el problema de enseñanza de la factorización y el por qué tratarlo desde lo que exige el Ministerio de Educación Nacional hasta lo que implica para el desarrollo del pensamiento variacional.

Para ello se revisaron algunos antecedentes que permiten identificar dificultades y estrategias de solución para el mejoramiento de los procesos de enseñanza referenciando el papel del docente y de aprendizaje haciendo énfasis en la manera en la que los estudiantes afianzan conocimiento matemático, teniendo en cuenta que en la actualidad se requiere el diseño de modelos didácticos que incentiven el trabajo autónomo y crítico estudiantil.

Buscar una didáctica que genere interés para los estudiantes requirió una investigación con un paradigma interpretativo, que pretendía comprender la realidad de un grupo específico de alumnos, no brindar generalizaciones. Para ello se realizó una planificación didáctica, la estructura del material de enseñanza y la caracterización de los participantes con el fin de determinar las necesidades de la población de estudio y la metodología formativa y atractiva.

Para el desarrollo investigativo se aplicaron guías y se sistematizaron describiendo avances, debilidades y fortalezas de cada alumno. Se concluye que el modelo didáctico aplicado a las guías genera un espacio de aprendizaje significativo para trabajar la factorización algebraica por medio de la geometría de esta manera crea espacios de aprendizaje donde el estudiante puede analizar, argumentar e interpretar los nuevos conocimientos, aplicando la factorización en la solución de múltiples retos que requieren de esta herramienta matemática.

1. Presentación del problema

1.1 Planteamiento del problema

De acuerdo con Lobo (2022), la factorización es una técnica matemática que no genera mayor interés por los estudiantes debido al alto nivel de complejidad que ha representado para los jóvenes del grado octavo ya que el proceso de enseñanza-aprendizaje se basa en la reproducción de algoritmos de solución, lo que ha ocasionado que estos se limiten a la memorización, dejando de lado las relaciones de otros conceptos matemáticos, la utilización de material concreto y de situaciones de razonamiento cuantitativo, que permitan al estudiante apropiarse del lenguaje matemático.

A pesar de que las estrategias pedagógicas tradicionales siguen siendo tomadas al momento de enseñar álgebra y específicamente la factorización, es necesario implementar otras herramientas didácticas que generen interés respecto al tema. En esta propuesta se pretende trabajar con el álgebra geométrica la cual permite visualizar la factorización con un enfoque innovador caracterizándose como herramienta didáctica mediadora en la construcción del aprendizaje en un proceso en el que los estudiantes son los protagonistas y el docente actúa como orientador.

En este contexto, en el quehacer docente se torna necesario el planteamiento de estrategias didácticas que posibiliten el mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje fortaleciendo el pensamiento variacional; por ello, autores como Wagner & Kieran (1998) plantean una serie de estrategias investigativas como la observación, reflexión y análisis que permiten la definición de las problemáticas y definición de aquellas dificultades que pueden aparecer durante la resolución aritmética o geométrica.

Los estudiantes deben aprender a deducir los procesos de factorización a partir de figuras geométricas como un método en el que se hace vital establecer una relación de dualidad entre fenómenos que unificados pueden generar mayor interés por el aprendizaje mediante la interacción con autonomía respecto a la confluencia de conceptos y conocimientos.

La factorización es uno de los temas escolares que más generan dificultades en los estudiantes teniendo en cuenta que suele confundirse con temáticas inherentes a la multiplicación y tiene como finalidad la descomposición de un problema algebraico como producto de otras expresiones o factores cuyos procedimientos provienen de las propiedades de los números reales. Por tal razón, resulta relevante implementar estrategias en el aula que faciliten la comprensión de este concepto y se pueda lograr un aprendizaje significativo a través de herramientas y metodologías pedagógicas innovadoras.

Por su parte, la geometría algebraica se presenta como una herramienta que permite la enseñanza desde la didáctica para la comprensión de la factorización; lo anterior, teniendo en cuenta que existen investigaciones con resultados positivos disminuyendo así las dificultades que presenta la transición de la aritmética al álgebra y posibilitando las oportunidades para el aprendizaje de la factorización específicamente en la factorización de polinomios que se aborda en el grado octavo de educación básica secundaria.

Partiendo de lo anterior, se considera fundamental lograr aprendizajes significativos asociados a la construcción de herramientas que faciliten el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización; por lo cual, se plantea como pregunta de investigación ¿Cómo desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje a través del álgebra geométrica en estudiantes de grado octavo de un Colegio Privado de la localidad de Bosa?

1.2 Justificación

Las dificultades frente a los procesos de factorización surgen cuando se aborda como parte del plan de estudios de la educación básica secundaria que de acuerdo con lo observado uno de los factores más comunes es la falta de comprensión de los procedimientos matemáticos necesarios para la resolución de ejercicios o problemas que requieren de dicho concepto; por lo cual, es necesario generar estrategias pedagógicas innovadoras que permitan su afianzamiento.

Al respecto, Guadrón, et al., (2006) señalan que el aprendizaje matemático durante décadas se ha formulado desde la enseñanza de algoritmos que no permiten que los estudiantes manipulen materiales y recursos didácticos que conlleven a la construcción de nociones matemáticas de manera concreta y posteriormente se pueda hablar de un pensamiento abstracto.

De otra parte, Barrantes, et al., (2014) afirman que “la enseñanza de la geometría es difícil por el nivel de abstracción visual, mental y espacial, pues la enseñanza es presentada de forma tradicional, es decir, enfocándose en el aspecto memorístico” (p. 4). Aclarando que los procesos de memorización son fundamentales en las matemáticas; sin embargo, no son los únicos que permiten la comprensión de las temáticas, aspecto que ha inquietado a diferentes docentes investigadores en el área y han propuesto diversas estrategias para el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por lo anterior, resulta relevante implementar una estrategia pedagógica fundamentada en los postulados del modelo didáctico COPISI caracterizada por la integración de los conocimientos previos de los alumnos, partiendo de los postulados del aprendizaje experiencial permitiendo el trabajo interactivo desde las características de su entorno fortaleciendo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Pawelet, 2013).

Finalmente, la visión socio cultural en la que se desarrolla el proceso enseñanza-aprendizaje juega uno de los papeles más relevantes en el desarrollo de la factorización; por lo cual, la metodología COPISI resulta pertinente puesto que integra lo simbólico, pictórico y concreto en desarrollo de las temáticas enfocándose en los conocimientos previos y el contexto, utilizándola para la enseñanza didáctica de la factorización mediante la unificación del álgebra geométrica en los estudiantes de grado octavo de un Colegio Privado de la localidad de Bosa.

Tal es el caso del modelo didáctico que aborda la enseñanza de las matemáticas mediante representaciones concretas, pictóricas y simbólicas reconocido como COPISI, caracterizándose por los resultados en el mejoramiento de los procesos enseñanza-aprendizaje de esta área. Este se ha implementado en diferentes países como Chile, Argentina y Singapur en los que se han incrementado los porcentajes de aprendizaje en diferentes temáticas abordadas en los planes de estudio del álgebra específicamente en la factorización mediante la unificación geométrica (Oviedo y Panca, 2017).

1.3 Antecedentes

Los métodos de enseñanza de la matemática han sido causa de investigación por parte de educadores y psicólogos de diferentes países del mundo en búsqueda de metodologías innovadoras que permitan obtener mejores resultados en los procesos de aprendizaje que experimentan los estudiantes; por ello, se han desarrollado investigaciones sobre neurociencia, educación, psicología y ciencias cognitivas que han llegado a la conclusión de que el aprendizaje se optimiza cuando los niños y jóvenes son mentalmente activos en el momento de descubrir nuevos conocimientos puesto que se generan actividades de participación y de interacción con material concreto dando paso al aprendizaje significativo (Hirsh, et al., 2018).

En este sentido, se han desarrollado toda una serie de investigaciones que abordan elementos sobre la enseñanza de la factorización en la educación básica secundaria que permiten la visualización de las dificultades de los estudiantes, el diseño de estrategias pedagógicas y los resultados de estas, poniendo en evidencia aquellos obstáculos en la construcción de estos conocimientos, mitigando errores de tipo didáctico-didáctico logrando un apropiado proceso de enseñanza aprendizaje. Por ello, se llevó a cabo la revisión de algunos artículos y trabajos de grado, que contribuyan a establecer una estrategia para desarrollar la conceptualización de la enseñanza-aprendizaje de la factorización en los estudiantes de grado octavo de un Colegio Privado de la localidad de Bosa.

En primer lugar se cita a Wagner, et al., (2017) quienes publicaron el documento “El Álgebra Geométrica Como Mediadora en la Enseñanza de la Factorización y los Productos Notables” en la Universidad del Quindío, determinando que el nivel de aprendizaje que alcanzan los estudiantes del programa de licenciatura en matemáticas, en la búsqueda de la comprensión de los conceptos de factorización y productos notables, mediante la implementación de estrategias didácticas de enseñanza y de aprendizaje, utilizando la técnica de la geometrización del álgebra como un medio para alcanzar un aprendizaje significativo.

La metodología, se desarrolló con enfoque experimental utilizando dos grupos focales de primer semestre con una muestra de 30 estudiantes cada uno a través de un trabajo dividido en tres fases a saber diagnóstico, ajustes para mejoramiento y cierre; con el primer grupo, de la licenciatura de matemáticas se trabajó con el software de polinomios y con el otro de ingeniería de sistemas como grupo control se desarrolló el tema de factorización desde el método tradicional.

Los resultados fueron significativos, puesto que en el grupo en el que se desarrolló el tema con la geometría algebraica se evidenció un mayor nivel de apropiación de los conceptos de factorización algebraica en contraposición con el grupo que trabajó con los métodos tradicionales, evidenciando que desde el método didáctico se logran alcanzar habilidades matemáticas como explorar, conjeturar, razonar, reflexionar y comunicar matemáticamente.

Sumado a lo anterior, Ballén (2012) quien desarrolló la tesis de maestría “El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado” en la Universidad Nacional de Colombia, se trató de un estudio documental para el planteamiento de una propuesta didáctica con la utilización del álgebra geométrica logra que exista una mejor comprensión de los temas a pesar de las limitaciones que pueda tener, teniendo en cuenta que la parte visual de este recurso genera una mayor motivación porque manipular conceptos algebraicos de manera amena integrando la fundamentación teórica.

En el documento se realiza un recorrido por la historia del álgebra, para dar paso al diseño de seis talleres usando la parte gráfica como recurso didáctico relacional entre la factorización y el álgebra geométrica. Se concluyó que, los temas de enseñanza del álgebra, en especial los de factorización no son fáciles de abordar con los estudiantes, por lo que se debe acudir a diferentes estrategias que permitan mejorar los resultados de los alumnos en los que se evidencien la apropiación de la comunicación matemática.

De otra parte, Rivera (2020) desarrolló la investigación “Enseñanza de la Factorización a Partir de la Relación Entre Álgebra y Geometría” como requisito para optar al título de magister en la Universidad Nacional de Colombia, este se llevó a cabo desde la reflexión del quehacer docente, donde al abordar el concepto de factorización con los estudiantes se puede evidenciar que se ha convertido en la implementación de algoritmos un resultado de la escuela tradicional, por ende, la investigación se encamina en la búsqueda de un método didáctico que atraiga la atención de los estudiantes.

Después de identificar las dificultades históricas y epistemológicas relacionadas con la factorización de polinomios de segundo grado, y de haber mostrado diferentes métodos para factorizar, se estableció que el álgebra geométrica es una herramienta especialmente útil porque permite la visualización de la factorización en estudiantes de grado octavo mediante la comprensión y afianzamiento del significado de la factorización.

Los resultados de la investigación reflejaron expresiones emocionales en los estudiantes por el ambiente que encuentran en el salón de matemáticas, lo que infiere directamente en el proceso de aprendizaje; es necesario hacer que el ambiente unifique los métodos que conformarán la parte didáctica. Además, el aprendizaje basado en problemas contextualiza la experiencia desde su vida cotidiana, lo que permite observar que la actitud de los estudiantes es de tranquilidad y seguridad en el aula de matemáticas.

El estudio concluyó que, es relevante crear ambientes de aprendizaje que motiven a los estudiantes en la construcción del conocimiento generando interés por las matemáticas ya que a nivel histórico se ha tornado como una temática tediosa por ello, se busca que el apoyo docente y los materiales didácticos contribuyan en la construcción desde el contexto que los rodea y de esta manera el estudiante puede aprender de tal manera relacione factores matemáticos desde el día a día y sus experiencias con la realidad.

Sumado a lo anterior, Disasmitowati & Utami (2017) publicaron el documento de investigación titulado “Análisis de los Estudiantes Para la Comunicación Matemática Usando la Factorización Algebraica” mediante la utilización de bloques de álgebra encaminados a la optimización de los procesos de aprendizaje, se desarrolló bajo los parámetros del enfoque cualitativo de tipo descriptivo. Para la recolección de la información se aplicaron entrevistas a través de visita domiciliaria y en el aula se acudió a la técnica de la observación directa buscando elementos relacionados con el aprendizaje de la factorización.

Se concluyó que, es fundamental nuevas alternativas para la enseñanza de la factorización polinómica, de acuerdo con los resultados obtenidos en la investigación y el acompañamiento de los estudiantes se logró evidenciar que existen diversas maneras de enseñar la factorización polinómica donde los sujetos de aprendizaje adquieran conocimientos matemáticos desde la geometría algebraica y que con estas alternativas los docentes puedan fomentar en la construcción de sus propios autónoma de conocimientos matemáticos.

De acuerdo con los antecedentes expuesto, se evidencia un aporte significativo en cuanto que es posible observar que el conocimiento matemático está ligado al contexto de los estudiantes y los constantes desafíos que se deben enfrentar en su cotidianidad, la factorización se puede desarrollar desde las propias experiencias de vida con relación a las actividades y problemáticas de las que son sujetos activos y por ello, deben convertirse en los principales actores de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Evaluar los procesos de enseñanza aprendizaje de la factorización a través del álgebra geométrica, bajo el modelo didáctico COPISI en estudiantes de octavo grado de un Colegio Privado de la localidad de Bosa.

1.4.2 Objetivos específicos

- Construir los fundamentos conceptuales que aportan al diseño de un material didáctico para el desarrollo del pensamiento variacional, específicamente la factorización.
- Diseñar e implementar el material didáctico en los estudiantes de grado octavo para la comprensión de los procesos de factorización.
- Sistematizar el desarrollo y la apropiación del concepto de factorización de los estudiantes a través de las guías didácticas bajo el modelo COPISI.

1.5 Pertinencia

Este trabajo de grado es pertinente porque permite mejorar la comprensión y la manera en que se enseña la factorización algebraica mediante la utilización del modelo didáctico COPISI, dando paso al afianzamiento y fortalecimiento de las temáticas inherentes al concepto de factorización.

Por otra parte, da cuenta del desarrollo de las competencias pedagógicas propias de la selección de un modelo didáctico coherente con la elaboración de un material didáctico dirigido al mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Además, evidencia el dominio del conocimiento matemático construido a lo largo de la formación profesional.

Finalmente, el documento permite evidenciar habilidades investigativas al identificar un fenómeno o situación problemática en el campo de la educación matemática dando paso a la formulación de una propuesta de enseñanza aprendizaje que da respuesta a las necesidades de desarrollo de procesos de la matemática coherentes con los estándares y DBA para un grado de la educación básica secundaria.

2. Referentes teóricos

En el presente capítulo se realiza la exposición de la fundamentación teórica en la que se soportó la propuesta de enseñanza aprendizaje de la factorización para desarrollar el pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo.

2.1 Marco legal

Se cita la Ley 115 de 1994, la cual expide las medidas generales para la educación básica y media, en su artículo 23 se encuentra el área de matemáticas como una de las asignaturas obligatorias y fundamentales por el papel que desempeña en las diferentes dimensiones sociales; además, se constituye como un modelo de pensamiento por sus cualidades de objetividad, consistencia, sobriedad, las cuales le dan un lugar prominente entre las diversas formas que tiene el pensamiento humano necesarias para la búsqueda de soluciones a situaciones problema.

De otra parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) con el fin de direccionar el currículo colombiano de matemáticas, ha generado tres documentos garantes de la calidad mínima en las instituciones estatales y privadas reconocidos como los Lineamientos curriculares de matemáticas en al año 1998, los Estándares Curriculares Básicos en Competencias Matemáticas (2006) y, los Derechos Básicos de Aprendizaje (2017).

En este contexto, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se plantean tres pilares para el currículo de matemáticas nacional, los procesos generales, los pensamientos (conocimiento disciplinar) y el contexto. Así, en lo referente al conocimiento para el desarrollo del pensamiento matemático, existen cinco divisiones o formas en las cuales se puede observar factores matemáticos como: el numérico, el espacial, el métrico, el variacional y el aleatorio. Los procesos generales se refieren a razonamiento, resolución de problemas, comunicación, modelación y ejercitación de los procedimientos, por último, el aprendizaje se puede distinguir como una situación en la vida, en la realidad y en otras ciencias e incluso las propias matemáticas (MEN, 1998).

De acuerdo con lo anterior, es de vital importancia el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, donde se hace importante el proceso de modelación el desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que las rigen o las reglas de formación que identifican el patrón que se repite periódicamente, estas se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón.

Al identificar la similitud de estas y los factores distintivos de los términos, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un procedimiento, algoritmo o fórmula, el proceso de formación que debería llegar a analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de índole humana, matemática o científica (MEN, 1998).

Ahora bien, el pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros pensamiento matemático a saber, numérico, espacial, métrico y aleatorio o probabilístico a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos que se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos que requieren de conceptos y procedimientos relacionados con los distintos sistemas numéricos específicamente con los números reales teniendo en cuenta que son sistemas que se presentan de manera dinámica y variacional.

Sumado a lo anterior, los lineamientos plantean el estudio de patrones como manera inicial de acercamiento a los conceptos de variación, el estudio de estos en formas geométricas relacionadas con la factorización es de utilidad como medida inicial para llegar a un estado donde el álgebra geométrica tome un sentido más simbólico, siendo así un proceso generale de vital importancia en su desarrollo.

De otra parte, la resolución de problemas es una actividad ampliamente considerada en diferentes planes de estudio del área de matemáticas, su utilidad en el desarrollo de estas o del conocimiento matemático es importante dentro del desarrollo curricular, donde se consideran aspectos importantes para que solución de problemas no sean únicamente matemáticos sino que se pueda trabajar desde la realidad, el uso de diversas estrategias, verificación e interpretación de los resultados, generalización e incluso la adquisición de confianza en el uso de las matemáticas (MEN, 1998).

Por su parte, el razonamiento se relaciona con los demás procesos como la comunicación la modelación y la resolución, donde se debe dar la solución de un procedimiento, la justificación e identificación de patrones, así como expresarlos desde las matemáticas y el uso de los argumentos, comprendiendo así a las matemáticas como un proceso lógico e interpretativo a través de la comunicación y el lenguaje.

En este sentido, se ha establecido que la comunicación y el lenguaje son factores propios del ser humano, que permiten expresar y comprender ideas desde el conocimiento del lenguaje que es diverso, por ende, el ser humano está en la capacidad de aprender idiomas para identificar, reconocer y comprender otras maneras de comunicación no conocidas, el proceso de unificar la geometría a la factorización desde las experiencias y contexto de los estudiantes se cruzan de igual manera que el aprendizaje de una lengua diferente a la natal del sujeto de enseñanza la modelación actúa de manera precisa en la adquisición de conocimientos a través de la enseñanza.

De esta manera, la modelación se enfatiza continuamente en los procesos de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas, sobre todo en la resolución de problemas, la cual es un reflejo de las necesidades de la sociedad actual, la capacidad de matematización a partir de una situación ligada a identificar las problemáticas matemáticas en estas, permiten que el sujeto aprenda a crear esquemas, interpretar de formas distintas un problema y descubrir relaciones y regularidades numéricas.

De otra parte, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos matemáticos hace referencia a la capacidad del saber hacer y la unificación a la habilidad de poder llegar a usar el conocimiento matemático para verificar la validez de sus resultados respecto al objeto sistemático de análisis; por lo cual, es necesario interactuar de manera didáctica respecto a la enseñanza de temas como estos, que requieren dedicación tanto en la enseñanza como en el aprendizaje.

Sumado a lo expuesto, se referencian los Estándares Curriculares Básicos de Competencias Matemáticas, documento en el que se recalca el vínculo existente entre el pensamiento variacional y los demás pensamientos matemáticos de acuerdo con los fundamentos de coherencia horizontal, relevante al momento de abordar los conceptos numéricos y geométricos que de presentarse de forma dinámica pueden apoyar el estudio de la variación y la generalización (MEN, 2006).

Por su parte, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) plantean que a grado noveno los estudiantes deben estar en capacidad de proponer, comparar y usar procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos. Por ello, deben mostrar evidencias de aprendizaje en la que se constate que opera con formas simbólicas que representan números y encuentra valores desconocidos en ecuaciones numéricas, reconoce patrones numéricos y los describe verbalmente, representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y opera con y sobre variables, describe diferentes usos del signo igual (equivalencia, igualdad condicionada) en las expresiones algebraicas y utiliza las propiedades de los conjuntos numéricos para resolver ecuaciones (MEN, 2017).

Por su parte, los DBA de grado octavo enfoca los aprendizajes matemáticos que deben emplear los estudiantes de tal manera que debe identificar y analizar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación. Procesos que se evidencian al operar con formas simbólicas y las interpreta, relacionar un cambio en la variable independiente con el cambio correspondiente en la variable dependiente, encontrar valores desconocidos en ecuaciones algebraicas, reconocer y representar relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encontrar el conjunto de variación de una variable en función del contexto (MEN, 2017).

2.2 Marco disciplinar

A continuación, se relacionan las definiciones teóricas, postulados y teoremas matemáticos que permiten el desarrollo, comprensión y construcción de la factorización algebraica abordad desde la geometría como herramienta didáctica en los estudiantes del grado Octavo de un Colegio privado de la localidad de Bosa, fundamentando la investigación desde la concepción científica.

2.2.1 Lenguaje y expresiones algebraicas

Dada la necesidad de comunicación de los seres humanos se ha creado una herramienta conocida como lenguaje ordinario; de igual manera, la matemática ha buscado poder comunicar sus ideas y postulado por medio de un lenguaje escrito dividido en dos partes; el semántico, que utiliza símbolos y notaciones con significado específico y, el sintáctico que exige la aplicación directa de nociones matemáticas (Rojas, et al., 1999).

De esta manera, el lenguaje ordinario debe ayudar a entender los símbolos matemáticos; sin embargo, en ocasiones se generan confusiones teniendo en cuenta que hay expresiones que a nivel matemático cobran un significado totalmente diferente como es el caso de las palabras "primo o integral"; por lo cual, es fundamental que los estudiantes interioricen lenguaje matemático y de esta manera lograr la comprensión de las situaciones problema y los elementos aritméticos, geométricos o algebraicos necesarios para solucionarlas.

En este sentido, el lenguaje matemático se ha desarrollado a través de la historia dividiéndose en varias facetas como el lenguaje aritmético y separado del lenguaje ordinario (Rojas, et al., 1999), de esta forma en el lenguaje aritmético se pueden encontrar reglas ortográficas, por ejemplo:

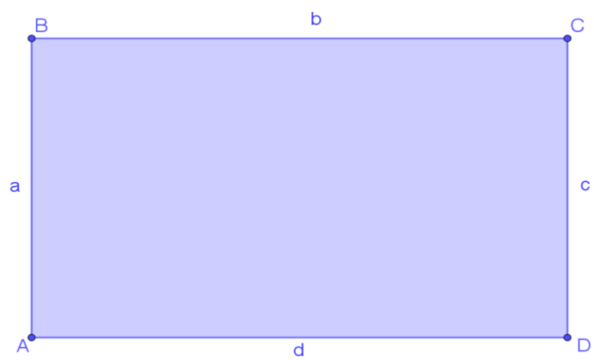
$$7 + 3 =$$

Y no encontrar

$$7 + = 3$$

Debido a que inmediatamente va a cambiar el significado y por ende la operacionalización quedando totalmente incompleta la expresión matemática. Sin embargo, debido a esto surge el lenguaje algebraico cuyo origen proviene de la geometría griega con el empleo de letras como variables, en el que las figuras geométricas requerían que sus puntos fueran marcados con las letras del alfabeto, así como los segmentos, rectas y triángulos, así como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Marcación de puntos en figuras geométricas.



Sin embargo, el uso de las letras en el álgebra se evidenció posteriormente debido a que una letra tenía infinidad de valores con lo cual hacía que significará "el mismo", mientras que el uso de los números era individualista, no fue hasta tiempo después que se empleó la "incógnita" para el uso de magnitudes indeterminadas, esto fue en los años 1600 por Viéte.

Así, el álgebra surge como la generalización del modelo numérico, además, todo cálculo algebraico se construye bajo cinco características del sistema numérico, la propiedad conmutativa y asociativa de la suma, conmutativa y asociativa del producto, y la distributiva de la suma con el producto, también, hereda el uso de paréntesis, exponentes y demás herramientas del lenguaje aritmético, de esta forma el lenguaje algebraico adquiere las expresiones algebraicas como una herramienta de transformación del lenguaje (Rojas, 2014).

2.2.2 Multiplicación de expresiones algebraicas

En los números reales el producto de expresiones algebraicas como $3(x^2+2)$ no es más si no la suma de x^2+2, 3 veces

$$3(x^2+2) = (x^2+2)+(x^2+2)+(x^2+2)$$
$$(1+1+1)x^2+(2+2+2)$$
$$= 3x^2+6$$

En el caso de un natural la multiplicación se interpreta

$$nx = \underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\,veces}.$$

Si se observa el caso real sería:

$$2*2 = 2+2 = 4,$$

al multiplicarse por 2

$$2*2*2 = 4+4 = 8,$$

y se puede generalizar entonces lo siguiente

$$xx = \underbrace{x+x+\cdots+x}_{x\,veces} = x^2$$

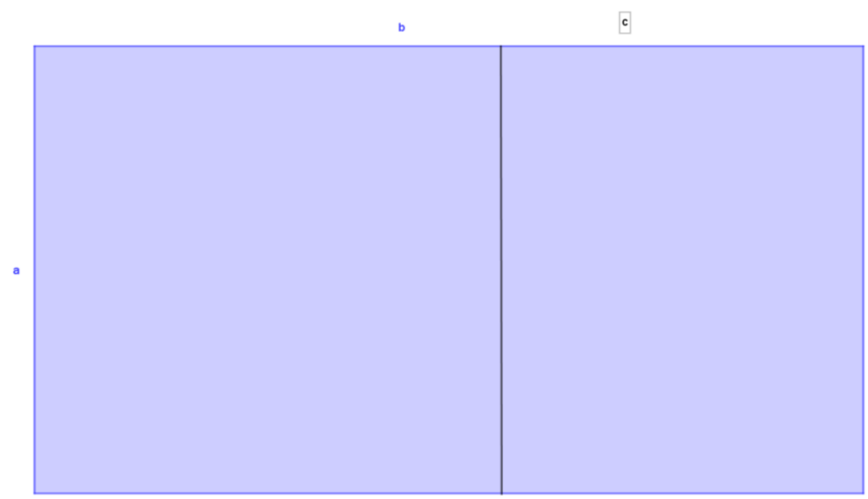
$$x*x*x = \underbrace{x^2+x^2+\cdots+x^2}_{x\,veces} = x^3$$

En estas dos operaciones se siguen manteniendo las propiedades de la adición y el producto de los reales (Martín, et al., 1996).

De esta forma se puede empezar a ver el caso de la propiedad distributiva, además el enfoque, es que se vea la estrecha relación que posee con la geometría dado que, aunque la forma simbólica lo resuelve más fácil, la materia prima de la cartilla es también explorar la parte geométrica, teniendo en cuenta que Sánchez (2010) al citar el Libro II de Euclides afirma que:

Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos obtenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores. (p. 267). Como se evidencia en la Figura 2

Figura 2. Distribución del producto.



