REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de maestría en educación matemática

# ELEMENTOS Y ARGUMENTOS COMPARTIDOS ENTRE LA COMBINATORIA Y EL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Willingtón Steven Rodríguez Rincón

Bogotá D. C.

2021

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de maestría en educación matemática

# ELEMENTOS Y ARGUMENTOS COMPARTIDOS ENTRE LA COMBINATORIA Y EL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Willingtón Steven Rodríguez Rincón

Director de tesis:

Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Dr. Diana Carolina Pérez Duarte

Bogotá D. C.

2021

**Agradecimientos**

En primer lugar, le doy Infinitas gracias a Dios por haberme dado la sabiduría y el entendimiento para poder llegar al final de mi tesis de grado y por todo lo que me ha dado en la vida.

También deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis de maestría, el Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, por la dedicación y apoyo que le brindo a esta investigación.

Gracias a mi familia, a mis padres, hermanos e hijos, quienes siempre me impulsaron a seguir adelante y superar todos los obstáculos.

A mi esposa, compañera y cómplice quién fue el apoyo en muchas noches de arduo trabajo y esfuerzo.

## SÍNTESIS

Las matemáticas es el conjunto de elementos, proporciones y relaciones que pueden ser utilizados en el análisis o resolución de problemas, en su contenido tiene elementos, que se comparten de un tema a otro, logrando articular y relacionar los componentes y mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, en la integración de los temas de la combinatoria y el álgebra surgen ciertos inconvenientes, iniciando que es un campo de investigación poco estudiado, seguido de que los estudiantes de grado noveno del colegio Gimnasio Mayor del Occidente, presentan dificultades para hacer combinaciones en los elementos de un conjunto y también limitaciones para plantear interpretar, abordar y argumentar el sentido de la solución de un problema matemático. En la investigación se propone un sistema de actividades que tienen una estructura pedagógica y didáctica sustentada en la teoría de resolución de problemas, en particular en los problemas retadores, en la argumentación y en el uso de los temas de la combinatoria y el álgebra.

La implementación de las actividades en el aula permite: mayor comprensión de los estudiantes frente al uso de elementos compartidos entre la combinatoria y el álgebra, el desarrollo de la habilidad para resolver problemas, argumentar y utilizar números y relaciones matemáticas, también estimula la motivación por el aprendizaje, logrando mayor interés por las matemáticas.

## ABSTRACT

Mathematics is the set of elements, proportions and relationships that can be used in the analysis or resolution of problems, in its content it has elements, which are shared from one topic to another, managing to articulate and relate the components and improve the learning of the students. However, in the integration of the topics of combinatorics and algebra certain drawbacks arise, beginning that it is a little-studied field of research, followed by the fact that the ninth-grade students at the western school gymnasium have difficulties to make combinations in the elements of a set and also limitations to pose, interpret, address and argue the meaning of the solution of a mathematical problem. The research proposes a system of activities that have a pedagogical and didactic structure supported by the theory of problem solving, in particular in challenging problems, in argumentation and in the use of the themes of combinatorics and algebra.

The implementation of the activities in the classroom allows: greater understanding of the students regarding the use of elements shared between combinatorics and algebra, the development of the ability to solve problems, argue and use numbers and mathematical relationships, it also stimulates motivation for learning, achieving greater interest in mathematics.

## TABLA DE CONTENIDO PÁG.

**INTRODUCCIÓN** 1

**CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE** 9

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje en combinatoria y el álgebra en la Educación Básica Secundaria ........ 9

1.1.1. Aprendizaje del concepto de combinatoria a partir de una secuencia didáctica ........ 9

1.1.2. Diseño de una estrategia didáctica para que se facilite la apropiación de la conceptualización de la teoría combinatoria en los estudiantes del grado décimo, en la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del municipio de Medellín........ 11

1.1.3. Razonamiento combinatorio en alumnos de educación secundaria obligatoria ........ 12

1.1.4. School Algebra........ 14

1.1.5. Framing a Classroom Intervention Study in a Middle-School Algebra Environment........ 15

1.1.6. ОБЩЕСТВЕННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ ........ 17

1.1.7. Aprendizaje del concepto de combinatoria en estudiantes del grado sexto y séptimo del programa ONDAS ........ 18

1.1.8. Examining the Role of Prior Experience in the Learning of Algebra ........ 19

1.2. Investigaciones sobre la argumentación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el tema de combinatoria y el álgebra en los estudiantes de educación básica secundaria ........ 21

1.2.1. Análisis histórico- epistemológico de los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo ........ 21

1.2.2. El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria........ 22

1.2.3. Modelo de Toulmin en el diseño de propuestas didácticas para enseñar matemáticas........ 23

1.2.4. La argumentación sustancial, una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas ........ 24

1.2.5. Argumentación en el álgebra temprana ........ 26

1.2.6. Developing Subject Matter Knowledge through Argumentation ........ 27

1.2.7 Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas ........ 28

1.3. Investigaciones sobre el enfoque de resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra........ 29

1.3.1. Razonamiento combinatorial para resolver problemas ........ 29

1.3.2. Los niveles de Van Hiele aplicados a la resolución de problemas de razonamiento combinatorio........ 31

1.3.3. Errors and difficulties in solving algebraic procedures in secondary school students .. 33

1.3.4. La resolución de problemas para la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad en contribución al desarrollo del pensamiento aleatorio ........ 34

1.3.5. Teaching and Learning Middle School Algebra: Valuable Lessons from the History of Mathematics ........ 36

1.3.6. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório 38

1.3.7. Desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas, a través de la resolución de problemas ........ 39

Conclusiones del capítulo 1........ 40

**CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO** 42

2.1. Fundamentos de la argumentación en la matemática ........ 42

2.1.1 Argumentación en el aula de clases........ 43

2.1.2 Modelo argumentativo de Toulmin ........ 45

2.1.3 Referentes sobre la evaluación argumentativa ........ 47

2.2. Referentes sobre los elementos matemáticos de la combinatoria ........ 48

2.2.1. Referentes sobre la combinatoria........ 48

2.2.2 Elementos de la combinatoria ........ 49

2.3 Elementos matemáticos del algebra........ 52

2.4. Referentes de la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores ........ 57

Conclusiones del capítulo 2........ 65

**CAPÍTULO 3, METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN** 67

3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación........ 67

3.2. Población y muestra (Unidad de análisis) ........ 69

3.3. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados........ 69

3.4. Fases de la investigación ........ 70

Conclusiones del capítulo 3........ 71

**CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES SOBRE ELEMENTOS COMPARTIDOS ENTRE LA COMBINATORIA Y EL ÁLGEBRA** 73

4.1. Estructura de las actividades........ 73

4.2. Propuesta del sistema de actividades........ 74

4.2.1 Actividad 1. Las combinaciones y sus elementos........ 74

4.2.2 Actividad 2. Las combinaciones y sus elementos........ 77

4.2.3 Actividad 3. Principio de biyección y función biyectiva ..................................................... 82
4.2.4 Actividad 4. Combinaciones y el binomio de Newton ....................................................... 84
4.2.5 Actividad 5. Números combinatorios y cardinalidad de un conjunto................................ 89
Conclusiones del capítulo 4.........................................................................................................92
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL SISTEMA DE ACTIVIDADES 93
5.1. Análisis de los resultados de la implementación del sistema de actividades ..............................93
5.1.1. Actividad 1: Elementos y argumentos de las combinaciones ...................................... 93
5.1.2. Actividad 2: Elementos y argumentos de las combinaciones ...................................... 97
5.1.3. Actividad 3: Principio de biyección y función biyectiva. ............................................ 102
5.1.4. Actividad 4: Combinaciones y el binomio de Newton ............................................... 106
5.1.5 Actividad 5: Números combinatorios y cardinalidad de un conjunto............................... 110
Conclusiones del capítulo 5......................................................................................................114
CONCLUSIONES 116
RECOMENDACIONES 119
BIBLIOGRAFÍA 120
ANEXOS 125
Anexo 1. Entrevista a docente experta en el tema ..............................................................125
Anexo 2. Evidencias de la actividad 1 .................................................................................128
Anexo 3. Evidencias de la actividad 2 .................................................................................129
Anexo 4. Evidencias de la actividad 3 .................................................................................130
Anexo 5. Evidencias de la actividad 4 .................................................................................131
Anexo 6. Evidencias de la actividad 5 .................................................................................132

## INTRODUCCIÓN

Las matemáticas a través de la historia se han ido perfeccionando para mejorar y solucionar problemas de la vida cotidiana. Sus conocimientos son fundamentales para el desarrollo de la capacidad de razonamiento y del pensamiento analítico de los seres humanos, que permite desarrollar la habilidad de investigar y conocer la verdad sobre el contexto.

A través de las matemáticas se pueden explicar el funcionamiento de las cosas a partir de las evidencias, datos y resultados. Entre las ramas de las matemáticas, la combinatoria determina las diferentes formas en las que se puede organizar un conjunto determinado de elementos, dando diferentes posibilidades a su uso en la vida real y el álgebra, permitiendo organizar una serie de elementos para obtener conclusiones y resolver problemas.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y del álgebra ha sido abordado en eventos, congresos y reuniones a nivel internacional en el campo de la Educación Matemática, destacándose: International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), el International Congress on Mathematical Education (ICME), el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), la Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), los Congresos Colombianos de Matemática, entre otros. En estos congresos y reuniones se presentan trabajos que muestran experiencias significativas y dificultades, en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra y de la Combinatoria.

El ICME 13 el TSG 11 hace referencia a “La enseñanza y el aprendizaje del álgebra” y en el TSG 14 se estudia “La enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad”. En el TSG 11 entre sus temas se discute sobre el pensamiento algebraico: sus rasgos característicos, las tareas curriculares que promueven la comprensión algebraica, los entornos de enseñanza que fomentan el razonamiento en álgebra, y cuestiones de representación, simbolización, y la manipulación.

En el ICME 14 en el TSG 7 se refiere a la “Enseñanza y aprendizaje del álgebra en secundaria”. El Grupo tiene como objetivo reunir a investigadores internacionales, formadores de profesores y profesores que investigan las formas de hacer, pensar y hablar de los estudiantes en el álgebra, e investigar las formas en que los profesores diseñan e implementan la enseñanza del álgebra en el nivel secundario y sus conocimientos necesarios. El grupo prevé la integración de investigadores jóvenes y académicos establecidos en el campo con la intención de compartir nuevos hallazgos y tendencias actuales de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en el nivel secundario.

Por otra parte, el TSG 11 se refiere a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, proporcionando una descripción general de la discusión internacional sobre educación probabilística, en particular, los modelos para integrar las diferentes interpretaciones filosóficas de la probabilidad y aquellos que permiten conectar probabilidad con estadística.

Varios son los investigadores que abordan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra en la escuela. Es de destacar el trabajo realizado por Acevedo y Falk (1997) el cual constituye las raíces y motivación de la presente investigación. Acevedo y Falk (1997) reconocen la importancia de trabajar con los elementos compartidos de la combinatoria y el álgebra, también elaboran materiales didácticos que permiten comparar los dos temas, en particular la teoría combinatoria y el desarrollo binomial con material geométrico para hacer factorización.

Rezaie y Gooya (2011) identifican que los estudiantes con una formación más rica en matemáticas y una experiencia más amplia con problemas de conteo en combinatoria, utilizan la estrategia de conceptualizar el problema en otro contexto combinatorio, como un teorema o problema conocido, y luego lo devuelven al problema original y lo resuelven.

Por otro lado, Cohecha (2014) afirma que es importante reconocer e interpretar las propiedades de la combinatoria para finalmente obtener y demostrar una fórmula algebraica. También, Albarracín (2017) manifiesta que es necesario crear estrategias de enseñanza y aprendizaje enfocadas a la resolución de problemas contextualizados sobre combinatoria e identificar las formas de como aprenden los estudiantes el tema.

Guzmán, Bernabeu y Godino (2003) muestran el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria con énfasis en sus operaciones. Plantean que se debe usar un campo donde las estrategias de resolución de problemas, tales como dividir el problema en partes, traducir el enunciado a un problema equivalente, fijar variables, usar otros métodos para su solución etc., pueden ser usadas eficazmente en la solución de los problemas de combinatoria.

De acuerdo con lo anterior se quiere implementar estrategias de enseñanza y aprendizaje que permita al estudiante y al profesor tener mayores herramientas de trabajo en clase y puedan superar esas debilidades en el área. Este proceso permite apoyar la práctica docente, teniendo en cuenta que es fundamental y de importancia aportar estrategias didácticas en el campo de la educación de las matemáticas.

Por otra parte, las matemáticas son fundamentales para la formación de las personas, y están incluidas en el currículo de los diferentes niveles en las instituciones educativas. El Gimnasio Mayor del Occidente (GMO) es una institución de calendario A y está ubicado en la localidad de Engativá, Bogotá. La institución tiene como énfasis principal la enseñanza del inglés y las matemáticas, incluyendo a la estadística.

Los estudiantes de grado noveno de bachillerato de la institución reciben el tema de combinatoria, el cual le permite llevar a cabo procesos de razonamiento para comprender el mundo en cada uno de los contextos que lo conforman. Estos estudiantes de noveno grado presentan dificultades de aprendizaje en el tema de combinatoria, causando que los estudiantes evidencien poco interés y atención en la clase, limitaciones en el aprendizaje de los conceptos y poca comprensión del tema, perdiendo la motivación durante el proceso de resolución de problemas de combinatoria.

El algebra constituye una herramienta, que a través de sus operaciones propicia dar solución a los diferentes problemas de combinatoria, utilizándose los conocimientos aprendidos por los estudiantes en álgebra.  Por otra parte, el curso de Álgebra tiene una intensidad horaria de 6 horas semanales y puede ser de beneficio para superar las dificultades en la enseñanza aprendizaje de problemas de combinatoria.

A partir de la revisión de la literatura, la observación participante, la entrevista a especialista (ver Anexo 1) y la experiencia como docente de estadística en la institución, se evidencian ciertas oportunidades de mejora en los estudiantes de grado noveno de bachillerato:

1) Desarrollar combinaciones en los elementos de un conjunto.
2) Encontrar las relaciones entre elementos de la combinatoria y otros contenidos de las matemáticas.
3) Entender e interpretar el concepto de los números combinatorios, pues en algunas ocasiones los confunden.
4) Resolver problemas simples de combinatoria y argumentar el sentido de su solución.
5) Plantear, interpretar, abordar y solucionar un problema matemático.

A partir de lo expuesto anteriormente surge el siguiente **problema de investigación**:

¿cómo favorecer la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra para que propicie un robusto conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los estudiantes de grado noveno del Gimnasio Mayor del Occidente?

Se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra en los estudiantes de educación básica.

Se infiere como **objetivo general**: favorecer los elementos y argumentos compartidos entre la teoría combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de grado noveno de básica secundaria.

Se plantean los siguientes **objetivos específicos**:

- Establecer los conceptos básicos de la teoría de combinatoria y el desarrollo del álgebra.
- Elaborar estrategias didácticas para que los estudiantes interpreten y comprendan los aspectos conceptuales en combinatoria básica y el álgebra.
- Determinar los argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra surgido de la resolución de problemas de los estudiantes.
- Evaluar el impacto y los avances en el desarrollo de los procesos de argumentación en los estudiantes, basados en la resolución de problemas con la aplicación del sistema de actividades.

Acorde con el objeto y el objetivo, **el campo de acción** es el proceso de enseñanza y aprendizaje de los elementos y argumentos compartidos de la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de noveno grado de básica secundaria.

Para dar cumplimiento al objetivo y la solución del problema de investigación se proponen las siguientes **preguntas de investigación**:

- ¿Cuáles investigaciones contribuyen al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de noveno grado de básica secundaria?
- ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría combinatoria y el desarrollo del álgebra, para la construcción de elementos y argumentos compartidos entre ambos?

- ¿Cómo concebir un sistema de actividades para favorecer los elementos y argumentos compartidos del proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de noveno grado de básica secundaria?
- ¿Cómo analizar los resultados del sistema de actividades para favorecer los elementos y argumentos compartidos del proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de noveno grado de básica secundaria?

A partir de lo anterior y para desarrollar la presente tesis se plantean las siguientes **tareas de investigación**:

- Construir el estado del arte sobre los elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas.
- Determinar el marco teórico que sustenta el trabajo de investigación.
- Seleccionar y aplicar la metodología de investigación.
- Diseñar un sistema de actividades para favorecer los elementos y argumentos compartidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra basados en la resolución de problemas para estudiantes de grado noveno de bachillerato.
- Aplicar el sistema de actividades para favorecer los elementos y argumentos compartidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra en el GMO.
- Analizar y evaluar los resultados obtenidos en las actividades aplicadas a los estudiantes de grado noveno.

El proyecto de investigación está constituido por: introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y 5 anexos. En el primer capítulo se expone el análisis del estado del arte. En el segundo capítulo se plantea el marco teórico sobre argumentación en la matemática, elementos matemáticos de la combinatoria y el álgebra, elementos matemáticos compartidos entre la combinatoria y el álgebra y los referentes teóricos sobre la resolución de problemas. En el tercer capítulo se explica la metodología de investigación. En el cuarto capítulo se plantea la propuesta de estrategias para mejorar los procesos de argumentación basados en la resolución de problemas con sus respectivas actividades a realizar dentro del aula. Finalmente, en el quinto capítulo se realiza el análisis de resultados de las actividades.

# CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este apartado se presentan de manera concisa algunos de los trabajos e investigaciones que son fundamentales para el desarrollo del presente proyecto, por sus aportes conceptuales, metodológicos, bibliográficos y estratégicos para la solución de la problemática planteada. Se abordan en el siguiente orden: en primer lugar se mencionan las Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y álgebra en la Educación Básica Secundaria, en segunda instancia se nombran las Investigaciones sobre la argumentación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el tema de combinatoria y el álgebra, específicamente en la Educación Básica Secundaria y en tercera instancia las Investigaciones sobre la resolución de problemas en estas temáticas.

## 1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje en combinatoria y el álgebra en la Educación Básica Secundaria

En este apartado se enuncian las investigaciones más representativas en el campo de la educación en combinatoria y en el álgebra que con sus aportes permiten el desarrollo de la presente investigación.

### 1.1.1. Aprendizaje del concepto de combinatoria a partir de una secuencia didáctica[1]

Cardona, Giraldo, López y Martínez (2018) realizan un proyecto de investigación de la Universidad de Antioquia aplicado en la Institución Educativa San José del municipio

[1] Henao. C., Giraldo. M., López. J. (2018). Aprendizaje del concepto de combinatoria a partir de una secuencia didáctica. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia facultad de educación. Medellín, Colombia

de Itagüí a los estudiantes de los grados tercero, séptimo, noveno y undécimo, cuyos objetivos específicos son diseñar y ejecutar una secuencia didáctica sobre el concepto de combinatoria adecuada al contexto de la institución. En este proceso se integra el concepto de combinatoria en los estudiantes mediante la aplicación de una secuencia didáctica, donde se identifican los elementos que posibilitan el aprendizaje del concepto de combinatoria en estudiantes de diferentes grados de la IE San José.

En este estudio se utiliza una metodología de investigación de perspectiva cualitativa con un enfoque fenomenológico hermenéutico, con un método de estudio de casos. También se utilizan instrumentos de recolección de información como la observación, la secuencia y guías didácticas, el diario de campo, la entrevista, fotografías y audios.

Este estudio es fundamental para este proyecto de investigación ya que Cardona, Giraldo, López y Martínez (2018) plantean elementos importantes para el desarrollo de este trabajo como su marco teórico. En dicho marco se asume el concepto de combinatoria y sus elementos, la resolución de problemas en estadísticas, situaciones del contexto con combinatoria y secuencias didácticas, que son temas que hacen parte de esta investigación.

De igual forma los autores concluyen que:

- La percepción y actitud de los estudiantes frente a la combinatoria, mejora en la medida que avanza en el desarrollo del proceso investigativo.
- El trabajo cooperativo facilita la resolución de una situación problema.
- La secuencia didáctica, muestra al estudiante que situaciones comunes a su realidad, pueden solucionarse de manera eficaz, si aplica correctamente cada una de las propiedades o principios de la combinatoria.

- Se observa que la indagación de los saberes previos para obtener un diagnóstico es el primer elemento determinante para poder acompañar y encaminar al estudiante hacia el aprendizaje.
- El rol docente es un factor influyente en el proceso de profundización.

La bibliografía y referencias de este estudio son una guía para el proceso de investigación ya que permiten encontrar artículos, tesis y libros con los temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria.

**1.1.2. Diseño de una estrategia didáctica para que se facilite la apropiación de la conceptualización de la teoría combinatoria en los estudiantes del grado décimo, en la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del municipio de Medellín**[2]

Martínez (2014) realiza una investigación de la universidad Nacional de Colombia, planteando como problema principal la dificultad de los estudiantes de la institución educativa por la conceptualización y el aprendizaje de la teoría combinatoria. A partir de la observación en el aula de clase se hacen evidentes las dificultades que presentan los estudiantes para resolver situaciones problemas que tienen como base el tema de combinatoria. El objetivo principal es proporcionar un conocimiento básico del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, profundizando en el concepto de la teoría combinatoria, mediante el diseño de una estrategia didáctica que permita la apropiación de dicho concepto.

[2] Martínez, V. H. (2014). Diseño de una estrategia didáctica para que se facilite la apropiación de la conceptualización de la teoría combinatoria en los estudiantes del grado décimo, en la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del Municipio de Medellín. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. Medellín.

Martínez (2014) propone una estrategia que permite a los estudiantes mejorar los procesos del pensamiento analítico, aleatorio, cognoscitivos, académicos, sociales y adquirir logros significativos en las distintas disciplinas y en la formación integral del estudiante.

Esa investigación concluye que, para la enseñanza de la teoría combinatoria, su conceptualización y aplicación, es necesario proponer estrategias didácticas, enmarcadas en ambientes de aprendizaje llamativos para los estudiantes. Estas estrategias proponen el mejoramiento de los procesos de razonamiento referidos a su pensamiento aleatorio.

El proyecto realiza aportes necesarios para la presente investigación en cuanto al marco teórico y sobre como abarcan las estrategias de enseñanza y aprendizaje para la solución de la problemática planteada.

### 1.1.3. Razonamiento combinatorio en alumnos de educación secundaria obligatoria[3]

Jiménez (2016) realiza una investigación que consiste en analizar los procesos de resolución de problemas de combinatoria por parte de los estudiantes de 6°,7°,8°, del Instituto de Educación Secundaria Julián Zarco del municipio Mota del Cuervo, en España. La finalidad del autor es analizar el razonamiento combinatorio de estos estudiantes, antes de la enseñanza formal, y contrastarlos con los resultados

[3] Jiménez, B. (2016). Razonamiento combinatorio en alumnos de educación secundaria obligatoria (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática. Mota del Cuervo, España.

obtenidos por un estudio semejante y completando la información de la investigación al examinar con más profundidad los problemas de combinatoria.

Su objetivo principal es analizar el razonamiento actual de estos estudiantes, para evaluar la dificultad que para ellos pueden tener las técnicas combinatorias que estudian en los siguientes cursos. La metodología de investigación es de enfoque cualitativo con alcance exploratorio.

Jiménez (2016) expone los problemas de razonamiento combinatorio que presentan los estudiantes que son: cambiar el tipo de modelo combinatorio, error de orden, error de repetición, confusión de los objetos, enumeración no sistemática, respuesta intuitiva incorrecta, no recordar la fórmula, confundir los parámetros y confusión en el tipo de celdas. Además, en si investigación plantea diferentes estrategias en la resolución de problemas combinatorios como fijación de variables, uso de la regla de la suma, uso de la regla del producto, traducción del problema en otro más sencillo equivalente, descomposición de un problema en subproblemas.

La investigación concluye con que ningún estudiante ha conseguido deducir por sí mismo la fórmula precisa que resuelve la estructura combinatoria de cada problema. Se pueden plantear líneas de investigación orientadas igualmente al diseño de materiales didácticos, con el objetivo de mejorar el razonamiento combinatorio entre los estudiantes y poder evaluarlo antes de que reciban instrucción sobre operaciones combinatorias.

Este proyecto de investigación tiene elementos importantes para el desarrollo del presente trabajo en cuanto a las estrategias planteadas en la resolución de problemas, al igual que permiten reconocer con claridad y detalle los errores que los estudiantes cometen mientras buscan las soluciones en combinatoria, tema fundamental para el presente estudio.

### 1.1.4. School Algebra[4]

La investigación realizada Kilhamn, Röj-Lindberg & Björkqvist (2019) propone un análisis sobre el álgebra escolar y sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje a través del proyecto de investigación VIDEOMAT, cuyo objetivo principal es el de analizar, documentar y reflexionar sobre las dificultades con las que los docentes y estudiantes se encuentran durante las primeras lecciones del aprendizaje del álgebra.

También, se hace una descripción general de los documentos curriculares nacionales de cuatro países Suecia, Noruega, Finlandia y EE. UU., mencionando las cuatro categorías principales de álgebra escolar: la primera es la aritmética generalizada, la segunda es una forma de resolver ciertos tipos de problemas, la tercera es un estudio de las relaciones entre cantidades y la cuarta un estudio de estructuras.

Los autores hacen referencia a un problema que se presenta en las diferentes áreas de la matemática escolar, que consiste en el orden en que se introducen y utilizan las diferentes representaciones para promover el aprendizaje, por ejemplo, el uso de la fórmula matemática y el objeto matemático cuando se enseña un tema específico.

En cuanto a la argumentación los autores exponen que los diferentes tipos de argumentos a los que pueden llegar los estudiantes cuando se les pide que comprueben una solución pueden ser, la primera para llegar a las mismas respuestas que todos los demás, la segunda para obtener la aprobación del maestro, la tercera

[4] Kilhamn C., Röj-Lindberg AS., Björkqvist O. (2019) School Algebra. En: Kilhamn C., Säljö R. (eds) Encountering Algebra. pp.1-11. Springer, Cham.

para mostrar la situación específica usando manipuladores, la cuarta para mostrarla usando una imagen o un diagrama, la quinta para razonar lógicamente comenzando con suposiciones claras, y la sexta para construir una demostración algebraica.

El artículo es pertinente para este trabajo de investigación ya que realiza un estudio para la enseñanza y el aprendizaje de la práctica del álgebra en la escuela en estudiantes de primaria y bachillerato, tema fundamental para este proyecto.

#### 1.1.5. Framing a Classroom Intervention Study in a Middle-School Algebra Environment[5]

En este capítulo los autores Kanbir, Clements, Ellertonm (2018) plantean un estudio en el cual su objetivo principal es exponer un marco teórico sobre la investigación de diseño en la educación matemática y demostrar que en algunos aspectos es defectuoso.

Proponen los siguientes elementos esenciales en el diseño de la educación matemática: primero identificar los principales problemas a investigar y sus dimensiones teóricas, prácticas y éticas, segundo identificar y trabajar con personas clave que puedan ayudar a resolver los problemas. Tercero desarrollar un plan de investigación que prevea la recopilación y análisis riguroso de datos, cuarto planificación, implementación y evaluación de un programa de investigación-acción “planificar-actuar-observar-reflejar” y quinto la realización y presentación de informes de la investigación.

[5] Kanbir S., Clements M.A., Ellerton N. F. (2018) Framing a Classroom Intervention Study in a Middle-School Algebra Environment. In: *Using Design Research and History to Tackle a Fundamental Problem with School Algebra. History of Mathematics Education*. pp.59-70. Springer, Cham.

También identifica tres problemas principales de la enseñanza y aprendizaje del álgebra: ¿por qué tantos estudiantes de secundaria experimentan dificultades para aprender álgebra?, ¿qué posiciones teóricas pueden arrojar luz sobre la mejor manera de resolver ese problema? y ¿cuáles son las preguntas de investigación específicas para responder las dificultades anteriores?

Los autores explican los resultados de una tesis doctoral, que se elabora con el diseño de investigación, anteriormente mencionado, que lleva como nombre *un estudio de intervención dirigido a mejorar la calidad de los estudiantes de séptimo grado*. En el análisis se observan los cambios en las estructuras cognitivas de todos los estudiantes y se evalúan los efectos de los cambios en el pensamiento algebraico de los estudiantes.

