MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Mg. Beatriz Avelina Villarraga Baquero

Proyecto de Tesis Doctoral

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Bogotá D.C.

2016

MODELO DIDÁCTICO PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Mg. Beatriz Avelina Villarraga Baquero

Directores de tesis:

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez (PhD.)

José María Sigarreta Almira (PhD.)

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Bogotá D.C.

2016

SÍNTESIS

La enseñanza aprendizaje de los números complejos, en su mayoría, se trabaja desde enfoques puramente deductivos, partiendo en muchos casos de su definición o presentado su contenido como un conocimiento ya acabado, sin permitir al estudiante la construcción y aplicación de los conceptos subyacentes al de función de variable compleja. Dicha situación no es ajena al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos.

Esta investigación presenta un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, que imbrica dichas teorías con base en tres categorías fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje, determinadas por Leontiev en su teoría de la actividad: Fase de Orientación, Fase de Ejecución y Fase de Control. Cada una de ellas posee diferentes momentos que constituyen una metodología de carácter dinámico que sigue 4 pasos a saber: motivación, adquisición, elaboración y fijación-aplicación. Cada una de estas etapas contiene problemas que permiten el acercamiento a los conceptos por aproximaciones sucesivas.

En el mismo sentido la metodología propuesta establece el uso de diferentes tipos de software que facilita la visualización de puntos, rectas y subconjuntos, situaciones usadas por los estudiantes participantes. La implementación de la metodología sustentada en el modelo didáctico propicia darle herramientas a los futuros docentes para ejercer su labor, pues pueden poner en juego ideas abstractas y resolver problemas, además de poder caracterizar representaciones, operaciones, con el fin de mejorar sus formas de pensamiento y actuación profesional.

ABSTRACT

Most complex numbers teaching-learning is done from purely deductive approaches, in many cases starting with definitions or presenting its content as finished knowledge, withholding from the student the opportunity to build-on and apply the underlying concepts to the complex variable function. This situation is not foreign to the Mathematics and Physics Bachelor's degree at Universidad de los Llanos.

This research presents an innovative model for teaching-learning of the complex variable complex through problem solving, which interlays these theories using three fundamental categories of the teaching-learning process, as proposed by Leontiev in his Activity Theory: Orientation Phase, Execution Phase, and Control Phase. Each one has different moments that constitute a dynamic methodology that follows four steps to know: motivation, acquisition, elaboration, and fixation-application. Each of these stages has different problems that allow the approach to the concepts through successive approximations.

In the same sense, the proposed methodology establishes the use of different types of software that facilitates the visualization of points, lines and subsets, situations used by the participating students. The implementation of the methodology based on the didactic model provides the tools for future teachers to carry out their work, since they can put into play abstract ideas and solve problems, besides being able to characterize representations and operations, in order to improve their thinking and professional performance.

CONTENIDO Pág.

INTRODUCCIÓN

Aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser, constituyen pilares básicos del aprendizaje que la educación debe crear y desarrollar (Delors, et. al, 1997). Son múltiples los factores que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, entre ellos: la falta de estrategias didácticas, metodologías, currículos no retadores, modelos educativos poco prácticos, políticas sociales con escasa efectividad, concepciones y creencias erróneas, entre otras.

Las investigaciones en educación matemática, hace más de 50 años, han centrado sus esfuerzos en determinar cómo debe desarrollarse el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en función de lograr la aprehensión y asimilación de los conceptos matemáticos y favorecer el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Investigaciones como las de Vinner y Hershkowitz (1980), Tall y Vinner (1981), Grenier (1985), Sfard (1991), Balacheff (1997), Duval (1999), entre otros, han sentado las bases para una *teoría de los conceptos matemáticos*, basados en la relación entre la definición de concepto y su imagen. En esa misma dirección, Duval (1999) y Hitt (2001), establecen que para la construcción de conceptos matemáticos no sólo se deben presentar actividades con un único sistema de representación, sino que además, se debe plantear el paso contrario entre los distintos sistemas, reiterando que es de esta manera se favorece la construcción de los conceptos matemáticos.

En relación a la resolución de problemas, Pólya (1965), Falk (1980), Kilpatrick (1985), Schoenfeld (1985, 1987, 1994), Mayer (1986), Krulik, S. y Rudnik, J. (1987), Vergnaud (1990), Fridman (1991), De Guzman (1991, 2001), Garret (1995), Puig (1996), Campistrous y Rizo (1996), Lester y Kehle (2003), Cruz (2006), Sigarreta (2006), Lesh y de Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros, enriquecen la investigación, ya que establecen que el uso iterativo de tecnicismos, como algoritmos, palabras claves, procedimientos, definiciones y memoria del estudiante, predomina sobre el tratamiento de los conceptos, hecho que impide el planteamiento, análisis y solución de problemas.

Adicional a ello, en dichas investigaciones, se declaran las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de enfrentar un determinado problema y se proponen estrategias, fases y modelos para favorecer el proceso de resolución de problemas matemáticos; sin embargo, las dificultades dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática persisten. Colombia, no es ajena a esta problemática, situación que se refleja en los resultados de las pruebas externas (LLECE, PISA, TIMMS, ver Anexo A) e internas (Saber 3º,5º,9º, Saber 11º y Saber Pro, ver Anexo A).

Dichos resultados se deben a distintos factores entre ellos, la poca habilidad de los estudiantes para analizar y solucionar problemas (ICFES, 2014). Situación que pone de manifiesto la necesidad de asumir e involucrar la resolución de problemas como método integral en la enseñanza-aprendizaje de la matemática; es decir, la resolución de problemas debe ser considerada como transversal a todo el diseño curricular.

Adicional a ello se debe generar un contexto, en el cual los conceptos y las actitudes hacia la matemática puedan ser favorecidos; de modo que los estudiantes sean activos en la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades y capacidades, en palabras de Ernest (1989) "... *la resolución de problemas es la visión de las matemáticas como un campo en continua expansión dinámica de la creación y la invención humana, un producto cultural… En esta misma medida la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas, mejora las actitudes, comprensión y flexibilidad de pensamiento*”[1].

---

[1] Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art*, *p. 249*

Fischbein (1990) establece algunas líneas generales que se pueden desarrollar en torno a la formación de conceptos, en particular, expone un conjunto de indicaciones para el tratamiento de problemas relacionados con conceptos matemáticos, tales como: el infinito actual y potencial, Teoría de números especificando los irracionales y complejos, entre otros. Se coincide con Falk (2015), cuando asevera: "...*en lo concerniente a un concepto matemático el aprendizaje es un proceso de construcción de significado del concepto. El proceso de construcción pasa por etapas donde el significado es construido…. El proceso de construcción de significado se desarrolla en la actividad de la solución de problemas, cada problema nuevo contribuye a mirar el concepto en un nuevo contexto que enriquece su significado... permite establecer las relaciones que cumple el concepto con otros conceptos…*"[2].

En particular, el porqué del tratamiento del concepto de función de variable compleja, se fundamenta en las siguientes razones:

- El tratamiento de los números complejos, determina la continuidad natural de los dominios numéricos; después de los reales, (Kline, 1972; Sigarreta, 2000).
- Crea las bases sobre el tratamiento de conceptos integradores para la compresión de la matemática, como los hiperreales e hipercomplejos.
- Las funciones de variable compleja están presentes en las bases teóricas de toda la matemática superior y en sus aplicaciones prácticas.

De lo antes expuesto se infiere la importancia y necesidad de formar nuevos maestros, que conozcan los fundamentos teóricos que permitan relacionar, de manera exitosa, la resolución de problemas matemáticos y la formación de conceptos y, en particular, aquellos específicos asociados con el

[2] Falk, M. (2015). "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015, p. 6

concepto de función de variable compleja. La importancia teórico- práctica del tema tratado, se corrobora ya que estas temáticas han sido abordadas en eventos científicos tales como: International Congress on Mathematical Education (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM), en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros.

Específicamente, en el ICME (1990), Vergnaud, definió los *campos conceptuales* como conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requieren de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas; concluye que los maestros requieren de una mejor comprensión de la interconexión entre los conceptos, las competencias, los símbolos y situaciones para el desarrollo del conocimiento matemático a largo plazo.

En el CERME 2013, los trabajos de Fernández, Rico y Ruiz, indagan sobre los significados del concepto de límite finito de una función en un punto. Mota, Rada y Estarada, resaltan la enseñanza del concepto de línea tangente. Hausberger, trabaja sobre el concepto de Homomorfismo. Por último, Schlarmann, se refiere a la comprensión conceptual. Se considera que el aporte de estos trabajos científicos, se dirige a caracterizar diferentes conceptos matemáticos, desde la práctica en el aula, sin establecer una metodología o modelo didáctico específico para el tratamiento de estos tópicos.

Buehler (2014) presenta como Girolamo Cardano, adquiere el concepto de números complejos, haciendo una fuerte crítica a la teoría del desarrollo conceptual de Christopher Peacocke, estableciendo la necesidad de enfrentar contraejemplos, tomando la construcción social del conocimiento, como un marco para la comprensión en la adquisición de conceptos.

Pardo y Gómez (2007) presentan un estudio sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, tomando como modelo el de Filloy (1999), denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). Sus resultados establecen que los estudiantes universitarios presentan dificultades e inconsistencias al responder a diferentes tareas planteadas, mostrando que es aconsejable el uso de la historia como un elemento para el aprendizaje del número complejo.

De Vleeschouwer, Gueudet y Lebaud (2013) realizan una investigación acerca de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos en los primeros cursos universitarios. Presentan diferentes tareas haciendo uso de diferentes representaciones; concluyen, que existen dificultades en el tránsito por estos sistemas y en particular con la representación geométrica, sugieren que esta última requiere de una enseñanza específica. En el artículo no se ofrece ningún modelo didáctico para solventar o enfrentar las dificultades encontradas.

Gray y Tall (2001) determinan tres formas de construir conceptos matemáticos que han sido utilizadas en teorías axiomáticas formales: desde la percepción de objetos y sus propiedades; desde las acciones que se simbolizan y sus propiedades; y desde esquemas de actividades y sus propiedades. Sin embargo, estas tres diferentes formas de construcción del concepto, tienen en común su tratamiento, esencialmente, inductivo. Se considera que dichas formas pueden ser integradas, desde el punto de vista metodológico, a través de un tratamiento dentro del proceso de resolución de problemas.

En la literatura revisada, se carece de un modelo didáctico para la formación de conceptos de la teoría de funciones de variable compleja, a través de la resolución de problemas matemáticos. Igualmente en las investigaciones desarrolladas sobre la enseñanza-aprendizaje de los números complejos, en su mayoría, se trabaja desde enfoques puramente deductivos, partiendo en muchos casos de su definición o presentado su contenido como un conocimiento ya acabado, sin permitir al estudiante la construcción y aplicación de los conceptos subyacentes al de función de variable compleja.

Dicha situación no es ajena al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos; por lo tanto, en ésta investigación, se realiza un estudio para la elaboración y aplicación de un modelo didáctico que favorezca el proceso de formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas, con estudiantes de quinto semestre de dicha licenciatura. El modelo, está sustentado en los aportes que desde el punto de vista teórico ha desarrollado la concepción dialéctica y que en la práctica ha potencializado el Enfoque Histórico Cultural de Vygotsky.

En la literatura científica, son limitados los antecedentes; sin embargo, se han ubicado estudios acerca de la formación de conceptos, la resolución de problemas y la enseñanza-aprendizaje del número complejo y de las funciones de variable compleja. A través de la aplicación de métodos empíricos como la observación en clase, encuestas a los estudiantes y profesores y la experiencia de la investigadora, se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Son limitados los conocimientos previos que poseen los estudiantes acerca del número complejo y por ende de la función de variable compleja.
- Son escasos los sistemas de representación, para la construcción del concepto de número complejo y en consecuencia de la función de variable compleja.
- Es limitado, en general, el empleo de métodos que induzcan a la actuación productiva de los estudiantes para el dominio de conceptos matemáticos.

- Las actividades asignadas en el aula no propician la experimentación, búsqueda y exploración en el estudio del número complejo y el de función de variable compleja, donde se logren procesos metacognitivos.
- La construcción del concepto de función de variable compleja, no se introduce a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida, relacionada con la temática.
- Se carece de una adecuada integración, entre la resolución de problemas y la formación de conceptos para el tratamiento del concepto de función de variable compleja.

Las valoraciones anteriores y el estudio teórico inicialmente realizado, permiten determinar la contradicción en su manifestación externa, entre las prácticas de aula para la formación del concepto de función de variable compleja y la aplicación de un modelo didáctico que integre la resolución de problemas y la formación de conceptos en el tratamiento de dicho concepto. La contradicción conduce al siguiente **problema científico** de la investigación: ¿Cómo utilizar las potencialidades de la resolución de problemas para favorecer el proceso de formación del concepto de función de variable compleja?

El **objeto de estudio** de la investigación es el siguiente: el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja en el nivel universitario. En función de resolver el problema planteado se propone como **objetivo general**: elaborar un modelo didáctico para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas. Se precisa como **campo de acción**: el proceso de formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas en el nivel universitario. Para el cumplimiento del objetivo, se formulan las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Qué fundamentos teóricos son necesarios para elaborar una metodología para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas?

- ¿Qué elementos matemáticos y metodológicos de la resolución de problemas y el tratamiento de conceptos matemáticos, son necesarios para elaborar un modelo didáctico para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas?
- ¿Qué modelo didáctico favorece el proceso de formación del concepto de función de variable compleja a través del proceso de resolución de problemas?
- ¿Cómo analizar la viabilidad de dicho modelo didáctico en la práctica docente?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y, en particular, a las preguntas planteadas fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar el estado del arte asociado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la función de variable compleja.
2. Determinar el mapa conceptual asociado al concepto de función de variable compleja, que serán tratados a través del modelo didáctico.
3. Fundamentar epistemológicamente y matemáticamente los procesos de evolución y de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja.
4. Determinar elementos metodológicos asociados a la imbricación entre la resolución de problemas y el tratamiento de los conceptos matemáticos.
5. Elaborar un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas.
6. Determinar la viabilidad de un modelo didáctico por medio de una metodología sustentada a través de un sistema de actividades, que permita la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas.

El **aporte práctico** radica en una metodología sustentada en el modelo didáctico, que permite la formación del concepto de función de variable compleja, a través de la resolución de problemas matemáticos. La constitución de herramientas y estrategias para la recolección de información y validación de la propuesta. Adicional a ello, se aporta un sistema de actividades dirigido a la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas.

El **aporte teórico** consiste en un modelo didáctico de carácter holístico para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas matemáticos. Es de destacar el carácter integrador del modelo propuesto, debido a que desde el punto de vista teórico ofrece los fundamentos básicos para el desarrollo de futuras investigaciones enfocadas a la formación de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas y viceversa.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se realiza un análisis del estado del arte. En el segundo, se explicitan los fundamentos teóricos. En el tercer capítulo, se expone la metodología de la investigación. En el cuarto capítulo se presenta y explica el modelo didáctico y una metodología a partir de un sistema de actividades. En el quinto capítulo se valida el modelo didáctico generado y se realiza una valoración de la implementación del sistema de actividades en la práctica.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

La primera aproximación al estudio de las funciones de variable compleja, se inicia en el noveno grado de Educación Básica Secundaria con la introducción a los números complejos; por tal motivo es imprescindible contar con docentes capacitados para poder enfrentar con éxito el tratamiento metodológico de los conceptos de ésta temática. En este capítulo se aborda el estado del arte relacionado con el tema, el cual se centra en las relaciones entre: formación de conceptos y la resolución de problemas.

1.1. Investigaciones asociadas a las relaciones entre formación de conceptos y la resolución de problemas

Rubinstein (1967) asevera que las representaciones entre más cercanas estén a la realidad van a ser más significativas que si se mantienen invariables a sus características y detalles. Adicional a ello las representaciones no son sólo imágenes de un objeto particular, sino la de toda una clase y de sus análogos. Para el autor el concepto se da a partir de las representaciones, al igual que no se puede pensar en imágenes vacías sin tener en cuenta un concepto. En esa dirección D'Amore (Citado por Falk 2015) presenta una especie de paradoja al respecto, donde afirma que no sólo a través de múltiples representaciones se logra el aprendizaje de un concepto, sino que además existe una necesidad del uso de la lógica, situación que es aceptada por la autora de este proyecto.

A continuación se hace un análisis de algunas de las investigaciones asociadas a las relaciones entre formación de conceptos y la resolución de problemas.

1.1.1. "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática[3]

Falk (2015) expone que "… *el aprendizaje de un concepto es un proceso de construcción de significado cada vez más apropiado y enriquecido para el concepto, y que en el proceso de solución de problemas novedosos, no rutinarios y retadores se logra activar esa construcción, imitando así procesos históricos de construcción de significado conseguida a partir de la solución de problemas propios de los intereses y necesidades de los diferentes períodos históricos y las etapas históricas recorridas*"[4]. Es decir para la autora las representaciones son fruto del entendimiento histórico y paulatino de los conceptos.

1.1.2. Didáctica de la Matemática e Investigación[5]

Según Rico (2000) "*La finalidad de la Educación Matemática se centra en enriquecer y estructurar de manera adecuada los diversos significados de los conceptos matemáticos, superando la aparente exclusividad de su significación formal y deductiva*"[6]. Criterios estos que se consideran pertinentes para la construcción del modelo didáctico que se presenta.

1.1.3. Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos[7]

D'Amore (2001) analiza diferentes interpretaciones de los términos "concepto" y "objeto" en matemática, en la historia de los pensamientos filosófico y psicológico y en la reciente acepción "antropológica", donde muestra la necesidad de introducirse en una teoría "pragmática". En su estudio, se refiere al

---

[3] Falk, M. (2015) "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015.

[4] Falk, M. (2015) "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015, p. 15.

[5] Rico, L., y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación.

[6] Rico, L., y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación, p. 4.

[7] D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno.* [Barcelona, España]. 27, 51-76. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/402%20contribucion%20al%20debate%20sobre%20conceptos%20y%20objetos.pdf

desarrollo conceptual, donde distingue tres fases: fase de los cúmulos sincréticos, caracterizada por la falta de referencia objetiva; fase del pensamiento por complejos, donde el pensamiento es de modo objetivo, se reconocen nexos concretos pero no lógicos ni abstractos; y la fase conceptual, donde se opera haciendo uso de la capacidad de abstracción que se tenga.

1.1.4. Aprendiendo matemática desde los conceptos[8]

Ángel, Polola, Fernández y Bortolotto (2004) establecen métodos de trabajo en el aula, que según exponen, permiten facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, disminuyendo las dificultades que se presentan en dicho proceso. Estos autores hacen uso de actividades y ejercicios que conducen a entender el significado de un problema matemático en relación a los conceptos presentes en él. Los conceptos elaborados son: Lógica - Teoría de conjuntos - Conjuntos Numéricos - Números Reales - Módulo - Polinomios - Ecuaciones - Sistemas de Ecuaciones - Inecuaciones - Ecuación de la Recta - Relaciones y Funciones. Los autores concluyen que al usar la metodología propuesta se llegó a alcanzar y superar ligeramente el rendimiento final de los alumnos en los puntajes de pruebas generadas en años anteriores, con respecto a grupos que ya habían tenido otro tipo de instrucción.

1.1.5. La formación del concepto de función en alumnos de educación media superior[9]

Flores, García, Velázquez, Hesiquio, Gómez y Gutiérrez (2004) analizan los efectos de diferentes situaciones didácticas sobre la formación de dicho concepto. En esa misma dirección González (2005), hace referencia a elementos básicos de la enseñanza de conceptos matemáticos. Este autor establece un marco teórico acerca de la formación, adquisición y enseñanza de conceptos matemáticos, donde

[8] Ángel, M. E., Polola, L., Fernández, G. y Bortolotto, M. (2004). Aprendiendo matemática desde los conceptos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 17, año 2004.

[9] Flores, C., García, G., Gómez, E. J., Gutiérrez, M., Hesiquio, H. N. y Velázquez, S. (2004). La formación del concepto de función en alumnos de educación media superior. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa – vol. 17. tomado de http://funes.uniandes.edu.co/6343/1/FloresLaformacionAlme2004.pdf

tiene en cuenta los siguientes aspectos: naturaleza; funciones; interpretaciones teóricas; clasificación; y factores que afectan el proceso de adquisición. Posteriormente se instituyen estrategias aplicables en la enseñanza de conceptos y se ofrecen criterios para determinar si un concepto ha sido adquirido o no; además de formular recomendaciones en los procesos de evaluación de conceptos matemáticos. Estos autores no reconocen los procesos de enseñanza - aprendizaje como un sólo proceso, sino que hacen énfasis sólo en la enseñanza, adicional a ello no reconocen el concepto como parte del aprendizaje, ni como un proceso de construcción de significado del concepto.

1.1.6. Introducción a los conceptos básicos de funciones mediante el uso de la Resolución de Problemas[10]

Mena, Rojas y Vindas (2011) establecen estrategias para la formación del concepto de función, mediante la teoría de la resolución de problemas, apoyada en la utilización significativa del contexto y los intereses de los adolescentes. Los autores construyen una unidad didáctica a través de una sección de ejercicios con interrogantes sobre las diferencias y semejanzas entre la función y la relación; con el fin, que los estudiantes de décimo año adquieran un conocimiento significativo ligado a su realidad personal, social, económica, entre otras. Cabe destacar que aunque en la unidad didáctica se trabaja la resolución de problemas para la adquisición de conceptos, no se establece un modelo didáctico.

1.1.7. El aprendizaje de conceptos matemáticos desde una perspectiva desarrolladora[11]

García, Mora, Martínez y Anarela (2012) analizan los procesos lógicos del pensamiento, referente a los conceptos, a través de un conjunto de proposiciones, determinando así el carácter desarrollador del

[10] Mena, D., Rojas, L. y Vindas, A. (2011). Introducción a los conceptos básicos de funciones mediante el uso de la Resolución de Problemas. En Memorias del *VII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, Cartago, Costa Rica.

[11] García, S., Mora, J., Martínez, A. y Anarela, A. (2012). El aprendizaje de conceptos matemáticos desde una perspectiva desarrolladora. Pedagogía Universitaria, 17(1).

aprendizaje de los conceptos matemáticos. Los autores, revelan una experiencia pedagógica en la cual plasman un conjunto de indicaciones y precisiones didácticas necesarias para el trabajo con conceptos y problemas en los ámbitos teórico y práctico.

1.1.8. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics[12]

Schoenfeld (1992) en su artículo, desarrolla tres temáticas: la fundamentación y conceptualización del pensamiento matemático; el análisis de la literatura existente respecto al pensamiento matemático y la resolución de problemas; y las nuevas investigaciones acerca de la comprensión del pensamiento matemático. Un elemento a destacar y de importancia para esta investigación es que el autor considera la metacognición, las creencias y la práctica matemática como aspectos básicos del pensar matemáticamente.

1.1.9. La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje[13]

Vilanova; Rocerau; Valdez; Oliver; Vecino; Medina; Astiz y Álvarez (2001) enfatizan acerca del papel de la resolución de problemas en el aprendizaje y en general, de la matemática. Estos autores ponen de manifiesto la importancia de la resolución de problemas y justifican el hecho de incorporar la resolución de problemas como método integral en la enseñanza de las matemáticas. También indican que la resolución de problemas es un proceso que debe ser transversal al currículo y proveer el contexto en el cual los conceptos y las actitudes pueden ser aprendidos.

---

[12] Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

[13] Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P. y Álvarez, E. (2001). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI. Revista Iberoamericana de Educación*.

1.1.10. Propuesta metodológica para aprender a resolver problemas matemáticos[14]

Santiesteban y Rodríguez (2004) proponen una metodología basada en la resolución de problemas matemáticos para favorecer el aprendizaje significativo de conceptos, haciendo uso de un conjunto de acciones que propician la asimilación de los conceptos matemáticos que se imparte en la enseñanza media básica en Cuba. Dicha metodología está compuesta por una serie de procedimientos heurísticos que sirven como base para dirigir desde el punto de vista metodológico y heurístico, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

1.1.11. La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica[15]

Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) exponen y pretenden demostrar como la matemática se ha venido desarrollando a la par de los problemas que la misma sociedad ha establecido, siendo la resolución de problemas la causa fundamental del desarrollo de la matemática desde una visión metodológica y conceptual. En esa misma dirección se expone que la actividad matemática se centra en la resolución de problemas, tomando los aportes del enfoque histórico-cultural, desarrollados dentro de la teoría de la actividad, como una de sus bases teóricas para el desarrollo de la investigación; siendo este el sustento en el desarrollo de éste trabajo.

1.1.12. Methodology based on problem solving in the treatment of the concept of limit to infinity[16]

Morales, Dolores, Nolasco, Hernández y Sigarreta (2014) en su investigación, construyen una estrategia metodológica para la enseñanza-aprendizaje del cálculo a nivel universitario, estableciendo procesos

---

[14] Santiesteban, I. y Rodríguez, M. (2004). Propuesta metodológica para aprender a resolver problemas matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 17*.

[15] Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13*(1), p. 53.

[16] Morales A., Dolores C., Nolasco H., Hernández J. y Sigarreta J. (2014). Methodology based on problem solving in the treatment of the concept of limit to infinity. En International *Journal of Research in Education Methodology. Volumen 5, Nº 1*.

para la asimilación del concepto de límite cuando una variable tiende al infinito, basada en elementos teóricos de la teoría de la actividad, la resolución de problemas y la formación de conceptos. La autora de la tesis comparte estos elementos teóricos los cuales se consideran pertinentes para el modelo didáctico que se propone.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones de variable compleja

1.2.1. Una construcción del significado del número complejo[17]

Martínez y Antonio (2009) realizan una investigación sobre los procesos de convención y articulación matemática, para la construcción escolar del significado de los números complejos, ellos exponen que este puede ser construido por medio de una secuencia de actividades basada en un análisis histórico-epistemológico y de la convención matemática, haciendo uso de polinomios de la forma x^n-1= 0. Se concluye que el significado del número complejo, en un plano algebraico, puede ser interpretado como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones. También, presentan una mejora en cuanto a la concepción que tienen los estudiantes, acerca de que "*las raíces cuadradas de números negativos no existen*"[18], situación que cambió al introducir las operaciones con los complejos, propiciándolos a la aceptación de estos números. Estos investigadores asumen como resultado que la secuencia de actividades es un indicio en la construcción del significado del número complejo y sus operaciones a través del cálculo de raíces. Ellos dejan a consideración de los lectores la posibilidad de mejorar las actividades propuestas y el diseño de una metodología adecuada.

---

17 Martínez, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 4(1),* 1-9.
18 Martínez, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *4*(1), p. 5.

1.2.2. Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos[19]

Aznar, Distéfano, Massa, Figueroa y Moler (2010) en su investigación, realizan un análisis de las dificultades que presentan los estudiantes que cursan la asignatura álgebra, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, al expresar algebraicamente las condiciones que caracterizan a un conjunto de números complejos representados gráficamente. Dicha investigación se centró en la teoría de registros semióticos de Duval; se concluye que es necesario reflexionar sobre cómo abordar sistemáticamente el trabajo con cambios entre diferentes registros con el fin de favorecer la conceptualización.

1.2.3. Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de los números complejos: un análisis ontosemiótico[20]

Distéfano, Aznar, Pochulu (2012) abordan los errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos. En este trabajo se realiza un análisis ontosemiótico de las dificultades y errores que se generan, cuando los estudiantes usan distintas representaciones de los números complejos, en un curso de álgebra de nivel universitario. Se concluye que la representación aritmético-algebraica obtuvo menores dificultades en los estudiantes, comparada con el uso de la representación geométrica-vectorial que fue deficiente o nula.

---

[19] Aznar, M., Distéfano, M., Massa, S., Figueroa, S. y Moler, E. (2010). Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos. *Revista de Educación Matemática*, *25*, 1-6.

[20] Distéfano, M., Aznar, M. y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de los números complejos: un análisis ontosemiótico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* – Junio de 2012 - Número 30- p.62.

1.2.4. Complex variables in junior high school: the role and potential impact of an outreach mathematician[21]

Duke, Dwyer, Wilhelm y Moskal (2008) en su artículo incorporan el concepto de variable compleja en los estudiantes de secundaria en los Estados Unidos, con el objetivo de estimular su interés por las matemáticas y mejorar las habilidades en álgebra. Los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes de grado noveno obtuvieron una mejoría significativa, mientras que los estudiantes de grado octavo avanzaron poco. Dentro de los alcances obtenidos se encuentran el aumento de la motivación de los estudiantes hacia la matemática; y que los estudiantes de octavo grado pueden carecer de los conocimientos fundamentales de matemática y de madurez necesaria para comprender los conceptos presentados.

1.2.5. Application of Simple Examples in Experiment Teaching about Complex Function and Integral Transform[22]

Yan, Jin, Li, Zhao y Li, (2011) realizan una investigación en un curso de matemáticas para Ingeniería sobre funciones de variable compleja y transformada. Los resultados de esta investigación muestran como el uso de ejemplos reales y relacionados con la experiencia de los estudiantes, permite el logro de los objetivos de enseñanza centrados en el aprender a través de las aplicaciones de una manera más efectiva.

Conclusiones del Capítulo 1

En las investigaciones consultadas se encuentra amplia bibliografía sobre la resolución de problemas, la formación de conceptos, teoría de la actividad, procesos de enseñanza-aprendizaje de los números

[21] Duke, B., Dwyer, J., Wilhelm, J. y Moskal, B. (2008). Complex variables in junior high school: the role and potential impact of an outreach mathematician. *Teaching Mathematics and its Applications*, *27*(1), 38-47.
[22] Yan, Y., Jin, D., Li, Y., Zhao, H. y Li, X. (2011). Application of Simple Examples in Experiment Teaching about Complex Function and Integral Transform. In *Information Computing and Applications*, pp. 364-371. Springer Berlin Heidelberg.

complejos, variable compleja y funciones de variable compleja. Estas investigaciones permiten a la autora establecer un marco de referencia en el desarrollo de su trabajo; dichas investigaciones se centran en primera instancia a la formación de conceptos; entre ellos Rubinstein (1967) da importancia a los sistemas de representación y el uso de ejemplos y los no ejemplos, situación a la que D’ Amore (2001) establece que no sólo a través de múltiples representaciones se logra el aprendizaje de un concepto, sino que además se necesita de la lógica; de igual manera Falk (2015), determina la importancia del proceso de construcción del significado del concepto y de los problemas retadores.

Otros se centran en la formación de conceptos de diferentes tópicos matemáticos entre ellos, Velázquez, y otros (2004), González (2005); de otra parte investigaciones como las de Schoenfeld (1992), Rodríguez, Sigarreta y Ruesga (2006), permiten determinar la importancia de la resolución de problemas como eje fundamental de las matemáticas. En esa misma dirección Morales, y otros (2014), exponen que la actividad matemática se centra en la resolución de problemas, tomando los aportes del enfoque histórico-cultural, desarrollados dentro de la teoría de la actividad

En adición, autores como Ángel, Polola, Fernández y Bortolotto (2004), Mena, Rojas y Vindas (2011), Bueno, Mora, Álvarez y Nardín (2012), Vilanova, y otros (2001) y Santiesteban y Rodríguez (2004) establecen métodos de trabajo en el aula, a través de unidades didácticas o sistemas de actividades que según exponen, permiten facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje haciendo uso de la resolución de problemas para la formación de conceptos. Para ellos la resolución de problemas es un proceso transversal que proporciona de contexto a los conceptos, con el fin de favorecer el aprendizaje significativo de estos.

De otra parte investigaciones relacionadas con la enseñanza- aprendizaje del concepto de función de variable compleja, realizadas por Martínez y Antonio (2009), Aznar, y otros (2010), Distéfano, Aznar, Pochulu (2012), Duke, y otros (2008) y Yan, y otros (2011), se enfocan en el significado de los conceptos, sus dificultades, solución de problemas y representaciones.

Cabe destacar que en la revisión de la literatura científica realizada, se carece de un modelo didáctico que permita la formación de conceptos de la función de variable compleja mediante la resolución de problemas; pero aportan en gran medida al planteamiento y puesta en marcha del modelo didáctico propuesto.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de la presente investigación se tienen en cuenta los siguientes elementos teóricos: fundamentos filosóficos, psicopedagógicos del proceso de enseñanza-aprendizaje de la formación de conceptos; fundamentos metodológicos sobre la formación de conceptos matemáticos; fundamentos metodológicos sobre la resolución de problemas y un acercamiento a las funciones de variable compleja.

2.1. Fundamentos teóricos del proceso de enseñanza- aprendizaje asociados a la formación de conceptos

En la conformación de la metodología a proponer, se establece como fundamento la filosofía dialéctica, según la cual, el ser humano, como ser social, puede modificar aspectos de su personalidad a lo largo de la vida, por lo tanto, los procesos de enseñanza - aprendizaje influyen en gran medida y de manera continua sobre el desarrollo integral del estudiante.

Otra corriente filosófica importante, por sus aportes prácticos, es la filosofía pragmática apoyada en lo fundamental en el instrumentalismo de Dewey y James determinada, como elemento positivo, por el establecimiento de bases conceptuales asociadas al logro de un determinado objetivo y, como elemento negativo, el no dar importancia al ser humano como ser social. De otra parte, la filosofía existencialista, de la que el principal representante es Jean-Paul Sartre, aporta esencialmente, que el ser humano no puede existir fuera de su propia comunicación, es decir los procesos metacognitivos son parte fundamental de la transformación y desarrollo de la personalidad del ser humano.

El racionalismo, cuyo representante más conocido es René Descartes, establece estrategias para la estructuración deductiva de los conceptos, e incorpora la duda metódica o contradicción sobre los conceptos como parte de su proceso de aprendizaje. En adición, Russell, Moore y Whitehead, en sus obras, *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead (1910) y en el *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein (1916) presentan desde su filosofía analítica, una amplia relación entre la teoría del conocimiento y las definiciones de los conceptos. Dicha filosofía, se basa en el estudio del lenguaje y el análisis lógico de los conceptos, estableciendo los fundamentos de los métodos deductivos e inductivos.

De manera general, las diferentes teorías sobre el proceso de formación de los conceptos, se pueden estructurar de la siguiente manera:

- Teoría regida por reglas. Según Bourne (1982), la adquisición de un concepto se puede aprender mediante el uso de reglas, haciendo uso de ejemplos positivos o negativos.
- Teoría basada en prototipos o patrones. Rosch (1978), sostienen que la adquisición de un concepto se determina con el uso de ejemplos que tengan similitud con uno conocido que ejemplifique el concepto.
- Teorías probabilísticas. Wattenmaker y otros (1986) establecen que en el aprendizaje de los conceptos las probabilidades forman parte importante. Para ellos, el sujeto aprende cuando se enfrenta a nuevos ejemplos, buscando sus características, sin tomarlo como definitivo, debido a que entre más rasgos hayan en la memoria, el ejemplo será más positivo.

Debido al carácter teórico-práctico de las actividades que se plantean, no es posible asumir de manera completa ninguna de las posiciones explicadas anteriormente.

Por lo antes planteado en la tesis, se asume desde la filosofía la concepción dialéctica entendiéndose como *"… teoría y técnica retórica de dialogar y discutir para descubrir la verdad mediante la exposición y confrontación de razonamientos y argumentaciones contrarios entre sí*"[23] o también es un "… *conjunto*

[23] Oxford dictionaries. (S.F). Dialéctica. En *Diccionario Oxford*. Recuperado de http://www.oxforddictionaries.com/es/definicion/espanol/dial%C3%A9ctica

de razonamientos y argumentaciones de un discurso o una discusión y modo de ordenarlos"[24].

La concepción dialéctica tiene sus propias leyes: la transición de la cantidad a la calidad y viceversa, y la negación de la negación. Esta última *"… es una ley muy general, y por ello mismo de efectos muy amplios e importantes, de desarrollo de la naturaleza, la historia y el pensamiento; una ley que,…, se manifiesta en las matemáticas,…"*[25]. Este método se puede utilizar en matemática para comprender y expresar objetos matemáticos, sus interrelaciones y su relación con fenómenos de la vida.

Desde el punto de vista psicopedagógico, se aduce como parte fundamental del desarrollo del modelo didáctico los aportes de la teoría de la actividad, asumiéndose como "… *la actividad sensitiva-perceptual mediante la cual el ser humano entra en contacto con el mundo circundante, experimentando su resistencia, en tanto se subordina a sus propiedades objetivas*"[26]. Adicional a ello se puede observar que estas teorías del aprendizaje abandonan todo planteamiento generado desde la posición histórica de la complejidad de los conceptos, donde un concepto no puede ser la unión de conceptos simples; en palabras de Falk (2015) *"… los conceptos relacionales, que no están en las cosas sino en la relación entre cosas no pueden ser exhibidos en forma simple por medio de ejemplos ni de no-ejemplos"*[27].

Sin embargo en la *teoría de acciones mentales*, se puede observar que el concepto no refleja todas las propiedades de un objeto, sino sus relaciones; pues las relaciones no son propiedades de un objeto ni de un concepto, siendo el concepto la base de la acción, debido a que el sujeto a través de una serie de acciones y operaciones fundamentadas en el concepto que tenga, actúa de alguna manera sobre el

---

[24] Oxford dictionaries. (S.F). Dialéctica. En *Diccionario Oxford*. Recuperado de http://www.oxforddictionaries.com/es/definicion/espanol/dial%C3%A9ctica

[25] Engels, F. (1878). La revolución de la ciencia de Eugenio Dühring ("Anti-Dühring") en Centro de Estudios Manuel Enrique. Chile. Tomado de http://www.archivochile.com/Ideas_Autores/engelsf/engelsde00003.pdf, recuperado el 15 de febrero de 2015, p. 131.

[26] Fernández, M. y Ricardo, I. (2011). Alternativa educativa para el fortalecimiento del sistema de valores del técnico medio en contabilidad del Centro Politécnico "Osvaldo Socarrás Martínez". *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, (28).

[27] Falk, M. (2015). "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015, p. 5.

objeto. “*De esta forma se eliminan las limitantes que el objeto presenta, haciendo que en la actividad entren no sólo los objetos ideales como las representaciones y los conceptos, sino también las operaciones que se hacen con y a partir de los conceptos*”[28]

Rubinstein (1967) plantea: “… *el concepto abstracto refleja lo universal, pero lo general no agota nunca lo singular y lo único, esto se refleja en la imagen*”[29], estas ideas conducen a la confirmación que en el proceso de pensar se pueden distinguir el pensamiento intuitivo – gráfico y el abstracto – teórico como dos formas fundamentales o aspectos de un pensamiento integrado. Luego el pensamiento gráfico (sustentado a través de las representaciones visuales) es una forma específica del pensamiento. Esclarecer estas ideas es muy importante pues ubica en su justo lugar esta forma del pensamiento y se constituye en un apoyo importante a aquellas corrientes didácticas que tienden a utilizar los enfoques gráficos en el proceso de elaboración conceptual.

Para el desarrollo de esta investigación y la implementación de la metodología se tuvo en cuenta los aportes de la concepción dialéctica, debido a la importancia que tiene la práctica humana en la adquisición de conocimientos, permitiéndole interactuar con su realidad y convirtiéndola en objeto de conocimiento. Este enfoque, aporta en la medida en que reconoce que el conocimiento se genera en la actividad práctica a partir de la acción, la cual no se genera de manera individual, sino en la relación con la sociedad, donde juega un papel importante los conocimientos culturales.

Uno de los mayores aportes a la investigación se centra en el *enfoque histórico-cultural* de Vygotsky (1995), fundamentada en la *zona de desarrollo próximo*. Vygotsky, diferencia entre el *nivel de desarrollo real* o *zona de desarrollo actual*, determinada por el conjunto de actividades que el sujeto puede hacer por sí mismo, sin recurrir más que a sus conocimientos previos, y sin la ayuda de alguien que sepa más

---

[28] Leontiev, A. (2005). The Genesis of Activity. *Journal of Russian and East European Psychology. 43,* (4), p. 63.
[29] Rubinstein, S. (1967). *Principios de Psicología General.* Edición Revolucionaria. La Habana.

en relación al problema o tema; con el *nivel de desarrollo potencial* o *zona de desarrollo potencial,* está determinado por el nivel de conocimientos que el sujeto podría alcanzar al interactuar con los medios de instrucción de la sociedad o la ayuda de otras personas versadas en el tema.

De esta manera Vygotsky, define la *zona de desarrollo próximo* (ZDP), como la zona entre el nivel de desarrollo real o actual, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la solución de problemas bajo la guía de otro sujeto que conozca sobre el tema.

La importancia de la ZDP, en el desarrollo de la investigación, se fundamenta en la significatividad que le da a los conocimientos ya existentes y en lo que el sujeto puede aprender, y que Vygotsky relacionó estrechamente con su ley de la doble formación de las funciones psicológicas (Vygotsky; 1988), según la cual toda función psicológica en la conciencia del sujeto aparece dos veces, primero en el plano social o plano interpsicológico, y luego en el plano individual o plano intrapsicológico. Es decir, la atención, la memoria y la formulación de conceptos, surgen primero en un ámbito social o interpsicológico para después surgir gradualmente en un ámbito personal o individual.

Teniendo en cuenta el enfoque histórico cultural de Vygotsky y su ZDP, como eje fundamental en el desarrollo de los conceptos, debido a que a través de la interacción de los individuos, es posible pasar de procesos psicológicos elementales (PSE) a procesos psicológicos superiores (PSS). Un ejemplo de ello es cuando un sujeto se enfrenta a un problema matemático, no siempre se desarrolla de manera individual, sino que también, es parte de la actividad social mediadora que se desprende de las tareas sociales de un grupo.

Desde la perspectiva de Vygotsky, el desarrollo del proceso que el sujeto ejerce sobre los objetos de conocimiento, está enmarcado por la teoría de la actividad de Leontiev, y más allá por la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de Galperin (1956). Este último desarrolla un proceso de instrumentación de la teoría de Vygotsky, donde establece una secuencia de etapas que se concatenan para la asimilación del conocimiento, proceso que se desarrolla en el sujeto como consecuencia de sus acciones, y que está directamente relacionado con su experiencia y su entorno social.

La teoría de la actividad aplicada al proceso de enseñanza-aprendizaje, establece que el conocimiento es el resultado de la actividad que el sujeto determina sobre los objetos. "*Saber siempre significa saber realizar una u otra actividad o las acciones realizadas con ella*"[30]. Eso lleva a considerar que, cuando el sujeto se acerca a los objetos de conocimiento, lo hace mediante las estructuras mentales que ha adquirido en su desempeño, su experiencia previa y social. No obstante, éstas no bastan para asimilar el conocimiento necesario que permita determinar al objeto o resolver un problema, se necesita, además, que el sujeto actúe sobre los objetos, mediante las herramientas o signos socioculturales.

Cuando los estudiantes se enfrentan a los objetos de conocimiento impuestos por el profesor, o la realidad social, fundamentan su análisis en la acción que sobre los objetos determinan. El término acción no se refiere necesariamente a algo físico, la acción puede ser mental, es decir, sobre una ecuación, una palabra, una gráfica de una función, entre otras.

La acción como unidad de análisis forma parte del sujeto y precede al conocimiento. Al respecto Tallizina (2000) establece que el proceso de asimilación del conocimiento o de internalización del conocimiento se entiende: "*… como el proceso mediante el cual el sujeto, a través de sus acciones, pasa de los elementos de la experiencia social a la experiencia individual*"[31]. Es decir, si los elementos de la experiencia social pasan a ser parte de la experiencia individual, entonces las acciones que el sujeto ejerce sobre los objetos están en su forma externa o materializada y pasan, mediante un proceso

[30] Talizina, N. y Karpov, Y. (2000). *Psicología pedagógica.* México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí. p. 21.
[31] Talizina, N. y Karpov, Y. (2000). *Psicología pedagógica.* México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí. p. 32.

por etapas, a la forma interna o psicológica; a este proceso Galperin (1992) lo denominó proceso de interiorización.

Desde luego, las acciones que ejerce el sujeto determinan sobre el objeto de conocimiento un sistema de operaciones que le ayudan a realizar su acción. Estas operaciones constituyen la búsqueda y reconocimiento de las relaciones, elecciones, similitudes o categorías entre los distintos elementos que constituyen un objeto.

La acción y la operación son conceptos relativos, es decir, la acción se puede constituir en una operación durante la ejecución de otra acción y, recíprocamente, una operación se puede constituir en una acción cuando esta determina la unidad de análisis. Cada una de estas acciones constituye una unidad fundamental de análisis que, sin embargo, puede pensarse como constituida de otras, es decir, cada parte de la acción se puede convertir en una acción independiente (Tallizina, 2000).

De lo anterior, se puede aseverar que el sistema de acciones, que cambia la forma de la acción del sujeto; comienza con un sistema de acciones, que se fundamenta en los conocimientos previos, el grado de abstracción y la experiencia social que el sujeto tiene sobre el objeto de conocimiento. Luego, a partir de más acciones (generadas por él y que transitan por un conjunto de etapas), el sujeto trasciende a otra forma de la acción, que le da la posibilidad de alcanzar el objetivo que determina la asimilación del conocimiento y sus acciones.

Por lo tanto, en el sistema de actividades que se proponen en esta investigación, se establecen procesos de dosificación de las actividades cognitivas para alcanzar el objetivo de la enseñanza mediante una adecuada orientación de la acción. En este proceso se le proporciona al estudiante elementos necesarios, información, tareas a realizar, objetivos, entre otros, para que se lleve una eficiente acción y, con ello, se logre alcanzar los objetivos planteados; en palabras de Leontiev (1983)

"… la estructura específica de la actividad cognitiva es determinada por las necesidades y por los motivos, el objetivo, las condiciones y los medios que se tienen para alcanzar los objetivos y las acciones..."[32].

Los conceptos ya formados y desarrollados proporcionan, de maneras diferentes, la formación de conceptos nuevos. Los conceptos permiten estructurar adecuadamente y significativamente los conocimientos que se deben aprender, para ampliar, reorganizar, corregir, entre otras, las estructuras conceptuales que ya posee el estudiante.

Los conceptos, que ya existen ayudan a la resolución de problemas en los que las proposiciones y propiedades deben ser comprobadas o refutadas y en algunos casos reformuladas. Los conceptos ya construidos en una ciencia son imprescindibles para la formación de nuevos conceptos y para realizar los procesos de generalización y desarrollo de estos últimos.

Muchos conceptos matemáticos surgen como resultado del proceso de formación de conceptos de diferentes ciencias y constituyen modelos de conceptos aparentemente muy disímiles. Esta es una función muy importante de algunos conceptos matemáticos, que puede ser utilizada en los procesos de integración de conocimientos.

Una función cognitiva indirecta de los conceptos, es la de proporcionar relaciones con otros conceptos que puedan utilizarse como modelos de relaciones entre objetos de los cuales ellos son patrones. Entre los conceptos pueden existir determinadas relaciones, entre las cuales están las siguientes: concepto superior; concepto subordinado (Subconcepto) y conceptos colaterales.

2.2. Fundamentos metodológicos asociados a la formación de conceptos matemáticos

A partir de lo antes expuesto, se estudia el concepto como el reflejo mental generalizado de una clase

[32] Leóntiev, A. (1983). *Teoría psicológica de la actividad.* Selección de Obras de Psicología, 2, pp. 94-261.

de objetos, procesos o relaciones de la realidad (objetiva o subjetiva) sobre la base de sus características esenciales (necesarias y suficientes) e invariantes. Mientras que la definición de un concepto se debe entender como la expresión verbal o escrita del concepto. Así, se sintetiza que la matemática se fundamenta en los conceptos, relaciones y operaciones, queriendo decir que su enseñanza-aprendizaje se centra en el estudio de los conceptos de objeto, conceptos de relación y conceptos de operaciones, asociados esencialmente al pensamiento abstracto basado en conceptos, juicios y razonamientos.

