CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO ROBUSTO PARA EL CONCEPTO DE ÁREA Y CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO INVOLUCRADO EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO (niños entre 10 y 13 años)

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de Grado de Doctor en Educación Matemática

Mg. Diana Carolina Pérez Duarte

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2016

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO ROBUSTO PARA EL CONCEPTO DE ÁREA Y CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO INVOLUCRADO EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO (10 a 13 años)

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar al título de Grado científico de Doctor en Educación Matemática

Mg. Diana Carolina Pérez Duarte

Director de tesis: Dra. Mary Falk de Losada

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá D.C.

2016

Nota de aceptación:

____

____

____

____

____

____

Firma del Presidente del Jurado

____

Firma del Jurado

____

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Junio 11 del 2016

AGRADECIMIENTOS

A la Doctora Mary Falk de Losada, por su dedicación, aportes, sugerencias y orientaciones para el desarrollo y culminación de este trabajo de investigación, por su acompañamiento y consejos en mi proceso de consolidación como investigadora en Educación Matemática.

Al Dr. Mauro García Pupo por su acompañamiento en mi proceso investigativo y académico.

Al Dr. Osvaldo de Jesús Rojas por sus orientaciones en mi proceso como investigadora.

A los estudiantes de grado sexto, de los Colegios Liceo Fesán, El Bosque Bilingüe, Tibabuyes Universal I.E.D. y Colegio de la Universidad Antonio Nariño sede Usme, por su compromiso, motivación y compromiso para realizar las diferentes actividades planteadas en la investigación.

A las directivas y profesores de los Colegios: Liceo Fesán, El Bosque Bilingüe, Tibabuyes Universal I.E.D. y Colegio de la Universidad Antonio Nariño sede Usme, por facilitar la implementación de este proyecto.

DEDICATORIA

A mis padres que siempre me apoyaron incondicionalmente y estuvieron presentes en la evolución y posterior desarrollo total de mi tesis.

A mi hermano, esposo y demás familiares por el apoyo que siempre me brindaron.

SINTESIS

El propósito de esta investigación es la construcción de significado robusto del concepto de área y la caracterización del pensamiento geométrico involucrado, en los estudiantes de grado sexto de los Colegios Antonio Nariño sede Usme, Liceo Fesán, el Bosque Bilingüe y Tibabuyes Universal I.E.D. Se diseñaron once actividades, las que se implementaron con 176 estudiantes. En el proceso de solución de cada problema planteado, los estudiantes comienzan a construir el concepto de área utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente, a partir de elementos básicos de la geometría griega.

Para las actividades se propone un conjunto de problemas bajo la estructura de las competiciones matemáticas, frente a los cuales, los estudiantes ofrecen estrategias que les permite realizar transformaciones a las figuras geométricas por medio de acciones de descomposiciones, recomposiciones y comparaciones. Las actividades diseñadas propician que los estudiantes luego lleguen a deducir fórmulas aritméticas para calcular el área de diferentes figuras geométricas. La implementación de cada una de las actividades y los resultados obtenidos en las entrevistas, permitieron evidenciar las estrategias utilizadas por los estudiantes en el proceso de solución de los diferentes problemas, para constatar los elementos que caracterizan el pensamiento geométrico involucrado con respecto al concepto de área.

ABSTRACT

The purpose of this research is the construction of robust meaning of the concept of area and the characterization of the geometric thinking involved in sixth-grade students of four different schools. The schools were chosen to include students from varying socio-economic levels as well as both public and private schools. The participating schools were: Colegio de la Universidad Antonio Nariño in Usme, Liceo Fesán, Colegio El Bosque Bilingüe and Colegio Tibabuyes Universal I.E.D. Eleven activities were designed, which were implemented with 176 students. In the process of solving every problem posed, students begin to build the concept of area using their geometric thinking operationally, following the approach of classic elements of Greek geometry.

A series of activities was designed to allow the students to approach problems of area from an essentially geometric perspective. For each of the activities a set of problems, either taken from or similar to the non-routine or challenging problems found in popular mathematics competitions, is proposed. Working in groups, students offer their own strategies of solution using transformations to the geometric figures through actions of decomposition, recomposition and comparison, gradually constructing the concept of area. The activities designed also propitiate that students arrive, through similar means of decomposition and recomposition, at arithmetic formulas to calculate the area of different geometric shapes. The implementation of each of the activities and the results obtained in the interviews of a random sample of students, allowed evidence to be compiled concerning the strategies used by the students in the process of resolution of the different problems and to ascertain elements that characterize the geometric thinking involved in the construction of meaning for the concept of area.