En esta investigación se recomienda que los planes de lecciones deben incluir, una especificación clara de lo que se desea que los niños aprendan (“concentración”), preparar lecciones que tengan en cuenta los conocimientos previos y las diferencias de los estudiantes (“presentación”), intentar que los estudiantes reflexionen sobre cómo se relaciona el material con lo que ya sabían (“asociación”). Además, tratar de hacer que los estudiantes reflexionen sobre cómo el material que se ha aprendido puede generalizarse a áreas más amplias de conocimiento (“generalización”) y ayudar a los estudiantes a aplicar las principales ideas que han aprendido ("aplicación").

La investigación de Kanbir, Clements, Ellertonm (2018) es importante para el presente trabajo, porque genera una estructura de diseño de investigación en la educación matemática y expone las recomendaciones que se deben tener en cuenta para elaborar las lecciones de un tema de álgebra, cuestiones necesarias para este trabajo de grado que elabora estrategias de aprendizaje a través de la resolución de problemas.

### 1.1.6. Общественная деятельность школьников на уроках алгебры[6]

Katsura, Akzigitov, Gerashchenko, Musin y Dakhin (2018) hacen un trabajo investigativo, su objetivo primordial es nivelar las funciones científicas y pedagógicas de la actividad de pensamiento general, favoreciendo a la formación de la idoneidad cultural general y sistematizar la práctica de usar esas acciones en las lecciones de álgebra escolar para la innovación de la educación matemática.

El método de investigación que usan los autores es la observación comparativa de las hipótesis planteadas sobre la enseñanza de las matemáticas, también utilizan diferentes tipos de actividades educativas enfocadas en el tema del álgebra.

Los resultados que se analizan son las teorías de la enseñanza de las matemáticas, que se encuentran en el análisis de los últimos tres años. Como consecuencia, se identifican los componentes prácticos básicos de la actividad del pensamiento general, que son, el tema de la investigación científica objetiva, el principio explicativo, el objeto de gestión y el valor interdisciplinario.

Katsura, et al. (2018) concluyen que, para la integridad didáctica de la actividad mental general, es suficiente señalar sus cuatro mecanismos funcionales básicos. También señala que el álgebra escolar, aporta capacidad cognitiva, así como la cultura matemática del estudiante con un componente operacional, lo que contribuye a la

[6] Katsura, A. V. Akzigitov, A. R., Gerashchenko, V. V., Musin, R. M. & Dakhin, A. N. (2018). Общественная деятельность школьников на уроках алгебры. Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. 2018, том 8, no 4. Novosibirsk, Rusia.

integración interdisciplinaria de la práctica mental del estudiante a otro contexto educativo.

Este artículo es interesante para este proyecto de investigación porque muestran cómo trabajan las actividades del pensamiento y utilizan las lecciones del álgebra para innovar el pensamiento matemático del estudiante, además expone el tema de la cultura que han desarrollado por el álgebra en Rusia.

### 1.1.7. Aprendizaje del concepto de combinatoria en estudiantes del grado sexto y séptimo del programa ONDAS[7]

El proyecto investigativo elaborado por Albarracín (2017) tiene como objetivo principal reconocer el aprendizaje de combinatoria que logran los estudiantes de grado sexto y séptimo a partir de la implementación de la resolución de problemas. La metodología de investigación se basa en el enfoque cualitativo - interpretativo; donde el tipo de estudio es micro etnográfico.

Las técnicas e instrumentos de recolección de información utilizadas son la observación, la entrevista, talleres y el diseño de investigación planteado está compuesto por un momento de exploración, seguido por la intervención y por último la exploración del aprendizaje de combinatoria.

La investigación concluye, que de acuerdo con los resultados preliminares, para los estudiantes la combinatoria es una operación matemática que se emplea para

[7] Albarracín, A. M. (2017). Aprendizaje del concepto de combinatoria en estudiantes del grado sexto y séptimo del programa ONDAS. (Tesis maestría) Universidad de Manizales.

solucionar situaciones donde hay diversas formas de escoger subconjuntos de un conjunto dado.

También se concluye que las estrategias más utilizadas por los estudiantes de los grados sextos y séptimo para resolver problemas sobre combinatoria son resolver situaciones de la vida real o contextualizados, y otras veces representan las respuestas con dibujos. En el estudio también se identifican elementos claves de la combinatoria como la enumeración, la sistematización y la regla del producto.

Albarracín (2017) realiza aportes fundamentales para el presente trabajo de tesis en cuanto al diseño de investigación que propone en tres momentos anteriormente mencionados y también el análisis que realiza sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes de los grados sexto y séptimo, para resolver problemas sobre combinatoria y la caracterización de las estrategias de aprendizaje que usan los estudiantes en el tema.

### 1.1.8. Examining the Role of Prior Experience in the Learning of Algebra[8]

Este estudio elaborado por McGowen (2017) tiene como objetivo demostrar que el conocimiento previo sobre álgebra se ha vuelto problemático para muchos estudiantes, también plantea que los matemáticos y los educadores de matemáticas deben proponer que los estudiantes desarrollen su pensamiento crítico y establezcan caminos para que puedan relacionar una idea con las demás. Sin embargo, en los colegios se enseña un instructivo para desarrollar un procedimiento o una regla para llegar a la respuesta.

[8] McGowen. M. T (2017). Examining the Role of Prior Experience in the Learning of Algebra: And the rest is just algebra. Springer. Suiza. pp. 19-39.

De acuerdo con el autor, para ayudar a los estudiantes a obtener una comprensión más flexible y profunda del álgebra, se requiere mucho más que fluidez computacional o simbólica de cómo funcionan los procedimientos o reconocer de cómo se relacionan dos ideas para resolver problemas y hacer conexiones entre los temas de álgebra.

McGowen (2017) presenta la siguiente conclusión, considera que el conocimiento previo, fragmentado como resultado de sus experiencias matemáticas, debe permitir que los docentes asesoren a sus estudiantes para que ese conocimiento separado tenga solides y adquiera sentido para el estudiante en formación.

También el hecho de no comprender cómo piensan los estudiantes y si las instrucciones son eficaces o no, depende de ¿cómo los estudiantes usan lo que han aprendido antes? y de ¿cómo esa enseñanza afecta lo que los estudiantes aprendan más tarde? Esta investigación es pertinente por que expone el cómo los estudiantes desarrollan la habilidad de usar los símbolos en los procedimientos algebraicos para obtener una mayor comprensión y flexibilidad en el álgebra.

## 1.2. Investigaciones sobre la argumentación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el tema de combinatoria y el álgebra en los estudiantes de educación básica secundaria

### 1.2.1. Análisis histórico- epistemológico de los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo[9]

Larrahondo (2016) plantea solucionar el problema de investigación de ¿cómo se han usado los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo a través de un estudio histórico – epistemológico? Su objetivo general es realizar un análisis histórico – epistemológico sobre los argumentos combinatorios que posibilitan la solución de problemas que involucran estrategias de conteo con el fin de generar pautas para la enseñanza de la combinatoria.

Este trabajo crea como estrategia didáctica, historietas combinatorias, las cuales generan una moraleja que implica la utilización de los argumentos combinatorios para su respuesta. Estas historietas combinatorias ayudan a que los estudiantes logren conceptualizar y aplicar los argumentos combinatorios en su vida diaria. Esa investigación concluye con que el uso de historietas combinatorias es de gran insumo para apoyar la educación matemática, afirmando que es otra alternativa didáctica de incluir la combinatoria dentro del aula de clase.

[9] Larrahondo., L. M. (2016). Análisis histórico- epistemológico de los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo. Facultad de Educación (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Cauca. Colombia.

Este estudio plantea elementos importantes para el desarrollo de este trabajo como el panorama Histórico General, la importancia de la combinatoria en la educación matemática y el recurso didáctico usado para la enseñanza del tema combinatorio.

### 1.2.2. El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria[10]

Roldán, Batanero y Beltrán (2018) elaboran una investigación cuyo objetivo principal es desarrollar un análisis de las posibilidades que ofrecen los diagramas de árbol dentro de la Educación Primaria y Secundaria para la formación del estudiante, especialmente en el ámbito de la combinatoria y la probabilidad.

Roldán, Batanero y Beltrán (2018) muestran la existencia de dificultades en la construcción e interpretación de diagramas de árbol por parte de los estudiantes, debido a la falta de atención que recibe desde la enseñanza. Además, exponen ejemplos de las oportunidades de aprendizaje que ofrece la combinatoria y la probabilidad, incluyendo la argumentación de algunos teoremas.

Como conclusión sugieren la necesidad del uso de la estadística en edades tempranas, para conformar intuiciones correctas que luego se aplican durante todo el periodo de formación en probabilidad y combinatoria. Esta investigación plantea elementos fundamentales para el desarrollo de este trabajo en cuanto al uso didáctico que realizan del diagrama de árbol en la combinatoria, los posibles argumentos que surgen de los estudiantes y las reflexiones que hacen respecto al tema.

[10] Roldán. A., Batanero. C. y Beltrán. P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Revista en educación matemática*. N° 100. pp. 49-63.

### 1.2.3. Modelo de Toulmin en el diseño de propuestas didácticas para enseñar matemáticas[11]

Morales, Pérez y Sánchez (2018) elaboran un estudio en el cual su objetivo general es dar a conocer un modelo que puede ser usado en el diseño de propuestas didácticas para fomentar el aprendizaje de las matemáticas. En el proyecto investigativo se detectan dificultades a partir de diagnósticos aplicados para medir el nivel de aprendizaje que el estudiante posee en algunas asignaturas de las cuales se encuentra álgebra y la probabilidad.

Dentro de las dificultades encontradas se evidencia la falta de la comprensión de los estudiantes en la realización de operaciones algebraicas básicas y en los contenidos de probabilidad. Los autores toman los resultados de las evaluaciones diagnósticas y evidencian la necesidad y el objetivo de diseñar una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje de los conocimientos matemáticos en los estudiantes.

La propuesta contiene estrategias que consisten en el uso de material didáctico (concreto y software), juegos lúdicos, trabajo colaborativo y autónomo, basadas en el aprendizaje constructivista en el cual los estudiantes trabajan de manera activa a través de la manipulación del material. En su investigación utilizan el Modelo de Toulmin para argumentar la propuesta didáctica y mejorar las necesidades de aprendizaje presentadas en el tema del álgebra y de la probabilidad.

Los resultados y conclusiones a los que llegan los autores es que el modelo de Toulmin permite generar propuestas basadas en evidencias y argumentos además de ser una

[11] Morales, A. Pérez, H. y Sánchez, A. (2018). Modelo de Toulmin en el diseño de propuestas didácticas para enseñar matemáticas. conisen. Aguascalientes, México.

herramienta útil y valiosa se puede usar como base para diseñar propuestas didácticas. El modelo elaborado no solamente permite ser aplicado en las matemáticas si no en asignaturas como la física o la química.

Morales, Pérez y Sánchez (2018) concluyen que el aprendizaje del álgebra es importante para todos los estudiantes, pues le permite resolver problemas de la vida cotidiana que se familiarizan con los modos de expresión simbólica y el pensamiento abstracto, que se desarrolla por medio del estudio del álgebra

El estudio es fundamental para este trabajo de tesis porque utilizan el modelo de Toulmin para generar procesos de argumentación en el álgebra y la combinatoria, también diseñan estrategias sustentadas en el constructivismo pertinentes para la elaboración de este trabajo de grado.

#### 1.2.4. La argumentación sustancial, una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas[12]

Benítez, Benítez y García (2016) estudian la argumentación sustancial presentada por estudiantes de 15 a 17 años de Nivel Medio Superior (NMS) en la solución de problemas del entorno pensados desde un enfoque cognitivo, en los temas de Álgebra y Cálculo Diferencial. El objetivo de este trabajo es caracterizar la argumentación sustancial que produce un estudiante de NMS, así como sus interpretaciones, cuando enfrenta problemas contextualizados evocados, desde un enfoque funcional y estructural de razonamiento.

[12] Benítez. A., Benítez. H., García. M. (2016). La argumentación sustancial, una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas. Educación Matemática, vol. 28, núm. 3, pp. 175-216.

Este enfoque permite evidenciar elementos discursivos por medio de los cuales un razonamiento puede cambiar la convicción y eficacia de las proposiciones. La pregunta de investigación elaborada por los autores es ¿cuáles son los elementos pertinentes para caracterizar a la argumentación sustancial desde la cognición en estudiantes de NMS? La metodología de investigación es el enfoque cualitativo etnográfico, con una población muestra de dos grupos de estudiantes ente 15 y 16 años, se utiliza como instrumentos de recolección de información la grabación, la bitácora, y la observación participante.

El estudio concluye con que los estudiantes realizan procesos intuitivos para establecer conjeturas y la posibilidad de construir proposiciones para emitir afirmaciones razonadas. Además, plantean que los estudiantes desarrollan procesos intuitivos que le permiten establecer conjeturas para fortalecer el pensamiento reflexivo, durante la investigación los estudiantes demuestran diversidad de argumentos los cuales son aceptados o rechazados por ellos durante el proceso de desarrollo del contenido.

La investigación es pertinente para el presente trabajo de tesis por la metodología de investigación utilizada y porque proporciona herramientas para que el estudiante desarrolle procesos cognitivos para la construcción de conjeturas, explicaciones, argumentaciones y razonamientos en el álgebra.

### 1.2.5. Argumentación en el álgebra temprana[13]

Esta propuesta investigativa elaborada por Paternina, Valbuena y Cervantes (2018) tiene como objetivo nivelar los argumentos que emergen de los estudiantes al solucionar tareas en el álgebra temprana, para que al llegar a grados principales tengan las habilidades necesarias para la comprensión y análisis del álgebra en general, favoreciendo en los estudiantes de tal manera que aprendan a razonar, relacionar, argumentar. La metodología que emplea la investigación es de enfoque cualitativo apoyado desde una perspectiva interpretativa, con una población de estudiantes de cuarto de primaria y sus docentes.

De igual forma los autores afirman que la argumentación en matemática es parte esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues la argumentación vista desde este campo de la ciencia se fundamenta en las acciones y razonamientos que los estudiantes utilizan, a fin de justificar las actividades o tareas matemáticas que realizan ante una situación problema que les exija poner en práctica sus habilidades para argumentar.

Paternina, Valbuena y Cervantes (2018) proponen como estrategia los niveles de algebrización que presentan los estudiantes al resolver un problema o tarea matemática teniendo en cuenta que están constituidos por expresiones u objetos algebraicos como incógnitas, variables, ecuaciones, patrones numéricos, estructuras

[13] Paternina. Y., Valbuena. S. y Cervantes. J. (2018). Argumentación en el álgebra temprana. Cuarto encuentro internacional de investigación en educación matemática. Universidad del Atlántico. pp. 95-101.

algebraicas, entre otras. Estos niveles son Nivel 0, Nivel incipiente, Nivel intermedio y Nivel consolidado de algebrización.

Las conclusiones de este articulo son que, a pesar, que los docentes tengan conocimiento de la importancia de incluir contenidos del algebra en el desarrollo del pensamiento en edades tempranas no lo hacen, dejando a un lado los estándares del Ministerio de Educación Nacional, de igual forma concluyen que con la aplicación de actividades a los estudiantes, estos se mantienen en un nivel incipiente de algebrización.

Este proyecto de investigación es apropiado para el trabajo de grado por que hace una escala de niveles de algebrización en los cuales se puede evaluar y ubicar a los estudiantes de acuerdo con el conocimiento teórico y práctico de ellos en el tema del álgebra.

#### 1.2.6. Developing Subject Matter Knowledge through Argumentation[14]

Uygun y Akyuz (2019) investigan sobre el diseño de ideas matemáticas de un grupo de profesores de secundaria utilizando el modelo de argumentación de Toulmin, cuyo objetivo es examinar el efecto de las argumentaciones en el desarrollo del conocimiento de matemáticas usando como estrategia didáctica la resolución de problemas. Los autores parten con la premisa de que el conocimiento de los docentes sobre un tema en matemáticas afecta la argumentación de los estudiantes en el aula.

La metodología de investigación está sustentada en el enfoque cualitativo con el método de diseño de estudio de casos y para la recolección de información se usa las

[14] Uygun, T. & Akyuz, D. (2019). Developing subject matter knowledge through argumentation. International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 5(2), pp. 532-547.

grabaciones de audio, video y las notas de campo en grupos pequeños. La investigación concluye que se observa en el grupo de docentes mejora su conocimiento de la materia. Además, plantean que, mediante la formación de ideas matemáticas, se construyen nuevos conocimientos y se revisan sus conocimientos previos a través de argumentaciones y dejan material fundamental para futuras investigaciones.

Este estudio es pertinente para la presente investigación, a pesar de estar fuera del campo de la investigación, ya que deja insumos importantes en cuanto al diseño de una secuencia de instrucción de seis semanas para los estudiantes de secundaria en temas matemáticos usando el modelo de argumentación de Toulmin. Este modelo se aplica y toma como referencia en este trabajo de grado para desarrollar la argumentación en los estudiantes del GMO.

### 1.2.7 Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas[15]

El trabajo elaborado por Solar (2018) se realiza en el marco de un proyecto de investigación en que uno de los propósitos es identificar las condiciones para promover la argumentación en el aula de matemáticas, cuyo objetivo es que profesores en ejercicio estudien problemáticas en torno a la gestión del aula de matemáticas. Los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos que son datos, conclusión, garantía, respaldo, calificador modal y refutadores.

[15] Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. Revista Colombiana de Educación, (74), pp. 155-176.

El diseño metodológico se basa en el enfoque cualitativo interpretativo, orientado a describir, interpretar y entender el significado de los fenómenos sociales. Se concluye que durante la investigación se han visto cambios importantes en los profesores que participan en los cursos de formación en temas como la argumentación en la clase de matemáticas, la gestión argumentativa ofrece herramientas al docente para abordar con eficiencia lo inesperado y manejar los criterios de flexibilidad, que permiten superar las políticas de estandarización nacionales.

El estudio realiza aportes fundamentales para este trabajo de tesis con el diseño de mapas de argumentación colectiva según el modelo de Toulmin, modelo usado en el presente trabajo de investigación, y también los diseños elaborados de clases para promover la argumentación en los estudiantes.

## 1.3. Investigaciones sobre el enfoque de resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra

A continuación, se exponen las investigaciones sobre como los estudiantes resuelven problemas particularmente en combinatoria y el álgebra, y sus componentes necesarios para solucionarlos.

### 1.3.1. Razonamiento combinatorial para resolver problemas[16]

Coenen, Hof y Verhoef (2016) realizan una investigación llamada razonamiento combinatorial para resolver problemas de la Universidad de Twente, expuesta en el XIII Congreso Internacional de Educación Matemática de Hamburgo, este estudio informa sobre el pensamiento matemático de estudiantes de 14 a 16 años, en el

[16] Coenen. T., Hof. F. y Verhoef. N. (2016). Razonamiento combinatorial para resolver problemas. XIII Congreso Internacional de Educación Matemática de Hamburgo. Universidad de Twente. pp.24-31.

razonamiento combinatorio para resolver problemas, cuyo objetivo es estudiar la variación de las estrategias de solución de los estudiantes en el contexto del modelado emergente.

En el marco teórico la investigación plantea dos temas principales el pensamiento matemático y los cuatro niveles de la estructura de atención de Mason (2004). Para la metodología de investigación utilizan como principal instrumento las notas de campo de observaciones en vivo y un método en donde participan tres grupos de estudiantes: 5 niños y 9 niñas (de 15 a 16 años) con conocimientos básicos sobre diagramas de árbol; 7 niños y 8 niñas (de 14 a 15 años) sin educación previa en problemas de razonamiento combinatorio, diagramas de árbol o probabilidad; 7 niños y 14 niñas (de 14 a 15 años) con conocimientos sobre cómo dibujar un diagrama de árbol y cómo calcular probabilidades básicas.

El proyecto llega a las siguientes conclusiones en el razonamiento matemático, el análisis cualitativo reveló la preferencia de algunos estudiantes por el uso de fórmulas, mientras que al mismo tiempo otros estudiantes muestran una mayor comprensión por su enfoque sistemático de los problemas, lo que lleva a mejores resultados.

Coenen, Hof y Verhoef (2016) plantean que los estudiantes no se enfocan en toda la situación, sino en un detalle, en línea con Mason (2004). Los maestros deben ser conscientes del hecho de que los estudiantes comienzan en el nivel más alto sin comprensión relacional y, de lo contrario, cometen errores fácilmente y pasan rápidamente a un nivel superior en su proceso de solución. Además, expresan que los estudiantes son más capaces de verificar sus estrategias y justificar su razonamiento cuando la educación se basa en su enfoque informal individual.

Esta investigación realiza aportes fundamentales para esta tesis en cuanto al comportamiento del desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de 14 a 16 años particularmente en combinatoria; la bibliografía expuesta por los autores, el método utilizado en la elección de tres grupos de estudiantes para generar una solución a la problemática planteada.

### 1.3.2. Los niveles de Van Hiele aplicados a la resolución de problemas de razonamiento combinatorio[17]

Por otro lado, Frits y Fleur (2015) hacen un estudio sobre los niveles de Van Hiele aplicados a la resolución de problemas de razonamiento combinatorio, con el objetivo de encontrar una manera de identificar diferentes niveles de pensamiento en relación con la combinatoria.

Frits y Fleur (2015) redefinen los niveles de Van Hiele para aplicarlos a los problemas de conteo combinatorio. Después de definir los niveles de combinatoria, recopilan datos para examinar la precisión de la definición, para examinar si estos niveles ocurren en el proceso de solución cuando los estudiantes están resolviendo problemas de conteo combinatorio y para estudiar los efectos de la variación de estos niveles en la solución.

Los autores describen los niveles de Van Hiele con caracterizaciones apropiadas de razonamiento combinatorio, estos niveles son:

[17] Frits, E. y Fleur E. (2015). Niveles de van hiele aplicados a la resolución de problemas de razonamiento combinatorio. Universidad de Twente.

- Nivel visual: los estudiantes usan dibujos concretos o enumeraciones aleatorias para encontrar algunas muestras. Tratan de obtener "la imagen completa" para comprender qué tipo de muestras se van a producir.
- Nivel descriptivo: los estudiantes están tratando de encontrar características combinatorias en los problemas, usando términos como repetición, orden, no volver a usarse, doble, entre otros.
- Deducción informal: los estudiantes usan las características combinatorias para investigar la estructura del problema dado usando dibujos esquemáticos, diagramas de árbol o escribiendo sistemáticamente todas las posibilidades.
- Teórico formal: se utiliza fórmulas y procedimientos para calcular el número de posibilidades, basándose en el reconocimiento, la experiencia o el conocimiento.

El estudio concluye con que el análisis de los datos muestra que los estudiantes no alcanzan niveles de pensamiento superiores o inferiores con la frecuencia esperada. Además, no alcanzan el nivel más alto -formal- utilizando los niveles inferiores como nivel justificativo. No obstante, se observa que los estudiantes cometen más errores cuando pasan a un nivel superior y cometen menos errores cuando pasan a un nivel inferior.

Los niveles de Van Hiele permiten identificar la situación en la que se encuentran los estudiantes al desarrollar un problema sobre combinatoria, lo cual se convierte en un elemento importante para la presente investigación.

### 1.3.3. Errors and difficulties in solving algebraic procedures in secondary school students[18]

El Proyecto investigativo elaborado por Díaz, Hernández y Paz (2019) expone el álgebra como una materia primordial, ya que constituye un fundamento de los conocimientos matemáticos del estudiante. La investigación tiene como objetivo principal solucionar las dificultades que tiene un grupo de estudiantes del colegio San José de Cúcuta, Colombia, en la resolución de problemas algebraicos. Los autores toman como modelo de aprendizaje el constructivismo en el cual el error que cometen los estudiantes a la hora de resolver problemas es tomado como una fuente de aprendizaje.

Los autores toman los errores más frecuentes que comenten los estudiantes para resolver problemas de álgebra que son los siguientes, eliminación incorrecta de denominadores; errores al realizar operaciones aritmético-algebraicas; procedimiento inconcluso; problemas propios incorrectos e inferencia inválida; aplicación parcial de la regla de factorización por factor común. Además, resaltan la asociación incorrecta de productos notables; uso de aritmética básica ignorando las reglas del álgebra; resolución aditiva de la potencia de un binomio; aplicación incorrecta de la regla de un binomio; error al realizar productos polinomiales y error de cálculo simple para desarrollar una operación algebraica.

[18] Díaz, Hernández y Paz (2019). Errors and difficulties in solving algebraic procedures in secondary school students. III International Meeting of Mathematical Education Journal of Physics: Conference Series. Orlando, Estados Unidos.

El diseño metodológico que trabajan los autores es el paradigma cuantitativo, tomando una población de 200 estudiantes de grado séptimo y utiliza la entrevista y los cuadernillos del ICFES como técnicas e instrumentos para la recopilación de información.

La investigación concluye con que el papel del docente en la escuela debe ser de un mediador entre el estudiante, el conocimiento y las actividades, también es posible inferir que los errores que se evidencian, pueden ser producto de las experiencias de aprendizaje que han tenido en sus estudios previos.

El estudio permite al proyecto de grado evidenciar los errores que cometen los estudiantes al resolver los problemas algebraicos, el diseño metodológico propuesto permite al trabajo tener una base y estructuración para el presente estudio.

#### 1.3.4. La resolución de problemas para la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad en contribución al desarrollo del pensamiento aleatorio[19]

La propuesta investigativa elaborada por Agudelo (2018) tiene como objetivo principal diseñar una estrategia didáctica a partir de la resolución de problemas cotidianos para la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad con las estudiantes de noveno grado del colegio de la Compañía de María La Enseñanza, que promueva el desarrollo del pensamiento aleatorio.

[19] Agudelo, Z. N. (2018). La resolución de problemas para la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad en contribución al desarrollo del pensamiento aleatorio (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Medellín, Colombia

El diseño metodológico del estudio está basado en un enfoque cualitativo con una postura fenomenológica, los instrumentos de recolección de información son el diario campo, las guías, actividades, los registros fotográficos y la observación participante.

La investigación concluye con la aplicación de guías utilizando la estrategia de resolución de problemas basados en el constructivismo, la cual permite la movilización no solo de los conceptos tales como probabilidad, permutación, variación y combinación, sino también fortalecer las competencias cognitivas básicas. Además, contempla que el uso de las TIC y el diseño de situaciones problema del contexto ayudan a despertar el interés y la motivación por las temáticas, pues favorece su comprensión y aplicación en diversos contextos.

Además, el desarrollo de las actividades en equipo, la retroalimentación y asesoría constante entre docente y estudiantes son elementos para tener en cuenta en el proceso de aprendizaje y en la enseñanza de los temas combinatorios.

Las guías realizadas por la autora para la actividad diagnóstica y de desarrollo y profundización del tema son un ejemplo a tener en cuenta para diseñar las actividades para la resolución de problemas con elementos compartidos entre la combinatoria y el álgebra de la presente investigación. También, son de utilidad las fases de la estrategia didáctica implementadas por la autora (actividad diagnóstica, diseño de las actividades y guías con un enfoque en la resolución de problemas, desarrollo de la estrategia didáctica, recolección de los resultados de la intervención y la evaluación de la estrategia para determinar las conclusiones).

### 1.3.5. Teaching and Learning Middle School Algebra: Valuable Lessons from the History of Mathematics[20]

Nataraj y Thomas (2017) propone como objetivo principal examinar algunos temas importantes en la historia de las ideas algebraicas que involucran variables y exponentes y transferirlas al aula de matemáticas por medio del pensamiento y razonamiento algebraico. Este estudio se desarrolla con estudiantes de Nueva Zelanda, con el cual se evidencia que las dificultades en álgebra es un fenómeno mundial.

Los autores indican que el aprendizaje del álgebra en los colegios a menudo comprende la generalización de modelos, el uso de incógnitas, variables y potencias de variables, la formación de expresiones y ecuaciones y la resolución de ecuaciones. Los estudiantes son inmediatamente conscientes de que el álgebra involucra letras, pero hay evidencia clara en la investigación documentada de que muchos de ellos tienen muy poca comprensión de lo que significan las letras y la razón por la que se usan.

Este trabajo expone cuatro perspectivas diferentes sobre el álgebra escolar: el álgebra como aritmética generalizada, el álgebra como resolución de problemas, el álgebra como el estudio de las relaciones entre cantidades, el álgebra como estudio de estructuras. Esta investigación analiza dos estudios en el área de la neurociencia cognitiva y la educación matemática y sugiere que la resolución de problemas algebraicos es simplemente una ejecución inconsciente de un conjunto automático de

[20] Nataraj. M. y Thomas. M. (2017). Teaching and Learning Middle School Algebra: Valuable Lessons from the History of Mathematics. Springer. Suiza. pp. 131-153.

procedimientos. Además, concluye que en la primera perspectiva la solución simbólico algebraico es más exigente que un método de diagramación y en la segunda requiere un mayor esfuerzo cognitivo para lograr la excelencia en álgebra.