Uno de los aspectos metodológicos más representativos de la teoría de Vygotsky y que está estrechamente ligado al proceso de la internalización de los conocimientos en el sujeto, es el concepto de ZDP; para ello hay que considerar, en primer lugar, el Nivel de Desarrollo Real o Zona de Desarrollo Actual en el sujeto, en segundo lugar, se debe considerar el Nivel de Desarrollo Potencial o Zona de Desarrollo Potencial. También se considera en la formación de conceptos la ley de la doble formación de las funciones sicológicas, la teoría de la actividad de Leontiev (1983) y la teoría de las acciones mentales de Galperin.

La relación Sujeto-Objeto (S-O), puede ser entendida de dos maneras complementarias. En la teoría de la actividad de Leontiev (1983), se establece la relación mediadora mediante Necesidad-Actividad-Necesidad (N-A-N). En este proceso la relación dialéctica Sujeto-Objeto, comienza mediante una necesidad en el sujeto, lo que conlleva a una actividad, lo que a su vez determina una nueva necesidad; eso lleva a establecer la continuidad en el proceso de la asimilación del conocimiento. En cambio, aunque en la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de Galperin, también se establece la relación dialéctica Sujeto-Objeto, mediante los signos y herramientas socioculturales, es mediante la relación N-A-N, que se entiende la asimilación del conocimiento; es decir, Galperin parte del supuesto de que es la actividad del sujeto la que establece una necesidad y, con ello, se llega, nuevamente, a otra actividad.

El proceso de asimilación en el sujeto comienza cuando éste actúa sobre los objetos de conocimiento, mediante un sistema acciones que, a su vez, es determinado por las fases básicas por donde trascurre la actividad. Según la teoría de la actividad las mismas son: (1).-Etapa de Orientación, (2).-Etapa de Ejecución (3).-Etapa de Control. En particular, la asimilación de un concepto (como actividad), según Galperin (1995), transita a lo largo de una sucesión de fases, que de forma general se pueden reconocer en cinco etapas, mediante las cuales, la acción se transforma de su forma material o materializada a su forma verbal interna. En esta teoría el proceso de asimilación del conocimiento, está determinado, por el cambio de las características básicas de la acción, la forma de la acción, el grado de generalización, el grado de despliegue, el grado de independencia y el grado de asimilación o domino. Nótese que las fases propuestas por Galperin están en relación directa con los elementos básicos de la Teoría de la Actividad.

Para Galperin (1995) la formación de conceptos se realiza en cinco etapas, las cuales son tenidas en cuenta en la formulación de las características de los problemas que están presentes en la etapa de integración de la metodología:

- Orientación. En esta fase juega un papel esencial la motivación hacia la actividad. Existen ciertas formas básicas de motivación. Una de ellas es plantearle al sujeto un conjunto de actividades asociadas con sus intereses cognitivos y su nivel de conocimiento.

  Luego, para una aproximación exitosa al proceso de asimilación, es necesario garantizar una planificación sustentada en la Base Orientadora de la Acción (BOA). Es en esta etapa que se debe determinar toda la información necesaria, para que el sujeto pueda realizar una acción óptima. En el caso del profesor, especializado en lograr un proceso de asimilación del conocimiento optimo, deberá presentar al estudiante, lo más detalladamente posible, el contendido del sistema de acciones y mostrarle un esquema que le indique los medios y las estrategias con las cuales se pueda alcanzar el objetivo.

- Material o materializada de la acción**.** Al inicio de la ejecución de la acción los estudiantes deben conocer los objetos involucrados en las actividades o temas en discusión. El manejo de los objetos no es precisamente manual, sino que puede ser mediante los símbolos o dibujos que los representan. En esta fase de ejecución de las acciones, los estudiantes pueden utilizar esquemas para determinar las características esenciales de los objetos involucrados en el tema.
- Perceptiva de la acción. En este momento el estudiante establece una imagen sensorial del objeto y de las acciones que determina sobre ellos, es una etapa intermedia entre la forma de la acción material o materializada y la forma interna verbal de la acción.
- Verbal Externa de la acción. En esta fase de la formación de las acciones y los conceptos, la acción gradualmente se va interiorizando, pasa de la forma perceptiva a la forma verbal externa. Esto comienza cuando las acciones del sujeto pasan del plano interpsicológico al plano intrapsicológico, es decir, cuando expresa sus acciones en voz alta, como hablando introspectivamente, pero luego su leguaje se vuelve interno e interioriza su acción.
- Verbal Interna de la acción. En esta etapa de la formación de los conceptos mediante las acciones mentales, se tiene que el sujeto ya interiorizó la acción, es en esta forma que las funciones psicológicas superiores de la conciencia se constituyen en un instrumento que actúa sobre los conceptos y determina una actividad que ya no es propia de la actividad física del

sujeto.

2.2.1. Niveles en la formación de conceptos

A partir de lo analizado en el subepígrafe anterior, se pone de manifiesto que los conceptos no se forman en el ser humano de manera inmediata, sino que, son el resultado de un proceso que puede estructurarse, para su estudio, en tres niveles: (1). Análisis-Abstracción, (2). Discriminación-Identificación y (3). Síntesis-Concreción. Estos son conocidos como los niveles de desarrollo de los conceptos y que, dependen directamente de la actividad, es decir, de las acciones que el sujeto realiza sobre los objetos, de su experiencia, nivel de abstracción y generalización.

En el primer nivel de formación de un concepto, Análisis-Abstracción, el sujeto analiza los grupos o conjuntos de objetos en función de sus propiedades comunes, es decir, busca las características o rasgos que están presentes en todos los objetos; luego determina cuales de esas características son esenciales, con lo cual, agrupa las propiedades de los objetos y, con ello, a los objetos mismos. De ello se deduce que el individuo, determina grupos hechos a base de un criterio subjetivo, que depende directamente de su experiencia y abstracción en relación a la situación de análisis. El sujeto al determinar grupos de objetos, forma conjuntos más complejos y elaborados, basándose en el análisis de las propiedades de los mismos.

No obstante, no siempre es posible analizar todos los elementos de un conjunto, bien porque no es posible su manipulación o porque constituyen una infinidad; por ello, el sujeto debe considerar las propiedades comunes y esenciales de un número reducido de elementos, y abstraer las propiedades del objeto, es decir, prescinde de las demás, quedándose con las características o propiedades esenciales. En este nivel se hace efectiva la clasificación de los objetos y se determina cuáles son sus propiedades esenciales, o sea, se abstraen.

Según Mazón y Fabelo (s.f) *"El contenido y la extensión del concepto, guardan una íntima relación: cuanto más amplio sea el contenido del concepto, más estrecha será su extensión y viceversa. Esta se denomina Ley de la Lógica Formal de Razón Inversa entre la extensión y el contenido del concepto"*[33]. Por su parte Gorski, Tavants, (1970, citado por Mazón y Fabelo, s.f) plantean que *"entre dos conceptos existe una relación de subordinación, cuando entre los contenidos y las extensiones de tales conceptos existe la siguiente dependencia: los caracteres esenciales del primer concepto, constituyen sólo una parte de los caracteres esenciales del segundo, el cual, posee además de dichos caracteres algunos otros; la extensión del segundo concepto, en cambio, cae por completo dentro del campo del primero como parte del mismo. Al concepto de mayor extensión se le llama concepto superior y el de extensión menor concepto subordinado"*[34]. Mediante un proceso de abstracción se determina el contenido del concepto, es decir, las características propiamente dichas que especifican al objeto. No obstante, estas características se pueden extender a una colección de objetos, esto es, lo que se entiende por extensión del concepto.

La operación de clasificación, permite al sujeto determinar los conceptos colaterales que son conceptos, que tienen algunas características del concepto X, pero no todas. Con ello, se tiene que, el concepto Y es colateral del concepto X, si Y está conectado mediante relaciones de pertenencias, es decir, si algunas propiedades de los elementos de Y, son parte de las propiedades que definen a los elementos de X.

Un concepto subordinado, establece nuevamente una jerarquía, que la misma clasificación de los objetos determina, el concepto subordinado Y, subyace a la clasificación que determina la clase de los

---

[33] Ávila, A. (s.f). Una propuesta para la asimilación de conceptos matemáticos a través del Aprendizaje Significativo. Recuperado el 20 de febrero de 2015 de la URL: http://casanchi.com/did/asimicon01.pdf. p.1.
[34] Ávila, A. (s.f). Una propuesta para la asimilación de conceptos matemáticos a través del Aprendizaje Significativo. Recuperado el 20 de febrero de 2015 de la URL: http://casanchi.com/did/asimicon01.pdf. p.2.

objetos a los que se refiere el concepto X. De forma similar, se puede pensar, a su vez, que el concepto X es subordinado de otro Z, y por ello se dice que Z es un concepto superior a X.

En el segundo nivel, Identificación-Discriminación, el sujeto determina cuáles de las propiedades, y cuáles no, que ha establecido en el proceso de análisis-abstracción (nivel anterior), pueden extenderse al resto de los elementos de un conjunto, es decir, identifica o discrimina las propiedades a la totalidad de los elementos del conjunto. Con ello, el sujeto determina una interpolación por medio de la cual, establece las propiedades que son comunes en un número reducido de objetos a la totalidad de los elementos del conjunto. Es en este nivel que, el lenguaje retrospectivo, desarrollado por el sujeto, determina la actividad mediadora, entre el pensamiento y el proceso de formación del concepto, por medio del cual, se deducen e inducen las propiedades fundamentales a la totalidad de los elementos del conjunto.

En el tercer nivel de la formación de los conceptos, Síntesis-Concreción, el sujeto ha determinado las características esenciales, la estructura o el sistema de la totalidad de los elementos que constituyen un conjunto, llevando todo ello a una vinculación sujeto-objeto que está determinada, nuevamente, por las herramientas y los signos socioculturales. Entonces, es en éste último nivel de la formación de los conceptos, que el sujeto sintetiza el proceso y puede construir una definición, utilizando para ello el leguaje, hablado o escrito, que le da coherencia a las propiedades fundamentales de los elementos de un conjunto. Si no fuera así, el sujeto, tendría que construir todos los conceptos cuando los necesite, mientras que, con las definiciones el proceso se reduce a una expresión verbal o escrita que puede ser utilizada en la construcción de nuevos conceptos.

Este proceso de formación de los conceptos, depende directamente de las acciones del sujeto, de su actividad, ya sea física o intelectual, y transita por una serie de formas que determinan su generalización y abstracción y se transforma pasando de una forma externa a una forma interna en el sujeto, es decir, de una forma material a una interpsicológica o interiorizada. Durante la enseñanza-aprendizaje es necesario, para implementar las actividades que estas conduzcan a los objetivos, donde se especifique el objeto de estudio. Es mediante el objeto de estudio y el nivel de abstracción y generalización de los estudiantes, que se determina la vía de formación del concepto, que puede ser mediante un tratamiento inductivo o deductivo.

Para la vía inductiva, en la formación de los conceptos, se establece la siguiente metodología[35]: (a). Mediante la actividad mediadora del sujeto se parte de casos o ejemplos particulares reconocidos de entre una variedad de objetos, es decir, de lo particular a lo general. (b). Se determinan clases de equivalencia mediante las características comunes de los objetos observados. (c). El sujeto identifica el concepto y establece la relación con la totalidad de los objetos para llegar al concepto y a su definición.

Para la vía deductiva en la formación de los conceptos, se establecen las siguientes etapas: (a). Se parte de la definición del concepto o de una generalidad de objetos. (b). Se establece el contenido y la extensión del concepto. (c). Se establece la relación explicita de la definición con las características esenciales del objeto. Esto lleva al sujeto de lo general a lo particular y a la determinación del concepto u objeto.

Sin embargo en el proceso de integración de la metodología propuesta a partir del modelo didáctico, se tienen en cuenta no sólo la vía inductiva y deductiva, sino además una vía mixta, la cual permite que mediante el análisis del tipo de objeto, su evolución histórica, la relación con otros conceptos, entre otras características, sea una alternativa de introducir el objeto.

Un elemento a destacar dentro de la teoría de Galperin (1956), es plantear los elementos básicos que

[35] Ballester y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, tomo 1. La Habana. Pueblo y Educación.

deben tener las actividades propuestas para lograr el objetivo. Primero, el grado de generalización, que requiere el planteamiento de actividades en función de la habilidad a desarrollar y teniendo en cuenta las condiciones en donde se va a desarrollar. Segundo, el grado de desarrollo, permite la comprensión de la lógica de la acción, y el porqué de la misma.

Según López y Pérez (2009) *"El estudiante es capaz de explicar verbalmente, y cuando él explica a otro, garantiza que la acción sea consciente"*[36]. Tercero, el grado de independencia, en un inicio la acción avanza de la etapa compartida, es decir, que se realiza con la ayuda del que enseña, hasta que llega a ser ejecutada de forma independiente (sustentado en la ZDP). Galperin (1956), propone distintos tipos de orientación, que dependen del *"… grado de generalidad, despliegue e independencia"*[37] de la actividad a desarrollar y de las acciones a ejecutar.

En este trabajo se considera lo planteado por Mederos, Sigarreta, Kakes, y Mederos, (2014), que se está en presencia de una primera aproximación al concepto, cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Se ha determinado una clase *C* de propiedades esenciales (Contenido del concepto) y que caracterizan a los objetos asociados con el concepto.
2. Se han construido objetos que satisfacen los rasgos esenciales y objetos que no satisfacen estos rasgos.
3. Se han agrupado en otra clase *E (*Extensión del concepto), todos los objetos que satisfacen los rasgos esenciales.

---

[36] López, V. y Pérez, A. (2009). Aspectos fundamentales de la teoría de formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos de P. Ya. Galperin. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/index/assoc/HASH2f88.dir/doc.pdf, p. 5.

[37] López, V. y Pérez, A. (2009). Aspectos fundamentales de la teoría de formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos de P. Ya. Galperin. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/index/assoc/HASH2f88.dir/doc.pdf, p. 5.

4. Se utiliza un símbolo lingüístico para designar al par (E, C), o sea, para designar al concepto; y se realiza una definición del mismo.

Cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un concepto matemático se parte de una definición (vía deductiva para la formación del concepto), es necesario que se diseñen actividades para que los estudiantes comprendan, que el concepto consta de contenido y de extensión; y que además, la operación definición establece una relación de subordinación del concepto definido con el concepto de partida. Cuando se ha formado un concepto, solamente se conoce un conjunto finito de los objetos de su extensión, mediante una de sus representaciones, y muy pocas propiedades del contenido. Por lo tanto, al realizar el proceso de formación, se conoce cuantitativamente muy poco; sin embargo, cualitativamente, el resultado alcanzado es significativo.

Una segunda aproximación, más completa a un determinado concepto, se alcanza entre otras, cuando el profesor trabaja en las direcciones siguientes:

- La ampliación cuantitativa y cualitativa de la colección de objetos conocidos de la extensión.
- El aumento del número de representaciones de la clase con que se materializan los objetos de la extensión.
- La deducción de nuevas propiedades de los objetos de la extensión, lo cual se logra en el nivel abstracto utilizando el aparato lógico deductivo de la matemática.
- La deducción de otras propiedades para sub-colecciones de objetos de las extensiones de conceptos resultantes de clasificaciones y restricciones del concepto.
- La determinación de lo que hay de semejante y diferente en los objetos de las extensiones de los conceptos resultantes de las clasificaciones realizadas.

- El establecimiento de relaciones significativas con otros conceptos; en particular, mediante diferentes tipos de mapas.
- La realización de cadenas de clasificaciones, generalizaciones y restricciones del concepto.

Para lograr el objetivo anterior dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en ocasiones, los profesores dan prioridad, en la mayoría de los casos, a la determinación de nuevas propiedades de los objetos de la extensión, mediante el establecimiento de condiciones necesarias y suficientes, necesarias o suficientes o, no se trabaja en otras direcciones.

2.3. Fundamentos metodológicos sobre la resolución de problemas

Es perentorio para este trabajo, una definición que aclare el significado de la expresión problema, puesto que a partir de su uso generalizado es cuando comienzan a surgir contradicciones acerca de lo que diferentes autores quieren significar cuando la utilizan. El significado del término problema, de manera común es usado para exponer una situación, de la cual se busca inferir o determinar un resultado a partir de ciertos datos.

Pero, cuando se habla de problemas, para los dedicados a la enseñanza de la matemática, el significado se extiende; por tanto, si se pretende realizar un análisis profundo de la definición de problema, hay que investigar la dimensión psicopedagógica y particularizar en el punto de vista de la Didáctica de la Matemática (Sigarreta, 2012). Se hará el análisis basado en las palabras de Hadamard (1945), cuando expresó: *"... este asunto envuelve dos disciplinas, Psicología y Matemática, y requerirá ser tratada adecuadamente en ese orden, por ambos, tanto por el psicólogo como por el matemático. Por la falta de esta composición, el asunto ha sido investigado por los matemáticos por un lado y por los* *psicólogos por el otro..."*[38]

Dentro de la metodología de la matemática, existen diferentes acepciones con respecto a lo que es un problema. Algunas investigaciones muestran que los profesores relacionan el concepto de problema con los de ejercicio y tarea, al igual que confunden el problema en la enseñanza con el significado general que se le da al mismo.

La definición de problema ha sido abordada por diferentes investigadores. En este campo se destacan: Pólya (1965), Kilpatrick (1967), Martínez (1981), Majmutov (1983), Rohn (1984), Kantowski (1981), Schoenfeld (1985,1992); Mayer (1986), Krulik y Rudnik (1987); Rico (1988), Fridman (1991), Sánchez (1995), Garret (1995), English y Halford (1995), Labarrere (1996), Campistrous y Rizo (1996), Álvarez (1996), Puig (1996), Cobo y Fortuny (2000), Socas (2001); Koichu, Berman y Moore (2003), Lesh y Harel (2003), Lester y Kehle (2003), Cruz (2006), Lesh y de Zawojewski (2007), y Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012).

Kantowski (1981) plantea que un problema "*... es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución*"[39]. Por su parte Palacios y Zambrano (1993) aducen que: "*El problema puede ser definido como cualquier situación, que produce por un lado un cierto grado de incertidumbre y, por otro lado, una conducta tendente a la búsqueda de su solución*"[40].

Campistrous y Rizo (1996) definen problema como "… *toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. La vía de pasar de la situación o planteamiento inicial*

---

[38] Hadamard, J. (1945). The mathematician's mind: The psychology of invention in the mathematical field. Princeton University Press: New Jersey, p.1.
[39] Kantowski, M. (1981). Problem solving. *Mathematics education research: Implications for the*, *80*, 111-126, p. 111.
[40] Palacios, C. y Zambrano, E. (1993). Aprender y enseñar ciencias: una relación a tener en cuenta. *Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe. Bol*, *31*, p. 52.

a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer realizar la transformación"[41].

Aunque en la definición dada por Palacios y Zambrano (1993) y la de Campistrous y Rizo (1996), se observa una cierta relación en el significado que se le atribuye a los términos utilizados, se entiende que la de Campistrous y Rizo (1996) es más completa, pues explícita de una manera directa los elementos esenciales de la definición.

En este mismo sentido, Labarrere (1996), señala que "... *un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre objetos que no son accesibles de forma directa o indirectamente a la persona; ... es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar*"[42].

Para Pólya (1981) *"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata"[43]. Por su parte* Krulik y Rudnik (1987) establecen que un problema es *"… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"[44].*

De Guzmán (2007) ofrecen una definición, que es la que se asume en esta tesis, la cual posee elementos comunes a la dada por Pólya (1965), pues establece que se "… *tiene un verdadero problema*

---

[41] Campistrous, L. y Rizo. C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Proyecto TEDI. La Habana: Pueblo y Educación. p. 9.

[42] Labarrere, F. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* La Habana: Pueblo y Educación. p. 6.

[43] Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Ed. Trillas. p. 28.

[44] Krulik, S. y Rudnik, J. (1980). Problem solving: a handbook for teachers. Boston: Allyn and Bacon . p. 4.

cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra"[45].

Al analizar estas últimas definiciones se encuentran elementos que son de suma importancia para hacer una presentación diáfana de problema escolar, lo que permite un acceso lingüístico–conceptual de mayor precisión en la elaboración de los problemas y que los profesores reconozcan cuándo están realmente en presencia de ellos. A manera de conclusión, puede decirse que aunque existe una gran diversidad de criterios acerca de los problemas, los autores antes mencionados no se contradicen; en este sentido según Sigarreta (2012), los rasgos fundamentales de cada uno de ellos establecen:

- La existencia de condiciones iniciales o finales que exprese la necesidad de transformación.
- La vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida o, al menos, no ha de ser inmediatamente accesible.
- Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, teniendo presente que lo que puede ser un problema para uno puede no serlo para otro.
- Que el estudiante disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades y motivación.

A continuación se realiza un estudio desde las posiciones asumidas por los diferentes autores a la hora de establecer las clasificaciones de los problemas matemáticos; para ello, se desarrolla una clasificación sobre la base de la formación del tratamiento de los conceptos matemáticos. Todos los autores parecen estar de acuerdo en que un elemento fundamental para dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas, es que tanto el profesor como el estudiante

[45] De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de educación, (43),* pp.19-58.

sepan en presencia de qué clase de problemas se encuentran; en esta dirección se tienen algunas clasificaciones.

Evidentemente, todos los esfuerzos están dirigidos al trabajo con los problemas matemáticos que se les proponen a los estudiantes en el ámbito escolar, especialmente inmersos en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Es claro que la clasificación más generalizada y conocida por los profesores de matemática en la actualidad, es la clasificación por área del conocimiento: problemas de matemática, física, química, etcétera, y otros que no están dentro de ningún área, conocidos como problemas de razonamiento lógico.

Está en boga, clasificar los problemas dentro de tres grandes campos, por ejemplo los analizados por Palacios y Zambrano (1993):

- Según el campo del conocimiento implicado:

Está dado por la diferencia entre los problemas que se plantean en la enseñanza de la ciencia y aquellos que tienen lugar en la vida cotidiana. En el primer caso lo importante no es la obtención de la solución, sino más bien el proceso para llegar a ellas. En cambio, ocurre lo contrario en los problemas cotidianos.

- Según el tipo de tarea:

Se pueden dividir en problemas cualitativos y problemas cuantitativos. Se entiende por problemas cualitativos, aquellos que en su resolución no se precisa recurrir a determinaciones numéricas, y se resuelven de forma verbal/escrita, normalmente se ciñen a la interpretación científica de fenómenos reales. Por el contrario, los problemas cuantitativos, necesitan de cálculos numéricos, ecuaciones y de los datos en el enunciado.

También Falk (2015) clasifica los problemas en *"… novedosos, no rutinarios y retadores…"*[46]. Esta clasificación es la que se asume en el desarrollo de la investigación, pues es el enfoque de la Universidad Antonio Nariño en las Olimpiadas Colombianas de Matemática y se tiene en cuenta para las actividades propuestas.

La importancia de la resolución de problemas se establece en el trabajo de Blanco (1991), debido a que ésta se genera en cuatro direcciones: como objetivo de aprendizaje (saber resolver problemas), como actividad docente (clases dedicadas a la solución de problemas), como instrumento de aprendizaje (aprender resolviendo problemas) y como elemento evaluador (los problemas en los exámenes).

En la literatura analizada no se ha logrado establecer algún tipo de clasificación de problemas en relación con la formación de conceptos matemáticos, sin embargo en los trabajos de Brousseau (1986), Labarrere (1987), Ballester (1992), De Guzman (1991, 2001), Lester y Kehle (2003), Cruz (2006), Sigarreta (2006), Sriraman y English (2010), Falk (2015), entre otros, se determinan algunas pautas para el tratamiento de problemas en la formación de algunos conceptos.

Dados los aportes de los autores anteriores, se propone en la tesis una clasificación que determina un sistema de problemas para la formación de conceptos, asumiendo como sistema "*un conjunto de elementos cuya interacción produce la aparición de nuevas cualidades integrativas, no inherentes a los componentes aislados que constituyen el mismo*"[47].

Los autores antes citados también aportan definiciones sobre resolución de problemas. En la tesis se asume lo expresado por Pólya (1965), el cual asevera que: "… *resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un*

[46] Falk, M. (2015). "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015, p. 15.
[47] Afanasiev, V. (1979*). El Enfoque sistémico Aplicado al Conocimiento social.* Ciencias Sociales, 35 (1), 31-47, p.10.

obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados[48]".

Schoenfeld, citado por Sriraman y English (2010), plantea que en la resolución de problemas en el aula es necesario:

- Desarrollar la habilidad para utilizar estrategias que se vinculen con el contexto.
- Fomentar en los estudiantes estrategias meta-cognitivas para que se apropien del contenido matemático.
- Mejorar las creencias que tienen los estudiantes acerca de su entorno.

Estos criterios son compartidos y se consideran en el desarrollo de los problemas que conforman el sistema de actividades.

De igual manera, para resolver problemas, se requiere trabajar mucho con éstos, estudiarlos a profundidad y analizar las distintas posibilidades que permiten enfrentar su solución. En la actualidad se han desarrollado diferentes metodologías para analizar la resolución de problemas, una de éstas es la que comprende la resolución de problemas como un proceso; dentro de esta posición, aparecen los trabajos de Lester (1982) en los que se expresa que es "… *el proceso de coordinación de la experiencia previa, conocimientos e intuición, y un intento de determinar un método para resolver una situación cuyo resultado nos es desconocido*."[49]

Por su parte Labarrere (1988) plantea que: *"La resolución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental. Este complejo proceso de trabajo mental se materializa en el análisis de la situación*

[48] Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Ciudad México: Editorial Trillas.
[49] Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why y how*. Dale Seymour Publications, p. 58.

ante la cual uno se halla: en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades; en la previsión y puesta en práctica de procedimientos de solución"[50].

Para la puesta en práctica del procedimiento de solución se necesitan estrategias de resolución de problemas. Varios son los investigadores que aportan diferentes estrategias, entre los que se destacan: Dewey (1933), Pólya (1965), Uprichard, Phillips y Soriano (1984), Schoenfeld (1985), Mayer (1986), Maza (1991), Fridman (1991), Mayer (1991), De Guzmán (1991), Campistrous y Rizo (1996), Sriraman y Engish (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros. En esta tesis se asume la estrategia propuesta por Pólya (1965), el cual tiene las siguientes fases:

- Orientación hacia el problema.
- Trabajo en el problema.
- Solución del problema.
- Evaluación de la solución y de la vía.

En aras de lograr resultados en el aula se realiza un análisis de cada una de estas fases según Ballester y otros (1992), donde son valoradas y se explicitan ciertas preguntas heurísticas, para guiar el trabajo de los estudiantes durante la resolución de problemas:

- Orientación hacia el problema: es básica y fundamental en la resolución del problema, se propicia *"… la búsqueda del problema o motivación, el planteamiento del problema y la comprensión del problema"*[51]. En aras de guiar el trabajo del estudiante, de ser necesario el docente puede

[50] Labarrere, A. (1988). La solución y la formulación de problemas como forma de contribuir al desarrollo de habilidades y al pensamiento matemático. *Material mimeografiado. Ciudad de la Habana, Cuba, p. 86.*
[51] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana: Pueblo y educación. p. 411.

realizarle las siguientes preguntas heurísticas, con el objetivo de lograr comprensión del problema planteado: ¿qué se desea buscar, o sea cuál es la incógnita?, ¿qué datos les ofrece el problema?, ¿qué condiciones brinda el problema?, entre otras.

- Trabajo en el problema: en la fase se enfatiza "… la precisión del problema, el análisis del problema y la búsqueda de la solución"[52]. Se le propone al docente realizar preguntas heurísticas como: ¿es parecido o semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿es de su conocimiento alguna propiedad o teorema que le pueda ser útil?, ¿consideras que necesitas introducir algún elemento auxiliar?, entre otras.
- Solución del problema: se precisa "… la realización del plan de solución y la representación de la solución"[53]. Para lograr el desarrollo de esta fase de forma independiente en los estudiantes, el docente de ser necesario les formula las siguientes preguntas heurísticas: ¿es posible comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿le es factible verificar claramente que el paso es correcto?, entre otras.
- Evaluación de la solución y de la vía: se realiza la comprobación del problema, en su enunciado. En esta fase el docente puede hacer las siguientes preguntas heurísticas: ¿es factible verificar el resultado?, ¿es posible lograr el resultado de otra manera? ¿es posible utilizar el resultado o el método en algún otro problema?

---

[52] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 413 y 414.
[53] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 420.

2.3.1. Problemas reto o retadores

Pérez (2004) plantea que los problemas retadores *"… son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento*"[54]. También aduce que "l*os problemas retadores exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior*"[55]. La autora de esta investigación comparte estos criterios sobre problemas retadores que son tenidos en cuenta en el sistema de actividades sustentado a partir de la metodología, como una categoría del modelo.

Por otra parte los problemas retadores abren las puertas "… *al estudiante para razonar, investigar, conjeturar, comprobar y demostrar,…*"[56] Estos problemas abarcan diferentes temáticas de la matemática escolar y universitaria, de tal forma que su uso en el proceso de enseñanza aprendizaje de la teoría de funciones de variable compleja enriquecen sus conceptos.

Los fines de la resolución de problemas, también constituyen el propósito de los problemas retadores. Los problemas reto se dirigen a:

- *"Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*

---

[54] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[55] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[56] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- *Darle una buena base matemática".*[57]

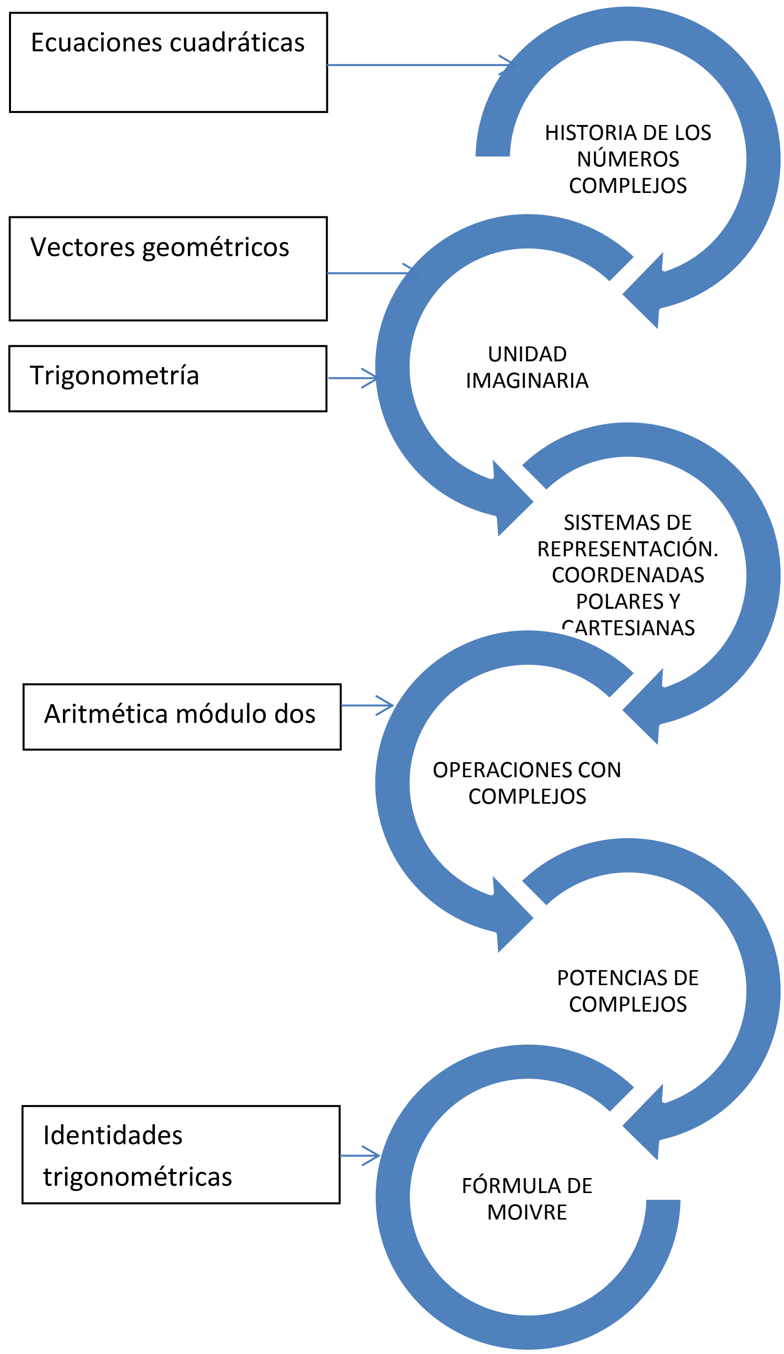
El pensamiento en los estudiantes se desarrolla con los problemas retadores y viceversa, y éstos a la vez son una fuente de motivación para el trabajo en el aula.

De otra parte, la presente investigación establece un modelo didáctico que está dividido en acciones, de tal manera que se analiza el proceso de resolución de problemas de la manera más objetiva y exhaustiva posible, y su imbricación con el proceso de formación del concepto de función de variable compleja.

2.4. Aproximación teórica-conceptual a las funciones de variable compleja

El propósito fundamental de este epígrafe, es realizar una aproximación a los temas que se abordan en esta investigación con el objetivo de obtener un acercamiento a la formación de conceptos relacionados con de la teoría de funciones de variable compleja (ver Figura 1).

[57] Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de noviembre de 2015 de la URL: http:www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/


Ecuaciones cuadráticas
HISTORIA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS
Vectores geométricos
Trigonometría
UNIDAD IMAGINARIA
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN. COORDENADAS POLARES Y CARTESIANAS
Aritmética módulo dos
OPERACIONES CON COMPLEJOS
POTENCIAS DE COMPLEJOS
Identidades trigonométricas
FÓRMULA DE MOIVRE

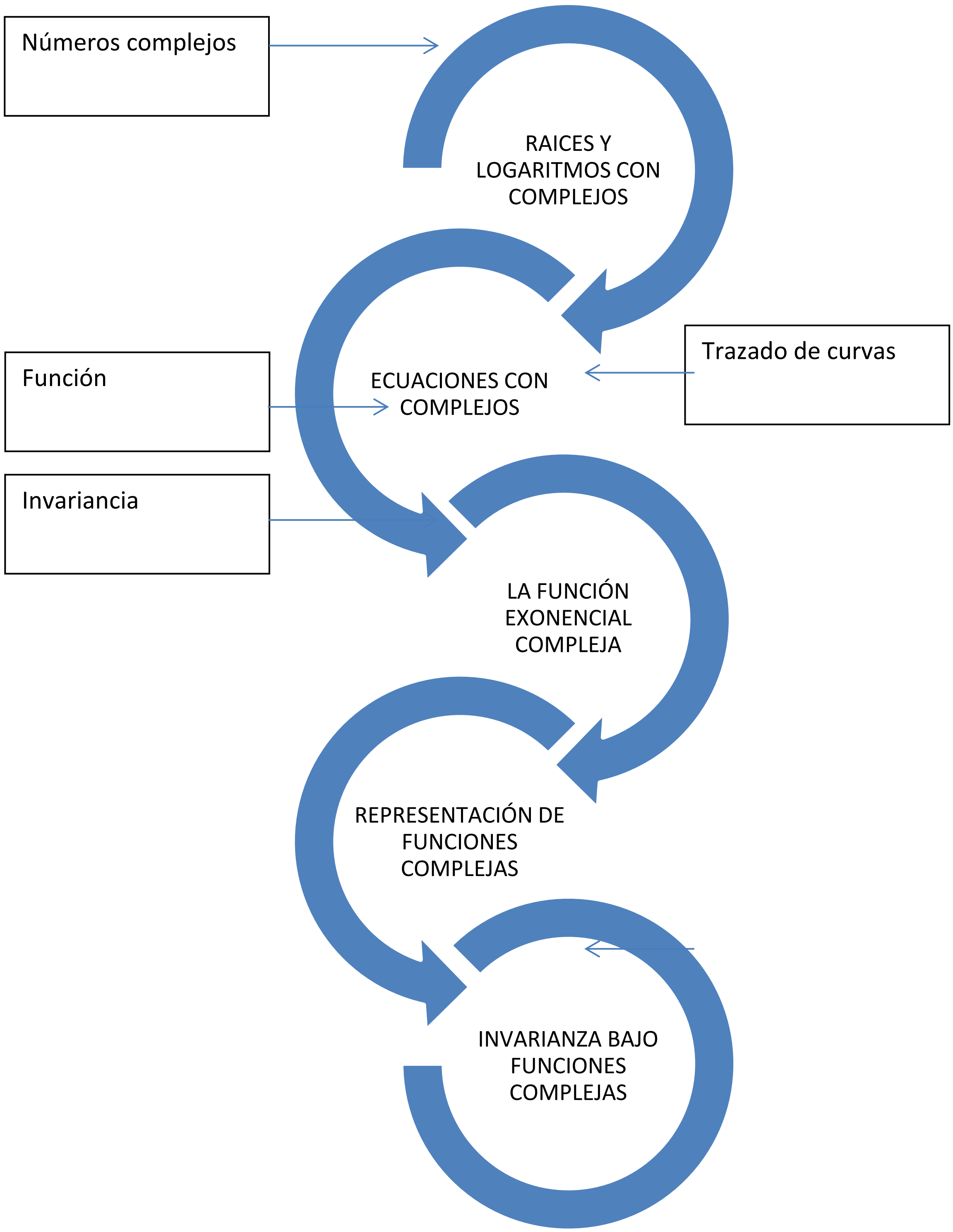


Figura 1. Conceptos asociados al concepto de función de variable compleja.

Conclusiones del Capítulo 2

El marco teórico de la tesis está dado por los fundamentos filosóficos que la concepción dialéctica ofrece, el enfoque histórico-cultural de Vygotsky (1995) en sus fundamentos psicopedagógicos. Metodológicamente por la teoría de la actividad de Leontiev (1983) y la formación de conceptos de Galperin (1995); las cuales permiten enriquecer y determinar la estructura y puesta en escena del modelo en la práctica. Cabe destacar, que en cuanto a la resolución de problemas, se toma como base el trabajo realizado por Pólya (1965) y De Guzman (2001), con quienes la autora concuerda en la definición de problema, categorización y resolución. Los fundamentos matemáticos tienen en cuenta no sólo el concepto y definición de función de variable compleja sino además, los conceptos subordinados, colaterales y superiores, subyacentes a este.

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se asume el paradigma de investigación que sustenta la tesis, además es donde se precisa la población y la muestra. También se valoran los diferentes métodos a nivel teórico y empírico (Instrumentos y técnicas aplicadas), así como los métodos estadísticos, utilizados en el análisis de los resultados.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

Este estudio se ubica en el paradigma de investigación cualitativo-interpretativo. Una de las características de este enfoque es el estudio de casos, por considerarlo una alternativa metodológica que propende por la observación, interpretación y análisis de escenarios culturales naturales, para su comprensión y posterior transformación (De Almeida, 2004).

Para Cohen y Marion (Citado por De Almeida, 2004), "... *el investigador de estudio de casos observa las características de una unidad individual (sea ésta un individuo, grupo de individuos, una institución o comunidad*)"[58]. El propósito de tal observación sería analizar intensamente el fenómeno para establecer generalizaciones acerca de la población a que pertenece tal unidad. Lo fundamental es que los fenómenos en estudio se encuentran intrínsecamente conectados; de lo contrario no es posible hablar de un caso.

Este trabajo, se basa en un estudio de caso de tipo único, descriptivo, donde se tiene en cuenta que se describe la situación observada dentro de un grupo de estudiantes de quinto semestre de la licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de los Llanos, cuando se enfrentan a tareas enfocadas a la formación de conceptos de la teoría de funciones de variable compleja, a través de la resolución de problemas.

---

[58] De Almeida, F. (2004). El estudio de casos en la investigación de educación de personas adultas. In *Investigación y práctica en la educación de personas adultas* (pp. 41-60). Nau Llibres.

3.4. Población y muestra

La población está integrada por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos y la muestra son 10 estudiantes de quinto semestre, perteneciente al curso electivo variable compleja, II periodo del año 2016.

3.5. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En esta investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico, haciendo uso de los siguientes métodos teóricos:

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja, la resolución de problemas y la construcción de conceptos matemáticos.

Análisis-Síntesis: se utiliza en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del estudio inicial, relacionado con la construcción del concepto de función de variable compleja, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados, elaborar conclusiones y generalizaciones.

La **modelación** y el método **sistémico-estructural**: se utilizan en la elaboración del modelo y la metodología, establecida por la imbricación, entre la formación de conceptos y la resolución de problemas, puestos en escena a través del sistema de actividades.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La observación participante: para obtener información sobre el objeto de la investigación en clases y otras actividades docentes. Se tuvo en cuenta la información recogida en videos teniendo en cuenta las intervenciones de los estudiantes durante las actividades desarrolladas.

Encuesta: a los estudiantes para determinar la zona de desarrollo real, las experiencias de ellos en la resolución de problemas y algunas características de la personalidad (ver Anexo B).

Los métodos **matemáticos estadísticos** se utilizan para el procesamiento de la información obtenida, a través de los métodos y técnicas del nivel empírico, durante el desarrollo de la investigación.

Conclusiones del Capítulo 3

La presente investigación se ubica en el paradigma de investigación cualitativo interpretativo, mediante un estudio de caso único descriptivo teniendo en cuenta que se describe la situación observada dentro de un grupo de estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos perteneciente, al curso electivo variable compleja del periodo II del año 2016.

Dentro de los métodos y técnicas de investigación se tienen las siguientes: a nivel teórico; el histórico-lógico, análisis-síntesis, la modelación y el método sistémico-estructural. A nivel empírico; la observación participante, encuestas, entrevistas y los métodos matemáticos estadísticos.

Estos instrumentos y métodos propios de la investigación, permiten a la autora establecer el modelo, la metodología y el sistema de actividades.

CAPITULO 4. MODELO DIDÁCTICO Y METODOLOGÍA PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA

En la consecución del modelo didáctico se tiene en cuenta en primera instancia, los fundamentos filosóficos, psicológicos y matemáticos descritos en el Capítulo 2, además de los referentes teóricos que se tienen acerca de los modelos didácticos. A continuación se presenta una descripción de los elementos y funcionamiento de dicho modelo.

4.1. Modelo didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje

El termino modelo, en un sentido generalizador Miller (1998) lo define como "... *un sistema concebido mentalmente o realizado de forma material que, reflejando o reproduciendo el objeto de la investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio nos dé nueva información sobre dicho objeto*"[59]. Existe una amplia tipología de modelos, abordada por Núñez (2003), la autora de esta tesis dado su objeto de estudio, se adscribe a los modelos didácticos. Entre las definiciones existentes de modelos didácticos se encuentran las siguientes:

Sierra y Alicia (2002) aducen que el modelo didáctico es una "*Construcción teórico formal que basada en supuestos científicos e ideológicos pretende interpretar la realidad escolar y dirigirla hacia determinados fines educativos*"[60]. Por su parte Jiménez (1991) plantea que: *"Los modelos didácticos son una representación de una realidad, son adaptables, son organizadores de la actividad, que han de servirnos para la reflexión sobre la práctica, son dinamizadores de conocimientos prácticos y teóricos y son documentos válidos para el análisis de la evaluación del sistema, desde los ámbitos más lejanos a*

---

[59] Miller, J. (1998). *The psychology mathematical*. Princenton University Press, Princenton.
[60] Sierra, S. y Alicia, R. (2002). *Modelación y estrategia: Algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica*. La Habana: Pueblo y Educación. p. 317.

la macroplanificación hasta las más próximas como son el de la actividad cotidiana en el aula"[61]. Ambas definiciones hace referencia a la relación directa entre el modelo y la realidad, donde se propicia la actividad; pero ésta representación sólo permite evaluarla.

Escalona (2007) plantea que "... *un modelo didáctico es una abstracción del proceso de enseñanza-aprendizaje, o parte de este, que fundamentado teóricamente permite interpretarlo y establecer nuevas relaciones en función de lograr perfeccionar dicho proceso"*[62]*.* Este autor lo considera estrechamente relacionado con el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sigarreta (2001) aduce que *"Un modelo didáctico es una concepción sistemática que, en el plano de la enseñanza y del aprendizaje, estructura una determinada práctica dentro del proceso docente educativo, para incidir en la formación integral de la personalidad del estudiante"*[63]. Esta definición se refiere a la concepción teórica, sin embargo, la autora de esta tesis considera que esta definición no permite abarcar de manera estructural el desarrollo práctico de un modelo didáctico; por esta razón se plantea como modelo didáctico, "*la estructuración sistémico-práctica del proceso de enseñanza-aprendizaje, para incidir en la formación integral del estudiante*".

En la tesis se asume los rasgos generales del modelo, dados por De Armas, Lorences y Perdomo (2003), que también son distintivos de los modelos didácticos, estos son:

- Interpretación del objeto de investigación que aporta nuevos conocimientos respecto a sus características, propiedades y relaciones esenciales y funcionales.

---

[61] Jiménez, B. (1991). Los sistemas y modelos didácticos. En A. Medina y M. Sevillano (coords.): Didáctica-adaptación. El curriculum. Fundamentación, diseño, desarrollo y evaluación. Madrid, UNED (2â éd.), pp. 705-733.

[62] Escalona, M. (2007). El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario. 2007. Tesis de doctorado no publicada. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero", Holguín. p. 65.

[63] Sigarreta, J. (2001). Incidencia del tratamiento de los problemas matemáticos en la formación de valores. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Cuba, p. 78.

- Construcción teórica que interpreta, diseña y reproduce simplificadamente la realidad.
- Carácter sintético, intensivo, pues describe una estructura concreta.
- Intermediarios entre los presupuestos teóricos y el ámbito de la práctica científica.
- El investigador modifica el aspecto dinámico del desarrollo del objeto.
- El objeto real se traduce abreviado y sintéticamente.
- Se refiere al aspecto más interno del objeto.
- Enfatiza en el planteamiento de una nueva interpretación del objeto.

Se aduce las funciones de los modelos, dadas por De Armas, Lorences y Perdomo (2003), que son propias de los modelos didácticos: ilustrativa, traslativa, sustitutivo-heurística, extrapolativo-pronosticadora y transformadora. La función transformadora, juega un papel significativo en el ámbito del proceso de enseñanza - aprendizaje, pues se dirige hacia la búsqueda de mejoras educativas.

Como características de los modelos didácticos, se especifican las siguientes: adaptabilidad, optimización, organizadores del proceso, y utilidad teórica, investigadora, tecnológica y práctica.

De Armas, Lorences y Perdomo (2003) plantean que los modelos poseen ciertas características generales, las cuales están presentes en los modelos didácticos, a decir: referencia a un criterio de uso, indicación de su grado de terminación e indicación sobre su grado de cerramiento (abiertos – cerrados). También estos autores aducen que los modelos abiertos (como los didácticos) presentan otras características específicas, como son:

- Capacidad de aproximarse al funcionamiento real del objeto (Validez y confiabilidad).
- El investigador modifica el aspecto dinámico del desarrollo del objeto.

- Capacidad para incluir los cambios que se operan en la realidad (Utilidad y permanencia).
- Capacidad referencial. Dar cuenta de la dependencia que tienen respecto al sistema social en el que se inserta.

A continuación se explican las tres fases en la que se estructura el modelo didáctico teniendo en cuenta las fases de Leontiev.

4.2. Modelo didáctico para la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas

La propuesta de modelo didáctico que se presenta, considera las tres categorías fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje, determinadas por Leontiev en su teoría de la actividad, a saber: Fase de Orientación, Fase de Ejecución y Fase de Control. Cada una de ellas posee diferentes momentos que constituyen parte de la metodología y por ende del modelo a desarrollar.