Tabla de Contenido **Pág.**

INTRODUCCIÓN

La geometría es una de las ramas de la matemática con mayor presencia en la naturaleza y en la vida. En la actualidad, se realizan investigaciones concernientes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento geométrico. Algunos de estos estudios se enfocan en la realización de unidades didácticas, métodos de enseñanza, uso de recursos informáticos, entre otros, para mejorar la comprensión, desempeño y desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría se evidencian varias debilidades. Una primera de ellas es la manera en que en general se suele plantear el quehacer instructivo en el salón de clases, donde el profesor da importancia sólo al reconocimiento (abstracción de algunas de las propiedades) de las figuras geométricas y memorización de fórmulas para calcular áreas, volúmenes, perímetros, entre otras; con un tratamiento y orientación como éste no se contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico del estudiante.

Con respecto a las investigaciones, algunas de éstas se dedican a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Estos trabajos no mencionan de qué manera se puede enfocar el aprendizaje para que los estudiantes construyan significado robusto de los conceptos geométricos, y específicamente para el que nos interesa en la presente tesis, el de área, de tal forma que el proceso de aprendizaje sea perdurable. Por ejemplo, las unidades didácticas que se elaboran en el contexto de varias investigaciones continúan con la formulación de ejercicios en lugar de problemas de corte no rutinario, como los problemas de competiciones matemáticas, práctica que institucionaliza el aprendizaje como adquisición de definiciones, métodos y procedimientos.

En el tema de área, se sigue dando importancia a las fórmulas y su cálculo por medio de ellas, circunscribiendo el trabajo a la aritmética, en lugar de dar oportunidad a los estudiantes a potencializar su pensamiento y autonomía en la construcción de significado geométrico para este concepto. El proceso desarrollado de esta última forma permitiría la resolución de problemas no rutinarios enfocados a una amplia gama de situaciones incluyendo problemas pertinentes a la vida cotidiana.

Frente a esta situación, se ve la importancia de tener en cuenta la investigación de Pérez (2011) [1], que versó sobre la construcción de significado para el concepto de área de algunas figuras geométricas planas, dirigida a estudiantes de grado sexto. Con la motivación de continuar con este proceso de investigación, se pretende seguir explorando el desarrollo del pensamiento geométrico y las condiciones, actividades y prácticas pertinentes para llegar a construir significado robusto para el concepto de área y caracterizar el pensamiento geométrico involucrado.

En efecto, el enfocarse en el desarrollo del pensamiento geométrico, sin precisar o caracterizar dicho pensamiento, ocupa a muchas investigaciones internacionalmente y ha sido tratado en numerosos eventos, tales como los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME 1995 hasta 2012), las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática (CIAEM o IACME 1961, 1987 y 1995), las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los Congresos Iberoamericanos de Cabri (IBEROCABRI) y los Congresos de la Sociedad Colombiana de Matemática (SCM).

Las investigaciones acerca del desarrollo del pensamiento geométrico se reflejan en las siguientes tendencias, y los investigadores que las adelantan.

1. Trabajos cuyo interés radica en la validación del conocimiento geométrico y que centran su atención en las concepciones de los estudiantes acerca de cómo se valida éste. En este sentido se destacan: Krygowska (1980); Hanna (1991), Holowey (1969).
2. La preocupación por el razonamiento espacial, como elemento esencial del pensamiento científico, que agrupa varias líneas de investigación, como aquellas que intentan establecer relaciones entre el

[1] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

pensamiento espacial y las matemáticas. Entre los que han trabajado en esta línea se tienen: Del Grande (1990); Bishop (1993); Mammana y Villani (1998).