Nataraj y Thomas (2017) concluyen con que el pensamiento y el razonamiento algebraicos dependen de la comprensión de las ideas claves, de las cuales la variable es una de las fundamentales. Esta investigación proporciona insumos importantes en el campo de la resolución de problema matemáticos en cuanto a los estudios científicos que menciona sobre que los estudiantes deben tener en su aprendizaje.

### 1.3.6. Teorema del binomio y aplicaciones[21]

Cohecha (2014) elabora un estudio cuyo objetivo principal es realizar una revisión del Teorema del Binomio desde el punto de vista histórico y epistemológico para construir una propuesta didáctica enfocada en la resolución de problemas matemáticos y al aprendizaje constructivista. El tema principal es la integración entre la combinatoria y el álgebra, especialmente en los temas de combinaciones con trayectorias, el Triángulo de Pascal y la fórmula del binomio. El autor construye una serie de actividades que permite que el estudiante de grado octavo mejore su comprensión frente a los anteriores temas.

Finalmente, la investigación concluye con que es importante proponer alternativas que mejoren los procesos de enseñanza y de aprendizaje, para que guíen al estudiante a demostrar el interés por la matemática y a apropiarse del conocimiento de una forma eficaz.

---

[21] Cohecha. T, C. (2014). Teorema del binomio y aplicaciones. Tesis Maestría. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

La propuesta desarrollada por Cohecha (2014) es fundamental para la presente tesis, ya que se toman las parte de las actividades diseñadas, las cuales se modifican de acuerdo con el tema y a la propuesta pedagógica y didáctica planteada este estudio.

### 1.3.7. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório[22]

La presente investigación elaborada por Silveira (2016) tiene como objetivo analizar cómo una orientación de la clase enfocada a la resolución, exploración y proposición de problemas puede ayudar a fortalecer la enseñanza y aprendizaje de los estudios en combinatoria.

La metodología de investigación se basa en el enfoque cualitativo, dirigido a la modalidad pedagógica donde el docente investiga en su propia práctica educativa. Los instrumentos de recolección de información son la observación, el registro de los materiales utilizados por los estudiantes y grabaciones de sonido.

La estrategia didáctica elegida es la de resolución, exploración y propuesta de problemas, desarrollada con una secuencia de actividades en una clase de segundo grado de bachillerato en una escuela pública de la ciudad de Alagoinha, Brasil.

Se concluye que la metodología permite un aprendizaje con mejor comprensión, otorgando herramientas al estudiante para resolver problemas de análisis combinatorio, orientándose no solo en la exploración de la solución del problema, sino

[22] Silveira, A. A (2016). Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem através da resolução, exploração e proposição de problemas. (Tesis de maestría). Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y Educación Matemática. Universidad Estadual de Paraíba, Campina Grande.

en el proceso de resolución. Además, consideran el papel de investigadores en el aula, hacer generalizaciones, formular nuevos problemas y luego resolverlos.

El estudio es pertinente para la presente investigación porque expone una metodología clara para la resolución de problemas de los estudiantes de bachillerato en las clases de análisis combinatorio, tema fundamental para este proyecto.

### 1.3.8. Desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas, a través de la resolución de problemas[23]

Mosquera (2017) realiza un estudio cuyo objetivo general es analizar la influencia de la estrategia, basada en la resolución de problemas sobre análisis combinatorios, en el desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas en las estudiantes del grado 9º de la institución Educativa San Luis Gonzaga. Se implementan una serie de actividades en forma de cuestionarios con preguntas abiertas para poder analizar las competencias de cada uno de los estudiantes.

El enfoque de investigación implementando por Mosquera (2017) es cualitativo, con un estudio de casos, utiliza como instrumentos para la recolección de información la observación participante, grabaciones de video, aplicación de pos-test y cuestionarios.

Mosquera (2017) concluye que la estrategia didáctica basada en la resolución de problemas abiertos favorece el desarrollo de las competencias interpretativas y argumentativas en los participantes. Los estudiantes al finalizar la investigación se ubican en un nivel básico de argumentación a un nivel medio, sin embargo, no generan

[23] Mosquera. H. E. (2017). Desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas, a través de la resolución de problemas. (Tesis de pregrado) Facultad de educación. Universidad de Antioquia.

justificaciones coherentes y relaciones entre los datos expuestos en los problemas planteados.

Mosquera (2017) recomienda que es necesario trabajar la estrategia de resolución de problemas en el aula para familiarizar a los estudiantes y conseguir mejores resultados. Esta investigación proporciona elementos sustanciales para este trabajo de tesis en cuanto al diseño de los cuestionarios realizados y el análisis de los datos obtenidos, también es importante que la autora interpreta la argumentación como una competencia a desarrollar en los estudiantes.

**Conclusiones del capítulo 1**

De acuerdo con las investigaciones consultadas sobre al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de grado noveno de básica secundaria se generan las siguientes conclusiones parciales:

- En la literatura revisada acerca de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria y el álgebra, se constata que las investigaciones que involucran elementos compartidos entre los dos temas son escasas.
- Las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra están presentes en todos los entornos escolares del mundo.
- Las actividades propuestas por Cohecha (2014) son un componente esencial para la presente investigación.

- El modelo de Toulmin es utilizado con continuidad para generar procesos de argumentación en los estudiantes sobre el álgebra y la combinatoria, y también lo articulan con diseño de estrategias sustentadas en el constructivismo.
- Los estudios sobre el enfoque de resolución de problemas en las matemáticas permiten identificar con claridad los errores que los estudiantes cometen mientras buscan soluciones a un problema planteado en el tema de algebra o combinatoria, tema fundamental para el presente estudio.
- El uso de diferentes estrategias didácticas para la enseñanza de la combinatoria y el álgebra proporciona distintas formas de otorgarle el conocimiento al estudiante realizando un ejercicio pedagógico, diferente e innovador, que permite al estudiante encontrarle sentido a lo que está aprendiendo y ve su importancia.
- La bibliografía y referencias citadas en cada estudio son una guía para el proceso de investigación, ya que permiten encontrar artículos, tesis y libros con los temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria y el álgebra.

## CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

En este apartado se presenta los referentes conceptuales que son fundamentales para el desarrollo del presente proyecto, se tuvo en cuenta cuatro ejes: los fundamentos de la argumentación en la matemática, elementos matemáticos de la combinatoria y del álgebra, y los referentes teóricos de la resolución de problemas y problemas retadores.

### 2.1. Fundamentos de la argumentación en la matemática

Inicialmente antes de tocar el tema de argumentación matemática se considera importante definir que es la "argumentación", autores como Sardá (2003) la definen como *"una actividad social, intelectual y verbal que permite justificar o refutar una idea"*[24]. Toulmin (1984) establece que la argumentación es una actividad o acción que consiste en plantear una hipótesis o una idea para luego ponerla en cuestión; se buscan razones que logren respaldarla, se realiza una crítica a estas de modo que si es posible se encuentre una refutación y finalmente se llegue a una conclusión verdadera al respecto.

Además, Gamboa, Planas y Edo (2010) definen la argumentación matemática como: "*Aquel tipo de argumentación que se desarrolla dentro de la actividad matemática y en la que la ley de paso se apoya en elementos del conocimiento matemático, requiriéndose la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones que sea de naturaleza deductiva y no sólo semántica"*[25].

[24] Sardá, A. (2003). Argumentar: proposar i validar models, en N. Sanmarti (coord), Aprende Ciencies tot aprenent a escriure ciencia. Barcelona: Ediciones p.143.
[25] De Gamboa, G., Edo, M. y Planas. N. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. SUMA-Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, 64, 35-44. p. 37.

Por otra parte, Homero (2007) define la práctica argumentativa en matemáticas como: "*El conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema*"[26]. En la tesis se asumen estas ideas Homero (2007) y Gamboa, Planas y Edo (2010) sobre la argumentación matemática.

### 2.1.1 Argumentación en el aula de clases

En el contexto de la educación secundaria y en la propuesta del uso de los elementos compartidos de la combinatoria y el álgebra para generar estrategias en la solución de problemas, se hace fundamental el desarrollo de habilidades argumentativas que lleven al estudiante a generar procesos y construir respuestas con mayor fundamento y demostrar la comprensión de los estudiantes frente al tema.

Rivera y Ruíz (2006) coinciden que la argumentación constituye una herramienta, la cual es "… *vista como una de las habilidades básicas que aporta de manera significativa los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, permitiéndoles ser protagonistas de su propio aprendizaje de tal manera que puedan fortalecer su desarrollo intelectual, lograr conocimientos sólidos y armarlos para la búsqueda de los nuevos conocimientos*"[27].

La habilidad de argumentar se convierte en un componente primordial que se debe desarrollar en el aula de clases, a través de la planificación de procesos de enseñanza y aprendizaje, que estén ligados a la construcción de conocimientos y la formación de

---

[26] Homero, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. Educación Matemática, 19 (1), 63-98. p. 71.
[27] Rivera, A. & Ruíz V, E. (2006). La habilidad argumentar y el adecuado desempeño del profesor. Edusol. p. 6.

esta capacidad. Para Godino y Recio (2001) los argumentos, las explicaciones y los demás tipos de razonamiento pueden entenderse como objetos emergentes de sistemas de prácticas argumentativas. La práctica argumentativa se entiende como *"… el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema"*[28] y un esquema de argumentación es *"… la manera en que el individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa"*[29].

Según Flores (2007) los esquemas de argumentación se pueden clasificar en:

- Autoritarios. Se basan en los argumentos hechos por una autoridad, que puede ser un libro de texto, el profesor o un compañero.
- Simbólicos. El estudiante usa el lenguaje y los símbolos matemáticos de una forma poco consistente, sin llegar a conclusiones reales.
- De recuento fáctico. Se exponen los pasos que se realizan a manera de explicación o justificación de algún resultado obtenido.
- Empíricos. Se apoya en hechos físicos o en un dibujo, los cuales constituyen el argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
- Analíticos. Propicia una cadena deductiva, que no necesariamente conduce a una conclusión válida. Las proposiciones usadas se ajustan a una estructura condiciona.

[28] Flores, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. Educación Matemática, 19(1), p.71.
[29] Flores, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. Educación Matemática, 19(1), p.71.

En los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998) del Ministerio de Educación Nacional (MEN), se expresa que argumentación es *"explicar el porqué, estructurar argumentos para sustentar generalización, someter a prueba, explorar nuevos caminos"*[30].

En la presente investigación se propicia el reconocimiento de los elementos argumentativos que están usando los estudiantes para solucionar las problemáticas expuestas y el nivel de argumentación en el que se encuentran al elaborar el sistema de actividades.

### 2.1.2 Modelo argumentativo de Toulmin

Toulmin (1958) expone un modelo de argumentación matemática que radica en la elaboración de un enunciado inicial, que a partir de la extracción de información y datos iniciales aporta a la autenticidad de una conclusión o enunciado final, de acuerdo con el esquema el modelo consta de seis elementos (ver Figura 1). Estos elementos están dados por la Conclusión (C) que es la tesis o idea que presenta el argumentador, datos (D) es la evidencia, información o hechos sobre la cual se basa la conclusión, garantía (W) justifica la conexión entre los datos y la conclusión. Además, el respaldo (Re) sustento, justificación, teorías que sirven de soporte a la garantía, calificador modal (CM) califica la conclusión enunciando su grado de confianza y la refutación (R) presenta las condiciones en las cuales la garantía no soporta la conexión.

[30] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio. p. 53.

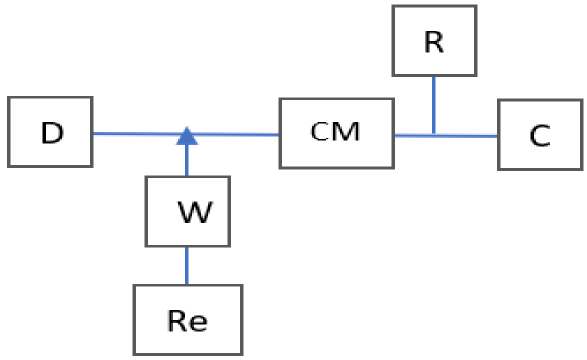



Figura 1. Estructura argumentativa de Toulmin (1958).

A partir de la estructura argumentativa se expone un ejemplo de aplicación del modelo en las matemáticas en el tema de combinaciones (Ver Figura 2), en el cual un estudiante expone sus argumentos, con el fin de justificar, la respuesta sobre algunas preguntas orientadoras realizadas por el docente investigador.

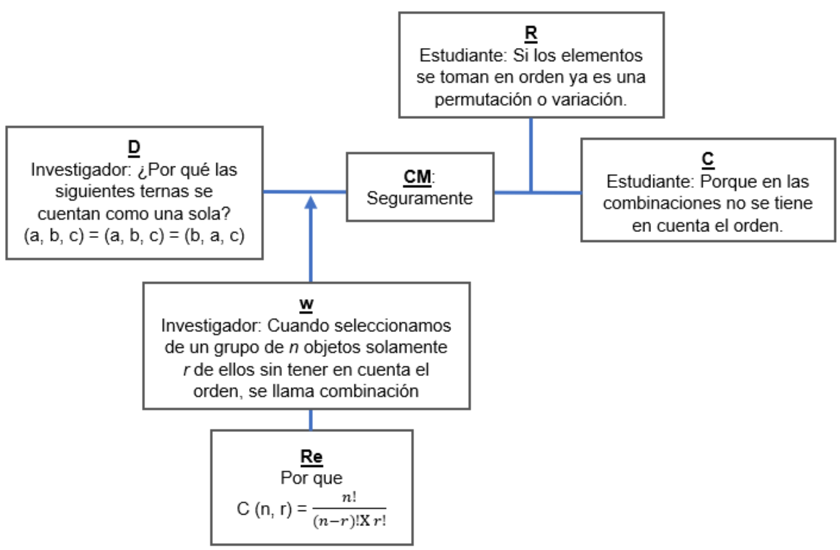



Figura 2. Ejemplo de aplicación de la estructura argumentativa de Toulmin (1958)

Por otra parte, Viholainen (2008) menciona que los argumentos generados por los estudiantes pueden ser de tipo formal e informal, *"el argumento es formal si su garantía es basada en los elementos del sistema formal de las matemáticas y es informal si sus* *garantías son fundadas en el uso de conclusiones informales de conceptos o situaciones en las cuales un argumento está relacionado como interpretaciones físicas o visuales"*[31]*.* El ejemplo que se muestra de la argumentación en combinaciones es una argumentación de tipo formal, pues su garantía es basada en los elementos del formales de la combinatoria.

### 2.1.3 Referentes sobre la evaluación argumentativa

Con el fin de evaluar la competencia o habilidad argumentativa en las diferentes fases del modelo de Toulmin (1958), que surgen de los estudiantes con la elaboración de las actividades, se asumen los siguientes niveles propuestos (ver Tabla 1) por Romero, Bonilla y Álvarez (2018)[32].

| **NIVELES DE LA COMPETENCIA ARGUMENTATIVA** | |
|---|---|
| **NIVELES** | **DESCRIPCIÓN** |
| 0 | No se evidencia proceso argumentativo porque no se presenta ningún elemento o simplemente no hay discurso. |
| 1 | La argumentación se fundamenta en conclusiones y datos |
| 2 | Se presentan argumentos con conclusiones, datos y garantía. |

[31] Viholainen, A. (2008). Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) -Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Jyv¨askyl¨a. p. 81.
[32] Álvarez, T. O., Bonilla, P. G., Romero, A., J. (2018). Las representaciones múltiples como estrategia didáctica para el fortalecimiento de la competencia argumentativa en básica secundaria. Revista Tecné, Episteme y Didaxis. Número extraordinario, Memorias, Octavo congreso internacional de formación de Profesores de Ciencias para la Construcción de Sociedades Sustentables.

| | |
|---|---|
| 3 | Tienen argumentos con conclusiones, datos, garantía, cualificadores. |
| 4 | Muestra argumentos con conclusiones, datos, garantía, cualificador y respaldo a la garantía. |
| 5 | Manifiesta un amplio argumento con conclusiones, datos, garantía, cualificador, respaldo a la garantía y refutaciones. |

Tabla 1. Niveles de competencia argumentativa planteado por Romero, Bonilla y Álvarez (2018)

Estos niveles de competencia o habilidad argumentativa se precisan en el análisis de cada una de las actividades que se muestran en el epígrafe 5.1.

### 2.2. Referentes sobre los elementos matemáticos de la combinatoria

Un elemento según la Real Academia Española es una parte constitutiva o integrante de algo, fundamento, medio o recurso necesarios para algo o cada uno de los componentes de un conjunto. De acuerdo con Rivera y Maldonado (2012) un elemento es el concepto principal para la comprensión de un tema, para la presente investigación se toma como referente las anteriores definiciones, la cual permite precisar los elementos matemáticos en la combinatoria y en álgebra.

#### 2.2.1. Referentes sobre la combinatoria

La combinatoria se entiende como el estudio de formas de listar, arreglar y organizar elementos de conjuntos discretos de acuerdo con reglas específicas. La combinatoria de una manera muy simple es considerada como una herramienta de cálculo para la probabilidad, donde los estudiantes desarrollan un pensamiento combinatorio (Rivera y Maldonado, 2012)

Heitele (1975), Fischbein y Gazit (1988), citado por Batanero, Godino y Navarro, (1996) y Sanabria (2010) abordan la enseñanza aprendizaje de la teoría combinatoria, proponiendo que se inicie su proceso en el aula en principios con la regla de la suma y la regla del producto, y las técnicas de conteo: Permutación, variación y combinación.

### 2.2.2 Elementos de la combinatoria

En los libros oficiales de Estadística y Probabilidad, se puede identificar los conceptos o fórmulas principales de la combinatoria. Siendo estos denominados como elementos de la combinatoria de acuerdo con Rivera y Maldonado, (2012).

Los elementos de la combinatoria corresponden a principio de biyección, principio de conteo y técnicas de conteo (variaciones, permutaciones y combinaciones). A continuación, se explican cada uno de ellos.

**Principio de biyección**

Nieto (2014), plantea que, "*si existe una biyección entre dos conjuntos A y B y A es finito, entonces B también es finito y ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos*"[33].

La prueba de este principio es: si $f: [1, n] \rightarrow A$ y $g: A \rightarrow B$ son biyecciones, entonces la composición $g \circ f: [1, n] \rightarrow B$ es también una biyección y entonces $|A| = |B| = n$. A pesar de lo obvio de este principio, sus aplicaciones son muy importantes, ya que permite

[33] Nieto, S. J. (2014). Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas. Asociación venezolana de competencias matemáticas, Caracas.

reducir la enumeración de configuraciones desconocidas a la de otras ya conocidas, estableciendo una biyección entre ambas.

**Principio de Conteo**

En el estudio de la combinatoria existen varios problemas que se desarrollan por medio de una lista, para determinar de cuantas maneras se pueden suceder (sin que se haga una lista completa). En algunos problemas hay muchas situaciones en que su desarrollo no se necesita una lista completa, por lo cual se puede ahorrar bastante tiempo en el procedimiento (Rivera y Maldonado, 2012).

El principio aditivo afirma lo siguiente: Si se realiza una actividad que se puede llevar a cabo en K - formas alternativas, donde la alternativa i tiene M formas diferentes $i = 1,2,3, \ldots, k;$ entonces el número de formas diferentes en que la actividad puede realizar es: $M = M1 + M2 + \cdots .. + Mk$ (Carreto, Godínez y Ariza; 2009).

El Principio Multiplicativo establece que: Si se realiza una actividad que se puede descomponer en K - pasos ordenados, donde el paso i se realiza de formas diferentes a N1 $i = 1,2,3, \ldots, k$; entonces el número de formas diferentes en que la actividad puede realizarse es: $N = N1 + N2 + \cdots .. + Nk$ (Carreto, Godínez y Ariza; 2009).

Los principios conducen a las técnicas de conteo de acuerdo con el dominio del orden o de la repetición, e incluso si estos no son considerados en las técnicas de conteo.

**Técnicas de conteo**

**Variaciones**. En lenguaje usual, variar significa: hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que antes era. De manera formal una variación son los distintos arreglos tomados de k en k, que se pueden formar con los n elementos (n > k), de tal forma que, en cada arreglo, entren k elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos o en su orden de colocación. El número de variaciones de n elementos tomados k a la vez es: $\mathrm{Vn,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ (Rivera y Maldonado, 2012).

**Permutaciones**. Genéricamente, permutar es: ―variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas. En las permutaciones es necesario precisar si estas cosas son o no indistinguibles, para asegurar que la nueva configuración sea en esencia distinta a la anterior. De manera formal una permutación de n elementos es uno de los posibles arreglos que se pueden formar, de tal manera que cada arreglo esté compuesto de los n elementos y difiera de los demás por el orden de colocación de los elementos. El número de permutaciones de n elementos es: $Pn = n!$ (Rivera y Maldonado, 2012).

**Combinaciones**. En lenguaje común, combinar es: unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto. Al igual que las variaciones y las permutaciones, el concepto de combinación tiene un significado muy concreto en matemáticas: número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección, sino cuáles elementos se toman. Entonces una combinación de n elementos diferentes tomados k a la vez, es un arreglo no ordenado de k de los n elementos, difiriendo entre los distintos arreglos por al menos un elemento que los conforman. El número de combinaciones de n elementos tomados k a la vez es: $\mathrm{C}^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ (Rivera y Maldonado, 2012).

## 2.3 Elementos matemáticos del álgebra

El álgebra es una rama de las matemáticas que se caracteriza por el empleo de letras para representar números con ella, y con el uso de los símbolos para indicar operaciones y agrupamientos, se ha elaborado un código especial, el lenguaje algebraico (Almaguer, 1998).

Los elementos del álgebra que se trabajan se relacionan con el binomio de Newton y los conjuntos. A continuación, se explican cada uno de ellos.

**Binomio de Newton**. El binomio de newton es una fórmula que permite calcular de manera fácil la potencia de un binomio. Es decir, consiste en una fórmula con la que se pueden resolver expresiones algebraicas de la forma $(a+b)^n$.

El binomio de Newton es la fórmula que permite hallar las potencias de un binomio, su fórmula matemática es:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

**O equivalentemente**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

El número de términos es n+1. Los coeficientes son números combinatorios que corresponden a la fila enésima del triángulo de Pascal (ver Figura 3).

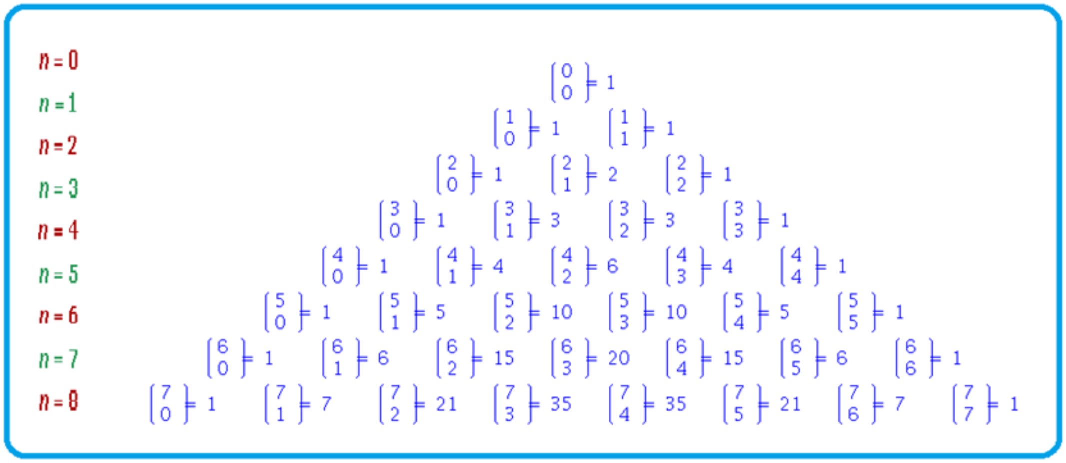



Figura 3. Números combinatorios.

De esta manera se puede utilizar el triángulo de Pascal para resolver el binomio de Newton, ya que ahorra los cálculos de los números combinatorios. Por ejemplo, si se desea hacer la siguiente potenciación de un binomio:

$$(a+b)^3$$

Al aplicar la regla del binomio de Newton obtenemos la siguiente expresión algebraica:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 . b^0 + \binom{3}{1} a^2 . b^1 + \binom{3}{2} a^1 . b^2 + \binom{3}{3} a^0 . b^3$$

A continuación, se calcula los números combinatorios uno a uno, simplemente se puede sustituir cada número combinatorio por su coeficiente correspondiente del triángulo de pascal. En este caso el binomio está elevado a la 3, (ver Figura 4) por lo que le corresponde el tercer nivel del triángulo.

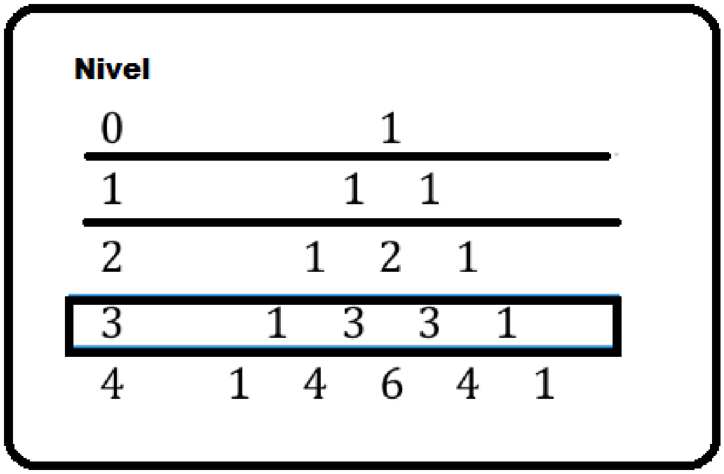



Figura 4. Números combinatorios y triángulo de Pascal.

**El triángulo de Pascal**. El triángulo de Pascal de acuerdo con Becerra (2005), "*es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico, se empieza con un 1 en la primera fila, y en las filas siguientes se van colocando números de forma que cada uno de ellos sea la suma de los dos números que tiene encima. Se supone que los lugares fuera del triángulo contienen ceros, de forma que los bordes del triángulo están formados por unos. Está formado por infinitas filas de números, y se construyen de la siguiente forma*"[34]:

La primera fila, la Fila 0, tiene solamente un uno: 1.

La segunda, la Fila 1, tiene dos unos, a izquierda y derecha del uno anterior: 11

La tercera fila, la Fila 2, se construye así: se suman los dos números de la anterior y se coloca el resultado, 2, debajo del hueco que dejan dichos números, y a izquierda y derecha se colocan dos unos, resultando: 1 2 1.

[34] Becerra, E., J. (2005) Temas selectos de matemáticas. La amena forma de aprender más. Universidad Autónoma de México. p. 54.

La cuarta fila, y las posteriores, se construyen del estilo a la tercera: debajo de cada hueco entre dos números de la fila anterior se escribe la suma de dichos números, y a izquierda y derecha se colocan dos unos. Por ejemplo, la Fila 3 queda así: 1 3 3 1, y la Fila 4 resulta: 1 4 6 4 1 (ver Figura 5).

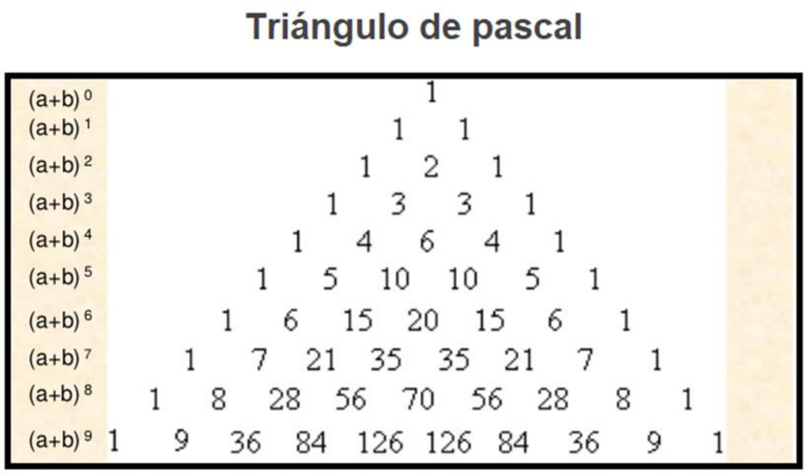



Figura 5. El triángulo de Pascal Becerra (2005)

**Conjuntos**. Kisbye y Tiraboschi, (s.f.) definen "*que cualquier colección de objetos o individuos se denomina conjunto. En el contexto de la matemática, el término conjunto no tiene una definición, sino que es un concepto primitivo*"[35]. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números impares, de objetos, entre otros.