4.2.1. Fase de orientación

En esta fase se cristalizan las bases para la generación de tareas concretas, se precisan las tácticas para la puesta en práctica de la actividad. En ella el profesor reflexiona sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, además de las intenciones no sólo académicas, sino formativas en las cuales desea que el estudiante se encuentre inmerso; donde determina las diferentes estrategias y metodologías propias para alcanzar los objetivos planteados. Para su concreción se encuentra subdividida en:

4.2.1.1. Etapa de fundamentación: Se presenta con el fin de establecer y proporcionar al docente las bases fundamentales sobre las cuales reposa el modelo didáctico: filosófica, psicopedagógica y matemática (ver Figura 2).

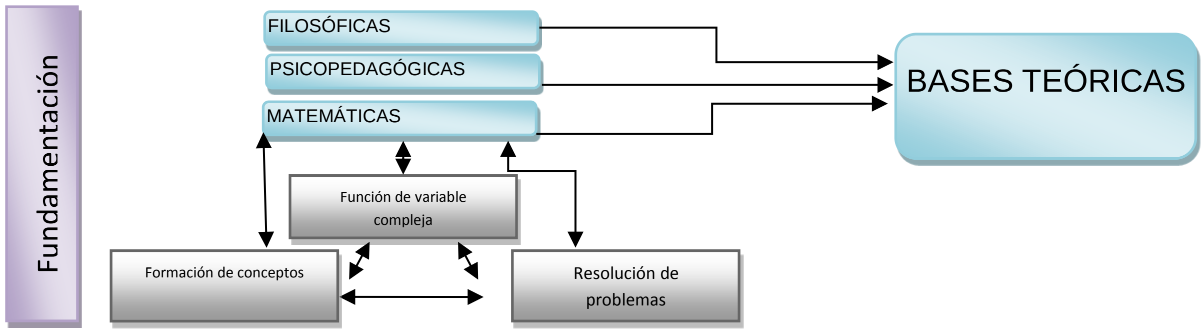


Figura 2. Etapa de fundamentación.

Base filosófica: en el desarrollo de las clases y más aún en la aplicación de talleres o actividades se ve reflejada una concepción filosófica del docente hacia las matemáticas; así como de la educación matemática; lo que determina a su vez sus fundamentos psicopedagógicos, adquiridos por influencias externas (docentes, padre de familia) o internas (crianza, lecturas), que influyen de manera directa en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, se tienen en cuenta los aportes que la concepción dialéctica ofrece a la educación, como fundamento filosófico; debido a que sus aportes están dirigidos al desarrollo integral de la personalidad y considera que el hombre determina y es determinado por la sociedad.

De lo anterior, se puede aseverar que el desarrollo del conocimiento está influido en gran medida por la práctica y por las relaciones socioculturales en las que se desarrolla; es decir su origen se encuentra en la realidad objetiva.

Otra de las razones, es que da respuesta al carácter universal y singular, que conduce a la separación entre el concepto y la subjetividad, al darle importancia al concepto como una forma singular de reflejo de los objetos, de las cosas del mundo material y de las leyes universales de su movimiento.

Base psicopedagógica: Los elementos fundamentales de la teoría psicológica de Vygotsky, permiten sustentar y alcanzar los objetivos propuestos del modelo. El conocer dichos elementos propicia comprender la metodología propuesta y llevar a cabo el sistema de actividades en las condiciones que el modelo lo amerita. También, bajo el constructo del enfoque histórico cultural de Vygotsky, es posible comprender los elementos psicopedagógicos esenciales de la teoría de la actividad de Leontiev, así como la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales de Galperin, por medio de las cuales se plantea la concreción y control del modelo didáctico.

Dado que la matemática tiene su origen en la realidad objetiva, su desarrollo y metodología puede ser presentada mediante la teoría de la actividad y las leyes de la Dialéctica, donde el uso de conceptos matemáticos está ligado a la formalización o internalización con que estos se reflejen en la realidad.

Base matemática: la fundamentación matemática establece no sólo los contenidos matemáticos, como es el caso de las funciones de variable compleja; sino que además, facilita los fundamentos en cuanto a la formación de conceptos matemáticos y la resolución de problemas. La relación existente entre los conceptos matemáticos y la realidad objetiva, pone de manifiesto, por una parte, que no hay identidad funcional entre el concepto matemático y los objetos del mundo material que reflejan, pues el conjunto de propiedades y rasgos de cualquier objeto es mucho más amplio, que el de cualquier concepto que se tenga del mismo. La objetividad de los conceptos está precisamente en su origen, porque se forman como modelos de objetos del mundo real; sin embargo, son subjetivos por la forma de su existencia, pues existen en nuestra mente.

Bajo esta hipótesis se tiene, que para formar el concepto, el estudiante identifica características del objeto, donde utilice su representación gráfica, que es determinada por la forma perceptiva de la acción, por ello la necesidad de establecer qué conceptos y problemas son necesarios para lograr asimilar los nuevos. Por lo cual, se determinan los conceptos subordinados, colaterales y superiores, en el establecimiento del modelo didáctico. Reflexionando acerca de las funciones de variable compleja se determinan algunos conceptos que son necesarios para formarlo como se muestra en la Figura 1.

4.2.1.2. Etapa de Planeación: En la etapa de fundamentación se desarrollan las bases teóricas, que sustentan el modelo, esenciales a la hora de establecer el diagnóstico, los objetivos, los métodos de enseñanza y la organización de las actividades a desarrollar, debido a que orientan y tipifican la etapa de planeación (ver Figura 3).

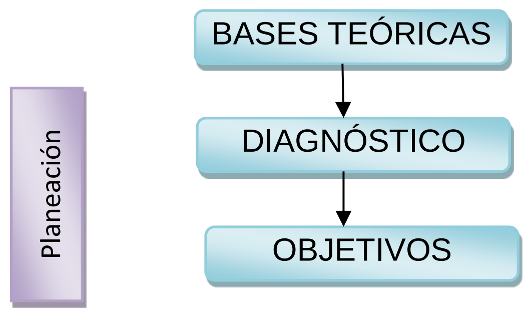


Figura 3. Etapa de planeación.

Diagnóstico: este estadio hace referencia al conocimiento por parte del docente de las condiciones previas del estudiante, para enfrentarse a nuevos conceptos y contenidos referentes a funciones de variable compleja (ver Figura 4).

Figura 4. Diagnóstico.

El poder determinar la zona de desarrollo real (ZDR), las cualidades y actitudes e intereses de los estudiantes hacia la matemática y en especial hacia las funciones variable compleja, es fundamental en el éxito de todo proceso de enseñanza- aprendizaje, pues estos son determinantes en los logros o fracaso de los objetivos que se formulan. Por lo tanto, un diagnóstico de tipo integral es necesario en el modelo. Es en esta etapa donde se logra determinar si los estudiantes tienen los conceptos, proposiciones, relaciones y procedimientos necesarios para poder alcanzar o formular nuevos conceptos como el de función de variable compleja.

Para el estudio del diagnóstico se tienen en cuenta las siguientes características:

1. Zona de desarrollo real y potencial:
    a. Nivel actual de conocimientos matemáticos (números complejos).
    b. Nivel potencial de los conocimientos matemáticos (función de variable compleja).
2. Resolución de problemas.
    c. Estrategias para la resolución de problemas.
    d. Uso de recursos heurísticos.
    e. Uso de la tecnologías de la información y las comunicaciones (TICs).
3. Motivación e intereses.
    a. Intereses cognitivos.
    b. Experiencias matemáticas (aplicaciones y resolución de problemas).
    c. Intereses o preferencias Matemáticas.
    d. Necesidades cognitivas.

4. Cualidades de la personalidad de los estudiantes[64], calidades que serán potencializadas a través de las actividades y de la instrucción planteada.

   a. Perseverancia.
   b. Seguridad en sí mismo.
   c. Creatividad.
   d. Responsabilidad.
   e. Toma de decisiones.
   f. Responder por sus actos.
   g. Crítica y autocrítica.
   h. Forma de trabajo en equipo.
   i. Formas de trabajo individual.

Objetivos: los objetivos establecen las metas que se pretenden lograr con la implementación del modelo y por ende del proceso de enseñanza- aprendizaje establecido. El objetivo, impulsa no sólo al estudiante, sino al maestro en la consecución de los mismos. De igual manera permite evaluar y tener control sobre los diferentes momentos y etapas del modelo didáctico.

En este proceso se tienen en cuenta objetivos específicos orientados a la formación integral, la formación de conceptos, la resolución de problemas y las funciones de variable compleja, que integrados permiten alcanzar el objetivo general (ver Figura 5).

---

[64] Sigarreta, J. y Arias, L. (2009). *La resolución de problemas: un recurso para el desarrollo de la formación de la personalidad*. Ed. UAG. Guerrero, México.

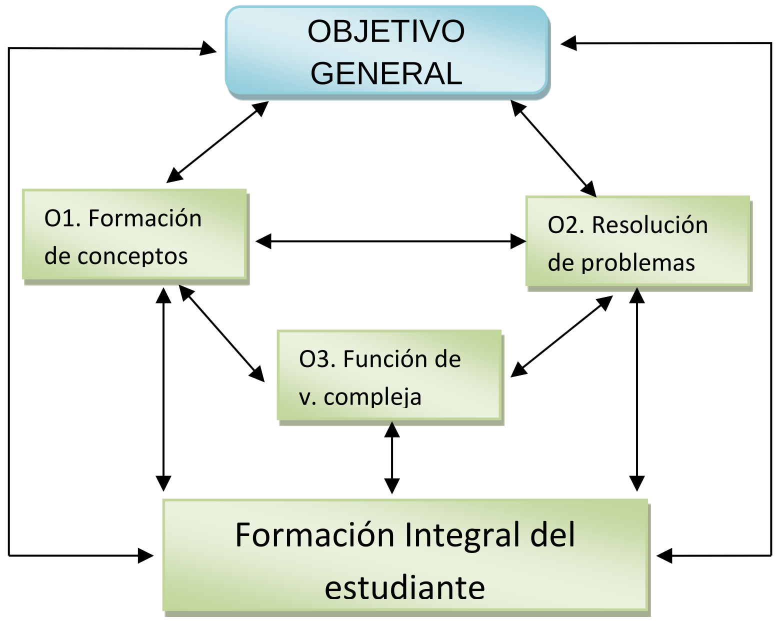


Figura 5. Objetivos.

Objetivo general: Formar el concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas para contribuir a la formación Integral de los estudiantes.

O1. Favorecer la formación de conceptos como una forma de conocimiento de los estudiantes, para propiciar a través de sus experiencias, la interacción con su entorno cultural, social y académico, permitiendo generar nuevos conocimientos y nuevas experiencias y en especial, el concepto de función de variable compleja.

O2. Potencializar por medio de recursos heurísticos, las habilidades en la resolución de problemas, que permitan poner en juego el concepto de función de variable compleja a través de sus diferentes representaciones.

O3. Fijar a través del estudio del concepto de función de variable compleja, conceptos subordinados, colaterales y superiores, mediante la resolución de problemas en equipo e individuales, aportando a la formación de cualidades propias de la personalidad como valores y procesos metacognitivos, necesarios en el futuro licenciado en matemáticas y física.

4.2.2. Fase de ejecución

Se lleva a cabo la acción del modelo, es donde se pone en práctica el sistema de actividades. Este sistema esta mediado por la metodología, basada en la teoría de acciones mentales de Galperin y la resolución de problemas según Pólya (ver Figura 6).

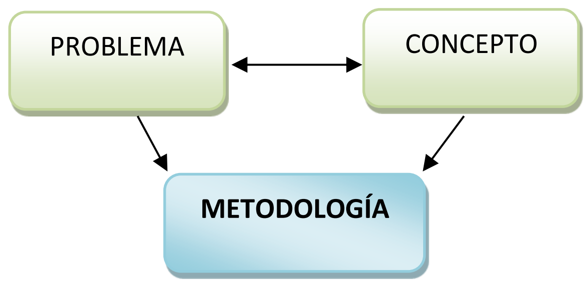


Figura 6. Relación mediadora de la metodología.

En esta fase (ver Figura 7), el concepto de función de variable compleja se adquieren y fijan mediante la resolución de problemas, además de la adquisición de aspectos de la personalidad necesarios en todo estudio y en especial de la matemática.

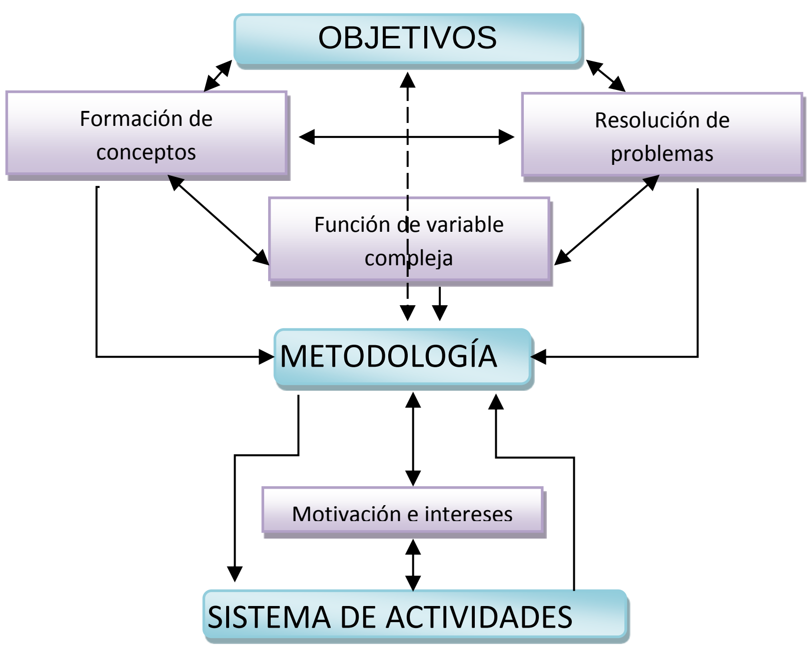


Figura 7. Fase de ejecución.

Para tal fin, es necesario establecer un proceso de integración que permita a través de un sistema de actividades la aproximación al concepto de función de variable compleja haciendo uso de la resolución de problemas, caracterizando los problemas con el fin que tributen a las fases de motivación, adquisición, elaboración, y fijación - aplicación, en el desarrollo de los contenidos matemáticos a tratar (Funciones de variable compleja) y las funciones didácticas de la clase de matemáticas. Un esquema representativo de la metodología se muestra en la Figura 8.

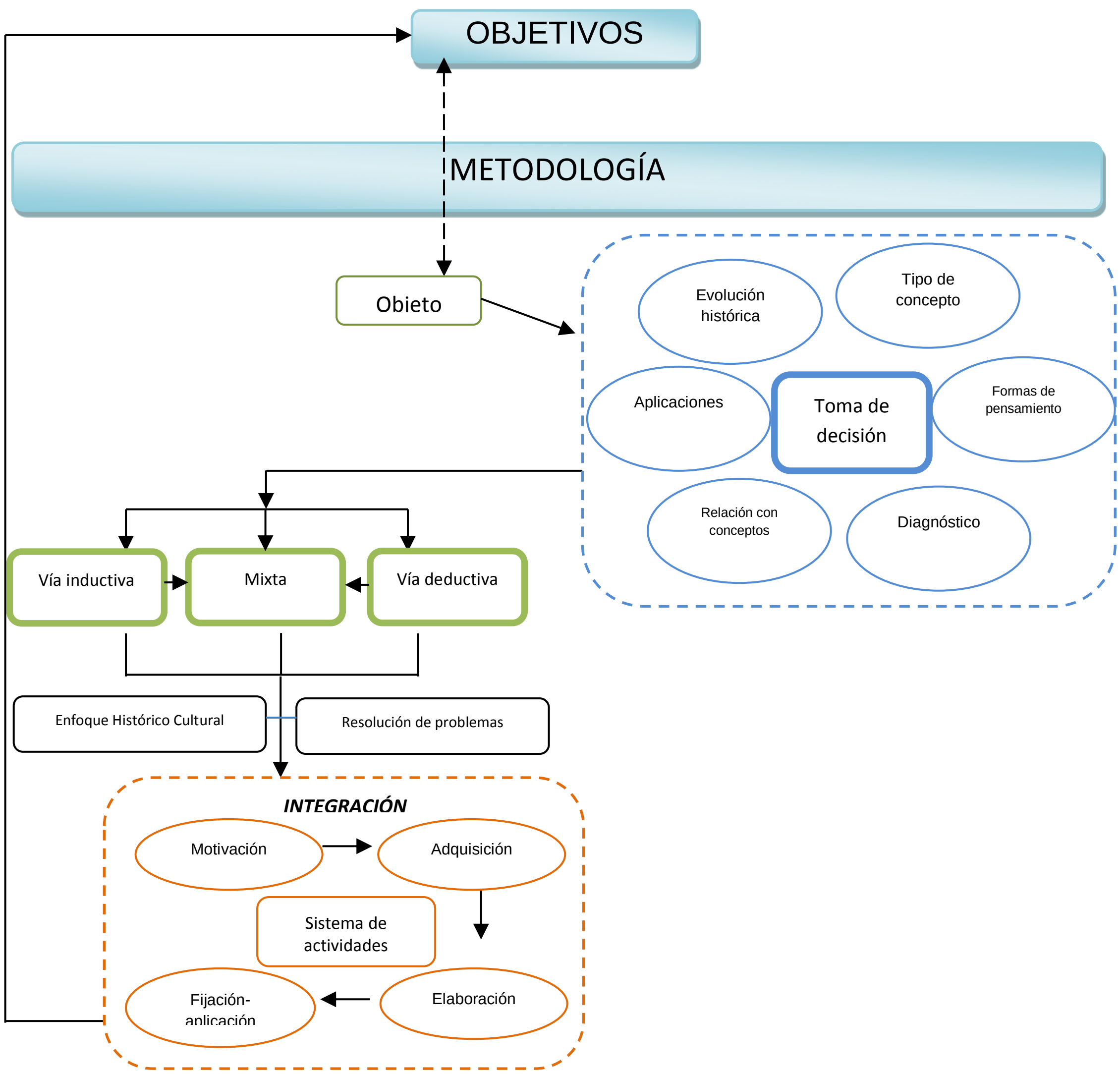


Figura 8. Esquema de la metodología.

Relación entre los elementos de la metodología.

En la etapa de ejecución del modelo, se pone a prueba la efectividad del mismo a través de la metodología sustentada en un sistema de actividades que responde a los preceptos determinados en el modelo. Es así, que en el desarrollo de la metodología se establecen varios subprocesos, que son analizados uno a uno, con el fin de construir patrones de relación en cada uno de ellos.

Dado que los objetivos y el sistema de control previsto, están presentes en el desarrollo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, también es claro que dicho proceso está determinado por la selección del objeto matemático, que son los conceptos (subordinados, colaterales o superiores).

Para establecer las relaciones existentes entre los conceptos y poder tomar una decisión sobre la vía a seguir (inductiva o deductiva), con respecto a la instrucción, Ballester y otros (1992), establecen los siguientes requisitos:

- Tipo de concepto (Concepto de objeto, Concepto de operación o Concepto de relación).
- Formas de pensamiento (geométrico, aleatorio, convergente, divergente,…).
- Evolución histórica del concepto matemático.
- Relación con otros conceptos (subordinados, colaterales o superiores).
- Posibles aplicaciones (teóricas o prácticas).
- Conocimientos previos de los estudiantes.

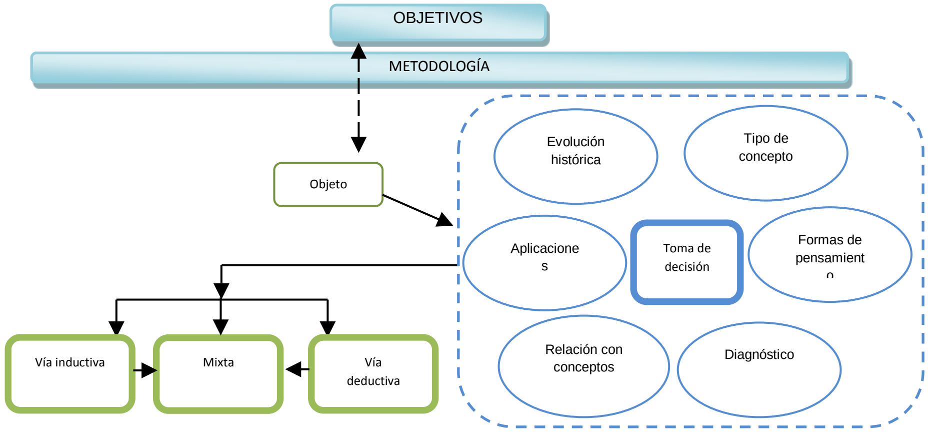


Figura 9. Toma de decisión.

De esta forma se puede establecer no sólo las relaciones conceptuales, sino que a su vez se puede llegar a determinar la vía en el proceso de enseñanza- aprendizaje del concepto, con lo cual, se da camino a construir una secuencia de pasos en la integración, que permite imbricar la resolución de problemas y las fases para la formación de conceptos. En este proceso es donde se realiza la toma de decisión como se muestra en la Figura 9.

4.2.2.1. Caracterización del proceso de integración

El proceso de integración posee 4 fases a saber: motivación, adquisición, elaboración, y fijación - aplicación (ver Figura 10), las cuales han sido caracterizadas a través de problemas que permiten el tránsito entre ellas y un acercamiento al concepto.

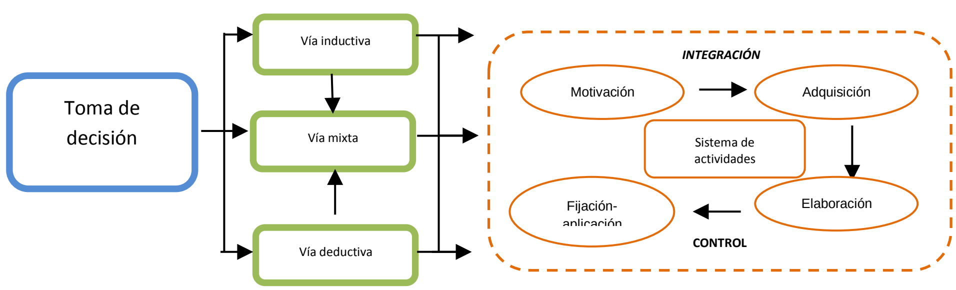


Figura 10. Proceso de integración a partir de las vías inductiva, deductiva y mixta.

Cada una de estas fases está orientada por dos vías principales que permiten la aproximación hacia los conceptos:

Vía inductiva: donde se parte de descripciones para llegar a la definición, es decir parte de lo particular a lo general. A continuación se realiza una comparación entre los pasos propuestos por Ballester y otros (1992) para la vía inductiva, con las fases propuestas por la autora de la tesis; estas etapas permiten caracterizar las fases para el proceso de integración (ver Tabla 1):

Tabla 1. Comparación entre las etapas de Ballester y otros (1992) para la vía inductiva y la propuesta por la autora.

Etapas según Ballester y otros	Fases en el modelo actual
Asegurar el nivel de partida.	Diagnóstico
Motivar y orientar hacia el objetivo	Motivación
Poner a disposición objetos de análisis (representantes y no representantes del concepto en cuestión).	Adquisición
Analizar los objetos respecto a características comunes y no comunes.	Elaboración
Establecer un sistema de características necesarias y suficientes.	
Formular la definición o explicación.	Fijación - aplicación

Vía deductiva: Se inicia con la definición y a través de ejemplos se descubre el contenido y extensión del concepto, es decir se parte de lo general a lo particular.

De igual forma se realiza una comparación entre las etapas de Ballester y otros (1992) para la formación de un concepto por vía deductiva, con las posiciones de la autora sobre el trabajo con conceptos por esta vía (ver Tabla 2).

Tabla 2. Comparación entre las etapas de Ballester y otros (1992) para la vía deductiva y la propuesta por la autora.

Etapas según Ballester y otros	Fases en el modelo actual
Asegurar el nivel de partida.	Diagnóstico
Motivar y orientar hacia el objetivo.	Motivación
Partir de la definición y analizar el significado de cada una de las partes (definiendum y definiens).	Adquisición
Poner a disposición de los alumnos ejemplos y contraejemplos del concepto (objetos de investigación) que deben ser examinados uno a uno de acuerdo con las características (contenido) del concepto, expresadas en el definiens.	Elaboración
Analizar con los alumnos cuál sería la consecuencia si se omitiese alguna de estas características.	
	Fijación - aplicación

Como se puede observar Ballester y otros (1992), no establecen en la vía deductiva la posibilidad de la aplicación como parte de la formación del concepto, situación que para la autora es necesaria debido a que las múltiples aplicaciones o problemas a los cuales el estudiante se enfrenta, y que permiten enriquecer el concepto en cuanto a su contenido y extensión.

De otra parte la autora no descarta el uso de una vía mixta que permite en algunas ocasiones la inductividad y la deductividad, teniendo en cuenta las características del objeto para la toma de decisiones.

Frente al proceso de integración, se hace necesario primero una caracterización de problemas que tributen a la etapa de integración. A continuación se presenta un esquema de la relación existente entre las fases de Pólya para la resolución de problemas y las fases de la etapa de integración (ver Figura 11).

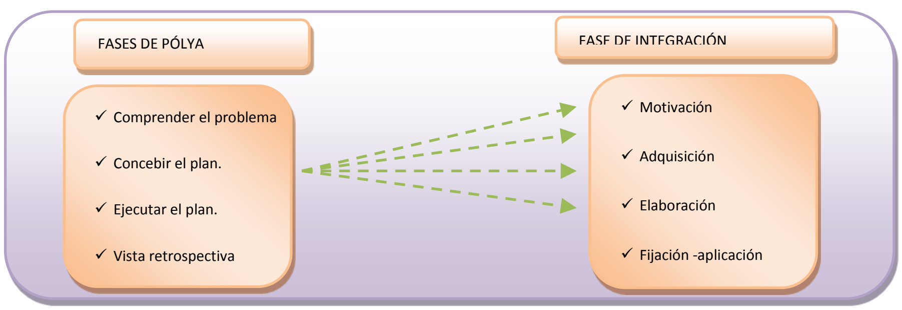


Figura 11. Relación metodológica entre la resolución de problemas la etapa de integración.

4.2.2.2. Caracterización de problemas que tributan a la formación de conceptos

Las características de los problemas que se tratarán en el siguiente apartado, permiten hacer un tránsito por las diferentes fases de Pólya, además de establecer los distintos momentos en los cuales el docente estará en la capacidad de ofrecer a sus estudiantes, cada tipo de problema que tribute a la etapa de integración de la formación de conceptos.

Problemas que permiten la motivación: estos se caracterizan por cumplir las siguientes cualidades:

1. Constituyen el punto de partida del proceso de enseñanza-aprendizaje.

2. Aumentan la motivación y despiertan la curiosidad del estudiante por los temas que se van a tratar.
3. Responden a los intereses de los estudiantes.
4. Son de fácil comprensión, pero a la vez lleva un reto especial para los estudiantes.
5. La resolución requiere del dominio de conceptos previos.
6. Permiten transitar entre los niveles de un concepto (subordinados, colaterales y superiores).
7. Su solución permite la manipulación de diferentes herramientas (visuales, tecnológicas, entre otras).

Problemas que permiten la adquisición: estos se caracterizan por cumplir las siguientes cualidades:

1. Los problemas deben propiciar la ejercitación de las acciones, los conocimientos y conceptos que se quieren formar.
2. Permiten al estudiante realizar la acción, con la posibilidad de ser controlada su ejecución por parte del docente.
3. El uso de recursos heurísticos por parte del estudiante son necesarios en la solución de los problemas.
4. Asiente el accionar metacognitivo durante la ejecución del problema.
5. Posibilita el paso de la zona de desarrollo actual a la zona de desarrollo potencial.

Problemas que permiten la elaboración: estos se caracterizan por cumplir las siguientes cualidades:

1. Debe dar las condiciones necesarias para pasar a la etapa de formación en el plano del lenguaje, donde los elementos de la acción deben estar representados en forma verbal (oral o escrita) por el estudiante.
2. Se desarrollan de forma grupal, de tal manera que permita la participación del equipo o compañeros, expresando de manera verbal las ideas acerca de su solución.
3. Posibilita la generalización, de tal manera que impliquen la habilidad de aplicar la actividad en nuevas condiciones.
4. En el despliegue, se accede a procesos metacognitivos que son explicados verbalmente, garantizando una acción consciente.
5. Debe ofrecer grados de independencia por parte del solucionador, de tal manera que el docente no tenga que dar todas las herramientas al estudiante, sino que debe darse el caso que pueda ser ejecutada de forma independiente.

Problemas que permiten la fijación - aplicación: estos se caracterizan por cumplir las siguientes condiciones:

1. El desarrollo debe darse de manera individual por parte del estudiante.
2. Deben permitir un análisis interno (internalización) e independencia absoluta en la solución.
3. Posibilita establecer el concepto a través de diferentes representaciones o aplicaciones a nuevos fenómenos propuestos por el estudiante o docente.
4. Se puede identificar el concepto a formar y establece la relación con la totalidad de los objetos para llegar al concepto o a su definición.

4.2.3. Caracterización de la Metodología del modelo

La metodología propuesta en el modelo es de carácter dinámico, pues permite construcciones y reconstrucciones entre sus componentes, estableciéndose como complementario la formación de un concepto para el acercamiento a otro nuevo.

Por lo tanto, la búsqueda de conocimiento y de la formación de un concepto es un proceso activo, el cual puede percibirse en algunos casos como suficiente y terminado, pero sólo a partir de múltiples problemas se puede establecer en algunas ocasiones como insuficiente o inadecuado.

Es así que el aproximar a un concepto superior, sugiere una comprensión mayor de otros conceptos mediante problemas que permiten percibir y acercarse al nuevo concepto como una totalidad, en lugar de apreciarlos desde una única perspectiva.

Es de destacar que el modelo propuesto, organiza y sistematiza la información y el proceso de enseñanza - aprendizaje a través de una metodología que metafóricamente se asemeja a una espiral, la cual relaciona la formación de conceptos y la resolución de problemas mediante un proceso de integración en cuatro fases.

4.2.3.1. **Construcción de conceptos por aproximaciones sucesivas**

El conocimiento es cambiante; por ende los conceptos lo son aún más, debido a las múltiples representaciones y experiencias que poseen los estudiantes cuando se enfrentan a diversas situaciones, donde el uso de los conceptos subordinados y colaterales hacen parte del acercamiento al concepto superior.

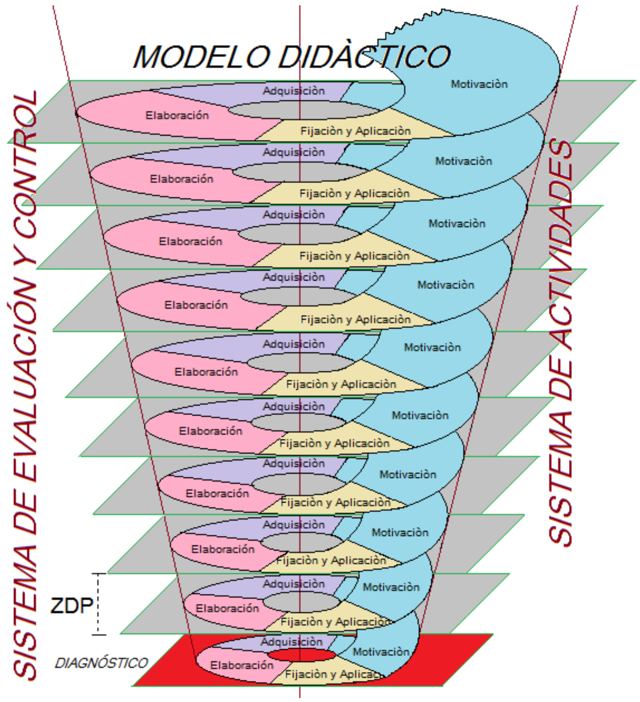


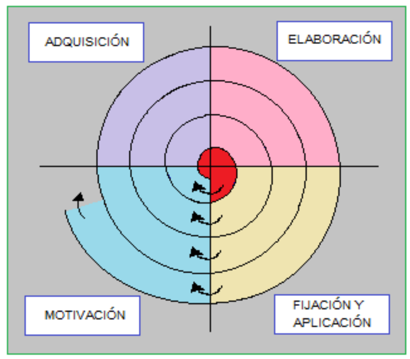
Figura 12. Relación metodológica para la construcción de conceptos por aproximaciones sucesivas.

Esta visión integradora de conceptos se concibe como un proceso o cambio continuo del conocimiento, en otras palabras un devenir de los conceptos en nuevos o reconstruidos conceptos. En este devenir, el conocimiento anterior no se desprecia, sino que hace parte de las estrategias para la comprensión del nuevo conocimiento, situaciones que son usadas por el docente para lograr que el estudiante alcance niveles de conocimiento más elaborados.

Desde este punto de vista la aproximación a un concepto superior, se hace de manera paulatina y permanente en forma de “espiral”, donde cada concepto subordinado, colateral y superior, alcanza grados de complejidad cada vez más avanzados.

En la Figura 12, se puede observar los diferentes niveles de comprensión de un concepto y cómo a través de aproximaciones sucesivas y cada vez más complejas el estudiante va acercándose al concepto de variable compleja.

Cada uno de estos niveles deja observar el paso de las diferentes ZDP, además del uso del diagnóstico como parte del proceso metodológico; el sistema de actividades como un eje que traspasa de manera ascendente a la metodología; el sistema de evaluación y control que brinda información para el mejoramiento y seguimiento de los conceptos. De igual forma esta metodología posee como eje central el modelo didáctico diseñado, al cual pertenece también la metodología (ver Figura 13).



PROCESO DE INTEGRACIÓN

Figura 13. Proceso de integración desplegado desde la metodología.

En cada nivel, se establece el proceso de integración mediante 4 fases, cada una con la misma importancia y ninguna superior a otra, los cuales permiten formar en tres niveles distintos (Análisis-Abstracción, Discriminación-Identificación y Síntesis-Concreción) el concepto de función de variable compleja y los conceptos asociados al mismo. Esta característica del proceso metodológico facilita la incorporación de procesos dinámicos de formación a través del sistema de actividades.

Cada una de las vueltas de la espiral corresponde a un objetivo dentro del proceso de aproximación al concepto de función de variable compleja; donde cada objetivo es alcanzado a partir de actividades sucesivas que permiten al estudiante a partir de problemas, relacionar conceptos entre sí.

Aduciendo a las fases descritas anteriormente para el proceso de integración se genera un sistema de actividades que responde a cada una de estas fases y permite cumplir los objetivos propuestos en el modelo didáctico.

4.2.4. Sistema de actividades para la formación de conceptos asociados al de función de variable compleja

Se entiende por sistema de actividades a la propuesta de actividades dirigidas a la formación de conceptos subordinados, colaterales y superiores de las funciones de variable compleja, mediante la resolución de problemas, sin dejar de lado el desarrollo integral del estudiante.

Este sistema de actividades se encuentra orientado a los objetivos, siendo esta la unidad principal de análisis para la teoría de la actividad (Cole y Engeström, 1993; Leontiev, 1981). Este, permite observar los procesos por los cuales las actividades moldean y son moldeadas por su contexto. De igual manera, dicho sistema debe ser dinámico[65], pues permite construcciones y reconstrucciones entre sus componentes; un ejemplo de ello, son las diferentes situaciones que se presentan y que constituyen cambios en las normas de la clase. En este proceso es el objetivo el que permite determinar qué herramientas deben ser reconstruidas y reorganizadas para generar nuevas herramientas con el fin de cumplir con el objetivo; todo ello debido al proceso de control continuo que se establece dentro del modelo.

El sistema de actividades está orientado por la integración, a través de las 4 fases propuestas y que son caracterizadas por las etapas de Ballester y otros (1992) y de Galperin. A continuación se describe el sistema de actividades.

[65] Cole, M. y Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations*, pp.1-46.

Las actividades desarrolladas se encuentran directamente relacionadas con la metodología, es decir, dichas actividades se formulan de la siguiente manera: título de la actividad, objetivo, sugerencia metodológica, motivación, adquisición, elaboración, fijación- aplicación y unas conclusiones de la actividad. A continuación se describen las primeras cuatro actividades.

Actividad 1. Unidad imaginaria.

Objetivo: Comprender el concepto de unidad imaginaria.

Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades, se encuentra programada siguiendo la vía inductiva, es decir, permitiéndose con ello poner a los estudiantes en situación de construir por sí mismos los conceptos con la ayuda de los compañeros y del profesor. El diseño de la secuencia sigue cinco fases: primero *motivación*, con situaciones problema que permiten despertar la atención y el interés por el concepto de unidad imaginaria. Segundo *adquisición*, con problemas que permiten la exploración de ideas previas, con el fin de establecer una primera aproximación al concepto, desde el punto de vista geométrico sobre los números complejos y el significado de *i*. Tercero *elaboración*, se hace referencia a problemas retos, donde se exige la interrelación de otros conceptos, procedimientos y actitudes necesarios para su resolución. Cuarto *fijación- aplicación*, son problemas que requieren de los conceptos inter e intradisciplinarios trabajados y adquiridos en cursos anteriores, para la resolución de situaciones nuevas. Algunas actividades requieren de lecturas y el uso de software como GeoGebra. (Ver Anexo C).

Actividad 2. Representaciones.

Objetivo: Conceptualizar los números complejos a través de diferentes representaciones, caracterizándolas y diferenciándolas en diferentes problemas.

Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía inductiva, para la fase de *motivación*, se procederá a jugar "Guerra Naval", con algunas modificaciones a las reglas de juego que permitirán hacer cambios de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. La *adquisición*, en esta fase se proponen a los estudiantes problemas relacionados con la ubicación de puntos en coordenadas polares a cartesianas y viceversa. Tercero *elaboración*, los problemas que se presentan a los estudiantes se encuentran relacionados con características necesarias y suficientes para poder ubicar un número complejo en el plano. Cuarto *fijación- aplicación*, estos problemas requieren de la interrelación entre conceptos de otras áreas para su solución. (Ver Anexo D).

Actividad 3. Operaciones.

Objetivo: Identificar y aplicar las operaciones con números complejos, caracterizándolas en diferentes representaciones.

Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta. Para la fase de *motivación*, se realiza una lectura con parte de la historia de los números complejos, sus representaciones y operaciones; además de ver el video titulado "Dimensiones"; se realizan intervenciones de los estudiantes frente a las dudas presentadas en la lectura y el video. *Adquisición*, se expone a los estudiantes cómo se realizan las diferentes operaciones (suma, resta, multiplicación y división) desde la representación algebraica de los números complejos, además de solicitar a los estudiantes que realicen diferentes operaciones con complejos. *Elaboración*, se entrega a cada estudiante la actividad número 2, la cual consiste en que, usando el programa cabri Geometry se identifiquen algunas características de la suma, resta, multiplicación y división de números complejos.

Adicional a ello, los estudiantes verifican que las operaciones de forma algebraica coinciden con las operaciones de forma geométrica. *Fijación- aplicación*, con problemas donde el uso de operaciones con complejos son una opción en su solución. Algunas actividades requieren de lecturas y el uso del software Cabri Geometry. (Ver Anexo E).

Actividad 4. Potencias.

Objetivo: Deducir algunas propiedades de la potenciación mediante la multiplicación, haciendo uso de la representación exponencial de los complejos y la formula de Moivre, en diferentes situaciones.

Sugerencia Metodológica: Las siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía inductiva, para la fase de *motivación*, se hace lectura de algunos datos curiosos de la vida de Moivre, y sus resultados frente a las operaciones con números complejos. *Adquisición* con problemas que requieren de la multiplicación y la escritura en forma de potencias se tratará que los estudiantes deduzcan la fórmula de Moivre, además de establecer la relación entre las diferentes representaciones de los números complejos y la fórmula de Euler. Tercero *elaboración,* en esta etapa se relacionan actividades realizadas en otras guías con la representación exponencial y la fórmula de Moivre, con el fin de afianzar no sólo el conocimiento nuevo, sino conocimientos anteriores. *Fijación-aplicación*, problemas donde el uso de la representación exponencial y la fórmula de Moivre permiten su solución. (Ver Anexo F).

Actividad 5. Raíces.

Objetivo: Determinar las raíces n-ésimas de un número complejo e interpretarlas geométricamente.

Sugerencia Metodológica: secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta, para la fase de *motivación*, se plantean problemas de construcción de polígonos regulares con el fin de establecer relaciones con las raíces de un número complejo. La *adquisición*, contiene problemas que relacionan el Teorema De Moivre con las raíces de números complejos y su gráfica con polígonos regulares. *Elaboración*, con problemas que involucran raíces reales y complejas, además del uso de diferentes sistemas de representación de los números complejos. *Fijación - aplicación*, donde los problemas relacionan las raíces de un número complejo, el Teorema De Moivre y el Teorema Fundamental del Algebra. En cada fase los estudiantes resuelven los problemas de manera individual, exponen sus ideas y se discute con el grupo sus soluciones. (Ver Anexo G).

Actividad 6. Conjunto de puntos en el plano $\mathbb{C}$.

Objetivo: Establecer el lugar geométrico de uno o varios números complejos en el plano.

Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta, para la fase de *motivación*, se entrega a los estudiantes un problema relacionado con la búsqueda de un tesoro en el cual deben poner en juego todos los conocimientos anteriores a esta actividad y algunos relacionados con cursos de geometría, para poder hallar el tesoro . La *adquisición*, en esta fase se proponen a los estudiantes problemas que se relacionan con el determinar el lugar geométrico de un conjunto de puntos en $\mathbb{C}$. Tercero *elaboración*, los problemas que se presentan están relacionados con el paso de la representación gráfica de un conjunto de puntos en C, donde los estudiantes deberán encontrar dicho conjunto por comprensión. Cuarto *fijación - aplicación*, estos problemas requieren de la interrelación entre conceptos de otras áreas para su solución. En cada fase se analizan los resultados de las actividades y se da la discusión entre los compañeros sobre el mecanismo o método usado para su solución. (Ver Anexo H).

Actividad 7. Funciones de variable compleja.

Objetivo: Comprender el concepto de función de variable compleja.

Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programas siguiendo la vía mixta, para la fase de *motivación*, como parte de la motivación se observa el video de título *dimensiones* 6/9[66], de igual forma se planean problemas que relacionan el concepto de función de variable real con el de función de variable compleja, *adquisición e*n esta etapa se presenta a los estudiantes problemas relacionados con el paso del sistema de representación tabular al gráfico, con el fin de poder determinar algunas transformaciones de las funciones en variable compleja. Tercero *elaboración*, los problemas que se presentan hacen referencia al uso de software y la visualización para la comprensión del concepto de función. *Fijación - aplicación*, en esta etapa se presentan problemas relacionados con el mapeo de rectángulos y triángulos bajo las funciones descritas en la etapa anterior, adicional a ello se hace uso del software ComplexImage como apoyo a los procesos de visualización. (Ver Anexo I).

4.2.5. Fase de Control

Esta fase se encuentra relacionada con la ejecución, y aunque permite establecer si los objetivos se alcanzaron, también asiente constituir cambios a la metodología, las actividades y por ende al modelo.

La etapa de control, aunque se evalúa después de la ejecución se ejerce a lo largo de todo el proceso de internalización, pues estas permiten tomar decisiones en cualquier instante del modelo: orientación, ejecución o el mismo control.

De igual forma está orientado a determinar el grado de eficacia y eficiencia del modelo a través de la consecución de los objetivos específicos y el objetivo general, con el fin de adoptar medidas correctivas a lo largo de su ejecución.

[66] Video disponible en la URL: https://www.youtube.com/watch?v=WE7wfJU6RV4

De otra parte, un concepto matemático está totalmente controlado por su definición (Faris, 2006), es así que durante la consecución del modelo se tendrán en cuenta las expresiones verbales y no verbales de los estudiantes frente al concepto en las diferentes situaciones problema; para tal fin se tuvieron en cuenta los niveles de formación de un concepto de Ballester y otros (1992) y se caracterizaron dichos niveles desde el punto de vista de la resolución de problemas; de igual forma se tuvieron en cuenta los siguientes descriptores para la caracterización:

- Comprobar si un objeto o una situación representa o no un concepto, utilizando el sistema de características del concepto.
- Considerar o construir ejemplos y contra ejemplos.
- Señalar casos límites y casos especiales.
- Buscar otras formulaciones o apreciar otras formulaciones para la definición de un concepto. Formular la negación de la definición.
- Subordinar el concepto en un sistema de conceptos conocidos, destacando relaciones entre ellos (concepto superior, concepto subordinado y conceptos colaterales).
- Derivar consecuencias de la definición.

De manera análoga, en la formación de conceptos subyacentes se tendrán en cuenta las siguientes acciones, que están presentes en cada una de las etapas de la integración que se establecen:

- Identificación del concepto en cada problema, donde es posible determinar la presencia a no del concepto y relaciones a conceptos determinados; se identifica el concepto mediante problemas aumentando el grado de dificultad.

- Caracterización del concepto frente a problemas, en este caso se establecen series de problemas que poseen características necesarias y suficientes o aquellas en donde algunas características sean modificadas de tal manera que sea posible para el estudiante comparar y establecer similitudes en cuanto a cada problema y la relación con el concepto.
- Aplicación del concepto frente a problemas en nuevos contextos, donde el uso de diferentes sistemas de representación permite que el estudiante establezca las relaciones entre los conceptos superiores con los subordinados o colaterales, conduciendo a nuevos problemas en donde se ponga a prueba el concepto.

A continuación se presenta el esquema general del Modelo Didáctico propuesto, teniendo en cuenta las características descritas en los capítulos 2, 3 y 4. (Ver Figura 14).

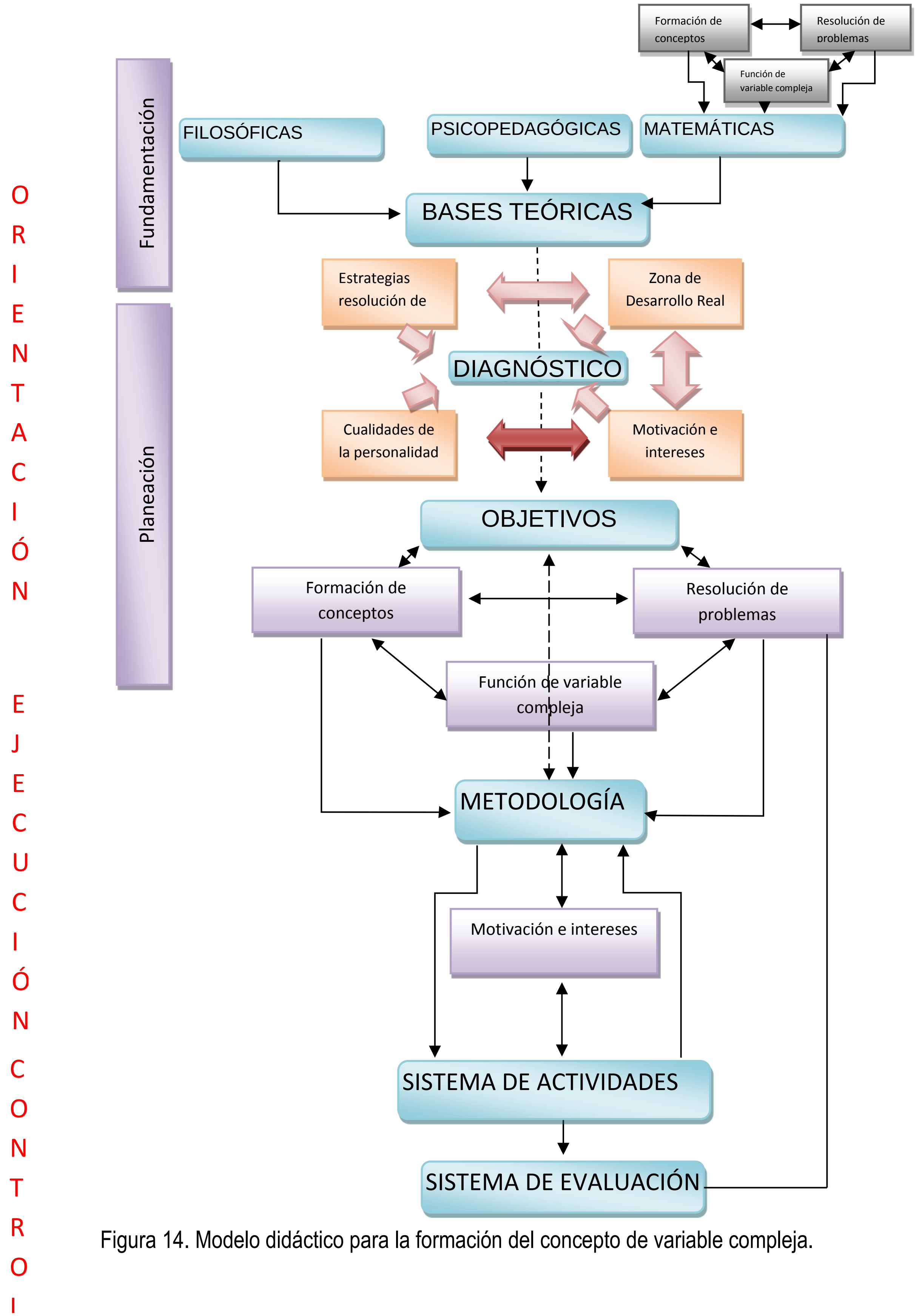


Figura 14. Modelo didáctico para la formación del concepto de variable compleja.