3. Las referidas al estudio de la visualización que intentan establecer las interacciones entre ésta y el razonamiento en geometría, y otras que buscan determinar mecanismos para incrementar la habilidad espacial en los aprendices. En este sentido se destacan: Presmeg (1986); Clement y Battista (1992); Fischbein (1993); Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996); Gutiérrez (1996); De Guzmán (1996).
4. Las que apuntan al desarrollo evolutivo del pensamiento geométrico y están orientadas por los avances de la psicología cognitiva. Se destacan trabajos realizados por Piaget, acerca de la concepción del espacio en los niños, y los estudios de los esposos Van Hiele (1957), encaminados a determinar niveles de pensamiento geométrico y etapas de instrucción correspondientes. Tall (2013), describe en su último libro una teoría que versa sobre el desarrollo del pensamiento matemático desde el niño menor hasta el adulto.
5. Desde la ciencia cognitiva se intentan precisar modelos de conocimiento y pensamiento geométrico. En este sentido se destacan Sharma (1979), Bransford (1979); Jenkins (1979), Pinker (1994).
6. Sobre el desarrollo de las tecnologías de la información (TIC) y el uso extenso de recursos informáticos, lo anterior ha dado lugar a varias investigaciones en torno al aporte de las representaciones dinámicas y generalizadas. Algunos autores que aportan a esta temática son: Hitt (1998), Laborde (1998), Rizo y Campistrous (2003), Villiers (1999), González (1999).

Se enmarca la presente investigación por la primera, tercera, cuarta y quinta tendencias presentadas, sin desconocer el aporte que las demás posiblemente puedan ofrecer a ella.

Algunos de los autores citados tratan de caracterizar el pensamiento geométrico del niño; sin embargo, sus hallazgos no propician un aprendizaje desarrollador[2], pues tienen entre sus limitantes que el

[2] No todo aprendizaje es desarrollador; esto depende de las habilidades que desarrolla el estudiante, lo cual le permite buscar diferentes estrategias a la solución de un problema interesante.

diagnóstico se refiere al contenido curricular y no valoran el papel que tienen los estudiantes en construir significado de un concepto geométrico determinado.

Una de las últimas investigaciones que buscan caracterizar el pensamiento geométrico es el desarrollado por Tall (2013) en su libro: *Como los seres humanos aprenden a pensar matemáticamente*.

En este escrito Tall (2013) comienza a describir el pensamiento matemático del ser humano como una construcción de conceptos a partir de dos tipos de abstracción, la estructural y la operacional.

Tall (2013), con respecto al desarrollo a largo plazo de las ideas matemáticas afirma:

> *La geometría comienza cuando el niño juega con los objetos, reconociendo sus propiedades a través de los sentidos y describiéndolos utilizando el lenguaje. Con el tiempo, las descripciones se hacen más precisas y se usan como definiciones verbales para especificar figuras que pueden construirse con regla y compás y eventualmente las propiedades de las figuras pueden relacionarse en el enfoque formal de la geometría euclidiana. El aprendizaje de la aritmética sigue una trayectoria diferente, empezando no enfocándose en las propiedades de los objetos físicos, sino en las acciones que se realizan sobre esos objetos las cuales incluyen el contarlos, agruparlos, compartirlos, ordenarlos, sumarlos, restarlos, multiplicarlos y dividirlos.*
>
> *Estas acciones se vuelven operaciones matemáticas coherentes y se introducen los símbolos que permiten realizar las operaciones rutinariamente con muy poco esfuerzo consciente. Más sutilmente, los símbolos en sí mismos pueden verse no sólo como operaciones a realizarse sino también comprimidos en conceptos numéricos mentales que pueden manipularse en la mente.*
>
> *Los sistemas de medidas también se desarrollan a partir de acciones*[3]*: medir longitudes, áreas, volúmenes, pesos y otros. Estas cantidades pueden calcularse en forma práctica usando fracciones o usando decimales si se desea un nivel mayor de precisión.*[4]

Para esta investigadora la anterior afirmación elaborada por el profesor Tall (2013) en su libro no es acertada, ya que en la investigación realizada por Pérez (2011)[5], se observó que los estudiantes lograban construir el concepto de medición (área) por medio de las acciones de descomposición-recomposición-comparación de algunas figuras geométricas planas abordadas en el contexto de la solución de problemas no rutinarios. El análisis de las actividades generadas en la tesis indicó que en el transcurso

[3] Tall, D. (2013). Este autor define acción como la manipulación de los objetos geométrico.
[4] Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three wordlds of Mathematics.
[5] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

de la solución de cada problema no rutinario el estudiante complementa y adecúa cada vez más el significado del concepto de área. Los resultados obtenidos en la población de estudio mostraron que los estudiantes construyeron de esta manera un significado apropiado del concepto implicado fortalecido y reforzado por generar diferentes estrategias en la solución de los problemas planteados, y asimilar la potencia del concepto revelada en ellas.