Un conjunto sin elementos se denomina conjunto vacío. En general se usan letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si *a* es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee *a* pertenece a A o *a* es un elemento de A. Si *a* no es un elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$

---

[35] Kisbye y Tiraboschi, (sin fecha). Elementos de lógica y teoría de conjuntos. Academia. pp.7-8.

y se lee *a* no pertenece a A o *a* no es elemento de A. Los símbolos N, Z, Q y R serven para denotar a los siguientes conjuntos:

N: el conjunto de los números naturales.

Z: el conjunto de los números enteros.

Q: el conjunto de los números racionales.

R: el conjunto de los números reales.

Para nombrar los elementos de un conjunto es pertinente separarlos por comas y encerrarlos todo entre llaves, como se muestra en el siguiente ejemplo:

A = {2, 4, 6, 8, 10}, U = {h, x, b, u, z}, M = {oso, tigre, jirafa}.

Diagramas de Venn. Es habitual utilizar ciertos diagramas, llamados diagramas de Venn, para representar a los conjuntos (Ver Figura 6). Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. Por ejemplo, el diagrama de Venn para el conjunto B = {1, 3, 5, 7} es

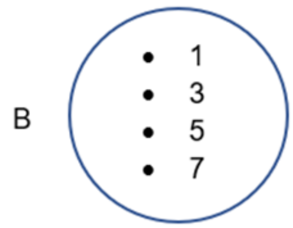



Figura 6. Representación del conjunto B mediante un diagrama de Venn.

**Subconjuntos.** Considera los conjuntos A = {1, 3, 7}, y B = {1, 2, 3, 4, 7}. Como se puede ver, los elementos de A: 1, 3 y 7, también son elementos de B. Se dice entonces que A es un subconjunto de B, o que A esta incluido en B.

Un conjunto A es un subconjunto del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B. Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está incluido o contenido en B. En particular, todo conjunto está incluido en sí mismo. A = {1, 3, 7} está incluido en A, y lo escribimos $A \subseteq A$.

**Cardinalidad.** Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, se dice que es un conjunto finito y se llama cardinal de A al número de elementos de A. El cardinal del conjunto vacío es 0, y si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos se dice que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito. En todos los casos, el cardinal del conjunto A se denota |A| o también #A.

**El conjunto de partes.** El conjunto de partes de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Lo denotamos P(A).

A = {x, y, z} entonces P(A) = {∅, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z}}.

Si A es un conjunto finito, de n elementos, entonces el cardinal del conjunto de partes es $2^n$. Por ejemplo, para A = {a, b, c}, se tiene que |A| = 3 y |P(A)| = 8. Para B = {a}, tenemos |B| = 1 y |P(B)| = 2. También se cumple que |∅| = 0, y |P (∅) | = | {∅} | = 1.

## 2.4. Referentes de la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

Los profesores en su práctica docente evidencian que los estudiantes presentan diferentes dificultades de aprendizaje en las matemáticas y que muchas de ellas se solucionan con el diseño, elaboración y aplicación de recursos, herramientas, materiales y estrategias, diseñadas por expertos que quieren aportar en la solución de esas dificultades.

La resolución de problemas contribuye a superar esas dificultades. Esta teoría va más allá de realizar un procedimiento y encontrar una respuesta, se trata de situaciones con un nivel de dificultad, que permite que el estudiante coloque todas sus capacidades y conocimientos sobre el tema, lo cual genera motivación y se convierte en un desafío para el estudiante.

En la teoría de resolución de problemas son varios autores que se destacan por realizar aportes fundamentales y que a través de la historia han elaborado diferentes investigaciones: Polya (1965), Ballester et al. (1992), Schoenfeld (1985), Campistrous y Rizo (1996), Lesh y English (2005), Cruz (2006), Lesh y Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012). Además, con sus aportes, permiten que otros estudios tomen sus contribuciones para solucionar diferentes dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Ahora bien, se considera pertinente abordar una definición desde la perspectiva de varios autores sobre ¿qué es un problema?, ¿qué es la resolución de problemas?, ¿qué son los problemas retadores? y mencionar algunas metodologías o fases para la resolución de problemas, con el objetivo de poder aplicar la teoría a las actividades propuestas en esta investigación para que favorecer el uso de elementos compartidos de la combinatoria y el álgebra en la resolución de problemas.

**¿Qué es un problema?** García y Rentería (2011) citan a García (2003) para definir el significado de problema en la educación matemática, y consideran “que *es una oportunidad para poner en juego los preconceptos y esquemas mentales, que llevan al sujeto a la búsqueda de una solución que aún no se encuentra, la cual deben hallar mediante la relación entre un grupo de factores y variables y una reflexión profunda de* *las ideas propias y la construcción de unas nuevas que se conforman en nuevos esquemas y modelos*"[36].

Para Mosquera (2017) un problema es *"una situación enfrentada por un individuo o grupo, que presenta una oportunidad de poner en juego los esquemas de conocimiento y en la que se deben hallar interrelaciones expresas y tácitas entre un grupo de factores o variables, lo que implica la reflexión cualitativa, el cuestionamiento de las propias ideas, la construcción de nuevas relaciones, esquemas y modelos mentales"*[37].

Autores como Krulik y Rudnik (1987) plantean que un problema es *"… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[38]. Esta definición se asume en la presente investigación.

**¿Qué son los problemas retadores?** El sistema de actividades que se plantean en la tesis se fundamenta en problemas retadores. De acuerdo con Pérez (2004) los problemas retadores *"… invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento (…) exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los*

[36] García, J. y Rentería, E. (2011). Resolver problemas para aprender sobre los modelos. (Artículo de investigación académica, científica y tecnológica) Revista Q, 6 (11). pp.7-8.
[37] Mosquera. H. E. (2017). Desarrollo de competencias interpretativas y argumentativas, a través de la resolución de problemas. (Tesis de pregrado) Facultad de educación. Universidad de Antioquia.
[38] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon. p. 4.

*conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior”*[39].

Un problema retador también debe dirigir su atención a *“Hacer que el estudiante piense productivamente, desarrollar su razonamiento, enseñarle a enfrentar situaciones nuevas, darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática, hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes, equiparlo con estrategias para resolver problemas y darle una buena base matemática”*[40].

Por otra parte, Falk (1980) señala que los problemas retadores son estimulantes para el estudiante y debe tener estas tres características:

1. *“Debe ser una situación que estimula el pensamiento.*
2. *Que sea interesante para el alumno.*
3. *La solución no debe ser inmediata”*[41],

Los problemas retadores propician en los estudiantes creación y originalidad, su resolución le exige responsabilidad y compromiso. Estos elementos son fundamentales para que las actividades diseñadas conduzcan al estudiante a usar los elementos compartidos de la combinatoria y el álgebra para la resolución de problemas.

---

[39] Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

[40] Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de marzo de 2021 de la URL: http:www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/

[41] Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.p. 16

Por su parte, Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) plantean rasgos que distinguen las diferentes definiciones de problema abordadas. Estos rasgos están presentes en cada una de ellas:

- La existencia de condiciones iniciales o finales las cuales plantean la necesidad de transformación.
- La vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida o, al menos, no ha de ser inmediatamente accesible.
- Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, considerando que lo que puede ser un problema para uno, puede no serlo para otro.
- Que el estudiante disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades y motivación.

**¿Qué es la resolución de problemas?** Cuando se habla de resolución de problemas se puede definir como la estrategia didáctica usada para encontrar una solución viable a un ejercicio matemático. Garret (Citado por García, 1998) define la resolución de problema como "*Una actividad de aprendizaje, compleja, que incluye el pensar…, y que, además,… puede ser descrita como un proceso creativo, ya que solucionar problemas es pensar creativamente… y… hallar una solución a un problema, es un acto productivo*"[42].

Frazer (Citado por García, 1998) se refiere a la resolución de problema y las particularidades del proceso, por ello lo define como "*Un proceso que utiliza el*

[42] García, J. (1998). *Didáctica de las ciencias*. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Grupo Impresor. Colombia. pp.15. Recuperado 12 de febrero de 2021 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191

*conocimiento de una disciplina y las técnicas y las habilidades de esa disciplina para salvar el espacio existente entre el problema y su solución*"[43].

En los Lineamientos pedagógicos y curriculares para el área de matemáticas (1998) del Ministerio de Educación Nacional (MEN), se platea que la elaboración y resolución de problemas permite adquirir objetivos relevantes en el proceso de construcción del conocimiento matemático, los cuales son:

- *"Desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas.*
- *Provocar procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático; nos estamos refiriendo precisamente a los procesos del pensamiento matemático: la manipulación (exploración de ejemplos, casos particulares); la formulación de conjeturas (núcleo del razonamiento matemático, proponer sistemáticamente afirmaciones que parecen ser razonables, someterlas a prueba y estructurar argumentos sobre su validez); la generalización (descubrir una ley y reflexionar sistema áticamente sobre ella); y la argumentación).*
- *Investigar comprensión de conceptos y de procesos matemáticos a través de: reconocimiento de ejemplos y contraejemplos; uso de diversidad de modelos, diagramas, símbolos para representarlos, traducción entre distintas formas de representación; identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos, verificación de resultados de un*

---

[43] García, J. (1998). *Didáctica de las ciencias*. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Grupo Impresor. Colombia. pp.15. Recuperado el 25 de marzo de 2021 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191

*proceso, justificación de pasos de un proceso, reconocimiento de procesos correctos e incorrectos, generación de nuevos procesos, etcétera.*

- *Investigar estrategias diversas, explorar caminos alternos y flexibilizar la exploración de ideas matemáticas"[44].*

Para lograr estas metas los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas.

**Metodologías o fases para la resolución de problemas**

Polya (1965) en sus trabajos de investigación propone un modelo en el cual muestra cómo ayudar a los estudiantes a resolver problemas y propone cuatro fases: primero comprender el problema, segundo concebir un plan, tercero ejecutar un plan, y cuarto examinar la solución obtenida. A continuación, se definen cada una de estas fases[45]:

1. **Comprender el problema**: en esta etapa el estudiante además de entender el problema debe de sentir interés por resolverlo, para ello el autor recomienda que el problema debe ser con un nivel de dificultad acorde a su edad, también el enunciado debe ser leído por el estudiante sin dificultad teniendo en claro las siguientes preguntas: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos? Además, ¿cuál es la condición?, en esta parte es importante que el estudiante analice el enunciado del problema antes de empezar a resolverlo.

[44]Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio. p. 53.
[45] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad de México, México: Trillas. p. 19.

2. **Concebir un plan**: el estudiante como lo sugiere Polya (1965) debe encontrar una relación inmediata entre los datos y la incógnita, además de considerar problemas auxiliares que se desglosan del enunciado general, de igual forma encontrar una técnica para resolverlo y empezar a crear un plan de solución.

3. **Ejecutar un plan**: en esta fase ya con un plan de solución se debe ejecutar y examinar los resultados, hasta obtener resultados positivos en la solución del problema, se debe comprobar cada uno de los pasos. En esta fase el profesor puede hacer uso de las siguientes preguntas heurísticas: ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto? y ¿puede usted demostrarlo?, entre otras.

4. **Examinar la solución obtenida**: Polya (1965) señala que en esta fase se procura extender la solución de un problema a tal vez algo más trascendente: en la cual se pueden realizan las siguientes preguntas heurísticas: ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado de forma diferente? o ¿puede emplear este resultado o el método en otro problema?". En esta fase también el profesor puede formular otras preguntas heurísticas: *"¿Verifica la solución obtenida, los criterios específicos siguientes?, ¿utiliza los datos pertinentes?, ¿está acorde con predicciones o estimaciones razonables?, ¿es posible obtener la misma solución por otro método?, ¿puede quedar concretada en casos particulares?, ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?, ¿es posible utilizarla para generar algo ya conocido?*[46]

[46] García. D. A. y Rodríguez P. C. (s.f). uso del enfoque del método de resolución de problemas comparándolo con el método tradicional para analizar si existe un cambio en algunos de los aspectos que influyen el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de México. Recuperado el 20 de febrero de 2021. https://www.saece.com.ar/docs/congreso6/trab099.pdf

La propuesta de fases o métodos de resolución de problemas de Polya (1965) hace parte de la construcción de la teoría de resolución de problemas que permiten mejorar los procesos de enseñanza y superar las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes en las matemáticas.

## Conclusiones del capítulo 2

Lo que se pretende en este trabajo de investigación es el diseño y aplicación de un sistema de actividades, enfocadas a que el estudiante se centre en la resolución de problemas matemáticos, que le permitan usar los elementos compartidos entre la combinatoria y el álgebra para mejorar sus dificultades de aprendizaje en los temas. Para ello se asume las siguientes posturas del marco teórico anteriormente expuesto.

En cuanto a la argumentación se asume la definición propuesta por Homero (2017), el modelo argumentativo de Toulmin (1958) y los niveles de competencia argumentativa planteados por Romero, Bonilla y Álvarez (2018), con el fin de reconocer y evaluar los argumentos que emergen de los estudiantes de grado noveno del GMO al solucionar el sistema de actividades.

Respecto al contenido principal y base de la propuesta, esta investigación asume de la combinatoria los temas de las combinaciones, el principio de biyección y los números combinatorios y en el álgebra los temas del binomio de Newton y los conjuntos.

Por otro parte, se asume la definición de problemas retadores dada por Krulik y Rudnik (1987), el significado de resolución de problemas expuesto por Garret (1998), el concepto de problema retador propuesto por Pérez (2004) y las características que debe tener ese tipo de problemas de Falk (1980).

A demás, se toma los aportes realizados por Polya (1965) con las fases o estrategia de resolución de problemas, en el que propone cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y examinar la solución obtenida, lo anterior permite realizar la estructura pedagógica y didáctica del sistema de actividades y así cumplir con el objetivo propuesto en la tesis.

## CAPÍTULO 3, METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se expone, el diseño metodológico que se compone del tipo, enfoque de investigación y diseño, la población y muestra o unidad de análisis, los métodos de recolección de información (instrumentos) y las fases de investigación pertinentes para dar solución a la problemática planteada.

### 3.1. Tipo, enfoque y diseño de la investigación

La metodología que se implementa en la tesis se delimita dentro de los parámetros de una investigación de enfoque cualitativo. Este tipo de investigación es una actividad sistemática, que se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones (Sampieri, Collado, Lucio & Pérez (1998). El enfoque de investigación cualitativo *"… se selecciona cuando el propósito es examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[47].

Por su parte, Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2014) plantean que "… el proceso cualitativo no es lineal, sino iterativo o recurrente; las supuestas etapas en realidad son acciones para adentrarnos más en el problema de investigación y la tarea de recolectar y analizar datos es permanente"[48]. Bajo estas ideas se aborda el proceso investigativo de la enseñanza y aprendizaje de elementos

[47] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 358.
[48] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 356.

y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra en estudiantes del grado noveno del colegio Gimnasio Mayor del Occidente.

Además, la investigación se estructura bajo un diseño de investigación acción, este diseño *"… constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría"*[49].

Con respecto al diseño de investigación acción Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio (2014) expresan que *"Su precepto básico es que debe conducir a cambiar y por tanto este cambio debe incorporarse en el propio proceso de investigación. Se indaga al mismo tiempo que se interviene"*[50]*.* Por lo que se infiere que este diseño permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente relacionado con la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra.

El presente trabajo de tesis pretende un robusto conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática relacionado con la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra, en un grupo de estudiantes del grado noveno del colegio Gimnasio Mayor del Occidente.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra en estudiantes del grado noveno se fortalece con los aportes que ofrece el diseño de investigación

[49] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.
[50] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). Sexta edición. México: McGraw-Hill. p. 496.

acción, ya que propicia la experimentación, búsqueda y exploración del conocimiento matemático, que a la vez estimule y genere la capacidad de argumentar. Este proceso le permite al estudiante plantear, expresar y comprobar sus ideas, compartirlas y confrontarlas, así como aplicarlas a la resolución de problemas de combinatoria con elementos del álgebra.

### 3.2. Población y muestra (Unidad de análisis)

Un aspecto importante para el desarrollo del proyecto de investigación es la población, que en este caso son los estudiantes del colegio Gimnasio Mayor del Occidente ubicado en la localidad de Engativá en Bogotá. El Colegio en la actualidad tiene más 1000 estudiantes, en prescolar, básica primaria y básica secundaria. La unidad de análisis a quién va dirigido el sistema de actividades es el grupo de estudiantes del grado noveno A, conformando por 10 escolares, 6 niñas y 4 niños entre las edades de 13 a 14 años.

### 3.3. Métodos empíricos, técnicas e instrumentos utilizados

En este proyecto de investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos teóricos:

**Histórico-lógico**: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los elementos y argumentos entre la combinatoria y el álgebra.

**Análisis-Síntesis**: para elaborar el estado del arte y para determinar las tendencias actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de los elementos y argumentos entre la combinatoria y el álgebra en la escuela. Además, se utiliza para la construcción de los fundamentos teóricos y en el análisis para sintetizar los resultados de las actividades relacionados con los elementos y argumentos entre la combinatoria y el álgebra, lo que permite la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La **observación participante**: observación de clases para obtener información sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de los elementos y argumentos entre la combinatoria y el álgebra.

**Entrevista:** para conocer de los especialistas las características del proceso de enseñanza aprendizaje de los elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra (Ver anexo 1).

### 3.4. Fases de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se establecieron las siguientes fases:

- **Fase 1: Detección, conocimiento y clarificación del problema de investigación.** En esta fase se evidencian los siguientes elementos:
  1. Diseño de instrumentos: observación participante, entrevista a especialista y encuesta a docentes.
  2. Aplicación de los instrumentos de recolección de información.
  3. Recogida de datos arrojados por instrumentos.
  4. Planteamiento inicial del problema de investigación y el objetivo general.
- **Fase 2: Revisión de la literatura**. En esta fase se realiza una búsqueda detallada del estado del arte, la cual permite confirmar el problema de investigación, restructurar el objetivo general y determinar las tendencias

actuales sobre la enseñanza-aprendizaje de los elementos de la combinatoria y el álgebra en escuela.

- **Fase 3: Construcción del marco teórico**. En esta fase se determina el marco teórico de la tesis, basado en:
  1. Fundamentos de la argumentación en la matemática.
  2. Elementos matemáticos de la combinatoria.
  3. Elementos matemáticos del álgebra.
  4. Referentes de la teoría de la resolución de problemas: problemas retadores.
- **Fase 4: Diseño y estructuración del sistema actividades.** En esta fase se realiza el diseño y elaboración de siete actividades las cuales se detallan en el capítulo 4 de la tesis.
- **Fase 5: Implementación y análisis de resultados**. En esta fase se realiza las siguientes acciones:
  1. Aplicación de las actividades a los estudiantes de grado noveno del GMO.
  2. Recogida de la información.
  3. Aplicación de la encuesta de satisfacción a estudiantes sobre el uso de elementos del álgebra en la solución de problemas de combinatoria.
  4. Elaboración del documento escrito.
  5. Socialización de los resultados obtenidos.

### Conclusiones del capítulo 3

El planteamiento de la metodología de investigación para la tesis se sitúa dentro de los parámetros de una investigación de enfoque cualitativo y orientado al tipo de diseño de investigación acción. Es importante resaltar que en la investigación se utilizan métodos del nivel teórico como el Histórico-lógico y el análisis-síntesis y también empíricos como la observación participante y la entrevista.

En este estudio cualitativo la unidad de análisis tomada para la investigación son los estudiantes de grado noveno de bachillerato del Gimnasio Mayor del Occidente.

Además, esta metodología, permite el análisis de los resultados del sistema de actividades relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de los elementos compartidos de la combinatoria y el álgebra en los estudiantes, la elaboración de las conclusiones y las recomendaciones.

De igual forma con la culminación de las fases de investigación propuesta, se da cumplimiento con los objetivos dispuestos en la tesis y así proporcionar una posible solución a la problemática planteada.

# CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES SOBRE ELEMENTOS COMPARTIDOS ENTRE LA COMBINATORIA Y EL ÁLGEBRA

En este capítulo se expone la propuesta y organización del sistema de actividades dirigidas a los estudiantes de grado noveno, con el objetivo de mejorar la comprensión de los conceptos básicos de la teoría de combinatoria y el desarrollo del álgebra, al igual que determinar los argumentos surgidos de la resolución de problemas de los estudiantes con la aplicación de las actividades.

## 4.1. Estructura de las actividades

Las actividades sobre elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra, que se muestran en este capítulo mejoran los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en las matemáticas porque propician el desarrollo de diferentes problemas retadores que permiten fomentar el uso de la argumentación matemática para justificar sus procedimientos.

En esta investigación se implementan 5 actividades basadas por la temática básica de la combinatoria y el álgebra, por la teoría de resolución de problemas retadores y en los argumentos que surgen de los estudiantes al resolver las actividades. A continuación, se explicita como se integran en las actividades.

**Temas sobre la combinatoria y el álgebra:** el contenido propuesto para el desarrollo de las actividades en la combinatoria es las combinaciones, el principio de biyección y los números combinatorios, y en el álgebra es el binomio de Newton y los conjuntos, con el propósito de encontrar esos elementos compartidos que permiten dar solución a las problemáticas planteadas por parte de los estudiantes.

**La teoría de resolución de problemas retadores:** las situaciones que se plantean en las actividades son problemas retadores atrayentes para los estudiantes, que estimulan el pensamiento y lo motivan a repasar, indagar y examinar, para comprender y debatir el problema que se presenta; con la finalidad de que sean competentes de encontrar una solución, a través de la estrategia dada por Polya (1965). El sistema de actividades se dirige a lograr un robusto proceso de enseñanza aprendizaje de la combinatoria y el álgebra en la secundaria a través de la resolución de problemas.

**Los argumentos que surgen de los estudiantes al resolver las actividades**: el método para reconocer los argumentos que emergen de los estudiantes al solucionar el sistema de actividades es el Modelo Toulmin (1958) que consta de seis elementos de argumentación: Conclusión, Datos, Garantía, Respaldo, Calificador Modal y Refutación, cada uno de ellos se explica de manera precisa en el marco teórico.

## 4.2. Propuesta del sistema de actividades

Seguidamente, se presentan cada una de las 5 actividades diseñadas, las cuales se estructuran en título, objetivo, sugerencias metodológicas, materiales a utilizar y desarrollo de la actividad (propuesta de problemas).

### 4.2.1 Actividad 1. Las combinaciones y sus elementos

**Objetivo:** identificar los elementos y argumentaciones que tiene las combinaciones para ser aplicados a la solución de problemas retadores y desarrollar el pensamiento combinatorio.

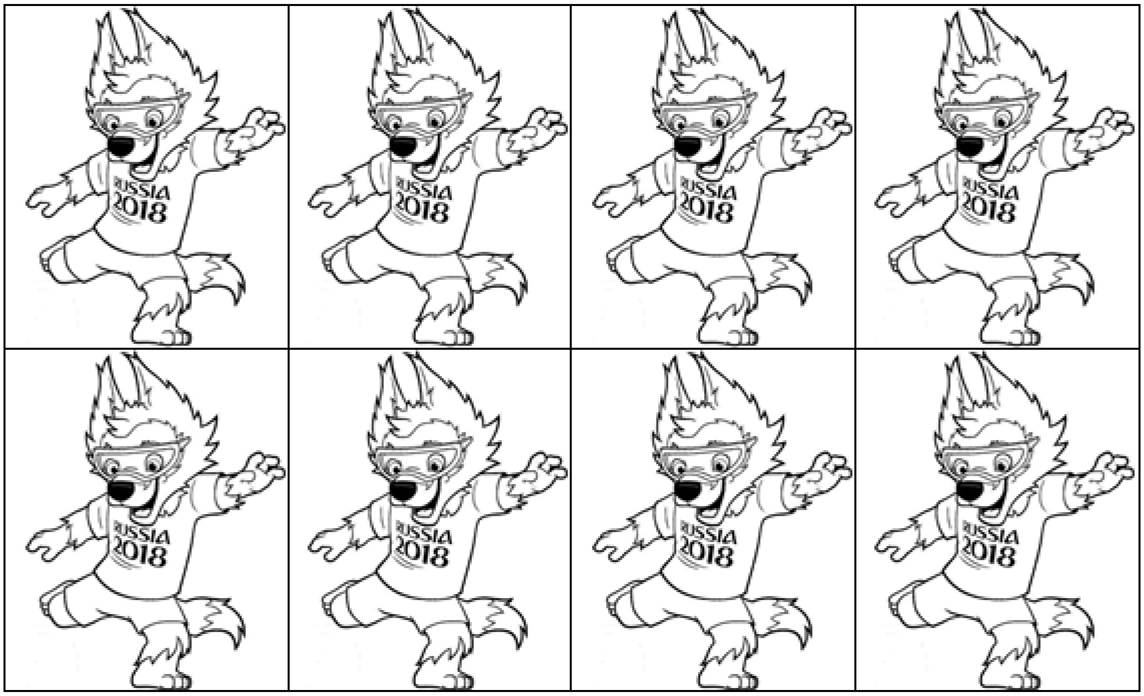
**Metodología de la actividad:** en la clase virtual de estadística por medio de una plataforma digital dispuesta por el colegio, se entrega la guía a cada estudiante para que sea resuelta de forma individual. Posteriormente el docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y estará como observador apoyando al estudiante resolviendo dudas e inquietudes sobre el desarrollo de la guía. Se estipula un tiempo de 2 horas para realizar y entregar la actividad al docente.

Se proponen diferentes situaciones problemas con el objetivo de que los estudiantes usen los elementos y argumentos de las combinaciones para solucionar las problemáticas presentadas y también fomentar en el estudiante el uso de la argumentación para justificar sus procedimientos.

**Materiales para la actividad:** Guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

Los diseñadores de la Mascota del Mundial de Fútbol Rusia 2018 proponen el siguiente estilo de mascota, pero puede variar sus accesorios y colores como lo muestra la siguiente imagen.


1) Según los elementos que se pueden variar determine con ayuda de las siluetas y colores. La cantidad de opciones posibles de diseño de la mascota es.




2) Si el diseñador principal exige que la mascota debe tener la pantaloneta de color verde, ¿Cuántas opciones de mascota se tendrán? Argumente su respuesta.

3) Los diseñadores proponen que para volver más comercial el color del pelo de la mascota puede ser café o negro ¿cuántos estilos de mascotas distintas se tendrían? Argumente su respuesta

4) ¿Cuántas posibilidades de diseño tiene para la camisa de la mascota? Argumente su respuesta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

5) ¿Qué operación desarrollaría para contar los posibles diseños de mascota? Argumente su respuesta.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

### 4.2.2 Actividad 2. Las combinaciones y sus elementos

**Objetivo:** reconocer los elementos y argumentos que tiene las combinaciones para tomar decisiones en la resolución de problemas retadores.

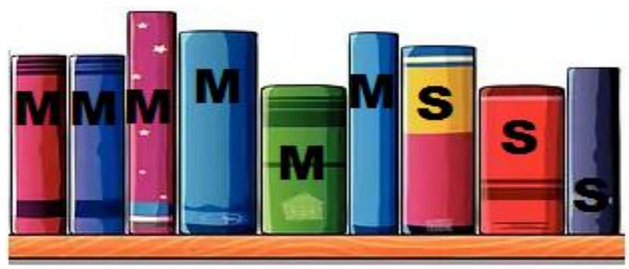
Desarrollar fórmulas de conteo que permitan aplicarse al análisis de diferentes situaciones o eventos.

**Metodología de la actividad:** el docente con anterioridad envía la guía digital a los estudiantes, por correo electrónico para que la puedan tener en físico el día de la aplicación de la actividad, seguidamente genera el enlace en la plataforma dispuesta por la institución para la sesión con los estudiantes.

Por otro lado, es pertinente mencionar que esta actividad es la continuación de la actividad 1, cuyo objetivo principal es reforzar y recordar los conocimientos de los estudiantes frente a la resolución de problemas utilizando la fórmula para ejecutar combinaciones. De igual forma se pretende guiar al estudiante para que use e identifique sus elementos en la resolución de diferentes situaciones diseñadas por el docente y además fomentar en el estudiante el uso de la argumentación para justificar sus procedimientos.