Relaciones presentes dentro del modelo:

El modelo didáctico propuesto (ver Figura 14) constituye un cambio de enfoque, que posibilita el desarrollo en los conocimientos, pues le permite a los estudiantes profundizar en los contenidos de funciones de variable compleja, de alcanzar niveles cada vez más elevados en el dominio de los conceptos asociados a las funciones de variable compleja, lo que propicia el desarrollo de juicios y criterios propios de naturaleza crítica, respecto al contenido matemático, su significado y su aplicación. La implementación de la metodología acepta el cuestionamiento de la naturaleza de la matemática, al plantear y resolver nuevos problemas sobre funciones de variable complejas y algunos relacionados con el entorno.

En esto radica la relación esencial sistémica entre estas fases, que originan la nueva cualidad deseada: construcción robusta del concepto de variable compleja a través de la resolución de problemas para contribuir al desarrollo integral de la personalidad, resolviéndose de esta manera el problema que genera la investigación.

Las tres fases del modelo: orientación, ejecución y control, tienen un carácter sistémico, al entrar en acción, dinamiza a la metodología y potencia su desarrollo. En la fase de ejecución se propicia la construcción del conocimiento sobre funciones de variable compleja, el cual se desenvuelve, permitiendo un movimiento en espiral, donde en cada espira, los contrarios se oponen en un plano superior. Es decir, aparecen nuevos problemas conducentes al desarrollo del contenido de funciones de variable compleja, donde se superan las dificultades que le dieron origen.

Las relaciones constituyen la esencia de este modelo, lo tipifican y lo caracterizan. Estas relaciones presentan niveles cada vez más profundos de esencialidad. En el modelo se muestran tres relaciones:

- La primera está determinada entre los sustentos teóricos: filosóficos, psicológicos y matemáticos que constituyen el soporte del modelo.

- La segunda relación se presenta entre el diagnóstico y los objetivos del modelo.
- La tercera relación se sitúa entre los componentes que integran la metodología: formación de conceptos, funciones de variable compleja, resolución de problemas y motivación e intereses.

El gráfico de la Figura 14 es una representación que sirve para ilustrar las fases, etapas, cualidades y relaciones esenciales del modelo. La práctica como criterio de la verdad y fuente de perfección y enriquecimiento de la teoría, se presenta en el gráfico, aunque se encuentra fuera de los límites del modelo. De esta manera se logra una nueva cualidad: construcción robusta del concepto de variable compleja a través de la resolución de problemas para contribuir al desarrollo integral de la personalidad de los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática y Física.

Conclusiones del Capítulo 4

1. En primer lugar, en la elaboración de este modelo se ha tenido en cuenta:

- Como basamento teórico la concepción dialéctica, los fundamentos psicopedagógicos y matemáticos, que constituyen elementos valiosos, donde se sustenta el modelo.
- La estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de la función de variable compleja hacia la búsqueda activa y dinámica del conocimiento en el estudiante, a través de un sistema de actividades, desde posiciones reflexivas que estimulen el desarrollo del pensamiento y la independencia cognoscitiva.
- La metodología sustentada en el modelo didáctico favorece la formación de conceptos sobre función de variable compleja, a través de la resolución de problemas y propicia el desarrollo de los procesos lógicos del pensamiento y el dominio de los contenidos teóricos necesarios, en la

medida en que se produce el aprendizaje de los conocimientos matemáticos.

- El tránsito del nivel actual o inicial que poseen los estudiantes, hasta el nivel que se aspira; así como la estimulación de la necesidad de aprender función de variable compleja, teniendo en cuenta los intereses. Además, el vínculo del contenido función de variable compleja con la práctica social.

2. En segundo lugar, el elemento dinamizador del modelo se desarrolla en la etapa de ejecución, al interactuar las cuatro categorías presentes en la metodología propicia la construcción de un robusto concepto de función de variable compleja, contribuyendo a la solución del problema científico planteado.

CAPITULO 5. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA

En este capítulo se presentan los resultados de las actividades realizadas a la luz del modelo didáctico y su metodología; para estructurar la información proveniente del análisis se procedió a enumerar a los estudiantes participantes de (E1, E2, E3,…, E10) y se crearon escalas de valoración cualitativas basadas en la clasificación que realizan Ballester y otros (1992), sobre los niveles de desarrollo de los conceptos, haciendo un aporte sobre las características de éste frente a la resolución de problemas como se muestra a continuación en la tabla 3.

De igual forma se nombraron los problemas como P.M.n, donde M corresponde a la motivación, P.A.n a problemas de adquisición, P.E.n a los de elaboración y P.F.n a los problemas que corresponden a la etapa de fijación-aplicación, la n es el número del problema en cada etapa de la actividad.

Tabla 3. Escalas de valoración cualitativas basadas la caracterización de los niveles de desarrollo de los conceptos mediante la resolución de problemas.

NIVEL DE SOLUCIÓN	CARACTERIZACIÓN
Análisis-Abstracción (A-A).	El estudiante analiza los grupos o conjuntos de objetos en función de sus propiedades comunes; luego determina cuales de esas características son esenciales, forma conjuntos más complejos y elaborados, basándose en las propiedades. La caracterización permite que el estudiante determine la presencia o no del concepto superior y las relaciones existentes con otros conceptos (colaterales y subordinados) en los problemas propuestos.
Discriminación-Identificación (D-I).	El estudiante determina qué propiedades del nivel anterior, pueden extenderse al resto de los elementos de un conjunto, se deducen e inducen las propiedades fundamentales a la totalidad de los elementos del conjunto. Identifica el concepto como parte de la solución de un problema, donde se puede apreciar características necesarias y suficientes o aquellas en donde algunas características sean modificadas de tal manera que el estudiante compara y establece

	similitudes en cuanto a cada problema y la relación con el concepto.
Síntesis-Concreción S-C).	El estudiante determina las características esenciales, la estructura o el sistema de la totalidad de los elementos se sintetiza el proceso y puede construir una definición. Aplica el concepto frente a problemas en nuevos contextos, donde el uso de diferentes sistemas de representación permite que el estudiante establezca las relaciones entre los conceptos superiores con los subordinados o colaterales, conduciendo a nuevos problemas en donde se pone a prueba el concepto.

A continuación se analizan cada uno de los problemas presentados a los estudiantes dependiendo de las fases del proceso metodológico establecido en el modelo didáctico. Cabe destacar que en las actividades, se encuentran entre los problemas algunas preguntas orientadoras y ejercicios que permiten que el estudiante siga un hilo conductor durante la actividad, estos no serán parte del análisis, pero permiten dar información para la clasificación y evaluación de la actividad.

5.1. Actividad 1. Unidad imaginaria

La actividad tiene como objetivo el comprender el concepto de unidad imaginaria, esta actividad se desarrolló siguiendo la vía inductiva. Cada una de las etapas contiene los siguientes problemas, como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Número de problemas por etapas. Actividad 1. Unidad imaginaria.

Etapa	Número de problemas
Motivación	2
Adquisición	2
Elaboración	1
Fijación-Aplicación	1
Total	6

5.1.1. Motivación

Antes de comenzar con los problemas que permiten la motivación, se hizo lectura de un resumen de la historia de los números complejos, de allí se realizaron algunas preguntas que permitieron introducir a los problemas que se describen a continuación.

P.M.1. *Resuelve el siguiente problema expuesto por Diofanto (275 a. C.). ¿Hallar los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7?*

Tabla 5. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria) Actividad N°1 problema 1. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	7	70
Discriminación-Identificación	2	20
Síntesis-Concreción.	0	0
Ns/Nr	1	10

De un total de 10 estudiantes, 5 establecieron una solución haciendo uso primero de esquemas gráficos, para posteriormente determinar un sistema de ecuaciones, 2 relacionan en una tabla las posibles soluciones al problema; sin embargo los 7, obviaron el hecho que el triángulo era rectángulo, sólo uno de ellos, no realizó ninguna estrategia con la cual pudiese dar solución, porque no comprendió e interpretó el enunciado (ver Tabla 5). Dos de los estudiantes, pudieron determinar que según sea el triángulo isósceles o escaleno, la solución no siempre es única, añadiendo al sistema de ecuaciones la característica de ser un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras, al final concluyen que las soluciones no son reales en el triángulo escaleno y en el isósceles es imposible obtenerlo. Situaciones que se pueden observar en las siguientes figuras (15, 16 y 17).

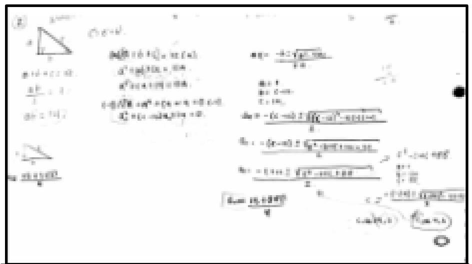


Figura 15. Respuesta estudiante E1 Actividad N°1 P.M.1. A –A.

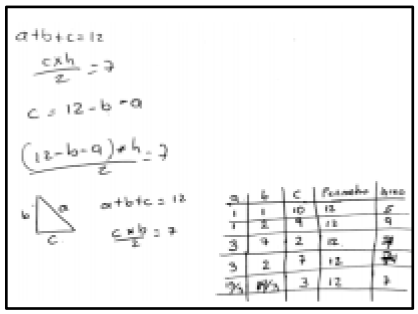


Figura 16. Respuesta estudiante E7 Actividad N°1 P.M.1. A- A.

Figura 17. Respuesta estudiante E2 Actividad N°1 P.M.1. D- I.

<u>P.M.2.</u> *Solucione el siguiente problema planteado por Cardano en 1545: Sea un segmento AB de longitud 10 unidades, divídelo en dos partes de tal forma que el rectángulo que se forma tenga un área de 40 unidades cuadradas. ¿Es posible construir dicho rectángulo? ¿Qué dimensiones tendría?*

Tabla 6. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria) Actividad N°1 problema 2. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción	0	0

En el nivel de Análisis- abstracción se presentan 4 estudiantes (ver Tabla 6), ellos no muestran dificultades en la solución pues determinan con un gráfico y a partir de éste, concluyen que el rectángulo con mayor área que se puede construir es de 25 unidades cuadradas, aunque no solucionan el problema de manera algorítmica, establecen una solución y la verifican, 6 de los estudiantes, establecen una solución algebraica haciendo uso de sistemas de ecuaciones y la ecuación cuadrática, esto se evidencia con el estudiante E3 como se muestra a continuación en las Figuras 18 y 19.

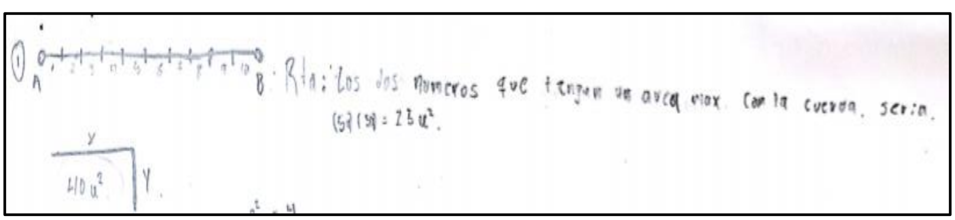


Figura 18. Respuesta estudiante E4 Actividad N°1 P.M.2. A- A.

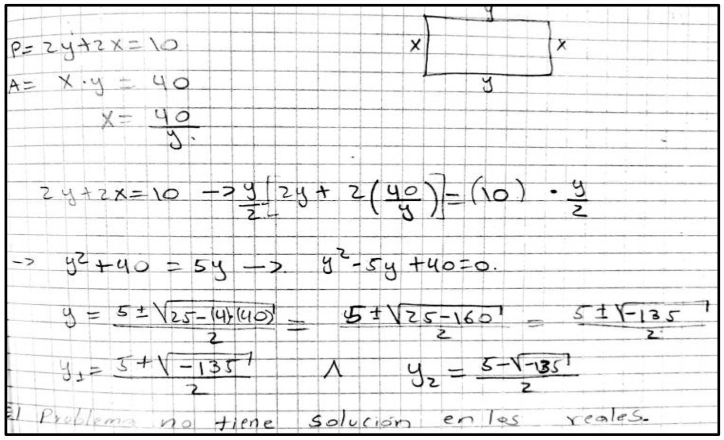


Figura 19. Respuesta estudiante E9 Actividad N°1 P.M.2. D- I.

5.1.2. Adquisición

Con problemas que permiten la exploración de ideas previas, con el fin de establecer una primera aproximación al concepto desde el punto de vista geométrico, sobre los números complejos y el significado de *i*.

P.A.1. *Usa el siguiente plano cartesiano, e interpreta qué significa multiplicar por -1. ¿Qué puedes observar?, ¿si multiplicar por -1, es realizar una rotación de 180º, cómo puedes interpretar una rotación de 90º?*

Tabla 7. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria) Actividad N°1 problema 1. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción,	10	100
Discriminación-Identificación	0	0
Síntesis-Concreción.	0	0

Los 10 estudiantes (ver Tabla 7) desarrollaron la actividad estableciendo que rotar 90° corresponde a multiplicar por $\sqrt{-1} = i$, con lo cual se tendría que en el eje que ellos suelen llamar “y” se coloca el eje imaginario. Esta situación se puede observar en la Figura 20. Ninguno de los estudiantes ejemplificó o estableció características de la solución como cambios en las coordenadas de un punto.

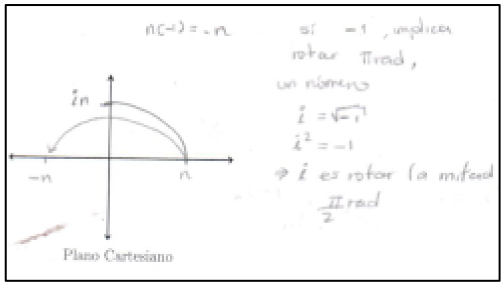


Figura 20. Respuesta estudiante E8 Actividad N°1 P.A.1. A- A.

<u>P.A.2.</u> *Identifica geométricamente lo que sería:*

1. i	*2. -i*	*3. -(-i)*	*4. 2i*	*5. -2i*
6. i^2	*7.* i^3	*8.* i^4	*9.* i^{23}	*10.* i^{741}

Generalice para cualquier exponente natural.

Tabla 8. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria) Actividad N°1 problema 2. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción,	4	40
Discriminación-Identificación	4	40
Síntesis-Concreción.	2	20

Los estudiantes establecen una relación entre la representación geométrica de los números complejos, la multiplicación por i, sus potencias y la representación algebraica de los números, sólo 2 estudiantes (ver Tabla 8) lograron generalizar las potencias de i cuando n es natural, algunos otros sólo generalizaron para potencias pares e impares, pero no se percataron que las potencias pares al igual que las impares generan dos respuestas diferentes, esto se puede apreciar en la Figura 21, 22 y 23.

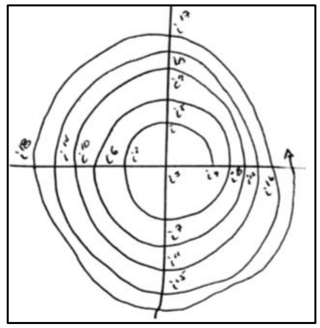


Figura 21. Respuesta estudiante E5 Actividad N°1 P.A.2. A- A.

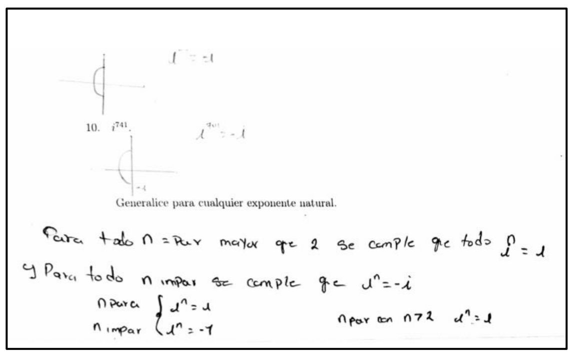


Figura 22. Respuesta estudiante E7 Actividad N°1 P.A.2. D- I.

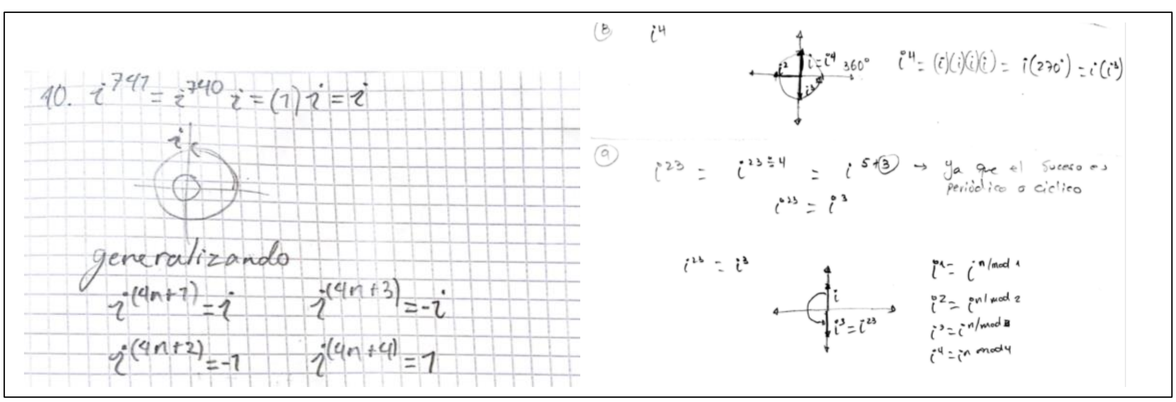


Figura 23. Respuesta estudiantes E10 y E2 Actividad N°1 P.A.2. S- C.

5.1.3. Elaboración

Con problemas retos, donde se exige la interrelación de otros conceptos, procedimientos y actitudes necesarios para su resolución.

P.E.1. *Observa la siguiente igualdad y determina si hay o no algún error, justifica tu respuesta:*

$$i^2 = i^2$$

$$\sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1}^2$$

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)(-1)}$$

$$(-1) = \sqrt{1}$$

$$-1 = 1$$

¿Es posible esto?

Tabla 9. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria) Actividad N°1 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción,	7	70
Discriminación-Identificación	2	20
Síntesis-Concreción.	1	10

Aunque todos los estudiantes (ver Tabla 9) indicaron que había un error en la operación, 2 de ellos afirmaron que posiblemente en los complejos el 1 si podía llegar a ser igual al -1, como si el conjunto de los reales fuese disjunto con el conjunto de los números complejos, uno de ellos se limitó a indicar el error mas no a poder establecer una razón o justificación del porqué sucedía que -1=1. Un estudiante determinó que no es posible hacer uso de una propiedad de los reales en los números complejos despreciando el hecho que $\sqrt{-1} = i$, esto se puede apreciar en las Figuras 24, 25 y 26.

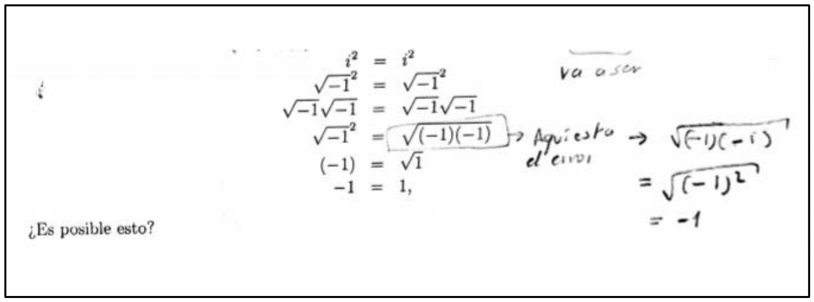


Figura 24. Respuesta estudiante E5 Actividad N°1 P.E.1. A- A.

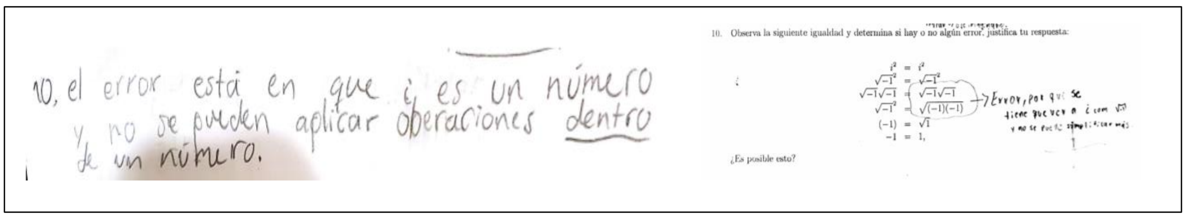


Figura 25. Respuesta estudiantes E6 y E10 Actividad N°1 P.E.1. D- I.

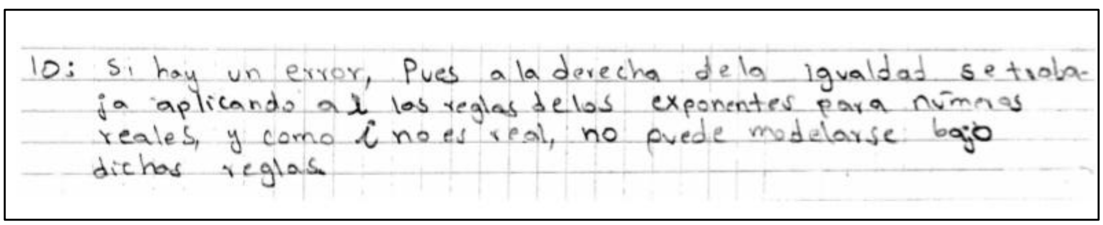


Figura 26. Respuesta estudiantes E2 Actividad N°1 P.E.1. S- C.

5.1.4. Fijación – aplicación

Problemas que requieren de los conceptos inter e intradisciplinarios trabajados y adquiridos en cursos anteriores, para la resolución de situaciones nuevas.

P.F.1. *¿Si se hace una rotación de 45º al vector (0,1) qué significado tiene? ¿Qué coordenadas cartesianas posee este nuevo vector?*

Tabla 10. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria) Actividad N°1 problema 1. Fase de fijación- aplicación

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción,	8	80
Discriminación-Identificación	2	20
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de estudiantes de la muestra (ver Tabla 10), 8 encontraron una relación entre las rotaciones de 45° y la raices cuadradas de i, 2 estudiantes lograron identificar dicha relación, concluyen que ésta corresponde a una raíz cuadrada de i, ninguno de ellos ejemplificó la situación o estableció algún tipo de relación con los números reales, situación que puede observarse en las Figuras (27, 28 y 29).

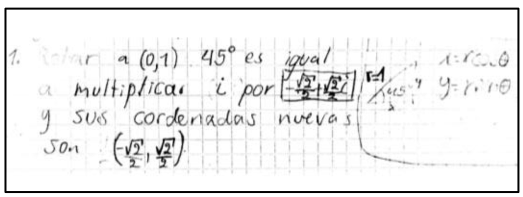


Figura 27. Respuesta estudiantes E8 Actividad N°1 P.F.1. A- A.

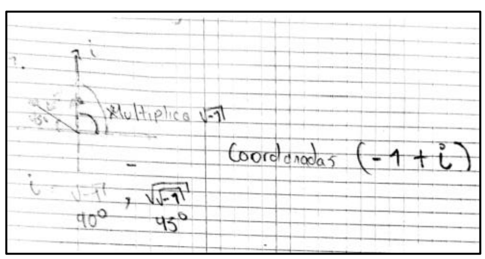


Figura 28. Respuesta estudiantes E2 Actividad N°1 P.F.1. D- I.

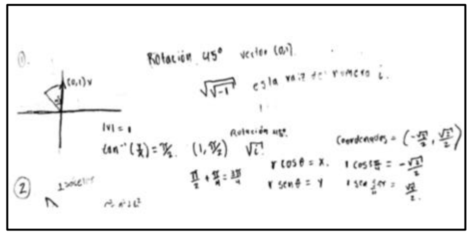


Figura 29. Respuesta estudiantes E6 Actividad N°1 P.F.1. D- I.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Unidad imaginaria,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal (ver Tabla 11).

Tabla 11. Niveles de formación del concepto (unidad imaginaria).

Actividad 1	**UNIDAD IMAGINARIA**					
Estudiantes	PM1	PM2	PA1	PA2	PE1	PF1
E1	A-A	D-I	A-A	A-A	A-A	A-A
E2	D-I	D-I	A-A	S-C	S-C	D-I
E3	A-A	A-A	A-A	A-A	A-A	A-A
E4	A-A	A-A	A-A	A-A	A-A	A-A
E5	Ns/Nr	A-A	A-A	A-A	A-A	A-A
E6	A-A	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I
E7	A-A	D-I	A-A	D-I	A-A	A-A
E8	A-A	D-I	A-A	D-I	A-A	A-A
E9	A-A	D-I	A-A	D-I	A-A	A-A
E10	D-I	A-A	A-A	S-C	D-I	A-A

5.2. Actividad 2. Representaciones

El objetivo de la actividad es conceptualizar los números complejos, a través de diferentes representaciones, caracterizándolas y diferenciándolas en diferentes problemas, esta actividad se desarrolló siguiendo la vía inductiva, el análisis se realiza a partir de las diferentes fases del proceso metodológico con la siguiente cantidad de problemas (ver Tabla 12).

Tabla 12. Número de problemas por etapas. Actividad 2. Representaciones.

Etapa	Número de problemas
Motivación	1
Adquisición	1
Elaboración	2
Fijación-Aplicación	2
Total	6

5.2.1. Motivación

Como eje principal de la motivación se entregó a los estudiantes un plano cartesiano y se les pidió que jugaran "Guerra naval", haciendo algunos cambios a las reglas de juego; a cada grupo se le hizo entrega de un transportador y una regla con la cual debían enviar sus ataques al otro compañero haciendo uso de coordenadas cartesianas y el otro en coordenadas polares.

P.M.1. *¿Cómo localizar un barco sin tener que aproximar haciendo el cambio entre coordenadas polares y cartesianas?*

Tabla 13. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°2 problema 1. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	GRUPOS- ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	G2- G4	40
Discriminación-Identificación	G1	20
Síntesis-Concreción.	G3- G5	40

El análisis de la actividad se hizo de manera grupal: G1 (E1 y E7), G2 (E2 y E8), G3 (E3 y E4), G4 (E5 y E6) y G5 (E9 y E10).

Las estrategias establecidas por los diferentes grupos estuvieron dadas de la siguiente manera (ver Tabla13): G1, transformó el plano cartesiano en uno polar haciendo rectas entre el centro y diferentes puntos del plano cada 10º; G2, no estableció ninguna estrategia más que medir el ángulo y el modulo descrito por su compañero; G3, hizo uso de la trigonometría, ellos explican que sabiendo el lado "x" y el lado "y", se puede saber el ángulo, y por lo tanto el punto de lanzamiento en coordenadas polares puede ser exacto, de igual forma hicieron uso del teorema de Pitágoras para determinar el módulo de lanzamiento.

G4, por su parte no lograron realizar muchos lanzamientos debido a su poca experiencia con coordenadas polares, sus lanzamiento se limitaron al uso de coordenadas cartesianas y sólo en dos ocasiones hicieron uso del ángulo y módulo, sin tener claridad de qué hacer con esos datos. Los estudiante del grupo G5, trabajaron en equipo y enviaban al compañero información adicional para que éste pudiese encontrar fácilmente las coordenadas (polares y cartesianas) por ejemplo, para el punto (3,2), decían a su compañero el ángulo expresado de la siguiente manera "arco tangente de 3/2", con lo cual el compañero podía fácilmente determinar la posición del lanzamiento. Algunos ejemplos se muestran a continuación en las Figuras 30 y 31.

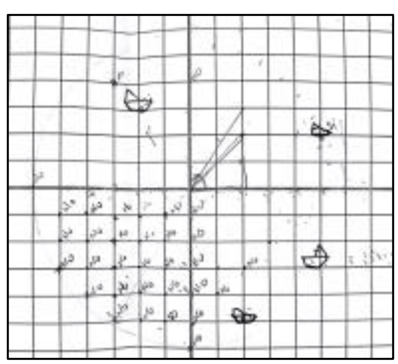


Figura 30. Respuesta G4 (E6) Actividad N°2 P.M.1. A – A.

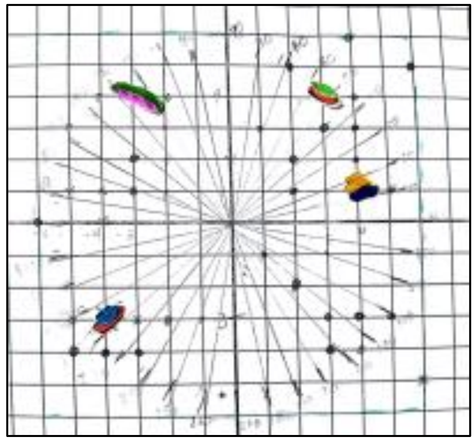


Figura 31. Respuesta G1 (E7) Actividad N°2 P.M.1. D- I.

5.2.2. Adquisición

En esta fase se proponen a los estudiantes problemas relacionados con la ubicación de puntos en coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

<u>P.A.1.</u> *¿Si un barco se encuentra en la posición* $3 + 4i$*, qué distancia hay entre este punto y (0,0), ¿Qué ángulo se forma?*

Tabla 14. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°2 problema 1. Fase de Adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	6	60
Discriminación-Identificación	4	40
Síntesis-Concreción.	0	0

Las respuestas a este problema se vieron inducidas por la experiencia que tuvo cada grupo con el problema anterior, al igual que por las personas que lideraban el juego "guerra naval" (ver Tabla 14).

Es así que los estudiantes E3 y E10 dieron respuestas relacionando la estrategia usada por sus grupos G3 y G5 en el problema anterior. De igual forma E2, E1 y E4 tuvieron que acudir a la trigonometría como su aliada en la solución. De otra parte E5 no tuvo en cuenta que al hallar la tangente del ángulo el lado opuesto se encuentra en el numerador y el adyacente en el denominador. Ejemplo de ello se presenta a continuación (ver Figuras 32 y 33).

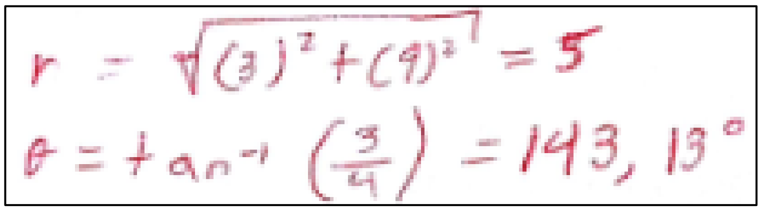


Figura 32. Respuesta estudiante E5 Actividad N°2 P.A.1. A – A.

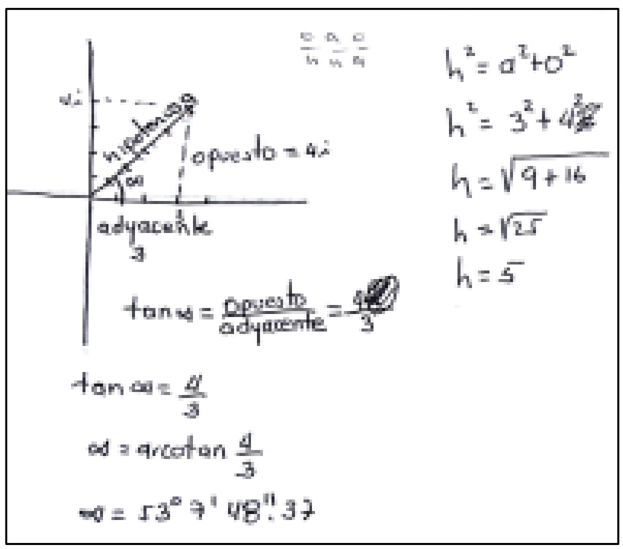


Figura 33. Respuesta Estudiante (E10) Actividad N°2 P.A.1. D- I.

5.2.3. Elaboración

Los problemas que se presentan a los estudiantes se encuentran relacionados con características necesarias y suficientes para poder ubicar un número complejo en el plano.

<u>P.E.1.</u> *¿Si se sabe que los puntos* $3 + 2i$ *y* $5i - 2$ *son vértices de un cuadrado. ¿Cuáles pueden ser los otros dos vértices?*

Tabla 15. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°2 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	6	60
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	1	10

De un total de 10 estudiantes (ver Tabla 15), 6 identifican la característica de los cuadrados frente a sus cuatro ángulos rectos, por lo tanto aplican la multiplicación por *i* de los vértices del cuadrado, otros aplican el conjugado de los vértices. Los cuatro restantes hicieron la mima operación pero al graficar se percataron que al unir dichos puntos la figura obtenida no era un cuadrado, por lo tanto, hallaron la ecuación de una recta y aplicaron los conocimientos que poseían de geometría analítica para determinar la ecuación de la recta perpendicular que pasa por los puntos iniciales, posteriormente reemplazan y pueden así obtener dos soluciones; sin embargo el estudiante E2 determina que estas dos no son las únicas soluciones, sino que además, si los dos puntos no son consecutivos, se debe hallar la mediatriz y reemplazando en la ecuación se halla otra posible solución. Estas respuestas se pueden apreciar en las Figuras 34, 35 y 36.

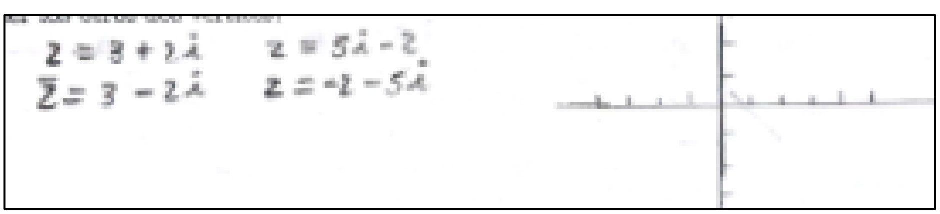


Figura 34. Respuesta Estudiante (E8) Actividad N°2 P.E.1. A- A.

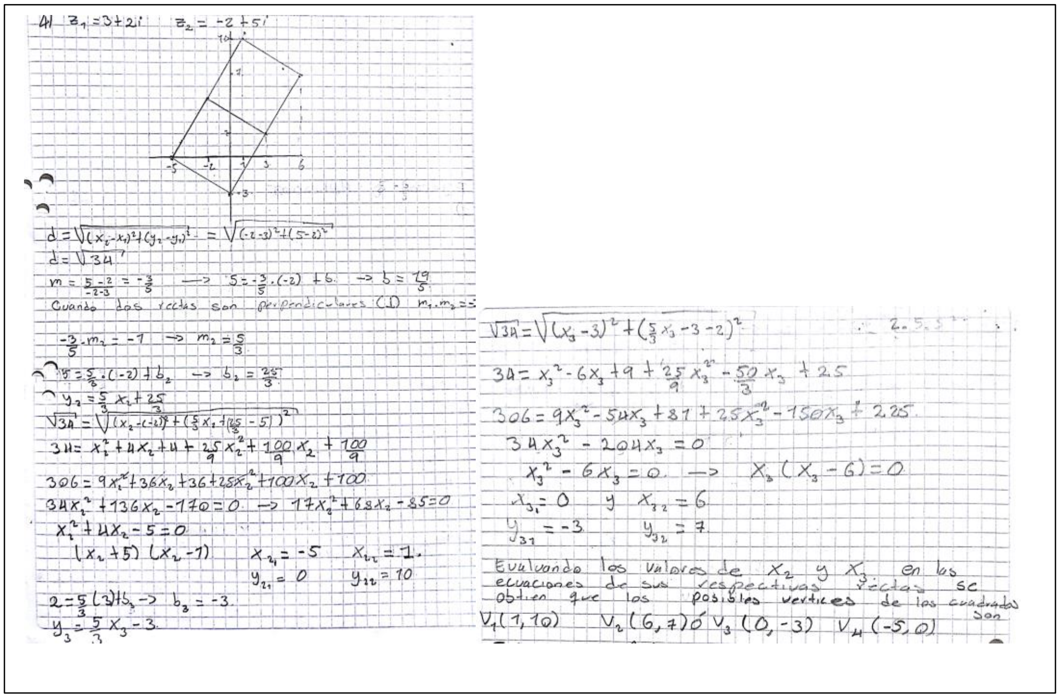


Figura 35. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°2 P.E.1. D- I.

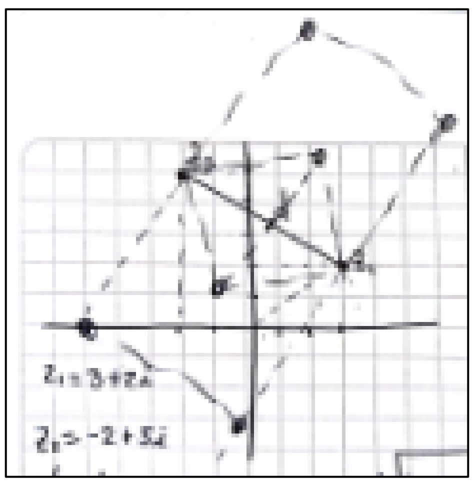


Figura 36. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°2 P.E.1. S- C.

<u>P.E.2.</u> *¿Obtenga la ecuación de la recta a partir de los puntos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 4 - 2i$, es posible generalizarla para cualquier z_1 y z_2?*

Tabla 16. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°2 problema 2. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	7	70
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	0	0

De los 10 estudiantes (ver Tabla 16), 7 de éstos hacen uso de la ecuación de una recta y reemplazan los valores haciendo z_1= *(2,3) y* z_2= (4,-2), sólo 3 de ellos generalizan la ecuación y determinan posibles soluciones si las rectas son paralelas a la recta real o a la recta imaginaria (ver Figura 37).

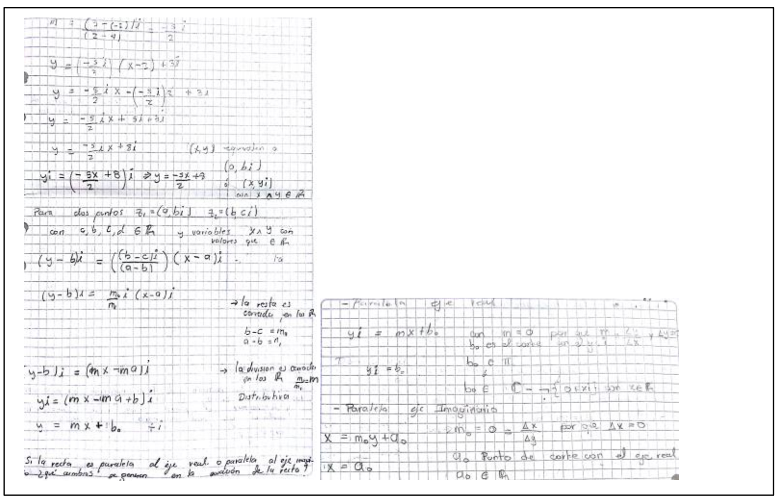


Figura 37. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°2 P.E.2. S- C.

5.2.4. Fijación- aplicación

Estos problemas requieren de la interrelación entre conceptos de otras áreas para su solución. Las soluciones de los problemas se encuentran relacionadas con la geometría.

P.F.1. *Encontrar la Ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$ *y* $z_3 = 3 + 2i$, *y determinar el punto donde ésta circunferencia corta al eje real, imaginario y a la recta de* $Arg(z) = \frac{1}{4}\pi$.

Tabla 17. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°2 problema 1. Fase de fijación- aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	2	20
Síntesis-Concreción.	0	0
Ns/Nr	4	40

Del total de estudiantes 4 no resolvieron el problema (ver Tabla 17), esto debido a que no recuerdan como encontrar la ecuación de una circunferencia que pase por tres puntos, 4 realizan una solución gráfica, ubican los tres puntos, trazan un triángulo desde cada vértice y hallan las mediatrices de dos lados del triángulo**.** Es de destacar que sólo 2 estudiantes E2 y E10 establecen la ecuación de la circunferencia y hallan los puntos de corte con el eje “x” y el eje “y”, pero no logran determinar los puntos de corte con la recta de $Arg(z) = \frac{1}{4}\pi$, ellos no logran establecer las características esenciales de la estructura en su totalidad a partir de la representación polar de los números complejos (ver Figuras 38 y 39).

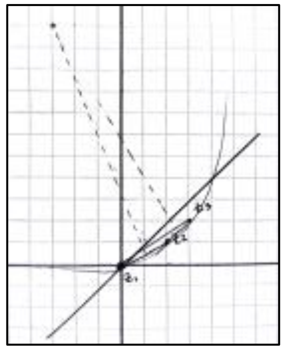


Figura 38. Respuesta Estudiante (E6) Actividad N°2 P.F.1. A- A.


1). $z_1 = 0 = (0,0)$ $z_2 = 2+1i = (2,1)$ $z_3 = 3+2i = (3,2)$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$(0,0) \to 0^2+0^2+A\cdot 0+B0+C=0 \to \boxed{C=0}$ ①

$(2,1) \to 4+1+2A+B+C=0 \to 5+2A+B+C=0$ ②

$(3,2) \to 9+4+3A+2B+C=0 \to 13+3A+2B+C=0$ ③

multiplicando ② por -2 y sumando con ③

$-10-4A-2B-2C=0$
$13+3A+2B+C=0$ $13+3A+2B+C=0$

$3-A=0$ $13+3(3)+2B+0=0$
$\boxed{A=3}$ $22+2B=0$
$2B=-22$
$\boxed{B=-11}$

$x^2+y^2+3x-11y=0 \to$ Ecuación de la Circunferencia

Cuando $y=0$, entonces $x^2+3x=0 \to x=0$ ó $x=-3$
$x(x+3)=0$ Ptos en los que corta al eje Real

Cuando $x=0$, entonces
$y^2-11y=0$
$y(y-11)=0 \to y=0$ ó $y=11$.
Ptos en los que corta al eje imaginario

Figura 39. Respuesta Estudiante (E10) Actividad N°2 P.F.1. D- I.

<u>P.F.2.</u> *Tres fuerzas, como se muestran en la siguiente figura actúan en un plano sobre un objeto colocado en 0. Determinar las coordenadas cartesianas, polares y trigonométricas de cada vector*.

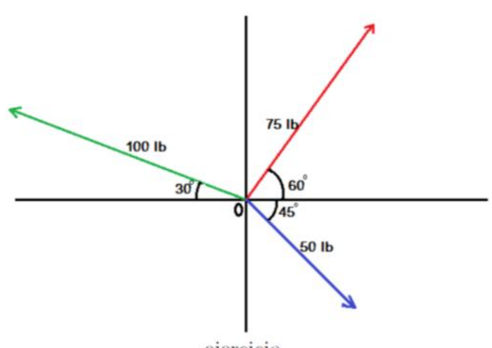


Tabla 18. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°2 problema 2. Fase de fijación- aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción.	4	40

Todos los estudiantes resolvieron el problema propuesto (ver Tabla 18), ellos aplicaron propiedades de los números complejos en un problema de física, identificando diferentes representaciones, establecen comparaciones y similitudes, 6 de ellos determinan las características del sistema y sintetizan el proceso, algunos, por ejemplo E2, exponen que "en el trabajo con vectores vistos como complejos puede llegar a ser más fácil encontrar vectores o fuerzas normales a otra con sólo multiplicar por *i"* (ver Figuras 40 y 41).

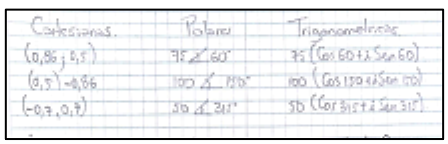


Figura 40. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°2 P.F.2. A- A.

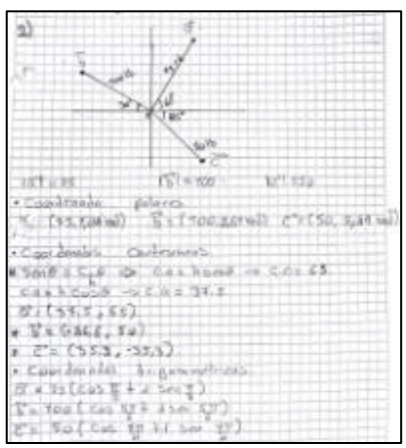


Figura 41. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°2 P.F.2. D- I.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Representaciones,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal.

Tabla 19. Niveles de formación del concepto (representaciones).

Actividad 2	**Representaciones**					
Estudiantes	PM1	PA1	PE1	PE2	PF1	PF2
E1	D-I	A-A	D-I	A-A	A-A	S-C
E2	A-A	A-A	S-C	S-C	D-I	S-C
E3	S-C	D-I	A-A	A-A	Ns/Nr	D-I
E4	S-C	A-A	A-A	A-A	Ns/Nr	D-I
E5	A-A	A-A	A-A	A-A	Ns/Nr	D-I
E6	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A	S-C
E7	D-I	D-I	A-A	S-C	A-A	D-I
E8	A-A	A-A	A-A	A-A	Ns/Nr	D-I
E9	S-C	D-I	A-A	A-A	A-A	D-I
E10	S-C	D-I	D-I	S-C	D-I	S-C

5.3. Actividad 3. Operaciones

El objetivo de la actividad es identificar y aplicar las operaciones con números complejos, caracterizándolas en diferentes representaciones, esta actividad se programó siguiendo la vía mixta y su análisis se estructura según las fases del proceso de integración. La cantidad de problemas de esta actividad se presenta a continuación (ver Tabla 20).

Tabla 20. Número de problemas por etapas. Actividad 3. Operaciones.

Etapa	**Número de problemas**
Motivación	0
Adquisición	2
Elaboración	5
Fijación-Aplicación	3

Total	10

5.3.1. Motivación

Como motivación no se propuso a los estudiantes ningún tipo de problema, se hizo lectura a un resumen sobre la historia de los números complejos y las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división, de igual forma se presenta a los estudiantes el video “Dimensiones”, en él se observa cómo se pueden operar números complejos. Aunque los estudiantes no resolvieron problemas de motivación, en las preguntas realizadas acerca de las operaciones con números complejos, los estudiantes hacen un comparativo entre la suma de vectores que se hace en física con la suma de números complejos desde la representación de puntos en el plano de Argand.