Las valoraciones anteriores conducen al siguiente **problema de investigación**, para construir significado robusto[6] del concepto de área en los estudiantes de grado sexto, ¿cuáles son las experiencias que deben fomentarse y cómo puede caracterizarse el pensamiento geométrico involucrado?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de construcción de significado para el concepto de área.

El **objetivo general** es contribuir a la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con la construcción de significado robusto para el concepto de área.

Se plantean como **objetivos específicos:**

- Recopilar evidencia pertinente de la historia de la matemática, pues a través de ella se revela el camino transitado por la comunidad matemática en la generación y construcción de conceptos y estrategias de pensamiento.
- Diseñar actividades basadas en problemas no rutinarios y retadores, que hagan que los estudiantes del grado sexto construyan significado para el concepto de área y desarrollen estrategias para calcular el área de ciertas figuras planas, mediante la descomposición y recomposición de figuras y regiones geométricas planas.
- Analizar las soluciones de los problemas planteados y a través de éstas caracterizar el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado sexto involucrado en la construcción de significado robusto para el concepto de área.

[6] Pérez (2015). Criterio emitido en el examen de calificación. "Construcción de redes conceptuales que desarrolla el estudiante para dar solución a problemas no rutinarios".

- Analizar la solución de los problemas olímpicos de matemáticas realizadas por la Universidad Antonio Nariño (Primer Nivel – grados sexto y séptimo).
- Analizar y sustentar una posición crítica con el fin de establecer si los planteamientos de la teoría de Tall (2013) son justificables o no frente al pensamiento geométrico cuyo desarrollo se observa en la construcción de significado robusto para el concepto de área.

El **campo de acción** de esta investigación es la caracterización del pensamiento geométrico.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **preguntas científicas**:

- ¿Qué investigaciones se han realizado sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la geometría?
- ¿Qué presupuestos teóricos sustentan la caracterización del pensamiento geométrico relacionado con el concepto de área?
- ¿Cómo estructurar una secuencia de experiencias para poder caracterizar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto en el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de área?
- ¿En qué contextos deben presentarse las experiencias estructuradas?
- ¿Cómo analizar la eficacia y el impacto de la secuencia de experiencias diseñadas para poder caracterizar el pensamiento geométrico en estudiantes de grado sexto en el proceso de construcción de significado robusto para el concepto de área?
- ¿Cuál sería una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado robusto del concepto de área en niños de grado sexto?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, se proponen las siguientes **tareas de investigación**:

- Fundamentar teóricamente el problema. Revisar teorías propuestas e investigaciones realizadas en el diseño de actividades en geometría para caracterizar el pensamiento geométrico con el propósito de fundamentar la investigación.
- Construir el estado del arte de la presente temática para definir su grado de actualidad.
- Estudiar las soluciones de estudiantes de grado sexto a problemas pertinentes de las olimpiadas de matemáticas y otros similares y estructurar un sistema de actividades diseñadas (teniendo en cuenta en el diseño problemas retadores como son los problemas olímpicos que provocan el pensamiento autónomo) para que, al desarrollarlas, el estudiante pueda construir significado para el concepto de área coherente con el nivel de la geometría del grado sexto y así contribuir a caracterizar el pensamiento geométrico involucrado, empleando del modelo de Wenger y con el propósito de contrastar las teorías de Tall (2013).
- Valorar los resultados de la implementación del sistema de actividades.
- Proponer una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado para el concepto de área en estudiantes de grado sexto.

El aporte práctico de la presente investigación radica en un conjunto de actividades para la construcción de significado del concepto de área desde un enfoque netamente geométrico. El aporte teórico es que se precisa una caracterización del pensamiento geométrico involucrado en tal construcción (áreas).

Este estudio permite sugerir los pasos que se cree se deben seguir en el proceso de enseñanza para que se construya el concepto de área en estudiantes de grado sexto, además de proponer la caracterización del pensamiento geométrico con respecto a la medición (área).