**Materiales para la actividad:** Guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

1) En un estante de la biblioteca Virgilio Barco, hay 6 libros de matemáticas y 3 de sociales. como se muestra en la siguiente imagen.




a) Si queremos escoger 2 de cada materia, ¿De Cuántas maneras se pueden tomar del estante?

Después de leer el problema responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué nos piden buscar? o ¿Cuál es la incógnita del problema?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

- ¿Cuáles son los datos del problema? y si tiene una condición escríbala.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

- ¿Cuál es el plan para seguir para resolver el problema?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

b) Ahora empecemos a resolver el problema:

- ¿Puede obtener el resultado de forma diferente? Argumenta tu respuesta

___

___

- ¿Puede emplear este resultado en otro problema? Argumenta tu respuesta

___

___

2) Un entrenador de voleibol está conformado el equipo que representa al colegio en un torneo de localidades. Para ello, debe decidir entre 5 de 7 jugadores, Mario (M), Leonardo (L), Fabio (F), Diego (D), Oscar (O), Camilo (C) y Eduardo (E)

a) ¿Cuántos equipos de 5 jugadores pueden formar si Eduardo y Fabio son fijos?

Después de leer el problema responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué nos piden buscar? o ¿Cuál es la incógnita del problema?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

- ¿Cuáles son los datos del problema? y si tiene una condición escríbala.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________

- ¿Cuál es el plan para seguir para resolver el problema?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

b) Ahora empecemos a resolver el problema:

¿Puede obtener el resultado de forma diferente? Argumenta tu respuesta

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

¿Puede emplear este resultado en otro problema? Argumenta tu respuesta

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

3)El inspector de una fábrica de bombillos desea realizar el control de calidad de una de las cajas que se produce diariamente. Para ello, se escoge al azar una de las cajas y se ensayan dos de las bombillas. En cada caja hay 4 bombillos de 60 w, 100 w, 120 w y 150 w.


a) ¿De cuántas formas se puede realizar la selección?

Después de leer el problema responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué nos piden buscar? o ¿Cuál es la incógnita del problema?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

- ¿Cuáles son los datos del problema? y si tiene una condición escríbala.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

- ¿Cuál es el plan para seguir para resolver el problema?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

c) Ahora empecemos a resolver el problema:

- ¿Puede obtener el resultado de forma diferente? Argumenta tu respuesta

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

- ¿Puede emplear este resultado en otro problema? Argumenta tu respuesta

______________________________________________________________________

### 4.2.3 Actividad 3. Principio de biyección y función biyectiva

**Objetivo:** identificar los elementos y argumentos que tiene el principio de biyección y la función biyectiva para ser aplicados a la solución de problemas retadores y desarrollar el pensamiento algebraico y combinatorio.

**Metodología de la actividad:** El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y estará como observador apoyando al estudiante resolviendo preguntas sobre la elaboración de la guía. Se estipula un tiempo de 2 horas para realizar y entregar el trabajo al docente.

**Materiales para la actividad:** guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

1) En un campeonato de la Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022, jugado por el simulador de eliminatorias se enfrentan *n* equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente[51].


a) Realizar un esquema con los equipos participantes cuando *n* es par y cuando *n* es impar.

b) Realiza el conjunto de los equipos que han quedado eliminados y otro conjunto de los partidos jugados.

c) Sí consideramos los conjuntos A y B ¿Existirá una función biyectiva entre ellos? argumente su respuesta.

d) Sí n=2021, ¿cuántos juegos se realizarán durante el campeonato?, argumente su respuesta.

[51] Nieto, S, J. (2014). Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas. Asociación venezolana de competencias matemáticas, Caracas.

e) ¿Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022? argumente su respuesta

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

### 4.2.4 Actividad 4. Combinaciones y el binomio de Newton

**Objetivo:** Reconocer los elementos y argumentos que tiene las combinaciones y el binomio de Newton para ser aplicados en la solución de problemas retadores.

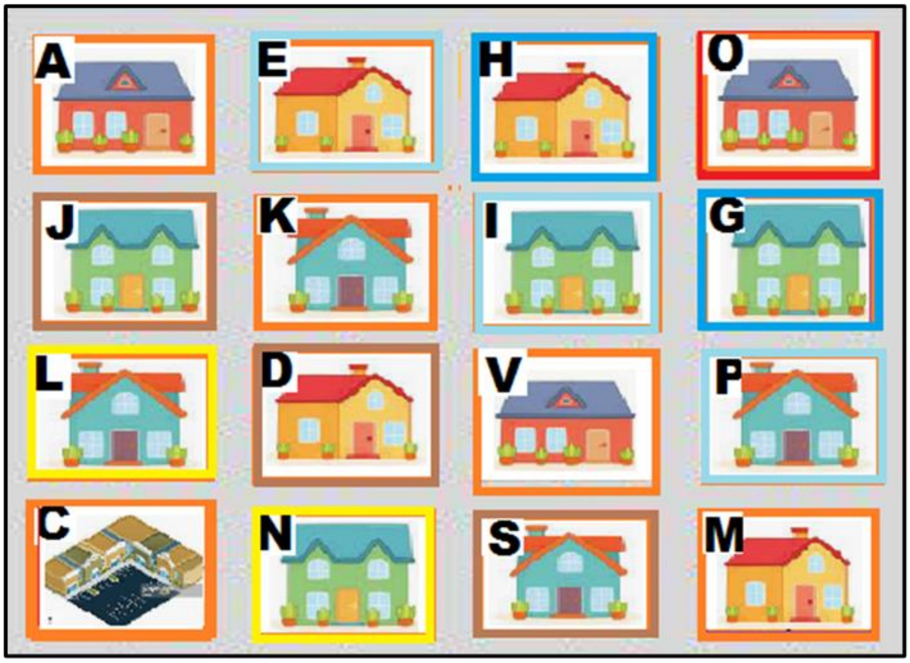
**Metodología de la actividad**: la actividad se realiza de forma individual, el docente realiza una explicación general de la guía.

Se pide a los estudiantes tener presente la ubicación en el esquema del conjunto residencial, partiendo del punto principal que es centro comercial para generar de manera correcta las trayectorias

A demás, se plantea un escenario del cual se deben responder diferentes problemáticas que permitirán al estudiante usar los elementos y argumentos compartidos de las combinaciones y el binomio de Newton con el fin de encontrar y argumentar una solución.

**Materiales para la actividad:** Guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

El conjunto residencial *Castilla* en Bogotá, está organizado por manzanas, cada una de ellas de 40 m por 40 m, como se muestra en la siguiente imagen.




En cada manzana se han construido 4 casas. La casa (esquinera inferior izquierda) se ha destinado para la parte social, allí se tienen salas de cine. Algunos de los niños que viven allí son, Lina y Nicolás, en las casas amarillas; Javier, Daniel y Sandra, en las casas verdes; Ana, Karen, Vanesa y Melisa, en las casas de color naranja; Esteban, Ismael y Pablo en las casas azules; Homero y Gabriel en las casas de color violeta; y en la casa de color café vive Oscar.[52]

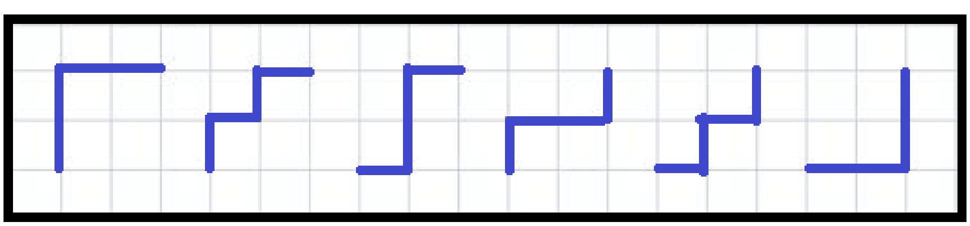
A. Completar la siguiente tabla, con el color de la casa que habita cada niño y el mínimo de cuadras que deben caminar para llegar a la sala de cine.

[52] Cohecha. T, C. (2014). Teorema del binomio y aplicaciones. Tesis Maestría. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia

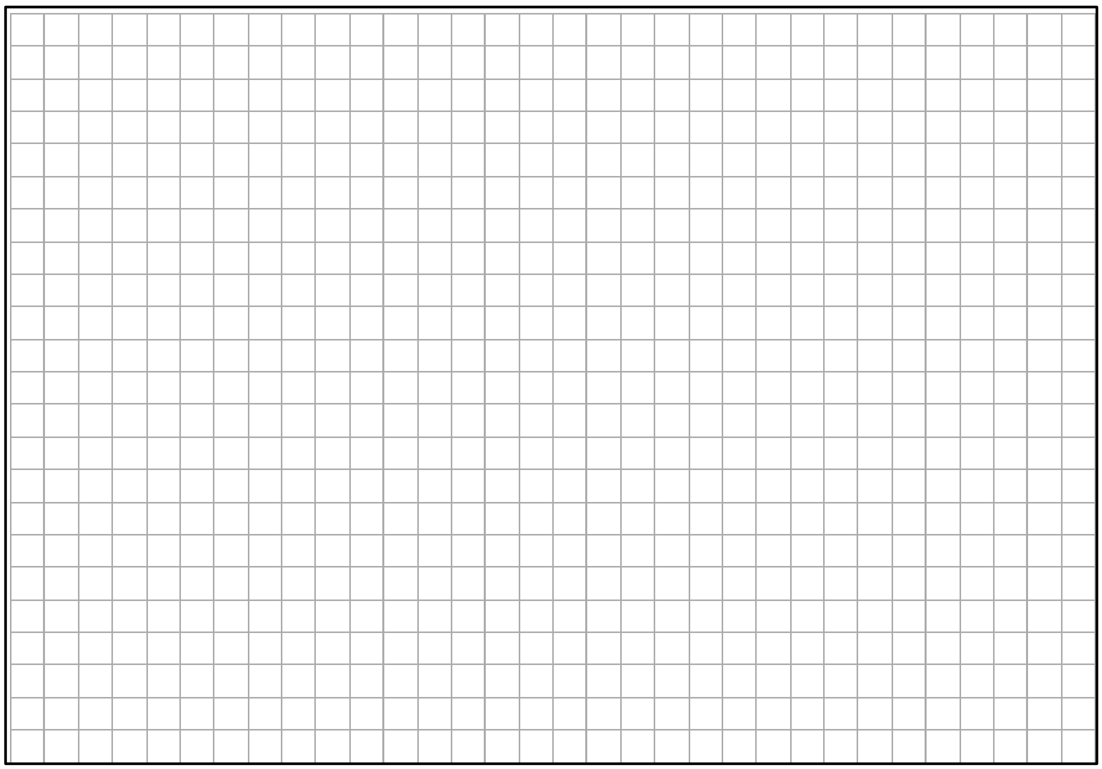
| Nombre | Color de la casa que habita | Distancia en cuadras a la sala de cine |
|---|---|---|
| Lina | | |
| Nicolás | | |
| Javier | | |
| Daniel | | |
| Sandra | | |
| Ana | | |
| Karen | | |
| Vanesa | | |
| melisa | | |
| Esteban | | |
| Ismael | | |
| Pablo | | |
| Homero | | |
| Gabriel | | |
| Oscar | | |

B. Observando la tabla realizada, ¿Qué se puede concluir con relación al color de la casa que habitan los niños con la distancia en cuadras hasta la sala de cine?

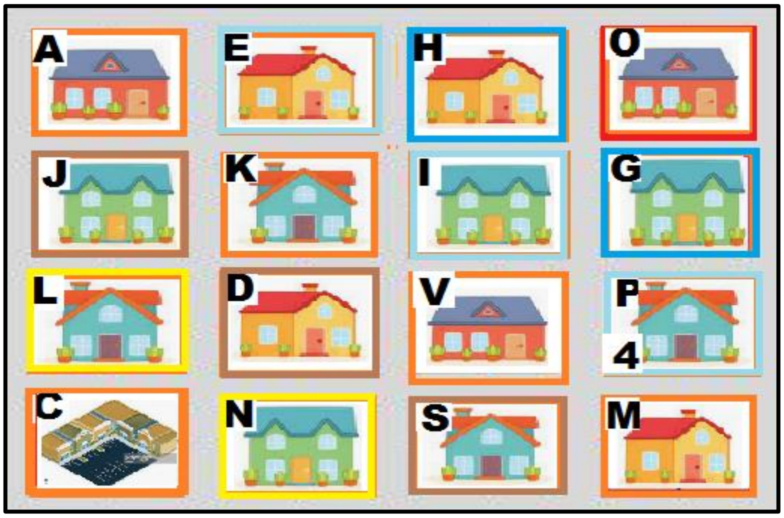
Para dirigirse a la sala de cine, algunos niños tienen más de una forma de realizar el recorrido, por ejemplo, Ismael tiene 6 combinaciones para su desplazamiento, todas ellas de longitud 4 cuadras, veamos cuales son los movimientos, para ello se debe tener en cuenta que la forma en la que se debe combinar los movimientos es (derecha y arriba) →↑



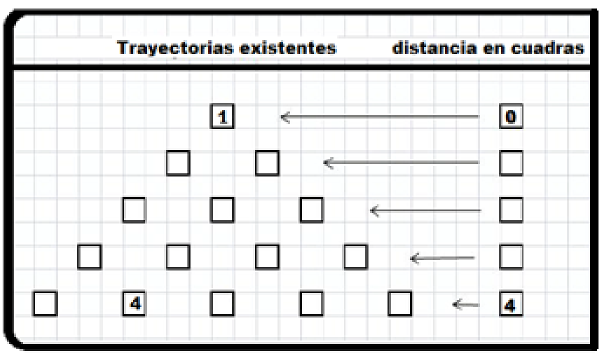
C. Para cada uno de los niños graficar las trayectorias posibles para realizar su desplazamiento de la casa a la sala de cine. Para ello se debe tener en cuenta que la forma en la que se debe combinar los movimientos es (derecha y arriba) →↑



D. En la imagen completar con el número de opciones que tiene cada niño para llegar a la sala de cine, donde está la inicial del nombre se colocará el número de trayectorias obtenido, por ejemplo, en la P de Pablo adicionamos un 4; a la sala de cine por defecto se le asignará el número 1.




E. El esquema obtenido anteriormente se puede simplificar dejando solo los números. Rotarlo 135° en sentido negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) y relacionar las trayectorias existentes, con la distancia en cuadras hasta la sala de cine y desarrollamos los binomios que se encuentran en la última columna.




F. Observa la anterior tabla, ¿Qué relación comparten las trayectorias hasta la sala de cine con respecto a los binomios de la forma $(a+b)^n$? teniendo en cuenta que:

| Binomio $(a+b)^n$ |
|---|
| $(a+b)^0 =$ |
| $(a+b)^1 =$ |
| $(a+b)^2 =$ |
| $(a+b)^3 =$ |

- Lina y Nicolás, en las casas amarillas y el binomio $(a+b)^1$
- Javier, Daniel y Sandra, en las casas verdes y el binomio $(a+b)^2$
- Ana, Karen, Vanesa y Melisa, en las casas de color naranja y el binomio $(a+b)^3$

___________________________________________________________________________

___________________________________________________________________________

_________________________________________________________________

#### 4.2.5 Actividad 5. Números combinatorios y cardinalidad de un conjunto

**Objetivo:** reconocer los elementos y argumentos que tiene los números combinatorios y la cardinalidad de un conjunto para tomar decisiones en la resolución de problemas.

**Metodología de la actividad**: El docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y estará como observador apoyando al estudiante resolviendo dudas e inquietudes sobre el desarrollo de la guía. Se estipula un tiempo de 2 horas para realizar de forma individual la actividad y entregar al docente.

Se plantean diferentes situaciones problemas con el objetivo de que los estudiantes usen los elementos y argumentos de los números combinatorios y la cardinalidad de un conjunto para solucionar las problemáticas presentadas y también fomentar en el estudiante el uso de la argumentación para justificar sus procedimientos.

**Materiales para la actividad:** Guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

1) Hallar los siguientes números combinatorios [53]

- $\binom{3}{0} =$
- $\binom{3}{1} =$
- $\binom{3}{2} =$
- $\binom{3}{3} =$

2) De acuerdo con los resultados obtenidos en el punto 1. contestar, las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué tienen en común estos coeficientes binomiales?

___

___

___

   b) ¿A que corresponden los coeficientes obtenidos?

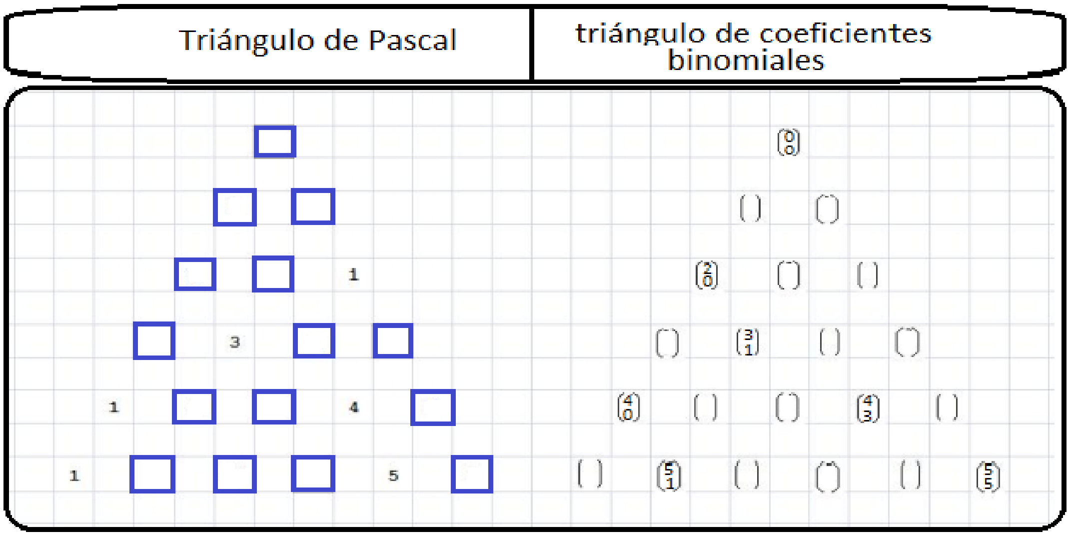
___

___

___

3) Completar el Triángulo de Pascal, y el triángulo de coeficientes binomiales.

[53] Cohecha. T, C. (2014). Teorema del binomio y aplicaciones. Tesis Maestría. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia




4) El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, se denomina *conjunto de partes de A* y se denota por P(A). Cuando el conjunto A tiene n elementos, se dice que el cardinal de A es n.

De acuerdo con la anterior información, complete la siguiente tabla

| cardinalidad del conjunto A | conjunto A | Subconjuntos de A | Cardinal del conjunto de A |
|---|---|---|---|
| 0 | {} | {} | 1 |
| 1 | {a} | | |
| 2 | {a,b} | | |
| 3 | {a,b,c} | {} {a} {b} {c} {a,b} {a,c} {b,c} {a,b,c} | 8 |
| 4 | {a,b,c,d} | | |
| 5 | {a,b,c,d,e} | | |
| 6 | {a,b,c,d,e,f} | | |

5) Compare los resultados de la tabla anterior con los datos del triángulo de Pascal. Encuentre una (o varias) relación (es) entre el cardinal del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el triángulo de Pascal.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

____________________________________________

**Conclusiones del capítulo 4**

Las cinco actividades planteadas bajo los componentes pedagógicos y didácticos de diferentes propuestas expuestas en el capítulo 2 del marco teórico permiten que el estudiante desarrolle el pensamiento combinatorio y algebraico y relacione los elementos de cada uno de los temas.

A demás, la estrategia de resolución de problemas de Polya (1965) propicia que el estudiante desarrolle y solucione una problemática planteada de forma intuitiva. De igual forma, el modelo de Toulmin (1958) permite identificar al docente el nivel de argumentación en el que se encuentra el estudiante al solucionar la actividad. Conjuntamente el diseño de problemas retadores hace que el estudiante utilice diferentes habilidades para encontrar una solución de las problemáticas planteadas generando motivación e interés por continuar con su proceso de enseñanza y aprendizaje en el campo de las matemáticas.

# CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL SISTEMA DE ACTIVIDADES

En este capítulo se realiza el análisis de los resultados durante la aplicación de las actividades con los estudiantes, se tiene en cuenta los siguientes aspectos: desarrollo de las actividades, motivación, logros y dificultades.

## 5.1. Análisis de los resultados de la implementación del sistema de actividades

En esta investigación el análisis de la argumentación se lleva a cabo a través de la aplicación del modelo argumentativo de Toulmin (1958). Generalmente los argumentos que se identifican son: datos, conclusiones, garantías y respaldo. De igual forma se evalúa el nivel de competencia argumentativa que presentan los estudiantes desde la propuesta de Romero, Bonilla y Álvarez (2018) y el tipo de argumento presentado formal e informal planteado por Viholainen (2008).

A continuación, se analizan cada una de las actividades aplicadas sobre los elementos compartidos entre las combinaciones y algunos temas de álgebra.

### 5.1.1. Actividad 1: Elementos y argumentos de las combinaciones

**Desempeño del estudiante durante la actividad.** El desarrollo de la actividad se realiza de manera virtual con la plataforma Google Meet en la cual participan 10 estudiantes del grado 90 A del colegio GMO. Esta actividad se desarrolla de manera individual y tiene como objetivo reforzar los conocimientos de los estudiantes frente al tema de combinaciones para que posteriormente identifiquen los elementos compartidos entre las combinaciones y el álgebra específicamente en los temas del binomio de Newton y conjuntos en las actividades 4 y 5.

Como primer paso se le realiza una explicación general de la estructura de la guía, seguidamente los estudiantes empiezan a leer la problemática planteada y desarrollar cada uno de los puntos expuestos.

Para identificar los argumentos presentes por los estudiantes desde el modelo de Toulmin (1958) se agrupa la información de la siguiente forma, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Organización de los grupos para identificar los argumentos surgidos por los estudiantes.

| **Grupos** | **Características** | **Cantidad** |
| --- | --- | --- |
| **Grupo 1** | Estudiantes que solucionan de una manera correcta la problemática. | 5 |
| **Grupo 2** | Estudiantes que solo obtienen bien entre uno y dos puntos de la solución a la problemática. | 3 |
| **Grupo 3** | Estudiantes que no realizan la actividad de una forma correcta. | 2 |

Para todos grupos los datos (D) son la problemática planteada que dice: *Los diseñadores de la mascota del Mundial de Fútbol Rusia 2018 proponen el siguiente estilo de mascota, pero puede variar sus accesorios y colores*. A continuación, se presenta un análisis en cada uno de los grupos.

El grupo 1 representa el 50 % de los estudiantes que muestran una serie de argumentos con la intensión de justificar sus procedimientos para la garantía (W). En este proceso se tiene en cuenta la elaboración del punto número 3 y 4, en el cual se observa la estrategia utilizada por los estudiantes para desarrollar las combinaciones o arreglo. Esta estrategia es utilizada por los estudiantes para analizar la cantidad de siluetas y a través de la observación de los elementos y colores los divide (ver Figura 8).

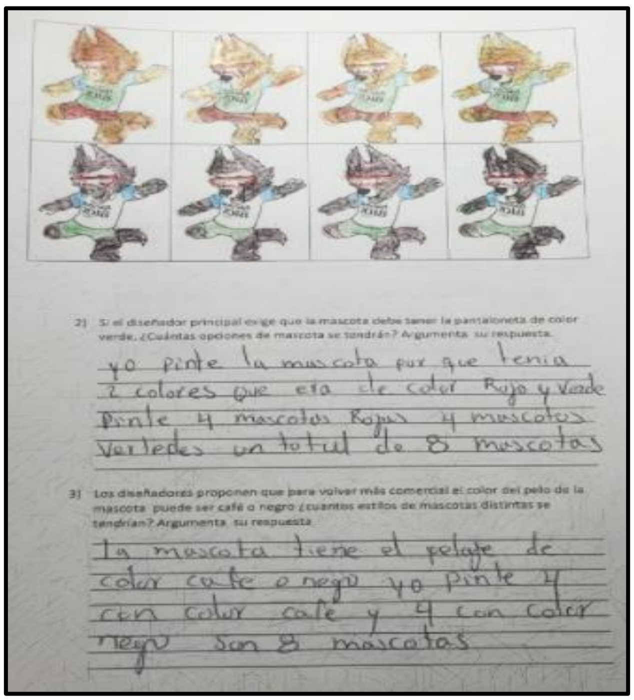



Figura 8. Estrategia utilizada por uno de los estudiantes del grupo 1.

En cuanto a la conclusión (C) los estudiantes de ese grupo responden en la pregunta 2 que las opciones de mascotas que se tenían eran 4 mascotas de pantaloneta verde, en la pregunta 3 los estilos de mascotas de pelo de color negro eran 4 y cafés 4, para la pregunta 4 las posibilidades de diseño que se tiene para la camisa son 2, uno blanco y otro gris, argumentaron los estudiantes.

Además, exponen la operación que usan para contar los posibles diseños de mascota, justificando como utilizan la operación para resolver la problemática (ver Figura 9).

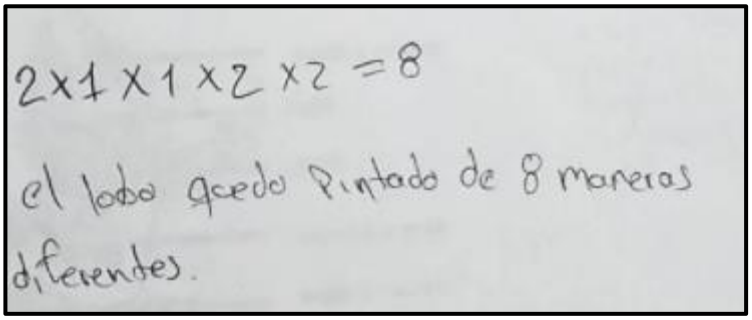



Figura 9. Operación usada por los estudiantes.

Con respecto al grupo 2, que representa el 30% de los estudiantes, solo obtienen de uno a dos puntos bien, en las preguntas 2, 3 y 4 que mencionan ¿cuántas opciones de mascotas se tendría?, no pueden responder correctamente por que realizan en el punto 1 la distribución de colores en la silueta de la mascota de una forma incorrecta.

Por otro lado, en la pregunta 5 los estudiantes, al igual que el grupo 1 desarrollan la operación matemática con la cual cuentan los posibles diseños. En cuanto al modelo de Toulmin (1958) este grupo de estudiantes no presentan las conclusiones, ni garantías suficientes para presentar una argumentación válida para la solución de la problemática planteada.

El grupo 3, correspondiente al 20% de los estudiantes no encuentra una solución a la problemática planteada en la guía, todos los puntos son desarrollados de una manera errónea, Por tal motivo el modelo de argumentación de Toulmin (1958) no puede ser aplicado en este grupo.

A continuación, se expone la motivación por el aprendizaje, logros y dificultades que presentan los estudiantes con la aplicación y desarrollo de la actividad 1:

**Motivación por el aprendizaje.** Los estudiantes demuestran curiosidad y entusiasmo por las problemáticas presentadas en la guía, el diseño de la mascota del mundial les llama la atención, se evidencia, mayor predisposición por realizar la actividad. En el anexo 2 se muestran evidencias fotográficas que constatan la resolución de los diferentes problemas por los estudiantes.

**Logros.** Con la aplicación de la actividad se evidencia que los estudiantes:

- Demuestran interés por solucionar los problemas de diferentes formas.
- El 50% identifican los elementos que tiene las combinaciones para la resolución de la problemática.

**Dificultades.** A continuación, se muestran algunas dificultades:

- Los estudiantes tienden hacer un poco tímidos para expresar y participar, la habilidad argumentativa e interpretativa de los estudiantes es limitada, en algunos casos por miedo a sus compañeros y docente.
- Al 50% de los estudiantes se les dificulta recordar los conceptos sobre combinaciones, se hace necesario realizar otra actividad que les ayude a reforzar los conocimientos sobre el tema.

### 5.1.2. Actividad 2: Elementos y argumentos de las combinaciones

**Desempeño del estudiante durante la actividad**. La actividad es desarrollada por 10 estudiantes del GMO de manera virtual, el tiempo estimado para la actividad es de 2 horas. Esta actividad se hizo necesaria debido a las dificultades evidenciadas por los estudiantes para recordar el tema de combinaciones, tema pertinente para solucionar las siguientes actividades.