5.3.2. Adquisición

Se presenta a los estudiantes cómo se realizan las diferentes operaciones (suma, resta, multiplicación y división) desde la representación algebraica de los números complejos, el problema presentado a los estudiantes permite que éstos puedan establecer algunas propiedades de las operaciones con números complejos entre ellas la conmutatividad.

P.A.1. $2+3i=2+3i$, es diferente a $3+2i$, ¿por qué?, represéntalos en el siguiente plano.

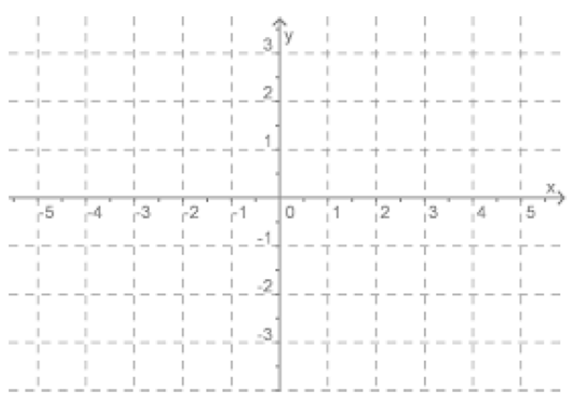


Tabla 21. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 1. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	9	90
Discriminación-Identificación	0	0
Síntesis-Concreción.	1	10

La mayoría de los estudiantes (ver Tabla 21) hicieron la representación gráfica de los dos puntos y concluyeron que los dos números eran distintos, sin embargo E7 pudo establecer que los dos puntos eran distintos no sólo por sus coordenadas rectangulares, sino por sus coordenadas polares, ella concluye que aunque los módulos de los dos números son iguales, el argumento de los dos puntos es distinto (ver Figuras 42 y 43).

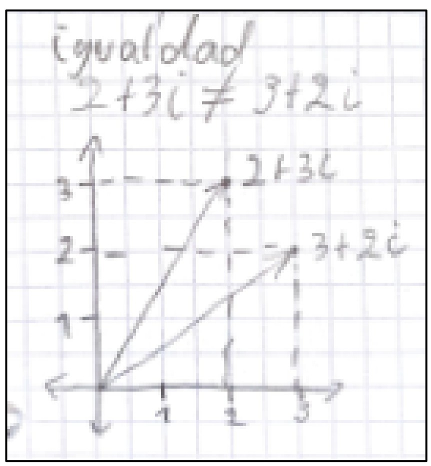


Figura 42. Respuesta Estudiante (E3) Actividad N°3 P.A.1. A- A.

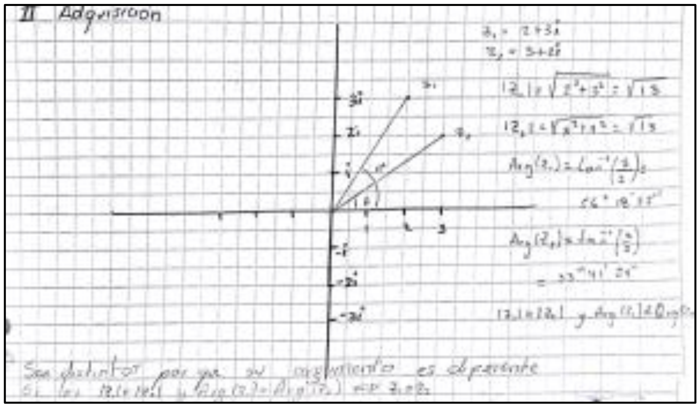


Figura 43. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°3 P.A.1. S- C.

P.A.2. *Suma, resta multiplica y divide los siguientes números* $2 + 5i$ *y* $-4 - 2i$*, son los mismos resultados que sumar, restar, multiplicar y dividir* $-4 - 2i$ *y* $2 + 5i$*.*

Tabla 22. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 2. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	2	20
Discriminación-Identificación	7	70
Síntesis-Concreción.	1	10

De los 10 estudiantes (ver Tabla 22), 2 resolvieron las operaciones colocando primero el número $2 + 5i$ y luego $-4 - 2i$, su conclusión se limitó a determinar que las respuesta eran distintas, 7 de los estudiantes pudieron concluir que la suma al igual que la multiplicación eran conmutativas, pero que la resta y la división no cumplían dicha propiedad, E4, expone que "los números complejos cumplen la propiedad de la conmutatividad al igual que los hacen los números reales", E7 complementa diciendo "claro porque los números reales son complejos, solo que su componente imaginario es cero". De otra parte E2 grafica la suma, resta, multiplicación y división, haciendo uso de vectores y expone que "las operaciones con números complejos cumplen no sólo las propiedades de los números reales, sino que además si se asemejan a vectores como los vistos en física, cumplen las propiedades de conmutatividad en la suma y el producto, además cumplen el producto de un escalar por un vector como una dilatación y contracción" (ver Figura 44 y 45).

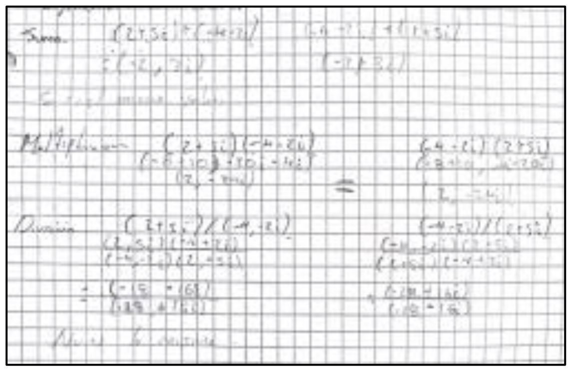


Figura 44. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°3 P.A.2. S- C.

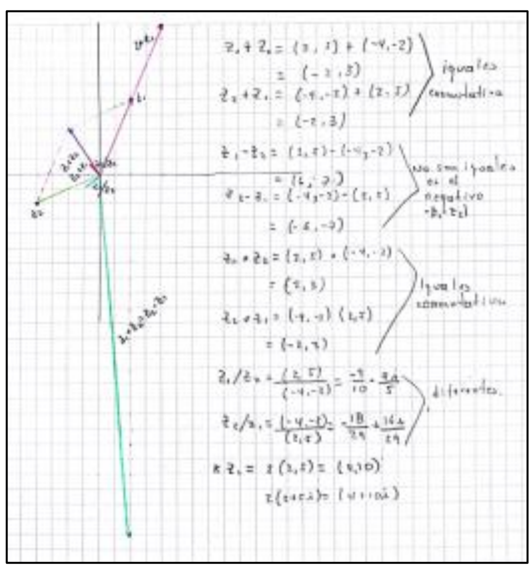


Figura 45. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°3 P.A.2. S- C.

5.3.3. Elaboración

*S*e entrega a cada estudiante la actividad número 2, la cual consiste en que usando el programa Cabri Geometry se identifiquen algunas características de la suma, resta, multiplicación y división de números complejos.

Adicional a ello, los estudiantes verifican que las operaciones de forma algebraica coinciden con las operaciones de forma geométrica.

P.E.1. *¿Cuál es el número complejo de la forma $a + bi,$ que al sumarle otro complejo de la forma $a + bi,$ su resultado es un real, otro complejo, cero, uno, i?*

¿Cuál es el número complejo de la forma $a + bi,$ que al multiplicarle otro complejo de la forma $a + bi,$ su resultado es un real, otro complejo, cero, uno, i?

¿Cuál es el número complejo de la forma $a + bi,$ que al dividirle otro complejo de la forma $a + bi,$ su resultado es un real, otro complejo, cero, uno, i?

Tabla 23. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	7	70
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	0	0

Los estudiantes hicieron grupos de trabajo donde se discutió acerca de cuáles serían los números que al aplicar cada operación su respuesta sería un resultado específico. Siete de 10 estudiantes (ver Tabla 23) a través de las actividades entregadas, encontraron los resultados pedidos, es así que pudieron determinar que en algunos casos se hace necesario los inversos aditivos, multiplicativos, el conjugado y el inverso del conjugado, como se puede apreciar en la Figura 46. Se puede precisar que 3 estudiantes no sólo lo desarrollaron desde el punto de vista gráfico haciendo uso del programa Cabri geometry, sino que además combinaron dicha solución con los conocimientos que tienen sobre las operaciones con complejos y la solución de ecuaciones, adicional a ello encontraron la relación existente entre los argumentos y módulos cuando se multiplican o dividen los números (ver Figuras 46 y 47).

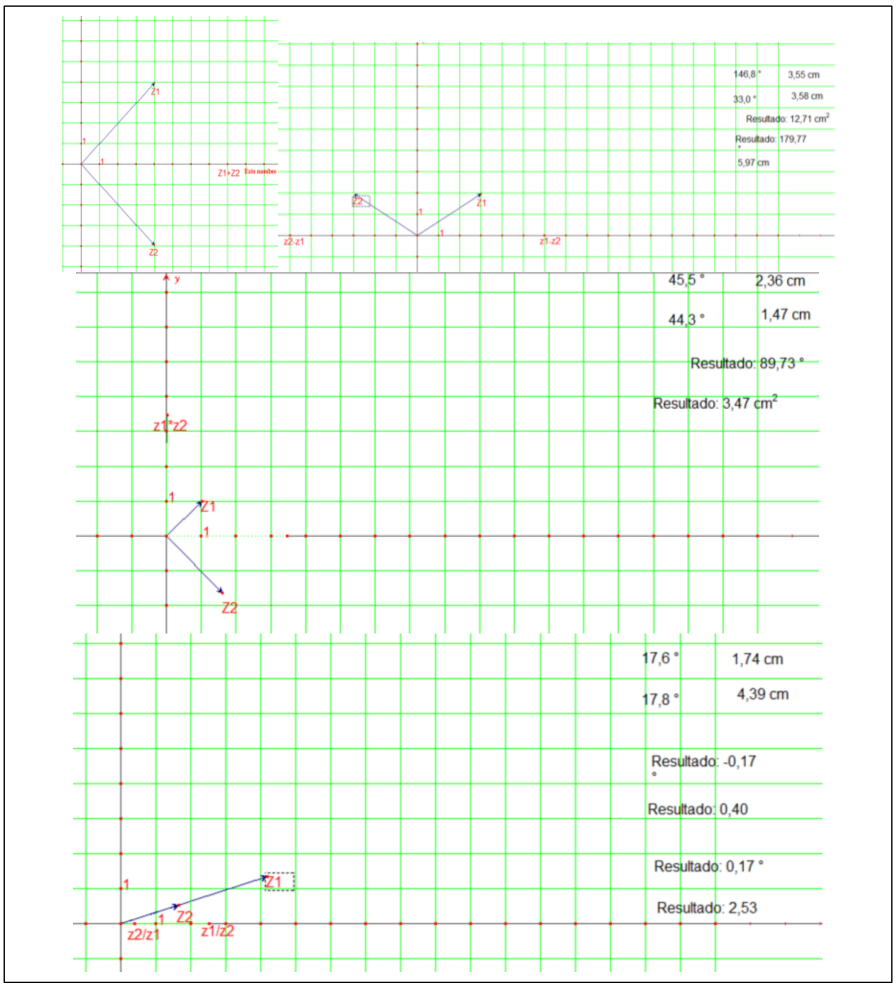


Figura 46. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°3 P.E.1. A- A.

.

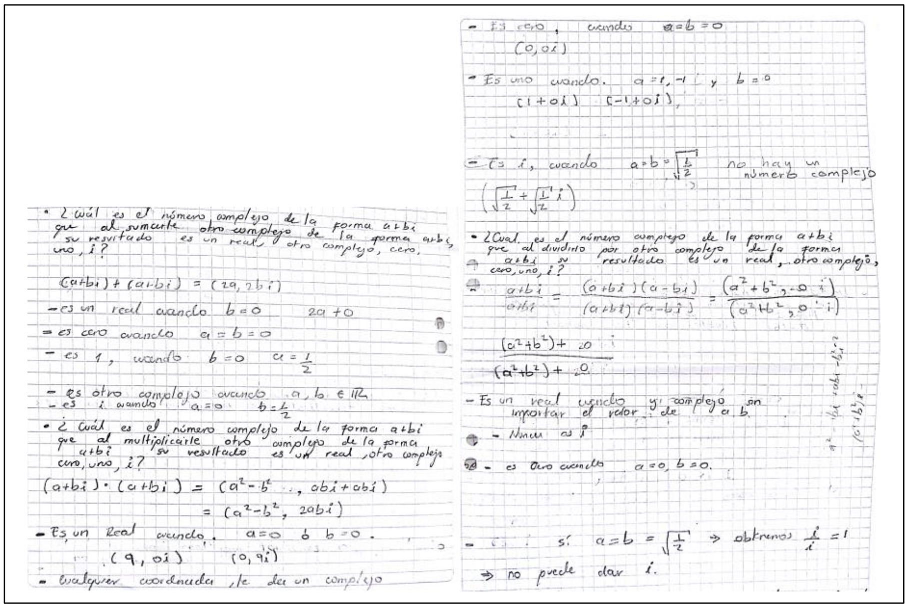


Figura 47. Respuesta Estudiante (E6) Actividad N°3 P.E.1. D- I.

P.E.2. *La suma de dos números conjugados es 6 y la suma de sus módulos es 10. ¿De qué número complejo se trata?*

Tabla 24. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 2. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

P.E.3. *Dados dos números complejos cualesquiera se sabe que su diferencia es real, su suma tiene parte real 8 y su producto es* $11 - 6i$*, ¿Cuáles son los números?*

Tabla 25. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 3. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

<u>P.E.4.</u> *Si al multiplicar dos números complejos el resultado es -2 y el cubo de uno de ellos dividido entre el otro es ½, calcule los números complejos de la forma polar.*

Tabla 26. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 4. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

<u>P.E.5.</u> *¿Cuál es el número complejo que después de multiplicarlo por $1 - i$, sumarle $-3 + 5i$, y dicho resultado dividirlo por $2 + 3i$; se obtiene como valor final el número complejo inicial?*

Tabla 27. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 5. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

Los 10 estudiantes (ver Tabla 24, 25, 26 y 27) desarrollaron los problemas haciendo uso del conocimiento que tienen de algebra, sólo al final de cada problema hicieron el cambio a coordenadas polares o cartesianas según fuera el caso, hacen uso de las diferentes representaciones de los números complejos y de las propiedades en sus operaciones. Un ejemplo de ello se presenta a continuación (ver Figuras 48, 49, 50 y 51).

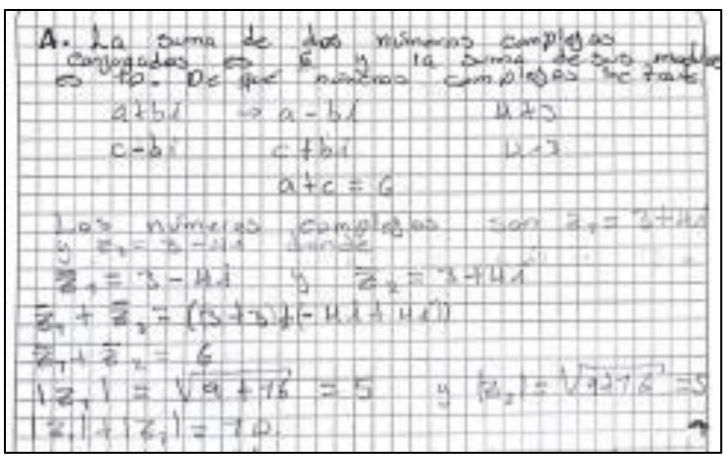


Figura 48. Respuesta Estudiante (E4) Actividad N°3 P.E.5. D- I.

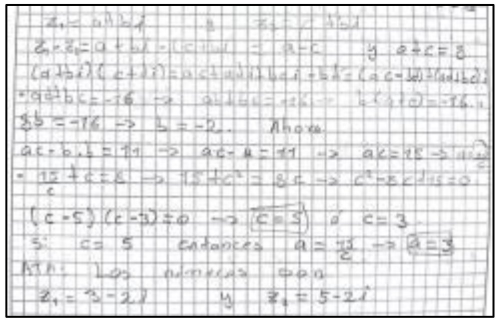


Figura 49. Respuesta Estudiante (E3) Actividad N°3 P.E.5. D- I.

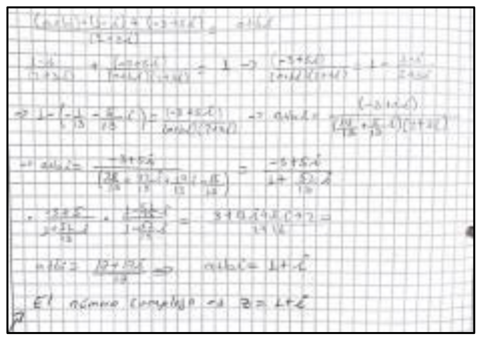


Figura 50. Respuesta Estudiante (E6) Actividad N°3 P.E.5. D- I.

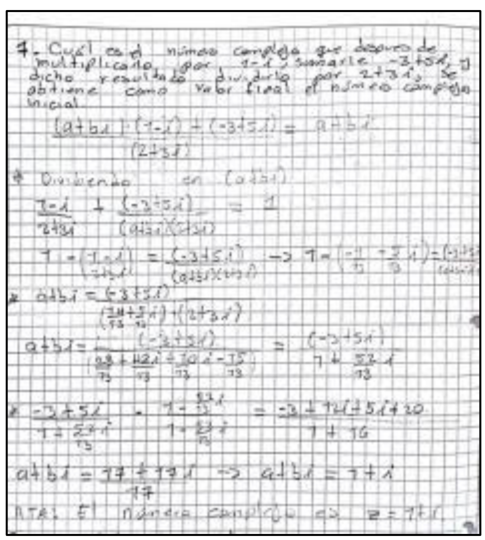


Figura 51. Respuesta Estudiante (E8) Actividad N°3 P.E.5. D- I.

5.3.4. Fijación- aplicación

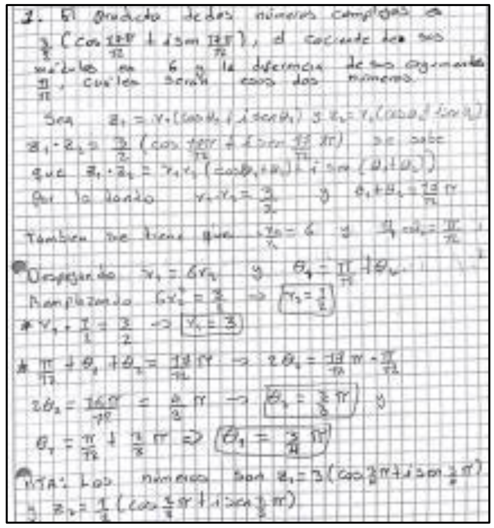
Con problemas donde el uso de operaciones con complejos son una opción en su solución. En estos problemas se pone a prueba el conocimiento que tienen los estudiantes y la apropiación de los conceptos anteriores.

P.F.1. *El producto de dos números complejos es* $\frac{3}{2}(cos\frac{17\pi}{12} + sen\ \frac{17\pi}{12})$*, el cocinte de sus módulos es 6 y la diferencia de sus argumentos es* $\frac{\pi}{12}$*, cuáles serán esos dos números.*

Tabla 28. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 1. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de estudiantes (ver Tabla 28) 4 establecieron estrategias que implicaban el paso de la representación trigonométrica a la cartesiana, 6 de los estudiantes tuvieron en cuenta que se puede hacer el cambio a coordenadas polares haciendo uso del ángulo dado y el módulo, ellos usaron las propiedades de la multiplicación y división, bajo la representación polar para hallar de manera rápida la solución (ver Figuras 52 y 53).



1. El producto de dos números complejos es $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right)$, el cociente de sus módulos es 6 y la diferencia de sus argumentos $\frac{\pi}{12}$, cuáles serán esos dos números.

Sea $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{17}{12}\pi\right)$ se sabe que $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2))$

Por lo tanto $r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{2}$ y $\theta_1 + \theta_2 = \frac{17}{12}\pi$

También se tiene que $\frac{r_1}{r_2} = 6$ y $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{12}$

Despejando $r_1 = 6r_2$ y $\theta_1 = \frac{\pi}{12} + \theta_2$

Remplazando $6r_2^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{1}{2}}$

* $r_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{r_1 = 3}$

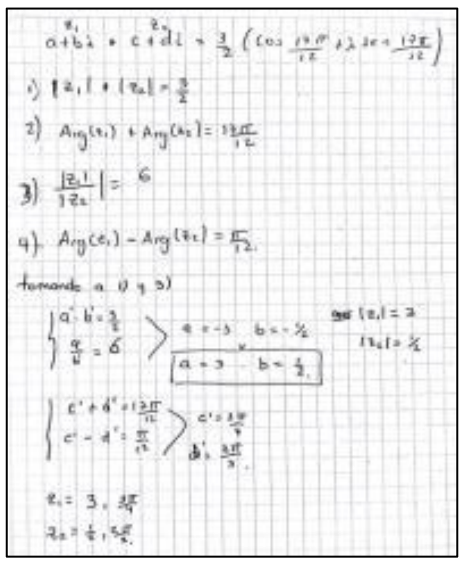
* $\frac{\pi}{12} + \theta_2 + \theta_2 = \frac{17}{12}\pi \Rightarrow 2\theta_2 = \frac{17}{12}\pi - \frac{\pi}{12}$

$2\theta_2 = \frac{16\pi}{12} = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \frac{2}{3}\pi}$ y

$\theta_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{3}{4}\pi}$

RTA: Los números son $z_1 = 3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$ y $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)$

Figura 52. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°3 P.F.1. A- A.



$\overset{z_1}{a+bi} \cdot \overset{z_2}{c+di} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right)$

1) $|z_1| \cdot |z_2| = \frac{3}{2}$

2) $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \frac{17\pi}{12}$

3) $\left|\frac{|z_1|}{|z_2|}\right| = 6$

4) $\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{12}$

tomando a 1) y 3)

$\left\{\begin{array}{l} a' \cdot b' = \frac{3}{2} \\ \frac{a}{b} = 6 \end{array}\right.$ $a = -3$, $b = -\frac{1}{2}$ $\boxed{a = 3 \quad b = \frac{1}{2}}$ $|z_1| = 3$ $|z_2| = \frac{1}{2}$

$\left\{\begin{array}{l} c' + d' = \frac{17\pi}{12} \\ c' - d' = \frac{\pi}{12} \end{array}\right.$ $c' = \frac{3\pi}{4}$ $d' = \frac{2\pi}{3}$

$z_1 = 3, \frac{3\pi}{4}$

$z_2 = \frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}$

Figura 53. Respuesta Estudiante (E9) Actividad N°3 P.F.1. D- I.

P.F.2. *Deduzca que* $\left||z_1| - [z_2]\right| \leq |z_1 - z_2|$, *interprete geométricamente las cantidades para luego aplicar la desigualdad triangular.*

Tabla 29. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 2. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	6	60
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	0	0
Ns/Nr	1	10

De los 10 estudiantes participantes (ver Tabla 29) 6 aplicaron la desigualdad triangular a dos números complejos, pero no demostraron o interpretaron de manera geométrica la situación, solo 3 de ellos graficaron la situación y establecieron que si se tienen dos números complejos al trazar una circunferencia de radio igual al módulo del número, podrían visualizar la situación que se les presentaba (ver Figuras 54 y 55).

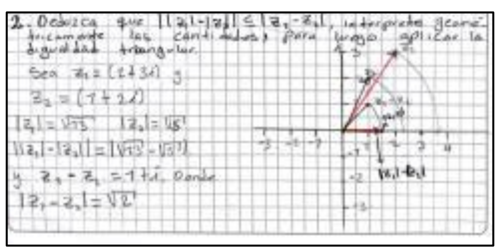


Figura 54. Respuesta Estudiante (E3) Actividad N°3 P.F.2. A- A.

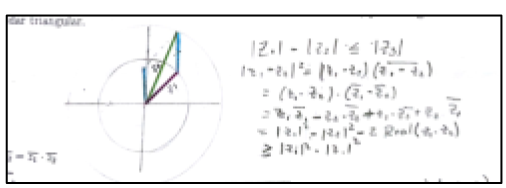


Figura 55. Respuesta Estudiante (E9) Actividad N°3 P.F.2. D- I.

P.F.3. *Demuestre que* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Tabla 30. Niveles de formación del concepto (Operaciones) Actividad N°3 problema 3. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	8	80
Discriminación-Identificación	1	10
Síntesis-Concreción.	1	10

La mayoría de los estudiantes (ver Tabla 30), 8 resolvieron el problema haciendo uso de la representación algebraica de los números complejos, con lo cual pudieron concluir que la conjugada del producto de dos números complejos es igual al producto de las conjugadas de los números; 1 estudiante E10 agregó a la demostración la representación polar de los números complejos y adiciona una característica de la conjuga como el inverso del ángulo agregándole el signo menos; el estudiante E2 establece una relación geométrica de los productos (ver Figuras 56, 57 y 58).

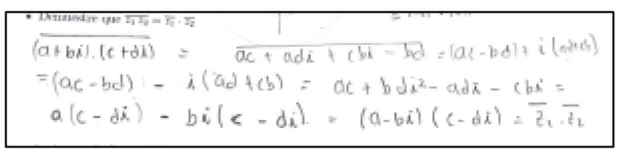


Figura 56. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°3 P.F.3. A- A.

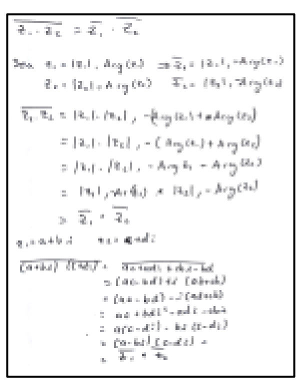


Figura 57. Respuesta Estudiante (E10) Actividad N°3 P.F.3. D- I.

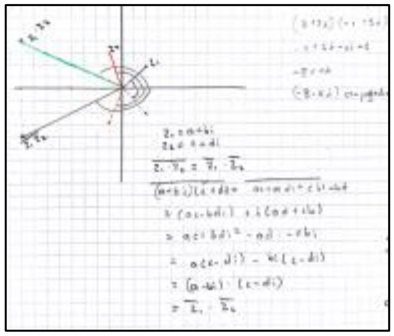


Figura 58. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°3 P.F.3. S- C.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Operaciones,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal, como se muestra en la Tabla 31.

Tabla 31. Niveles de formación del concepto (Operaciones).

Actividad 3					Operaciones					
Estudiantes	PA1	PA2	PE1	PE2	PE3	PE4	PE5	PF1	PF2	PF3
E1	A-A	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A
E2	A-A	S-C	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	S-C	S-C
E3	A-A	A-A	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A	A-A
E4	A-A	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A	A-A
E5	A-A	A-A	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A
E6	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A	A-A
E7	S-C	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	S-C	A-A
E8	A-A	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A	A-A
E9	A-A	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A
E10	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	S-C	D-I

5.4. Actividad 4. Potencias

El objetivo de la actividad es deducir algunas propiedades de la potenciación mediante la multiplicación, haciendo uso de la representación exponencial de los complejos y la formula de Moivre, en diferentes situaciones. Esta actividad se desarrolló siguiendo la vía inductiva. La cantidad de problemas de esta actividad se presenta a continuación en la Tabla 32.

Tabla 32. Número de problemas por etapas. Actividad 4. Potencias.

Etapa	Número de problemas
Motivación	0
Adquisición	2
Elaboración	2
Fijación-Aplicación	2
Total	6

5.4.1. Motivación

Como parte de la motivación se hace entrega a los estudiantes de una lectura con algunos datos curiosos de la vida de Moivre, y sus resultados frente a las operaciones con números complejos. Aunque no se presentan problemas en esta etapa, los estudiantes al verse envueltos en las operaciones con complejos y las potencias de un número complejo, empezaron a recordar el cómo se multiplica un número complejo y hacer aseveraciones sobre cómo elevar un número complejo a una potencia, muchos de ellos propusieron el multiplicar varias veces $a + bi$, cuantas veces diga el exponente.

5.4.2. Adquisición

En esta etapa los problemas requieren de la multiplicación sucesiva, se trata que los estudiantes deduzcan la fórmula de Moivre, además de establecer la relación entre las diferentes representaciones de los números complejos y la fórmula de Euler.

P.A.1. *Calcula la siguiente potencia:* $(2 + i)^{12}$.

Tabla 33. Niveles de formación del concepto (Potencias) Actividad N°4 problema 1. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	6	60
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	1	10

De los 10 estudiantes (ver Tabla 33) 6 multiplican el número $(2+i)$ doce veces con lo cual encuentran el número, 3 de los 10, deciden escribir el número $(2+i)$ en forma polar y elevar el módulo a la 12, además de multiplicar su argumento por 12, al realizar dicha operación se dieron cuenta, que el ángulo superaba los 360º e hicieron la equivalencia correspondiente. De otra parte E10, no sólo desarrolla el problema, sino que hace uso de la representación polar, trigonométrica y gráfica, con el programa GeoGebra (ver Figuras 59, 60 y 61).

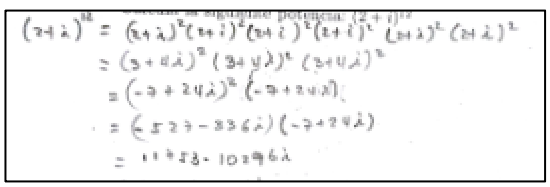


Figura 59. Respuesta Estudiante (E9) Actividad N°4 P.A.1. A- A.

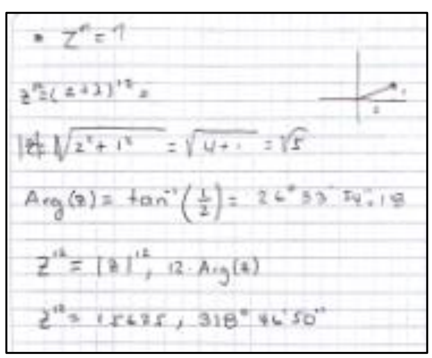


Figura 60. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°4 P.A.1. D- I.

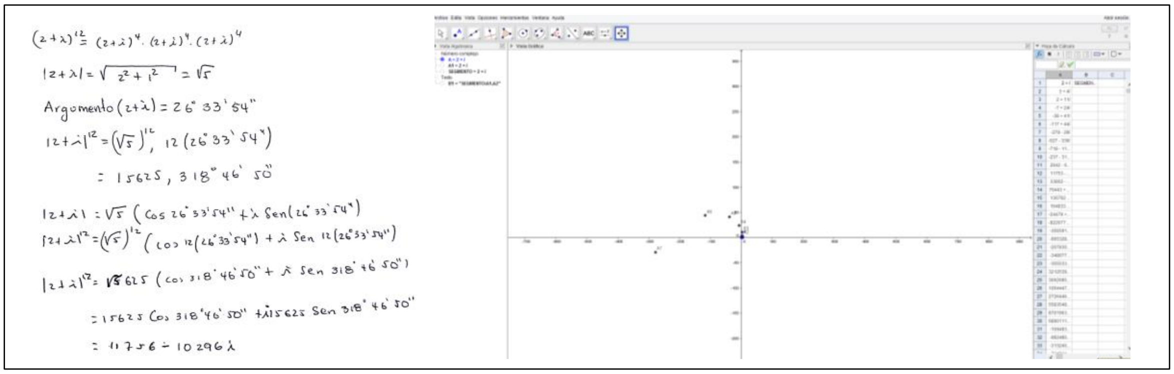


Figura 61. Respuesta Estudiante (E10) Actividad N°4 P.A.1. S- C.

<u>P.A.2.</u> *Dado que* $z = re^{i\theta} = r(cos\theta + i\ sen\theta)$, *establezca una fórmula para determinar la multiplicación, división y potencias de números complejos.*

Tabla 34. Niveles de formación del concepto (Potencias) Actividad N°4 problema 2. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	5	50
Discriminación-Identificación	4	40
Síntesis-Concreción.	1	10

Del total de estudiantes (ver Tabla 34), la mitad de estos establecieron una posible fórmula para la multiplicación, división y potencias de números complejos a partir de la representación exponencial, 4 estudiantes dedujeron la ecuación, aunque sólo 1 pone a prueba su conjetura (ver Figuras 62, 63 y 64).

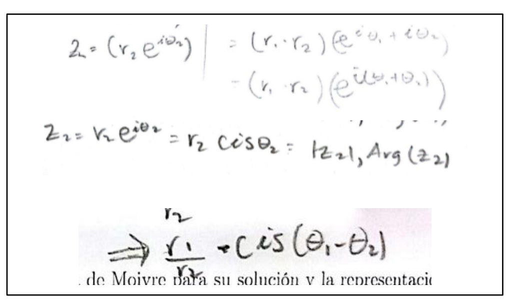


Figura 62. Respuesta Estudiante (E9) Actividad N°4 P.A.2. A- A.

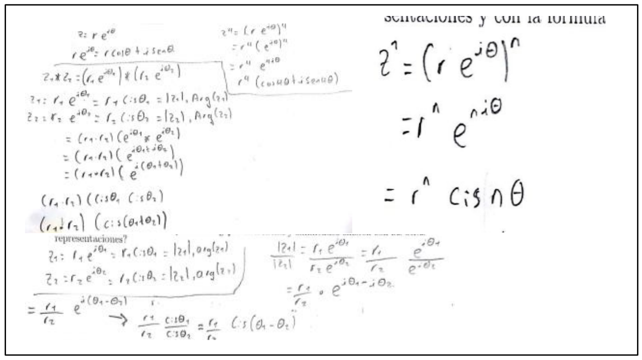


Figura 63. Respuesta Estudiante (E3) Actividad N°4 P.A.2. D- I.

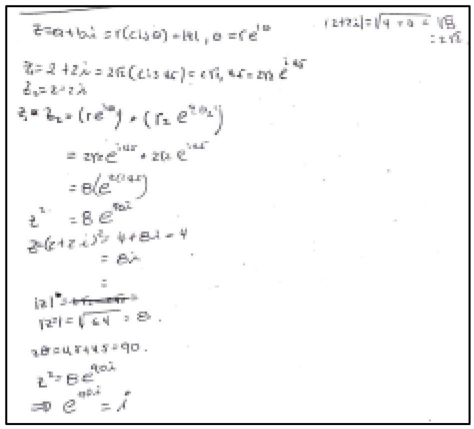


Figura 64. Respuesta Estudiante (E10) Actividad N°4 P.A.2. S- C.

5.4.3. Elaboración

Las actividades propuestas en esta etapa se relacionan con otras representaciones y soluciones, con la representación exponencial y la fórmula de Moivre, con el fin de afianzar no sólo el conocimiento nuevo, sino conocimientos anteriores

P.E.1. *Realiza las siguientes potencias (usa el teorema de Moivre para su solución y la representación exponencial.*

i^1 $\qquad$ i^2 $\qquad$ i^3 $\qquad$ i^4 $\qquad$ i^{27}

Tabla 35. Niveles de formación del concepto (Potencias) Actividad N°4 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

Los 10 estudiantes (ver Tabla 35) establecieron relaciones entre las representaciones exponenciales y las potencias de números complejos, en el último hicieron uso de propiedades determinadas en la actividad 1.

Los estudiantes establecen relaciones entre las potencias ya conocidas de i y deducen a partir de la fórmula de Moivre que los resultados obtenidos de forma geométrica y con el nuevo teorema coinciden, es así que el uso de la representación exponencial se les facilita y logran hacer deducciones como $e^{i\pi} = -1$ (ver Figura 65).

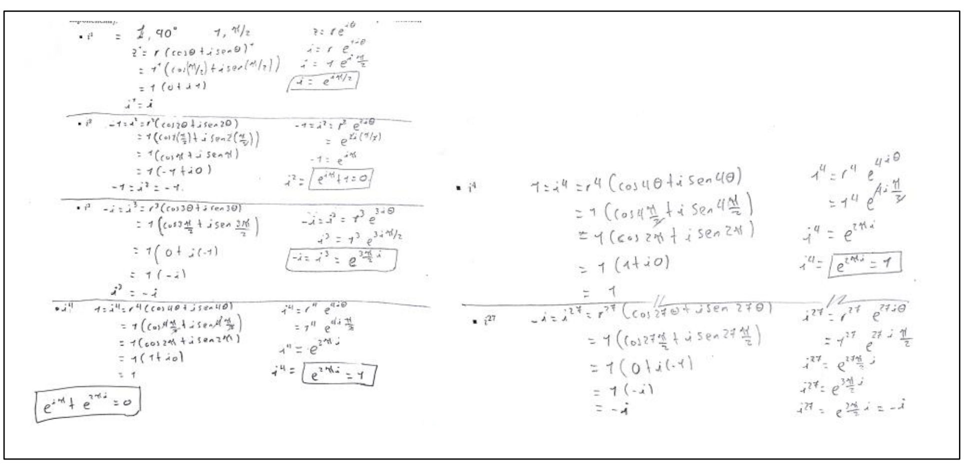


Figura 65. Respuesta Estudiante (E8) Actividad N°4 P.E.1. D- I.

<u>P.E.2.</u> *Usa el teorema de Moivre para hallar potencias de números reales.*

Tabla 36. Niveles de formación del concepto (Potencias) Actividad N°4 problema 2. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	7	70
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de estudiantes participantes (ver Tabla 36) 7 realizaron las potencias de número reales haciendo uso del teorema de Moivre, la mayoría de ellos tomaron potencias de números reales conocidos y al aplicar el teorema encontraron que la solución era la misma, por lo tanto era posible "extender el teorema de Moivre a los números reales" como lo afirma E2.

De otra parte el estudiante E7, E1 y E10 no sólo hallan las potencias de números complejos haciendo uso de la fórmula de Moivre, sino que además encuentran otras relaciones y propiedades de la representación exponencial de los números complejos, deduciendo la fórmula de Euler (ver Figuras 66 y 67).

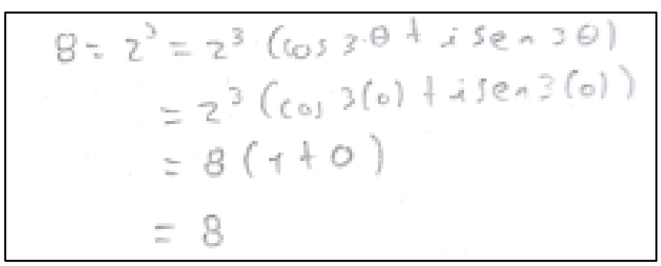


Figura 66. Respuesta Estudiante (E4) Actividad N°4 P.E.2. A- A.

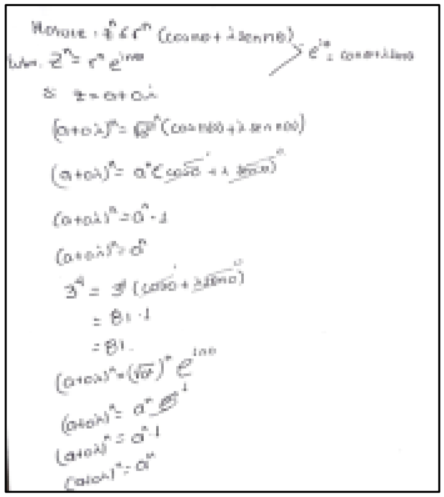


Figura 67. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°4 P.E.2. D- I.

5.4.4. Fijación-aplicación

Con problemas donde el uso de la representación exponencial y la fórmula de Moivre permiten su solución. Algunos de los problemas propuestos están relacionados con demostraciones de ángulos dobles en trigonometría.

P.F.1. *Demostrar que:* $cos3\theta = cos^3\theta - 3\ cos\theta\ sen^2\theta$.

Tabla 37. Niveles de formación del concepto (Potencias) Actividad N°4 problema 1. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	7	70
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	0	0

De los estudiantes participantes (ver Tabla 37) 7 demostraron que $cos3\theta = cos^3\theta - 3\ cos\theta\ sen^2\theta$, haciendo uso del teorema de Moivre y utilizando la propiedad de igualdad entre números complejos, sólo un grupo de 3 estudiantes lograron establecer otras relaciones como $sen3\theta$, $sen2\theta$ y $cos2\theta$. Los estudiantes exponen que esta es "una manera de poder recordar algunas identidades trigonométricas sobre ángulos dobles y más, que se enseñan en trigo" dice E4. Situaciones que se pueden observar en las Figuras 68 y 69.

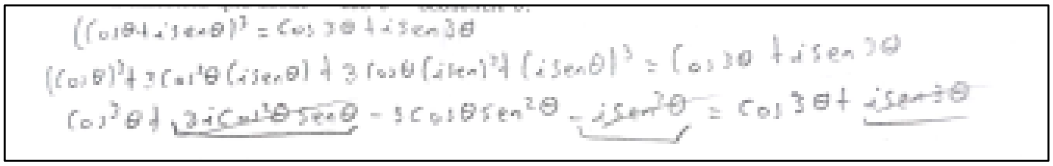


Figura 68. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°4 P.F.1. A- A.

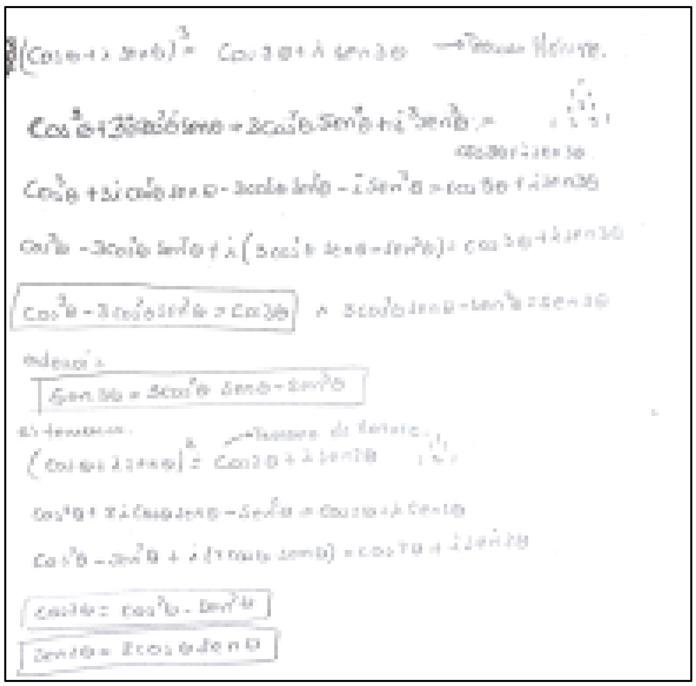
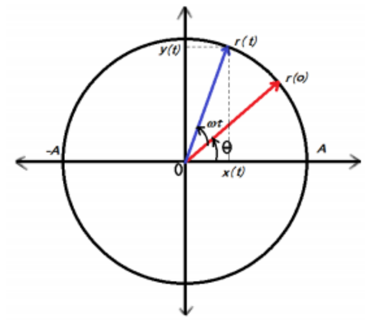


Figura 69. Respuesta Estudiante (E4) Actividad N°4 P.F.1. D- I.

<u>P.F.2.</u> *Considérese una partícula que recorre una circunferencia centrada en el origen y de radio r con una velocidad angular ω constante, como se muestra en la figura.*



Suponga que su posición inicial para t = 0 está dada por (A cosθ, A senθ). La posición de esta partícula en cualquier tiempo t es: r(t) = (A cos (ωt + θ), A sen(ωt + θ)).

a) Expresa a r(t) usando números complejos.

b) Expresa a r(t)de la forma exponencial compleja.

c) Halla r(0), interpreta la respuesta.

d) Halla la parte real y la parte imaginaria de r(t), las coordenadas de r(t) en el eje "x" y en el eje "y".

Tabla 38. Niveles de formación del concepto (Potencias) Actividad N°4 problema 2. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de los estudiantes (ver Tabla 38) fue posible que en su mayoría que 6 pudiesen encontrar una relación entre el movimiento circular, la posición de una partícula y las diferentes representaciones que puede tener la posición de una partícula relacionada con los números complejos. Solo 4 de ellos no pudieron interpretar el significado de r(0). Ellos asociaron las representaciones a los números complejos, pero no interpretan desde el punto de vista físico la situación. Un estudiante E2 expresa que después de ver este problema logra entender algunas implicaciones que se tienen en la física, el asevera “es como si fuesen creados pensando en la física” (ver Figuras 70, 71 y 72).

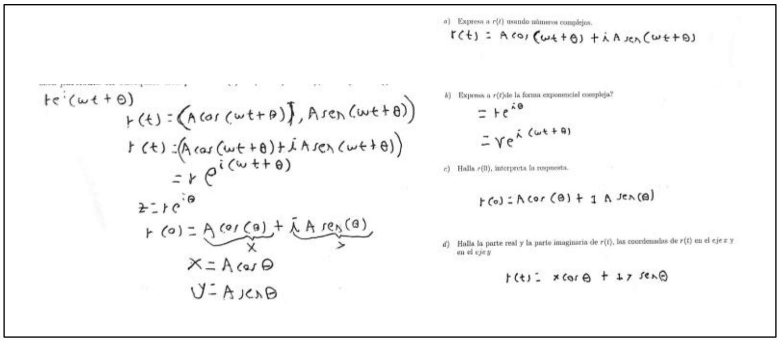


Figura 70. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°4 P.F.2. A- A.

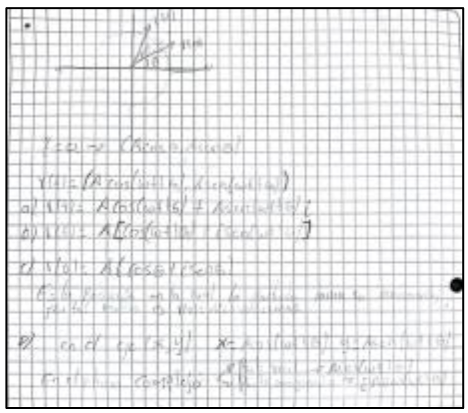


Figura 71. Respuesta Estudiante (E3) Actividad N°4 P.F.2. D- I.

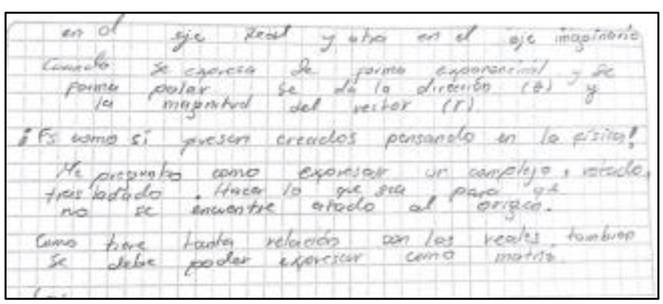


Figura 72. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°4 P.F.2. D- I.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Potencias,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal (ver Tabla 39).

Tabla 39. Niveles de formación del concepto (Potencias).

Actividad 4	Potencias					
Estudiantes	PA1	PA2	PE1	PE2	PF1	PF2
E1	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A
E2	D-I	D-I	D-I	A-A	D-I	D-I
E3	A-A	D-I	D-I	A-A	A-A	D-I
E4	A-A	A-A	D-I	A-A	D-I	D-I
E5	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A	A-A
E6	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A	A-A
E7	D-I	S-C	D-I	D-I	D-I	D-I
E8	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A	A-A
E9	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A	D-I
E10	S-C	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I

5.5. Actividad 5. Raíces

El objetivo de la actividad es determinar las raíces n-ésimas de un número complejo e interpretarlas geométricamente. Esta actividad se programó siguiendo la vía mixta. La cantidad de problemas de esta actividad se presentan a continuación en la Tabla 40.

Tabla 40. Número de problemas por etapas. Actividad 5. Raíces.