Esta tesis está estructurada en la introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos. En el Capítulo 1, se describe la situación actual en la que se encuentran estudios dirigidos al pensamiento geométrico, identificando los métodos de enseñanza que se utilizan para la geometría y poniendo en evidencia que no se han hecho suficientes investigaciones que caractericen este pensamiento. En el Capítulo 2, se presenta el marco teórico en que se basó este estudio y que se encuentra dividido en cinco partes, en la primera se expone un marco geométrico, en la segunda se expone la teoría piagetiana relevante, en la tercera se analiza la teoría de Tall acerca de la forma en que los seres humanos construyen el concepto de área, en la cuarta se expone la epistemología de Lakatos, Hersh y Davis que enriquecen las perspectivas del presente estudio, y en la quinta se describe el modelo de Wenger. El Capítulo 3 presenta la metodología en que se desarrolló esta investigación y los pasos en que se diseñaron y aplicaron las actividades. El Capítulo 4 se presenta la implementación de la propuesta metodológica y descripción de algunos episodios en la construcción del significado del concepto de área. Además, se pretende construir un material docente que paute el proceso de enseñanza – aprendizaje y el estudio del concepto de área.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

Diversas son las investigaciones que han trabajado sobre el pensamiento geométrico llegando a una aproximación a caracterizar éste, lo cual implica identificar diferentes formas de pensamiento relacionados con el hacer geométrico (resolver problemas, conjeturar, demostrar teoremas). Los puntos de vista de estas investigaciones no son unificados.

Se presenta a continuación un conjunto que puede considerarse común para muchos investigadores y posteriormente se describen algunas caracterizaciones particulares. Para el análisis de las caracterizaciones que se han desarrollado dentro de un marco geométrico se tendrá en cuenta algunas de las tendencias del pensamiento geométrico. Esta descripción se dividirá en cinco categorías en las cuales se puntualizarán investigaciones que se han desarrollado en cada categoría:

1. Pensamiento geométrico como se entiende desde los niveles de Van Hiele.
2. Pensamiento geométrico y su relación con la visualización.
3. Materiales diseñados para desarrollar el pensamiento geométrico.
4. Pensamiento geométrico como se entiende desde la ciencia cognitiva.
5. Referencia de varios autores que intentan caracterizar el pensamiento geométrico.

1.1. Pensamiento geométrico como se entiende desde los niveles de Van Hiele

1.1.1. Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele[7]

El equipo investigador estuvo conformado por profesores de matemáticas de la escuela secundaria y por miembros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia.

[7]Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Pastor, A., Margarit, J., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la enseñanza media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Editorial General Técnica Centro de Publicaciones, Madrid.

Esta investigación se desarrolló en tres etapas. En la primera etapa se planificó la secuencia de actividades (compuestas por temas de geometría plana) que debían ser utilizadas; en las otras dos etapas se realizaron el diseño y aplicación de pruebas para evaluar el razonamiento de los estudiantes antes y después de haber estudiado el material.

Los grupos experimentales correspondieron a los colegios donde trabajaba cada uno de los investigadores. Se les administró un pretest y un postest con el mismo cuestionario a los grupos, el primero al iniciar el curso y el segundo al finalizar el experimento, para comparar ambos resultados y obtener conclusiones sobre el estudio. En el pretest se constató que los estudiantes estaban en el nivel 1 de Van Hiele.

En cada sesión se realizó una explicación sobre las características de polígonos; estás sesiones eran orientadas según las fases propuestas por el modelo de Van Hiele. Una vez considerado que los estudiantes cumplían con el trabajo y se ubicaban en el nivel 2 de razonamiento de acuerdo con el modelo, y teniendo en cuenta las características que menciona el modelo y con base a las dificultades y limitaciones que se observaron, se planteaban ciertas tareas para comenzar el proceso de adquisición del siguiente nivel de razonamiento.

Los investigadores resaltan que ningún estudiante llegó al nivel 4, postulando que no hay ningún método de enseñanza que, en pocos meses, sea capaz de mover a los estudiantes desde los niveles de razonamiento 1 o 2 hasta el nivel 4.