Esta guía se centra en reforzar los conocimientos frente al contenido de combinaciones y a que los estudiantes identifiquen y se apropien de la estrategia para la resolución de problemas de Polya (1965).

Durante la actividad se evidencia que para los estudiantes los pasos para resolver una situación problema de Polya (1965), les permite solucionar la guía de una manera más clara y ordenada (ver Figura 10).

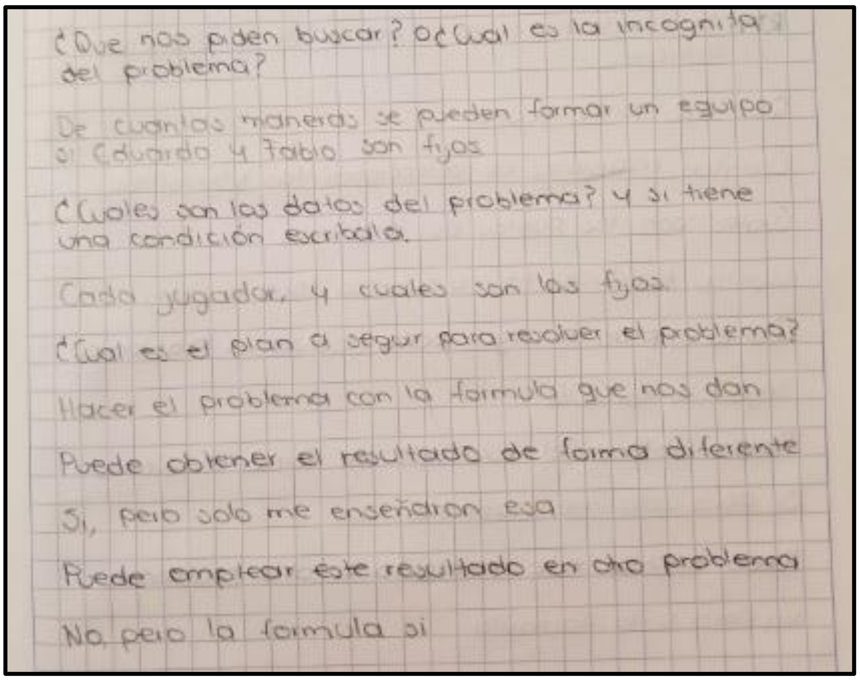

¿Que nos piden buscar? o ¿Cual es la incognita del problema?
De cuantas maneras se pueden formar un equipo si Eduardo y Fabio son fijos
¿Cuales son los datos del problema? y si tiene una condición escribala.
Cada jugador, y cuales son los fijos.
¿Cual es el plan a seguir para resolver el problema?
Hacer el problema con la formula que nos dan
Puede obtener el resultado de forma diferente
Si, pero solo me enseñaron esa
Puede emplear este resultado en otro problema
No pero la formula si

Figura 10. Preguntas para solucionar un problema.

En el punto 1, 2 y 3 el 100% de los estudiantes solucionan la problemática aplicando la fórmula de combinaciones, pero cuando se les pide ¿que si podían obtener los resultados de forma diferente?, todos los estudiantes responden que sí, pero que solo se acuerdan de solucionarlo de esa forma.

En la pregunta que dice ¿puede emplear este resultado en otro problema? el 100% de los estudiantes responden que no pueden utilizar el resultado en otro problema pero que si la fórmula (ver Figura 10).

En cuanto a la pregunta, ¿Cuál es el plan por seguir para resolver el problema? el 100% de los estudiantes contestan respuestas similares, como solucionar el problema con la fórmula de las combinaciones, lo cual indica que los estudiantes recuerdan los elementos principales del tema de combinaciones.

Por otro lado, al solucionar el problema número 1, el 60% de los estudiantes lo contestan de manera correcta, escriben que había 45 maneras diferentes para tomar los libros del estante, el otro 40% tratan de solucionarlo sin llegar a una respuesta. En el problema 2, el 70% de los estudiantes encuentran una respuesta acertada, utilizan respuestas similares, como que había 10 maneras diferentes de seleccionar 5 jugadores de 2 fijos y el 30% de los estudiantes aplican la fórmula de las combinaciones, pero el proceso fue erróneo lo que no les permite llegar a una solución incorrecta.

Para el problema número 3 el 80% de los estudiantes resuelven de una manera acertada la problemática, algunas dudas realizadas por los estudiantes son despejadas durante la aplicación de la actividad, teniendo en cuenta el rol del investigador como docente de apoyo en la elaboración de la actividad. El 20 % de los estudiantes tratan de solucionar el problema, pero no argumentan sus respuestas y no escriben una respuesta final del procedimiento, solo aplican la fórmula.

Para identificar los argumentos presentados por los estudiantes desde el modelo de Toulmin (1958) se toma como referente la siguiente problemática expuesta en la actividad y que hace referencia a los datos (D) desde la perspectiva del modelo.

Lo datos son *el inspector de una fábrica de bombillos desea realizar el control de calidad de una de las cajas que se produce diariamente. Para ello, se escoge al azar una de las cajas y se ensayan dos de las bombillas. En cada caja hay 4 bombillos de 60 w, 100 w, 120 w y 150 w. ¿De cuántas formas se puede realizar la selección?*

El 80 % de los estudiantes llegan a la conclusión (C) con respuestas similares, a que: de 6 maneras diferentes se pueden seleccionar 2 bombillos de los 4 que había, utilizando como garantía (W), que la manera de solucionar la problemática era seguir el plan de utilizar la fórmula para encontrar una respuesta.

Además, exponen la fórmula matemática de combinaciones (ver Figura 11), para la solución de este tipo de problemáticas de conteo.

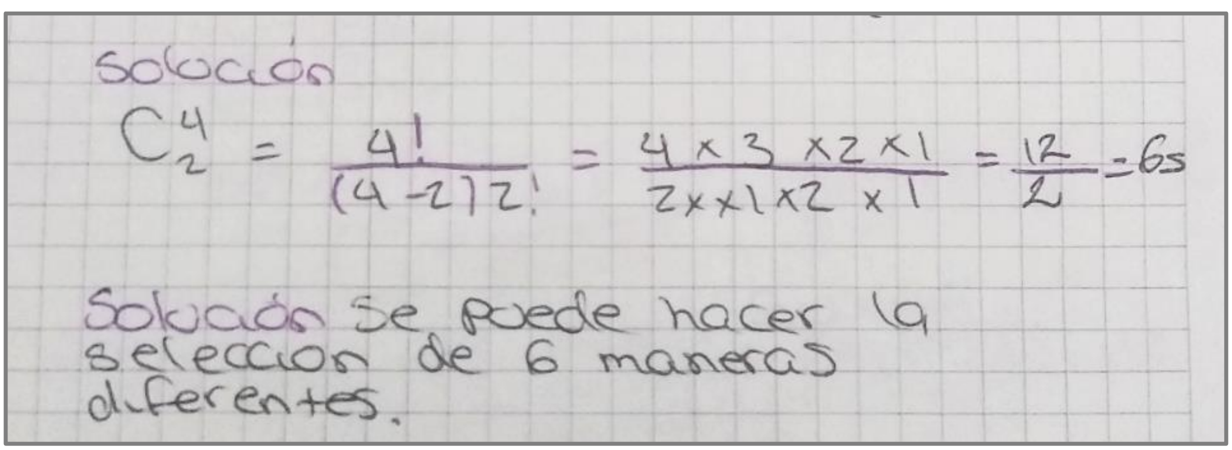



Figura 11. Aplicación de la fórmula matemática de las combinaciones.

El 20% de los estudiantes siguen sin resolver el ejercicio de una manera acertada para encontrar una solución

A continuación, se expone la motivación por el aprendizaje, logros y dificultades que presentan los estudiantes con la aplicación y desarrollo de la actividad 2.

**Motivación por el aprendizaje.** Se evidencia que los estudiantes presentan interés por las problemáticas planteadas en la actividad.

**Logros.** Con la aplicación de la actividad se evidencia:

- Se realiza un refuerzo fundamental para el uso del tema de combinaciones en las otras actividades.
- Los estudiantes recuerdan los conocimientos sobre combinaciones vistos en noveno grado.
- El porcentaje de los estudiantes que mejoran la comprensión en el tema de combinaciones es mayor al porcentaje de la actividad número 1.

**Dificultades.** Seguidamente, se exponen algunas dificultades:

- El tiempo empleado para la actividad tuvo que ser modificado por qué no fue el suficiente para su desarrollo.
- Los argumentos que surgen de los estudiantes desde la perspectiva del modelo de Toulmin (1958) en la actividad 2 están dados por la conclusión y la garantía, pero no generan argumentos de respaldo, refutación ni calificador modal.
- Los estudiantes presentan dificultades aritméticas al solucionar la fórmula matemática.

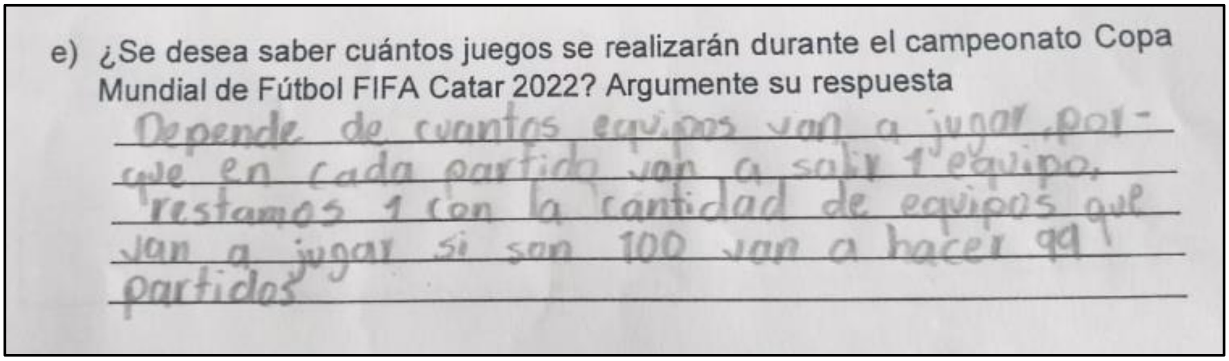
### 5.1.3. Actividad 3: Principio de biyección y función biyectiva.

**Desempeño del estudiante durante la actividad.** Esta actividad se realiza con los estudiantes de noveno grado del GMO, con el fin de que usen los elementos y argumentos del principio de la biyección, tema inicial de la combinatoria y la función biyectiva contenido relacionado con conjuntos, los dos contenidos agrupados en una actividad.

Para identificar los argumentos que surgen de los estudiantes con la aplicación de la actividad, desde el modelo de Toulmin (1958) se toma como base la siguiente problemática expuesta en la actividad y que hace referencia a los datos (D):

En un campeonato de la Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022, jugado por el simulador de eliminatorias se enfrentan n equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente. ¿Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022? Argumente su respuesta.

De acuerdo con los anteriores datos, la conclusión (C) expuesta por los estudiantes, se analiza de la siguiente manera: el 70% responde de una manera acertada y parecida, afirmando que dependía de cuantos equipos jugarían, porque en cada partido siempre iba a quedar eliminado un equipo (ver Figura 12).



e) ¿Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022? Argumente su respuesta

Depende de cuantos equipos van a jugar, por-que en cada partido van a salir 1 equipo, restamos 1 con la cantidad de equipos que van a jugar si son 100 van a hacer 99 partidos

Figura 12. Conclusión generada por uno de los estudiantes

Como garantía (W) utilizan el punto a, donde piden realizar un esquema con los equipos participantes cuando n es par e impar, en el cual el mismo porcentaje de estudiantes elabora diferentes representaciones, utilizando nombres de equipos de países (Alemania, Colombia, Perú…) o números de equipos (Equipo 1, Equipo 2...). A continuación, realizan un análisis del esquema y a través de cancelar un equipo en cada partido (ver Figura 13), evidencian la cantidad de partido jugados y además el equipo ganador.

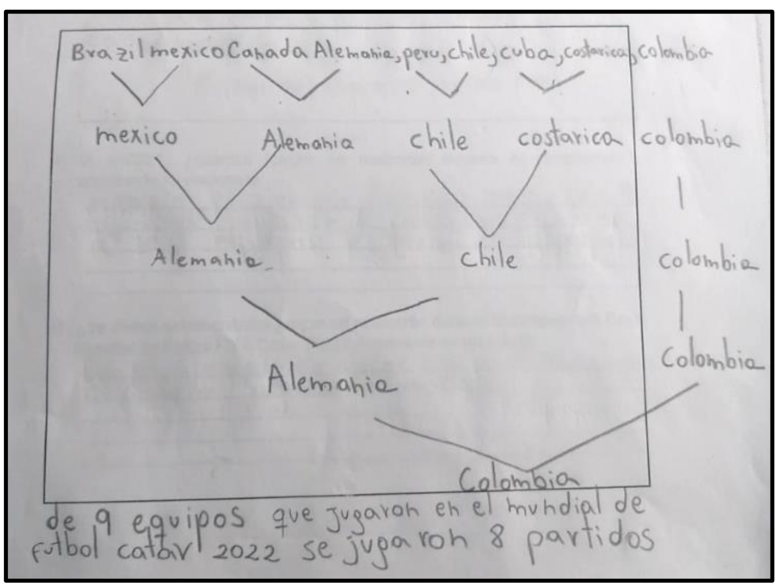
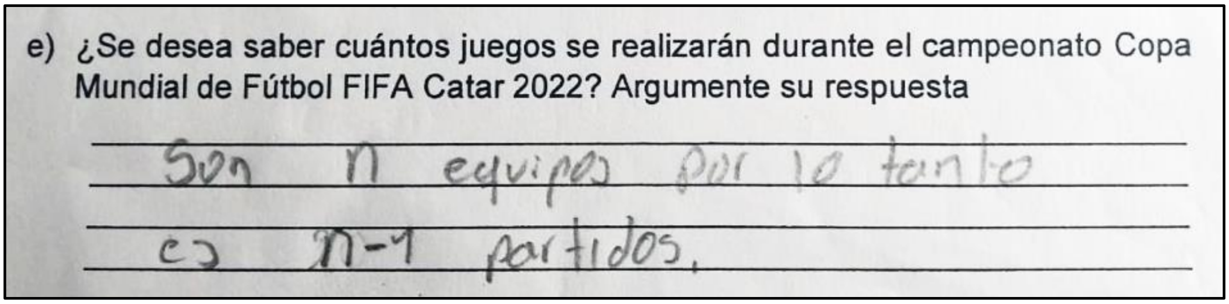



Figura 12. garantía generada por uno de los estudiantes

Además, demuestran la fórmula matemática que justifica la solución al problema planteado (ver Figura 13), de modo que, solo el 10% de los estudiantes responde que era n-1, lo que permite evidenciar que los estudiantes no logran establecer un sustento que se aplique a la generalidad si no solo al problema establecido.



e) ¿Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022? Argumente su respuesta

Son n equipos por lo tanto es n-1 partidos.

Figura 13. Conclusión generada por uno de los estudiantes

En cuanto a los componentes de respaldo (Re), refutación (R) y el calificador modal (CM), no se identifica su uso al realizar la actividad número 3 por parte de los estudiantes.

Por otro lado, al 30% de los estudiantes se les dificulta la resolución de la problemática, tratan de generar soluciones, pero sus argumentos y sus respuestas son deficientes con respuestas incorrectas.

Respecto al uso de elementos compartidos entre los temas de combinatoria (principio de biyección) y álgebra (funciones), se les pide a los estudiantes, realizar dos conjuntos uno de los equipos que habían quedado eliminados y el otro conjunto con los partidos jugados, y si existía una función biyectiva entre los dos conjuntos. En este proceso se encuentra la siguiente información: el 50% de los estudiantes relaciona los conjuntos elaborados con una función biyectiva, es importante mencionar que los estudiantes han trabajado de manera básica las funciones biyectivas en la clase de álgebra.

Asimismo, presentan argumentos similares, como: los conjuntos formados tienen una función biyectiva (ver Figura 14), porque a cada equipo eliminado le corresponde un partido y elaboran una función.

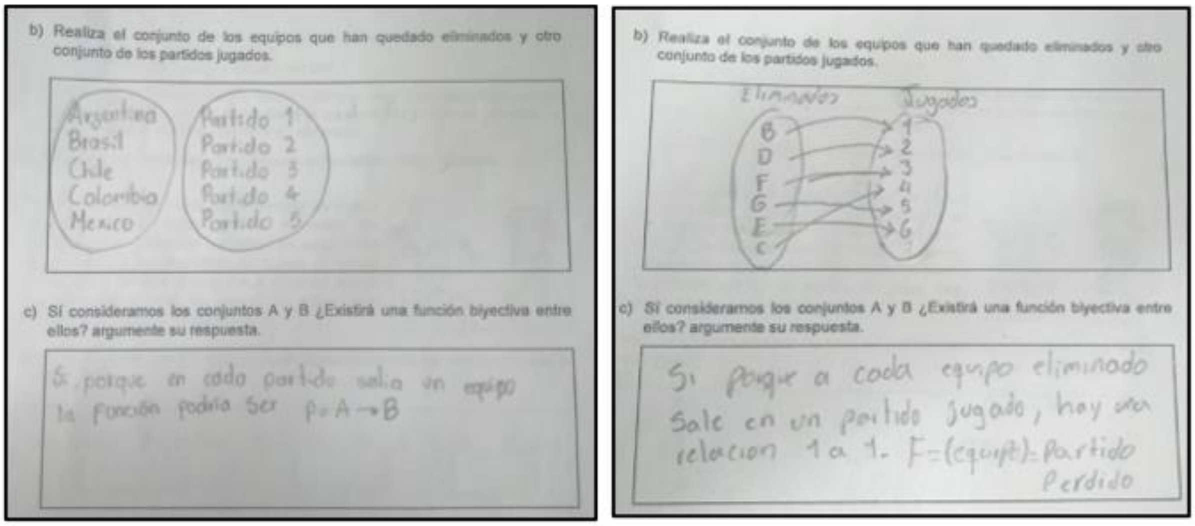



Figura 14. Representación de los conjuntos y función biyectiva.

EL 20% de los estudiantes conforman los conjuntos con los equipos y partidos de una forma correcta, pero al relacionarlo con la función biyectiva en sus respuestas no estuvo involucrada la intensión de formular una función.

Por otra parte, el 30% de los estudiantes no conforman los conjuntos de una manera ordenada, se les dificulta generar una respuesta matemática al problema planteado.

A continuación, se expone la motivación por el aprendizaje, logros y dificultades que presentan los estudiantes con la aplicación y desarrollo de la actividad 3.

**Motivación por el aprendizaje**. El contexto de la problemática expuesta sobre el Mundial de Fútbol de FIFA Catar 2022, es un elemento que llama la atención a los estudiantes logrando entusiasmo por desarrollar el ejercicio. Además, se evidencia que al realizar el esquema pueden ir descartando los equipos y encontrar al ganador. También demuestran asombro cuando se les indicaba que en el proceso de solución de la actividad ellos están aplicando elementos tanto del principio de biyección como de funciones.

**Logros**. Con la aplicación de la actividad se evidencia:

- El 10% de los estudiantes logra pasar de lo particular a lo general exponiendo una fórmula que puede ser aplicada a los problemas de esa índole.
- Los estudiantes tienen en cuenta en el desarrollo de los problemas el tema de función biyectiva visto en la clase de álgebra.

**Dificultades:**

- El 30 % de los estudiantes no logran desarrollar la actividad propuesta.
- No se evidencian argumentos surgidos por los estudiantes en los componentes de respaldo (Re), refutación (R) y el calificador modal (CM).

### 5.1.4. Actividad 4: Combinaciones y el binomio de Newton

**Desempeño del estudiante durante la actividad**. Esta guía está compuesta por una situación de la cual se generan diferentes problemáticas, que llevan al estudiante a aplicar los elementos de las combinaciones y ver su relación con el binomio de Newton. De igual forma la actividad es aplicada al grupo de 10 estudiantes de grado noveno. A continuación, se describe su desempeño en el desarrollo de la actividad.

En cuanto a los argumentos que generan los estudiantes con la aplicación de la guía, desde el modelo de Toulmin (1958) se describe la siguiente problemática presentada en la actividad y que hace referencia a los datos (D):

Desde la perspectiva del uso de elementos compartidos entre los temas de combinatoria (combinaciones) y álgebra (binomio de Newton), se les pidió a los estudiantes graficar las trayectorias o desplazamientos desde cualquier casa al centro comercial y escribir la cantidad de combinaciones posibles que cada niño tiene para llegar hasta ese punto (ver actividad 4).

Seguidamente deben ubicar los números obtenidos de la cantidad de trayectorias al triángulo de Pascal y desarrollar los binomios de la forma $(a + b)^n$, con el objetivo de que los estudiantes puedan observar la relación entre las combinaciones, el triángulo de Pascal y binomio de Newton.

Conforme a los datos anteriores, la conclusión (C) presentada por los estudiantes respecto a la relación de esos temas, propicia generar la siguiente información: el 70% de los estudiantes encuentran el número de trayectoria que usan para completar el triángulo de Pascal y desarrollan la parte algebraica de los binomios de forma correcta.

Sin embargo, de ese porcentaje solamente el 60% de los estudiantes argumentan la relación que hay entre las combinaciones de las trayectorias que realizan los niños de la casa al centro comercial con el binomio de Newton (ver Figura 15), los estudiantes escriben, en respuestas similares, que la relación que se observa con el triángulo de Pascal y respecto a los binomios son los coeficientes binomiales de cada una de las distancias en cuadras.

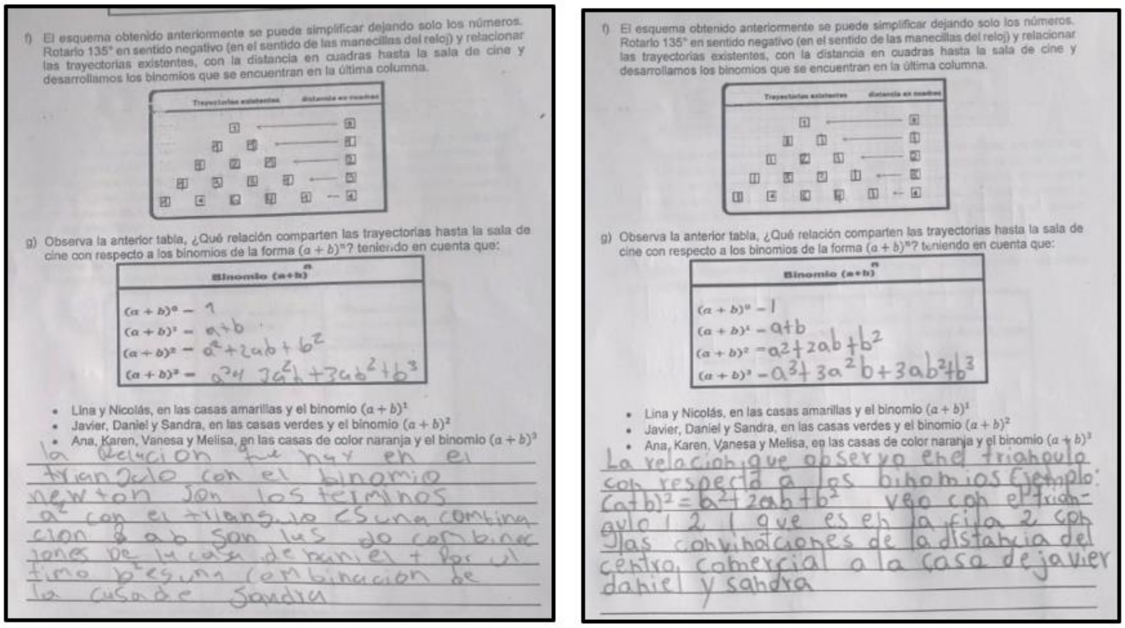



Figura 15. Relación de las trayectorias con respecto a los binomios realizada por los estudiantes.

Con respecto a la garantía (W), se les pide a los estudiantes que grafiquen las trayectorias posibles para el desplazamiento de los niños de su casa a la sala de cine, en el cual, el 40% dibujan todos los posibles caminos de cada uno de los niños (ver Figura 16), y el 30% de los estudiantes grafican las trayectorias incompletas pero es importante mencionar que no era necesario dibujar todas las trayectorias porque en el triángulo de pascal solo se necesitaba representar hasta la cuarta distancia en las cuadras.

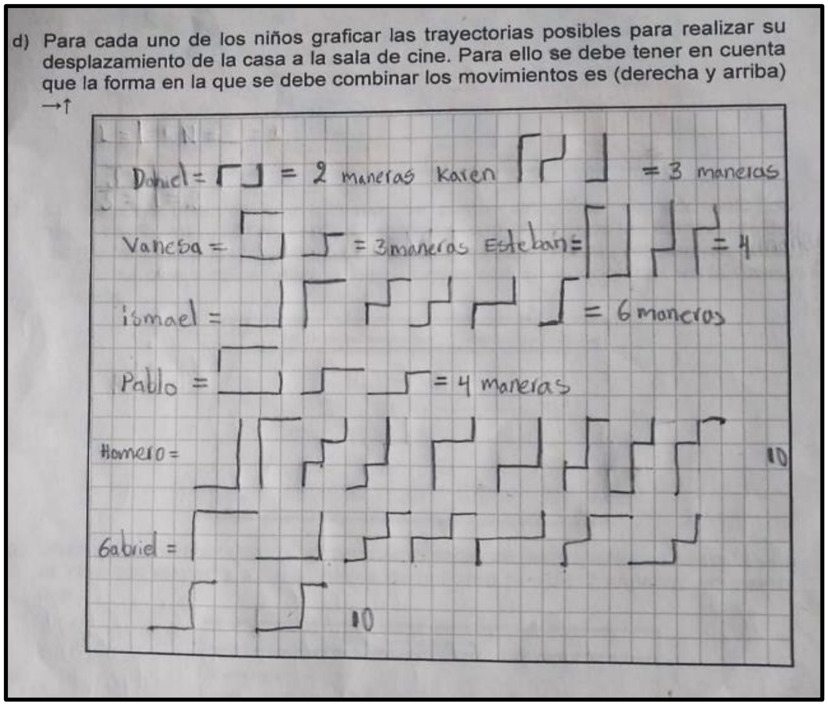



Figura 16. Gráficas de las trayectorias posibles para el desplazamiento de los niños de su casa a la sala de cine.

Por otro lado, a los estudiantes se les dificulta generar argumentos que respalden (Re), la garantía. Adicionalmente, el otro 30% de los estudiantes del grupo de Noveno A, presentan dificultades en elaborar las operaciones algebraicas del binomio, al igual que en las trayectorias de los desplazamientos de las casas a la sala de cine en donde sus gráficas no corresponden a los trayectos correctos. Este porcentaje de estudiantes no presentan argumentos suficientes en los componentes del modelo de Toulmin (1958).

**Motivación por el aprendizaje**. Los estudiantes por medio del esquema del conjunto residencial grafican las trayectorias y en cada una de ellas combinan los movimientos, llegando intuitivamente al triangulo de Pascal, convirtiéndose en un componente interesante para los estudiantes pasar de un esquema a una expresión algebraica.

**Logros:** Con la aplicación de la actividad se evidencia que:

- Realizan trayectorias y combinaciones por medio de un esquema.
- Analizan por medio del triángulo de Pascal los binomios de la forma $(a + b)^n$ y su relación con los coeficientes binomiales.

**Dificultades:**

El 30% de los estudiantes del grupo de Noveno A, demuestran dificultades en el desarrollo de las operaciones algebraicas del binomio, también en las trayectorias de los desplazamientos de las casas a la sala de cine, sus gráficas presentan trayectos incorrectos. Además, este porcentaje de estudiantes no presentan argumentos suficientes en los componentes del modelo de Toulmin (1958).

### 5.1.5 Actividad 5: Números combinatorios y cardinalidad de un conjunto

**Desempeño del estudiante durante la actividad**. La actividad se ejecuta de manera virtual en la cual participan 10 estudiantes de 9° A, se realiza de manera individual, cuyo objetivo es reconocer los elementos y argumentos que tiene los números combinatorios y la cardinalidad de un conjunto para solucionar las problemáticas planteadas.