Etapa	Número de problemas
Motivación	2
Adquisición	1
Elaboración	2
Fijación-Aplicación	2
Total	7

5.5.1. Motivación

Los problemas plantados hacen referencia a la construcción de polígonos regulares con el fin de establecer relaciones con las raíces de un número complejo y su representación gráfica.

P.M.1. *Halla las coordenadas de los vértices z_1, z_2 y z_3 de un triángulo equilátero de centro (0, 0), si se sabe que uno de sus vértices se encuentra ubicado en z = 3 + 0i. Grafica el triángulo.*

Tabla 41. Niveles de formación del concepto (Raíces) Actividad N°5 problema 1. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	5	50
Síntesis-Concreción.	1	10

De los estudiantes participantes (ver Tabla 41) 4 de ellos entendieron el problema y trataron de dar una solución gráfica haciendo uso de la regla, sin embargo trazaron triángulos isósceles, más no equiláteros, 6 de ellos trazaron el triángulo equilátero haciendo uso de los conocimientos que tenían de geometría, hallaron los vértices. Vale precisar que sólo un estudiante (E2), pudo establecer que cada vértice correspondía a dividir 360° entre 3 y que al trazar una circunferencia de radio el módulo de z_1, era posible encontrar los otros dos vértices, asociándole a cada punto coordenadas polares, este estudiante pudo determinar que si se escribe en términos trigonométricos había que dividir el ángulo y sumarle el anterior (ver Figuras 73, 74 y 75).

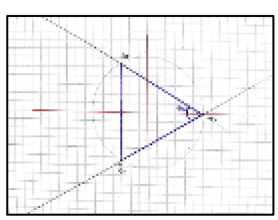


Figura 73. Respuesta Estudiante (E3) Actividad N°5 P.M.1. A- A.

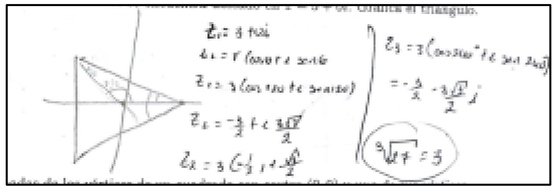


Figura 74. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°5 P.M.1. D- I.

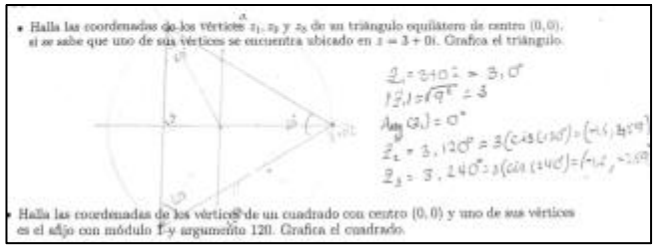


Figura 75. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°5 P.M.1. S- C.

<u>P.M.2.</u> *Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado con centro (0, 0) y uno de sus vértices es el afijo con módulo 1 y argumento 120. Grafica el cuadrado.*

Tabla 42. Niveles de formación del concepto (Raíces) Actividad N°5 problema 2. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	2	20
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción.	2	20

De los 10 estudiantes (ver Tabla 42) 2 de ellos establecieron que la solución correspondía en determinar el inverso y conjugado del punto, sin tener en cuenta que los valores obtenidos correspondían a los vértices de un cuadrado, 6 de los estudiantes tomaron la estrategia del estudiante E2 y al valor de 360°, lo dividieron en 4 y empezaron a sumarle a 120° los 90° obtenidos, como el modulo no cambiaba, trazaron una circunferencia, con lo cual pudieron graficar el cuadrado, sólo dos de ellos hicieron uso de la representación trigonométrica de los complejos, hallando una fórmula que les permitiera poder determinar una ecuación para hallar los vértices de un polígono regular de n lados (ver Figuras 76, 77 y 78).

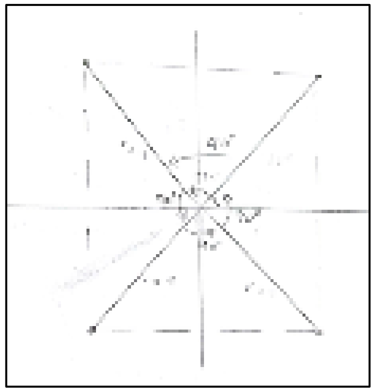


Figura 76. Respuesta Estudiante (E6) Actividad N°5 P.M.2. A- A.

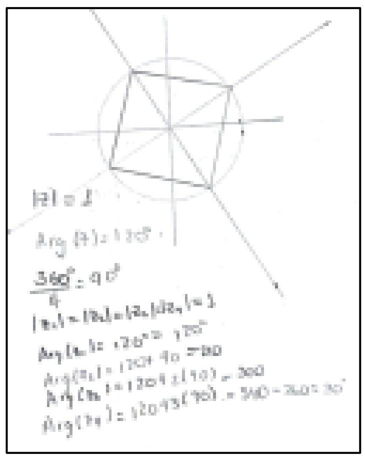


Figura 77. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°5 P.M.2. D- I.

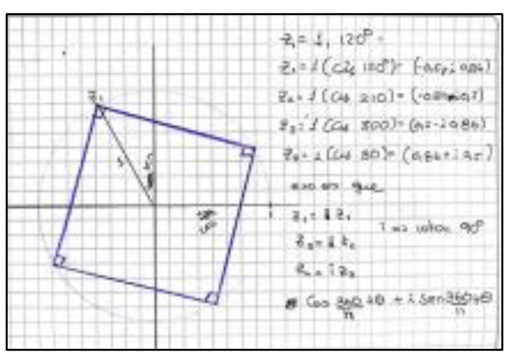


Figura 78. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°5 P.M.2. S- C.

5.5.2. Adquisición

Esta etapa contiene problemas que relacionan el Teorema de Moivre con las raíces de números complejos y su relación gráfica con la construcción de polígonos regulares. Los problemas propuestos permitieron que los estudiantes establecieran una ecuación para hallar las raíces de números complejos.

P.A.1. *Usa el teorema de Moivre para hallar las tres raíces cúbicas de z = 3 + 0i, ¿qué relación existe con los tres puntos hallados en el problema 1? Usa el teorema para hallar las raíces cuartas del número z de módulo 1 y argumento 120, ¿qué relación existe con los cuatro puntos hallados en el problema 2? Utiliza el programa GeoGebra para graficar las raíces cuadradas, cúbicas, sextas, séptimas, de un número complejo.*

Tabla 43. Niveles de formación del concepto (Representaciones) Actividad N°5 problema 1. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	3	30
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción.	1	10

Los 10 estudiantes participantes (ver Tabla 43), utilizaron el teorema de Moivre pero no encontraron una relación con las gráficas, debido a que no determinaron todas las raíces de z, sólo la primera, mientras que 6 de ellos hallaron las tres raíces debido a que encontraron una relación entre los ángulos que se forman y el problema anterior, ellos pudieron concluir que corresponde a los vértices de un triángulo solo que éste es semejante al otro, tienen los mismos ángulos pero los módulos son diferentes. Sin embargo un estudiante E2 puede concluir que “se debe hacer una modificación al teorema de Moivre porque expresándolo sólo con dividir 360 en 3 o 4 o los que sean, no se halla sino un sólo vértice de la figura”. Este estudiante establece una fórmula para encontrar las raíces n- ésimas de un número complejo (ver Figuras 79, 80 y 81).

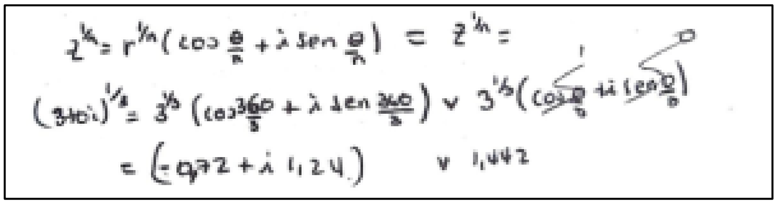


Figura 79. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°5 P.A.1. A- A.

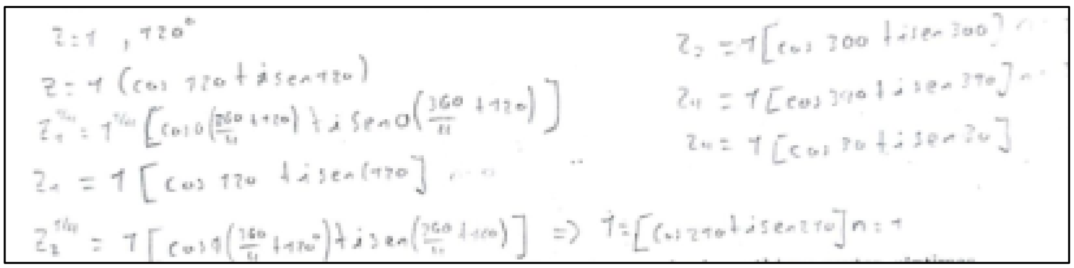


Figura 80. Respuesta Estudiante (E8) Actividad N°5 P.A.1. D- I.

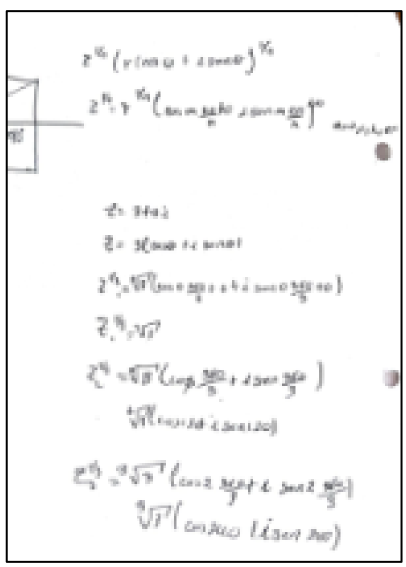


Figura 81. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°5 P.A.1. S- C.

5.5.3. Elaboración

Esta etapa contiene problemas que relacionan el Teorema de Moivre con las raíces de números complejos y su correspondencia gráfica con polígonos regulares, adicional a ello se relacionan las soluciones de ecuaciones con las raíces y el Teorema Fundamental del Algebra.

P.E.1. *Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3, sabiendo que un vértice está situado en el eje real positivo.*

Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro (0; 0), si se sabe que uno de sus afijos tiene de módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{2}$ *. Grafica el hexágono regular.*

Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia de centro (0; 0) y uno de los vértices es el afijo del complejo 1 + 2i.

Tabla 44. Niveles de formación del concepto (Raíces) Actividad N°5 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

Todos los estudiantes (ver Tabla 44) solucionaron los problemas determinando el valor de z, hicieron uso de la representación trigonométrica y por último utilizan el teorema de Moivre para hallar las raíces de los números dados, de igual forma pasan a graficar el polígono regular, algunos de los estudiantes hicieron uso del programa GeoGebra para comprobar sus resultados (ver Figura 82).

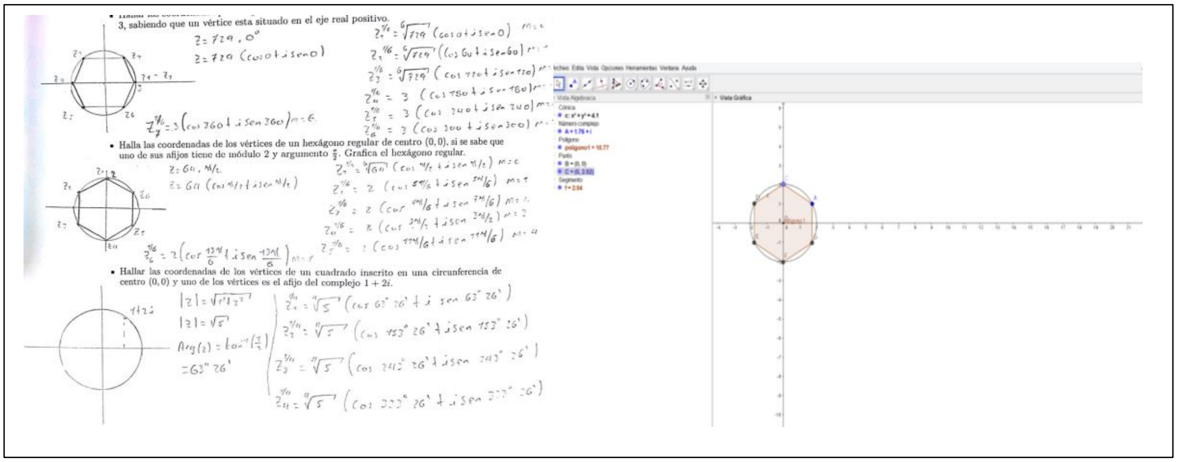


Figura 82. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°5 P.E.1. D- I.

<u>P.E.2.</u> *Halla las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de 8 y -8, grafícalas.*

Halla las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de 4 y -4, grafícalas.

Tabla 45. Niveles de formación del concepto (Raíces) Actividad N°5 problema 2. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	2	20
Discriminación-Identificación	8	80
Síntesis-Concreción.	0	0

Los estudiantes encontraron las raíces del número, 8 , -8, 4 y -4, haciendo uso del Teorema de Moivre (ver Tabla 45), 8 de los estudiantes concluyeron que aunque estos números son reales, no todas sus raíces lo son, si el número es un real positivo y sus raíces son pares o impares al menos una raíz es real, si el número es real negativo y su raíz es par ninguna solución será real, y si el número es negativo y su raíces son impares, entonces al menos una raíz será real negativa, algunos de ellos establecieron dicha relación con el uso del programa GeoGebra, además de implícitamente representar gráficamente las raíces de un número complejo (ver Figura 83).

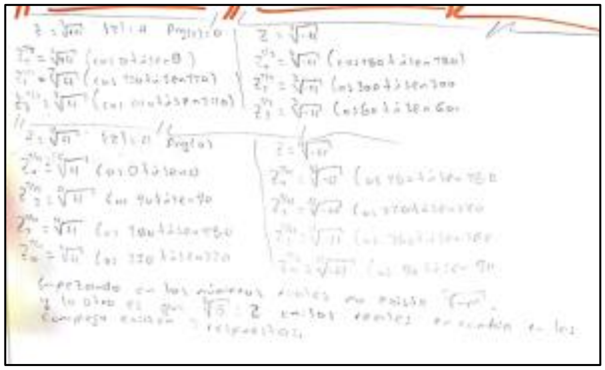


Figura 83. Respuesta Estudiante (E8) Actividad N°5 P.E.2. D- I.

5.5.4. Fijación-aplicación

Donde los problemas que se presentan relacionan las raíces de un número complejo, el Teorema de Moivre y el Teorema Fundamental del Algebra.

P.F.1. *Grafica las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas y quintas de 1.*

Tabla 46. Niveles de formación del concepto (Raíces) Actividad N°5 problema 1. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	3	30

De los 10 estudiantes participantes (ver Tabla 46) 4 de ellos hallaron las raíces de 1, uno de ellos E6 no halla todas las raíces y termina concluyendo que las otras dos corresponden a i y –i, de manera incorrecta. Tres de los estudiantes nos solo solucionaron las raíces, sino que además concluyeron que estas permanecían en la circunferencia pues la raíz n-ésima de 1 siempre es 1, mientras que otros tres además de encontrar las raíces, determinan que si el módulo del número complejo es menor a 1, sus raíces convergen a 0 y además si el módulo es igual a 1, sus raíces corresponden a la circunferencia de radio 1. Estas aseveraciones las hicieron al hacer uso del programa GeoGebra, el cual les facilitó el proceso de visualización de la situación presentada (ver Figuras 84, 85 y 86).

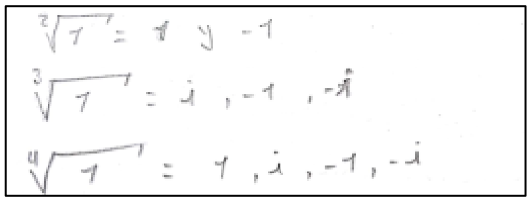


Figura 84. Respuesta Estudiante (E6) Actividad N°5 P.F.1. A- A.

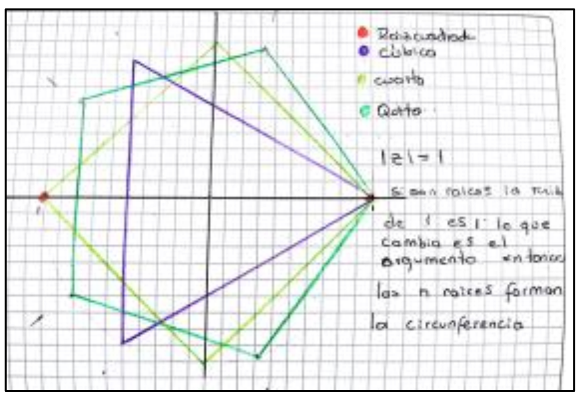


Figura 85. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°5 P.F.1. D- I.

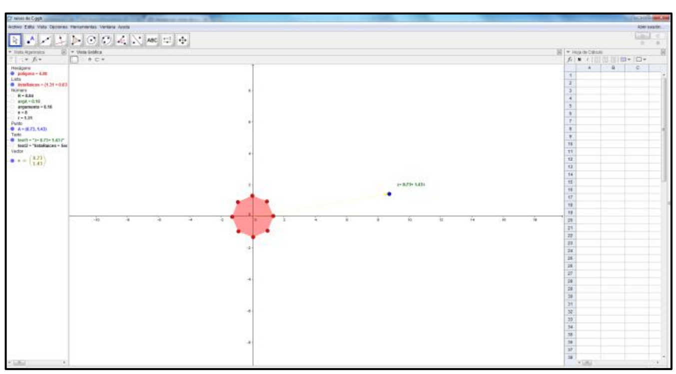


Figura 86. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°5 P.F.1. S- C

<u>P.F.2.</u> *Soluciona la siguiente ecuación $x^2 + 1 = 0$, ¿cuántas soluciones encuentras?*

Soluciona la siguiente ecuación $x^3 + 1 = 0$, ¿cuántas soluciones encuentras?

Soluciona la siguiente ecuación $x^n + 1 = 0$, ¿cuántas soluciones encuentras?

Tabla 47. Niveles de formación del concepto (Raíces) Actividad N°5 problema 2. Fase de fijación-aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	6	60
Discriminación-Identificación	2	20
Síntesis-Concreción.	2	20

Del total de participantes (ver Tabla 47) 6 de ellos determinaron que las raíces cuadradas de 1 eran 2 debido a la experiencia anterior, dando los valores de 1 y -1, sin embargo cuando pasaron a solucionar la segunda ecuación, sólo mostraron una solución; y en la tercera, despejaron a n pero no logran concluir, 2 estudiantes, determinan que la primera corresponde a las dos raíces cuadradas de 1, la segunda son la tres raíces cúbicas y el último son las raíces n-ésimas de 1, ellos no sólo determinan una solución sino que además comprueban que en realidad esas son soluciones de la ecuación. Los estudiantes E2 y E10, establecen que "estos son puntos de la circunferencia y la última son las raíces n-ésimas de –1, corresponden a la circunferencia de radio 1". Uno de ellos establece que "según sea el grado del polinomio, así mismo será el número de raíces" (ver Figuras 87 y 88).

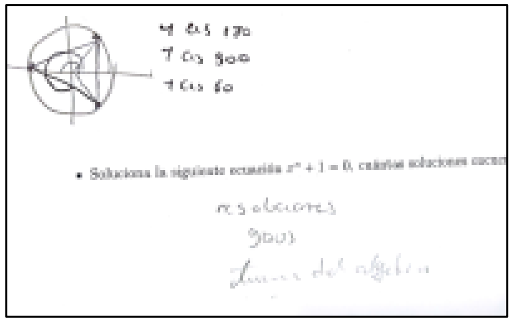


Figura 87. Respuesta Estudiante (E4) Actividad N°5 P.F.2. A-A.

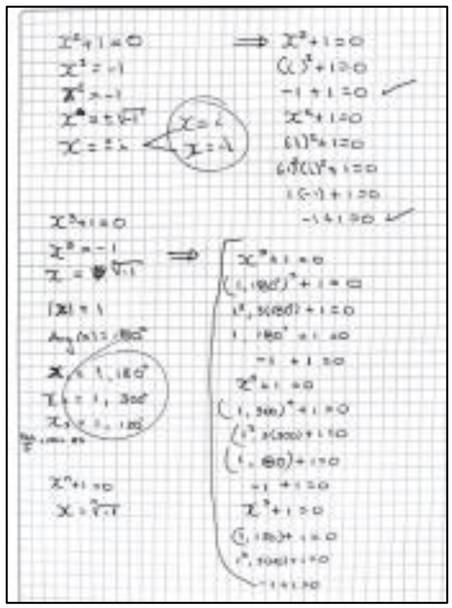


Figura 88. Respuesta Estudiante (E9) Actividad N°5 P.F.2. D- I.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Raíces,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal, como se muestra en la Tabla 48.

Tabla 48. Niveles de formación del concepto (Raíces).

Actividad 5				Raíces			
Estudiantes	PM1	PM2	PA1	PE1	PE2	PF1	PF2
E1	D-I	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I	A-A
E2	S-C	S-C	S-C	D-I	D-I	S-C	S-C
E3	A-A	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A	A-A

E4	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A
E5	A-A	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A	A-A
E6	A-A	A-A	A-A	D-I	D-I	A-A	A-A
E7	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	S-C	D-I
E8	A-A	D-I	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A
E9	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I	D-I
E10	D-I	S-C	D-I	D-I	D-I	S-C	S-C

5.6. Actividad 6. Conjuntos de puntos en el plano $\mathbb{C}$

El objetivo de esta actividad es establecer el lugar geométrico de uno o varios números complejos en el plano. Esta actividad se programó siguiendo la vía mixta. La cantidad de problemas de esta actividad se presenta a continuación en la Tabla 49.

Tabla 49. Número de problemas por etapas. Actividad 6. Conjuntos de puntos en el plano $\mathbb{C}$.

Etapa	Número de problemas
Motivación	1
Adquisición	2
Elaboración	1
Fijación-Aplicación	3
Total	7

5.6.1. Motivación.

Se planteó un problema relacionado con la búsqueda de un tesoro en el cual debían poner en juego todos los conocimientos anteriores a esta actividad y algunos relacionados con cursos de geometría, para poder hallar el tesoro.

P.M.1. *Un joven encontró un trozo muy antiguo de papel donde se describía la posición del tesoro de un pirata en una isla desierta. La descripción era: En la isla hay una palmera, una roca gigante y una horca; caminar desde la horca hacia la palmera, contando los pasos, al llegar a la palmera girar 90° a la derecha, contar el mismo número de pasos y clavar una estaca. Regresar a la horca, caminar hacia la* *roca gigante contando los pasos, al llegar a la roca girar 90° a la izquierda, contar el mismo número de pasos y clavar otra estaca. El tesoro está en el centro de la línea determinada por ambas estacas. Al llegar a la isla estaba la roca y la palmera pero la horca se había desaparecido debido a los cambios de clima y al tiempo transcurrido. El joven no pudo encontrar ese tesoro y regresó a su casa. Lo triste de la historia es que si el joven hubiera sabido calcular con números complejos podría haber encontrado el tesoro. Explica cómo lo hubiera hallado.*

Tabla 50. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en ℂ) Actividad N°6 problema 1. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	1	10
Síntesis-Concreción.	1	10
Ns/Nr	4	40

De los 10 estudiantes participantes 4 no resolvieron el problema, ellos aunque hicieron esquema de la situación no comprendían cómo sin tener la horca era posible encontrar el tesoro, las respuestas de ellos fueron, que "el niño nunca encontraría su tesoro" o que "el pirata nunca dejo el tesoro en la isla", cuatro estudiantes trataron de resolver el problema usando la palmera como centro del plano y la roca como otro punto, le dieron valores a la roca como si estuviera ubicado en ese punto exacto y con instrumentos (regla, transportador y compás), establecieron una posible solución, Un estudiante E2 establece una solución, dejando el punto medio entre la palmera y la roca como centro del plano, además a la roca le coloca el valor de *a+oi,* con lo cual demuestra que la ubicación del tesoro está sobre el eje imaginario a la misma distancia de la cual se encuentra el centro de la palmera, por lo tanto no era necesario tener la horca (ver Figuras 89 y 90).

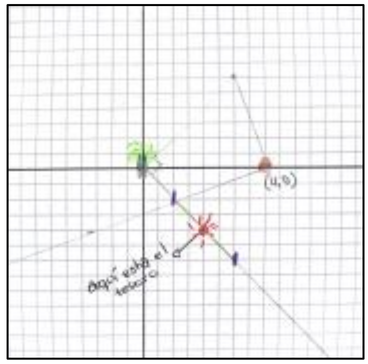


Figura 89. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°6 P.M.1. A- A.

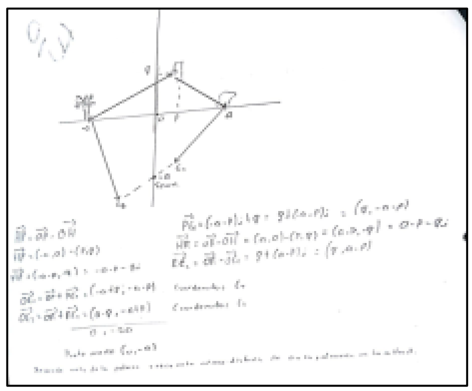


Figura 90. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°6 P.M.1. S- C.

5.6.2. Adquisición.

En esta fase se propusieron a los estudiantes problemas que se relacionan con el determinar el lugar geométrico de un conjunto de puntos en $\mathbb{C}$.

<u>P.A.1.</u> *Describa geométricamente el conjunto de todos los números complejos, que satisfacen las siguientes relaciones.*

$|z| = 1$ $\qquad\qquad$ $|z| \leq 1$ $\qquad\qquad$ $|z| \geq 1$

Tabla 51. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en $\mathbb{C}$) Actividad N°6 problema 1. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	10	100
Síntesis-Concreción.	0	0

Los 10 estudiantes (ver Tabla 51) no sólo determinaron los lugares geométricos de los puntos, sino que realizaron una gráfica que les permitió hacer mucho más explícita su respuesta; sólo se vio una leve diferencia con algunos estudiantes que hicieron uso de diferentes representaciones como la polar, trigonométrica y algebraica de los números complejos (ver Figura 91).

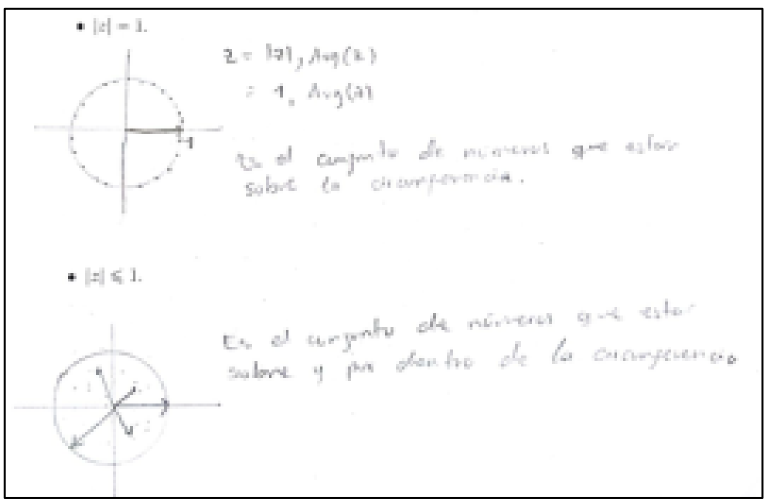


Figura 91. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°6 P.A.1. D- I.

<u>P.A.2.</u> *Indicar qué representa en el diagrama de Argand el conjunto:* $\{z: z = \bar{z}\}$.

Representar en el diagrama de Argand el conjunto: $\{z: |z + 1| = 2\}$.

Tabla 52. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en ℂ) Actividad N°6 problema 2. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	6	60
Discriminación-Identificación	4	40
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de participantes (ver Tabla 52) 6 determinaron que correspondía a todo el plano pues eran los puntos z y sus conjugados, más no tuvieron en cuenta que en realidad hacía referencia a que la conjugada y el punto fueran el mismo, de igual forma estos 6 establecieron que el conjunto 2 era un segmento ampliado 1 unidad, pero 4 estudiantes lograron explicar a sus compañeros que el primer conjunto hacía referencia a la igualdad y que "la única forma que estos fueran iguales es que su parte imaginaria fuera cero"; otro estudiante E7, explica a sus compañeros desde el punto de vista dinámico "se puede ver que a medida que z se acerca al eje real, su conjugada también se acerca hasta que en la recta real ambos son el mismo"; de igual forma presentan que si se cambia a z por a+bi, en el segundo conjunto, la solución no es lo que se planteaba, sino es una circunferencia de radio 2 y trasladada una unidad a la izquierda (ver Figura 92).

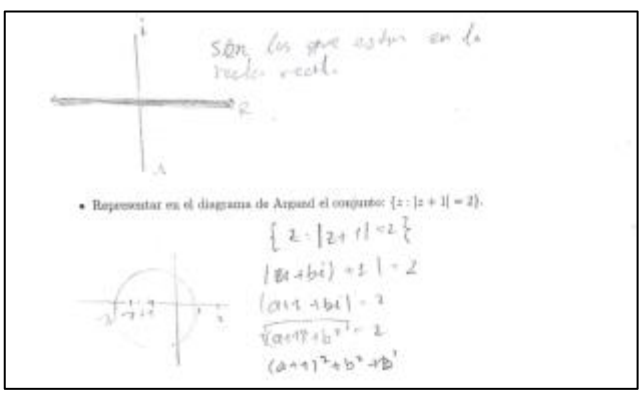


Figura 92. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°6 P.A.2. D- I.

5.6.3. Elaboración

Los problemas que se presentan están relacionados con el paso de la representación gráfica de un conjunto de puntos en $\mathbb{C}$, donde los estudiantes deben escribir dicho conjunto por comprensión.

<u>P.E.1.</u> *Dados los siguientes diagramas, expresa el conjunto para que satisfagan la condición correspondiente.*

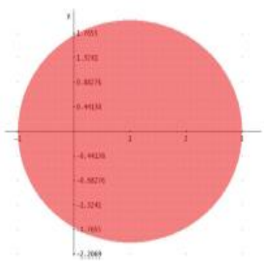


Diagrama 1

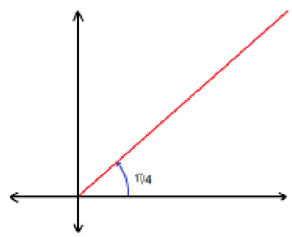


Diagrama 2

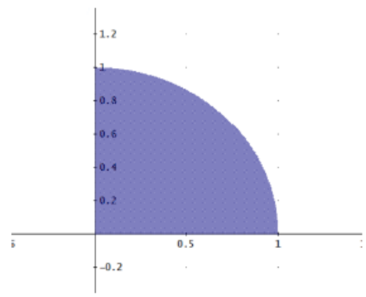


Diagrama 3

Tabla 53. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en $\mathbb{C}$) Actividad N°6 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	10	100
Discriminación-Identificación	0	0
Síntesis-Concreción.	0	0

Los 10 estudiantes (ver Tabla 53) determinaron por comprensión cada uno de los gráficos en términos de conjuntos de puntos en $\mathbb{C}$, Sólo hubo algunas dificultades con el segundo diagrama debido a que debían tener en cuenta la representación polar, además de los puntos sobre la recta, sin embargo con ayuda de los compañeros los 10 estudiantes comprendieron y dieron una respuesta satisfactoria al problema (ver Figura 93).

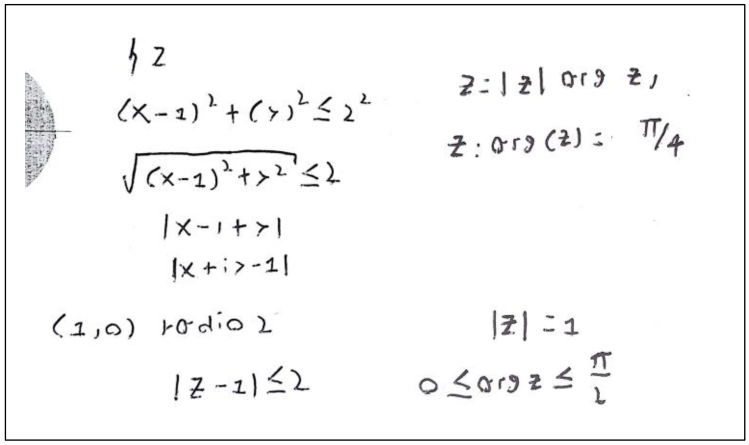


Figura 93. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°6 P.E.1. A- A.

5.6.4. Fijación- aplicación.

Los problemas que se presentan en la fase de fijación- aplicación requieren de la interrelación entre conceptos de otras áreas para su solución. En este se deben tener en cuenta los conceptos ya vistos a lo largo de las actividades.

<u>P.F.1.</u> *Describir el conjunto de puntos en el plano $\mathbb{C}$ determinado por la siguiente ecuación:* $z \cdot \bar{z} > 4$.

Tabla 54. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en $\mathbb{C}$) Actividad N°6 problema 1. Fase de fijación- aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción.	0	0

De los 10 estudiantes participantes (Ver Tabla 54) 4 de ellos establecieron que la solución eran los números reales mayores a 4, situación que fue refutada por 6 de ellos, pues al realizar el cambio de z y su conjugado por a+bi, la respuesta no pueden ser los reales mayores a 4. Esta situación se presenta en la Figura 94.

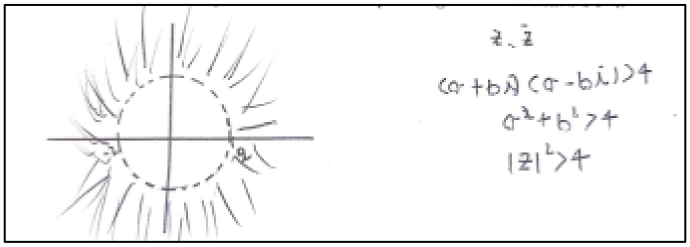


Figura 94. Respuesta Estudiante (E4) Actividad N°6 P.F.1. D- I.

<u>P.F.2.</u> *Sea r un número real positivo. Determine el lugar geométrico dado por los números complejos z, tal que* $|z-r|=r.$

Tabla 55. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en ℂ) Actividad N°6 problema 2. Fase de fijación- aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	2	20
Discriminación-Identificación	8	80
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de estudiantes (ver Tabla 55) 2 de ellos sólo ejemplificaron la situación cambiando el valor de r por un número real, solo 8 de ellos no sólo cambiaron el valor, sino que además establecieron la solución para un r real positivo, generando una gráfica alrededor del centro (0,r) y radio r (ver Figura 95).

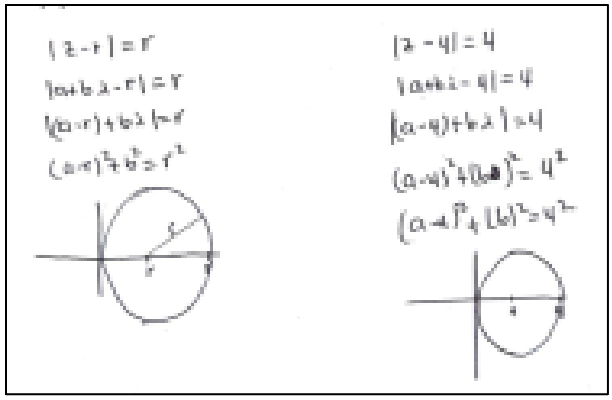


Figura 95. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°6 P.F.2. D- I.

<u>P.F.3.</u> *Dados tres cuadrados iguales como se muestran en la figura, use los números complejos para determinar el ángulo BAC + BAD.*

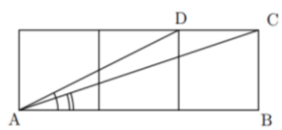


Tabla 56. Niveles de formación del concepto (Conjuntos de puntos en ℂ) Actividad N°6 problema 3. Fase de fijación- aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	3	30
Discriminación-Identificación	7	70
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de estudiantes (ver Tabla 56) 3 estudiantes le dieron un cierto valor a los lados del cuadrado, hallando el valor de los ángulos, los otros 7 generalizaron colocándole un valor "a" al lado del cuadrado, y determinan que el tamaño del ángulo no difiere según sea el lado del cuadrado (ver Figura 96).

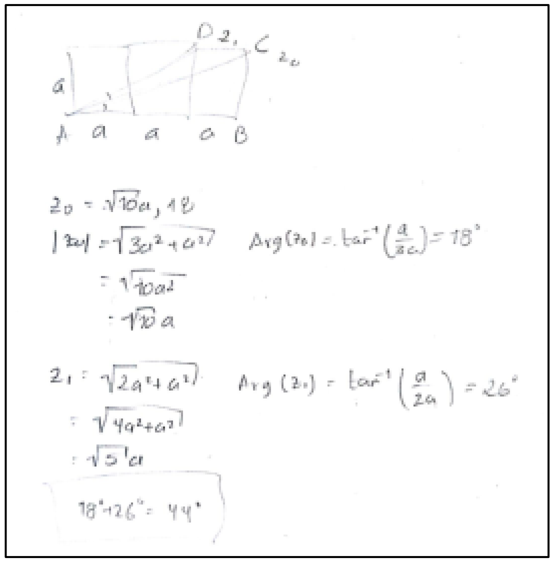


Figura 96. Respuesta Estudiante (E2) Actividad N°6 P.F.3. D- I.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Conjunto de puntos en* ℂ*,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal (ver Tabla 57).

Tabla 57. Niveles de formación del concepto (*Conjunto de puntos en* ℂ).

Actividad 6	**Conjuntos de puntos en ℂ**						
Estudiantes	PM1	PA1	PA2	PE1	PF1	PF2	PF3
E1	A-A	D-I	D-I	A-A	A-A	D-I	A-A
E2	S-C	D-I	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I
E3	Ns/Nr	D-I	A-A	A-A	D-I	D-I	D-I
E4	A-A	D-I	A-A	A-A	D-I	D-I	D-I
E5	Ns/Nr	D-I	A-A	A-A	A-A	A-A	A-A
E6	Ns/Nr	D-I	A-A	A-A	A-A	D-I	D-I
E7	A-A	D-I	D-I	A-A	A-A	D-I	D-I
E8	Ns/Nr	D-I	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A
E9	A-A	D-I	A-A	A-A	D-I	D-I	D-I
E10	D-I	D-I	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I

5.7. Actividad 7. Funciones en variable compleja

Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes tienen dominio de los conocimientos previos, pues a través de las actividades anteriores se crean las condiciones para lograr que éstos construya un conocimiento robusto del concepto de función de variable compleja por aproximaciones sucesivas.

La actividad "Funciones en variable compleja" tiene como objetivo comprender el concepto de función de variable compleja, esta actividad se desarrolló siguiendo la vía mixta, a continuación se analizan cada uno de los problemas presentados a los estudiantes dependiendo de las fases del proceso metodológico establecido en el modelo didáctico. Cada una de las etapas contiene los siguientes problemas (ver Tabla 58).

Tabla 58. Número de problemas por etapas. Actividad 7. Funciones de variable compleja.

Etapa	Número de problemas
Motivación	
Adquisición	
Elaboración	
Fijación-Aplicación	
Total	

5.7.1. Motivación

Como parte de la motivación se observa el video de título *dimensiones* 6/9 el cual se encuentra disponible en URL: https://www.youtube.com/watch?v=WE7wfJU6RV4

P.M.1. *Realiza la transformación de puntos, segmentos y circunferencias de radio 1 y 2, mediante la función f(z) =* z^2*, establece una posible solución gráfica.*

Tabla 59. Niveles de formación del concepto (Funciones en ℂ) Actividad N°7 problema 1. Fase de motivación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	4	40
Discriminación-Identificación	6	60
Síntesis-Concreción	0	0

De un total de 10 estudiantes (ver Tabla 59) 4 establecieron una solución tomando a z como una sola variable independiente y a f(z), como una variable dependiente y graficaron al igual que se haría con funciones en variable real, 6 de ellos reemplazaron valores de ℂ en otro plano ℂ y a través de la tabulación pudieron establecer una posible solución, situaciones que se pueden observar en las Figuras 97 y 98.

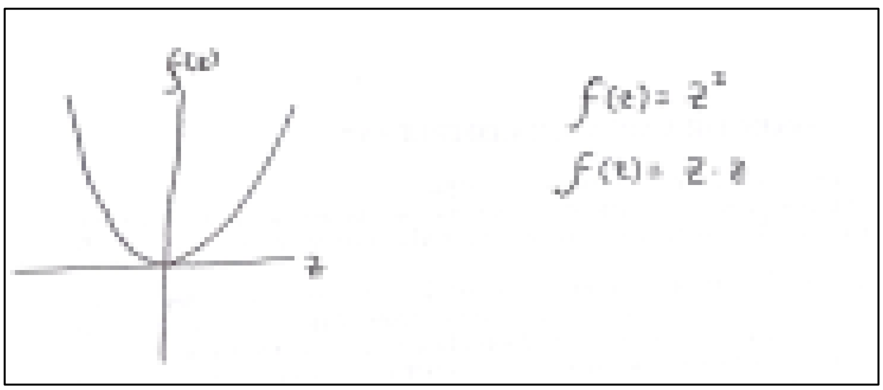


Figura 97. Respuesta Estudiante (E5) Actividad N°7 P.M.1. A- A.

Figura 98. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°7 P.M.1. D- I.

5.7.2. Adquisición

En esta etapa se presenta a los estudiantes problemas relacionados con el paso del sistema de representación tabular al gráfico, con el fin de poder determinar algunas transformaciones de las funciones en variable compleja.

P.A.1. *Dado* $f(z) = z^2 + 5$*, hallar* $f(2 + i)$*,* $f(i)$*,* $f(-i)$*.*

Tabla 60. Niveles de formación del concepto (Funciones en ℂ) Actividad N°7 problema 1. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	5	50
Discriminación-Identificación	5	50
Síntesis-Concreción.	0	0

Todos los estudiantes (ver Tabla 60) establecen una solución reemplazando en la función los puntos z_1=2+i, z_2=i y z_3=-i, concluyen que no existen diferencias entre las formas de calcular una función en variable real con el de variable compleja, 5 de los estudiantes constituyen no sólo la solución algebraica, sino que además realizan la gráfica, expresando que esta función $f(z) = z^2 + 5$, traslada los valores anteriores 5 unidades a la derecha, un ejemplo de ello es el resultado obtenido por el estudiante E7, quien compara las gráficas del problema anterior y utiliza la nueva función para determinar la transformación de la función (ver Figuras 99 y 100).

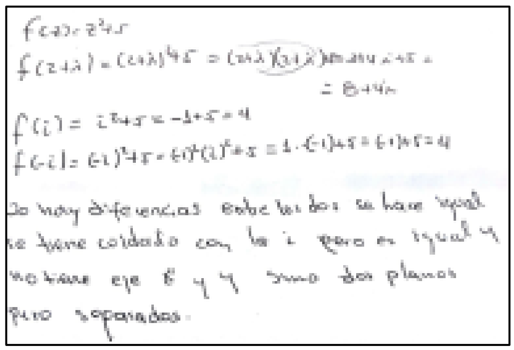


Figura 99. Respuesta Estudiante (E4) Actividad N°7 P.A.1. A- A.

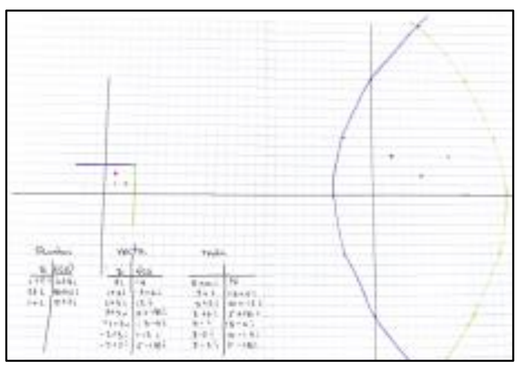


Figura 100. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°7 P.A.2. D- I.

<u>P.A.2.</u> *Calcule la parte real e imaginaria de las siguientes funciones y realice un mapeo de la transformación:*

$f(z) = z^2$ $\qquad$ $f(z) = z + 3$ $\qquad$ $f(z) = 2z$ $\qquad$ $f(z) = z$

Tabla 61. Niveles de formación del concepto (Funciones en ℂ) Actividad N°7 problema 2. Fase de adquisición.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	0	0
Discriminación-Identificación	8	80
Síntesis-Concreción.	2	20

Dada la experiencia que tuvieron con el problema anterior, los 10 estudiantes (ver Tabla 61) primero conjeturaron frente al resultado que se obtendría, posteriormente acudieron a realizar rectas verticales y horizontales para determinar qué tipo de trasformación se hacía en cada función, haciendo un mapeo. Ocho de los estudiantes hicieron tabulaciones e interpretaron la transformación, sólo dos de los estudiantes se atrevieron a determinar una posible expresión para las traslaciones de funciones, además de encontrar una forma generalizada de la función z^2. Uno de ellos determinó que si se multiplicaba por i esto haría girar a todos los z, 90° (ver Figura 101).

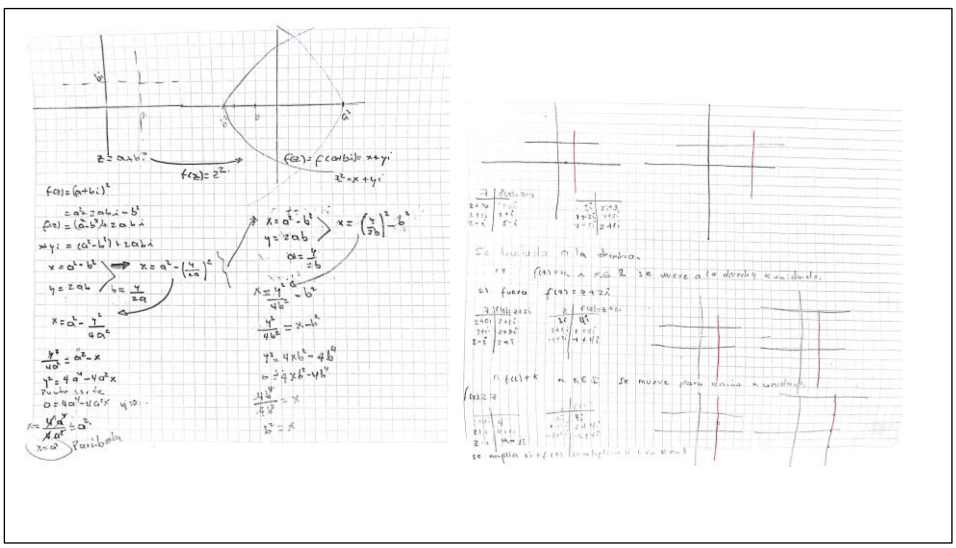


Figura 101. Respuesta Estudiante (E9) Actividad N°7 P.A.2. S- C.

5.7.3. Elaboración

Los problemas que se presentan hacen referencia a otras trasformaciones, en esta etapa los estudiantes hicieron uso del programa ComplexImage con el fin de interpretar diferentes funciones y sus trasformaciones.

P.E.1. *Transforma mediante $w = f(z) = e^z$ los siguientes segmentos y curvas:*

Segmento de recta que une los puntos (1,0) y (1,3).

El segmento de recta que une los puntos (1,2) y (2,2).

La circunferencia de centro (0,0) y radio 2.

La circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

Use el programa ComplexImage[67] y realice otras trasformaciones.