Así, es más sencillo comprobar que

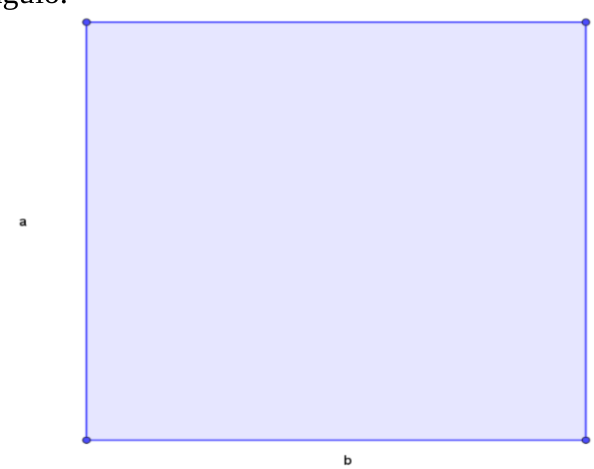
$$a(b + c) = ab + ac$$

De esta forma mediante el uso de las 5 propiedades se pueden modificar las expresiones algebraicas, ya sea como método de estudio de las propiedades o para facilitar el proceso de comprensión de un problema mediante estas reglas.

2.2.3 Área

La idea del área como la medida que proporciona una figura geométrica encerrada se ha venido trabajando desde la antigüedad. De esta manera, el concepto de área para superficies planas es el más intuitivo, pues ofrece un lenguaje visual bastante claro para el receptor y por medio de la geometría poder llevarlo a un contexto algebraico proporcionando facilidades a la hora de comunicar la idea, por ejemplo, si se desea obtener el espacio que ocupa una forma geométrica como un terreno y el cual es parecido a un cuadrado (Sánchez, 2010). Figura 3.

Figura 3. Área del rectángulo.



Se debe resaltar el hecho que esto no es sino la representación del objeto de estudio, en este caso el terreno, pues primero normalmente se tiene una vista en 3 dimensiones, y segundo, en este caso se está dando a entender que se desconocen las medidas del terreno, ahora bien, si se desea saber cuánto espacio está ocupando el objeto es fácil denotar esta medida por medio de la expresión algebraica (Vergel y Rojas, 2018).

$$a * b$$

Dando valores numéricos a las variables en este caso, es posible encontrar el área de la región, así mediante el lenguaje visual nos proporciona un modelo específico para encontrar el área, el lenguaje algebraico nos permite generalizar situaciones o problemas cotidianos, como se puede ver más adelante (Vergel y Rojas, 2018, p. 111).

2.2.4 Productos notables

Cuando se tienen expresiones algebraicas las cuales se pueden factorizar por simple expresión, estas están relacionadas estrechamente con los casos de factorización (dado que no son más sino el resultado de estudiar estos temas de manera constante volviéndolo así una operación mecánica).

Se plantean así, ejemplos de multiplicación entre binomios.

Multiplicación de dos binomios: Tómese los dos binomios $x + 3$, $x + 1$, si se desease multiplicar estos dos elementos desde el álgebra tendríamos las siguientes operaciones:

$$(x + 1)(x + 3) = x^2 + 3x + x + 3$$

Al agruparse esto en términos semejantes se obtendría

$$= x^2 + (1 + 3)x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

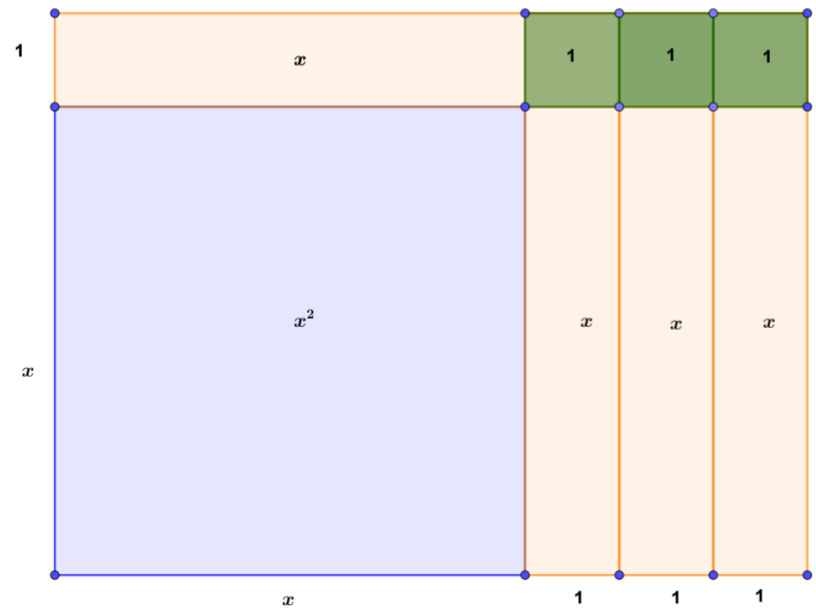
de esta forma, si cambiamos los valores numéricos por letras se obtiene:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Lo cual es una base para la obtención de los productos notables, si se desea ver esto desde la parte geométrica, se obtiene un rectángulo cuya base es un binomio y la altura es el otro.

Figura 4. Forma geométrica del Trinomio.



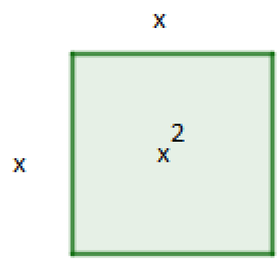
2.2.5 Casos de factorización

Mediante la factorización se busca enunciar una expresión algebraica (polinomio) como expresiones equivalentes, para esto utilizamos diferentes técnicas o métodos dependiendo las características de la expresión algebraica que deseamos factorizar.

2.2.6.1 Factor común

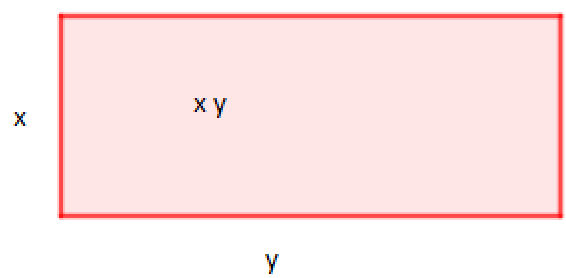
Partiendo del objetivo de la presente investigación, en primer lugar se presenta el factor común desde la representación gráfica. Partiendo de la construcción de un cuadrado de área x^2 como se evidencia en la Figura 5.

Figura 5. Cuadrado de lado x.



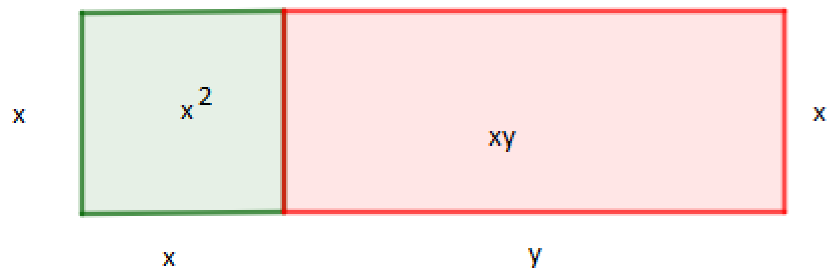
Ahora se construye un rectángulo con área xy, como se observa en la Figura 6.

Figura 6. Retângulo de área xy.



Posteriormente se une la figura sobre su lado común, es decir, el lado x, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Retângulo de área x^2+xy.



Para calcular el área de la nueva figura se observa que su base es $x + y$ y su altura es x, así tenemos que su área es $x(x + y) = x^2 + xy$, por propiedad distributiva y se observa que es la suma de las áreas individuales de cada figura.

En este caso de factorización se aplica la propiedad distributiva, para factorizar por este método debemos identificar los factores de cada término del polinomio, luego se toma el factor que se repite y se aplica la propiedad distributiva de derecha a izquierda.

Ejemplo:

$$3x^2 - 6x = 3 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 3 \cdot x$$

Cada término lo hemos descompuesto en todos sus factores y hemos resaltado en color rojo los términos que se repiten, ahora aplicamos la propiedad distributiva de derecha a izquierda, esto es,

Propiedad distributiva: $a(b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

Para el ejemplo se obtiene

$$3x^2 - 6x = 3 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 3 \cdot x$$

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

En rojo se destaca el factor común del polinomio el cual multiplica a los términos sobrantes, para hacer esto evidente debemos dejar en paréntesis el polinomio con los factores restantes, es decir aquellos que quedaron de color negro, y afuera el factor común lo que detona que multiplica a todos los elemento incluidos en los paréntesis.

Ejemplo:

$$3x^3 + 6x^2 + 12x = 3 \cdot x \cdot x \cdot x \ + \ 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x$$

Cada término ha sido descompuesto en todos sus factores y hemos resaltado en color rojo los términos que se repiten, ahora se aplica la propiedad distributiva de derecha a izquierda, teniendo así

$$3x^3 + 6x^2 + 12x = 3 \cdot x \ (x^2 + 2x + 4)$$

Ejemplo:

$$x^2y^3z^4 + x^4yz^3 = x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \ + x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z$$

Cada término se ha descompuesto en todos sus factores y se resalta en color rojo los términos x que se repiten, en color verde los términos y que se repiten y en color azul los términos z que se repiten, aplicando la propiedad distributiva de derecha a izquierda, obteniendo la expresión:

$$x^2y^3z^4 + x^4yz^3 = x^2y \ z^3 \ (x^2 + y^2z)$$

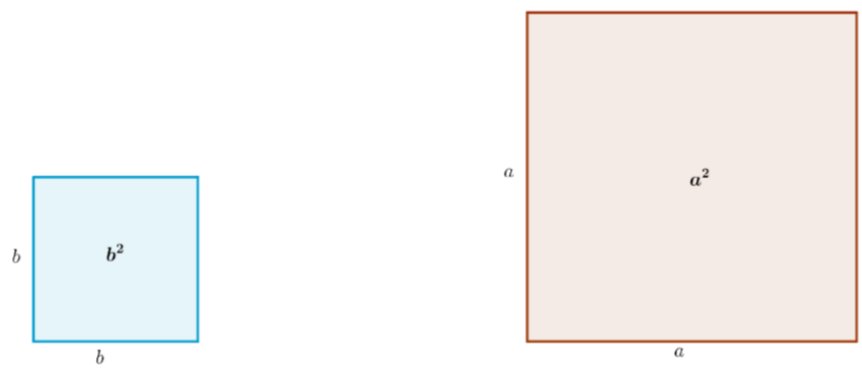
2.2.6.2 Trinomio cuadrado perfecto

En este caso de factorización, todo trinomio cuadrado perfecto es de la forma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

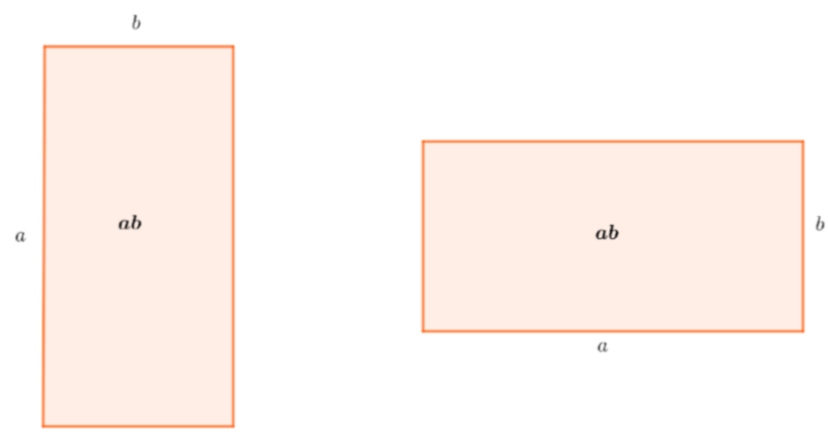
La representación geométrica de $(a+b)^2$ se puede observar así, primero se construyen dos cuadrados de áreas a^2 y b^2 respectivamente, como se evidencia en la Figura 8.

Figura 8. Cuadrados de área a^2 y b^2.



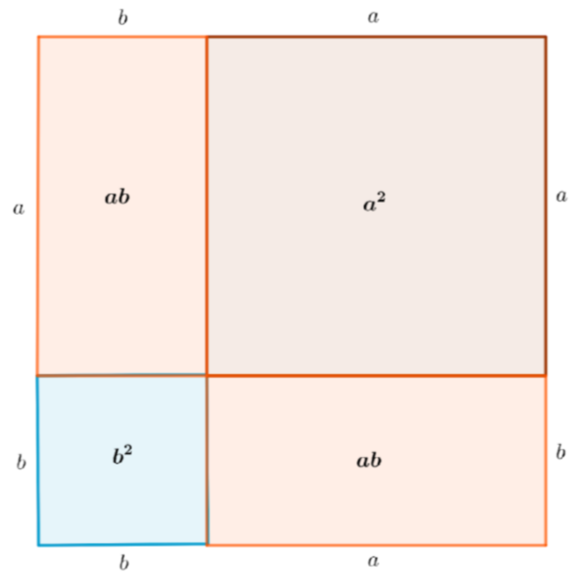
Posteriormente, dos rectángulos de área ab cada uno como se presenta en la Figura 10.

Figura 9. Rectángulos de área ab y ab.



Ahora con estas cuatro figuras se forma un cuadrado como se presenta en la Figura 10.

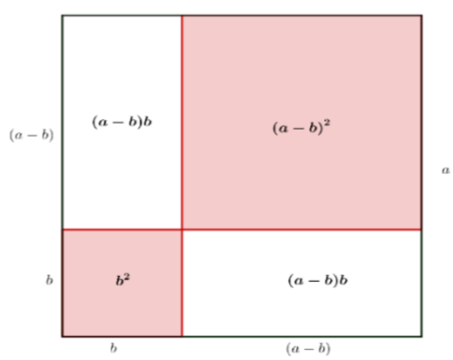
Figura 10. Áreas unidas $a^2, b^2, ab\ y\ ab$.



Posteriormente se calcula el área de esa nueva figura y observamos que sus lados miden $(a + b)$, así su área está dada por $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$ la cual es igual a la suma del área de cada una de figuras de lo conforma.

Por otro lado, la expresión $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ también es un trinomio cuadrado perfecto cuya presentación geométrica se muestra en la Figura 12.

Figura 12. Relaciones geométricas.



Luego la suma de todas las áreas que están dentro del cuadrado negro debe ser igual al área a^2, en efecto,

$$a^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b) = (a-b)^2 + b^2 + 2ab - 2b^2$$

Así, se obtiene:

$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2 \quad \Longrightarrow \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

De lo anterior resulta que un trinomio es cuadrado perfecto siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

- El trinomio puede ser ordenado en potencias descendentes de una variable.
- Dos de los términos son cuadrados perfectos, pero no son semejantes.
- El segundo término es el doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos.
- El primer y tercer término deben de tener el mismo signo.

Ejemplo: Demuestre que la siguiente expresión que es un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 10x + 25$$

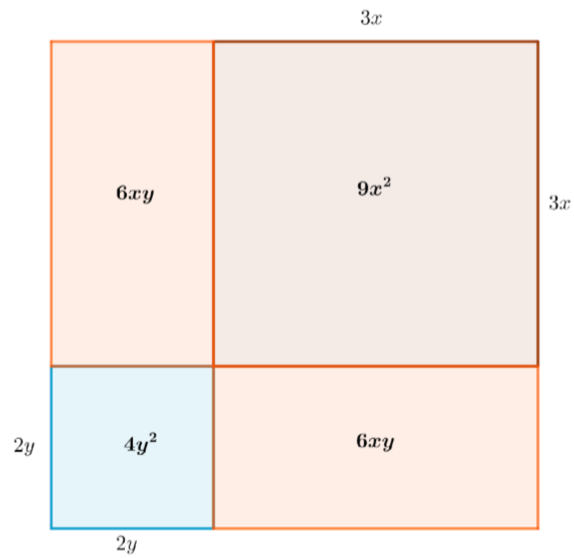
Se observa que la expresión está ordenada en potencias decrecientes de la variable x. El primer y tercer término son cuadrados perfectos que tienen el mismo signo ya que $x^2 = (x)^2$ y $25 = 5^2$. Finalmente, para el segundo término tenemos que es el doble de la multiplicación de la raíz cuadrada de los otros términos, esto es, $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$.

Así, la factorización de la siguiente expresión es:

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

Ejemplo: A partir de la figura halle el trinomio cuadrado perfecto.

Figura 11. Relaciones geométricas aplicadas.



El área del cuadrado la suma de las áreas que lo conforman, es decir,

$$9x^2 + 6xy + 4y^2 + 6xy = 9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x + 2y)^2$$

Ejemplo: Demuestre que la siguiente expresión que es un trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 - 6x + 9$$

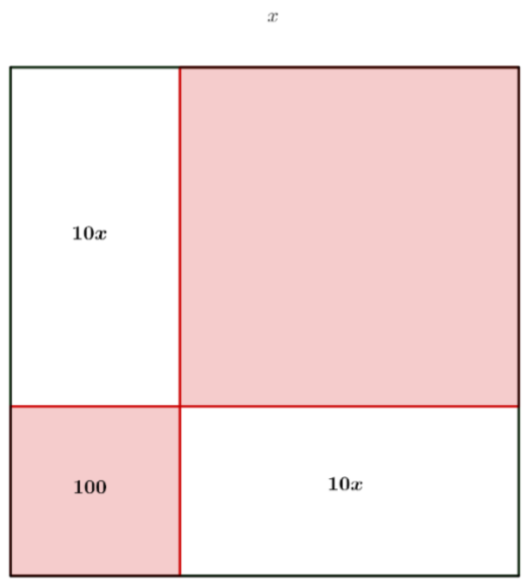
Se observa que la expresión está ordenada en potencias decrecientes de la variable x. El primer y tercer término son cuadrados perfectos que tienen el mismo signo ya que $x^2 = (x)^2$ y $9 = 3^2$. Finalmente, para el segundo término se obtiene el doble de la multiplicación de la raíz cuadrada de los otros términos, esto es, $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$.

Así, la factorización de la siguiente expresión es:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Ejemplo: A partir de la figura halle el trinomio cuadrado perfecto.

Figura 12. Relaciones geométricas aplicadas ejercicio propuesto.



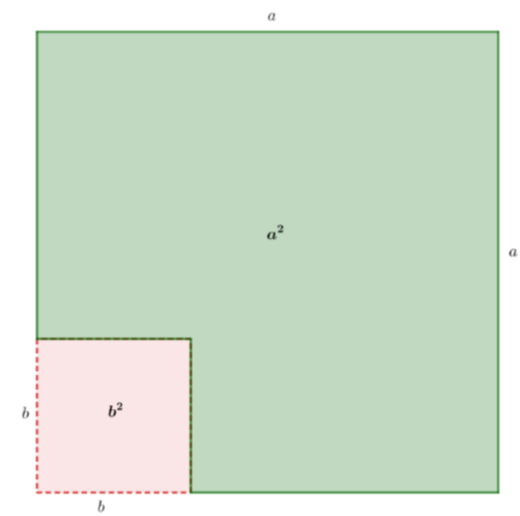
De esta manera, se observa que $100 = 10^2$, el área del cuadrado negro es x^2 y de cada rectángulo es $10x$, luego el trinomio cuadrado perfecto es el siguiente:

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \cdot 10x + 10^2 = (x - 10)^2$$

2.2.6.3 Diferencia de cuadrados

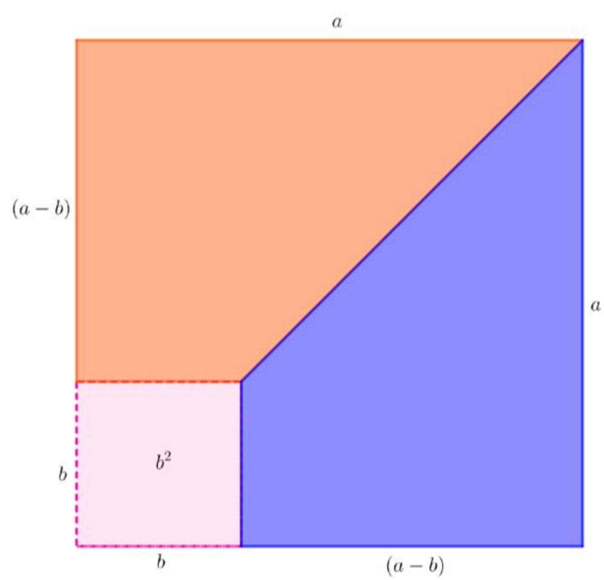
Como su nombre lo indica se trata de una resta de dos cuadrados de diferente tamaño y geométricamente de muestra así:

Figura 13. Relaciones geométricas diferencia de cuadrados



Para hallar el área del polígono verde se realiza la acción de que se presenta en la Figura 15.

Figura 14. Relaciones geométricas diferencia de cuadrados aplicada.



Como el área del cuadrado más grande es a^2 entonces debe ser igual a la suma de las áreas que lo conforman, es decir, el área de cuadrado b y los dos trapecios rectángulos. Así

$$a^2 = b^2 + 2 \cdot \frac{(a+b)}{2}(a-b)$$

$$a^2 = b^2 + (a+b)(a-b)$$

Y su forma algebraica es $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, en este caso de factorización es importante conocer las raíces de los términos $a\ y\ b$.

Ejemplo: Factorice la expresión

$$x^2 - 49$$

Se observa que $x^2 = (x)^2$ y $49 = 7^2$, luego,

$$x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$$

Ejemplo: Factorice la expresión

$$x^2 - 2$$

Se observa que $x^2 = (x)^2$ y $2 = \sqrt{2}^2$, luego,

$$x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Ejemplo: Factorice la expresión

$$x^2 - \frac{3}{4}$$

Se observa que $x^2 = (x)^2$ y

$$\frac{3}{4} = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

luego,

$$x^2 - \frac{3}{4} = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2.2.6.4 Trinomio de la forma: $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

Para factorizar un trinomio como el producto de dos binomios con un término común:

Se extrae la raíz cuadrada del primer término del trinomio la cual es x, este será el término común de los binomios.

Se buscan dos números tales que su suma sea b y su producto sea c, es decir que existen p y q tales que $p + q = b$ y $p \cdot q = c$

La visualización geométrica de este caso de factorización es construir ya sea un cuadrado o un rectángulo como se observa en la Figura 17.

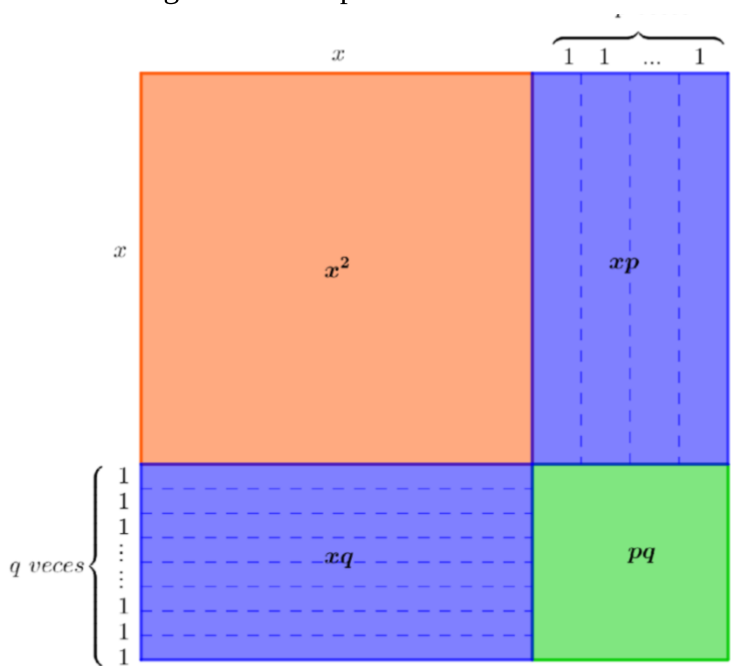
El coeficiente x^2 del término es 1, esto indica que es solo un sólo cuadrado

naranja de área x^2.

El coeficiente b indica el número de rectángulos azules de lados 1 y x.

El coeficiente c indica el número de cuadrados de área 1

Figura 15. Relaciones geométricas aplicadas al trinomio de la forma x^2+bx+c.



Así, el área de esta figura es $(x+p)(x+q)$ la cual es igual a la suma de las áreas que lo conforman,

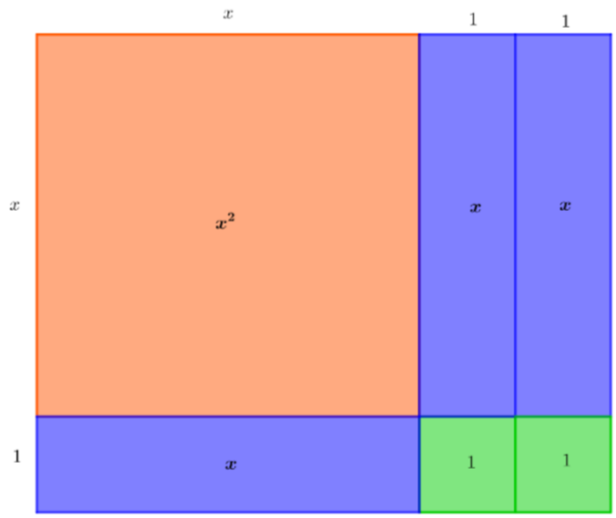
$$x^2 + \ xp + xq + pq = x^2 + (p+q)x + pq = x^2 + bx + c$$

Por tanto, $\quad x^2 + bx + c = (x+p)(x+q)$

Ejemplo: Grafique de manera geométrica el trinomio $x^2 + 3x + 2$

Se construye un cuadrado de área x^2, tres rectángulos de área x y dos cuadrados de área 1, teniendo así:

Figura 16. Relaciones geométricas aplicando el trinomio de la forma x^2+bx+c.



Se observa que el área de la nueva figura es $(x+2)(x+1) = x^2+3x+2$

Ejemplo: Factorizar el trinomio x^2+4x+3

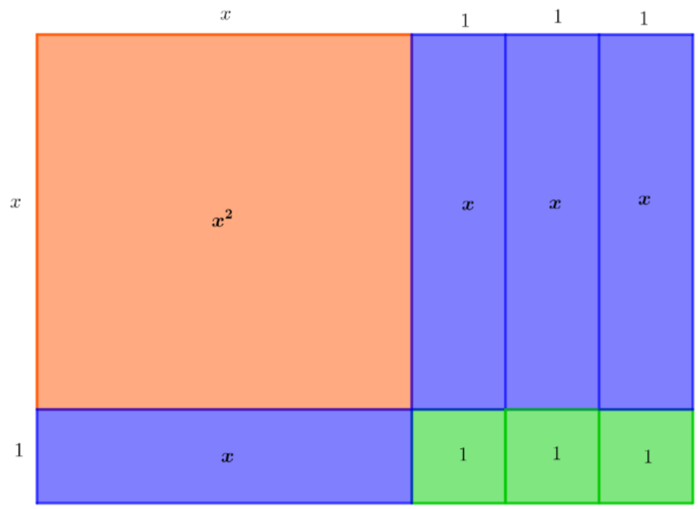
Primero se deben buscar números p y q tales que $p+q=4$ y $p \cdot q = 3$

Como 3 es un número primo, los únicos números que cumplen que $p \cdot q = 3$ son 3 y 1, además $1+3=4$ por tanto,

$$x^2+4x+3 = (x+p)(x+q) = (x+3)(x+1)$$

La vista geométrica de este ejemplo consta de un cuadrado de área x^2, cuatro rectángulos de área x y tres cuadrados de área 1, en efecto se obtiene la Figura 18.

Figura 17. Relaciones geométricas solucionando un trinomio de la forma $x^2 + bx$ +c.



Ejemplo: Factorizar el trinomio $x^2 + x - 6$

Primero se deben buscar números $p\ y\ q$ tales que $p + q = 1$ y $p \cdot q = -6$

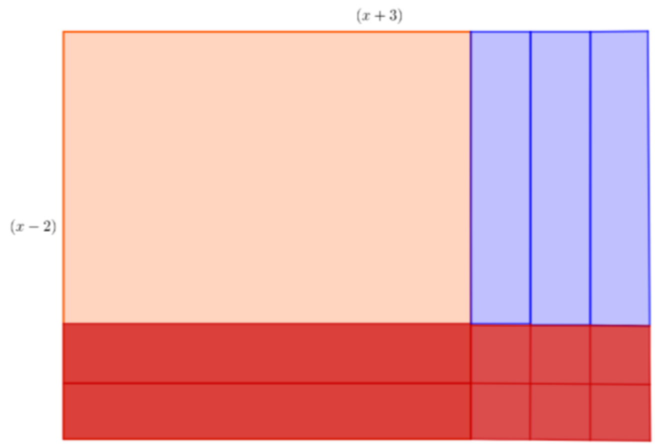
Los números que cumplen que $p \cdot q = -6$ son 6 y -1 además $-3\ y\ 2$. Por un lado,

$6 - 1 = 5$ luego no sirven. Por el otro lado, $3 - 2 = 1$.