Los argumentos surgidos por los estudiantes desde el modelo de Toulmin (1958) presentan la siguiente información: de acuerdo con los datos (D) presentados en la actividad se le pide al estudiante desarrollar los números combinatorios para obtener los coeficientes binomiales y escribir que tienen en común y a que corresponden los coeficientes obtenidos.

Seguidamente elaboran el triángulo de Pascal con las respuestas obtenidas del desarrollo de los números combinatorios y con esa información completan la tabla de la cardinalidad de un conjunto y se les pide encontrar una o varias relaciones entre el cardinal del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el triángulo de Pascal.

Con los datos (D) anteriores, la conclusión (C) surgida por los estudiantes respecto a la relación de esos temas, genera la siguiente información: el 40% de los estudiantes logran, resolver los binomios de Newton obteniendo los coeficientes binomiales y completan el triángulo de Pascal (ver Figura 17). Además, encuentran todos los subconjuntos y la cardinalidad del conjunto A.

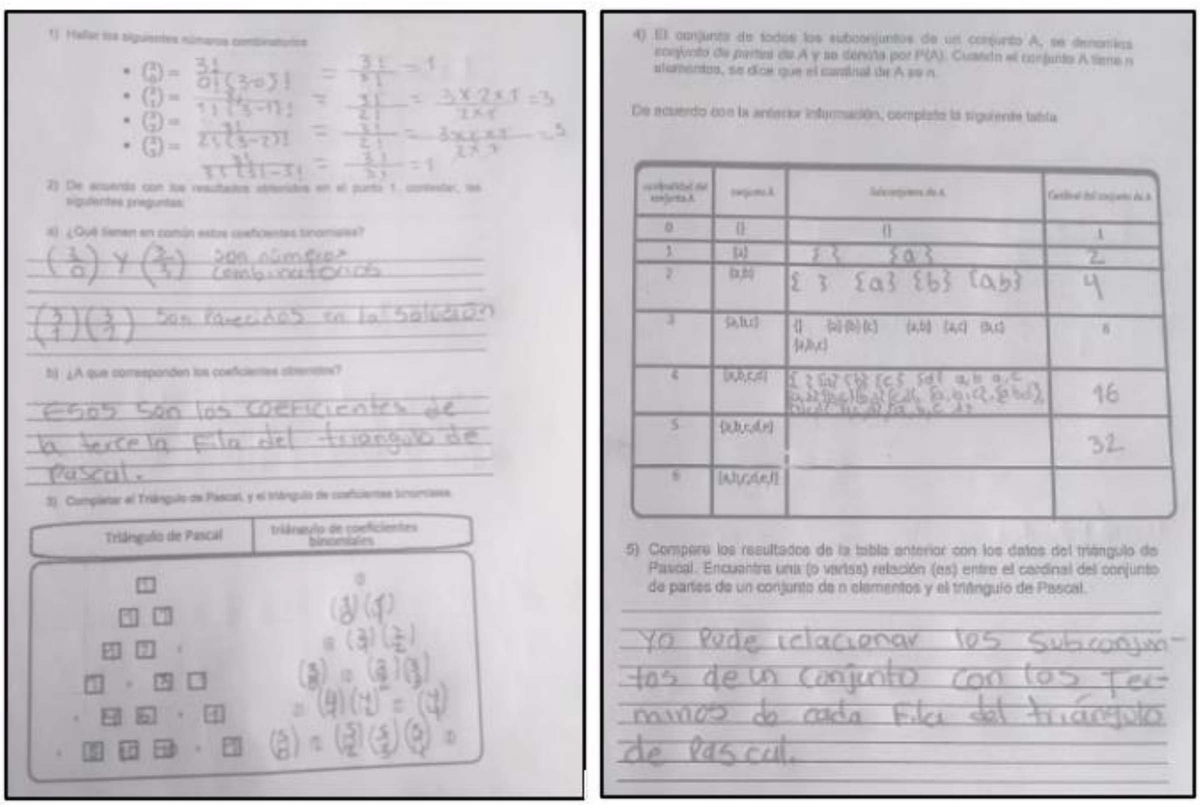



Figura 17. Conclusiones anotadas por los estudiantes en la actividad.

Por otra parte, el 30% de los estudiantes solucionan las operaciones para llegar a los números combinatorios y los usa para completar el triángulo de Pascal, pero tienen dificultades para escribir lo que tienen en común y a que corresponde los coeficientes binomiales, anotan los subconjuntos de A hasta el conjunto {a,b,c,d} pero no la completan en su totalidad.

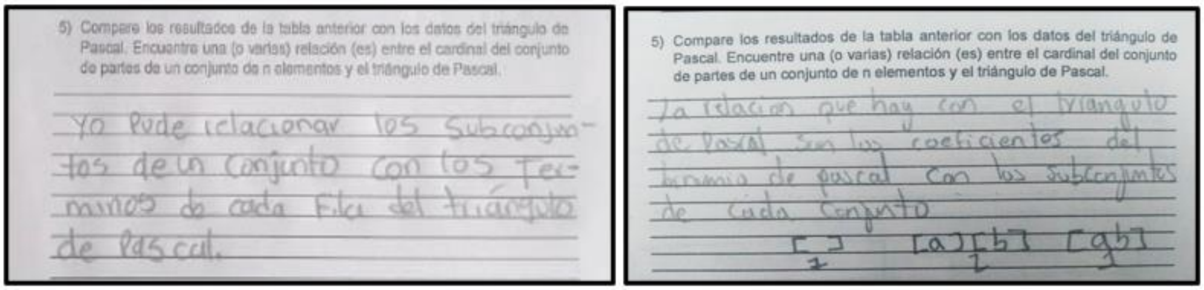
Además, los otros estudiantes que corresponden al 30%, presentan dificultades para usar los números combinatorios que les permita completar el triángulo de Pascal, logrando ubicar los números de una forma incorrecta.

En cuanto a la garantía el 40% de los estudiantes escriben la relación que encuentran entre la cardinalidad del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el triángulo de Pascal, en sus respuestas escriben (ver Figura 18) que "*la relación que tiene con el triángulo de Pascal son los coeficientes del binomio con los subconjuntos de cada conjunto"*[54].

Mientras el 30% de estudiantes tratan de generar una garantía (W), con una redacción deficiente y poco clara, al argumentar la relación que hay entre los temas confunden los términos logrando contestar el punto, pero sin lograr escribir una relación concisa entre los datos y la conclusión.

Asimismo, un grupo de estudiantes conformado por el 30% de los estudiantes de 9 A, tienen dificultad para generar alguna relación pedida en la actividad y dejan los puntos sin contestar.

[54] Respuesta de los estudiantes.


5) Compare los resultados de la tabla anterior con los datos del triángulo de Pascal. Encuentre una (o varias) relación (es) entre el cardinal del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el triángulo de Pascal.

Yo Pude relacionar los Subconjuntos de un conjunto con los Terminos de cada Fila del triángulo de Pascal.

5) Compare los resultados de la tabla anterior con los datos del triángulo de Pascal. Encuentre una (o varias) relación (es) entre el cardinal del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el triángulo de Pascal.

La relacion que hay con el triangulo de Pascal son los coeficientes del binomio de pascal con los subconjuntos de cada conjunto

[ ] [a] [b] [ab]

1 2 1

Figura 18. Relaciones escritas por los estudiantes en la actividad.

Acto seguido se expone la motivación por el aprendizaje, logros y dificultades presentados por los estudiantes con la aplicación y desarrollo de la actividad 5.

**Motivación por el aprendizaje**. Los estudiantes demuestran interés por completar el triángulo de Pascal y el triángulo de coeficientes binomiales con los resultados obtenidos de las operaciones de los números combinatorios.

**Logros:** Con la realización de la actividad se observa:

- El 40% de los estudiantes identifican la cardinalidad de un conjunto y encuentran la relación que tienen con el triángulo de Pascal.
- Los estudiantes desarrollan los números combinatorios por medio de la fórmula y observan que algunos números se escriben de diferente forma, pero tienen el mismo resultado.

**Dificultades:**

- El 30% de estudiantes tratan de generar una garantía (W), con una escritura incompleta y poco clara.

- A los estudiantes se les dificulta desarrollar la operación del número combinatorio, debido a que confunden el factorial de un número al cancelar un número sin factorial.
- El 30% de los estudiantes confunden el número combinatorio con la división, además se les dificulta agrupar los subconjuntos de un conjunto.
- También al argumentar la relación que hay entre los temas confunden los términos logrando contestar el punto, pero sin escribir una relación concisa entre los datos y la conclusión.

**Conclusiones del capítulo 5**

En el análisis de las actividades se evidencia que los estudiantes demuestran mayor interés y motivación por desarrollar problemas con situaciones en las que se involucra esquemas, tablas, construcción de combinaciones a través de trayectorias, escenarios que son reconocidos por ellos, que les permiten comprender mejor el tema y plasmar mejores argumentaciones del trabajo realizado.

En los argumentos que surgen de los estudiantes a través de la elaboración de las guías, se observa que los escolares establecen solo argumentos basados en los datos, conclusión y garantía desde la perspectiva del modelo de Toulmin (1958).

Al finalizar, el proceso de aplicación de las actividades se evidencia que el 65% de los estudiantes de grado noveno del GMO se encuentran en un nivel 2 de argumentación en donde se presentan argumentos con conclusiones, datos y garantía. Y el otro 35% de los estudiantes se ubican en el nivel 0, en el cual no se evidencia procesos argumentativos porque no se presenta ningún elemento o simplemente no hay discurso.

Por otra parte, es evidente identificar los estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que vienen de años anteriores y siguen presentando falencias en la resolución de los problemas planteados en las actividades.

Se considera importante la transversalidad en las asignaturas por que permiten que los estudiantes recuerden varios temas del álgebra que estaban manejando en la clase.

# CONCLUSIONES

La presente investigación enfocada a favorecer la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra para propiciar un robusto conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los estudiantes de grado noveno permite constatar los siguientes hallazgos, con la aplicación de las actividades, en las que se destacan algunos componentes, los cuales son:

- Las investigaciones consultadas sobre al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente en la construcción de elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas en los estudiantes de secundaria, evidencian que los estudios que involucran elementos compartidos entre los dos temas son escasos.

- La estrategia de resolución de problemas de Polya (1965), las características de los problemas retadores de Falk (1980) y el método de estructuración de argumentos de Toulmin (1958), constituyen los referentes teóricos en que se fundamentan el sistema de actividades para generar un robusto conocimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria y el álgebra en el estudiante.

- La metodología de investigación implementada en la tesis genera, las herramientas necesarias para, el análisis de los resultados del sistema de actividades relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de los elementos compartidos de la combinatoria y el álgebra en los estudiantes, la elaboración de las conclusiones y las recomendaciones.

- Se resalta la construcción de cinco actividades sustentadas en: el contenido básico de la combinatoria y el álgebra, la teoría de resolución de problemas retadores y los argumentos que surgen de los estudiantes al resolver las actividades, las cuales se enfocan en determinar los elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra.
- Como resultado de la implementación de las actividades en los estudiantes de grado noveno, se constatan los siguientes hallazgos:
    - Con el análisis de las actividades se evidencia que los estudiantes presentan dificultades para generar argumentos en los componentes de calificador modal (CM) y Refutación (R) pero presentan justificaciones y argumentos importantes en cuanto los componentes de conclusión (C) y garantía (G).
    - De acuerdo con los niveles de habilidad argumentativa propuestos por Romero, Bonilla y Álvarez (2018), el 65% de los estudiantes se encuentran en un nivel 2, el que se caracteriza por presentar argumentos con conclusiones, datos y garantía.
    - El 35% de los estudiantes de noveno se ubican en el nivel 0 de la habilidad argumentativa, en el cual no se evidencia procesos que justifiquen el planteamiento de su solución.
    - Se observa que los estudiantes desarrollan mejor su habilidad argumentativa cuando el profesor incentiva este proceso en su enseñanza y aprendizaje, enfocados a la elaboración y planificación de estrategias didácticas.

- Los estudiantes mejoran su comprensión y analizan por medio del triángulo de Pascal los binomios de la forma $(a + b)^n$ y su relación con los coeficientes binomiales.
- El 40% de los estudiantes identifican la cardinalidad de un conjunto y encuentran la relación que tienen con el triángulo de Pascal.
- Los estudiantes desarrollan los números combinatorios por medio de la fórmula y observan que algunos números se escriben de diferente forma, pero tienen el mismo resultado.
- Los estudiantes realizan trayectorias y combinaciones por medio de un esquema, llegando intuitivamente al triangulo de Pascal, esto se convierte en un componente interesante para los estudiantes pasar de un esquema a una expresión algebraica.
- Los estudiantes demuestran mayor interés y motivación por desarrollar problemas con situaciones en las que se involucra esquemas, tablas, escenarios que son reconocidos por ellos, permitiéndoles comprender mejor el tema y plasmar mejores argumentaciones del trabajo realizado.

## RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades sobre elementos y argumentos compartidos entre la Combinatoria y el Álgebra en la Educación Básica requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Continuar investigando sobre elementos y argumentos compartidos entre la Combinatoria y el Álgebra y proponer nuevos problemas retadores para el trabajo en el aula con los estudiantes de grado noveno de la Educación Básica.
- Motivar a los estudiantes por el estudio de la matemática, específicamente en generar procesos de argumentación en el aula, a través de la resolución de problemas; por las potencialidades que posee este trabajo para el desarrollo del pensamiento lógico matemático.
- Realizar mayores investigaciones sobre este campo para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el tema de combinatoria y el álgebra.

## BIBLIOGRAFÍA

Becerra, E., J. (2005) Temas selectos de matemáticas. La amena forma de aprender más. Universidad Autónoma de México.

Cohecha. T, C. (2014). Teorema del binomio y aplicaciones. Tesis Maestría. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Freund, J., y Simón, G. (1992). Estadística elemental. Octava edición. Pearson Educación.

Frits, E. y Fleur E. (2015). Niveles de van hiele aplicados a la resolución de problemas de razonamiento combinatorio.

Gamboa, G., Edo, M. y Planas. N. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. SUMA-Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas

García, J. (1998). Didáctica de las ciencias. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Grupo Impresor. Colombia. Pag.15. Recuperado el 25 de marzo de 2021 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191

Henao. C., Giraldo. M., & López. J. (2018). Aprendizaje del concepto de combinatoria a partir de una secuencia didáctica. Universidad de Antioquia facultad de educación. Medellín, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación. Sexta edición. México D.F., México: McGraw-Hill.

Kanbir S., Clements M.A., Ellerton N. F. (2018) Framing a Classroom Intervention Study in a Middle-School Algebra Environment. In: *Using Design Research and History to Tackle a Fundamental Problem with School Algebra. History of Mathematics Education.* Springer, Cham. (pp. 59-70). Recuperado de 10 de enero de 2021 de la URL:https://ezproxy.uan.edu.co:2072/10.1007/978-3-319-59204-6_3

Kilhamn C., Röj-Lindberg AS., Björkqvist O. (2019) Álgebra escolar. En: Kilhamn C., Säljö R. (eds) Encountering Algebra. (pp.1-11). Springer, Cham. Recuperado de 02 de mayo de 2021 de la URL: https://ezproxy.uan.edu.co:2072/10.1007/978-3-030-17577-1_1

Kisbye y Tiraboschi, (sin fecha). Elementos de lógica y teoría de conjuntos. Academia. (pp.7-8) Recuperado de 14 de mayo de 2021 de la URL: https://www.academia.edu/26609138/ELEMENTOS_DE_L_OGICA_Y_TEOR_IA_DE_CONJUNTOS?from=cover_page

Lozzada, C., R. (2011). Estrategias didácticas para la enseñanza – aprendizaje de la multiplicación y división en alumnos de primer grado. Universidad de los Andes. Venezuela.

Llanos, V., Otero, M. y Banks, L. (2015). Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media. Universidad Nacional del centro de la Provincia. Argentina.

Maní, R. G. (2011). ¿Qué quiero decir con pensamiento combinatorio? Facultad de ciencias matemáticas. Universidad shahid beheshti. sciencedirect 122–126. Irán.

Mason, J., Burton, L., y Stacey K (2013). Cómo razonar matemáticamente. México. Trillas.

Martínez, V. H. (2014). Diseño de una estrategia didáctica para que se facilite la apropiación de la conceptualización de la teoría combinatoria en los estudiantes del grado décimo, en la Institución Educativa Joaquín Vallejo Arbeláez del Municipio de Medellín. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). Secuencias Didácticas en Matemáticas para Educación Básica Secundaria. Bogotá, Colombia: Sanmartín Obregón y Cía.

Ltda. Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje

Morales, M. M (2017). Cómo detectar números primos usando el triángulo de Pascal. Recuperado el 20 de febrero de 2021 de la URL: https://www.gaussianos.com/como-detectar-numeros-primos-usando-el-triangulo-de-pascal/

Navarro, V., Batanero, C., y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación matemática. 8(1), 26-39. Recuperado el 20 de febrero de 2021 de la URL: http://www.ugr.es/~batanero/pages/articulos/razon.pdf

Nieto, S. J. (2014). Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas. Asociación venezolana de competencias matemáticas, Caracas.

Pascual, J. (2015). Ecuaciones online. Recuperado el 23 de abril de la URL: https://ecuaciones.online/aviso-legal/

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad de México, México: Trillas.

Polya, G, Tarjan, R. Woods, D. (1983). Notas sobre combinatoria introductoria. Springer Science & Business Media Volumen 4, pp 56.

Pólya, G. (1945). How to solve it; a new aspect of mathematical method. Princeton University Press, Princeton. Hay traducción: cómo plantear y resolver problemas (1965). Trillas, México.

Real Academia Española (Ed.) Diccionario de la Lengua Española 22 a ed. (2020). Recuperado el 10 de febrero de 2021 de la URL: https://dle.rae.es/elemento

García, J. y Rentería, E. (2011). Resolver problemas para aprender sobre los modelos.

(Artículo de investigación académica, científica y tecnológica) Revista Q, 6 (11), Recuperado el 31 de octubre del 2017 de la URL: http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/3576/1/GarciaJose_2011_resolverproblemas.pdf

Rivera, L, M., Maldonado, M, E. (2012). Elementos de la combinatoria en la educación primaria. Didáctica de la estadística y la probabilidad. Universidad Autónoma de guerrero. México.

Roa, G. Batanero, B. y Díaz, J. (2003) estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios educación matemática, vol. 15, núm. 2 pp. 5-25. Grupo Santillana. México.

Salgado, R. D. (Ed.). (2016). Proyecto saberes, ser hacer, matemáticas, Bogotá, Colombia: Santillana.

Sánchez (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperable el 15 de abril de 2019 de la URL: https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Schoenfeld, A. (1985). Resolución de problemas matemáticos. Orlando: Prensa académica.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración: implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

Flores, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. Educación Matemática, 19(1), 63-98.

## ANEXOS

### Anexo 1. Entrevista a especialista experta en el tema

Myriam Acevedo de Manrique

Doctora en Matemáticas

Licenciada en Matemáticas

Universidad Nacional De Colombia

**Objetivo:** Establecer un punto de partida para el trabajo de investigación titulado: elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas

**Preguntas y resultados de la entrevista:**

1) **¿Qué son los elementos y argumentos compartidos?**

Los elementos y argumentos compartidos son cuando hay objetos similares en los dos temas y esos objetos son los que se van a comparar en el caso de la combinatoria y el teorema del binomio de Newton, se construye la teoría combinatoria y cuando se hace el desarrollo binomial se van presentando símbolos combinatorios se puede establecer un nexo entre la teoría combinatoria y el trabajo desarrollo del teorema del binomio.

2) **¿Qué componentes se deben considerar para observar los elementos compartidos entre la combinatoria y el álgebra?**

Es fundamental para observar los elementos compartidos, cuando tenemos el teorema del binomio y el desarrollo binomial, la idea de combinatoria debe estar clara para poder observar esos elementos o esas interrelaciones entre los dos aspectos.

3) **¿Es posible, mencionar un ejemplo de elementos compartidos entre la combinatoria y el álgebra?**

Los argumentos tienen que ver con formas de razonamiento y los elementos con objetos matemáticos que hay aquí y allá, en el caso de la combinatoria y el teorema del binomio es que aparece en el desarrollo binomial la combinatoria, se necesita la teoría combinatorio para hacer demostraciones formales en el teorema del binomio porque sería imposible caracterizar los coeficientes del desarrollo entonces están las dos cosas cuando se habla de los casos de factorización lo que se ve realmente son desarrollos binomiales que se pueden utilizar tomando la teoría combinatoria.

4) **Este proyecto se puede enriquecer respondiendo:**

¿De dónde viene esa teoría combinatoria?, ¿Qué requiero para desarrollar esa teoría?, ¿Cómo voy a relacionarlo con el desarrollo y el teorema binomial?, ¿Qué trabajo anterior tienen los estudiantes con arreglos y combinaciones? y ¿Qué dificultades aparecen en los estudiantes con el manejo de arreglos y combinaciones?

5) **¿Qué materiales didácticos propone para precisar los elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra?**

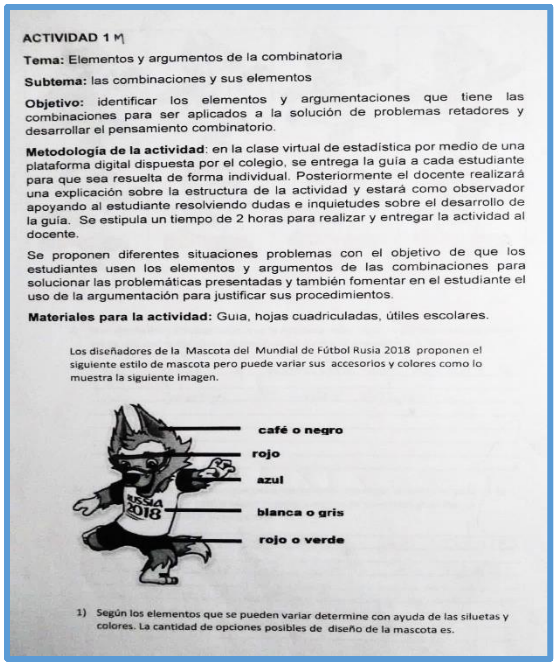
En cuanto a estrategias didácticas o lúdicas se ha utilizado la teoría de juegos que utiliza la teoría combinatoria para organizar las actividades con los estudiantes que lleven al estudiante a realizar arreglos condicionados, organizar colecciones, alistar subconjuntos, realizar conteos, entre otros, también en el teorema del binomio hay materiales para ver el desarrollo binomial que son todos los materiales geométricos utilizados y trabajados con la Doctora María Falk que permitirían comparar los dos temas la teoría combinatoria el desarrollo binomial con material geométrico para hacer factorización.

6) **¿Cuáles investigaciones considera revisar en el campo de los los elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra?**

Se recomienda realizar una revisión inicial de las investigaciones de Carmen Batanero que se refieren al trabajo de los niños con la teoría combinatoria.

## Anexo 2. Evidencias de la actividad 1

Objetivo: exponer con mayor detalle la actividad 1, realizada por los estudiantes.



**ACTIVIDAD 1** M

**Tema:** Elementos y argumentos de la combinatoria

**Subtema:** las combinaciones y sus elementos

**Objetivo:** identificar los elementos y argumentaciones que tiene las combinaciones para ser aplicados a la solución de problemas retadores y desarrollar el pensamiento combinatorio.

**Metodología de la actividad**: en la clase virtual de estadística por medio de una plataforma digital dispuesta por el colegio, se entrega la guía a cada estudiante para que sea resuelta de forma individual. Posteriormente el docente realizará una explicación sobre la estructura de la actividad y estará como observador apoyando al estudiante resolviendo dudas e inquietudes sobre el desarrollo de la guía. Se estipula un tiempo de 2 horas para realizar y entregar la actividad al docente.

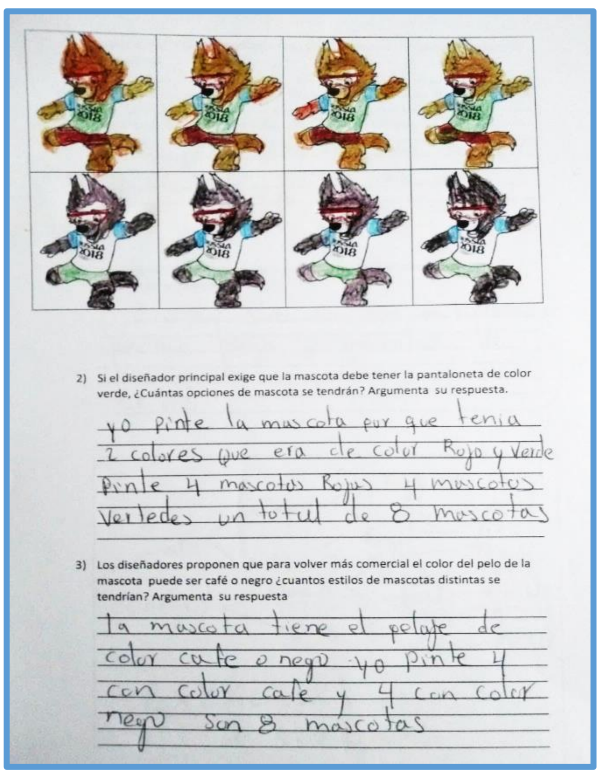
Se proponen diferentes situaciones problemas con el objetivo de que los estudiantes usen los elementos y argumentos de las combinaciones para solucionar las problemáticas presentadas y también fomentar en el estudiante el uso de la argumentación para justificar sus procedimientos.

**Materiales para la actividad:** Guia, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

Los diseñadores de la Mascota del Mundial de Fútbol Rusia 2018 proponen el siguiente estilo de mascota pero puede variar sus accesorios y colores como lo muestra la siguiente imagen.



1) Según los elementos que se pueden variar determine con ayuda de las siluetas y colores. La cantidad de opciones posibles de diseño de la mascota es.

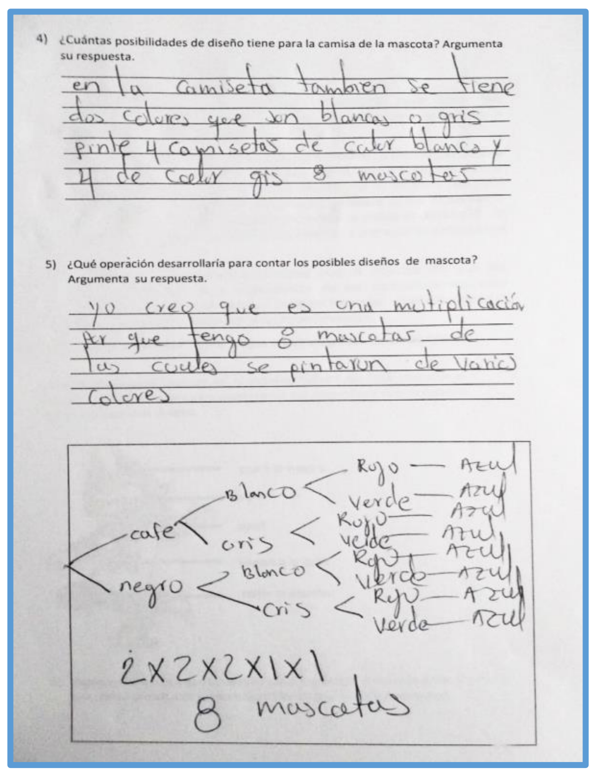


2) Si el diseñador principal exige que la mascota debe tener la pantaloneta de color verde, ¿Cuántas opciones de mascota se tendrán? Argumenta su respuesta.

yo pinte la mascota por que tenia 2 colores que era de color Rojo y Verde Pinte 4 mascotas Rojas 4 mascotas Verledes un total de 8 mascotas

3) Los diseñadores proponen que para volver más comercial el color del pelo de la mascota puede ser café o negro ¿cuantos estilos de mascotas distintas se tendrían? Argumenta su respuesta

la mascota tiene el pelaje de color cafe o negro yo pinte 4 con color cafe y 4 con color negro son 8 mascotas



4) ¿Cuántas posibilidades de diseño tiene para la camisa de la mascota? Argumenta su respuesta.

en la camiseta tambien se tiene dos colores que son blancas o gris pinte 4 camisetas de color blanco y 4 de color gis 8 mascotas

5) ¿Qué operàción desarrollaría para contar los posibles diseños de mascota? Argumenta su respuesta.