Tabla 62. Niveles de formación del concepto (Funciones en $\mathbb{C}$) Actividad N°7 problema 1. Fase de elaboración.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	5	50
Discriminación-Identificación	5	50
Síntesis-Concreción.	0	0

Del total de estudiantes (ver Tabla 62) 5 de ellos tabularon para hallar la solución de la transformación de segmentos y circunferencias, bajo la función $f(z) = e^z$. Cinco estudiantes determinaron el mapeo mediante las ecuaciones de transformación, hallando la parte real e imaginaria de f(z). Todos logran determinar que la función $f(z) = e^z$ transforma rectas verticales en círculos, círculos en rectas verticales y rectas horizontales en rectas con argumento igual al valor de la imagen de z.

[67] Mercat C. (2016), ComplexImage.Universidad de Lion- Francia.

Todos los estudiantes constituyeron primero conjeturas frente a los mapeos de las funciones, posteriormente algunos realizaron tabulaciones y complementaron estableciendo las ecuaciones de transformación tomando la parte real e imaginaria de f(z), posteriormente hicieron uso del programa ComplexImage, con el fin de corroborar sus respuestas. Los estudiantes construyeron otras funciones a partir del uso del programa y pudieron visualizar de una manera más rápida y eficaz; adicional a ello el uso de imágenes propias y el poder determinar el comportamiento de varios puntos a la vez bajo la transformación les permite establecer conjeturas acerca de otras funciones (ver Figuras 102 y 103).

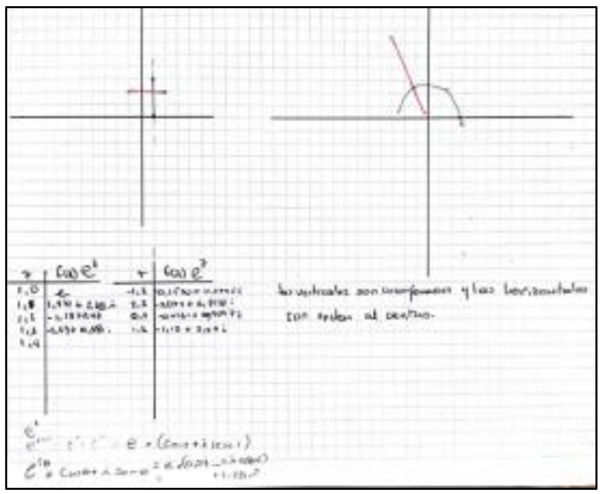


Figura 102. Respuesta Estudiante (E8) Actividad N°7 P.E.1. A- A.

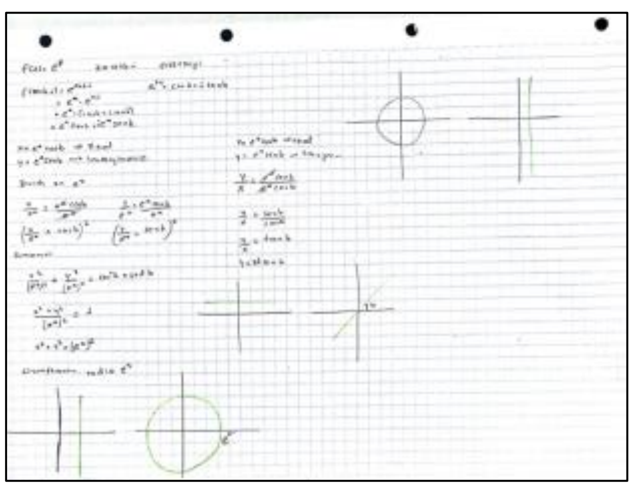
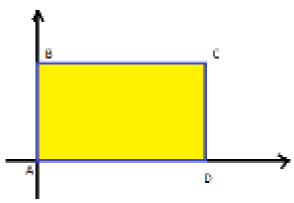


Figura 103. Respuesta Estudiante (E7) Actividad N°7 P.E.2. D- I.

5.7.4. Fijación- aplicación.

En esta etapa se presentan problemas relacionados con el mapeo de rectángulos y triángulos bajo las funciones descritas en la etapa anterior, adicional a ello se hace uso del software ComplexImage como apoyo a los procesos de visualización.

P.F.1. *Mapear las siguientes figuras de vértices A, B, C, D, bajo la transformación dada por las funciones:* $f(z) = e^z$, $f(z) = z^2$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(z) = z$, $f(z) = 2z$.



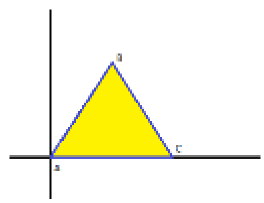


Tabla 63. Niveles de formación del concepto (Funciones en $\mathbb{C}$) Actividad N°7 problema 1. Fase de fijación- aplicación.

NIVEL DE SOLUCIÓN	ESTUDIANTES	%
Análisis-Abstracción	3	30
Discriminación-Identificación	3	30
Síntesis-Concreción.	4	40

Para la solución del mapeo del rectángulo (ver Tabla 63) todos los estudiantes hallaron soluciones mediante cada función haciendo uso de las características de las transformaciones antes descritas, adicional a ello hicieron transformaciones de las figuras bajo otras funciones a partir del uso del programa ComplexImage, situación que les permitió tener un concepto sobre las funciones de variable compleja mucho más robusto. Para ellos la visualización es esencial en los procesos de enseñanza-aprendizaje (ver Figuras 104 y 105).

Figura 104. Respuesta Estudiante (E2 y E10) Actividad N°7 P.F.1. S- C.

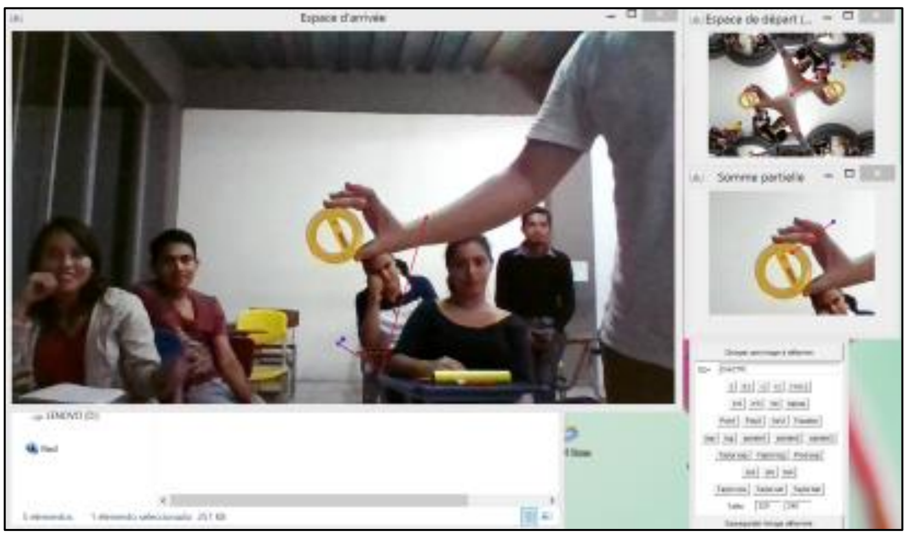


Figura 105. Respuesta Estudiante (E1) Actividad N°7 P.F.2. S- C.

A continuación se presentan los resultados de los problemas propuestos en la actividad *Funciones en variable compleja,* según el nivel de formación del concepto presentado por cada estudiante de forma escrita verbal o no verbal (ver Tabla 64).

Tabla 64. Niveles de formación del concepto (Funciones en variable compleja).

Actividad 7	Funciones en Variable Compleja				
Estudiantes	PM1	PA1	PA2	PE1	PF1
E1	D-I	A-A	D-I	A-A	S-C
E2	D-I	D-I	S-C	D-I	S-C
E3	A-A	A-A	D-I	A-A	D-I
E4	D-I	A-A	D-I	D-I	D-I
E5	A-A	A-A	D-I	A-A	A-A
E6	A-A	D-I	D-I	A-A	A-A
E7	D-I	D-I	D-I	D-I	S-C
E8	D-I	D-I	D-I	A-A	A-A
E9	A-A	A-A	S-C	D-I	D-I
E10	D-I	D-I	D-I	D-I	S-C

Conclusiones del Capítulo 5

Como se puede observar, en cada actividad hubo una serie de problemas que llevaron al estudiante bajo un hilo conductor a la comprensión de diferentes conceptos asociados al de función de variable compleja como es: unidad imaginaria, representaciones de los números complejos, operaciones con números complejos, potencias, raíces, lugares geométricos y función de variable compleja; todas ellas introducidas desde el punto de vista geométrico y en algunos casos, haciendo uso de videos y diferentes software que permitieron la visualización de la situación.

Durante el desarrollo de las actividades se logró establecer que los estudiantes a medida que resolvían los problemas en cada actividad, mejoraban la comprensión de dos conceptos indispensables, el de número complejo y función de variable compleja, es así, que en el desarrollo de las actividades se preguntaba al final como control, qué concepto tiene sobre número complejo y cuál es el concepto que tiene sobre función de variable compleja. Se pudo observar que el 70% de los estudiantes tuvo una mejoría frente a los conceptos, a partir no sólo de sus escritos sino de sus expresiones verbales y no verbales en el desarrollo de los problemas, solo 3 estudiantes no lograron pasar del nivel de análisis abstracción al de síntesis- concreción, esto debido al bajo compromiso que tenían y a los niveles básicos de matemáticas con los que cuentan. Un análisis de las encuestas realizadas en la etapa de diagnóstico, muestra que estos 3 estudiantes expresaron no dedicar mucho tiempo a la resolución de un problema y ser poco responsables; situaciones que no ayudan al desarrollo de las actividades.

Por otra parte, al analizar las actividades con la aplicación de la estrategia, se identificó que se alcanza a comprender mejor el concepto, pues en cada etapa del proceso de asimilación se trabajaron actividades específicas. Algunos resultados son los siguientes: En la etapa de *motivación:* aunque los estudiantes mostraron gran dinamismo en el desarrollo de las actividades, es en esta etapa donde la mayoría de los estudiantes obtuvieron un nivel de análisis – abstracción, esto debido a que era la primera aproximación al concepto a tratar.

En la etapa de *adquisición:* en esta etapa se orientó el trabajo hacia temas conocidos para la resolución de problemas, que permitieron la discusión sobre las características esenciales del conjunto de los números complejos, en esta etapa se logra alcanzar niveles de síntesis – concreción, debido a que permiten hacer aseveraciones y conclusiones sobre algunos conceptos.

En la etapa de *elaboración:* los 10 estudiantes logran identificar las soluciones a los problemas propuestos, debido a que muchos de ellos permitían establecer comparaciones entre los números complejos y los reales, sin embargo, para algunos es tan arraigado el tema de las funciones en variable real que 3 de ellos en un primer instante no logran comprender el mapeo de muchas funciones, dificultándoseles las actividades.

En la etapa de *fijación-aplicación:* en esta etapa la mayoría de los estudiantes tuvieron éxito en la solución y justificación de los problemas propuestos, como situaciones dentro de la misma matemática y con problemas que relacionaban los números complejos y la física.

De acuerdo a lo establecido, podemos afirmar, que hacer el tratamiento mediante la puesta en práctica de la estrategia, se arrojan elementos que garantizan favorecer los procesos de asimilación, además, las etapas comprendidas en dicho proceso, permiten la evaluación durante el proceso y en caso de ser necesario, reorientar la actividad. De esta manera, podemos afirmar que al llevar acabo el modelo didáctico, mediante la metodología propuesta, se han encontrado elementos que permiten concluir que la estrategia metodológica, favorece los procesos de asimilación de los conceptos, en específico aquellos asociados a las funciones de variable compleja.

CONCLUSIONES

El proceso investigativo sobre la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, en estudiantes del quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, corrobora la hipótesis planteada en la tesis y ofrece una respuesta al problema objeto de investigación. Los resultados obtenidos propician destacar algunos elementos que resultan esenciales en éste trabajo, ellos son:

- El proceso de enseñanza- aprendizaje del concepto de función de variable compleja, ha sido abordado por diferentes autores desde tres perspectivas:
  1. Teórica: la formación de conceptos.
  2. Resolutiva–procedimental: la resolución de problemas.
  3. Analítico funcional; el estudio de la función de variable compleja desde la Variable Compleja.
- En la literatura revisada se pudo constatar las siguientes regularidades:
  - El aprendizaje de un concepto se logra a través de múltiples representaciones y de la lógica.
  - Brindan importancia al proceso de construcción del significado del concepto y de los problemas retadores.
  - Proponen actividades que favorecen la formación de conceptos mediante la resolución de problemas.
  - Centran su atención en el significado de los conceptos, sus dificultades, solución de problemas y representaciones.

- Las investigaciones valoradas en el estado del arte sirvieron como base y referentes, pues se toman elementos que imbrican las tres aristas para la presente tesis. También se concluye que son escasos los trabajos que tienen en cuenta las relaciones existentes entre resolución de problemas y formación de conceptos, y se carece desde la teoría de un modelo didáctico para la formación del concepto de función de variable compleja a través de la resolución de problemas.

- La tesis se sustenta desde el punto de vista filosófico en la concepción dialéctica, pues esta ofrece la teoría, que a través del dialogo y la discusión, permite descubrir el contenido matemático mediante la exposición y confrontación de razonamientos y argumentaciones. Los sustentos psicopedagógicos están dados por el enfoque Histórico-Cultural de Vygotsky y sus seguidores, asumiéndose de este la zona de desarrollo próximo, la ley de la doble formación de las funciones psicológicas y la teoría de la actividad. Ambos fundamentos son básicos en la construcción del modelo didáctico y le brindan robustez.

- El trabajo con la formación de conceptos matemáticos es importante para lograr un proceso de enseñanza - aprendizaje robusto de la matemática, en particular de las funciones de variable compleja, pues éste le propicia tratar los conceptos de objeto, de relación y de operaciones, asociados esencialmente al pensamiento abstracto, el cual está basado en conceptos, juicios y razonamientos. Los conceptos en el estudiante no se forman de manera inmediata, son el resultado de un proceso que puede estructurarse, en tres niveles: Análisis-Abstracción, Discriminación-Identificación y Síntesis-Concreción.

- La teoría de la resolución de problemas, en particular los problemas retadores constituyen uno de los pilares básicos para el trabajo con la formación del concepto de función de variable compleja.

La implementación de la estrategia de Pólya (1965) en el momento de resolución de cada uno de los problemas: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, y la evaluación de la solución y de la vía; centrada en el apoyo de la heurística, propicia la construcción robusta de dicho concepto.

- La investigación se sustenta en el paradigma cualitativo interpretativo. Los instrumentos y métodos utilizados durante el desarrollo de la investigación, permiten establecer el modelo didáctico, elaborar la metodología sustentada en el modelo y elaborar e implementar un sistema de actividades, para favorecer la formación del concepto de función de variable compleja.
  - El modelo didáctico propuesto se ha estructurado en función del aprendizaje del alumno, es decir, en ella se prioriza el proceso de asimilación por etapas de los conceptos asociados al de función de variable compleja y se concibe que él mismo, ha asimilado los conceptos si logra establecer una solución a los diferentes problemas propuestos en las etapas de: motivación, adquisición, elaboración y fijación- aplicación. Cada una de las propuestas de solución se analizaron según tres niveles de formación del concepto: Análisis- Abstracción, Discriminación – Identificación o Síntesis- Concreción.
- El modelo permite estructurar la formación del concepto de función de variable compleja hacia la búsqueda activa, dinámica y transformadora del conocimiento en el estudiante, mediante un sistema de actividades, donde fundamentalmente se utiliza la tecnología, la historia de las matemáticas como recurso didáctico, la representación geométrica y procedimientos heurísticos, desde posiciones reflexivas que propician el desarrollo del pensamiento matemático y de la independencia cognoscitiva.

El principal resultado alcanzado en esta investigación es la elaboración de un modelo didáctico, para tal fin se diseñó una metodología que permite dinamizar el modelo y un sistema de actividades estructurado en 4 etapas: motivación, adquisición, elaboración y fijación-aplicación, que conjuntamente con la metodología posibilitaron la concreción del modelo en la práctica, a través de la resolución de problemas para la formación de conceptos.

La realización de cada una de las etapas permite favorecer los procesos de internalización del conocimiento sobre los conceptos asociados al de función de variable compleja. Por esta razón en cada etapa se propusieron actividades que a la vez se corresponden con la elaboración por etapas de las acciones mentales, y para su desarrollo se utilizó una estrategia integradora de resolución de problemas que se apoya en los postulados de la formación de conceptos mediante tres niveles.

La estrategia metodológica acierta frente al diagnóstico realizado, el cual permitió establecer el tipo de problemas frente al contenido matemático del concepto, en él se propone una nueva estructura para el tratamiento del concepto de función de variable compleja, desde el punto de vista geométrico, atendiendo a las relaciones conceptuales de los conceptos asociados (colaterales, subyacentes y superiores) al de función de variable compleja

Las actividades están estructuradas en cuatro etapas, que establecen un orden para la puesta en práctica, de manera que el proceso se hace más estructurado, situación que es necesaria para un buen aprendizaje; además de ello incluye herramientas tecnológicas para la puesta en escena de las representaciones visuales de los problemas, situaciones problema que ponen en juego conocimientos anteriores para la construcción de nuevos conceptos, aplicaciones para facilitar la fijación y la generalización de conceptos y una serie de preguntas que permiten llevar un hilo conductor.

Por otra parte, es necesaria una formación sólida sobre el contenido matemático del concepto, lo que permite entender el sentido de cada una de las actividades que se han propuesto e identificar qué se logra con cada una de ellas, y cómo la resolución de problemas finalmente permite al alumno la formación de conceptos por aproximaciones sucesivas.

Luego de llevar a cabo el desarrollo de las actividades, se arrojaron elementos que permiten determinar situaciones sobre los procesos de asimilación del concepto de función de variable compleja a través de la puesta en escena de la estrategia metodológica, donde se identificó en los alumnos los siguientes resultados: los procesos de motivación son esenciales cuando se abarcan temas relacionados con la matemática, la incorporación de una vía mixta permite al docente tener diferentes perspectivas frente a cómo abarcar el contenido, el uso de situaciones problema ayuda a los estudiantes a una mejor comprensión de los conceptos, aproximadamente un 70% alcanzó un nivel óptimo frente a la comprensión no solo del concepto de función de variable compleja, sino de los conceptos asociados a este, la evaluación frente al concepto de número complejo, representación y función de variable compleja se puede apreciar a medida que las actividades abarcan problemas de mayor complejidad.

El empleo de las TICs en la formación de conceptos y en especial en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el nivel universitario, ofrece múltiples ventajas en el mejoramiento de los deferentes procesos de asimilación de conceptos, procedimientos que se tratan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, debido a que permiten la visualización y por ende la asimilación de conceptos abstractos sobre la base de imágenes o representaciones que las TICs proporcionan.

El aprendizaje de propiedades geométricas de las funciones en variable compleja, conlleva serias dificultades en la enseñanza tradicional, por lo cual, el uso de diferentes software facilita la visualización de puntos, rectas y subconjuntos, situaciones usadas por los estudiantes participantes. En el aprendizaje de la matemática universitaria, la tecnología juega un papel importante y más aún en programas de licenciatura, porque permiten darle herramientas a los futuros docentes para ejercer su labor, pues pueden poner en juego ideas abstractas y resolver problemas, además de poder caracterizar representaciones, operaciones, con el fin de mejorar sus formas de pensamiento.

El uso de un modelo didáctico y una metodología acorde a esta, como la propuesta en esta tesis, mejora los procesos de enseñanza- aprendizaje de conceptos mediante la resolución de problemas, no sólo de temas relacionados con las funciones de variable compleja, sino otros temas de las matemáticas, se deja al lector, la posibilidad de aplicar dichas actividades y poner en práctica el modelo propuesto mediante su metodología.

RECOMENDACIONES

La implementación de la metodología y del sistema de actividades sustentado en el modelo didáctico para fortalecer la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas, en estudiantes del quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de los Llanos, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de variable compleja, como por ejemplo el tratamiento que se le da en los textos, requiere tener en cuenta la relación entre los objetos matemáticos y sus aplicaciones utilizando, esencialmente, una determinada definición.
- Para lograr mayor éxito al llevar a la práctica la metodología, es necesario un cambio casi total de los paradigmas que prevalecen en los profesores de Matemáticas y más aún de las licenciaturas, pues la metodología tiene varios componentes y elementos que van fundamentalmente, dirigidos al profesor, los cuales deben ser asimilados como requisito fundamental.
- Integrar las TIC en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas al nivel de educación superior, pues coadyuvan en la comprensión y formación de conceptos, también favorece el proceso de la visualización en la resolución de problema, que en el caso del trabajo con variable compleja es necesario debido a su carácter un poco abstracto.
- El desarrollo de trabajos conjuntos y el uso de la dialéctica como eje fundamental de los procesos de enseñanza-aprendizaje permiten la formación integral del estudiante y el mejoramiento de aspectos esenciales en la personalidad, tanto del maestro como del alumno, es así, que la responsabilidad, el comunicarse con el otro, el respeto por las opiniones y el conocimiento matemático, se hacen presentes en el desarrollo de las actividades que proponga el maestro.

- De igual forma quedan abiertos temas relacionados con la teoría de funciones en variable compleja, el uso de modelos didácticos en los procesos de enseñanza aprendizaje en el nivel universitario, el diseño de modelos de formación docente que permitan a los futuros docentes tener herramientas no sólo matemáticas, sino pedagógicas y didácticas que les permitan desenvolverse como maestros del área.

BIBLIOGRAFÍA

Afanasiev, V. (1979). El Enfoque sistémico Aplicado al Conocimiento social. *Ciencias Sociales, 35 (1)*.

Álvarez, Á. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos*.

Ángel, M., Polola, L., Fernández, G. y Bortolotto, M. (2004). Aprendiendo matemática desde los conceptos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 17*.

Aznar, M., Distéfano, M., Massa, S., Figueroa, S. y Moler, E. (2010). Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos. *Revista de Educación Matemática*, *25*.

Bagni, G. (2009). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos: una investigación experimental en la educación media superior. *Colección Digital Eudoxus*, (23).

Balacheff, N., Brousseau, G., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield, V. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990. *Mathematics education library*, *19*.

Ballester, S. y otros. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I y II. La Habana: Pueblo y educación.

Blanco, L. (1991). Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores. *Cáceres. Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura*.

Bourne, L. E. (1982). Typicality effects in logically defined categories. *Memory Cognition*, 10, 3-9.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2).

Buehler, D. (2014). Incomplete understanding of complex numbers Girolamo Cardano: a case study in the acquisition of mathematical concepts. *Synthese*, 191(17), 4231-4252. Recuperado de: http://bibliotecasenlinea.unillanos.edu.co:2093/ejemplar/378825.

Bueno, S., Mora, J., Nardín, A., Álvarez, A. y Blanco, R. (2012). Registros semióticos y enseñanza del tema integrales.

Campistrous, L. (1993). *Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje.* Centro de Información y Documentación del ICCP. La Habana.

Campistrous, L. y C. Rizo. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Proyecto TEDI. La Habana: Pueblo y Educación.

Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cárdenas. M. (2009). Formación y desarrollo de conceptos sobre objetos matemáticos. *Revista Alternativa.* UAG.

Cobo, P. y Fortuny, J. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(2).

Cole, M., y Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. Distributed cognitions: Psychological and educational considerations.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

D´Amore. B. (2005). *Didáctica de la matemática*; *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales*. Ed. Reverté. España

D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno.* [Barcelona, España]. 27, 51-76. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/402%20contribucion%20al%20debate%20sobre%20conceptos%20y%20objetos.pdf

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Almeida, F. (2004). El estudio de casos en la investigación de educación de personas adultas. In *Investigación y práctica en la educación de personas adultas*. Nau Llibres.

De Armas, N., Lorences, J., y Perdomo, J. (2003). Caracterización y diseño de los resultados científicos como aportes de la investigación educativa. *Evento Internacional Pedagogía*.

De Guzmán M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática.* EDIPUBLI S.A., Argentina.

De Guzmán, M. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Red Científica. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de educación, (43)*.

De Vleeschouwer, M., Gueudet, G., Lebaud, M. y Britain, U. (2013). Teaching and learning complex numbers in the beginning of the university cursus. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG14/WG14Posters/WG14_P_%20DeVleeschouwerGueudet_Lebaud.pdf.

Delors, J., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., Geremek, B., Gorham, W. y Nanzhao, Z. (1997). *La educación encierra un tesoro: informe para la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo Veintiuno*. Unesco.

Dewey, J. (1933). *How we think?* Lexington, MA, Heath and Company.

Distéfano, M., Aznar, M. y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de los números complejos: un análisis ontosemiótico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Número 30.

Duke, B., Dwyer, J, Wilhelm, J. y Moskal, B. (2008). Complex variables in junior high school: the role and potential impact of an outreach mathematician. *Teaching Mathematics and its Applications, 27(1)*.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. *Registros semióticos y aprendizajes*.

English, L. y Halford, G. (1995). Mathematics education. *Mahwah, NJ: LEA*.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching, 15(1).*

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art.*

Escalona, M. (2007). *El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario*. Tesis de doctorado no publicada. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero", Holguín.

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperable el 11 de enero de 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf p.57.

Estándares Curriculares para la Educación Matemática (2000). National Consilium Teacher of Mathematic. Sociedad andaluza de Educación Matemática (NCTM, 1992, 2000, 2007)

Falk, M. *(1980). La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana, VIII (1).

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Superior. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Intermedio.* 2005. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2015). "Mathematics and Cognition". Seminario Pensamiento Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. 28 de marzo de 2015.

Faris, W. (2006), *Diffusion, Quantum Theory, and Radically Ellementary Mathematics*, Princeton University, Princeton.

Fernández, J., Rico, L. y Ruiz, J. (2013), Meanings of the concept of finite limit of a function at one point: background and advances. *En Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Filloy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. *Aspectos teóricos del álgebra educativa*.

Fischbein, E. (1990). *Introdution (Mathematics and Cognition). En*: P. Neshery J. Kilpatrick (Eds), Mathematics and cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

Flores, C., García, G., Gómez, E., Gutiérrez, M., Hesiquio, H. y Velázquez, S. (2004). La formación del concepto de función en alumnos de educación media superior.

Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela* (5).

Galperin P. (1995). *Introducción a la Psicología*. La Habana: Pueblo y Educación..

Galperin, P. (1992). The Problem of Activity in Soviet Psychology. *Journal of Russian and East European Psychology, 30, (4).*

Galperín, Y. (1956). Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales. Referenciada por Talízina, (1988).

García, B., Mora, J., Martínez, A. y Anarela, A. (2012). El aprendizaje de conceptos matemáticos desde una perspectiva desarrolladora. *Pedagogía Universitaria*, *17*(1).

García, M., Escudero, I., Llinares, S. y Sánchez, V. (1994). Aprender a enseñar matemáticas. Una experiencia en la formación matemática de los profesores de Primaria. *Epsilon*, *30*.

Garret, R. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. En Revista *Didáctica de las Ciencias Experimentales # 5*, julio, p. 16-26. Alambique, Universidad de Bristol. Gran Bretaña.

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en humanidades*, (11).

Gorski, D. y Tavants, P. (1970). *Lógica.* Imprenta Nacional de Cuba.

Gray, E. y Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal, 19(2)*.

Gray, E. y Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In *PME CONFERENCE* (Vol. 3).

Grenier, D. (1985). Midle school pupils. Conceptions about reflections according to la task of construction. Procceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Educations. Noordwijkerhout.

Hadamard, J. (1945). *The mathematician's mind: The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press: New Jersey.

Hausberger, T. (2013). On the concept of (homo) morphism: a key notion in the learning of abstract algebra. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Hitt, F. (2001). El papel de los Esquemas, las Conexiones y representaciones Internas y Externas Dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*.

ICFES, Informe Pruebas Saber –Matemáticas. Bogotá, D.C., Noviembre de 2014. Recuperable el Marzo 9 de 2015 en la URL: ww.icfes.edu.co.

Jiménez, B. (1991). Los sistemas y modelos didácticos. En A. Medina y M. Sevillano (coords.): Didáctica-adaptación. *El curriculum. Fundamentación, diseño, desarrollo y evaluación*. Madrid, UNED (2â éd.).

Kantowski, M. (1981). Problem solving. *Mathematics education research: Implications for the*, 80.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty–five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.): *Teaching and learning mathematical problema solving: Multiple research perspectives*.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of Word problems in mathematics: An exploratory study. (Tesis doctoral no publicada, Universidad de Stanford, California.) Dissertation Abstracts International, 1968, 28, 4380A (University Microfilms, 68-5, 442).

Kilpatrick, J. (1992). Historia de la investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.): *Educación Matemática e investigación*, Madrid: Síntesis.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 3). Oxford University Press.

Kline, M. (1972).*Mathematical thought from ancient to modern times*. Nueva York, EE. UU.:Oxford University Press.

Koichu, B., Berman, A. y Moore, M. (2003). Changing teachers' beliefs about students' heuristics in problem solving. In *Electronic proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Krulik, S. y Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Labarrere, A. (1988). *La solución y la formulación de problemas como forma de contribuir al desarrollo de habilidades y al pensamiento matemático*. Material mimeografiado. Ciudad de la Habana, Cuba.

Labarrere, F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la resolución de* problemas matemáticos en la escuela primaria. La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, F. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* La Habana: Pueblo y Educación.

Leontiev, A. (1981). *La actividad en Psicología*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación

Leóntiev, A. N. (1983). *Teoría psicológica de la actividad.* Selección de Obras de Psicología, 2, 94-261.

Leontiev, A. N. (2005). The Genesis of Activity. *Journal of Russian and East European Psychology. 43,* (4)

Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical thinking and learning*, *5*(2-3).

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics.* Charlotte, NC: InformationAge Publishing.

Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why y how*. Dale Seymour Publications.

Lester, F. y Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*.

López, V. y Pérez, A. (2009). Aspectos fundamentales de la teoría de formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos de P. Ya. Galperin. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/index/assoc/HASH2f88.dir/doc.pdf

Majmutov, M. (1983). *Enseñanza problémica.* La Habana: Pueblo y Educación.

Martínez, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *4*(1).

Mayer, L. (1991). La situación de las matemáticas: la comunidad científica. *El Sistema de ciencia y tecnología en México*, 55.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Editorial Paidos.

Maza, C. y Arce, C. (1991). Ordenar y clasificar. *Madrid, Síntesis (Matemáticas: cultura y aprendizaje, 31)*.

Mazón, A. y Fabelo, B. (s.f). Una propuesta para la asimilación de conceptos matemáticos a través del Aprendizaje Significativo. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://casanchi.com/did/asimicon01.pdf

Mederos, O., Sigarreta, J., Kakes, A. y Mederos, M. (2014). Estudio de las características puntuales, locales y globales de conceptos del Cálculo Diferencial. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.posgradoeinvestigacion.uadec.mx/Posgrados/PNPC/MME/medios/5.%20resultados%20y%20vinculacion/13.%20contribucion%20al%20conocimiento/resultados%20cientificos/capitulos%20de%20libro/2014.oma.%20estudio%20de%20la%20disc/2014.0ma.%20estudio%20de.pdf

Mena, D., Rojas, L. y Vindas, A. (2011). Introducción a los conceptos básicos de funciones mediante el uso de la Resolución de Problemas. En Memorias del *VII Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, Cartago, Costa Rica.

Miller, J. (1998). *The psychology mathematical*. Princenton University Press, Princenton.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Colombia: M.E.N.

Morales A., Dolores C., Nolasco H., Hernández J. y Sigarreta J., (2014). Methodology based on problem solving in the treatment of the concept of limit to infinity. En *International Journal of Research in Education Methodology.Volumen 5, Nº 1*.

Mota, Rada y Estarada, (2013), The teaching of the concept of tangent line using original sources En *Proceedings of the VIII CERME.* Antalya, Turquía.

Núñez, N. (2003). *La educación de actitudes medioambientales en estudiantes de la especialidad de química industrial en la educación técnica y profesional.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógica José de la Luz y Caballero, Holguín.

Palacios, C. y Zambrano, E. (1993). Aprender y enseñar ciencias: una relación a tener en cuenta. Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe. Bol, 31.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, *2*(1).

Pérez, D. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires, Argentina: Eduvim.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Second edition. Princeton university press, new Jersey.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Pólya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* España. Editorial Comares.

Rico, L. (2000). *Didáctica de la Matemática e Investigación*. Universidad de Granada. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL00-138.PDF

Rico, L. (1988). Didáctica activa para la resolución de problemas. *Sociedad Andaluza Educación Matemática. Grupo EGB de Granada. España*.

Rizo, C. y Campistrous, L. (2007). Geometría Dinámica en la escuela, ¿Mito o realidad? *Revista de Didáctica de las Matemáticas No. 45.* Editorial Grao de IRIF, S.L.

Rohn, Karl. (1984).Consideraciones acerca de la enseñanza problémica en la enseñanza de la Matemática. La Habana: Boletín Sociedad Cubana de Matemática.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario.* Tesis en opción al título de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y caballero", Holguín. Cuba.

Rosch, E. (1978), "Principles of Categorization", en E. Rosch y B. Lloyd (Eds), *Cognition and categorization*, Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum.

Rubinstein, J. (1967). Principios de Psicología General. Edición Revolucionaria. Cuba.

Salcedo, T. y Gómez, B. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. In *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 251-260). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Sánchez, M. (1995). *Desarrollo de habilidades del pensamiento. Razonamiento verbal y solución de problemas.* México: Trillas.

Santiesteban, I. y Rodríguez, M. (2004). Propuesta metodológica para aprender a resolver problemas matemáticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 17*.

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Schlarmann K. (2013), Conceptual Understanding In Linear Algebra - Reconstruction Of Mathematics Students' Mental Structures Of The Concept 'Basis'. En *Proceedings of the VIII CERME*. Antalya, Turquía.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problems Solving.* Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1).

Sierra, S. y Alicia, R. (2002). *Modelación y estrategia: Algunas consideraciones desde una perspectiva pedagógica*. La Habana: Pueblo y Educación.

Sigarreta, J. y Sánchez P. (2012). *Estudio epistemológico de las geometrías no-euclidianas*.

Sigarreta, J. y Palacio, J. (2000). Estrategia para la resolución de problemas matemáticos utilizando como recurso los números complejos. En *Actas del Evento Internacional Compumat'* 2000. Universidad de la Cuenca del Plata – ISP "Blas Roca Calderío".

Sigarreta, J. y Palacio, J. (2000). La contextualización de los problemas matemáticos. *En Revista Matemática y Educación.* Editorial Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Sigarreta, J. y Palacio, J. (2000). Modelo Didáctico para la formación de valores a través de la resolución de problemas. En *Actas del Evento Internacional Compumat* 2000. Universidad de la Cuenca del Plata – ISP "Blas Roca Caldero. Argentina.

Sigarreta, J. y Palacio, J. (2001). La resolución de problemas matemáticos y su incidencia en la formación de valores. *Evento internacional de matemática e informática MATINFO*. Universidad de Holguín. Cuba.

Sigarreta, J. y Palacio, J. (Julio 2000). Características de los problemas matemáticos para incidir en la formación de valores. En *Revista electrónica de Ciencias.*

Sigarreta, J., Rodríguez, J. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13*(1).

Sigarreta, J. y Arias, L. (2009). *La resolución de problemas: un recurso para el desarrollo de la formación de la personalidad*. Ed. UAG. Guerrero; México.

Sigarreta, J. y Laborde, J. (2010). *Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural*. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf

Sigarreta, J. y Laborde, J. (2001). Modelo Didáctico para la formación axiológica a través de la resolución *de* problemas matemáticos. Ed. *Revista virtual de Educación matemática.* Educación e Internet.

Socas, M. (2001). Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.

Sprows, D. (2004). Taking the tricks out of mathematics. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 14*(1), 40-42. Retrieved from http://search.proquest.com/docview/213445786?accountid=48773

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.

Steiner, H. (1985). Theory of Mathematical Education (TME): An introduction. For the Learning of Mathematics, 5 (2).

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *In PME conference* (Vol. 1). The program committee of the 18th PME conference.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2).

Tallizina, F. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los* escolares. Ministerio de Educación Superior. La Habana, Cuba.

Tallizina, N. y Karpov, Y. (2000). *Psicología pedagógica.* México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Uprichard, E., Phillips, R. y Soriano, A. (1984). A conceptual schema for solving mathematical word problems with implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *6*(1).

Velázquez, F., Velázquez, F. y Domínguez, E. (2004). *Matemáticas e internet* (No. Sirsi) i9788478273171).

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2).

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P. y Álvarez, E. (2001). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI. Revista Iberoamericana de Educación*.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980, August). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*.

Vizmanos, R., Anzola, M. y Martínez, P. (1981). *Funciones 3: matemáticas, 3o. BUP*. SM.

Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* México: Grijalbo.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje.*. A. Kozulin (Ed.). Buenos Aires: Paidós.

Wattenmaker, D., Dewey, G. Murphy, T. y Medin, D. (1986). Linear separability and concept learning: Context, relational properties, and concept naturalness. *Psychonomic Bulletin y Review* 10.

Whitehead, A., Russel, B., Whitehead, A. y Russel, B. (1913). Principia Mathematica Cambridge University. *London. Principia mathematica (2nd ed.) London*.

Wittgenstein, L. Werkausgabe, vol. I: *Tractatus logico-philosophicus [Tractatus logico-philosophicus*, trad. dejacobo Muñoz e Isidoro Reguera, Alianza, Madrid 1988]. *Tagebücher*.

Wussing, H. (1989). *Conferencias sobre Historia de la Matemática.* La Habana: Pueblo y Educación.

Yan, Y., Jin, D., Li, Y., Zhao, H. y Li, X. (2011). Application of Simple Examples in Experiment Teaching about Complex Function and Integral Transform. In *International Conference on Information Computing and Applications*. Springer Berlin Heidelberg.

ANEXOS

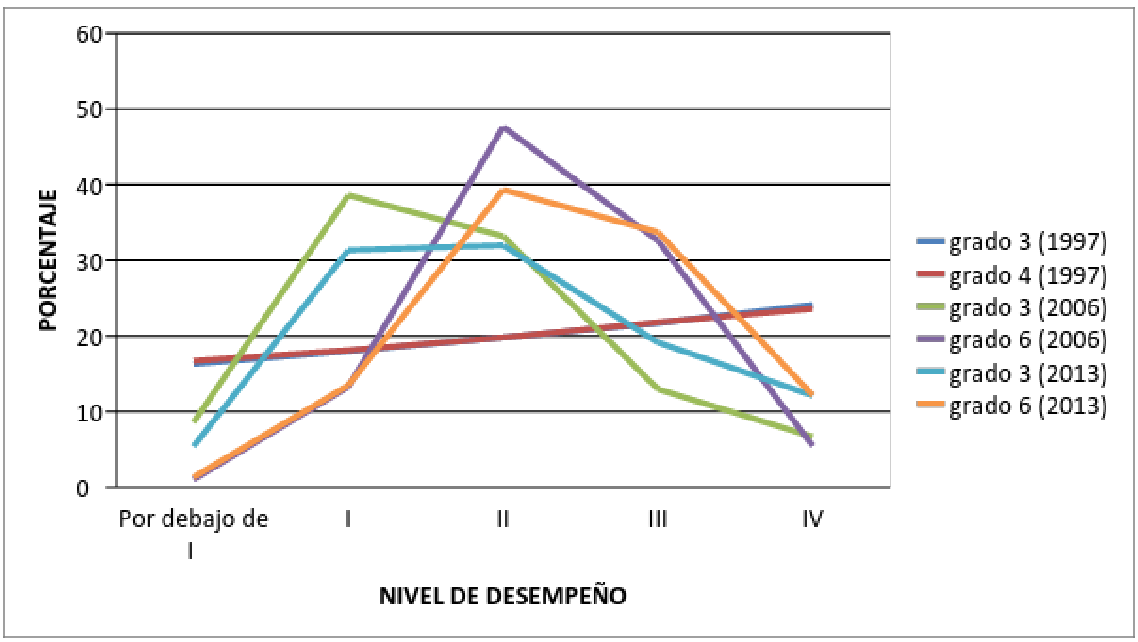
Anexo A. Pruebas externas e internas en las que participa Colombia.

PRUEBAS EXTERNAS EN LAS QUE PARTICIPA COLOMBIA			
ASPECTO	LLECE	PISA	TIMSS
Año de participación.	PERCE: 1997 SERCE: 2006 TERCE: 2013	2006, 2009, 2012.	1995 y 2007.
Objetivo de la prueba	Valorar los aprendizajes de los estudiantes latinoamericanos de primaria.	Determinar en qué medida los estudiantes de 15 años, independientemente del grado que estén cursando, han adquirido los conocimientos y competencias esenciales para afrontar los retos de la vida adulta.	Valorar la relación entre el currículo prescrito, el currículo aplicado y el currículo logrado, en términos de los aprendizajes de los estudiantes.
Qué evalúa	Evalúa y compara los rendimientos alcanzados por los estudiantes latinoamericanos	Evalúa y compara lo que los estudiantes pueden hacer con lo que saben	Evalúa y compara lo que los estudiantes saben
Áreas evaluadas	Lectura, escritura, matemáticas y ciencias	Lectura, matemáticas y ciencias. En cada aplicación se pone el énfasis en una de las áreas. En 2009 Colombia también participó en la prueba de lectura electrónica, y en [illegible]	Matemáticas y ciencias
A quiénes se evalúa	PERCE: estudiantes de tercero y cuarto grados	Estudiantes de 15 años de edad	En 1995: estudiantes de séptimo y octavo grados
	SERCE y TERCE: estudiantes de tercero y sexto		En 2007: estudiantes de cuarto y octavo grados
Cada cuánto	PERCE: 1997	Cada tres años, a partir de 2000	Cada cuatro años, a partir de

evalúa	SERCE: 2006 TERCE: 2013		1995
Participantes en el estudio	Países de América Latina y el Caribe, así como entidades subnacionales de estos países que se vinculan a este	Países miembros de la OCDE, más naciones de los cinco continentes y entidades subnacionales (provincias, estados) que no pertenecen a esta	Países de los cinco continentes que se vinculan al estudio, así como entidades subnacionales (provincias,

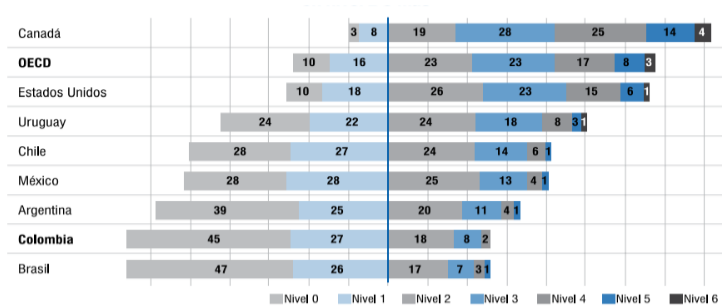
Fuente: http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales

Comparativo de resultados en Colombia pruebas LLECE AÑOS 1997,2006, 2013



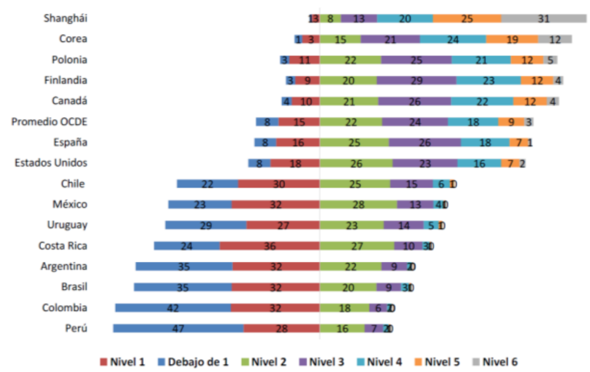
Fuente: UNESCO http://www.unesco.org/new/es/santiago/press-room/unesco-in-the-media/unesco-in-the-media-2014/

Resultados en matemáticas pruebas PISA 2006



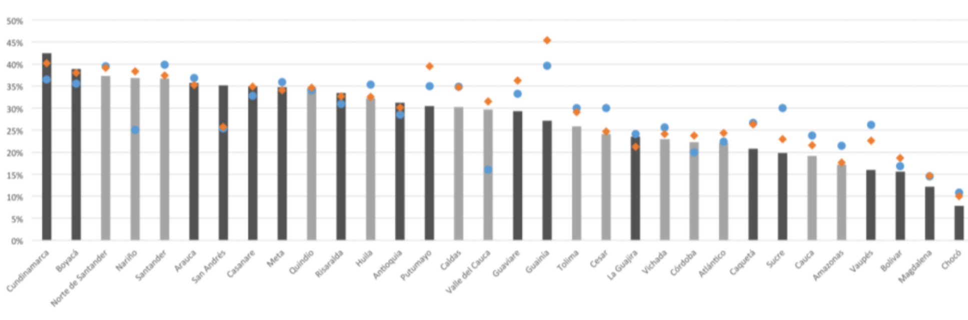
Fuente: OCDE. PISA 2006.

Resultados en matemáticas pruebas PISA 2012.



Fuente: ICFES 2012. www.icfesinteractivo.gov.co

Resultados pruebas Saber 11- por departamentos.



Fuente: ICFES 2012. www.icfesinteractivo.gov.co.

Anexo B**.** Diagnóstico inicial

Diagnóstico inicial

Nombre del estudiante: ____

Semestre_______________ **Fecha:** _____________________

Instrucciones: Contesta las siguientes preguntas.

Primera parte

1. ¿Qué significa para usted número complejo?
2. ¿Qué significa para usted unidad imaginaria?
3. ¿Alguna vez has estudiado los números complejos?, ¿Qué sabes de ellos?
4. Resuelva la siguiente ecuación: $3x^2 - 5x + 3 = 0$
5. ¿Qué entiendes por $z = a + bi$?
6. ¿Qué entiendes por función?
7. ¿Qué entiendes por función de variable compleja?
8. Grafica una función de variable compleja.

Segunda parte

9. ¿Consideras que es importante aprender el concepto de número complejo? ¿Por qué?
10. ¿Consideras que es importante aprender el concepto de función de variable compleja? ¿Por qué?
11. Menciona algunos casos en donde se usan estos dos conceptos.
12. ¿Te interesa estudiar el concepto de número complejo y el de función de variable compleja? ¿Por qué?

13. ¿Qué importancia tiene el concepto de número complejo y función de variable compleja en tu formación profesional?

Tercera parte

1. ¿Durante tus clases en las diferentes unidades de aprendizaje haz resuelto problemas?

2. ¿Qué tipo de problemas te han propuesto resolver?

3. ¿Qué tiempo le dedicas a la solución de un problema?

4. ¿Qué tipos de problemas matemáticos te llaman la atención?

5. ¿Qué consideraciones haces cuando te proponen resolver un problema?

6. ¿Para resolver los problemas que te proponen siempre utilizas las estrategias desarrolladas en la clase? ¿Por qué?

7. ¿Cuándo desarrollas la solución de un problema y tienes dificultades, en quiénes te apoyas? ¿Qué tipo de ayuda requieres?

8. ¿Qué dificultades encuentras entre la teoría que desarrollas en la clase y los problemas que resuelves? ¿Por qué es importante la resolución de problemas?

9. ¿Qué temas de matemáticas o áreas de la matemática te llaman más la atención? ¿Por qué?

10. Marca con una x el nivel en el cual crees estar, siendo 1 el nivel más bajo y 5 el más alto.

Cualidades	1	2	3	4	5
Perseverancia.					
Seguridad en sí mismo.					
Creatividad.					
Responsabilidad.					
Toma de decisiones.					
Responder por sus actos.					
Crítica y autocrítica.					
Forma de trabajo en equipo.					
Formas de trabajo individual.					