Así, $x^2 + x - 6 = (x + p)(x + q) = (x - 2)(x + 3)$

En su representación geométrica se observa que c es negativo y se indica con el área roja, como se evidencia en la Figura 19.

Figura 18. Relaciones geométricas $x^2 + bx$ +c, con negativos.



2.2.6.5Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Para que la factorización de $ax^2 + bx + c$ sea factible, deben existir d, e, f, g tales que:

$$a = de \quad , \quad b = fd + ge \quad , \quad c = fg$$

Luego, $ax^2 + bx + c = dex^2 + fgx + gex + fg = dx(ex + f) + g(ex + f)$

Así, $ax^2 + bx + c = (dx + g)(ex + f)$

Para hallar d, e, f, g es necesario descomponer a a y c en factores primos.

Ejemplo: Factorice la expresión $2x^2 + 5x + 2$

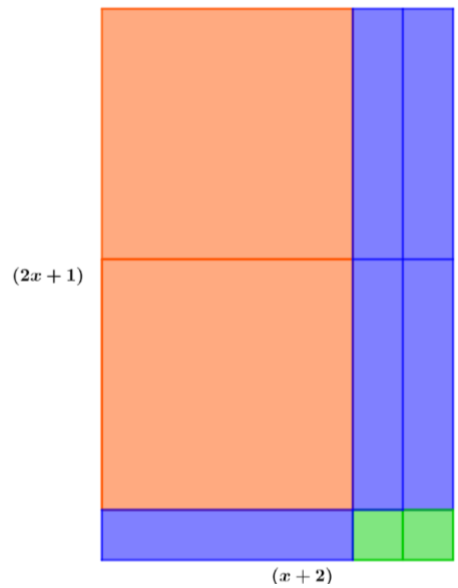
Como $a = 2$ es un número primo, entonces $d = 2$ y $e = 1$, de igual forma se obtiene que $f = 2$ y $g = 1$.

Entonces,

$$2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + 1x + 2 = 2x(x + 2) + 1(x + 2)$$

Así, $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$, cuya visualización geométrica se observa en la Figura 20.

Figura 19. Relaciones geométricas solucionando un trinomio de la forma $ax^2 + bx$ +c.



Ejemplo: Factorice la expresión $3x^2 + 7x + 2$

Como a y c son números primos se conforman las parejas 3, 1 y 2, 1. Así, la única posibilidad para que la suma sea 7 y el producto 2 es $7 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ y $2 = 2 \cdot 1$

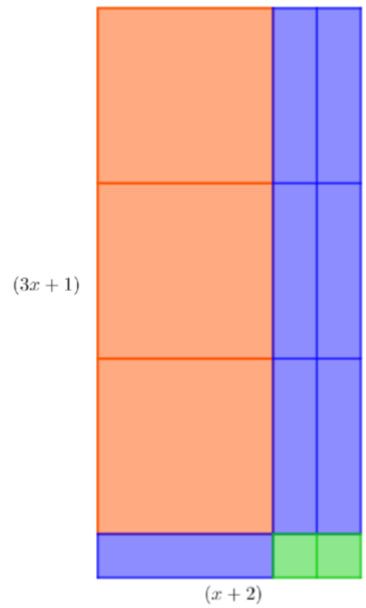
Entonces se obtiene

$$3x^2 + 7x + 2 = 3 \cdot 1x^2 + 3 \cdot 2x + 1 \cdot 1x + 2 = 3x(x + 2) + (x + 2)$$

$$\text{Así,} \quad 3x^2 + 7x + 2 = (3x + 1)(x + 2)$$

La vista geométrica de lo anterior se puede observar en la Figura 21.

Figura 20. Relaciones geométricas solucionando un trinomio de la forma (ax)^2+bx+c.



Ejemplo: Factorice la siguiente expresión $2x^2 - 3x + 1$

Como a es un primo y $c = 1$ se conforman las parejas $2, -1$ y 1,1. Así, la única posibilidad para que la suma sea -3 y el producto 1 es $-3 = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)$ y

$1 = (-1) \cdot (-1)$. Entonces tenemos lo siguiente

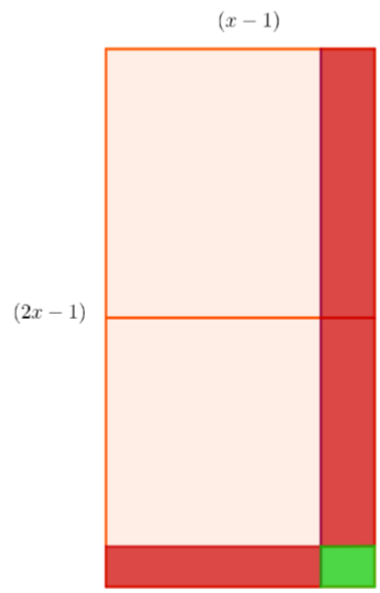
$$2x^2 - 3x + 1 = 2 \cdot 1x^2 + 2 \cdot (-1)x + 1 \cdot (-1)x + 1 = 2x(x-1) + (-x+1)$$

$$= 2x(x-1) - (x-1)$$

Así, $2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$

En la visualización geométrica se observa que las áreas rojas representan el coeficiente negativo, así como se observa en la Figura 22.

Figura 21. Relaciones geométricas solucionando un trinomio de la forma $x^2 + bx$ +c, con negativos.

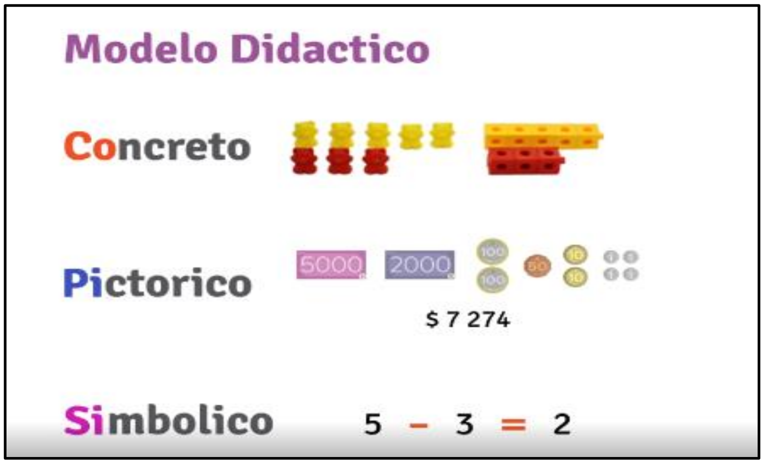


2.2.6 Modelo didáctico COPISI

La presente investigación se desarrolló desde la aplicación del modelo didáctico COPISI que de acuerdo con Calderón (2014) integra elementos de la matemática a nivel concreto, pictórico y simbólico que ha sido propuesto desde la teoría del aprendizaje por descubrimiento basada en los fundamentos del constructivismo y autoestructurante en los que se plantea un proceso de aprendizaje que parte de la manipulación de materiales concretos pasa a la estructura icónica es decir lo pictórico y culmina con lo simbólico desarrollando el pensamiento abstracto.

De acuerdo con lo expuesto, en la Figura 23 se presenta el ejemplo de la manera en la que se aborda el modelo didáctico COPISI según la ejemplificación para la sustracción desde lo concreto, lo pictórico y lo simbólico.

Figura 22. Ejemplo del modelo didáctico COPISI.



Fuente: Calderón (2014).

De acuerdo con Alonso, et al., (2013), la teoría del aprendizaje por descubrimiento planteada por Jerome Bruner se retoma desde la psicología educativa, la cual busca optimizar todos los procesos de enseñanza-aprendizaje a partir del fortalecimiento de las diferentes funciones cognitivas superiores, como lo son el pensamiento crítico y la metacognición. Por lo tanto, su planteamiento tiene una aplicación multidisciplinar desde una mirada holística en la factorización geométrica como agente constructor donde la geometría es el canal de comunicación del modelo actuando como herramienta didáctica

En este contexto, el desarrollo de guías didácticas busca llevar a cabo acciones pedagógicas amenas al abordar la factorización desdé la geometría como herramienta de apoyo en el proceso de aprendizaje del álgebra, teniendo en cuenta las tres dimensiones que lo componen a saber la concreta, pictórica y simbólica.

2.2.7 Dimensiones del modelo didáctico COPISI

El modelo didáctico COPISI aborda tres dimensiones a saber la concreta, la pictórica y la simbólica que se presentan a continuación.

2.2.7.1 *Dimensión Concreta*

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la factorización, Ballén (2012) plantea la relevancia de abordar las acciones pedagógicas desde la utilización de material concreto como medio facilitador en la construcción de los elementos geométricos, aritméticos y algebraicos necesarios para abordar esta temática tan importante para el desarrollo del pensamiento y la estructura cognitiva.

Lo anterior, se relaciona de manera directa con el modelo didáctico COPISI ya que se considera fundamental el uso de material didáctico concreto puesto que mediante este es posible ayudar a los estudiantes a comprender conceptos de factorización por medio de la geometría de manera llamativa que busque la interacción de los estudiantes, dándoles seguridad y confianza en su proceso de aprendizaje. El modelo COPISI se usa de manera concreta cuando usan las fichas del rompecabezas algebraicos, desde la parte pictórica cuando hace gráficos para representar las expresiones algebraicas propuesta y la parte simbólica donde se determina que la factorización es las dimensiones de la figura encontrada y argumenta el polinomio simplificado.

2.2.7.2 Dimensión Pictórica

La parte gráfica o pictórica contribuye significativamente al desarrollo del hacer a los estudiantes que empiezan a factorizar desde el álgebra, con los retos que se encuentran en las guías didácticas, el papel de las representaciones geométricas facilita el proceso de simplificar expresiones algebraicas, dimensión que toma gran valor en la apropiación de conceptos para apropiarse de los nuevos conocimientos (Alonso, 2015). En este contexto, la factorización se hace más amigable desde la representación geométrica de sus relaciones, conllevando a la comprensión del concepto de factorización a partir de su relación con la geometría.

2.2.7.3 Dimensión simbólica

Las letras como *incógnitas específicas* obtienen un significado desconocido, pero específico, es decir, las representaciones geométricas toman un valor diferente y el número su relación final o expresión algebraica de lo que representa una construcción geométrica. De esta manera, uno de los principales problemas en la comprensión del lenguaje algebraico como único lenguaje sin apoyarse en otros tipos de lenguajes que influyen en la interiorización de este por parte de los estudiantes (Acuña et al., 2017).

De esta manera, al abordar el lenguaje algebraico en determinada situación se está utilizando el lenguaje natural, geométrico o aritmético, lo cual va a permitir que esta dimensión tome fuerza para que el estudiante de paso a la interpretación de las expresiones algebraicas en diferentes contextos.

De esta manera las dimensiones del modelo COPISI, permiten que los procesos de factorización sean una herramienta que permita modelar y organizar interpretando esta relación de simplificación de expresiones como procesos de algebrización, así lo reconoce Valoyes (2013) quien señala que las tareas propuestas se resuelvan por estas relaciones en distintos ámbitos o escenarios, es decir, aritméticos, geométricos que se hacen difíciles para los estudiantes sin estas relaciones de las dimensiones.

Lo anterior, permite inferir que la modelización permite estudiar relaciones entre magnitudes geométricas, físicas y comerciales, entre otras dando paso a la modelización funcional posibilitando que la relación entre dimensiones del modelo didáctico COPISI sea de gran valor en el aprendizaje de la factorización algebraica.

2.2.8.4 El papel del docente

Se debe interpretar la factorización a partir de la geometría; por ello, el docente debe convertirse en un facilitador entre los conocimientos y los estudiantes a partir de actividades planificadas y organizadas para que se refleje en una estrategia de enseñanza aprendizaje, dando paso a la comprensión del enfoque funcional de lo aprendido, estableciendo relaciones entre lo que van incorporando en la nueva información y las habilidades matemáticas que van desarrollando por medio de las dimensiones que hila al modelo didáctico COPISI (Ballén, 2012).

De esta manera, el docente facilitador debe plantear sus acciones pedagógicas generando retos cognitivos para que los alumnos construyan y desarrollen competencias que propicien las guías de trabajo propuestas, reconocer el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, considerar los errores como una oportunidad para aprender y mejorar, generar la autoevaluación del desempeño, para invitarlos a una mirada reflexiva que el modelo COPISI reconoce como el espejo académico y buscar mejoramiento en el aprendizaje de la factorización algebraica por las dimensiones propuestas (Colbert, 2010).

2.2.7.5 Papel del estudiante

A medida que los estudiantes van resolviendo las guías de acuerdo con los problemas propuestos en cada sesión ganan confianza frente al uso de las matemáticas, desarrollan habilidades de comunicación entre ellos lo cual permite fortalecer el trabajo colaborativo de la misma manera que generan autoconfianza en su proceso de aprendizaje bajo el modelo COPISI (Ballén, 2012).

Lo anterior, se logra si los estudiantes participan activamente en los procesos de enseñanza aprendizaje, ya que es el protagonista de la acción de cada dimensión, para lograr efectividad en su aprendizaje significativo, desarrollan destrezas a través del trabajo en equipo, resolución de problemas, toma de decisiones, socialización de respuestas en puestas en común y los roles que ejerce en el equipo de trabajo y evalúan su nivel de apropiación de los nuevos conocimientos y los pone a prueba en la solución de los retos propuestos en cada guía.

2.2.8 El aprendizaje significativo

De acuerdo con Gómez (2017) Ausubel fue el principal exponente del aprendizaje significativo; se desempeñó como pedagogo y psicólogo; su método se basa en partir de aquellos conocimientos e ideas previas que trae el estudiante para la construcción del nuevo conocimiento y con base en estas el docente debe realizar propuestas pedagógicas, metodológicas o didácticas que permitan la adquisición de nuevos contenidos que serán organizados en las estructuras conceptuales de manera jerárquica y organizada de acuerdo con el nivel de desarrollo en el que se encuentren los estudiantes.

Esta teoría de aprendizaje deja de lado el enfoque en el que la transmisión de datos y temas se lleva a cabo de manera unilateral en el que el protagonista en los procesos de enseñanza y aprendizaje son los estudiantes y no el profesor. “Para Ausubel existe una jerarquía conceptual en la cual la información más específica es ligada a proposiciones más generales; afirmando que el aprendizaje mecánico carece de la interacción entre los conceptos relevantes existentes y los conceptos subsumidores específicos” (Gómez, 2017, p.13).

2.2.9 Evaluación

La evaluación como oportunidad de mejora y manera para validar los aprendizajes. Desde esta mirada la evaluación toma un valor agregado como eje fundamental del proceso en el que se incorpora como elemento transversal las guías didácticas antes y durante el proceso de aprendizaje (Briceño, 2018).

El estudiante está en la capacidad de comunicar lo aprendido y resolver los problemas o retos en las guías didácticas bajo el modelo COPISI siendo así el termómetro de eficiencia que muestra el estado real de aprendizaje de los estudiantes. El currículo, la pedagogía y la evaluación, el docente valora el paso por cada dimensión de las guías propuestas como espacios propicios para analizar y evaluar los resultados como una oportunidad de mejoramiento continuo.

3. Aspectos metodológicos

3.1 Paradigma y enfoque de investigación

Este trabajo de grado se basó en un paradigma interpretativo, que tiene por objetivo la comprensión de los fenómenos, donde la relación entre el investigador y lo conocido son inseparables. Además, la investigación está influida por el investigador, la elección del paradigma, de la teoría para el análisis e interpretación de los resultados y los valores que forman parte del contexto.

En coherencia con lo anterior, se asume un enfoque cualitativo definido por Barrantes (2014) como “un proceso que recolecta analiza y vierte datos cualitativos, en un mismo estudio” (p. 100), lo que permite comprender la realidad que se estudia de manera integral. Este enfoque se usó para fortalecer el análisis de los resultados o hallazgos encontrados después de la implementación de cada guía de acuerdo con los parámetros del modelo didáctico COPISI.

3.2 Población objeto de estudio

Los sujetos de estudio fueron cuarenta y dos estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo, calendario A, ubicado en la localidad de Bosa. El curso está integrado por 20 niñas, y 22 niños con edades comprendidas entre los 13 años a los 15 años.

3.3 Descripción del colegio

El Colegio está localizado en el sur de Bogotá, pertenece a la séptima localidad, se ubica en el barrio Bosa la estación es de naturaleza privada. La institución trabaja la modalidad empresarial de emprendimiento y convenio con el SENA desde el componente de articulación.

3.4 Estructura de las guías

Se diseñó una secuencia didáctica que permitió concretar el material implementado. Esta cuenta con cinco guías de aprendizaje y dos objetos evaluativos; una de presaberes y la prueba final (Anexo A), evaluaciones que se realizaron con el fin de medir el desempeño de los estudiantes antes y después de la implementación de la secuencia y evaluar su efectividad respecto a los procesos de aprendizaje de la factorización en el grado octavo de la institución educativa en la que se desarrolló la investigación.

3.4.1 Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica se realizó con el propósito de llevar a cabo una caracterización de los estudiantes frente a sus conocimientos iniciales respecto a la factorización necesarios para iniciar el proceso de implementación de la secuencia didáctica.

3.4.2 Guías de desarrollo

Se desarrollaron cinco guías, para ser trabajadas desde tres focos de acción. Cada una de ellas aborda las dimensiones concreta, pictórica y simbólica, a través de una serie de retos que trabajan en cada una de ellas, estas guías están diseñadas con el fin de llamar la atención del estudiante, motivar y hacerlo receptivo a los contenidos a abordar, en ellas se plantea una serie de ejercicios que fortalezcan los conceptos de factorización desde el concepto de perímetro y área, la factorización algebraica desde la geometría como herramienta didáctica (Barrantes, 2014).

Estas guías se evaluaron con cuatro ítems: bajo, básico, alto, superior apoyada por el SIEE del colegio estipulado en el PEI de la institución educativa de acuerdo con la escala de sistematización establecida como se muestra a continuación.

- **Rango 9.0 a 10.0. SUPERIOR:** El estudiante obtendrá esta valoración al cumplir de manera competente y en su totalidad con los desempeños propuestos para cada asignatura.
- **Rango 7.5 a 8.9. ALTO:** El estudiante obtendrá esta valoración cuando cumpla con los desempeños propuestos para la asignatura de manera satisfactoria.
- **Rango 6.0 a 7.4. BÁSICO:** El estudiante obtendrá esta valoración cuando cumpla con los desempeños elementales propuestos para la asignatura con algunas limitaciones en los requerimientos.
- **Rango 1.0 a 5.9. BAJO:** El estudiante obtendrá esta valoración cuando no cumpla con los desempeños mínimos propuestos en la asignatura.

3.4.3 Prueba Final

La prueba final se diseñó con el fin de evaluar el concepto y aplicación de la factorización algebraica desde la geometría a través de las tres dimensiones trabajadas durante la secuencia didáctica siendo estas lo concreto, pictórico y simbólico con la intención de revisar el dominio adquirido del desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje de los casos de factorización trabajados en las guías didácticas.

La evaluación se retoma como un espacio propicio para el aprendizaje al abordar las dificultades presentadas durante dicho proceso, convirtiéndose así en una oportunidad para el mejoramiento, modelo COPISI plantea la evaluación como un termómetro de eficiencias que se refiere al estado real de apropiación de los estudiantes dónde se enlazan el currículo , la pedagogía y la evaluación misma donde el docente evalúa el paso que hace el estudiante por cada dimensión buscando un mejoramiento y afianzamiento de los aprendizajes adquiridos en el desarrollo de las guías propuestas.

En este contexto, la prueba final actúa como el termómetro de eficiencia permitiendo observar y medir el nivel de apropiación de los temas inherentes a la factorización alcanzado por los estudiantes bajo el modelo COPISI a partir del desarrollo de las guías trabajadas enlazando el currículo la pedagogía y la evaluación misma como oportunidad de mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.5 Secuencia didáctica

A continuación, en la Tabla 1 se presenta la estructura general de la secuencia didáctica en la que se exponen el número de la guía, temática que se aborda, objetivo, dimensiones aplicadas y fecha de implementación.

Tabla 1. Secuencia didáctica.

Número de guía	**Nombre**	**Objetivo**	**Dimensión aplicada**	**Fecha de aplicación**
1	Prueba diagnóstica	Determinar los conocimientos previos de algunos elementos básicos de geometría, estudiados en grados anteriores de los alumnos de octavo grado del Colegio Andrés Rosillo.	Concreto Pictórico Simbólico	1 septiembre

2	Factor común	Organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	Concreto Pictórico Simbólico	12 septiembre
3	Diferencia de cuadrados	Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	Concreto Pictórico Simbólico	15 septiembre
4	Trinomio cuadrado perfecto	Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	Concreto Pictórico Simbólico	22 septiembre
5	Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.	Concreto Pictórico Simbólico	23 septiembre
6	Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.	Concreto Pictórico Simbólico	29 septiembre
7	Evaluación final	Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, de la realidad y la semirealidad y, el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.	Concreto Pictórico Simbólico	30 septiembre

Fuente: elaboración propia.

3.6 Organización de las guías

A continuación, se presenta la organización de las guías que conforman la unidad didáctica diseñada para el aprendizaje de los casos de factorización de acuerdo con los parámetros del modelo didáctico COPISI.

3.6.1 Título y objetivo

Todas las guías de la secuencia didáctica inician con una hoja de presentación en la que se relaciona el título y el objetivo a trabajar, los títulos de cada una de las respectivas guías ponen en contexto al estudiante de lo que se trabajara durante las sesiones y una frase motivadora dirigida a los estudiantes frente al aprendizaje del tema a trabajar, la Figura 24 muestra un ejemplo de ello.

Figura 23. Encabezado de las guías.

GRADO Octavo	ASIGNATURA: Matemáticas	GUIA 1	PERIODO: 3

Estudiante____Curso________________Fecha__________

¡BIENVENIDOS, APRENDEREMOS MUCHO ACERCA DEL ÁLGEBRA!

"El álgebra encierra unos de los secretos más importantes del éxito en la educación superior. Cree en ella aun cuando no ves de inmediato su aplicación a la vida. Ella con el tiempo empezará a mostrar sus bondades"

Fuente: elaboración propia.

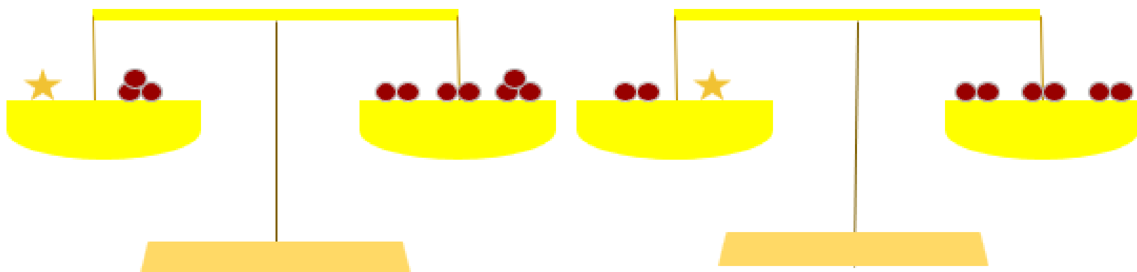
3.6.2 Actividades de las guías

Posterior al título y objetivo, encontramos la gimnasia cerebral en la que se realiza una breve descripción del problema a solucionar y un recuadro de trabajo azul en cada reto propuesto, espacio que permite generar una activación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes por medio del modelo didáctico COPISI, a través de unos retos formulados de tal manera que se puede encontrar su solución utilizando diferentes estrategias matemáticas como se puede observar en la Figura 25.

Figura 24. Momento de gimnasia cerebral.

GIMNASIA CEREBRAL

1. Si una estrella representada como x y cada esfera equivale a 1. ¿Cuál es la ecuación que representa la balanza en equilibrio?, y ¿Cuál es el valor de la incógnita, para que la balanza esté en equilibrio? Representa en el punto de apoyo de la balanza tu propuesta.



2. Para encerrar unos terrenos, Said desea utilizar la misma cantidad de cuerda en los dos terrenos. El valor de x para que esto sea posible es lo que debes encontrar, en la tabla se muestran las medidas de cada terreno en metros.

Dimensiones	Terreno 1	Terreno 2
Largo	$X + 1$	$2x$
Ancho	$2x$	2

Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, el segundo momento de la estructura de las guías se denomina *"El tesoro del saber",* en esta se lleva a cabo una contextualización teórica de los temas a desarrollar, la nueva información que se va a conceptualizar y cómo se va a trabajar los distintos casos de factorización. En la Figura 26, se puede evidenciar un ejemplo de este elemento.

Figura 25. Ejemplo del momento "El tesoro del Saber"

El TESORO DEL SABER

¿Qué es factorizar? La factorización es una técnica que consiste en la descomposición en factores de una expresión algebraica en forma de producto.

Para hallar el producto de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos.

$$(a+b)(c+d) = a(c+d)b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Fuente: elaboración propia.

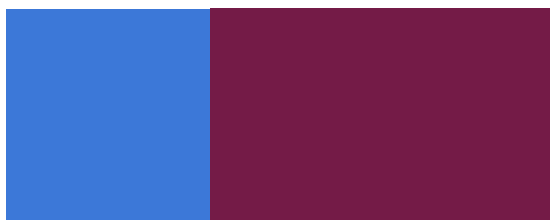
Posteriormente, se encuentra el momento de la guía denominado *"Solucionando el reto",* en este espacio se apropia la nueva información, se amplía la percepción, se permite exponer los nuevos conocimientos adquiridos y relacionan los conocimientos anteriores con el fin de evaluar la aprehensión y dominio sobré los casos de factorización que se ha aprendido y de igual manera la acción solucionando las situaciones propuestas en las guías. Lo anterior, se puede evidenciar en la Figura 27.

Figura 26. Solucionando el reto.

SOLUCIONANDO EL RETO.

Es importante que relaciones y simplifiques las dimensiones de cada figura, de manera que se faciliten los cálculos por medio de los términos semejantes y reducir lo que se pueda por factor común.

3. Ten en cuenta el cuadrado de color azul y el rectángulo de color Vinotinto que se te muestra en la figura como un solo polígono unidos por una de sus caras. Determina el área y perímetro de la figura, que es un cuadrado azul de lado m, más un rectángulo vinotinto de base n y altura m. Las dimensiones están en metros. Utiliza el espacio en blanco para trabajar.



Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, se relaciona el momento de la guía denominado *"Aplico mis conocimientos en trabajo colaborativo",* en el que prevalece el diálogo constructivo, la participación en la solución de los retos a los que se enfrentan, donde ven la aplicación y la síntesis, logrando procesos mentales más complejos mediante los procesos didácticos matemáticos a partir de la experiencia desde elementos básicos que suelen ser parte del contexto y desarrollo de los estudiantes, aspecto que se puede observar en la Figura 28.

Figura 27. Aplico mis conocmientos en el trabajo colaborativo.

APLICO MIS CONOCIMIENTOS EN TRABAJO COLABORATIVO.

4. Hola soy Willy el robot del álgebra geométrica, necesito de tu ayuda para solucionar una situación.

Una empresa de finca raíz, donde de un lote que compran lo dividen en lotes más pequeños, para lograr mejores resultados en el negocio de la finca raíz, las medidas están en metros.

Un lote general se subdivide en lotes más pequeños o fraccionados, lo que se conoce como lotear. Los dueños del lote para hacer mayor la ganancia de arrendamiento y/o venta usan la estrategia de lotear, lo que asegura mayores ingresos.

Un señor de finca raíz está loteando o subdividiendo un terreno de la figura que se te presenta, para lograr tener más ganancia, el lote azul tiene dimensiones $3x$ de base y un alto de y; el lote verde tiene dimensiones de $6x$ de base y una altura de 1; en el rojo, sus dimensiones son de $5m$ de base por un alto de y, mientras el lote amarillo está bajo unas dimensiones de $5m$ de base y un alto de 2.

Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, se encuentra el momento establecido como *"Construyendo saberes",* que pretende generalizar lo aprendido y llevarlo al campo de lo concreto, promover la creatividad y aplicar los conceptos y temáticas aprendiendo nuevas situaciones que requieren diferentes puntos de vista, para lograr ser solucionadas. Así se evidencia en la Figura 29.

Figura 28. Momento Cosntruyendo saberes.

CONSTRUYENDO SABERES

Formar equipos de trabajo con dos compañeros, para resolver los siguientes retos.

5. A continuación, se te muestran dos terrenos uno naranja y uno rojo, en cada uno de ellos en el centro está su área, por medio de esta determina las dimensiones de los dos terrenos, las dimensiones están expresadas en metros.

Determina las dimensiones de cada rectángulo a partir de su área. Para ello usa el espacio del recuadro.

Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, se encuentra el momento *"Manos a la obra",* en el que el estudiante participa y puede ejercer roles de moderador, relator, observador, líder de las propuestas que se construyen para poder solucionar los retos a los que se ven enfrentados. Por otra parte, el maestro observa, informa, orienta y evalúa los avances y propuestas de los estudiantes, hasta llegar a la socialización de esas construcciones que dan solución a los retos propuestos. Figura 30.

Figura 29. Momento manos a la obra.

MANOS A LA OBRA

7. Construir en papel silueta rectángulos de 4 centímetros por 2 centímetros de color rojo rectángulos en color azul de 4 centímetros por 3 centímetros y rectángulos de color amarillo de 4 centímetros por un centímetro. Disponer las piezas o rectángulos de cada color por el lado mayor colocar, en el siguiente orden las piezas una al lado de la otra, la de color rojo al lado de la de color azul y junto a ella la de color amarillo.

   El alto de todas las piezas corresponde a $2x$, el ancho de la primera pieza es de X y el de la que sigue es y y la pieza final el ancho es de 1.

   Construye y pega la figura propuesta en el siguiente recuadro. Determine el perímetro y el área y perímetro de toda la figura y luego encuentre una expresión reducida para éstas.

Fuente: elaboración propia.

3.6.3 Autoevaluación

Es pertinente verificar el logro de los objetivos y comprobar la validez, el interés y la eficacia del proceso de enseñanza-aprendizaje de manera reflexiva el proceso de aprendizaje que propone el COPISI que se reconoce a sí mismo bajo su espejo académico desde el autotelismo y la alegría de aprender a usar lo que se aprende.

En esta secuencia didáctica, es esencial que el estudiante se sienta parte fundamental de su proceso de aprendizaje, por eso se encuentra con “Willy el robot”, personaje que pide colaboración para resolver los problemas planteados en el trabajo colaborativo en las diferentes guías de aprendizaje, con el fin de que el estudiante esté comprometido a ayudar al personaje llevándolo a los objetivos propuesto en los retos, esto lo motiva y activa su curiosidad de aprender indagando, proponiendo y socializando con el contexto estudiantil.

4. Análisis de resultados

Los resultados de la investigación se encuentran divididos en tres apartados; el primero, es el análisis de la evaluación diagnóstica para la verificación de los saberes previos de los estudiantes participantes; el segundo, el de las guías implementadas y, finalmente, el de la evaluación aplicada para la verificación de los aprendizajes desarrollados mediante el modelo didáctico COPISI.

4.1 Sistematización de la prueba diagnóstica

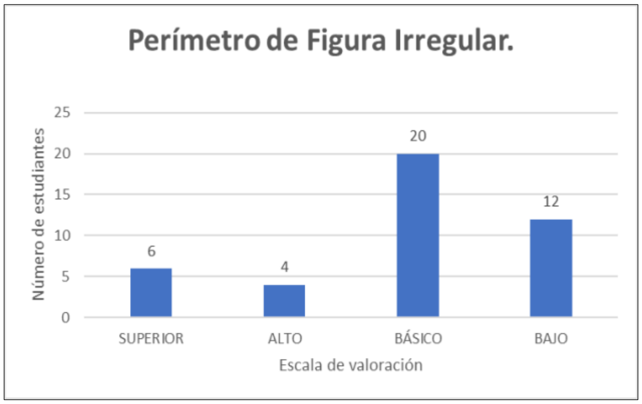
4.1.1 Resultados de la prueba diagnóstica

En la Tabla 2, se presentan los resultados de la primera actividad de la prueba diagnóstica en la que se les solicitó a los estudiantes observar una figura concreta para que mediante la interpretación y lectura de lenguajes simbólico y gráfico plantearan el polinomio correspondiente para el cálculo del perímetro.

Tabla 2. Resultados primera actividad prueba diagnóstica.

<table>
<tr><td colspan="2">Fecha: 1 de septiembre 2022</td><td>Grado: Octavo</td><td>Modalidad (presencial)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Número de sesión: 1</td><td>Tiempo de la sesión: 2 horas</td><td>Número de estudiantes: 42</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo:
Identificar los conocimientos previos que tiene con relación a la modelación de situaciones de la matemática, de la realidad y la semirealidad y, el uso de expresiones algebraicas con relación a la geometría.</td></tr>
<tr><td>Actividad 1</td><td colspan="3">• Se presenta una figura irregular para determinar el perímetro.
• El estudiante escribirá la expresión algebraica que determina el perímetro de la figura.</td></tr>
<tr><td colspan="4">A partir de las respuestas se genera la Figura 31 en la que se evidencian los resultados de acuerdo con la escala valorativa diseñada para evaluar el desempeño de los estudiantes frente al reconocimiento de los polinomios que se pueden plantear para encontrar el perímetro de una figura geométrica específica.</td></tr>
</table>

Figura 30. Resultados perímetro de figura regular.



Fuente: elaboración propia.

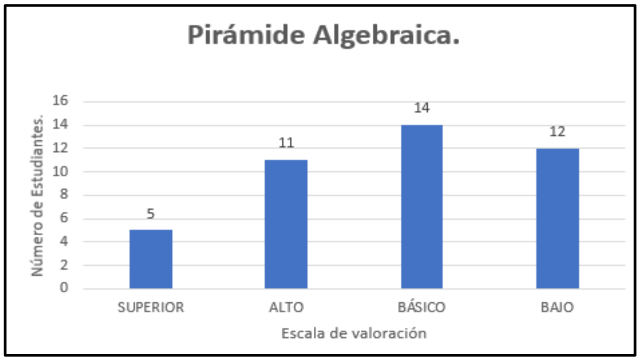
Los resultados de la primera pregunta que evaluó el perímetro de una figura regular reflejaron que el 14% de los estudiantes tienen dominio del concepto sobre el perímetro logrando una valoración de superior, el 10% comete un error de signo con una valoración de alto. De otra parte, el desarrollo del problema $-2b - 2b = 4b$ lo resuelven con éxito el 48% de estudiantes, varias reducciones de términos semejantes para una valoración de básico. El 28% une letras y números como ejemplo $2\ a\ + 3 = 5a$, donde se observa que no reconocen términos semejantes con una valoración de bajo. De acuerdo con lo anterior, se evidencian dificultades en el reconocimiento del perímetro y reducción de términos semejantes de un 76% de los estudiantes evaluados.

Fuente: elaboración propia.

De otra parte, en la Tabla 3 se presentan los resultados obtenidos respecto a la segunda actividad de la prueba diagnóstica que pretendía determinar la medida de las bases y la punta de una pirámide a través de la adición y sustracción algebraica.

Tabla 3. Resultados segunda actividad prueba diagnóstica.

Actividad 2	• Determinar por medio de la suma y resta algebraica, las bases y la punta de una pirámide.
La Figura 32, sintetiza las respuestas encontradas a esta segunda actividad, que facilitará su análisis Figura 31. Pirámide algebraica.	



Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar en la Figura 33, el 12% de los estudiantes logran una valoración superior encontrando la base y la punta de cada pirámide. El 26% de los estudiantes encuentran la punta de la pirámide, pero incurren en algún error de signo (+/-) para una valoración de alto. El 33% encuentra fácilmente la punta de la pirámide, pero se le dificulta encontrar algunas bases de la pirámide propuesta. El 29% incurre en errores de signo en determinar la punta de la pirámide y no encuentran bases de la pirámide lo cual están en una valoración de bajo. Esto demuestra que los estudiantes presentan dificultades con respecto a la comprensión de la resta algebraica.

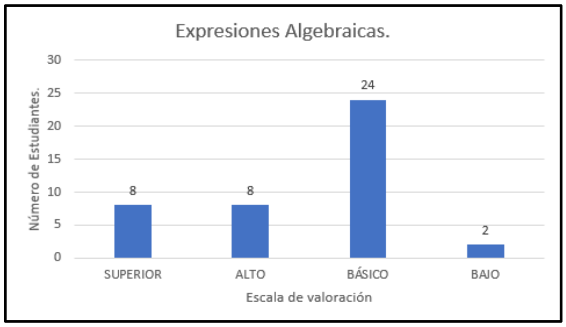
Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 4 se realiza la exposición de los resultados correspondientes a la tercera actividad en la que se les solicitó a los estudiantes de grado octavo escribir una expresión algebraica que permita calcular el área y perímetro de la figura propuesta.

Tabla 4. Resultados tercera actividad prueba diagnóstica.

Actividad 3	● Determinar mediante una expresión algebraica el perímetro y área de una figura compuesta.
En la Figura 33, se lleva a cabo la presentación de los porcentajes de acuerdo con las respuestas brindadas por los estudiantes respecto a la determinación de una expresión algebraica para encontrar el perímetro y área de una figura concreta.	

<table>
<tr><td>
Figura 32. Expresiones algebraicas.



Fuente: elaboración propia.

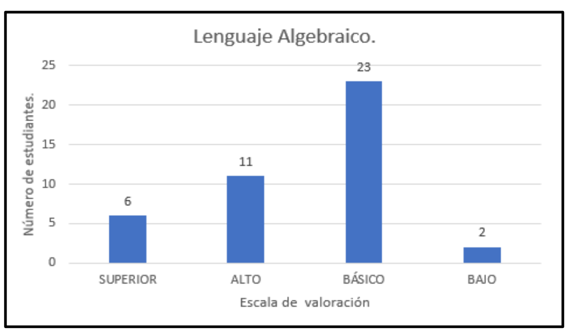
Se registra que el 19% de los estudiantes se apropian sobre el concepto de perímetro y área para alcanzar una valoración superior, el 19% determina el perímetro y área, sin embargo, incurre en error de signo (+, -) para tomar una valoración de alto, el 57% determina el perímetro o el área pero no los dos para una valoración de básico y el 5% restante, deja en blanco el espacio de trabajo, para una valoración baja.
</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, en la Tabla 5 se registran los resultados correspondientes a la cuarta actividad enfocada en la modelización matemática a través del planteamiento de una expresión algebraica de acuerdo con una situación problema general propuesta.

Tabla 5. Resultados cuarta actividad prueba diagnóstica.

<table>
<tr><td>Actividad 4</td><td>● Modelar mediante una expresión algebraica una situación propuesta de manera general.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Figura 33. Lenguaje albreaico.



Fuente: elaboración propia.
</td></tr>
</table>

Como se puede observar en la Figura 34, el 14% de los estudiantes describen una expresión algebraica que modela la situación propuesta alcanzando una valoración superior, el 26% de los estudiantes reconoce el lenguaje algebraico para esquematizar la situación, pero no de manera general para una valoración de alto, el 55% de los estudiantes eligen variables para la situación propuesta, no emplean correctamente el lenguaje algebraico para lograr una valoración de básico dejando un 5 % de estudiantes que no trabajan la pregunta propuesta para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

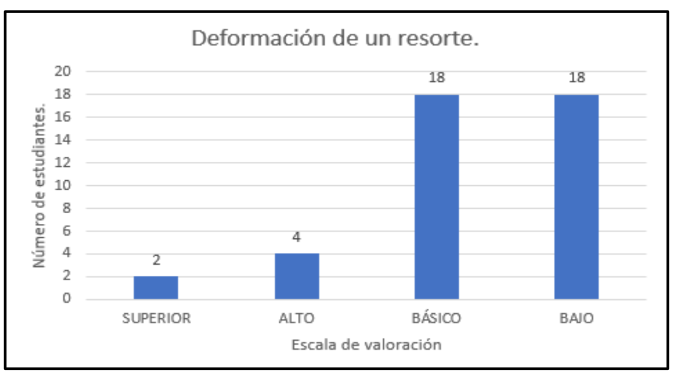
De otra parte, en la Tabla 6 presenta los resultados correspondientes a la quinta actividad de la prueba diagnóstica en la que se debía determinar la energía elástica de un resorte mediante la resolución de una expresión algebraica.

Tabla 6. Resultados quinta actividad prueba diagnóstica.

Actividad 5	● Determinar por una lectura comprensiva una expresión algebraica y un valor numérico, que responden a la ley de un resorte. ● Explicar la ley de Hooke y dar valores, para que se apliquen desde el valor numérico, hallando la constante de un resorte. ● Determinar la energía elástica del resorte por medio de un valor numérico.

Se analiza de manera notoria que el grupo de valoración bajo tiene una lectura poco comprensiva, para poder cumplir con las tareas propuestas.

Figura 34. Deformación de un resosrte.



Fuente: elaboración propia.

En la aplicación de esta actividad se evidenció que el 5% de los estudiantes determina lo propuesto, para lograr una valoración superior. El 10% determina la energía elástica por medio de un valor numérico para alcanzar una valoración de sobresaliente. El 85% de los estudiantes restantes está en dos grupos el básico que realiza algunas de las tareas propuestas y el grupo de los estudiantes que algunas de las tareas las realizan de manera incompleta para lograr una valoración de bajo.

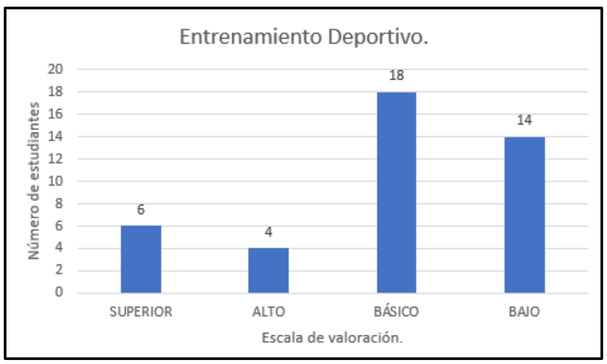
Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 7 se exponen los resultados de la sexta actividad de la prueba diagnóstica en la que los estudiantes debían solucionar una situación problemas aplicando las operaciones básicas entre números racionales respondiendo preguntas específicas.

Tabla 7. Resultados sexta actividad prueba diagnóstica.

Actividad 6	• Determinar el tiempo transcurrido para completar un entrenamiento, empleando números racionales y llevarlos a un tiempo del diario vivir • Realizar operaciones básicas entre racionales, y responder las preguntas propuestas.

Figura 35. Entrenamiento deportivo.



Fuente: elaboración propia.

Se observa que el que ese 14% de los estudiantes pueden hacer operaciones con racionales de manera efectiva para una valoración de superior, dejando un 10% de estudiantes que realizan operaciones con racionales, pero comete algún error mínimo para una valoración de alto. El 43% de los estudiantes realizan operaciones con racionales con errores mínimos lo cual los deja una valoración de básico y el grupo que representa el 33% que presenta dificultad en operar los números racionales, para una valoración de bajo.

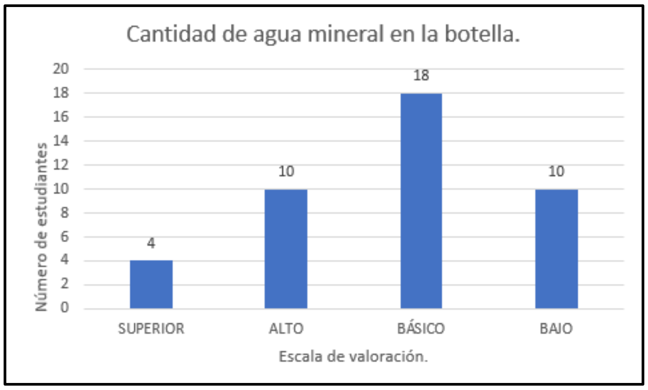
Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, en la Tabla 8 se presentan los resultados de la séptima actividad de la prueba diagnóstica en la que los estudiantes debían aplicar las operaciones de adición y sustracción para solucionar una situación problema específica.

Tabla 8. Resultados séptima actividad prueba diagnóstica.

Actividad 7	● Determinar una cantidad parcial de una botella de agua mineral, usando operaciones entre decimales de suma y resta. ● Realizar operaciones básicas entre decimales, y responder las preguntas propuestas.

Figura 36. Cantidad de agua mineral en una botella.



Fuente: elaboración propia.

El 10% de los estudiantes realizan operaciones con números decimales para alcanzar una valoración superior. Un 24% realizan operaciones con decimales y cometen un error mínimo en la solución para una valoración de alto. El 43% realizan operaciones con decimales y cometen errores como 0,21 -0,20=0,1 siendo correcto 0,01, para una valoración de básico. Dejando un 23% de estudiantes que no realizan operaciones con decimales para tomar una valoración de bajo.

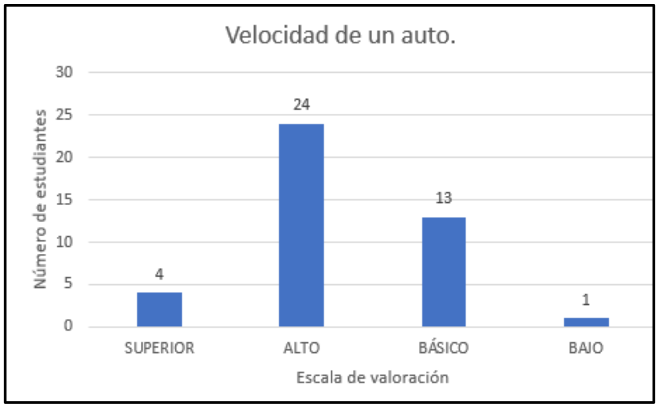
Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 9 se presentan los resultados de la octava actividad de la prueba diagnóstica en la que los estudiantes determinaban por medio del valor numérico una velocidad para la toma de decisiones.

Tabla 9. Resultados de la octava actividad prueba diagnóstica.

Actividad 8	● Determinar por medio del valor numérico una velocidad, para la toma de decisiones.

Figura 37. Velocidad de un auto.



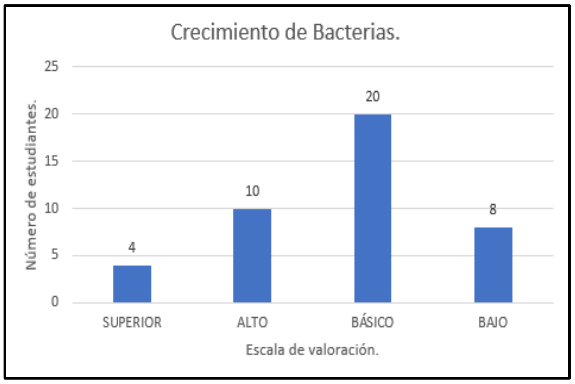
Fuente: elaboración propia.

Se observa que el 10% puede hallar la velocidad solicitada y argumenta la situación propuesta o condición para una valoración de superior. El 57% determina la velocidad, pero algunos no argumentan con la condición para lograr una valoración de alto. Un 31% determina la velocidad, pero no toman en cuenta la condición para una valoración de básico y el 2% que no realizan la tarea para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, en la Tabla 10 se presentan los resultados de la novena y última actividad de la prueba diagnóstica en la que pretendía determinar la relación del crecimiento de una colonia de bacterias bajo un modelo exponencial.

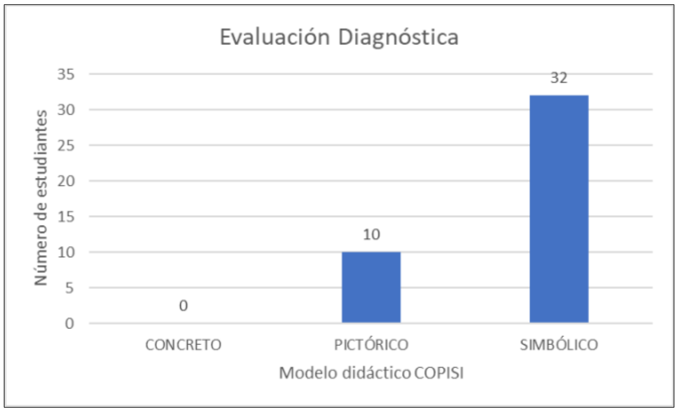
Tabla 10. Resultados novena actividad prueba diagnóstica.

Actividad 9	• Determinar la relación del crecimiento de una colonia de bacterias, bajo un modelo exponencial.
Figura 38. Crecimiento de bacterias.  Fuente: elaboración propia. El 10% de los estudiantes encuentran el modelo de crecimiento de las bacterias logrando una valoración superior. Un 24% tiene el modelo, pero no argumenta la pregunta solicitada para una valoración de alto. El 48% tiene idea de cómo se reproducen las bacterias y lo hacen de manera gráfica, pero les falta la población inicial para lograr una valoración de básico dejando un 18% que no interpreta el modelo para lograr una valoración de bajo.	

Fuente: elaboración propia.

Al sintetizar los resultados de la evaluación diagnóstica se logró observar que los estudiantes de grado 8° que conformaron la muestra utilizan el aspecto simbólico en más medida que lo concreto y lo pictórico, al evaluar el reconocimiento de las diferencias que hay entre varios conjuntos numéricos. La representación de expresiones del lenguaje natural en lenguaje algebraico y viceversa. En la Figura 40 se puede evidenciar dicho aspecto.

Figura 39. Condensado evaluación diagnóstica.



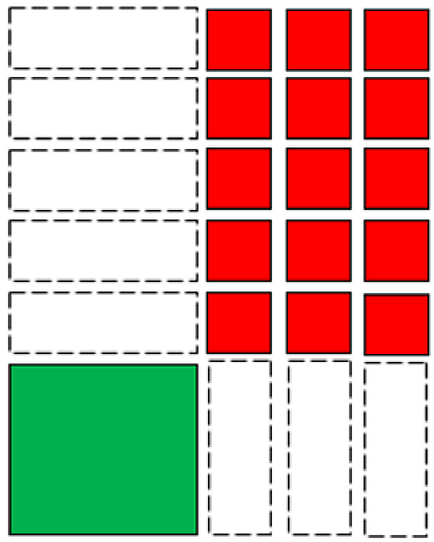
Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los resultados encontrados respecto a la prueba diagnóstica se concluye que aunque la mayoría de los estudiantes presentan la capacidad de hallar el perímetro de la figura propuesta, se evidencian algunas dificultades al realizar la reducción de términos semejantes o en la aplicación de los signos, se evidencian errores frente a las operaciones de sustracción entre términos algebraicos, falta claridad en los conceptos de área y existen dificultades marcadas al realizar operaciones entre números racionales evidenciando la necesidad de desarrollar la propuesta pedagógica para el afianzamiento y comprensión de las temáticas que integran la factorización mediante la aplicación del modelo didáctico COPISI.

Lo anterior, teniendo en cuenta que desde el modelo COPISI al tener $x^2 + 8x + 15$, se puede realizar una representación de cuadritos rojos de lado 1, con rectángulos de base x por alto 1 y un cuadrado verde de lado x, en donde los rectángulos en línea invisible ya que el estudiante puede disponer de ellos en distintas formas, lo cual hace que lo concreto sea crucial en el proceso y esta dimensión le da fuerza a la parte pictórica para llegar a la parte simbólica como prueba de que la representación esta de forma correcta y cumple con lo que se presenta, como se muestra en la Figura 41.

Figura 40. Representación de solución de $x^2 + 8x + 1$

$(x+3)(x+5)$



Fuente: elaboración propia.

4.2 Sistematización de las guías de aprendizaje

En el presente apartado se realiza la exposición de los resultados obtenidos mediante la implementación de las cinco guías que conformaron la secuencia pedagógica que aborda los temas de factorización dirigidas a los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo de la ciudad de Bogotá, fundamentadas en el modelo didáctico COPISI.

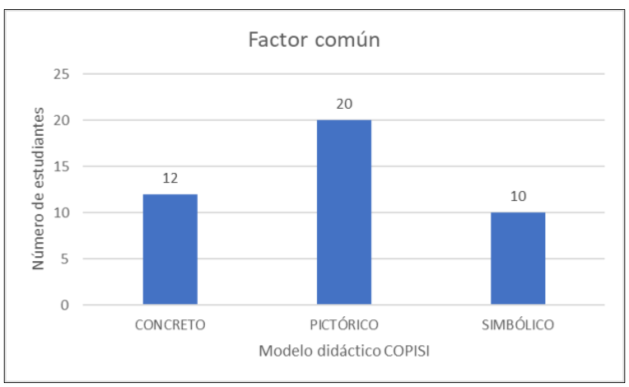
4.2.1 Resultados guía factor común

Los resultados muestran la buena disposición de los estudiantes para el desarrollo de la actividad, puesto que participan frecuentemente, generaban diálogos entre ellos, preguntaban cuando tenían inquietudes. Hecho valioso para su proceso de aprendizaje puesto que la actividad propuesta deja de ser una tarea, para convertirse en una actividad de interés propio.

Con relación al objetivo cognitivo de la guía, que era el de organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas. Se logró evidenciar desde lo concreto, desde lo pictórico, pudieron modelar el ejercicio, hicieron la gráfica y en cuanto a lo simbólico, tuvieron con dificultades con la explicación de la factorización.

Como se muestra en la Figura 41, el 29% queda en el nivel alto de lo concreto porque realizan todas las operaciones geométricas, con relación a lo pictórico el 48% logra este nivel, Mientras que con relación a los simbólico solo el 23% alcanza básico al de utilizar el lenguaje algebraico.

Figura 41. Factor común.



Fuente: elaboración propia.

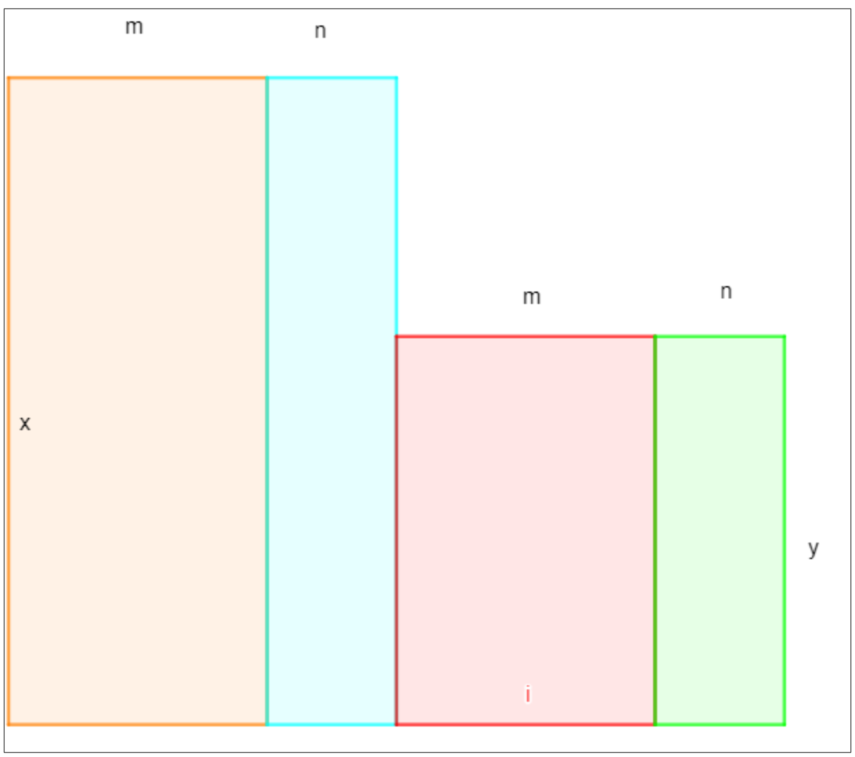
Adicional a lo anterior, se evidenció el mejoramiento de los conceptos de perímetro y área que son cruciales en el trabajo de las guías desarrollando así los procesos de factorización de expresiones algebraicas identificando el factor común mediante la realización de trabajo colaborativo e individual optimizando los procesos de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo.

En este sentido, los estudiantes construyeron el área de cada figura y luego el área total desde los pictórico, para buscar relaciones comunes entre estas, donde se hace más fácil el proceso de factorizar teniendo en cuenta la expresión algebraica

$$xm + xn + ym + yn = x(m + n) + y(m + n) = (x + y)(m + n)$$

Así como se evidencia en la Figura 42.

Figura 42. Aplicación método COPISI en factor común.



Fuente: elaboración propia.

A continuación, se presentan los resultados de la primera guía de aprendizaje enfocada en la temática de factor común de acuerdo con la organización del plan de estudios del Colegio Andrés Rosillo, se aclara que se expone a partir de la tercera actividad ya que las dos primera hacen referencia a la gimnasia cerebral y el tesoro del saber, partiendo de solucionando el reto.