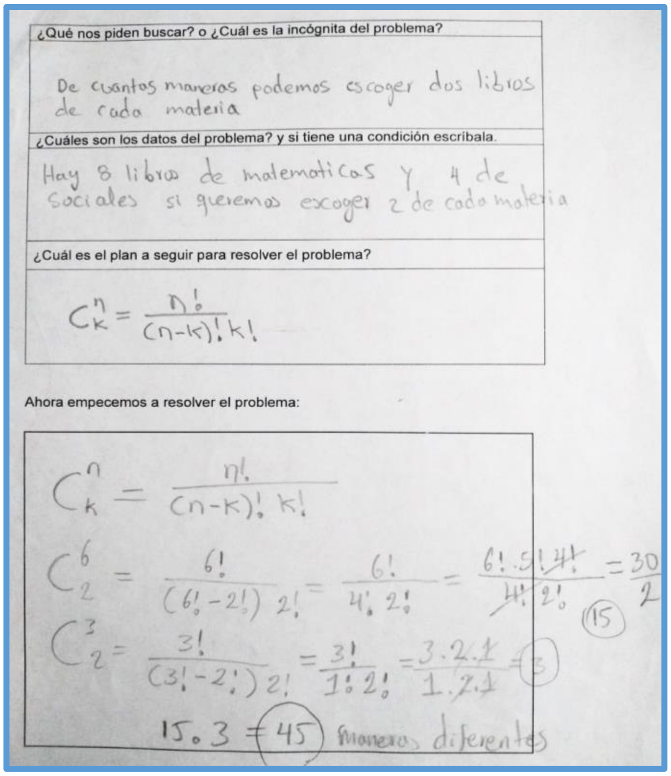
yo creo que es una mutiplicación por que tengo 8 mascatas de las cuales se pintaron de varios colores

cafe
Blanco — Rojo — Azul
Blanco — Verde — Azul
Gris — Rojo — Azul
Gris — Verde — Azul
negro
Blanco — Rojo — Azul
Blanco — Verde — Azul
Gris — Rojo — Azul
Gris — Verde — Azul

2x2x2x1x1
8 mascotas

**Anexo 3. Evidencias de la actividad 2**

Objetivo: exponer con mayor detalle la actividad 2, realizada por los estudiantes.



¿Qué nos piden buscar? o ¿Cuál es la incógnita del problema?

De cuantos maneras podemos escoger dos libros de cada materia

¿Cuáles son los datos del problema? y si tiene una condición escríbala.

Hay 8 libros de matematicas y 4 de sociales si queremos escoger 2 de cada materia

¿Cuál es el plan a seguir para resolver el problema?

$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

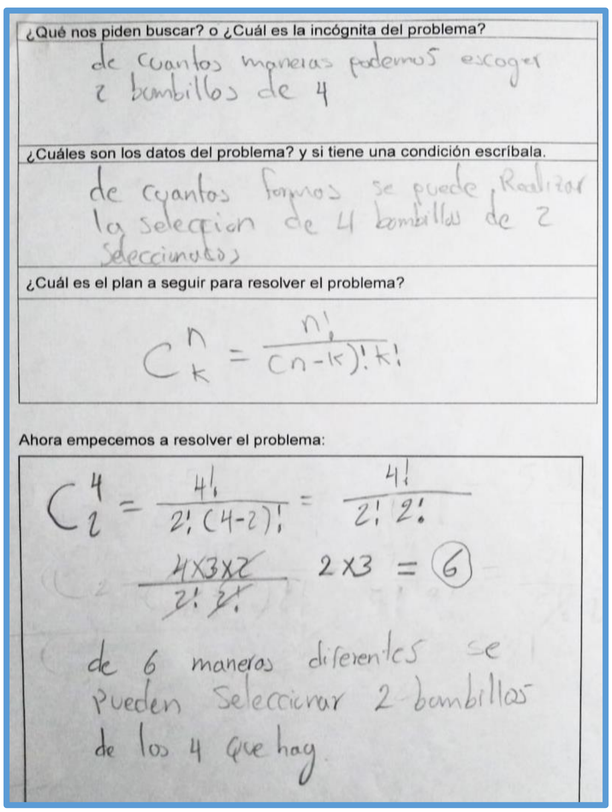
Ahora empecemos a resolver el problema:

$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$C_2^6 = \frac{6!}{(6!-2!)\,2!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6!\cdot 5!\,\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,2!} = \frac{30}{2}$ (15)

$C_2^3 = \frac{3!}{(3!-2!)\,2!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$

$15 \cdot 3 = 45$ maneras diferentes



¿Qué nos piden buscar? o ¿Cuál es la incógnita del problema?

de cuantos maneras podemos escoger 2 bombillos de 4

¿Cuáles son los datos del problema? y si tiene una condición escríbala.

de cuantas formas se puede Realizar la seleccion de 4 bombillos de 2 seleccionados

¿Cuál es el plan a seguir para resolver el problema?

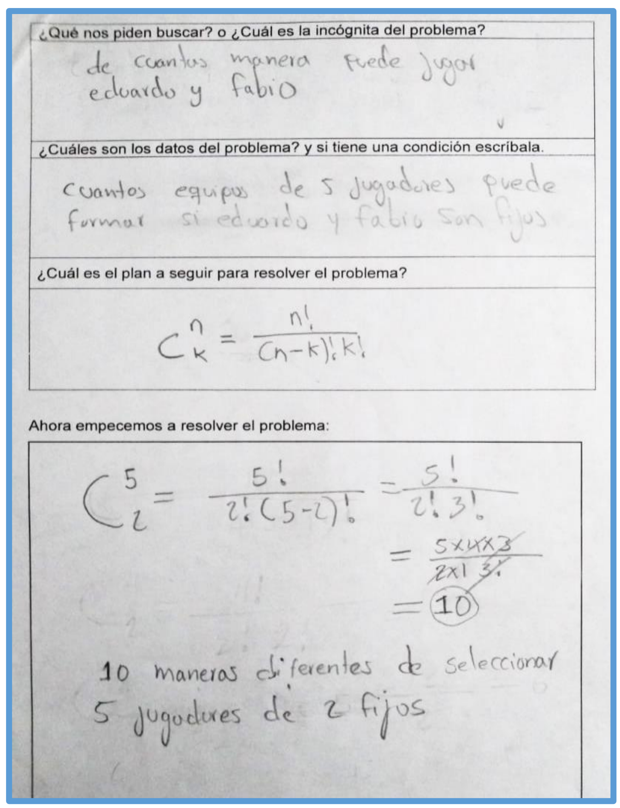
$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Ahora empecemos a resolver el problema:

$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!}$

$\frac{4\times 3\times \cancel{2}}{2!\,\cancel{2!}} \quad 2\times 3 = 6$

de 6 maneras diferentes se pueden Seleccionar 2 bombillos de los 4 que hay



¿Qué nos piden buscar? o ¿Cuál es la incógnita del problema?

de cuantos manera puede jugar eduardo y fabio

¿Cuáles son los datos del problema? y si tiene una condición escríbala.

Cuantos equipos de 5 jugadores puede formar si eduardo y fabio son fijos

¿Cuál es el plan a seguir para resolver el problema?

$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Ahora empecemos a resolver el problema:

$C_2^5 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!}$

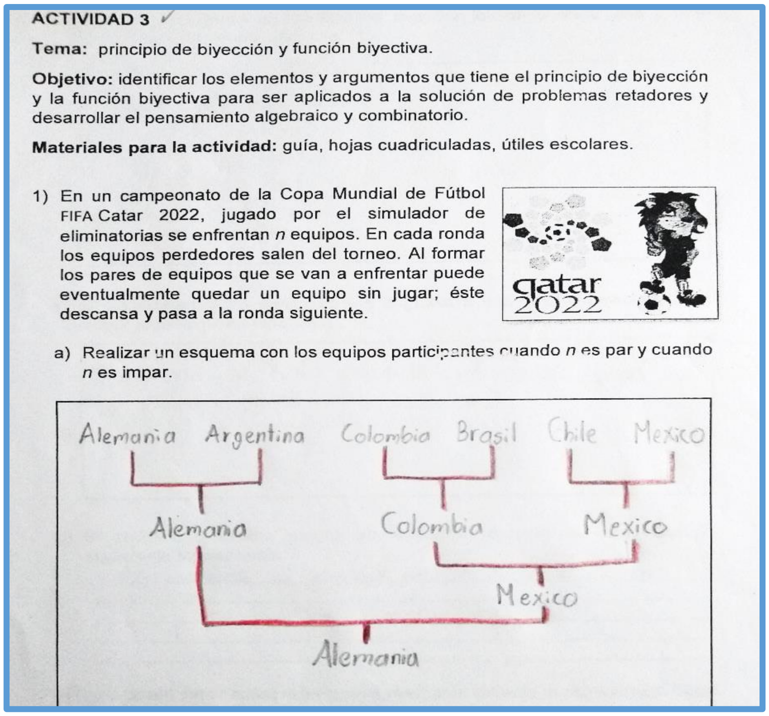
$= \frac{5\times 4\times \cancel{3}}{2\times 1\,\cancel{3!}}$

$= 10$

10 maneras diferentes de seleccionar 5 jugadores de 2 fijos

## Anexo 4. Evidencias de la actividad 3

Objetivo: exponer con mayor detalle la actividad 3, realizada por los estudiantes.



**ACTIVIDAD 3** ✓

**Tema:** principio de biyección y función biyectiva.

**Objetivo:** identificar los elementos y argumentos que tiene el principio de biyección y la función biyectiva para ser aplicados a la solución de problemas retadores y desarrollar el pensamiento algebraico y combinatorio.

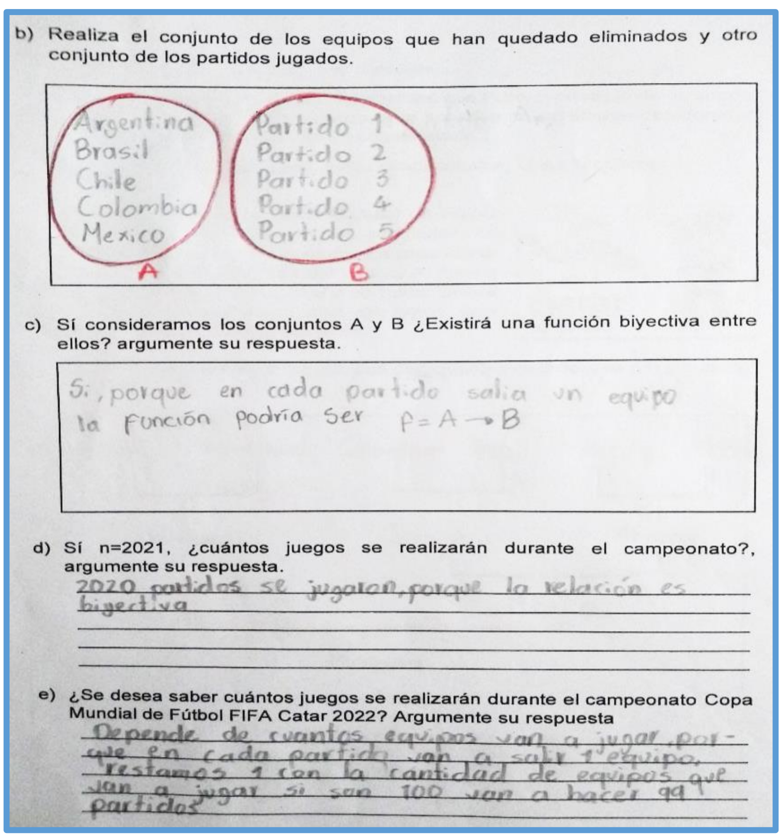
**Materiales para la actividad:** guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

1) En un campeonato de la Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022, jugado por el simulador de eliminatorias se enfrentan *n* equipos. En cada ronda los equipos perdedores salen del torneo. Al formar los pares de equipos que se van a enfrentar puede eventualmente quedar un equipo sin jugar; éste descansa y pasa a la ronda siguiente.



a) Realizar un esquema con los equipos participantes cuando *n* es par y cuando *n* es impar.





b) Realiza el conjunto de los equipos que han quedado eliminados y otro conjunto de los partidos jugados.



c) Sí consideramos los conjuntos A y B ¿Existirá una función biyectiva entre ellos? argumente su respuesta.

Si, porque en cada partido salia un equipo la función podría ser $f = A \to B$

d) Sí n=2021, ¿cuántos juegos se realizarán durante el campeonato?, argumente su respuesta.

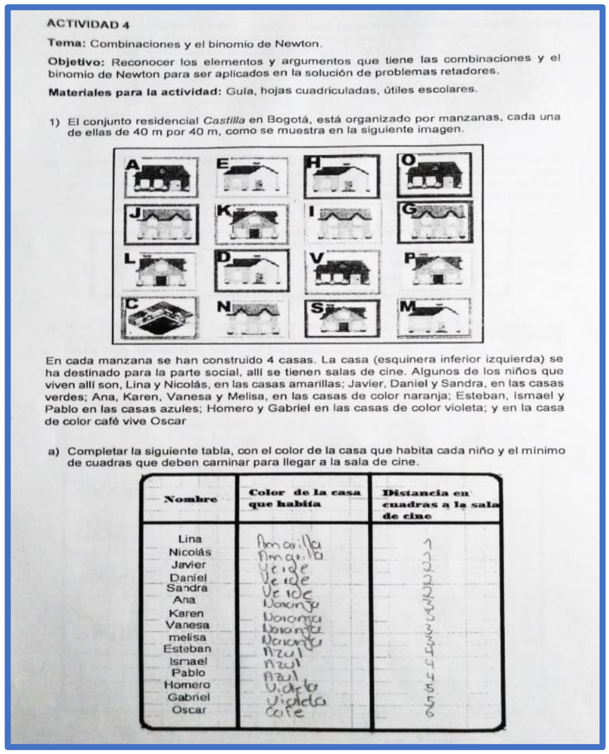
2020 partidos se jugaron, porque la relación es bigectiva

e) ¿Se desea saber cuántos juegos se realizarán durante el campeonato Copa Mundial de Fútbol FIFA Catar 2022? Argumente su respuesta

Depende de cuantos equipos van a jugar, porque en cada partido van a salir 1 equipo, restamos 1 con la cantidad de equipos que van a jugar si son 100 van a hacer 99 partidos

## Anexo 5. Evidencias de la actividad 4

Objetivo: exponer con mayor detalle la actividad 4, realizada por los estudiantes.



ACTIVIDAD 4

**Tema:** Combinaciones y el binomio de Newton.

**Objetivo:** Reconocer los elementos y argumentos que tiene las combinaciones y el binomio de Newton para ser aplicados en la solución de problemas retadores.

**Materiales para la actividad:** Guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

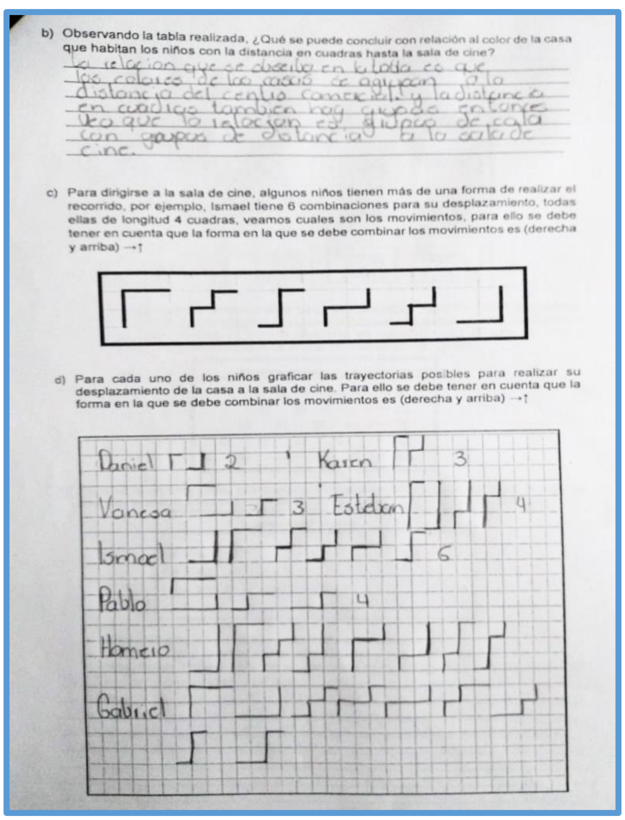
1) El conjunto residencial *Castilla* en Bogotá, está organizado por manzanas, cada una de ellas de 40 m por 40 m, como se muestra en la siguiente imagen.



En cada manzana se han construido 4 casas. La casa (esquinera inferior izquierda) se ha destinado para la parte social, allí se tienen salas de cine. Algunos de los niños que viven allí son, Lina y Nicolás, en las casas amarillas; Javier, Daniel y Sandra, en las casas verdes; Ana, Karen, Vanesa y Melisa, en las casas de color naranja; Esteban, Ismael y Pablo en las casas azules; Homero y Gabriel en las casas de color violeta; y en la casa de color café vive Oscar

a) Completar la siguiente tabla, con el color de la casa que habita cada niño y el mínimo de cuadras que deben caminar para llegar a la sala de cine.

| Nombre | Color de la casa que habita | Distancia en cuadras a la sala de cine |
|---|---|---|
| Lina | Amarilla | 1 |
| Nicolás | Amarilla | 1 |
| Javier | Verde | 2 |
| Daniel | Verde | 2 |
| Sandra | Verde | 2 |
| Ana | Naranja | 3 |
| Karen | Naranja | 3 |
| Vanesa | Naranja | 3 |
| melisa | Naranja | 3 |
| Esteban | Azul | 4 |
| Ismael | Azul | 4 |
| Pablo | Azul | 4 |
| Homero | Violeta | 5 |
| Gabriel | Violeta | 5 |
| Oscar | Cafe | 6 |



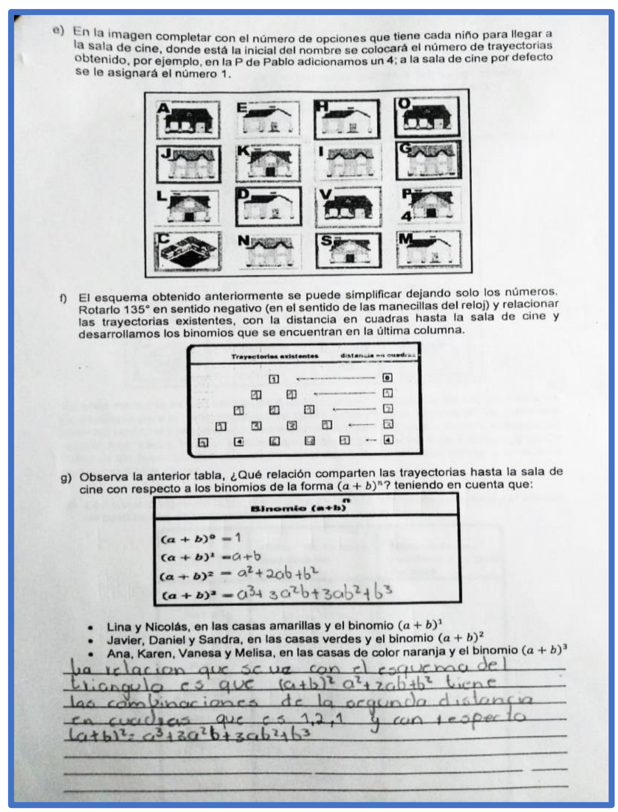
b) Observando la tabla realizada, ¿Qué se puede concluir con relación al color de la casa que habitan los niños con la distancia en cuadras hasta la sala de cine?

La relacion que se observa en la tabla es que los colores de las casas se agrupan a la distancia del centro comercial. y la distancia en cuadras tambien hay grupos entonces veo que la relacion es grupos de cada con grupos de distancia a la sala de cine.

c) Para dirigirse a la sala de cine, algunos niños tienen más de una forma de realizar el recorrido, por ejemplo, Ismael tiene 6 combinaciones para su desplazamiento, todas ellas de longitud 4 cuadras, veamos cuales son los movimientos, para ello se debe tener en cuenta que la forma en la que se debe combinar los movimientos es (derecha y arriba) →↑

d) Para cada uno de los niños graficar las trayectorias posibles para realizar su desplazamiento de la casa a la sala de cine. Para ello se debe tener en cuenta que la forma en la que se debe combinar los movimientos es (derecha y arriba) →↑





e) En la imagen completar con el número de opciones que tiene cada niño para llegar a la sala de cine, donde está la inicial del nombre se colocará el número de trayectorias obtenido, por ejemplo, en la P de Pablo adicionamos un 4; a la sala de cine por defecto se le asignará el número 1.



f) El esquema obtenido anteriormente se puede simplificar dejando solo los números. Rotarlo 135° en sentido negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) y relacionar las trayectorias existentes, con la distancia en cuadras hasta la sala de cine y desarrollamos los binomios que se encuentran en la última columna.



g) Observa la anterior tabla, ¿Qué relación comparten las trayectorias hasta la sala de cine con respecto a los binomios de la forma $(a+b)^n$? teniendo en cuenta que:

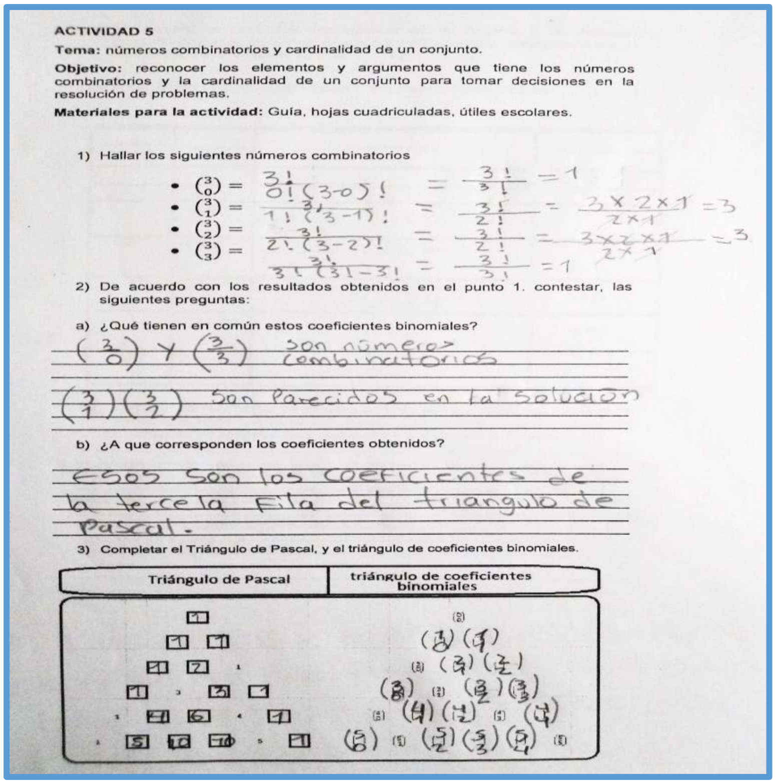
| Binomio $(a+b)^n$ |
|---|
| $(a+b)^0 = 1$ |
| $(a+b)^1 = a+b$ |
| $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ |
| $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ |

- Lina y Nicolás, en las casas amarillas y el binomio $(a+b)^1$
- Javier, Daniel y Sandra, en las casas verdes y el binomio $(a+b)^2$
- Ana, Karen, Vanesa y Melisa, en las casas de color naranja y el binomio $(a+b)^3$

La relacion que se ve con el esquema del triangulo es que $(a+b)^2$ $a^2+2ab+b^2$ tiene las combinaciones de la segunda distancia en cuadras que es 1,2,1 y con respecto $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

## Anexo 6. Evidencias de la actividad 5

Objetivo: exponer con mayor detalle la actividad 5, realizada por los estudiantes.



**ACTIVIDAD 5**

**Tema:** números combinatorios y cardinalidad de un conjunto.

**Objetivo:** reconocer los elementos y argumentos que tiene los números combinatorios y la cardinalidad de un conjunto para tomar decisiones en la resolución de problemas.

**Materiales para la actividad:** Guía, hojas cuadriculadas, útiles escolares.

1) Hallar los siguientes números combinatorios

- $\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{3!} = 1$
- $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3\times 2\times 1}{2\times 1} = 3$
- $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3\times 2\times 1}{2\times 1} = 3$
- $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!} = 1$

2) De acuerdo con los resultados obtenidos en el punto 1. contestar, las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tienen en común estos coeficientes binomiales?

$\binom{3}{0}$ y $\binom{3}{3}$ son números combinatorios

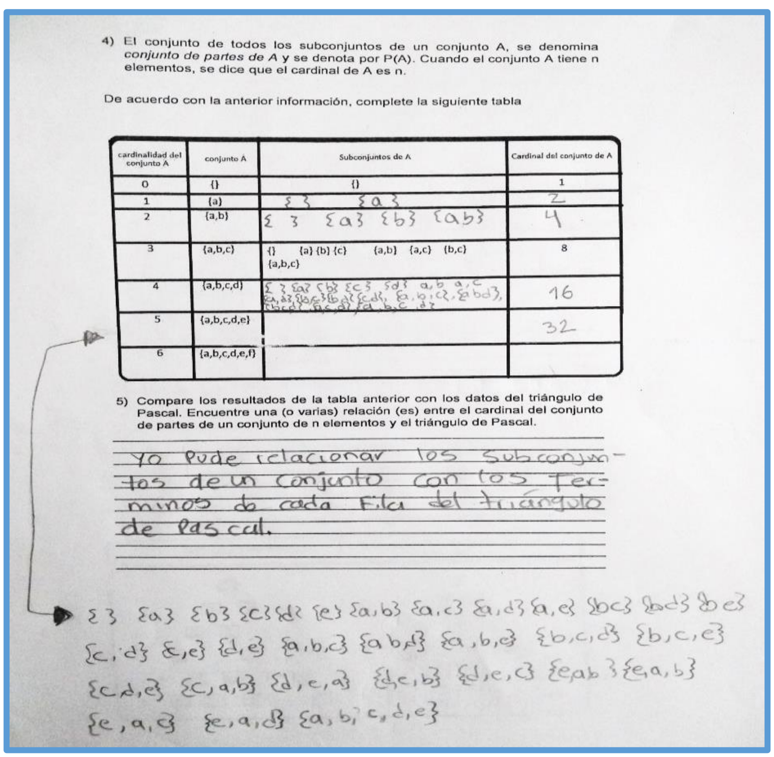
$\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ son Parecidos en la solución

b) ¿A que corresponden los coeficientes obtenidos?

Esos son los coeficientes de la tercela Fila del triangulo de Pascal.

3) Completar el Triángulo de Pascal, y el triángulo de coeficientes binomiales.

| Triángulo de Pascal | triángulo de coeficientes binomiales |
|---|---|
| 1 | $\binom{0}{0}$ |
| 1 1 | $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ |
| 1 2 1 | $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ |
| 1 3 3 1 | $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$ |
| 1 4 6 4 1 | $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$ |
| 1 5 10 10 5 1 | $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$ |



4) El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A, se denomina *conjunto de partes de A* y se denota por P(A). Cuando el conjunto A tiene n elementos, se dice que el cardinal de A es n.

De acuerdo con la anterior información, complete la siguiente tabla

| cardinalidad del conjunto A | conjunto A | Subconjuntos de A | Cardinal del conjunto de A |
|---|---|---|---|
| 0 | {} | {} | 1 |
| 1 | {a} | { } {a} | 2 |
| 2 | {a,b} | { } {a} {b} {ab} | 4 |
| 3 | {a,b,c} | {} {a} {b} {c} {a,b} {a,c} {b,c} {a,b,c} | 8 |
| 4 | {a,b,c,d} | { } {a} {b} {c} {d} a,b a,c {a,d} {b,c} {b,d} {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {b,c,d} {a,c,d} {a,b,c,d} | 16 |
| 5 | {a,b,c,d,e} | | 32 |
| 6 | {a,b,c,d,e,f} | | |

5) Compare los resultados de la tabla anterior con los datos del triángulo de Pascal. Encuentre una (o varias) relación (es) entre el cardinal del conjunto de partes de un conjunto de n elementos y el triángulo de Pascal.

Yo Pude relacionar los Subconjuntos de un conjunto con los Terminos de cada Fila del triángulo de Pascal.

{ } {a} {b} {c} {d} {e} {a,b} {a,c} {a,d} {a,e} {b,c} {b,d} {b,e} {c,d} {c,e} {d,e} {a,b,c} {a,b,d} {a,b,e} {b,c,d} {b,c,e} {c,d,e} {c,a,b} {d,c,a} {d,c,b} {d,e,c} {e,a,b} {e,a,b} {e,a,c} {e,a,d} {a,b,c,d,e}