Los autores Corberán y otros (1994) llegaron a la siguiente conclusión:

> Se observa una mejora generalizada en los niveles de razonamiento 1, 2, y 3 de los estudiantes después de haber trabajado con las unidades de enseñanza experimentales, siendo esta mejora menos acusada cuanto más alto es el nivel de razonamiento. La mayoría de los estudiantes que tenían una adquisición parcial del nivel 1 han completado su adquisición en este nivel; además, la mayoría

de los estudiantes han progresado significativamente en su adquisición del nivel 2, si bien ninguno ha llegado a conseguir una adquisición completa de este nivel, y unos pocos han progresado también en la adquisición del nivel 3 (p 126).

Es del criterio de la autora de esta tesis que en esta investigación se observa que se diseñan actividades de aprendizaje, en las que se tienen en cuenta las fases que plantean los Van Hiele, además se realizan algunas descripciones de acciones hechas por los estudiantes, pero sólo se concentran en ubicarlos en un nivel y no se aborda la cuestión de caracterizar su pensamiento geométrico y, por lo tanto, no se aportan elementos valiosos para la presente investigación.

1.1.2. Perímetro y área a través del modelo de Van Hiele[8]

Malloy (1999) afirma que históricamente los profesores manejan dos etapas en el proceso de enseñanza de la geometría. La primera de ellas es presentar la información del tema a estudiar para luego plantear ejercicios que los estudiantes deben solucionar.

Está metodología de enseñanza ha causado problemas de conceptualización por parte de los estudiantes, además, del no gusto por el tema. Este autor sugiere que la investigación de los esposos Van Hiele se puede utilizar como medio para mejorar los procesos de aprendizaje y buscar el gusto por la geometría.

El investigador señala que el modelo de Van Hiele brinda a los profesores estrategias basados en la investigación empírica; este modelo se puede usar para diseñar planes de estudio y realización de actividades pedagógicas. Malloy (1999), plantea un problema que se puede trabajar con los estudiantes (ver Figura 1).

[8] Malloy, C. (1999). Perimeter and área through the Van Hiele model. Mathetics Teching in the Middle School, Vol 5 No 2, 87 – 90.

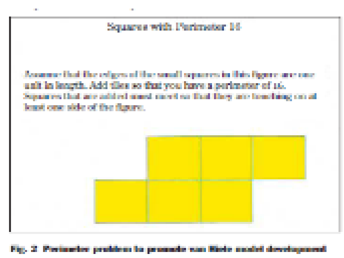


Figura 1. Planteamiento del problema.

Se les puede pedir a los estudiantes que agreguen cuadrados hasta que el perímetro de la figura sea 16; ellos pueden plantear varias estrategias y encontrar la solución. Este problema fue diseñado para que observaran la relación entre el área y el crecimiento del perímetro, además el docente debe plantear en clase conversaciones entre los estudiantes en las cuales pueden encontrar estas relaciones en otros contextos.

Pugalee y Malloy (1999) plantean que, utilizando unas tareas apropiadas acompañadas por una pedagogía también apropiada, los estudiantes y profesores pueden hallar relaciones entre conceptos matemáticos; como resultado adicional, son capaces de hacer y justificar conjeturas acerca de cómo y por qué existen estas relaciones.

Malloy (1999) seleccionó en verano tres estudiantes de grado sexto para que dieran solución al problema de la Figura 1. Se les presentó la figura y se les pidió que agregaran cuadrados hasta que el perímetro de la figura fuera 16.

Se informa que cada uno de los estudiantes se concentró en aspectos diferentes para abordar el problema. El primer estudiante se concentró en solo obtener el perímetro objeto, el segundo estaba tratando de clasificar el cambio de perímetro cuándo manipulaba los cuadrados, y el tercero estaba pensando en las propiedades y sus relaciones. Cada uno de los resultados obtenidos se socializó con los compañeros, y en este punto descubrieron que la menor cantidad de cuadrados que podían añadir para obtener un perímetro de 16 era dos.

Es del criterio de la autora de esta tesis que en esta investigación se describen los razonamientos a los que llegaron los estudiantes al resolver el problema propuesto y con base a éstos ubicarlos en un nivel según el modelo de Van Hiele, pero se encuentran varias deficiencias en el tratamiento, por lo menos para tratar de relacionarlo con los objetivos de la presente investigación. La primera de ellas es que no consideran, o al menos no mencionan, cómo pueden avanzar los estudiantes de un nivel a otro, y la segunda es que no caracterizan el pensamiento que produce los razonamientos observados.