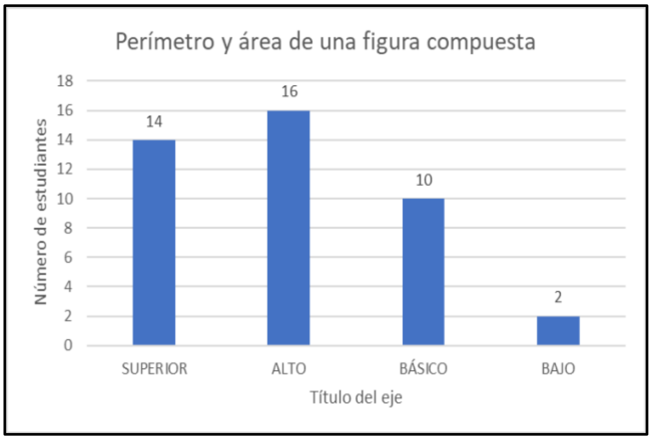
En este contexto, en la Tabla 11 se presentan los resultados de la tercera actividad de la primera guía cuyo objetivo se centró en organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos en la solución de problemas.

Tabla 11. Resultados actividad 3 factor común.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo:

Organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3</td><td>● Observar el cuadrado azul de lado m con un rectángulo de altura m y base n , las medidas en metros, en la figura de colores, determinar el perímetro y área de la figura compuesta.
● Escribir la expresión algebraica que determina el perímetro de la nueva figura y simplificar la expresión obtenida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se muestra la Figura 43 para su representación y posterior análisis.

Figura 43. Perímetro y área de una figura compuesta.</td></tr>
</table>



Fuente: elaboración propia.

Se observa que el 33% de los estudiantes tienen dominio en determinar el perímetro de la figura compuesta logrando una valoración superior, dejando un 38 % los estudiantes que logran encontrar la relación del área de cada figura respecto de la suma de las áreas de cada figura $m^2 + mn = (m + n)m$ logrando una valoración de alto desde la parte pictórica, dejando un 24% que no puede encontrar todas las relaciones propuestas alcanzando una valoración de básico. Un 5% que no cumple con la tarea propuesta, para alcanzar una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

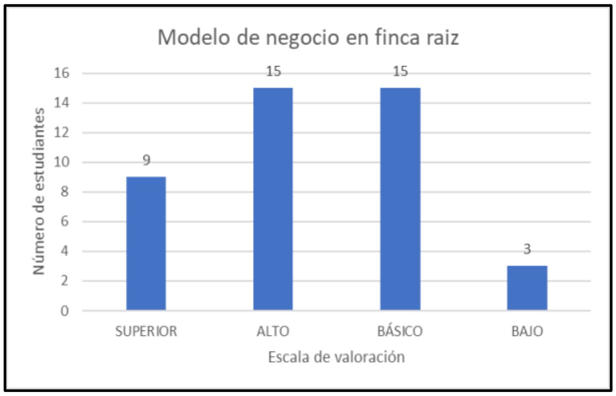
En esta misma línea, en la Tabla 12 se presentan los resultados de la cuarta actividad de la primera guía en la que se pretendía que los estudiantes lograran organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.

Tabla 12. Resultados cuarta actividad factor común.

Objetivo: Organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 4	● Observar el terreno subdividido en lotes más pequeños, con las dimensiones en metros, con diferentes expresiones algebraicas. ● Encontrar el área de cada terreno y unirlas con un signo más o menos dependiendo si es venta o renta, le precede un signo negativo y el lote que se queda es positivo. Luego simplificar el modelo de negocio empleando el factor común.

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 44 para su representación y posterior análisis.

Figura 44. Modelo de negocio en finca raíz.



Fuente: elaboración propia.

Se observa que el 21% de los estudiantes tenían dominio sobre como determinar el área de cada lote, logrando una valoración superior, ya que este grupo de estudiantes determinan la expresión general del modelo de negocio y la simplifican empleando el factor común.

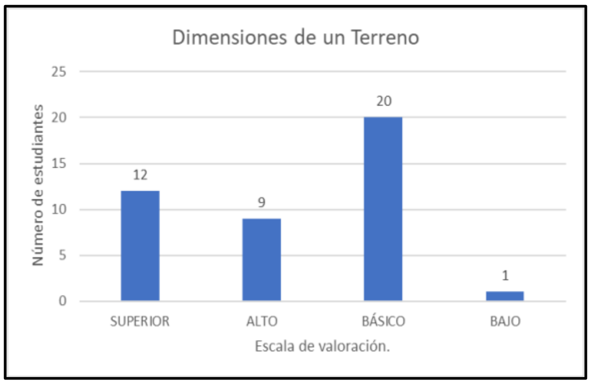
Por otra parte, un 36% determinan el perímetro, consiguen encontrar el modelo de negocio, pero cometen un error de signo quedando en alto. El otro 36% está en nivel básico, logra encontrar el modelo de negocio, pero no simplifican todo el modelo. Un 24% de estudiantes encuentran el modelo de negocio, pero no factorizan el modelo completamente, para lograr un básico en su valoración y un grupo final que representa el 5%, que no determina el modelo de negocio para una valoración de bajo. Se presentan situaciones como que dejan todo positivo algunos que encuentran el área $3xy + 6x + 5my + 10m$, otros llegan a la expresión, pero no reducen $3x(y-2) + 5m(y-2) = (y-2)(3x+5m)$, otros estudiantes, dejan expresado el contorno del terreno $y + 1 + y + 2 + 5m + 3x + y + 1 + y + 2$.

Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 13 se presentan los resultados obtenidos con respecto a la quinta actividad de la guía orientada a la temática de factor común en la cual se pretendía organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.

Tabla 13. Resultados quinta actividad factor común.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo:
Organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5</td><td>● Observar dos terrenos en el centro del gráfico está su área, encontrar las dimensiones del terreno después de factorizar las áreas.
● Cada bina de estudiantes debe determinar la base y altura de cada terreno propuesto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 45 para su representación y posterior análisis.

Figura 45. Dimensiones de un terreno.


Fuente: elaboración propia.
El 29% de los estudiantes hacen la factorización para poder justificar cual es la base y la altura, así, $3x(2x+1)$, en donde si $x\ es\ 4$, la base es $3x$ y la altura es $2x+1$. De esta manera, argumentan que el factor común es la base y el otro factor es la altura, alcanzando una valoración superior. El 21% factoriza y usando el valor numérico determina las dimensiones ubicándose en la escala de alto. El otro 48 % factoriza, pero algunos cometen un error al determinar cuál es la base o la altura, quedando en básico. El 5% restante deja el espacio en blanco, lo que hace pensar que no comprendieron el problema a resolver.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

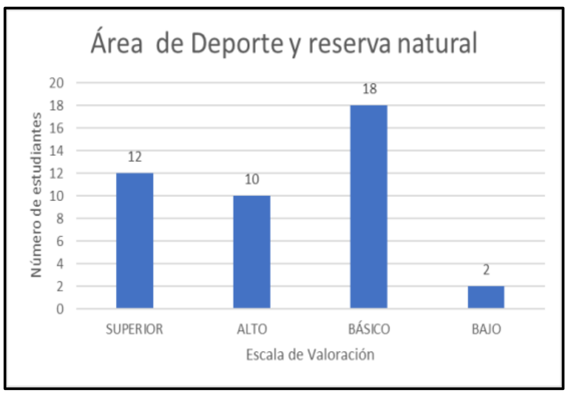
De la misma manera en la Tabla 14 se lleva a cabo la exposición de los resultados de la sexta actividad de la primera guía desarrollada con el objetivo identificar elementos del perímetro y área para dar solución a un problema en contexto.

Tabla 14. Resultados sexta actividad factor común.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo:

Organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 6</td><td>● En los dos terrenos de una reserva natural la cual se muestra el área en forma de cuadrado de color verde oscuro, y una zona de color verde limón también cuadrada, que es la zona de espacio para practicar deporte y es la zona que se poda habitualmente. El terreno de mayor área es cuadrado y mide b metros, la distancia entre los dos terrenos es x metros por cada lado, cada bina de estudiantes debe determinar el área de cada terreno, y encontrar la diferencia entre las dos áreas, para determinar el área de la zona que se debe podar. y factorizar esta expresión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 46 para su representación y posterior análisis.

Figura 46. Área de deporte y reserva natural.



Fuente: elaboración propia.

Se observa que el 29% de los estudiantes se apropian del concepto de factor común para determinar el área de cada terreno, encontrando el área mayor $b^2\ y\ \ el\ área\ menor\ (b-2x)^2$ expresadas en términos de metros como lo propone el problema propuesto alcanzando una valoración superior.

Un 24% plantea la resta entre las dos áreas alcanzando una valoración de alto, pero el 43% logran la expresión que une las dos áreas a diferencia de los de superior que llegan a la relación $b^2-(b^2-4bx+4x^2)$. El 43% logra una valoración bajo, pero es de notar que no llegan a la factorización por errores de signos en la mayoría. Por otra parte un 4% no logra realizar la tarea propuesta alcanzando una valoración bajo a diferencia de los de superior que logran llegar a la expresión reducida y factorizada por ejemplo $b^2-b^2+4bx-4x^2=4x(b-x)$.</td></tr>
</table>

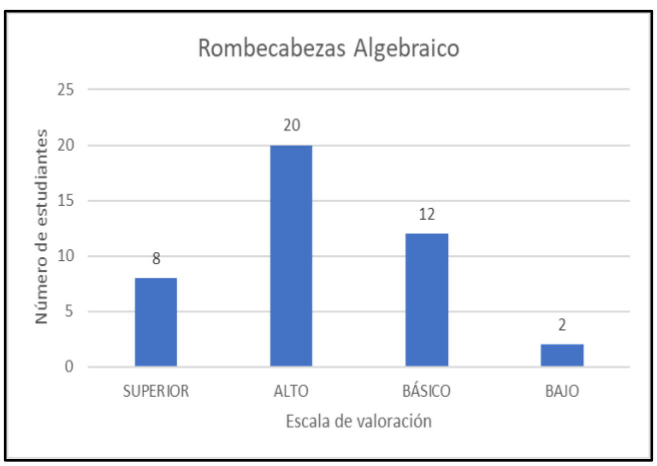
Fuente: elaboración propia.

Para terminar, en la Tabla15 se presentan los resultados de la séptima y última actividad de la primera guía enfocada en la temática de factor común desarrollada con el objetivo de que los estudiantes ubicaran fichas de acuerdo con las propiedades comunes de las figuras.

Tabla 15. Resultados séptima actividad factor común.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo:
Organizar el perímetro y área de las figuras propuestas, empleando el factor común como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 7</td><td>● Se entrega papel silueta de color rojo, azul y amarillo a cada estudiante este debe construir un rectángulo de color rojo de 4 por 2 centímetros, un rectángulo de color azul de 4 por 3 centímetros y un rectángulo amarillo de 4 por 1 centímetros respectivamente. El alto de todas las piezas es $2x$, el ancho de las piezas en su orden de construcción es de $x.y, 1$.
● Cada estudiante coloca las piezas por el lado común, una al lado de la otra, que determina el área de cada pieza y el perímetro.
● Luego determinar el área y el perímetro de la pieza completa y factorizar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 47, para su representación y posterior análisis.

Figura 47. Rompecabezas algebraico.



Fuente: elaboración propia.

Algo que es de valorar en los estudiantes que encuentran el área de cada pieza $2x^2, 2xy, 2x, luego\ las\ suman\ para\ el\ área\ total\ 2x^2 + 2xy + 2x$ y finalmente hallan el área de la pieza unificada como $2x(x + y + 1)$, reconociendo ésta como la factorización del área total de la pieza unificada esta población representa el 19% que logra una valoración sobresaliente. El 48% de los estudiantes mejoran mucho su desempeño al trabajar con la parte concreta alcanzando una valoración de alto. El 29% de los</td></tr>
</table>

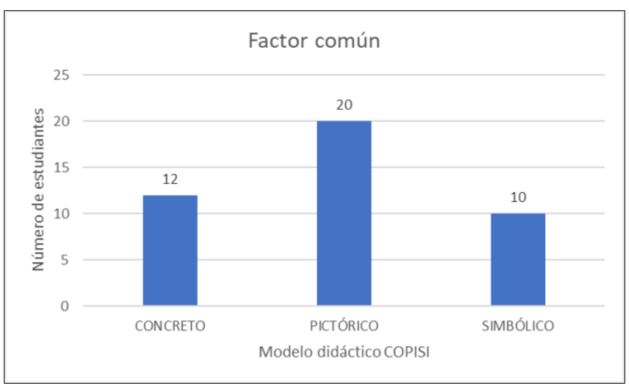
estudiantes logran factorizar, aunque cometen errores de signos logrando una valoración de básico y el 4% los estudiantes que no realizan la tarea para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los resultados de la implementación de la primera guía de aprendizaje desarrollada mediante la aplicación del modelo didáctico COPISI en la que se abordó el caso de factorización factor común, la disposición de los estudiantes al trabajar fue positiva, lo cual es valioso para su proceso de aprendizaje infiriendo que la dinámica de la clase y las actividades propuestas permiten que los estudiantes sientan mayor seguridad al trabajar con el modelo COPISI los procesos de factorización algebraica.

De la misma manera, se logró evidenciar que los estudiantes dieron paso a no solo utilizar el lenguaje simbólico para la resolución de las diferentes situaciones planteadas sino que además utilizaron elementos concretos y pictóricos aplicando en mayor medida el modelo COPISI así se puede observar en la Figura 48.

Figura 48. Resultado generales factor común en modelo COPISI.



Fuente: elaboración propia.

Adicional a lo anterior, se evidenció el mejoramiento de los conceptos de perímetro y área que son cruciales en el trabajo de las guías desarrollando así los procesos de factorización de expresiones algebraicas identificando el factor común mediante la realización de trabajo colaborativo e individual optimizando los procesos de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo.

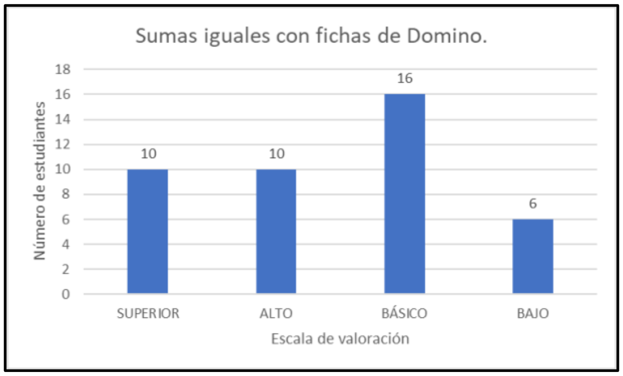
4.2.2 Resultados guía diferencia de cuadrados

A continuación, se lleva a cabo la exposición de los resultados de la segunda guía diseñada con la utilización del modelo didáctico COPISI con el objetivo de fortalecer los conocimientos de los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo respecto al caso de factorización reconocido como diferencia de cuadrados.

De esta manera, la Tabla 16 presenta los resultados de la primera actividad en la que los estudiantes debían armar un cuadrado con las fichas de dominó y aplicar operaciones de adición con expresiones algebraicas.

Tabla 16. Resultados primera actividad diferencia de cuadrados.

Objetivo: Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 1	● Con cuatro fichas de dominó formar un cuadrado. ● Encontrar el guarismo que es igual al sumar filas y columnas con las fichas de dominó.
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 50 para su representación y posterior análisis. Figura 49. Sumas iguales con fichas dominó.	



Fuente: elaboración propia.

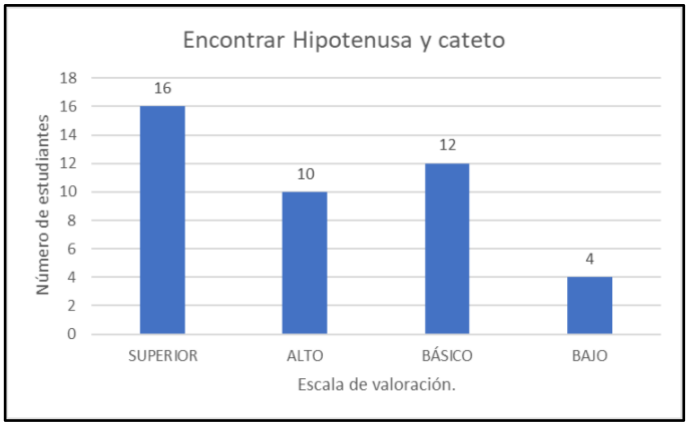
Se observa que el 24% de los estudiantes tenían claridad y les gusta la actividad de dibujar las fichas de dominó y construir el cuadro con ellas, de manera que la suma de sus filas y columnas es la misma alcanzando una valoración superior en su trabajo asignado como activador cognitivo en el reto propuesto en gimnasia cerebral. Él 24% de los estudiantes logró ordenar las fichas correctamente para alcanzar una valoración de alto, pero no hacen las sumas de validación. El 38% de los estudiantes cometen un error en acomodar las fichas del cuadrado para una valoración de básico. Mientras que el 14% se le dificulta formar el cuadrado con las condiciones iniciales de que la suma de filas y columnas sea igual para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 17 se lleva a cabo la presentación de la segunda actividad de la guía de diferencia de cuadrados en la que los estudiantes que conformaron la población realizaron las operaciones necesarias para hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Tabla 17. Resultados segunda actividad diferencia de cuadrados.

Objetivo: Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 2	● En un triángulo rectángulo con los cuadrados de sus dos catetos, encontrar la hipotenusa del triángulo. ● En el triángulo rectángulo con el cuadro de la hipotenusa y el cuadrado de unos de sus catetos, se debe encontrar el otro cateto.
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 51 para su representación y posterior análisis. Figura 50. Encontrar hipotenusa y cateto.	



Fuente: elaboración propia.

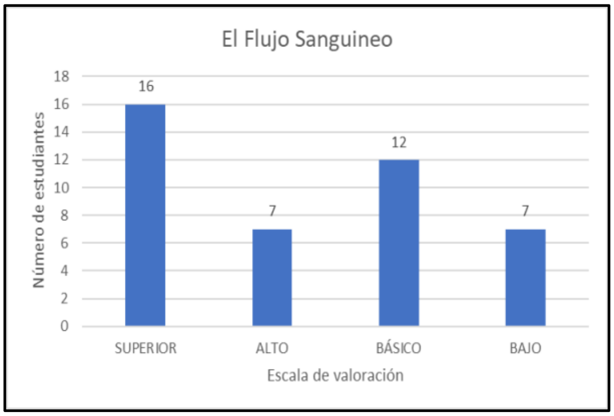
El 38% de los estudiantes determina la hipotenusa y un cateto alcanzando una valoración superior. El 24 % determina la hipotenusa y el cateto pero falta extraer alguna raíz para una valoración de alto. El 29% deja planteado para hallar la hipotenusa y el cateto, pero faltan procedimientos para una valoración de básico. El 9% de los estudiantes presentan dificultad en encontrar la hipotenusa y el cateto para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, en la Tabla 18 se reflejan los hallazgos obtenidos durante el proceso de implementación de la tercera actividad de guía de diferencia de cuadrados desarrollada con el objetivo de organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos en la solución de problemas.

Tabla 18. Resultados tercera actividad guía diferencia de cuadrados.

Objetivo: Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 3	• Observar el polinomio que expresa la velocidad de la sangre en centímetros por segundo es $CR^2 - Cr^2$, donde R es el radio mayor, r el radio menor y C el flujo sanguíneo. Factorizar la expresión, y emplearla para determinar la expresión donde $R = 0{,}3\ cm$ y el $r = 0{,}1\ cm$ en el recuadro de trabajo propuesto.
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 52 para su representación y posterior análisis. Figura 51. El flujo sanguíneo.	



Fuente: elaboración propia.

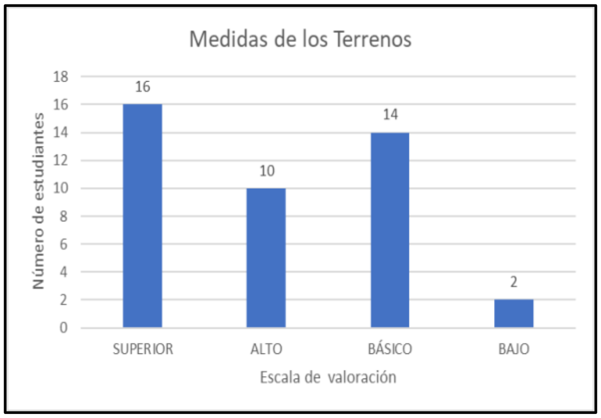
El 38% de los estudiantes determina la factorización y el valor numérico para alcanzar una valoración superior. El 17% de los estudiantes logran factorizar y hacen el reemplazo de los valores dados, pero no encuentran el flujo sanguíneo para lograr una valoración de alto. El 29% determina la factorización pero no hace el valor numérico para una valoración de básico. El 16% logra una valoración de bajo deja procedimientos sin terminar.

Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo ya expuesto, en la Tabla 19 se presentan los resultados obtenido al desarrollar la cuarta actividad de la segunda guía de trabajo en la que se los solicitó a los estudiante la identificación de una expresión algebraica para encontrar el área de una figura específica.

Tabla 19. Resultados cuarta actividad guía diferencia de cuadrados.

Objetivo: Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 4	• Observar el gráfico con un cuadrado de color verde el más grande y en la esquina superior izquierda de color azul un cuadrado, en el centro del cuadrado verde una expresión algebraica representa la diferencia de áreas de los dos terrenos cuadrados el binomio $16r^4$-$81b^2$,donde se debe determinar las medidas de cada terreno y el área útil, se debe tener en cuenta que las medidas están en metros.
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 53 para su representación y posterior análisis. Figura 52. Medidas de los terrenos.	



Fuente: elaboración propia.

El 38 % de los estudiantes determina la factorización y el área útil logrando una valoración superior, también se analiza que el 24% identifican las medidas de los terrenos por medio de la factorización alcanzando una valoración de alto. El 33% no determinan las medidas de los dos terrenos, es decir logran factorizar, pero no identifican las dimensiones de los terrenos para alcanzar una valoración de básico. Dejando un 5% que no realiza la factorización correctamente para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

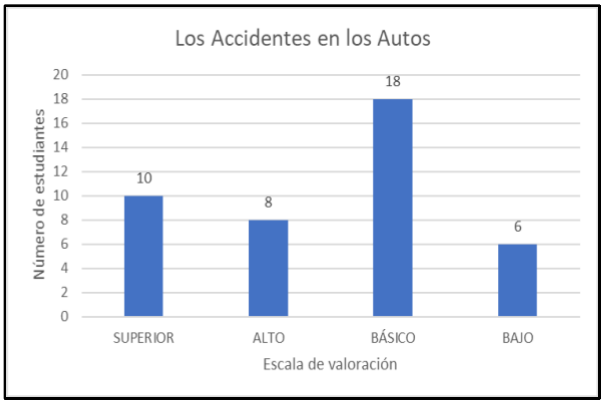
De la misma manera, en la Tabla 20 se presentan los hallazgos correspondientes a la quinta actividad de la segunda guía pedagógica centrada en la presentación de una situación en contexto sobre velocidad para la aplicación de una expresión algebraica que permitiera encontrar dicha magnitud.

Tabla 20. Resultados quinta actividad guía diferencia de cuadrados.

Objetivo: Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 5	• Se presenta una situación de la vida real, sobre cómo se determina el trabajo en un choque o una frenada brusca mediante el siguiente modelo $\frac{1}{2}mV_f{}^2 - \frac{1}{2}mV_i{}^2 = W$ • También se les dice que es cada variable, para que identifiquen el trabajo neto en color rojo, respecto a la velocidad de inicio y la velocidad final con relación a la masa para analizar la energía cinética como varía en estos fenómenos.

<table>
<tr><td></td><td>Donde es necesario factorizar la expresión y reemplazar con los valores propuestos para determinar el trabajo en Joules.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 54 para su representación y posterior análisis.

Figura 53. Accidentes de autos.



Fuente: elaboración propia.

Se analiza que el 24% de los estudiantes realizan la factorización del modelo y determinan su valor numérico, para alcanzar una valoración superior. El 19% de los estudiantes determinan la factorización del modelo para una valoración de alto. El 43% realiza la factorización, pero comete algún error en el valor numérico para una valoración de básico. El 14% no realizan la tarea propuesta para lograr una valoración de bajo.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Por último, en la Tabla 21 se realiza la exposición de la sexta actividad que integró la segunda guía de aprendizaje en la cual se les solicitó a los estudiantes de grado octavo encontrar la expresión algebraica que permitiera determinar el área del área cultivada por los campesinos.

Tabla 21. Resultados sexta actividad guía diferencia de cuadrados.

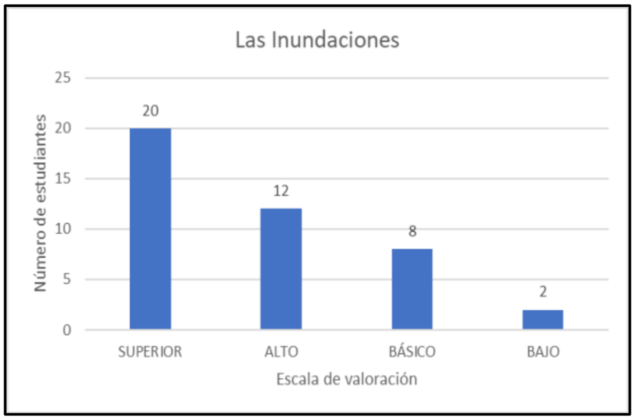
<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo:

Organizar por agrupación el área de algunas figuras, empleando la diferencia de cuadrados como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 6</td><td>● Se presenta una situación a los estudiantes, así, en época de lluvias, algunas partes de los terrenos de cultivo de un pueblo son arrastradas por las corrientes del río Magdalena. Si haces un cuadrado en papel silueta de color café y la escala es X para sus lados que representa una de las dimensiones para ser cultivado, y haces un cuadro de color azul menor que el cuadro de color café, el cual está en escala Y donde este representa una de las longitudes del terreno arrastrado por</td></tr>
</table>

	la corriente estable, ¿qué expresión permite determinar el área que puede ser cultivada por los campesinos en metros?

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 55, para su representación y posterior análisis.

Figura 54. Las inundaciones.



Fuente: elaboración propia.

Se analiza que el 48% de los estudiantes realizan la construcción en papel silueta, luego factorizan y determinan el área para lograr una valoración de superior, se evidencia que sienten agrado por las construcciones en papel silueta y se les facilita entender los procesos de factorización. El 29% realizan la construcción y realizan la interpretación geométrica para una valoración de alto. El 19% realiza la construcción determina la factorización para lograr una valoración de básico. El 4% no realiza la actividad propuesta.

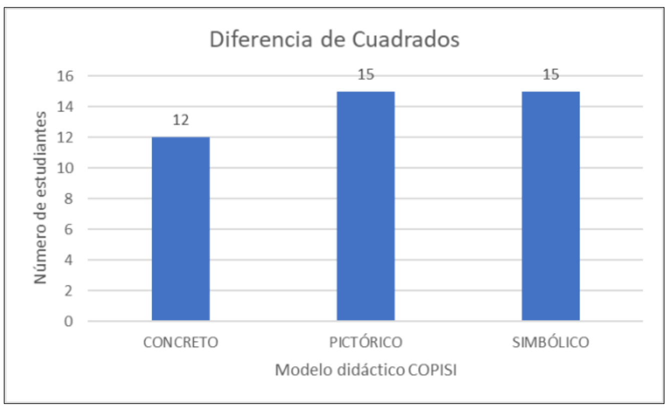
Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los resultados de la segunda guía en la que se desarrolló la temática de diferencia de cuadrados, de manera general se concluye que la manipulación de materiales concretos en este caso el dominó algebraico, despertó el interés de los estudiantes generando motivación por la realización de las seis actividades que conformaron la guía, aspecto que se verificó en los porcentajes positivos significativos frente a la presentación de expresiones algebraicas para encontrar áreas y perímetros de figuras específicas.

Además de lo anterior, los hallazgos reflejaron el cambio en los porcentajes de preguntas acertadas y nivel de desempeño respecto a la identificación y aplicación de expresiones algebraicas planteadas para la solución de una situación en contexto que exigía la aplicación del método de factorización por diferencia de cuadrados infiriendo así que las actividades de la guía si contribuyeron en la construcción del conocimiento mediante la integración del método didáctico COPISI.

De otra parte, al hacer la observación y análisis sobre la aplicación del modelo COPISI se evidenció que para solucionar las situaciones en contexto planteadas sobre la diferencia de cuadrados los estudiantes acudieron al análisis desde lo concreto, lo pictórico y lo simbólico logrando solucionarlas de manera acertada, datos condensados en la Figura 56.