UNIDAD IMAGINARIA

Objetivo: Comprender el concepto de unidad imaginaria.
Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades, se encuentra programada siguiendo la vía inductiva, es decir, permitiéndose con ello poner a los estudiantes en situación de construir por sí mismos los conceptos con la ayuda de los compañeros y del profesor. El diseño de la secuencia sigue cuatro fases: primero *motivación*, con situaciones problema que permiten despertar la atención y el interés por el concepto de unidad imaginaria. Segundo *adquisición*, con problemas que permiten la exploración de ideas previas, con el fin de establecer una primera aproximación al concepto, desde el punto de vista geométrico sobre los números complejos y el significado de i. Tercero *elaboración*, se hace referencia a problemas retos, donde se exige la interrelación de otros conceptos, procedimientos y actitudes necesarios para su resolución. Cuarto *fijación - aplicación*, son problemas que requieren de los conceptos inter e intradisciplinarios trabajados y adquiridos en cursos anteriores, para la resolución de situaciones nuevas. Algunas actividades requieren de lecturas y el uso de software como GeoGebra. En cada fase se irá recogiendo el trabajo de los estudiantes y se analizará con el grupo; dichas intervenciones serán mediadas por el docente.

I. MOTIVACIÓN

- Realiza la siguiente lectura:

Para lograr entender lo que son los números complejos y el por qué son importantes, es necesario remontarse a su historia. A continuación encontrarás un breve resumen de algunas situaciones que permitieron la aparición y estudio del sistema de los números complejos.

El conjunto de los números complejos es una generalización de los números reales, percibida por los matemáticos griegos a través de la siguiente pregunta ¿existe algún número que multiplicado por sí mismo de -1? o ¿es posible encontrar el área de un cuadrado que sea negativa? Aunque su solución no era fácil de demostrar, se podía establecer que el cuadrado de cualquier cantidad positiva o negativa es siempre positivo. Por otra parte, era desconcertante para ellos llegar a ecuaciones que sólo tendrían solución si se aceptaba la existencia de $\sqrt{-1}$.

Pacioli (1494) estableció que la ecuación $X^2 + C = BX$ no podía resolverse a menos que su discriminante fuese mayor o igual a cero. Cardano (1545) describía la ecuación $x^4 + 12 = 16x^2$, como algo en esencia "imposible", llamando a las raíces de esta ecuación "ficticias". A Bombelli (1572) se le debe la primera noción de número complejo, según se puede apreciar de su libro *Algebra*; también representó las soluciones mediante expresiones de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Euler $(1707 - 1783)$ introduce la letra i para denotar a $\sqrt{-1}$.

En el siglo XIX se da un concepto claro y preciso de los números complejos, desde una interpretación geométrica, que casi ofrecen simultáneamente los matemáticos Gauss $(1777-1855)$, Wessel $(1745-1818)$ y Argaud $(1768-1822)$. Gauss fue el primero en darle a tales expresiones el nombre de *"números complejos"* y Argaud introduce la idea de *"plano complejo"*. Hermann Hankel $(1849-1873)$ brinda una concepción puramente formal de los números complejos, reduciéndolos a una extensión de los números reales.

Los números complejos, son una herramienta de trabajo imprescindible en algunas ramas de las ciencias, la tecnología y en el estudio de diversos temas de física: el movimiento vibratorio, las oscilaciones armónicas, entre otros.

Contesta las siguientes preguntas:

- ¿Si se eleva un número real al cuadrado, el resultado siempre es positivo?, ¿es posible que el resultado sea negativo, cuándo sucede ésto? Presenta algunos ejemplos.

- ¿Cuál es el número real que al elevarlo al cuadrado su resultado es -1?, ¿generaliza para cualquier número negativo $(-n)$, con $n \in \mathbb{R}$?

- ¿Cuál es el lado de un cuadrado cuya área es 14 unidades cuadradas? Si la figura es un triángulo, ¿cuáles serían sus dimensiones?

- Si a la superficie de un cuadrado se le aumenta 1 unidad cuadrada y su resultado es 0, ¿cuál es el lado del cuadrado?, ¿es esto posible?

- Resuelve el siguiente problema expuesto por Diofanto (275 a. C.). ¿Hallar los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7?

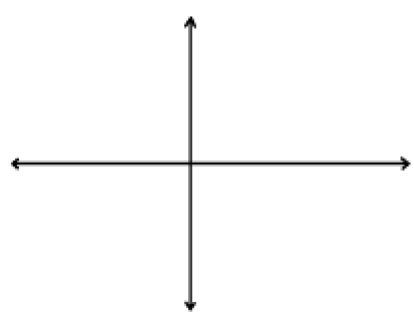
- Solucione el siguiente problema planteado por Cardano en 1545: Sea un segmento AB de longitud 10 unidades, divídelo en dos partes de tal forma que el rectángulo que se forma tenga un área de 40 unidades cuadradas. ¿Es posible construir dicho rectángulo? ¿Qué dimensiones tendría?

II. ADQUISICIÓN

Antes de definir el cuadrado de un número es importante tener claro qué es la multiplicación. Brevemente escribe, ¿qué significa multiplicar?

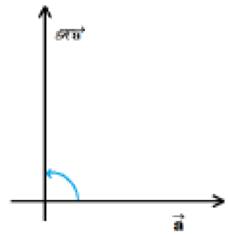
- Si analizas la multiplicación como dilataciones-contracciones y rotaciones, ¿es posible obtener el producto en diferentes conjuntos numéricos $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I})$?

- Usa el siguiente plano cartesiano, e interpreta qué significa multiplicar por -1. Compara tus respuestas haciendo uso del programa GeoGebra (actividad 1), y contesta las siguientes preguntas: ¿qué puedes observar?, ¿si multiplicar por -1, es realizar una rotación de $180°$, cómo puedes interpretar una rotación de $90°$?



Plano Cartesiano

- Observa e interpreta: Supóngase que partimos de un vector $\vec{a}$, y llamaremos $\Re$ a la aplicación que rota a $\vec{a}$ $90°$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, esto define en sí, una aplicación del conjunto de vectores en vectores. De lo anterior, denotaremos a $\Re(\vec{a})$ como la resultante de hacer dicha rotación.

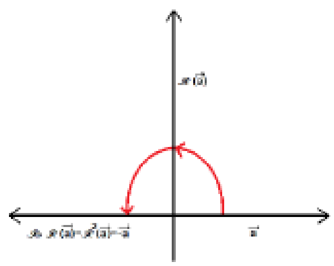


Aplicación de rotar a $\vec{a}$ 90°

Ahora, si aplicamos dos veces $\mathfrak{R}$ sobre $\vec{a}$, obtendremos $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}(\vec{a})$ que sería igual a $\vec{-a}$, en resumen:

$$\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}(\vec{a}) = \mathfrak{R}^2(\vec{a}) = \vec{-a} = (-1)\vec{a}$$

Gráficamente se obtiene que:



Aplicación de rotar dos veces a $\vec{a}$ 90°

- ¿Cómo puedes definir que aplicando dos veces $\mathfrak{R}$, su resultado sea -1?.

- Identifica geométrica y algebraicamente lo que sería:
  1. i
  2. $-i$
  3. $-(-i)$
  4. $2i$
  5. $-2i$
  6. i^2
  7. i^3
  8. i^4
  9. i^{23}
  10. i^{741}

  Generalice para cualquier exponente natural.

III. ELABORACIÓN

El conjunto de los números complejos está formado por todos los números de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales. Como ya observamos antes la unidad imaginaria i tiene la siguiente propiedad:

$$i^2 = -1.$$

- Interpreta ¿qué sucede cuando $a = 0$?, ¿en qué eje se pueden representar?

- Interpreta ¿qué sucede cuando $b = 0$?, ¿en qué eje se pueden representar?

- ¿Qué puedes concluir respecto a la relación que existe entre los reales y los complejos?

- Si en los reales se puede establecer la relación de orden que todos conocemos: menor o igual que ($\leq$), cumple que es un orden total, es decir, dados cualesquiera dos números reales x, y se tiene que x es menor o igual que y o, que y es menor o igual que x. ¿Es posible establecer dicha relación en los complejos? Observa, analiza y comparte con tus compañeros la siguiente operación.

  Supongamos que i es menor o igual que cero:

  $$i \leq 0.$$

  Por las propiedades de la relación de orden, se sabe que si multiplicamos a ambos lados por i la desigualdad cambia de sentido (por ser i un número negativo).

  $$i \cdot i \geq 0 \cdot i, \text{ luego}$$

  $$i^2 \geq 0, \text{ porque } i \cdot 0 = 0$$

  Como $i^2 = -1$, entonces

  $$-1 \geq 0, \text{ ¿esto es posible?}$$

  Ahora, si suponemos que i es mayor o igual que cero:

  $$i \geq 0$$

  Como i es positivo, si multiplicamos a ambos lados por él, la desigualdad se debe mantener. Usando las mismas propiedades anteriores obtenemos:

  $$\begin{aligned} i \cdot i &\geq 0 \cdot i \\ i^2 &\geq 0 \\ -1 &\geq 0 \end{aligned}$$

  ¿Esto es posible?, ¿se puede establecer una relación de orden entre los números complejos?

- Observa la siguiente igualdad y determina si hay o no algún error, justifica tu respuesta:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= i^2 \\
\sqrt{-1}^2 &= \sqrt{-1}^2 \\
\sqrt{-1}\sqrt{-1} &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} \\
\sqrt{-1}^2 &= \sqrt{(-1)(-1)} \\
(-1) &= \sqrt{1} \\
-1 &= 1
\end{aligned}
$$

¿Es posible esto?

III. FIJACIÓN - APLICACIÓN

1. ¿Si se hace una rotación de 45° al vector $(0,1)$ qué significado tiene? ¿qué coordenadas cartesianas posee este nuevo vector?

2. ¿Si se hace una rotación de 30° al vector $(0,1)$ qué significado tiene? ¿qué coordenadas cartesianas posee este nuevo vector?

3. Generaliza para qué casos relacionados con perímetros y áreas de triángulos rectángulos, su solución no es un número real.

4. Indague y generalice para qué casos relacionados con perímetros y áreas de figuras geométricas planas (ejemplo: triángulos, cuadrados), su solución no es un número real.

Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué significado tiene el número i?

- ¿Qué significado puede considerar sobre número complejo?

Anexo D. Actividad 2. Representaciones

REPRESENTACIONES

Objetivo: Conceptualizar los números complejos a través de diferentes representaciones, caracterizandolas y diferenciandolas en diferentes problemas.
Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía inductiva, para la fase de *motivación*, se procederá a jugar "Guerra Naval", con algunas modificaciones a las reglas de juego que permitirán hacer cambios de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. La *adquisición*, en esta fase se proponen a los estudiantes problemas relacionados con la ubicación de puntos en coordenadas polares a cartesianas y viceversa. Tercero *elaboración*, los problemas que se presentan a los estudiantes se encuentran relacionados con características necesarias y suficientes para poder ubicar un número complejo en el plano. Cuarto *fijación - aplicación*, éstos problemas requieren de la interrelación entre conceptos de otras áreas para su solución. En cada fase se analizan los resultados de las actividades desarrolladas por los estudiantes referente a las diferentes representaciones de los números complejos.

I. MOTIVACIÓN

El presente juego se realizará en parejas, se entrega a cada estudiante un plano cartesiano y cuatro barcos que serán ubicados en diferentes puntos de cada cuadrante (podrán incluir dentro de su estrategia el punto $(0,0)$); a cada jugador se le hace entrega de una regla y un transportador. El jugador 1, deberá atacar los barcos de su contrincante, dando el eje de las abscisas y las ordenadas (coordenadas cartesianas), mientras que el jugador 2, atacará a su enemigo, dando la distancia desde el punto $(0,0)$, hasta el punto de ataque y el ángulo formado con el eje positivo de los reales. El jugador que pueda hundir primero los barcos de su enemigo ganará el juego.

Posteriormente se hará un dialogo referente al juego, con las siguientes preguntas: ¿Qué estrategia usaron para poder establecer el paso de dar la distancia del punto $(0,0)$ al punto de tiro y el ángulo, a coordenadas cartesianas y viceversa?, ¿con la regla se hicieron aproximaciones, pero de qué manera se puede localizar el barco sin tener que aproximar?

II. ADQUISICIÓN

- Evalúa el $\cos\theta$ y el $\operatorname{sen}\theta$ de la posición de cada barco. ¿Qué relaciones encuentras en cada una de estas formas de expresar la posición, con las estrategias usadas por usted y su compañero?

- Si un barco se encuentra en la posición $3+4i$, ¿qué distancia hay entre el punto expresado en coordenadas cartesianas y (0,0)?, ¿qué ángulo se forma?

- Si se hacen rotaciones de 90º a cada uno de estos puntos, ¿qué coordenadas se obtienen en cada rotación?

- Si se hacen simetrías con respecto al eje real y al eje imaginario, ¿qué coordenadas se obtienen?

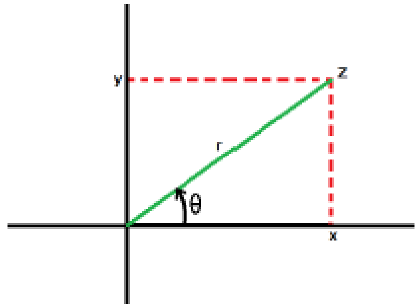
- ¿Qué relación encuentras en las dos transformaciones? Expresa cada punto de la forma $a+bi$.

Dado que a cualquier punto A del plano, podemos especificar su posición mediante el ángulo θ y la distancia r medida desde A al origen (O), entonces los números θ y r se llaman "*coordenadas polares*" de A o del vector $\vec{OA}$. Al vector $\vec{O}$ u origen, sus coordenadas polares serán $|0|, \measuredangle\theta$, donde θ puede obtener cualquier valor.

Para el caso de los complejos al ángulo θ se le denomina $arg(z)$ y r se llamará módulo de z o |z|.

III. ELABORACIÓN

Observa la siguiente figura y contesta:



Representación de z

- ¿Son necesarios tanto sen $\theta = \frac{y}{r}$ como $\cos\theta = \frac{x}{r}$, para determinar z?, especifica para el caso de coordenadas polares, cartesianas y trigonométricas.

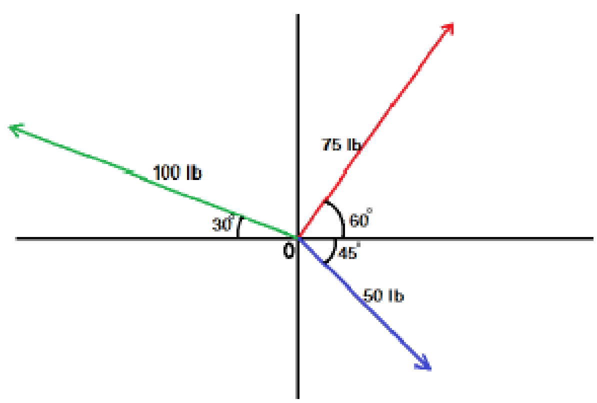
- Si se sabe que los puntos $3+2i$ y $5i-2$ son vertices de un cuadrado, ¿Cuáles pueden ser los otros dos vértices?

- Obtenga la ecuación de la recta a partir de los puntos: $z_1 = 2+3i$ y $z_2 = 4-2i$, ¿es posible generalizarla para cualquier z_1 y z_2?, escribe la ecuación.
- Si la recta es paralela al eje real o paralela al eje imaginario, ¿qué cambios se generan en la ecuación de la recta?

IV. FIJACIÓN - APLICACIÓN

- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 2+i$, $z_3 = 3+2i$, y determinar el punto donde esta circunferencia corta al eje real, imaginario y a la recta de $arg z = \frac{1}{4}\pi$.

- Tres fuerzas, como se muestran en la siguiente figura actúan en un plano sobre un objeto colocado en O. Determinar las coordenadas cartesianas, polares y trigonométricas de cada vector.



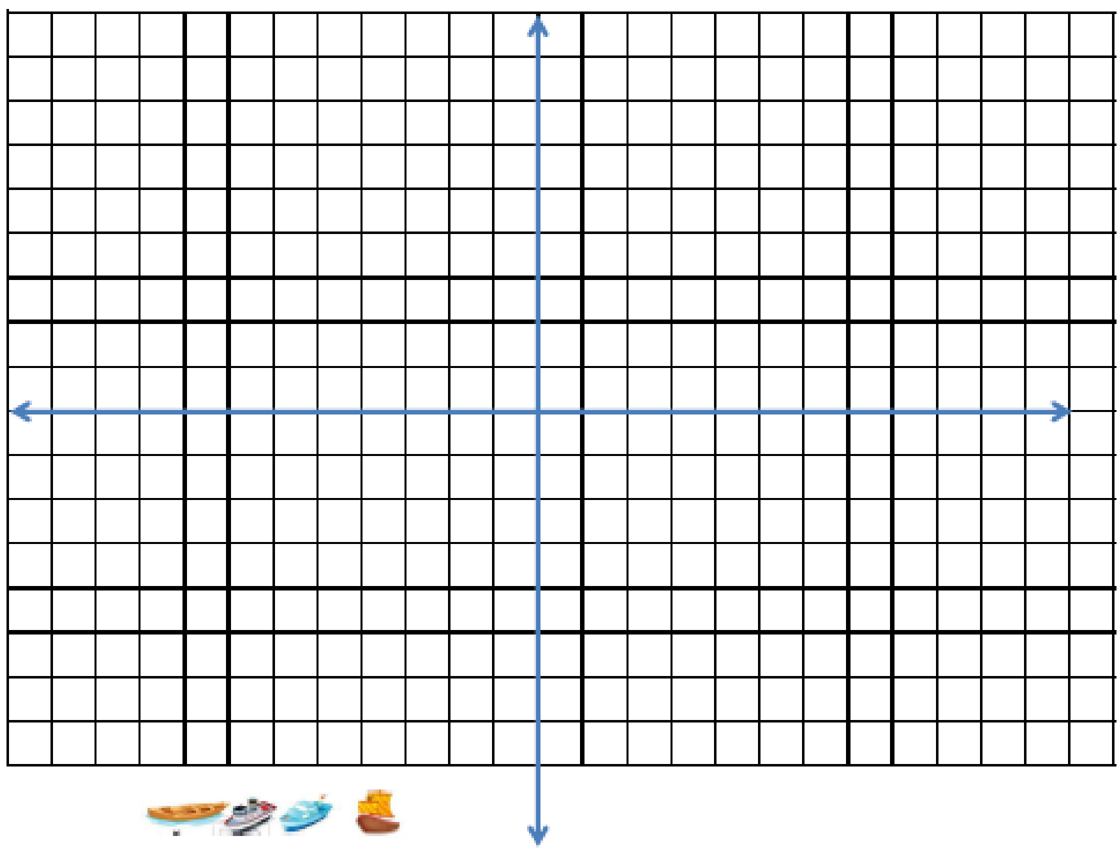
ejercicio

Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué representaciones puede tener un número complejo?

- ¿Qué elementos son necesarios en las diferentes representaciones de un número complejo?

- ¿Qué concepto puede dar número complejo?



Anexo E. Actividad 3. Operaciones.

OPERACIONES

Objetivo: Identificar y aplicar las operaciones con números complejos, caracterizándolas en diferentes representaciones.

Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta. Para la fase de *motivación*, se realiza una lectura con parte de la historia de los números complejos, sus representaciones y operaciones; además de ver el video titulado "Dimensiones"; se realizan intervenciones de los estudiantes frente a las dudas presentadas en la lectura y el video. *Adquisición*, se expone a los estudiantes cómo se realizan las diferentes operaciones (suma, resta, multiplicación y división) desde la representación algebraica de los números complejos, además de solicitar a los estudiantes que realicen diferentes operaciones con complejos. *Elaboración*, se entrega a cada estudiante la actividad número 2, la cual consiste en que usando el programa Cabri Geometry se identifiquen algunas características de la suma, resta, multiplicación y división de números complejos. Adicional a ello, los estudiantes verifican que las operaciones de forma algebraica coinciden con las operaciones de forma geométrica. *Fijación - aplicación*, con problemas donde el uso de operaciones con complejos son una opción en su solución.

Algunas actividades requieren de lecturas y software como Cabri Geometry. En cada fase se recoge el trabajo de los estudiantes y se analiza con el grupo; dichas intervenciones son mediadas por el docente.

I. MOTIVACIÓN

Realiza la siguiente lectura

En 1799, Gauss eligió como tema para su tesis doctoral la demostración del Teorema Fundamental del Álgebra: *cada ecuación polinómica de grado n, con coeficientes complejos, tiene n raíces en el cuerpo de los complejos*. Girard (1629), D'Alembert (1746), y Euler (1749), ya habían presentado varias tentativas de demostración, sin embrago estas tenían errores, así como la primera y cuarta opción presentada por Gauss en 1799. El tratamiento moderno que se le da al Teorema Fundamental del Álgebra, se debe a Galois (1811- 1832), Dedeking (1831-1916) y Kronecker (1823- 1891), y no a Gauss. Para Gauss la representación geométrica de los números complejos no era completamente satisfactoria y es así que ofrece un tratamiento formal a partir de la aritmética y el algebra deduciendo las propiedades de los números complejos mediante los postulados aceptados de la aritmética común. Buscó demostraciones, a la manera de Euclides partiendo de definiciones e hipótesis explícitas.

Fue Hamilton quien independiente del trabajo de Gauss comunica su descubrimiento al definir los complejos como números de la forma $a + bi$, donde a y $b \in \mathbb{R}$, sujeto a los postulados necesarios y suficientes para conseguir las propiedades deseadas de los números complejos tal como resultan de las manipulaciones algebraicas; por ejemplo, la igualdad: $(a, b) = (c, d)$, se da siempre y cuando $a = c$ y $b = d$; la adición: $(a, b) + (c, d)$, por definición es $(a + c, b + d)$; la multiplicación: $(a, b)(c, d)$ es $(ac - bd, ad + bc)$. Así desaparece la misteriosa i y el algebra de los números complejos queda reemplazada por lo que más tarde De Morgan y otros llamaron una doble algebra de parejas de números reales a,b,c,d,..."sujetas tan sólo a las leyes aceptadas de la aritmética y del algebra".

Después de la lectura se observará parte del video "Dimensiones" documental parte 5 de 9 - números complejos, con *URL: https://www.youtube.com/watch?v=eS6uMKx0XP0*.

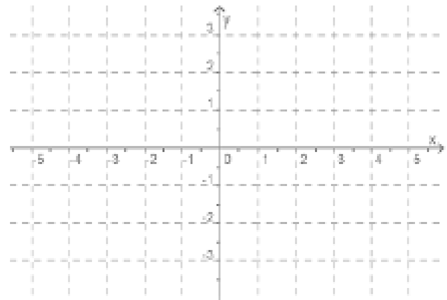
Se realizará una plenaria con los estudiantes acerca de lo que entendieron y las dudas que la lectura y el video les deja acerca de los números complejos y sus operaciones.

II. ADQUISICIÓN

Igualdad:

Los números complejos son puntos en el plano dotados de una estructura adicional. Consideramos el conjunto $R^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, es decir, el conjunto de pares ordenados de números reales. Dos de tales pares son iguales si sus componentes correspondientes coinciden: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

Ejemplo: $2+3i = 2+3i$ es diferente a $3+2i$, ¿por qué?, represéntalos en el siguiente plano.



Suma:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo: suma los siguientes números: $2+5i$ y $-4-2i$, ¿es el mismo resultado de sumar $-4-2i$ con $2+5i$?.

Multiplicación:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ejemplo: multiplica los siguientes números: $2+5i$ y $-4-2i$, ¿es el mismo resultado de multiplicar $-4-2i$ con $2+5i$?

División:

$$(x_1, y_1)/(x_2, y_2) = ((x_1, y_1)(x_2, -y_2))/((x_2, y_2)(x_2, -y_2))$$

Ejemplo: divide los siguientes números : $2+5i$ y $-4-2i$, ¿es el mismo resultado de dividir $-4-2i$ entre $2+5i$?.

III. ELABORACIÓN

A cada estudiante se le entregan 4 actividades diseñadas en el programa Cabri Geometry, que representa geométricamente la suma, resta, multiplicación y división de números complejos, con el propósito de reconocer algunas características de cada operación: módulos, argumentos, coordenadas, entre otras.

Cada actividad contiene tres puntos nombrados como z_1, z_2 y z_3, donde z_3, será el resultado de la operación.

Cada estudiante realiza movimientos de los puntos z_1 y z_2 con el fin de encontrar patrones en los resultados de cada operación z_3.

Contesta las siguiente preguntas:

- ¿Cuál es el número complejo de la forma $a+bi$ que al sumarle otro complejo de la forma $a+bi$, su resultado es un real, otro complejo, cero, uno, i?, ejemplifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el número complejo de la forma $a+bi$ que al multiplicarle otro complejo de la forma $a+bi$ su resultado es un real, otro complejo, cero, uno, i?, ejemplifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el número complejo de la forma $a+bi$ que al dividrlo por otro complejo de la forma $a+bi$ su resultado es un real, otro complejo, cero, uno, i?, ejemplifica tu respuesta.

- La suma de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos es 10, ¿de qué número complejo se trata?
- Dados dos números complejos cualesquiera se sabe que su diferencia es real, su suma tiene de parte real 8 y su producto es $11-16i$, ¿ cuáles son los números?

- Si al multiplicar dos números complejos el resultado es -2 y el cubo de uno de ellos dividido entre el otro es $1/2$, calcule los números complejos en forma polar.

- Cuál es el número complejo que después de multiplicarlo por $1-i$, sumarle $-3+5i$, y dicho resultado dividirlo por $2+3i$; se obtiene como valor final el número complejo inicial.

- Completa la siguiente tabla marcando con una X si se cumplen las siguiente propiedades de los números reales en los complejos. Enuncie las propiedades. (Puedes usar las actividades de Cabri Geometry o la forma analítica de los complejos). Si no se cumple la propiedad coloca un contraejemplo.

Operaciones / Propiedades	Suma	Resta	Multiplicación	División
Clausurativa				
Conmutativa				
Asociativa				
Elemento inverso				
Elemento neutro				
Distributiva				

IV. FIJACIÓN - APLICACIÓN

- El producto de dos números complejos es $\frac{3}{2}(cos\,\frac{17\pi}{12} + isen\frac{17\pi}{12})$, el cociente de sus módulos es 6 y la diferencia de sus argumentos $\frac{\pi}{12}$, ¿cuáles serán esos dos números?

- Deduzca que $||z_1| - |z_2|| \leq | z_1 - z_2 |$, interprete geométricamente las cantidades, para luego aplicar la desigualdar triangular.

- Demuestre que $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué características comunes y no comunes tienen las diferentes formas de representación en cada operación?

- ¿Qué significado puede considerar sobre número complejo?

- ¿Qué características comunes y no comunes existen entre las operaciones con complejos y otros conjuntos numéricos ejemplo: reales, enteros, racionales?

Anexo F. Actividad 4. Potencias.

POTENCIAS

Objetivo: Deducir algunas propiedades de la potenciación mediante la multiplicación, haciendo uso de la representación exponencial de los complejos y la formula de Moivre, en diferentes situaciones.
Sugerencia Metodológica: Las siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía inductiva, para la fase de *motivación*, se hace lectura de algunos datos curiosos de la vida de Moivre, y sus resultados frente a las operaciones con números complejos. La *adquisición* con problemas que requieren de la multiplicación sucesiva, se tratará que los estudiantes deduzcan la fórmula de Moivre, además de establecer la relación entre las diferentes representaciones de los números complejos y la fórmula de Euler. Tercero *elaboración*, en esta etapa se relacionan actividades realizadas en otras guías con la representación exponencial y la fórmula de Moivre, con el fin de afianzar no sólo el conocimiento nuevo, sino conocimientos anteriores. *Fijación - aplicación*, con problemas donde el uso de la representación exponencial y la fórmula de Moivre permiten su solución. En cada problema se analizarán las respuestas de cada estudiante con los compañeros.

I. **MOTIVACIÓN** Realiza la siguiente lectura:

Abraham de Moivre, nació el 26 de mayo de 1667 en Champagne y murió el 27 de noviembre de 1754 en Londres, matemático francés, reconocido por la fórmula de De Moivre, además, por predecir el día de su muerte a través de un cálculo matemático.

Moivre después de realizar sus estudios secundarios fue enviado por su padre un gran cirujano a la academia protestante de Sedan y allí estudió entre 1678 y 1682, después paso a Saumur donde estudió lógica.

Sus trabajos en matemáticas estuvieron orientados no sólo a la fórmula de De Moivre para números complejos, sino también a los desarrollos que tuvo frente a la distribución normal y las probabilidades, lo que lo hizo famoso. Fue elegido miembro de la Royal Society de Londres en 1697, gran amigo de Isaac Newton y Edmund Halley, quienes sentían gran admiración por los resultados en su trabajo de probabilidades. Como matemático no ganó mucho dinero, pues toda su vida fue pobre, lo único que hizo para sobrevivir fue jugar ajedrez, en lo cual era un erudito. Murió en Londres, una de las curiosidades de su vida fue la predicción de la fecha de su muerte (por causas naturales); a través de una ecuación matemática, observó que cada día dormía quince minutos más que la noche anterior, por lo tanto el día en que durmiera veinticuatro horas, ese día moriría; esto lo predijo 73 días antes del 27 de noviembre de 1754.

II. **ADQUISICIÓN**

Como ya hemos visto la conversión de un número complejo de la forma $z = x + iy$ en forma polar, en muchas ocasiones hace que algunas operaciones sean mucho más sencillas de realizar. Por ejemplo multiplica $2+3i$ por él mismo 4 veces; es decir $(2+3i)^4$, representa geométricamente la misma operación usando el programa GeoGebra de la actividad 1.

Realza la misma operación haciendo uso de la representación trigonométrica de los complejos, de manera que: $z = x + iy = r(cos\theta + isen\theta) = rcis\theta =| z |, \measuredangle\theta$, donde θ es uno de los valores del $arg(z)$ y $|z|$ es el módulo de z. ¿Qué elementos de la representación polar y algebraica cambian al hacer dicha operación?, ¿Qué puedes observar o generalizar en esta operación?

Si $z*z = r(cos\theta+isen\theta)*r(cos\theta+isen\theta)$, ¿qué resultado se obtiene?, realiza la misma operación con $z^3, z^4 y\, z^5$. Generaliza para cualquier entero positivo n.

$$\boxed{\begin{array}{c} z^n = r^n(cos\, n\theta + isen\, n\theta), \text{ de tal forma que} \\ (cos\,\theta + isen\,\theta)^n = (cos\, n\theta + isen\, n\theta) \end{array}}$$

Este resultado constituye un caso particular del teorema De Moivre.

Calcula la siguiente potencia: $(2 + i)^{12}$

Otra manera de expresar un número complejo se debe a Euler a través de su relación: Observa, analiza y comenta cada situación.
Sea: $sen\theta = \theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \frac{(\theta)^7}{7!} + \frac{(\theta)^9}{9!} + ... + (-1)^n\frac{(\theta)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + ...$

$\cos\theta = 1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} - \frac{(\theta)^6}{6!} + \frac{(\theta)^8}{8!} ... + (-1)^n \frac{(\theta)^{2n}}{(2n)!} + ...$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \forall x \in \mathbb{R}.$

En esta última ecuación e^x, reemplaza a $x = i\theta$, ¿qué relación obtiene? Compare con la que se presenta a continuación.

$e^{(i\theta)} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + ... + \frac{(i\theta)^n}{n!} + ..., \forall \theta \in \mathbb{R}.$

Recuerda que $i^{(4n)} = 1$, $i^{(4n+1)} = i$, $i^{(4n+2)} = -1$, $i^{(4n+3)} = -i$, con $n \in \mathbb{Z}$,

$e^{(i\theta)} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{-(\theta)^2}{2!} + \frac{-i(\theta)^3}{3!} + ... + \frac{(i\theta)^n}{n!} + ..., \forall \theta \in \mathbb{R}.$

Agrupa términos de tal manera que i sea un factor común:

$e^{(i\theta)} = (1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} - \frac{(\theta)^6}{6!} + \frac{(\theta)^8}{8!} ... + (-1)^n \frac{(\theta)^{2n}}{(2n)!} + ...) + i(\theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \frac{(\theta)^7}{7!} + \frac{(\theta)^9}{9!} + ... + (-1)^n \frac{(\theta)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + ...)$

Por lo cual se puede concluir que:

$e^{(i\theta)} = cos\theta + i\, sen\theta,$

Entonces,
$z = re^{(i\theta)} = r(cos\theta + i\, sen\theta).$

- Establezca una fórmula para determinar la multiplicación de dos números complejos z_1 y z_2 a partir de la representación exponencial. ¿Qué diferencias y similitudes existen con las otras representaciones?

- Establezca una fórmula para determinar la división de dos números complejos z_1 y z_2 a partir de la representación exponencial. ¿Qué diferencias y similitudes existen con las otras representaciones?

- Establezca una fórmula para determinar las potencias de números complejos z a partir de la representación exponencial. ¿Qué diferencias y similitudes existen con las otras representaciones y con la fórmula de Moivre?

III. **ELABORACIÓN**

Realiza las siguientes potencias (usa el teorema de Moivre para su solución y la representación exponencial).

- i^1
- i^2
- i^3
- i^4
- i^{27}

- Usa el teorema de Moivre para hallar potencias de números reales. ¿Se obtiene el resultado que esperabas?, comprueba dichas potencias usando la representación exponencial con números de la forma $z = a + bi$, con $b = 0$.

- Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas: $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\pi} = -1$, $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

- Obtener un valor para z^{-1} en forma trigonométrica, exponencial y cartesiana.

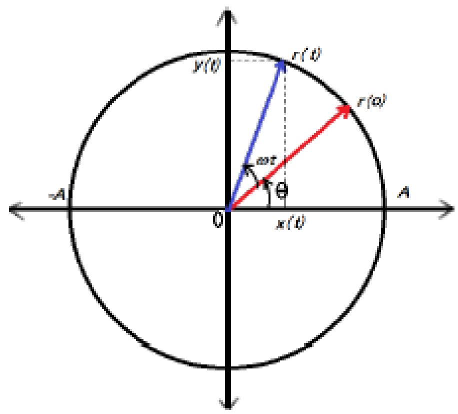
IV. FIJACIÓN - APLICACIÓN

- Demostrar que $cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta sen^2\theta$.

- Escribe una equivalencia para $sen3\theta$, $sen2\theta$ y $cos2\theta$.

- Encuentra el valor de θ, sabiendo que:
$(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)(cos\,2\theta + i\,sen\,2\theta)(cos\,3\theta + i\,sen\,3\theta)\cdot ... \cdot(cos\,n\theta + i\,sen\,n\theta) = 1$

- Hallar los valores de z de tal forma que $z^n = 1$ (sugerencia reemplace primero para $n = 2, 3, 4,$ y use la fórmula de Moivre).
- Considérese una partícula que recorre una circunferencia centrada en el origen y de radio r con una velocidad angular ω constante, como se muestra en la figura.



Suponga que su posición inicial para $t = 0$ esta dada por $(Acos\theta, Asen\theta)$. La posición de esta partícula en cualquier tiempo t es: $r(t) = (Acos(\omega t + \theta), Asen(\omega t + \theta))$.

$a)$ Expresa a $r(t)$ usando números complejos.

$b)$ Expresa a $r(t)$de la forma exponencial compleja?

$c)$ Halla $r(0)$, interpreta la respuesta.

$d)$ Halla la parte real y la parte imaginaria de $r(t)$, las coordenadas de $r(t)$ en el $eje\,x$ y en el $eje\,y$.

Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué significado tiene de número complejo?

- ¿Qué caracterización puede dar de operación de número complejo?
- ¿Qué concepto tienes de multiplicación de números complejos?

Anexo G. Actividad 5. Raíces.

RAÍCES

Objetivo: Determinar las raíces n-ésimas de un número complejo e interpretarlas geométricamente.
Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta, para la fase de *motivación*, se plantean problemas de construcción de polígonos regulares con el fin de establecer relaciones con las raíces de un número complejo. La *adquisición*, contiene problemas que relacionan el Teorema De Moivre con las raíces de números complejos y su relación gráfica con polígonos regulares. *Elaboración*, con problemas que involucran raíces reales y complejas, además del uso de diferentes sistemas de representación de los números complejos. *Fijación - aplicación*, donde los problemas relacionan las raíces de un número complejo, el Teorema De Moivre y el Teorema Fundamental del Algebra. En cada fase los estudiantes resuelven los problemas de manera individual, exponen sus ideas y se discute con el grupo sus soluciones.

I. MOTIVACIÓN

- Halla las coordenadas de los vértices z_1, z_2 y z_3 de un triángulo equilátero de centro $(0,0)$, si se sabe que uno de sus vértices se encuentra ubicado en $z = 3 + 0i$. Grafica el triángulo.
- Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado con centro $(0,0)$ y uno de sus vértices es el afijo con módulo 1 y argumento 120. Grafica el cuadrado.

II. ADQUISICIÓN

Recuerda el Teorema De Moivre y generaliza para un exponente racional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,sen\, n\theta), \text{ de tal forma que}$$
$$(\cos\theta + i\,sen\,\theta)^n = (\cos n\theta + i\,sen\,n\theta)$$

- Usa el teorema para hallar las tres raíces cúbicas de $z = 3 + 0i$, ¿qué relación existe con los tres puntos hallados en el problema 1?
- Usa el teorema para hallar las raíces cuartas del número z, de módulo 1 y argumento 120, ¿qué relación existe con los cuatro puntos hallados en el problema 2?
- Utiliza el programa GeoGebra para graficar las raíces cuadradas, cúbicas, sextas, séptimas, de un número complejo.

III. ELABORACIÓN

- Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3, sabiendo que un vértice esta situado en el eje real positivo.
- Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro $(0,0)$, si se sabe que uno de sus afijos tiene de módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{2}$. Grafica el hexágono regular.
- Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia de centro $(0,0)$ y uno de los vértices es el afijo del complejo $1 + 2i$.
- Puedes generalizar el proceso para un polígono de n lados con centro en $(0,0)$ y radio k, Escribe ¿qué sucede con los ángulos?, ¿qué sucede con los argumentos de cada número complejo o radio del polígono?
- Halla las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de 8 y -8, grafícalas. Explica las diferencias y similitudes que encuentras.
- Halla las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de 4 y -4, grafícalas. Explica las diferencias y similitudes que encuentras.
- Compara tus resultados teniendo en cuenta el conjunto de los números reales y el de los números complejos.

IV. FIJACIÓN - APLICACIÓN

- Grafíca las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas y quintas de 1.
- Soluciona la siguiente ecuación $x^2 + 1 = 0$, ¿cuántas soluciones encuentras?
- Soluciona la siguiente ecuación $x^3 + 1 = 0$, ¿cuántas soluciones encuentras?
- Soluciona la siguiente ecuación $x^n + 1 = 0$, ¿cuántas soluciones encuentras?

- Verifica que: todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene alguna raíz real. qué sucede si el grado es par?
- En los polinomios con coeficientes reales las raíces complejas no reales aparecen por pares conjugados. Es decir, si $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de un polinomio con coeficientes reales. ¿Su conjugada también pertenece a $\mathbb{C}$?

Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué significado puede considerar sobre número complejo?
- ¿Qué significado tiene para usted la solución de una ecuación de grado n, cuantas soluciones tiene?

Anexo H. Actividad 6. Lugar geométrico de puntos en C.

CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO $\mathbb{C}$

Objetivo: establecer el lugar geométrico de uno o varios números complejos en el plano.
Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta, para la fase de *motivación*, se entrega a los estudiantes un problema relacionado con la búsqueda de un tesoro en el cual deben poner en juego todos los conocimientos anteriores a esta actividad y algunos relacionados con cursos de geometría, para poder hallarlo. La *adquisición*, en esta fase se proponen a los estudiantes problemas que se relacionan con determinar el lugar geométrico de un conjunto de puntos en $\mathbb{C}$. Tercero *elaboración*, los problemas que se presentan están relacionados con el paso de la representación gráfica de un conjunto de puntos en $\mathbb{C}$, donde los estudiantes deberán encontrar dicho conjunto por comprensión. Cuarto *fijación - aplicación*, éstos problemas requieren de la interrelación entre conceptos de otras áreas para su solución. En cada fase se analizan los resultados de las actividades y se da la discusión entre los compañeros sobre el mecanismo o método usado para su solución.

I. MOTIVACIÓN

Un joven encontró un trozo muy antiguo de papel donde se describía la posición del tesoro de un pirata en una isla desierta. La descripción era: En la isla hay una palmera, una roca gigante y una horca; caminar desde la horca hacia la palmera, contando los pasos, al llegar a la palmera girar 90° a la derecha, contar el mismo número de pasos y clavar una estaca. Regresar a la horca, caminar hacia la roca gigante contando los pasos, al llegar a la roca girar 90° a la izquierda, contar el mismo número de pasos y clavar otra estaca. El tesoro está en el centro de la línea determinada por ambas estacas. Al llegar a la isla estaba la roca y la palmera pero la horca se había desaparecido debido a los cambios de clima y al tiempo transcurrido. El joven no pudo encontrar ese tesoro y regresó a su casa. Lo triste de la historia es que si el joven hubiera sabido calcular con números complejos podría haber encontrado el tesoro. Explica cómo lo hubiera hallado.

II. ADQUISICIÓN

- Describa geométricamente el conjunto de todos los números complejos, que satisfacen las siguientes relaciones.
  - $|z| = 1$.
  - $|z| \leqslant 1$.
  - $|z| \geqslant 1$.
- Indicar qué representa en el diagrama de Argand el conjunto:$\{z : z = \bar{z}\}$.
- Representar en el diagrama de Argand el conjunto: $\{z : |z+1| = 2\}$.

III. ELABORACIÓN

- Dados los siguientes diagramas expresa cuál es la condición que deben cumplir para que satisfagan la condición.

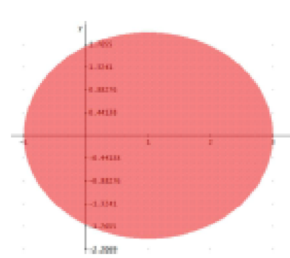


Diagrama 1

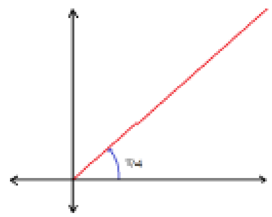


Diagrama 2

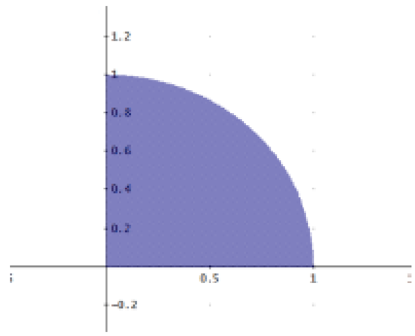
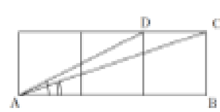


Diagrama 3

- Sea $a = 3 - 2i$ un número complejo dado y z un número complejo cuyo afijo permanece sobre la recta $r = x + y - 2 = 0$. Hallar el lugar geométrico de los afijos del complejo $a + z$.
- Hallar el lugar geométrico de la imagen del complejo z, si se sabe que $2|z| = |z - i|$.
- Indica los siguientes conjuntos en el diagrama de Argand.
  - $\{z : z + 2\bar{z} = 1\}$.
  - $\{z : |z - 1| = |z + 1|\}$.
  - $\{z : |z - 1| \leq |z + 1|\}$.

IV. FIJACIÓN - APLICACIÓN

- Describir el conjunto de puntos en el plano $\mathbb{C}$ determinado por la siguiente ecuación: $z \cdot \bar{z} > 4$.
- Sea r un número real positivo. Determine el lugar geométrico dado por los números complejos z, tal que $|z - r| = r$.
- Dados tres cuadrados iguales como se muestran en la figura, use los números complejos para determinar el ángulo $\measuredangle BAC + \measuredangle BAD$.



Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué concepto puede usted dar sobre número complejo?
- ¿Qué es para usted lugar geométrico?
- ¿Cómo imagina usted que es una función con variables complejas?

Anexo I. Actividad 7. Funciones en variable compleja.

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Objetivo: Comprender el concepto de función de variable compleja.
Sugerencia Metodológica: La siguiente secuencia de actividades se encuentra programada siguiendo la vía mixta, para la fase de *motivación*, se observa el video de título dimensiones 6/9, de igual forma se planean problemas que relacionan el concepto de función de variable real con el de función de variable compleja, *adquisición* en esta etapa se presenta a los estudiantes problemas relacionados con el paso del sistema de representación tabular al gráfico, con el fin de poder determinar algunas transformaciones de las funciones en variable compleja. Tercero *elaboración*, los problemas que se presentan hacen referencia al uso de software y la visualización para la comprensión del concepto de función. *fijación y aplicación*, en esta etapa se presentan problemas relacionados con el mapeo de rectángulos y triángulos bajo las funciones descritas en la etapa anterior, adicional a ello se hace uso del software ComplexImage como apoyo a los procesos de visualización. En cada fase se irá recogiendo el trabajo de los estudiantes y se analizará con el grupo; dichas intervenciones serán medidas por el docente.

I. MOTIVACIÓN

Como parte de la motivación se observa el video de nombre $dimensiones 6/9$ el cual se encuentra disponible en URL: https://www.youtube.com/watch?v=WE7wfJU6RV4.

Realiza la transformación de puntos, segmentos, circunferencias de radio 1 y 2, mediante la función $f(z) = z^2$, establece una posible solución gráfica.

II. ADQUISICIÓN

Definición: Dado un subconjunto S del plano complejo C, se denomina *función compleja de una variable compleja* $f(z)$ a una aplicación $f : S \to C$ tal que a cada valor $z \in S \subset C$ le corresponde un único número complejo $f(z)$.

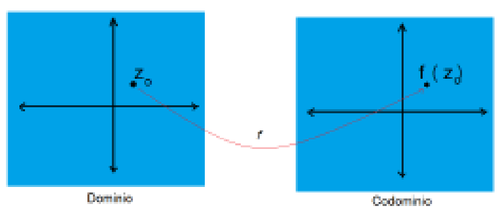


Figura 1: función f

- Dado $f(z) = z^2 + 5$, hallar $f(2+i), f(i), f(-i)$, ¿existe alguna diferencia con las funciones de variable real, qué puedes concluir?
- Calcule la parte real e imaginaria de las siguientes funciones y realice un mapeo de la transformación:
  - $f(z) = z^2$.
  - $f(z) = z + 3$.
  - $f(z) = 2z$.
  - $f(z) = z$.

III. ELABORACIÓN

- Transforma, mediante $w = f(z) = e^z$ los siguientes segmentos y curvas:
  - El segmento de recta que une los puntos $(1, 0)$ y $(1, 3)$.
  - El segmento de recta que une los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 2)$.
  - La circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

- La circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

Use el programa ComplexImage y realice otras trasformaciones.

IV. FIJACIÓN

- Mapear las siguientes figuras de vértices A, B, C, D, bajo la transformación dada por las funciones:
- $f(z) = e^z$.
- $f(z) = z^2$.
- $f(z) = 1/z$.
- $f(z) = z$.
- $f(z) = 2z$.

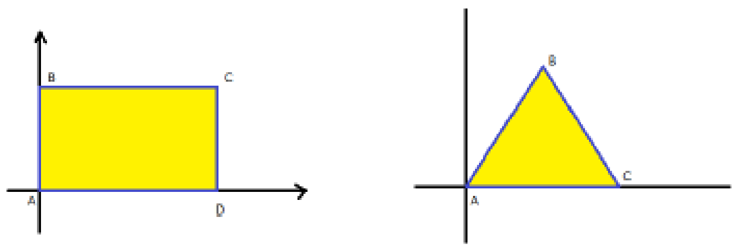


Figura 2: figuras

Conclusiones de la actividad:

- ¿Qué concepto puede dar de número complejo.

- ¿Qué concepto puede dar de función en variable compleja?