Otras investigaciones consultadas en la elaboración de la presente investigación y que se basan en todo o en parte de los niveles de Van Hiele se describen a continuación.

- Beltrametti, Esquivel & Ferrari (2005)[9] realizan su investigación sobre la evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes para formarse como profesores de matemáticas a través del uso del software Cabrí.
- Frimel (2004)[10] en su investigación tuvo como objetivo comparar la eficacia de realizar procesos de enseñanza a través de instrucciones dirigidas y las instrucciones con libro texto para lecciones de geometría.

1.2. Pensamiento geométrico y su relación con la visualización

Para el análisis de esta tendencia se tendrán en cuenta las investigaciones y aportes de autores que hayan trabajado el pensamiento visual del niño y el pensamiento geométrico con relación a la visualización.

[9] Beltrametti, M., Esquivel, M., & Ferrari, E. E. (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes del Profesorado en Matemática. Universidad Nacional del Nordeste. Recuperado el 2 de febrero de 2014 en el URL: http://host140.200-45-54.telecom.net.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-019.pdf

[10] Matthews, N. F. (2004). A comparison of Mira phase-based instruction, textbook instruction, and no instruction on the van Hiele levels of fifth-grade students.

1.2.1. Pensamiento visual y geométrico del niño

Las investigaciones en educación matemática en el área de geometría han mostrado interés en temas relacionados con la visualización, "… *donde tratan de evaluar los procesos y capacidades de las personas para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos"*[11].

En la etapa pre-escolar el niño utiliza en gran parte su pensamiento visual como el instrumento principal del aprendizaje. Esto parece a simple vista ser un método pobre por cuanto se le quita al niño la posibilidad de crear, pero por otra parte, si se observa el desarrollo del conocimiento significativo el cual necesita de conceptos previos, esto será enriquecedor para el niño.

En las estrategias utilizadas para el mejor reconocimiento de las principales figuras geométricas de los niños en esta etapa, debe ser de uso obligado el juego.

Hitt (1998) señaló que desde 1985, aproximadamente, se le ha dado mayor importancia al proceso de generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de habilidades como la visualización matemática, en la resolución de problemas y para el aprendizaje de la matemática en general. Esto ha impulsado, por un lado, el estudio del papel de las representaciones de los objetos matemáticos y, por el otro, el desarrollo de una matemática en contexto.

El conocimiento geométrico no pretende simplemente que el niño reconozca visualmente una determinada figura y pueda asignarle su nombre. En este conocimiento se debe propiciar que se explore el espacio en que se encuentra la figura, compare los elementos estableciendo relaciones, y de esta forma, descubrir los elementos y propiedades de determinadas figuras para llegar a resolver problemas que implican la transformación y construcción de figuras geométricas.

[11] Godino, J., Cajaraville, J., Fernández, T., Gonzato, M. (Octubre 2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en Educación Matemática.

Al comenzar la etapa de la escuela primaria, el niño comienza a identificar y reconocer las propiedades de ciertas figuras geométricas y las puede describir pero sin dar una definición concreta. En este proceso identifica diferentes figuras geométricas en un dibujo, también identifica figuras contenidas en otras, reconociendo algunos tipos de ángulos, así como los vértices y lados que los conforman.

En el proceso enseñanza-aprendizaje es importante buscar estrategias en las cuales se desarrollen las habilidades visuales del estudiante, desarrollo que va a facilitar la adquisición de la estructura lógica para la solución de problemas. Estos procesos de visualización se asocian con representaciones, habilidades de interpretación, transformaciones, desarrollo del pensamiento y la facilidad de comunicar conceptos e ideas matemáticas.

Por medio de la visualización se abordan problemas que a través de juegos lógicos pretenden desarrollar la capacidad de razonamiento lógico, en particular, la clasificación. Los conocimientos geométricos deben ser significativos para poder aplicarlos a situaciones nuevas y desconocidas.