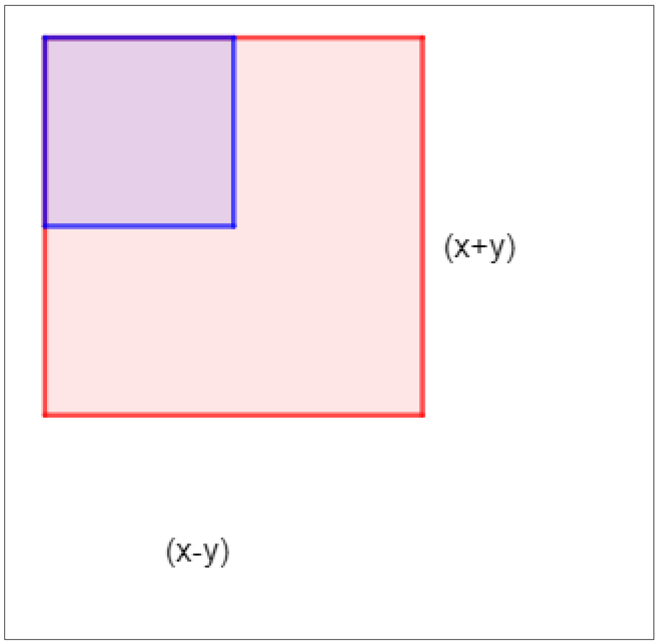
Figura 55. Diferencia de cuadrados.



En la diferencia de cuadrados se evidenció que la mayoría de los estudiantes usan lo simbólico es decir un 36% esta en nivel alto y luego van a la pictórico con el mismo porcentaje y nivel, pero otros pasan de lo concreto a lo pictórico y llegan a lo simbólico con un 28% en nivel alto. Se tiene de manera concreta un cuadrado de lado x de color rojo y un cuadrado azul de lado y, se busca el área del cuadrado rojo menos el área del cuadrado azul, los estudiantes ubican el cuadrado de área menor sobre el cuadrado de área mayor en la esquina superior izquierda y

Figura 56. Diferencia de cuadrados.

algunos en la esquina inferior derecha, para encontrar la diferencia de área de estos de acuerdo con la expresión algebraica $x^2 - y^2$. Así como se evidencia en la Figura 57.



Fuente: elaboración propia.

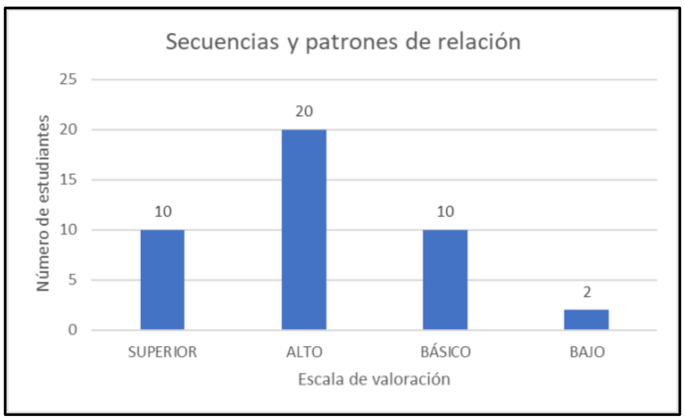
4.2.3 Resultados guía trinomio cuadrado perfecto

La guía de aprendizaje correspondiente al método de factorización definido como trinomio cuadrado perfecto, estuvo integrada por un total de seis actividades fundamentadas en el modelo didáctico COPISI con el objetico general de determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.

De acuerdo con lo anterior, en la Tabla 22 se presentan los resultados correspondientes a la primera actividad en la que los estudiantes debían observar una secuencia de puntos y analizar la relación que puede establecerse entre la cantidad de puntos y su posición determinando el número de puntos de una figura y un modelo que muestre la situación de posición con el número de puntos.

Tabla 22. Resultados primera actividad trinomio cuadrado perfecto.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo:
Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 1</td><td>● Observar una secuencia de puntos y analizar la relación que puede establecerse entre la cantidad de puntos y su posición. Determinar el número de puntos de la figura 5, 6, 7, 8. Determinar un modelo que nos muestre la situación de posición con el número de puntos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 58 para su representación y posterior análisis.

Figura 57. Secuencia y patrones de relación.


Fuente: elaboración propia.

Se analiza que el 24% de los estudiantes determinan que el modelo es $lado^2$, para alcanzar una valoración superior. Otro grupo de estudiantes determina por los puntos una relación como si en la primera gráfica hay un punto y en la segunda gráfica hay cuatro puntos esta gráfica aumenta 3 puntos con relación a la primera, es decir en la tercera posición aumentará los puntos de la posición uno y dos es decir cinco puntos, para tener nueve puntos en la posición 3, para alcanzar una valoración de alto empleando la parte pictórica de los elementos suministrados este corresponde a un 48%. Un 24 % de estudiantes emplea la parte pictórica, pero llega a un número constante que es dos, así, primera figura un punto, segunda figura cuatro puntos, tercera figura nueve puntos, entonces $4-1=3, 9-4=5\ y\ 5-3=2$ entonces, $16-9=7\ y\ 25-16=9$ entonces $9-7=2\ entonces\ 25-16=9\ y\ 36-25=11\ entonces\ 11-9=2$, para una valoración de básico. Donde ellos determinan que la figura uno tiene un punto los dos cuatro puntos, los tres nueve puntos, la cuatro 16 puntos, la cinco 25 puntos, la 6 tiene 36 puntos. El 4% de estudiantes restantes no cumplen la tarea propuesta para una valoración de bajo.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 23 se realiza la exposición de los resultados correspondientes a la segunda actividad de la tercera guía de trabajo orientada al fortalecimiento de aquellos conceptos que integra el trinomio cuadrado perfecto como caso de factorización.

Tabla 23. Resultados de la segunda actividad guía trinomio cuadrado perfecto.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2</td><td>

- Observar una figura que representa el plano de un centro vacacional. En cada figura determinar el área total y escribirla en el centro de cada zona. Él lado de la zona verde es de $X\ metros$,la zona roja de comidas es de lado 3 $metros$ por cada lado.
- Las piscinas son de una misma área en el centro vacacional. En el recuadro determinar el área de cada zona, encuentra el área total y simplificar a su mínima expresión, determinar el perímetro del terreno total.

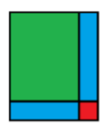
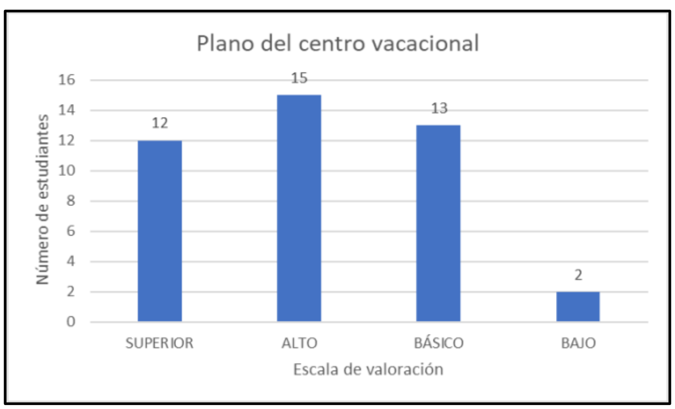

</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 59 para su representación y posterior análisis.

Figura 58. Plano del centro vacacional.



Fuente: elaboración propia.

El 29% determinan el área de cada zona del centro vacacional $x^2 + 3x + 3x + 9$ logrando una valoración superior. El 36% que representan los estudiantes logran una valoración alto al lograr determinar el perímetro de la figura $4(x+3)y \quad factorizar\ el\ área\ por\ la\ expresión$ $(x+3)(x+3)$, que es el área de la figura</td></tr>
</table>

total de todas las zonas del centro vacacional encontrando esta relación con las áreas parciales. El 31% determina la expresión general y factoriza para una valoración de básico. Un 4% no cumple con la tarea propuesta para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

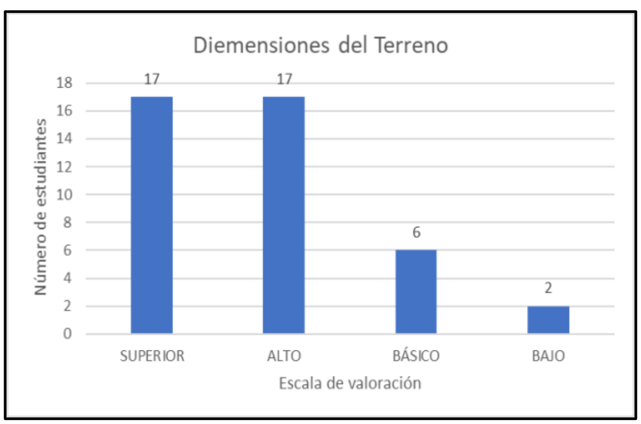
De otra parte, en la Tabla 24 se presentan los resultados de la tercera actividad de la guía de trinomio cuadrado perfecto en la que los estudiantes debían realizar los procedimientos en el recuadro, para determinar la expresión del perímetro y los lados del polígono que se les presentó en el trabajo propuesto.

Tabla 24. Resultados tercera actividad guía trinomio cuadrado perfecto.

Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.	
Actividad 3	Observar el área de un polígono que está dada por la expresión que está dentro de una figura de color verde en metros dada $4y^2 + 136\,y + 289$. ● Realizar los procedimientos en el recuadro, para determinar la expresión del perímetro y los lados del polígono que se les presentó en el trabajo propuesto.

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 60 para su representación y posterior análisis.

Figura 59. Dimensiones del terreno.



Fuente: elaboración propia.

El 40% determinan la factorización de la expresión dada, determinan las dimensiones del terreno y el perímetro logrando una valoración superior, la expresión $4y^2 + 136\,y + 289$ es el área suministrada para factorizar la cual logran factorizar otro 40% logrando una valoración de alto y determinan dimensiones del terreno gracias a esta. El 14% de los estudiantes logra factorizar la expresión para lograr lo básico. se les

dificulta factorizar al 6% la expresión propuesta alcanzando una valoración de bajo ya que no realizan la actividad.

Fuente: elaboración propia.

Sumado a lo anterior, en la Tabla 25 se presentan los resultados correspondientes a la cuarta actividad de la tercera guía en la que se les solicitó a los estudiantes observar una figura que representa el plano del salón de clases, con las cotas o medidas en metros y realizar los procedimientos en el recuadro, para determinar el área del salón de clases y factorizar el área total encontrada.

Tabla 25. Resultados cuarta actividad guía trinomio cuadrado perfecto.

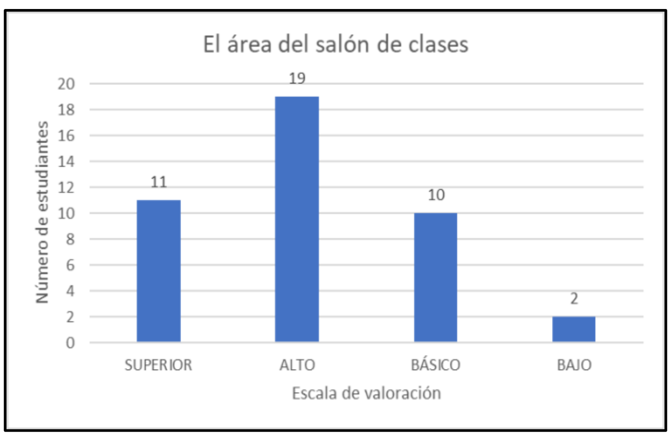
Objetivo:

Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.

Actividad 4	● Observar una figura que representa el plano del salón de clases, con las cotas o medidas en metros. ● Realizar los procedimientos en el recuadro, para determinar el área del salón de clases y factorizar el área total encontrada.

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 61 para su representación y posterior análisis.

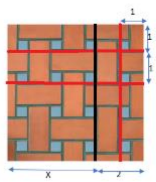
Figura 60. El área del salón de clases.



Fuente: elaboración propia.

El 26% determinan la factorización de la expresión dada, determinan el área total y con las medidas del lado, reconocen que es la factorización del área total, logrando una valoración superior. El 45% logró encontrar las dimensiones del terreno y el perímetro logrando una valoración de alto, la expresión $x^2 + 4x + 4$ es el área encontrada y al determinar el lado de las dimensiones del lado, son factores de la factorización del área total.

El 24% realiza la factorización a partir del área total, logrando una valoración de básico; es de tener en cuenta que la relación $(x + 2)(x + 2)$. Por otra parte, es muy interesante ver cómo los estudiantes emplean la parte pictórica para hallar relaciones con la factorización. Un 5% no cumple con la tarea propuesta para una valoración de bajo.



Fuente: elaboración propia.

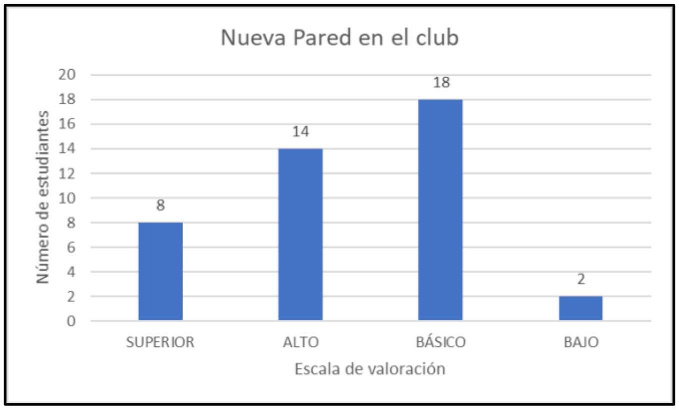
De la misma manera, en la Tabla 26 se realiza la presentación de los resultados de la quinta actividad de la guía de trinomio cuadrado perfecto en la que se les solicitó a los estudiantes observar la figura que representa una cancha de entrenamiento de tenis, la pared del fondo es la que se va a ampliar porque no cumple según los usuarios la norma, encontrando una expresión algebraica que permitiera dar solución a la situación.

Tabla 26. Resultados quinta actividad guía trinomio cuadrado perfecto.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5</td><td>● Observar la figura que representa una cancha de entrenamiento de tenis, la pared del fondo es la que se va a ampliar porque no cumple según los usuarios la norma.
● Evaluar la situación del club, ya que se desea ampliar una cancha para la práctica individual de un deporte de alta exigencia y se dispone de una pared cuadrada de lado $X\ en\ metros$.Los practicantes de ese deporte solicitan que sea más grande la pared del fondo, por lo que le añadieron 3 $metros$ a cada lado. ¿Cuál es el área de la nueva pared?
● Realizar el recuadro propuesto. Teniendo en cuenta que deben trabajar basándose en la pared del fondo.</td></tr>
</table>

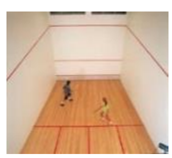
A partir de las respuestas obtenidas, se construyó la Figura 62 para su representación y posterior análisis.

Figura 61. Nuevas pared en el club



Fuente: elaboración propia.

El 19% determina el área de la pared inicial alcanzando una valoración de superior ya que logran factorizar fácilmente. El 33% del total de estudiantes alcanza una valoración de alto al encontrar el área nueva y factorizarla, donde se describen cuatro cuadrados de área 9, cuatro rectángulos de área $3x$ y el área inicial de x^2 , después de unificar el área total $x^2 + 12x + 36$, la relacionan con la nueva medida de la figura $x + 6$ y el área $(x + 6)(x + 6)$, que es la factorización de la nueva área, se analiza que las construcciones geométricas ayudan al estudiante a determinar la factorización de una manera más sencilla. El 43% logra factorizar la expresión desde la parte pictórica cometiendo algún error para alcanzar una valoración básico. Dejando un 5% que no cumple con la tarea propuesta.



Fuente: elaboración propia.

Para terminar la presentación de los resultados de la tercera guía de aprendizaje, en la Tabla 27 se realiza la exposición de los hallazgos de la sexta actividad en la que se les solicitó a los estudiantes de grado octavo construir un apartamento con papel silueta para el posterior planteamiento de una expresión algebraica que permitiera hallas áreas.

Tabla 27. Resultados sexta actividad guía trinomio cuadrado perfecto.

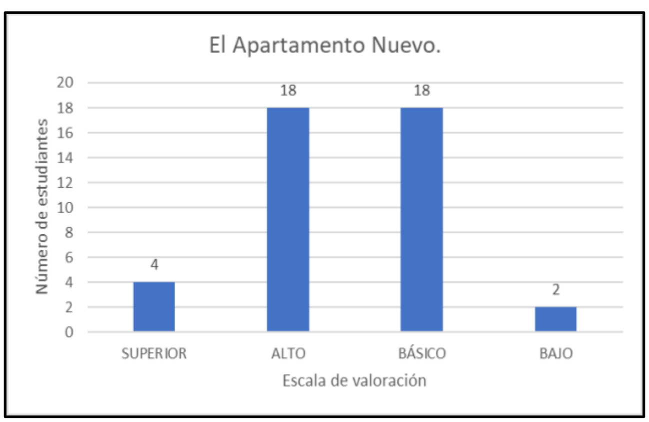
<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio cuadrado perfecto como herramienta para simplificar los procesos, en la solución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 6</td><td>

Construir con el papel silueta que se les entrega a los estudiantes, el nuevo apartamento de David López, con las dimensiones que nos presentan.
El señor López compró un apartamento nuevo cuyo terreno tiene forma cuadrada. Las áreas correspondientes a cada uno de sus espacios son:

- Sala: a^2 , color azul de 6 cm por 6 cm, (construcción en el papel silueta)

- Habitaciones: ab, color verde 2 cm por 6 cm, (construcción en el papel silueta)

- Baño: b^2 , color rojo de 2 cm por 2 cm, (construcción en el papel silueta)
Después de que los estudiantes construyan el apartamento en papel silueta, se necesita saber la cantidad de guarda escobas que deben colocar para cercar el exterior del apartamento y proteger las paredes, la expresión que corresponde para determinar esta cantidad y el área total del apartamento. Teniendo en cuenta que tiene dos habitaciones, un baño y sala comedor. Trabaja en el recuadro de tu construcción y los procedimientos de lo que se está pidiendo.
¿Cuál es la expresión del total del guarda escobas?
¿Cuál es el área de todo el apartamento del señor López?

</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 63, para su representación y posterior análisis.
Figura 62. El apartamento nuevo.


Fuente: elaboración propia.</td></tr>
</table>

Es de resaltar que los estudiantes disfrutan cuando se hacen actividades, de recortar y pegar, es más amigable el proceso de enseñanza aprendizaje, el 10 % de los estudiantes realiza el apartamento con agrado para una valoración de superior y factoriza el área total $a^2 + ab + ab + b^2$. El 43% determina la expresión de $4(a + b)$ que es el guardaescobas que se necesita para cubrir el apartamento y protegerlo de la humedad para lograr una valoración de alto, dejando un 43% de estudiantes que no determinan el guarda escobas para una valoración de básico. El 4% de los estudiantes no realiza el trabajo propuesto es de aclarar que en el colegio se realiza una actividad mayor sobre la globalización de Noruega y algunos estudiantes trabajaban en algunos puntos y no se concentraban por pensar en su obra de teatro.

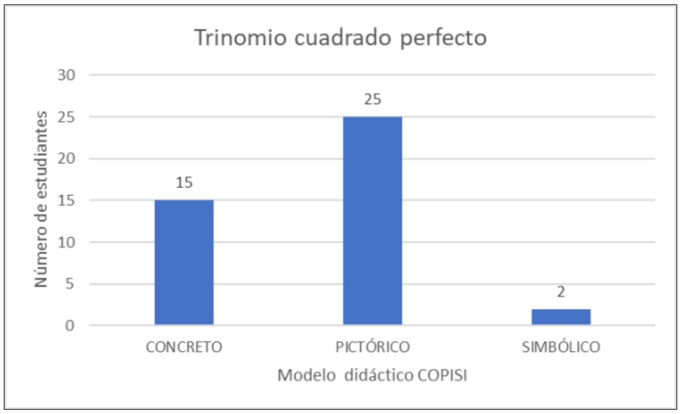
Fuente: elaboración propia.

Los resultados de la tercera guía de aprendizaje centrada en los componentes del caso de factorización trinomio cuadrado perfecto reflejaron que acciones como la construcción de edificaciones con papel silueta permiten que los estudiantes comprendan desde la manipulación de materiales concretos la aplicabilidad del álgebra teniendo en cuenta que esta se presenta como uno de los factores que generan apatía en su aprendizaje.

Sumado a lo anterior, se observó que loes estudiantes mejoraron de manera notable en la solución de expresiones algebraicas mediante la utilización del trinomio cuadrado perfecto puesto que al finalizar la implementación de las actividades lograron la identificación de las características específicas a saber, el primer término al cuadrado, el segundo término es dos veces el primero por el segundo y, el tercer término al cuadrado estableciendo así relaciones de composición y descomposición afianzando las partes simbólicas y pictóricas del modelo didáctico COPISI.

En este caso de factorización los estudiantes le dan más importancia a la parte grafica desde lo pictórico con un 60% en nivel alto, reconocen el cuadrado de un número como posible trinomio cuadrado perfecto y lo prueban desde la parte grafica antes de pasar a lo simbólico con un 5% en nivel alto. Dejando un 35% en nivel básico que trabaja sólo la parte simbólica, así Figura 63. Trinomio cuadrado perfecto.

como se evidencia en la Figura 64.



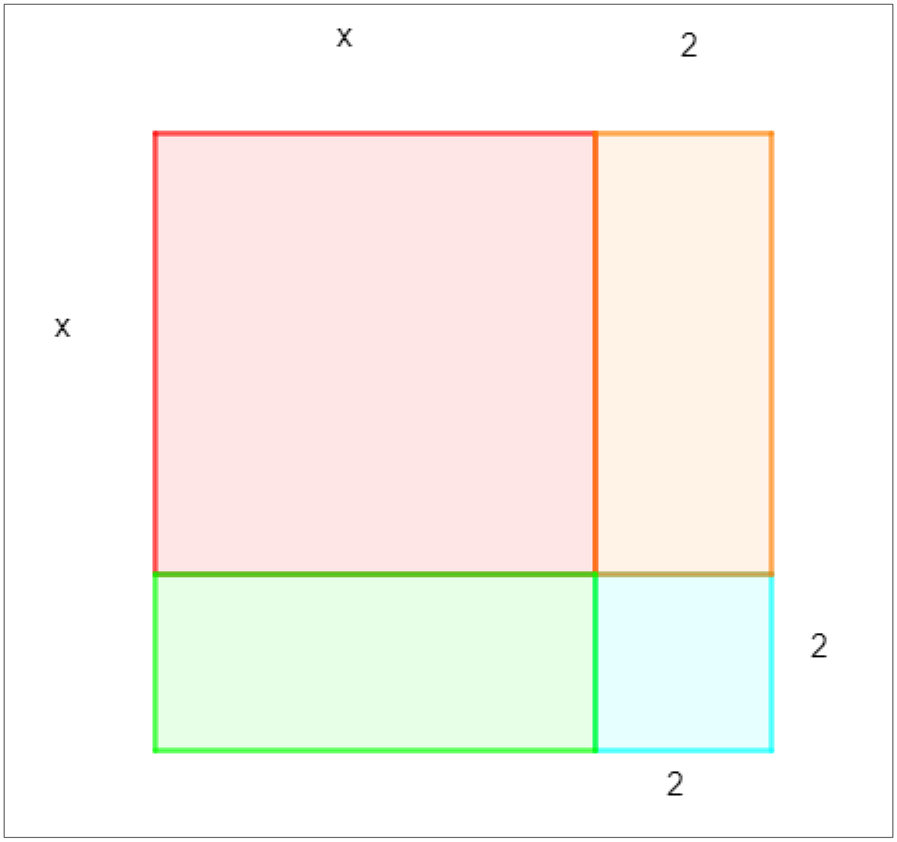
Fuente: elaboración propia.

En este caso, los estudiantes hacen un cuadrado de lado x con un cuadrado diagonal a este con la raíz del tercer termino en este caso 2 y los rectángulos de los lados a este al sumarlos desde sus áreas dan el segundo término de la expresión propuesta desde la parte pictórica, esto evidencia el modelo didáctico es incorporado por los estudiantes en el desarrollo de las actividades o retos propuestos en las guías de acuerdo con

$$x^2 + 4x + 4 = (X + 4)(X + 4)$$

Así como se evidencia en la Figura 65.

Figura 64. Trinomio cuadrado perfecto.



Fuente: elaboración propia.

4.2.4 Resultados de la guía trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

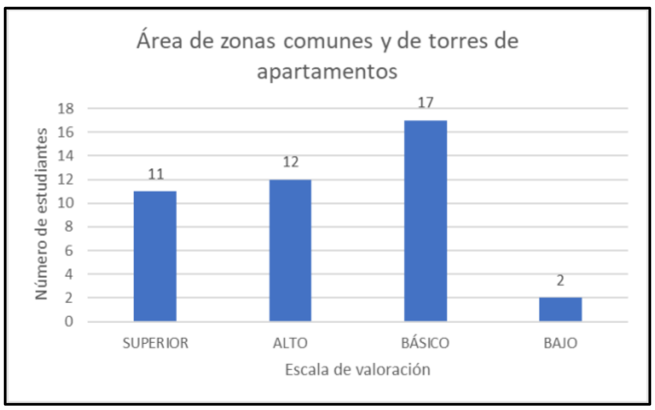
La cuarta guía de la secuencia de aprendizaje se enfocó en la enseñanza del trinomio de la forma x^2+bx+c, estuvo compuesta por un total de cinco actividades diseñadas de acuerdo con el modelo didáctico COPISI, resultados que se muestran a continuación.

En la Tabla 28, se presentan los resultados de la primera actividad desarrollada con el objetivo de que los estudiantes determinaran el área de las torres y zonas comunes de un conjunto de apartamentos, así como distancias específicas.

Tabla 28. Resultados primera actividad cuarta guía.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 1</td><td>● Se presenta un plano a los estudiantes con cuadrados de color blanco que son las torres de apartamentos que se van a levantar en un proyecto de urbanización, el color naranja representa las zonas comunes, se dan unas medidas expresadas en metros. Donde $2x$ es el lado de cada torre en forma cuadrada el terreno total mide de base 12 metros y 8 metros de altura y cada torre está en una esquina del terreno.
● Determinar el área de las torres y el área de las zonas comunes. De igual forma la distancia entre las torres de los apartamentos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 66 para su representación y posterior análisis.

Figura 65. Áres de zonas comunes y apartamentos.



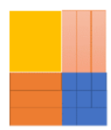
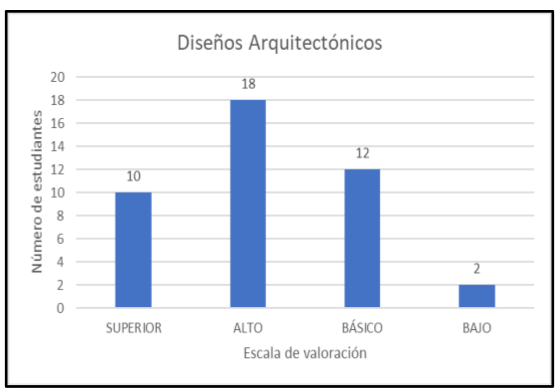
Fuente: elaboración propia.

El 26% de los estudiantes determinan el área total del terreno como, $(12\,m)(8m) = 96m^2$, *de la misma manera determinan que el área de cada torre es de* $(2x)(2x) = 4x^2$, logrando una valoración superior por el trabajo realizado. Por otra parte, se analiza que el 29% determina el nuevo largo del terreno es de $12 - 4x$ y su anchura es de $8 - 4x$, alcanzando una valoración alta. Ya que es la distancia que separa las torres de apartamentos que es otra tarea propuesta. Un 40% de estudiantes determina el área común restando al área total del área de las torres de apartamentos logrando una valoración de básico, en este grupo encontraron esta relación al factorizar $96 - 16x^2 = 4(24 - 4x^2)$. Quedando un 5% que no realiza correctamente la tarea propuesta para una valoración de bajo.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

De otra parte, en la Tabla 29 se presentan los resultados correspondientes a la segunda actividad de la cuarta guía en la que se les solicitó a los estudiantes dar solución a una situación problema en contexto mediante acciones de dibujo para hallar medidas de perímetro y área.

Tabla 29. Resultados segunda actividad cuarta guía.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2</td><td>
● Una constructora necesita determinar las dimensiones que deberán tener las ventanas de los nuevos apartamentos de un conjunto. El ingeniero desea que sean de forma cuadrada en color amarillo x por cada lado, al lado derecho tres ventanas de color rojo claro de ancho 1 metro y largo x metros, debajo 9 ventanas de color azul aguamarina de lado 1 metro y al lado izquierdo 3 ventanas naranjas de 1 metro de alto. Dibujar el diseño de la ventana, determinar el perímetro y el área total de la estructura de vidrio, para luego simplificar. Realiza en papel silueta las figuras.
● Luego de proponer la construcción a escala libre, de la estructura de vidrio, para desarrollar las tareas propuestas de determinar el perímetro y área de la estructura.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 67 para su representación y posterior análisis.
Figura 66. Diseños arquitectónicos.


Fuente: elaboración propia.
El 24% de los estudiantes cumple con las tareas asignadas logrando una valoración superior. Un 43% cumple con las tareas, pero relacionan el perímetro de la figura con la factorización logrando una valoración de alto, de la siguiente forma $x + 3 + x + 3 = x + 6\, y\, x + 3$ es el factor común que es la base entonces toman $(x + 6)(x + 3)$=$x^2 + 6x + 9$, me llama la atención la visión que da el rompecabezas algebraico para factorizar. Un 29% cumple con las tareas parcialmente para una valoración de básico. Un 4% no cumple con las tareas asignadas correctamente para una valoración de bajo.</td></tr>
</table>

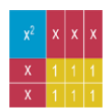
Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, en la Tabla 30 se realiza la exposición de los resultados de la tercera actividad de la cuarta guía de aprendizaje en la que se pretendía que los estudiantes de grado octavo hallaran las dimensiones de una serie de apartamentos como situación problema en un contexto específico.

Tabla 30. Resultados tercera actividad de la cuarta guía.

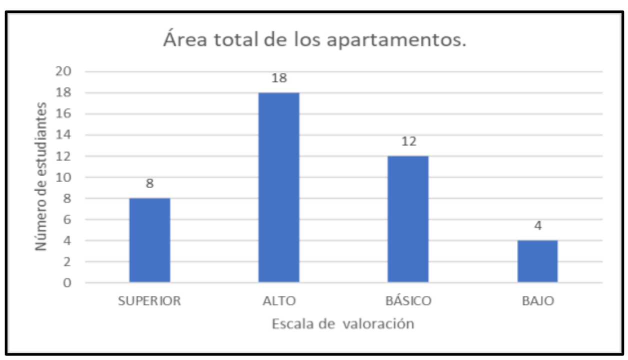
<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 3</td><td>

- Se presenta una imagen a los estudiantes que representa la distribución de distintos apartamentos en un conjunto residencial. Cada color representa un modelo de apartamento. Hallar las dimensiones de cada tipo de apartamento, todas las medidas están en metros.
- Luego de hallar el área total de los apartamentos se les propone que factoricen el área total.



</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 68 para su representación y posterior análisis.

Figura 67. Área total de los apartamentos.



Fuente: elaboración propia.

Un 19% cumple con las tareas, pero hacen otra representación del área total y se factorizan a partir de la nueva representación, logrando una valoración superior. El 43% de los estudiantes cumple con las tareas asignadas logrando una valoración de alto. El 29% reconoce el área de los distintos apartamentos y logra factorizar la expresión general del área para alcanzar un básico algunos cometen un error. Un 9% de los estudiantes no realizan la tarea propuesta correctamente para una valoración de bajo.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

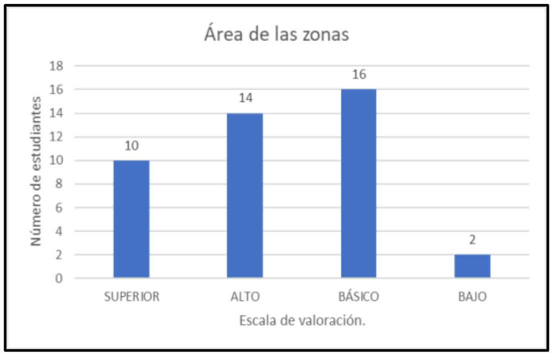
Sumado a lo anterior, en la Tabla 31 se referencian los resultados correspondientes a la cuarta actividad de la guía de aprendizaje en la que se pretendía que los estudiantes determinaran las medidas de cada una de las locaciones indicadas de acuerdo con la situación en contexto presentada.

Tabla 31. Resultados cuata actividad de la cuarta guía.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 4</td><td>● Determinar las medidas de cada zona, las medidas están dadas en metros. Luego, encuentra el perímetro de cada zona y del terreno total. Por último, encuentra la expresión del área total y simplifícala por la factorización en el recuadro de color azul. El lado de color azul tiene de lado x metros, el rectángulo verde tiene 3 por 4 metros en sus dimensiones.

● Se presenta una imagen a los estudiantes que representa la distribución de distintas zonas. Cada color tiene un área diferente, los estudiantes deben hallar el área de cada zona, luego el área total y factorizarla.
● Luego de hallar el área total de los apartamentos se les propone que factoricen el área total.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 69 para su representación y posterior análisis.

Figura 68. Área de las zonas.</td></tr>
</table>



Fuente: elaboración propia.

El 24% logra efectuar la factorización del área total, para alcanzar una valoración superior. El 33% de los estudiantes logran determinar el área de cada zona y el área total desde el gráfico, para alcanzar una valoración de alto, el 38% realiza la tarea de factorizar de manera parcial tomando una valoración de básico. Un 5% de los estudiantes realizan la tarea de manera incorrecta para tomar una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

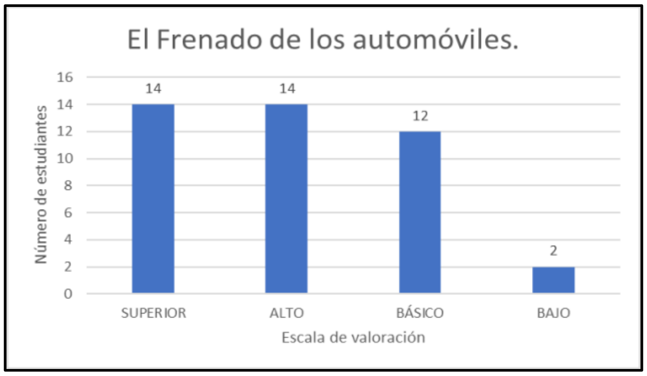
De la misma manera, en la Tabla 32 se presentan los resultados de la quinta y última actividad de la cuarta guía enfocada en la caso de factorización de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$**,** en la que se les pidió a los estudiantes que factorizaran las expresiones algebraicas correspondientes a una situación de tránsito.

Tabla 32. Resultados quinta actividad cuarta guía.

Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.	
Actividad 5	• Las autoridades de tránsito en una ciudad han determinado que la distancia de frenado de cierta marca de automóviles se rige por la fórmula, $d = v^2 + 5v + 6$, donde d es la distancia medida en metros y v la velocidad, en metros por segundo. Después de presentar la situación se les propone una pregunta generadora, para que la factoricen por medio de una gráfica y argumenten. • ¿De qué otra forma se puede expresar el trinomio que determina el frenado de un automóvil en esta ciudad?

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 70 para su representación y posterior análisis.

Figura 69. El frenado de los automóviles.



Fuente: elaboración propia.

Un 33% de los equipos logran una valoración superior, ya que ellos hacen una gráfica y representan la expresión de otra manera también emplean su gráfico para factorizar. El 33% factorizan de forma rutinaria, pero cumplen con la tarea para lograr una valoración de alto. Un 29% logra cumplir con la tarea algunos grupos cometen un error mínimo para una valoración de básico. Dejando un 5% de los grupos que no realizan la tarea correctamente para una valoración de bajo.

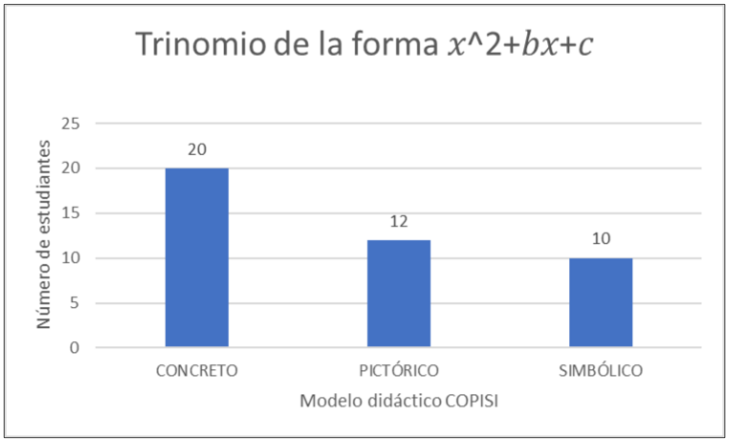
Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con los resultados encontrados durante el desarrollo de las actividades de la cuarta guía de aprendizaje, de manera general se concluye que se evidenció una mejoría significativa respecto a que los estudiantes relacionan las expresiones algebraicas del área de las figuras para formar el polinomio del área total y que este cumpla con las condiciones de ser un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

De igual manera, es de valorar que los gráficos que construyen responden a un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, lo cual es pertinente para afirmar que interiorizan el concepto desde lo concreto, pictórico y simbólico, recordando que las tres dimensiones son dinámicas; por lo cual, se infiere que los estudiantes lograron interiorizar conceptos propios del álgebra que son necesarios para su desempeño académico en los años posteriores según el nivel académico.

En la Figura 71, se condensan los resultados de estas actividades de acuerdo con la aplicación del modelo COPISI por parte de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

Figura 70. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$



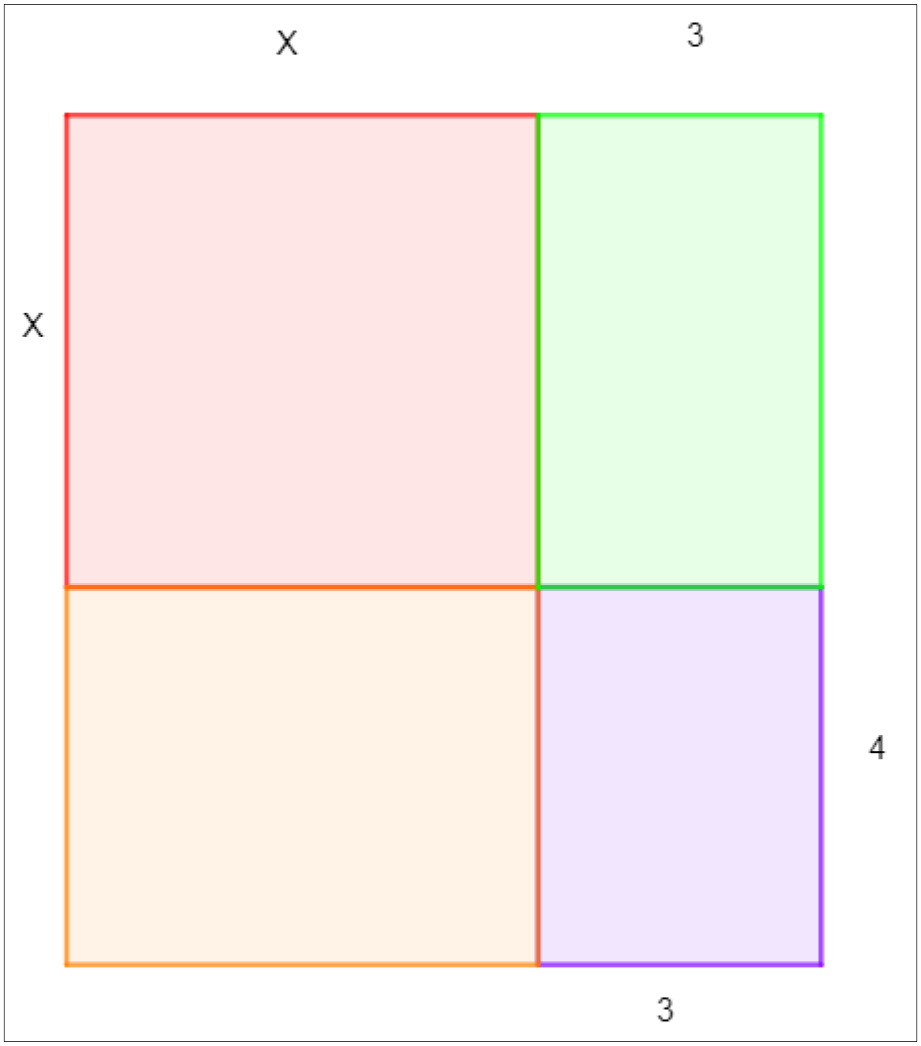
Fuente: elaboración propia.

En este trabajo realizado por los estudiantes fue fundamental el trabajo desde lo concreto y pictórico ya que ellos realizan construcciones de un cuadrado y en diagonal a este cuadrado un rectángulo ya que el número no tiene raíz exacta y esto deja que prime lo concreto para pasar a lo pictórico.

Al determinar el área de los rectángulos contiguos en la construcción buscan una igualdad con la expresión propuesta respecto a sus áreas:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

Así como se muestra en la Figura 72.



4.2.5 Resultados de la guía trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

La quinta y última guía estuvo conformada por un total de seis actividades enfocadas en el afianzamiento de los conceptos propios del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, utilizando el modelo didáctico COPISI, de acuerdo con las necesidades para solucionar situaciones problema planteadas en un contexto específico.

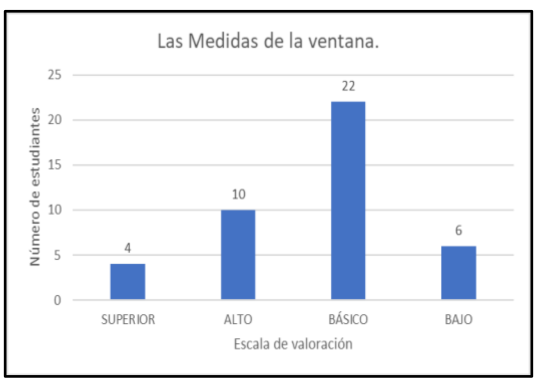
En este contexto, en la Tabla 33 se presentan los resultados correspondientes al desarrollo de la primera y segunda actividad en la que se presentó un plano con algunas medidas para que los estudiantes encontraran las áreas específicas factorizando de ser necesario.

Tabla 33. Resultados primera actividad guía $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 1</td><td>● Se presenta un plano con las medidas, se deben encontrar las áreas de cada zona, para posteriormente factorizar las mismas.
● Multiplicar la base por la altura, luego reducir los términos semejantes. Luego factorizar para interpretar la relación geométrica de la base y la altura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la siguiente tabla, para su representación y posterior análisis.

El 29% de los estudiantes cumplen con las tareas propuestas para alcanzar una valoración superior. El 29% logra cumplir con la tarea con la mayoría de las tareas propuestas para una valoración de Alto. El 32% de la población evaluada cumple con un error mínimo, para una valoración de básico. Varios estudiantes cometen errores al restar algebraicamente, lo cual no les permite cumplir con la tarea alcanzando una valoración de bajo esto representa un 10%.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2</td><td>● Se presenta una ventana con el área que debe tener dicha ventana, se les pide a los estudiantes que determinen las dimensiones de la ventana por medio de su área.
● Factorizar la expresión del área de la ventana, para encontrar sus dimensiones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 72 para su representación y posterior análisis.

Figura 71. Las medidas de las ventanas.



Fuente: elaboración propia.</td></tr>
</table>

El 10% de los estudiantes factorizan el área y determinan las medidas de la ventana logrando una valoración superior. El 24% de los estudiantes factorizan fácilmente alcanzando una valoración de alto. El 52% factorizan el área propuesta, pero se les dificulta argumentar la base o la altura para una valoración de básico. Dejando un 14% que no realiza la actividad propuesta de manera correcta para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

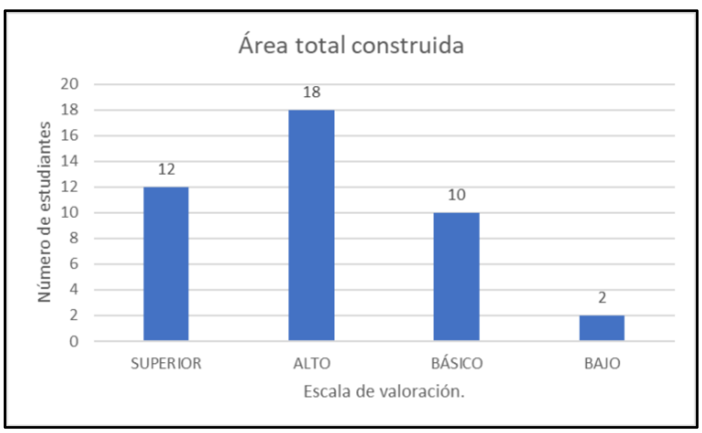
De otra parte, en la Tabla 34 se presentan los resultados de la tercera actividad de la quinta guía de aprendizaje en la que se abordó el trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, solicitando a los estudiantes encontrar el área total de una figura específica.

Tabla 34. Resultados de la tercera actividad guía $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.	
Actividad 3	● A los estudiantes se les presenta un plano con diferentes colores y en el centro de cada uno, una expresión algebraica que es el área de cada apartamento, se les pide a los estudiantes que encuentren el área total construida y se factorice.

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 73 para su representación y posterior análisis.

Figura 72. Área total construida.



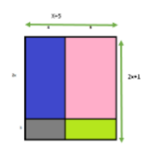
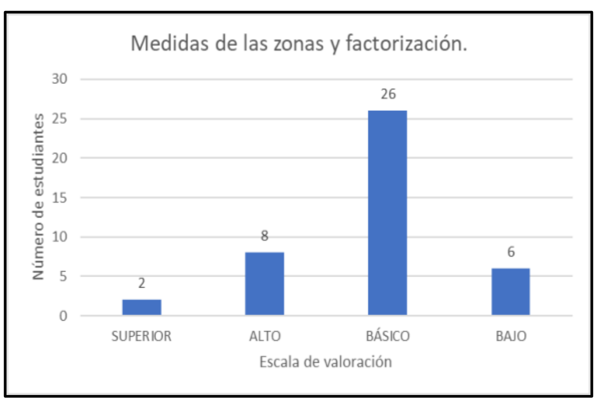
Fuente: elaboración propia.

El 29% de los estudiantes factorizan de manera completa el área total, alcanzando una valoración superior. El 43% de los estudiantes determinan el área total construida logrando una valoración de alto. El 24% de los estudiantes que no terminan la factorización de manera completa alcanzan una valoración de básico. Un 4% de los estudiantes no realizan correctamente la tarea propuesta para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, en la Tabla 34 se realiza la exposición de los resultados de la cuarta actividad de la guía enfocada en el caso de factorización del trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, solicitando a los estudiantes la simplificación de expresiones algebraicas.

Tabla 35. Resultados de la cuarta actividad guia $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$.

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma ax^2+bx+c, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 4</td><td>● A los estudiantes se les presenta un plano con diferentes colores y las dimensiones, de diferentes lados, se les solicita que hallen el perímetro y área del terreno total y luego factoricen el área total de las zonas.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 74 para su representación y posterior análisis.
Figura 73. Medida de las zonas y factorización.


Fuente: elaboración propia.
El 5% de los grupos logran hallar el área de cada zona y el área total, relacionan las dimensiones del terreno con la factorización de todas las zonas, así, $x+5\ con\ 2x+1$, es la factorización del área total $2x^2+11x+10$, relacionándola con el plano original, después de hacer la factorización normal, para alcanzar una valoración superior. Un 19% logran factorizar la expresión del área total, alcanzando una valoración de alto. El 62% hace la factorización normal, empleando el gráfico y las áreas, para lograr una valoración de básico. Dejando un 14% que le falta terminar correctamente el proceso de la factorización para lograr una valoración de bajo.</td></tr>
</table>

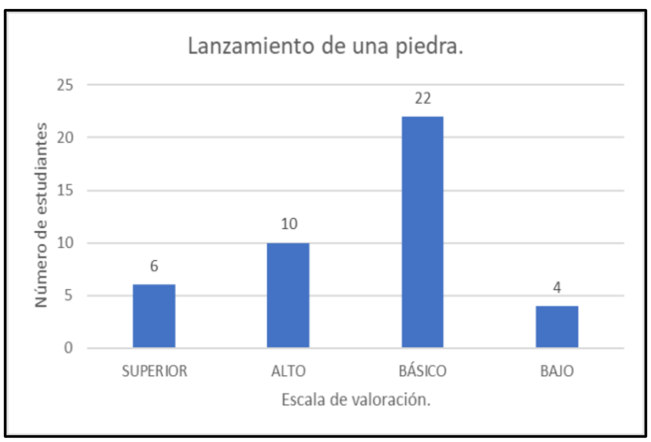
Fuente: elaboración propia.

De otra parte, en la Tabla 36 se presentan los resultados correspondientes a la quinta actividad de la guía enfocada en el trinomio $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, en la que se solicitó a los estudiantes determinar la factorización del modelo, el tiempo transcurrido y la altura máxima que alcanza la piedra desde el lanzamiento en la azotea.

Tabla 36. Resultados quinta actividad guía $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$,

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td>Actividad 5</td><td>● A partir de la situación: Si una persona lanza una piedra hacia arriba desde la azotea de un edificio de 240 pies de alto, la velocidad medida por video es de 32 pies por segundo según la cámara en sus fps (fotos por segundo), por las leyes físicas, la ecuación que modela la trayectoria del cuerpo está dada por, $h = -16t^2 + 32t + 240$.
● Determinar la factorización del modelo, el tiempo transcurrido y la altura máxima que alcanza la piedra desde el lanzamiento en la azotea.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 75 para su representación y posterior análisis.

Figura 74. Lanzamiento de una piedra.



Fuente: elaboración propia.

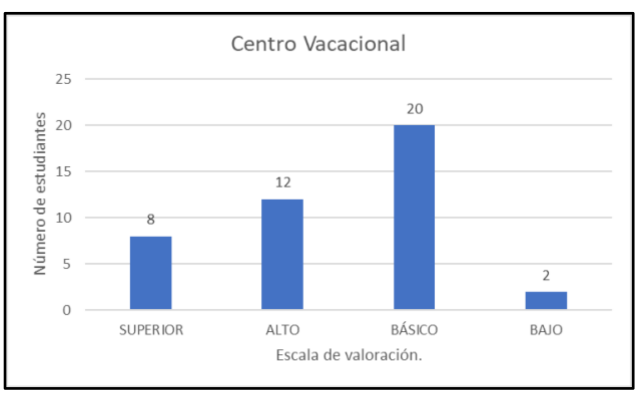
El 14% logran factorizar el modelo propuesto logrando una valoración superior. El 29 % logra una valoración de alto, ya que el signo menos del modelo les genera dificultad, para terminar su proceso, logrando una valoración de básico al 52%, por ejemplo $-16(t + 5)(t - 3)$ siendo lo correcto $-16(t - 5)(t + 3)$. La altura máxima la determinan correctamente los grupos de superior donde dicen que la piedra alcanza 16 pies de altura desde la azotea. El 5% de los grupos restantes no logran resolver la situación propuesta alcanzando</td></tr>
</table>

una valoración de bajo ya que lo hacen de manera mecánica y dicen, la piedra recorre más de 356 pies es la altura máxima como ejemplo de algunas respuestas.

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, en la Tabla 37 se presentan los resultados de la sexta y última actividad de la quinta guía de aprendizaje sobre el trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, en la que se les pidió a los estudiantes la construcción del centro vacacional con el papel silueta que se les entrega, luego de hallar el área total, que se factorice el área total.

Tabla 37. Resultados de sexta actividad guía $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$.

Objetivo: Determinar las dimensiones de las figuras propuestas, empleando el trinomio de la forma ax^2+bx+c, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas.	
Actividad 6	• Se realiza la construcción de un centro de vacaciones en papel silueta, el centro cuenta con 4 piscinas de $4cm$ por 2 cm, un restaurante de color amarillo de $2cm\ por\ 2cm$, la zona A, B, C, y D de 4 $cm\ por\ 4cm$ en color naranja. El largo de las piscinas está representado por X en metros y el ancho de 1 $metro$, el restaurante todos sus lados valen 1 $metro$ y las zonas de hospedaje están representadas por $X\ metros$ por todos sus lados. • Se les solicita a los estudiantes, la construcción del centro vacacional con el papel silueta que se les entrega, luego de hallar el área total, que se factorice el área total.
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 76 para su representación y posterior análisis. Figura 75. Centro vacacional.  Fuente: elaboración propia.	

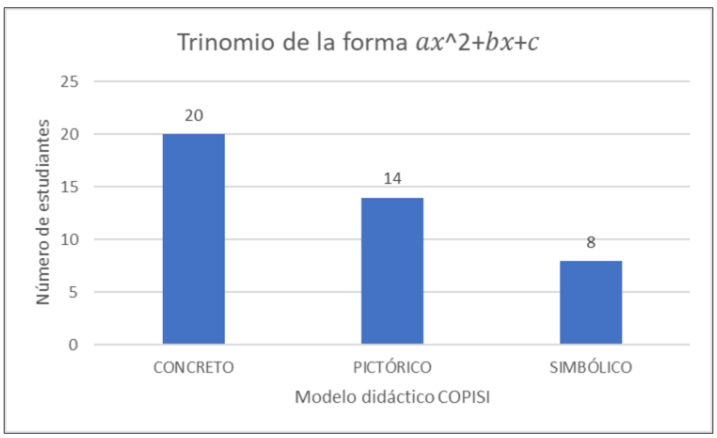
El 19% simplifican la factorización encontrada del área total $(2x+1)(2x+1)=(2x+2)^2$, de esa área total del centro vacacional $4x^2+4x+1$, alcanzando una valoración superior. El 29% construye lo propuesto y logra una valoración de alto. El 48% construye el centro vacacional y determina la factorización por medio de la construcción algunos cometen un error mínimo para una valoración de básico y el 4% no realiza la tarea propuesta para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de la quinta y última guía pedagógica enfocada en la resolución de situaciones problemas en contexto mediante la aplicación del caso de factorización del trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, demuestran que los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo lograron la elaboración de gráficos necesarios para solucionar los problemas optimizando el aprendizaje mediante la dimensión concreta y pictórica.

De otra parte, se evidenció que en este trinomio se hace clave lo concreto y pictórico, ya que los estudiantes mueven las figuras de diversas maneras hasta encontrar una igualdad con lo simbólico, datos que se evidencian en la Figura 77.

Figura 76. Trinomio de la forma ax^2+bx+c.



Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, respecto a este trinomio se encuentran en los resultados expresiones como esta

$$3x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(3x + 1)$$

Este es un error de construcción de lo concreto a lo pictórico, donde no hay igualdad con lo simbólico, ya que lo correcto sería tener 3 cuadros rojos seguidos. Lo concreto se posiciona en un 48% en alto, dejando un 19% en básico que sólo trabaja la parte simbólica.

Sumado a lo anterior, se alcanzó el logro del objetivo puesto que determinaron las dimensiones de las figuras propuestas con un 33% en nivel alto, empleando el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, como herramienta para simplificar los procesos y solucionar problemas, lo que se observó en el incremento de los porcentajes de los desempeños alto y básico que fueron significativos respecto a los resultados de la evaluación diagnóstica.

4.3 Sistematización de la evaluación final

A continuación, se presenta la sistematización y resultados encontrados durante la aplicación de la evaluación final compuesta por un total de cinco actividades basadas que pretendían verificar la efectividad en la aplicación del modelo didáctico COPISI respecto a la enseñanza y aprendizaje de la factorización en estudiantes del grado octavo del Colegio Andrés Rosillo.

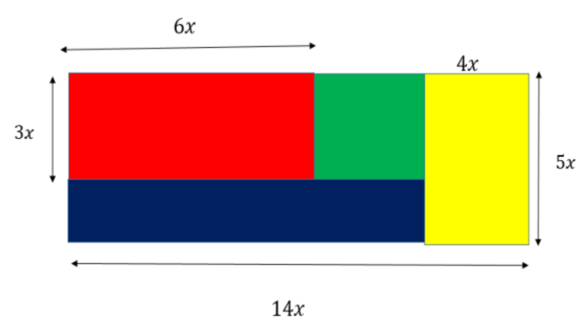
4.3.1 Resultados de la evaluación final

La primera actividad de la evaluación final se aplicó con el objetivo de evidenciar la capacidad de los estudiantes de grado octavo para hallar las medidas de las magnitudes área y perímetros y posteriormente aplicar los conceptos y procedimientos adquiridos para los procesos de la factorización, resultados que se pueden observar en la Tabla 38.

Tabla 38. Resultados primera actividad evaluación final.

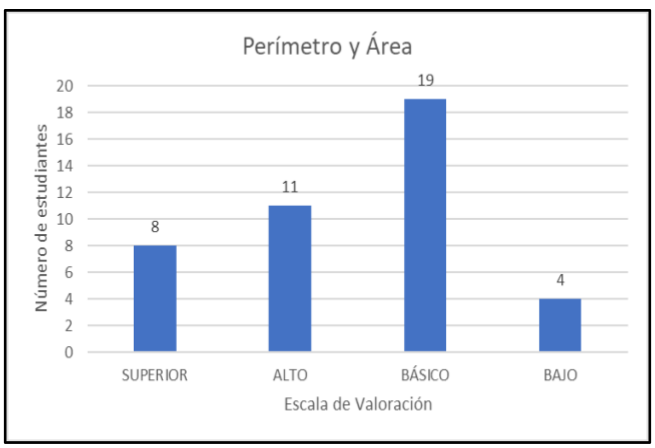
<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo: Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, la semirealidad, y el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.</td></tr>
<tr><td>Actividad 1</td><td>

- Se les pide a los estudiantes observar una figura y que escriban en el recuadro de la guía una expresión para calcular su perímetro y el área de cada zona, el área total. Realiza la suma del perímetro y el área total, luego factorizar.
- Aplicar, suma y resta algebraica, para determinar ciertas longitudes y poder cumplir con la tarea propuesta.



</td></tr>
<tr><td colspan="2">A partir de las respuestas obtenidas, se elaboró la Figura 78 para su representación y posterior análisis.

Figura 77. Perímetro y área.



Fuente: elaboración propia.</td></tr>
</table>

El perímetro y el área de cada zona es resuelto por un 19% para lograr una valoración superior. El 26% de los estudiantes factorizan $70x^2 + 74x = 2x(35x + 37)$ para una valoración de alto. El 45% dejan expresado sólo la suma del perímetro y área, para una valoración de básico. Dejando a un 10% que no realiza la tarea de manera correcta para una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

De otra parte, la segunda actividad de la evaluación final se enfocó en solucionar una situación concreta en contexto en la que los estudiantes debían hallar el área total de algunas locaciones de un apartamento evaluando la aplicación de la diferencia de cuadrados. Los resultados se presentan en la Tabla 39.

Tabla 39. Resultados segunda actividad evaluación final.

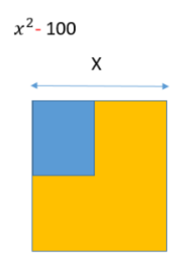
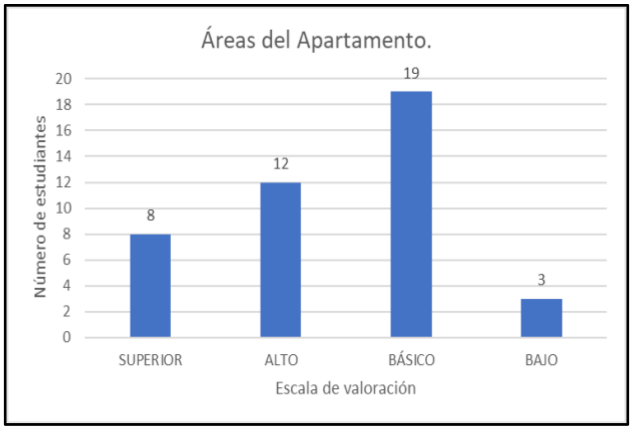
Objetivo: Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, la semirealidad, y el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.	
Actividad 2	• Identificar en el plano de un apartaestudio, donde todas las medidas están dadas en metros. • El área total del aparta estudio • El área del baño en color azul. • El área amarilla está representada por el binomio, factorizado. 
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 79 para su representación y posterior análisis.	

Figura 78. Áreas del apartamento.



Fuente: elaboración propia.

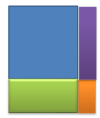
El área de cada zona es determinada por un 19% para una valoración de superior. El 29% de los estudiantes logran hacer casi todas las tareas para una valoración de alto. El 45% de los estudiantes resuelven algunas de las tareas con una valoración de básico. Un 7% solamente logran factorizar una expresión cometiendo un error al factorizar (x-100) (x+100), logrando una valoración de bajo. $x^2 - 100 = (x-10)(x+10)$, de todas las tareas propuestas.

Fuente: elaboración propia.

Así mismo, en la Tabla 40 se presentan los resultados de la tercera actividad de la evaluación final en la que se les solicitó a los estudiantes escribir una expresión algebraica que permita calcular el área y perímetro de la figura propuesta. Si el lado del cuadrado azul mide n, el ancho del rectángulo naranja mide 3 y la altura del rectángulo naranja es de 5. Todas las medidas están en metros, factorizar el área total.

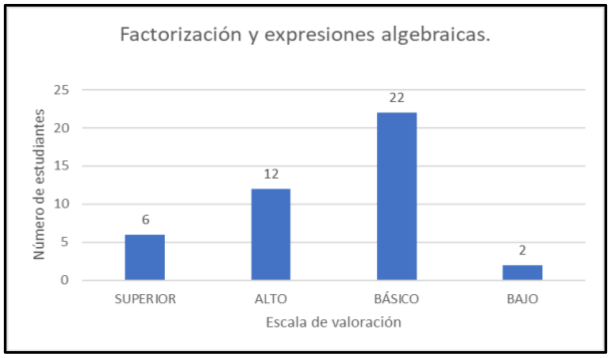
Tabla 40. Resultados tercera actividad evaluación final.

Objetivo: Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, la semi-realidad, y el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.	
Actividad 3	• Escribir una expresión algebraica que permita calcular el área y perímetro de la figura propuesta. Si el lado del cuadrado azul mide n, el ancho del rectángulo naranja mide 3 y la altura del rectángulo naranja es de 5. Todas las medidas están en metros, factorizar el área total.

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 80 para su representación y posterior análisis.

Figura 79. Factorización y expresiones algebraicas.



Fuente: elaboración propia.

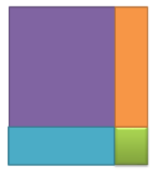
Por medio de los datos suministrados el 14% de los estudiantes cumplen con las tareas propuestas con una valoración superior. El 29% de los estudiantes factoriza la expresión y determina el perímetro $4n + 16$, logrando una valoración de alto. Un 52% logran una valoración de nivel básico. Dejando un 5% que no cumple con la tarea propuesta para alcanzar un bajo en su trabajo. Es de resaltar algunas relaciones encontradas por los estudiantes, $P = 2(n + 3) + 2(n + 5)$ y $A = (n + 3)(n + 5)$.

Fuente: elaboración propia.

De la misma manera, se presenta la Tabla 41 en la que se relacionan los resultados de la cuarta actividad de la evaluación final en la que se les pidió a los estudiantes una situación problema en contexto para que lo resuelvan utilizando un método de factorización.

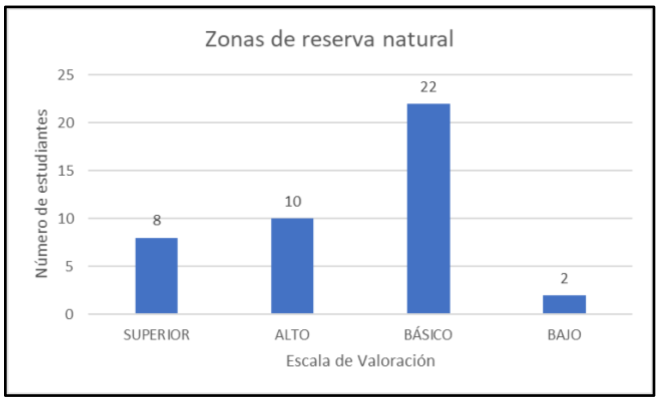
Tabla 41. Resultados cuarta actividad evaluación final.

Objetivo: Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, la semi-realidad, y el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.	
Actividad 4	• Se les propone a los estudiantes la siguiente situación: Zaida, Grace y William donaron dinero a una fundación que protege animales en peligro de extinción. El terreno que lograron comprar para proteger las aves está en la figura propuesta en metros, determinar el área total y factorizarla. Sabiendo que el

	cuadrado morado tiene de lado x,el cuadrado verde tiene de lado 6.Trabaja en el recuadro tus procedimientos. 

A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 81 para su representación y posterior análisis.

Figura 80. Zonas de reserva natural.



Fuente: elaboración propia.

Por medio de la figura relacionan las medidas dadas y encuentran el área de cada zona y la factorizan el grupo que representa un 19% para una valoración de superior. El 24% determina la factorización de la figura propuesta, para alcanzar una valoración de alto. El 52% de los estudiantes determinan la factorización con el lado de ambos cuadrados dados en la figura es decir x y 6, donde determinan que la factorización es $(x+6)(x+6)=(x+6)^2$. Donde se hace evidente que la parte pictórica es clave en el proceso de factorizar algunos cometen algún error para una valoración de lo básico. Dejando un 5% que no realiza la tarea propuesta para alcanzar una valoración de bajo.

Fuente: elaboración propia.

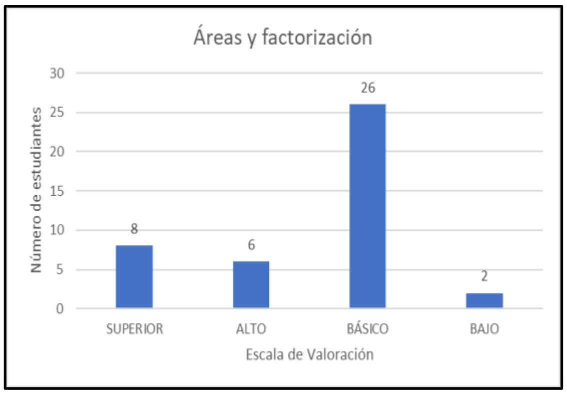
Sumado a lo anterior, en la Tabla 42 se presentan los resultados de la quinta actividad planteada en la evaluación final en la que se les solicitó a los estudiantes escribir una expresión algebraica que permita calcular el área y perímetro de la figura propuesta y aplicar la factorización.

Tabla 42. Resultados quinta actividad evaluación final.

Objetivo: Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, la semi realidad, y el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.

<table>
<tr>
<td>Actividad 5</td>
<td></td>
<td>● Escribir una expresión algebraica que permita calcular el área y perímetro de la figura propuesta. Si el lado del cuadrado azul mide n, el ancho del rectángulo naranja mide 3 y la altura del rectángulo naranja es de 5.Todas las medidas están en metros, factoriza el área total.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 82 para su representación y posterior análisis.

Figura 81. áreas y factorización.



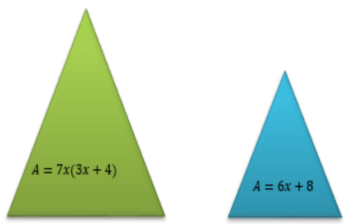
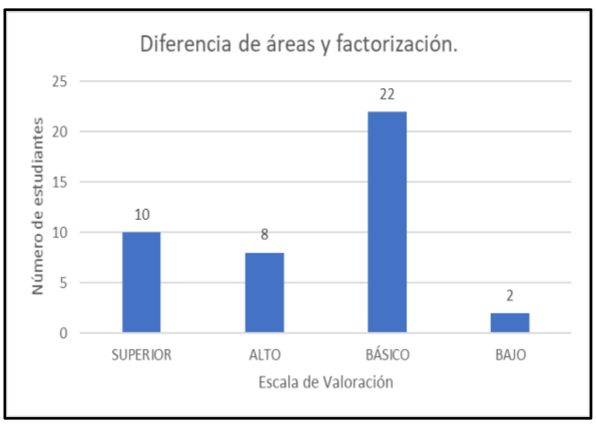
Fuente: elaboración propia.

Por medio de los datos suministrados el 19% determinó que el área es de $n^2 + 8n + 15$, para alcanzar una valoración superior. El 14% de los estudiantes factoriza la expresión y determina el perímetro $4n + 16$, logrando una valoración de alto. El 62% de los estudiantes logran las tareas con un mínimo de errores, alcanzando una valoración de nivel básico. Hay que destacar algunas relaciones que logran algunos estudiantes sólo por las relaciones gráficas consiguiendo estas relaciones.$P = 2(n + 3) + 2(n + 5)$ y $A = (n + 3)(n + 5)$. Quedando un 5% de estudiantes que no realizan la actividad para una valoración de bajo.</td>
</tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Para terminar la presentación de los resultados de la evaluación final, en la Tabla 43 se relacionan los hallazgos de la sexta actividad en la que se les solicitó a los estudiantes representar áreas, encontrar expresiones algebraicas, encontrar la diferencia, determinar el producto y factorizar.

Tabla 43. Resultados sexta actividad evaluación final.

Objetivo: Identificar algunos casos de factorización aplicando el álgebra geométrica por medio de la modelación de situaciones de la matemática, la semi-realidad, y el uso de expresiones algebraicas con relación a la factorización y la geometría.	
Actividad 6	● En cada figura que muestra A representa el área. Encuentra una expresión polinómica factorizada que represente las diferencias en las áreas. ● Se les solicita que encuentren la diferencia de áreas y se factorice. ● Luego que determinen el producto entre estos factores y que se factorice. 
A partir de las respuestas obtenidas, se construye la Figura 83 para su representación y posterior análisis. Figura 82. Diferencias de área y factorización.  Fuente: elaboración propia. El 24% logran hacer la diferencia de las áreas y su factorización, para una valoración superior. En la segunda tarea que es la multiplicación de los dos factores de la diferencia de área y su factorización lo logra un 19%, para una valoración de alto, donde muestran que $\Delta A = 7x(3x+4) - 2(3x+4) = (3x+4)(7x-2) = 21x^2 + 22x - 8$, después de determinar el producto de los dos factores de diferencia de las áreas logran llegar a $\frac{(21x+28)(21x-6)}{21}$, donde reducen a $(3x+4)(7x-2)$, para una valoración de alto. El 52% tiene problemas para descomponer la expresión de manera completa para una valoración de básico. Quedando un 5% que no realiza la actividad propuesta para una valoración de bajo.	

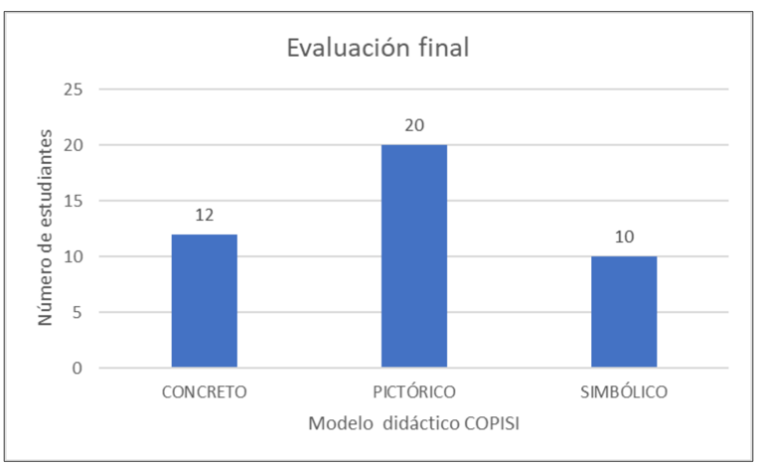
Fuente: elaboración propia.

Como se puede evidenciar en los resultados generales, los estudiantes en su gran mayoría de ubicaron en el desempeño básico; sin embargo, respecto a los hallazgos de la evaluación diagnóstica se observó un incremento significativo en los promedios de los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo al resolver situaciones problema en contexto que integraban áreas y perímetros mediante la factorización.

De otra parte, se verificó que el modelo didáctico COPISI resulta una herramienta funcional e instrumental para la enseñanza de las matemáticas específicamente en la factorización puesto que los estudiantes al manipular de manera geométrica las relaciones algebraica lograron establecer expresiones polinómicas que representaban una situación real desarrollando algoritmos de forma adecuada respecto a las operaciones de adición, sustracción y producto de expresiones algebraicas.

Para terminar, se presenta la condensación de los resultados encontrados respecto a la aplicación del modelo didáctico COPISI lo que se puede observar en la Figura 84.

Figura 83. Sintesis evaluación final.



Fuente: elaboración propia.

La mayoría de los estudiantes trabajan las tres dimensiones y pasan de una a la otra de acuerdo con su ritmo de aprendizaje y la facilidad que estos le vean a como emplearlas, para lograr resolver los retos en la evaluación, aunque la palabra evaluación “mata” a más de uno de los estudiantes que se destacan el proceso de aprendizaje. Además, siempre se hace un refuerzo o refinamiento en cada reto propuesto, por esto el análisis de pregunta por pregunta, el docente al finalizar hace una valoración normal del trabajo propuesto de cada guía; sin embargo, uno de los elementos fundamentales del modelo es hacer los refuerzos y la socialización de las construcciones diferentes que den cuenta de igualdad de lo concreto, pictórico y simbólico.

El 48% de los estudiantes logra un nivel alto al emplear lo pictórico para resolver los restos propuestos, dejando un 29% a lo concreto aquellos estudiantes que toman un nivel de alto. Para cerrar con un 23% que sólo trabaja lo simbólico en un nivel básico.

Conclusiones

Llevar a cabo un trabajo investigativo de monografía de grado que integra acciones en campo permite el reconocimiento, interpretación y reflexión de aquellas estrategias pedagógicas que permiten optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje fortaleciendo el quehacer docente desde el planteamiento de acciones pedagógicas innovadoras, en este caso particular la enseñanza de la factorización desde la geometría apoya en la aplicación del modelo didáctico COPISI.

Lo anterior, teniendo en cuenta que desde el ejercicio y experiencia se ha logrado establecer que los temas del álgebra específicamente los casos de factorización resultan densos y difíciles de comprender para estudiantes principalmente porque no comprenden su utilidad en contextos reales; por ello, se considera relevante diseñar estrategias pedagógicas innovadora transformando los procesos metodológicos que garanticen que los procesos e enseñanza y aprendizaje sea dinámico y activo, es decir, aprender desde la experiencia.

En este contexto, frente a los resultados del primer objetivo específico dirigido hacia la construcción de fundamentos conceptuales que aportan al diseño de un material para el desarrollo del pensamiento variacional específicamente la factorización, se identificó el modelo didáctico

COPISI como una opción que permite el afianzamiento de conceptos y procedimientos algebraicos puesto que utiliza elementos concretos, pictóricos y simbólicos.

En este contexto, se concluye que el material manipulativo en el proceso de enseñanza aprendizaje permite fortalecer el trabajo en el aula y dar la seguridad a los estudiantes de dibujar o emplear la parte pictórica si no se tiene las fichas de rompecabezas algebraico es otra alternativa con la que cuentan y es de gran valor para lo que para ellos es abstracto y se asimila de mejor manera con lo concreto, pictórico y simbólico.

De la misma manera, se establece que el trabajo con el modelo COPISI en el aula es enriquecedor para el accionar educativo y genera interés y entusiasmo al construir, proponer, argumentar sobre las posibles soluciones que el estudiante genera desde las tres dimensiones; además permitió que los estudiantes mejoraran su aprendizaje en álgebra mediante procesos de exploración y descubrimiento, imaginación y lo crucial en la comunicación matemática con sus compañeros donde se presenta un aprendizaje duradero o significativo de los conceptos algebraicos trabajados.

De otra parte, el segundo objetivo específico se planteó como diseñar e implementar guías didácticas para el desarrollo de habilidades en los estudiantes de grado octavo frente al concepto de factorización geométrica algebraica, desde el planteamiento de una estrategia pedagógica conformada por guías de aprendizaje se desarrolló el trabajo monográfico enfocado en la factorización desde las relaciones algebraicas y geométricas interactuando de una funcional e instrumental con las temáticas inherentes a ello estableciendo relaciones concretas entre los procesos algebraicos y las experiencias de los estudiantes que integren el uso del álgebra mediante la implementación del modelo didáctico COPISI.

En línea con lo anterior, el método COPISI permitió concluir que los estudiantes aprenden de manera interactiva a partir de elementos claros sencillos y sobre todo que son de fácil reconocimiento es decir a partir de sus experiencias y conocimiento previos. Los resultados obtenidos en las guías de aprendizaje permiten observar que el interés por aprender a factorizar es de mayor agrado a su vez es posible determinar que encuentran por ellos dos caminos de resolver los retos propuestos; lo anterior, se evidenció en los resultados obtenidos en cada una de las guías indican que la mayoría de los estudiantes se interesaron por el desarrollo de las guías y resolvieron de manera asertiva los problemas planteados.

De esta manera, los resultados de la prueba diagnóstica evidencian que a los estudiantes se les dificulta establecer relaciones entre lo algebraico y lo geométrico, debido a que los conceptos matemáticos se han trabajado de forma separada y abstracta. Además, se tiene una barrera en que los estudiantes no ven geometría desde grado quinto, lo cual se hizo necesario retomar conceptos básicos para poder avanzar en el proceso del aprendizaje de la factorización algebraica desde la mirada que una herramienta aliada es la geometría.

De otra parte, la implementación de las guías didácticas fundamentadas en el modelo didáctico COPISI permitió que los estudiantes de grado octavo del Colegio Andrés Rosillo afianzaran conceptos propios de la factorización y los aplicaran en situaciones ubicadas en un contexto específico para encontrar perímetros y áreas de figuras geométricas. Lo anterior, permite unificar procesos algebraicos y geométricos dando paso a la estructuración de conceptos de factorización fundamentales para el desarrollo del pensamiento de los estudiantes en los diferentes niveles de abstracción.

Para terminar, el tercer objetivo específico se estableció como sistematizar el desarrollo y la apropiación que tuvieron los estudiantes de la factorización algebraica a través de las guías didácticas bajo el modelo COPISI, concluyendo que bajo la implementación de las dimensiones concreta, pictórica y simbólica se les permite reconocer entre el término de un polinomio y un factor, para utilizar diferentes casos de factorización en la solución de problemas.

Además, le modelo COPISI les permitió a los estudiantes escribir y dibujar una expresión algebraica como el producto de varios polinomios primos, la identificación del caso de factorización que se debe aplicar a cada expresión algebraica para modelar adecuadamente una situación planteada, buscar la solución correcta a los ejercicios planteados desde lo concreto, pictórico y lo prueba con los simbólico para factorizar de manera correcta bajo el modelo didáctico COPISI.

Recomendaciones

Incluir dentro de las estrategias didácticas problemas que les permitan a los estudiantes relacionar los conceptos matemáticos con su contexto, ya que esto les causa curiosidad y deseo por aprender desde sus propias experiencias.

El Pensamiento variacional les permite a los estudiantes por medio de COPISI analizar, organizar y modelar situaciones lo cual hace que se apropien de la factorización algebraica como herramienta en la solución de problemas y una herramienta poderosa para resolver problemas.

Antes de usar la geometría como herramienta para la enseñanza de la factorización se sugiere hacer un repaso de los conceptos básicos, lo cual facilita el desarrollo de una estrategia didáctica basada en el álgebra geométrica como COPISI desde lo concreto, pictórico y simbólico.

Se recomienda que las falencias identificadas con la implementación de la prueba diagnóstica se tengan en cuenta al momento de diseñar contenido nuevo para la enseñanza de la factorización.

Implementar dentro de las guías didácticas no solo el uso de conceptos matemáticos, sino con otras áreas del conocimiento que posibiliten la transversalidad, desarrollando así competencias de razonamiento y desarrollo de pensamiento matemático. Lo cual hace ver la importancia de la factorización en diversas situaciones como la física, la biología, entre otras.

Es necesario que los conceptos matemáticos no se aborden de forma separada, ya que estos pueden ser significativos para los estudiantes y con el fin común de cambiar la mala imagen de las matemáticas o la mala experiencia de algunos familiares que hace que se trascienda creando un paradigma que se tiene de las matemáticas que consiste en la implementación de algoritmos sin sentido. La construcción de rompecabezas algebraicos puede resolver problemas de factorización desde otras miradas como la suma de distancias.

- Para finalizar, es evidente que la factorización no presenta mayor interés respecto a otros temas matemáticos, es merecer del docente enseñarlos de manera didáctica para que los estudiantes se comprometan con el desarrollo de estos.
- Se sugiere el uso de rompecabezas algebraicos para fortalecer el aprendizaje mediado por la curiosidad donde les permite manipular y ver las relaciones entre las áreas y expresiones algebraicas haciendo una experiencia más agradable en el proceso de aprendizaje.

Anexos

Referencias Bibliográficas

Acuña, J., Bustos, G., Cuervo, M., & Pulido, K. (2017). Uso de representaciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas a través del método griego: experimento de enseñanza. *Funes*, 49-55. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/2528/1/UsoderepresentacionesAcu%C3%B1aAsocolme2012.pdf

Alonso, C., López, P., & De la Cruz, O. (2013). Creer Tocando. Tendencias Pedagógicas. *Tendencias Pedagógicas, 31*, 249-262. Obtenido de https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/2036

Ballén, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado.* Tesis de Maestría, Univesidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Obtenido de https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/10836/javierorlandoball%c3%a9nnovoa.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Barrantes , R. (2014). *Investigación: Un camino al conocimiento, Un enfoque Cualitativo, cuantitativo y mixt.* San José, Costa Rica: EUNED.

Briceño, A. (2018). La evaluación en el proceso de aprendizaje. *Revista TorreónUniversitario*, *7*(20), 22-31. Obtenido de https://revistatorreonuniversitario.unan.edu.ni/index.php/torreon/article/view/262/387

Calderón, P. (2014). *Percepciones de los y las docentes del primer ciclo básico, sobre la implementación del Método Singapur en el colegio Mario Bertero Cevasco de la Comuna Isla de Maipo.* Tesis de maestría, Universidad de Chile, Santiago, Chile. Obtenido de https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/130579/Tesis%20Pedro%20Calderon%20Lorca.pdf?sequence=1&isAllowed=y}

Colbert, V. (2010). El rol del docente como agente de cambio. *Revista Ruta Maestra*, 26-28. Obtenido de https://rutamaestra.santillana.com.co/wp-content/uploads/2018/09/El-rol-del-docente-como-agente-de-cambio.pdf

Cordero, F., Villa-Ochoa, J., Rosa, M., & Suarez , L. (2019). La modelación en la matemática educativa: sus métodos de investigación y el impacto educativo en la información y desarrollo de la docencia matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), 549-557. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/13952/1/Cordero2019La.pdf

Disasmitowat, E., & Utami, A. (2017). Analysis of students' mathematical communication skill for algebraic factorization using algebra block. *International Conference on Research in Education - Sanata Dharma University*. Obtenido de https://usd.ac.id/seminar/icre/wp-content/uploads/2018/07/72-84_Disasmitowati_ICRE2017.pdf

Gómez, G. (2017). *El aprendizaje significativo y el desarrollo de capacidades comunicativas de textos narrativos.* Tesis de maestría, Universidad del Perú, Lima, Perú. Obtenido de http://www.repositorioacademico.usmp.edu.pe/bitstream/handle/usmp/665/cervantes_fg.pdf;jsessionid=59893731640484A5A2B6B4EEF48CA579?sequence=3

González, F., & Hernández, E. (2018). Representaciones matemáticas en estudiantes de bachillerato: una visión desde el cotidiano. *ACta Latiniamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1366-.

Ley General de Educación de 8 de febrero de 1994. . (s.f.). Por la cual se expide la ley general de educación.

Lobo, E. (2022). *Aprendizaje de seis casos de factorización por medio de la gamificación en grado octavo de la institución educativa técnica microempresarial de Soledad.* Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga. Obtenido de https://repository.unab.edu.co/bitstream/handle/20.500.12749/17477/2022_Tesis_Edgar_Alexander_Lobo.pdf?sequence=1

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje de matemáticas.* Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A. Obtenido de https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006 en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Oviedo, M., & Panca, G. (2017). *Influencia del método Singapuer en la resolución de problemas aditivos en los estudiantes de segundo grado del nivel primaria de la Institución Educativa 40199.* Tesis de maestría, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Arequipa, Perú. Obtenido de http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/4535/Edovsuma.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos. *Revista de Investigación, 35*(73), 169-194. Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/3761/376140388008.pdf

Rivera, D. (2020). *Enseñanza de la factorización a partir de la relación entre álgebra y geometría.* Medellín, Colombia.

Valoyes, L. (2013). Estudio de la representación del álgebra en los documentos curriculares colombianos. *Revista Perspectivas Educativas*(6), 15-32. Obtenido de http://revistas.ut.edu.co/index.php/perspectivasedu/article/view/346/297

Wagner, O., Giraldo, V., & Hoyos, E. (2017). El álgebra geométrica como mediadora en la enseñanza de la factorización y los productos notables. *Revista Universidad del*

WQuindio, *26*(1), 139-144. Obtenido de

https://ojs.uniquindio.edu.co/ojs/index.php/riuq/article/view/140