A modo de conclusión se puede precisar que es importante explorar desde la infancia cada una de las habilidades del pensamiento visual para estimular el desarrollo cognoscitivo y perceptual. Por otra parte, teniendo en cuenta que se vive en un mundo tridimensional, quizás se debe cuestionar el que la mayor parte de actividades geométricas que se presentan a los estudiantes sean bidimensionales. Finalmente, a veces hay dificultad en la comprensión de algunos conceptos debido a un desarrollo inadecuado de la percepción espacial. Estos aspectos limitan la caracterización del pensamiento geométrico empleado por el niño.

1.3. Aportes de autores que han trabajado la visualización

Los investigadores que han estudiado la visualización han tratado de evaluar los procesos y capacidades de los individuos para realizar ciertas actividades que requieran “ver” o “imaginar” mentalmente objetos geométricos espaciales, así como relacionar objetos para realizar operaciones o transformaciones con los mismos. Hasta donde se pudo constatar, estos autores no han llegado a caracterizar el pensamiento geométrico relacionado con la visualización.

La mayor parte de las investigaciones se sitúan en la descripción de estrategias cognitivas, así como el desenvolvimiento de las capacidades evolutivas de los individuos ante las actividades de visualización que se les presentan.

Clements y Battista (1992) definen las imágenes como *"… representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y transformadas"*[12]. Por su parte Bishop (1993) hace una clasificación donde discrimina entre la habilidad para codificar información figurativa y la habilidad para producirla.

Bishop hace referencia a dos habilidades del pensamiento espacial, a saber, la habilidad para descifrar información figural (IFI) y la habilidad para el pensamiento visual (VP). La IFI, involucra la comprensión de la representación visual y el vocabulario espacial. Estas representaciones son usadas en el trabajo geométrico como diagramas o tablas y la IFI se encarga de interpretarlas. La VP, involucra la visualización y la traslación de relaciones abstractas e información no figural. Las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se manipulan cuando se realizan actividades visuales[13].

Del Grande (1990) unió las propuestas de varios autores para proponer una clasificación más amplia que identifica siete habilidades consideradas como básicas, están son: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, perceptual o constancia de forma, tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual, memoria visual.

Presmeg (1986) define la noción de imagen visual *"… como un esquema que representa (depicting) información visual o espacial"*[14]. Afirma que tales imágenes visuales se pueden tener en presencia del

[12] Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning.
[13] Las actividades visuales se refiere a construcciones mentales que hace un individuo.
[14] Cajaraville, J. A., Blanco, T. F., & Godino, J. D. (2006). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. In X SIMPOSIO DE LA SEIEM (p. 7).

objeto o en su ausencia. Presmeg (1986), ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales; éstos son: de fórmulas, de patrones, cinéticas y dinámicas.

De Guzmán (1996), matemático español, comenta en sus experiencias que uno debe aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica o gráficamente y poder moverse de una a otra forma, fortaleciendo estas representaciones e interrelacionándolos.

El afirma que la *"visualización en matemáticas no es lo mismo que lo que algunas corrientes de psicólogos llaman visualización"*[15]*.* Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa, no sólo representar sino actuar sobre las representaciones para analizarlas, transformarlas e identificar representaciones equivalentes.

Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva y geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación de ellos para la resolución de problemas. Las corrientes psicológicas, en cambio, llaman a la visualización "una técnica", usada por ejemplo en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (en la década de los años 50 del siglo pasado), con la cual se pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente. Así pensada la visualización tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos.

Una de las importancias del pensamiento visual es lograr mostrar la validez de propiedades y teoremas, generalizar resultados y enseñar de una manera simple conceptos matemáticos. Pensar visualmente es una forma de enseñanza-aprendizaje que complementa otros métodos y que facilita el estudio de la matemática dándole una nueva faceta y así hacerla una ciencia que atrae el interés de los jóvenes. De

[15] Guzman, M. (2006). El rincón de la pizarra. Recuperable: 25 de marzo del 2014. Obtenido de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/visualizacion

Guzmán (1996) establece cuatro categorías de visualización: isomorfa, homeomorfa, análoga, y diagramática.

A modo de conclusión se analizó el desarrollo de cada una de las habilidades del pensamiento visual donde cada uno de los autores tomados muestra que éstas no sólo sirven para evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino que son la base para empezar a estimular los procesos inductivos y deductivos de razonamiento. Pero ninguno de los autores consultados llega a caracterizar el pensamiento visual utilizado en la construcción de significado para un concepto geométrico específico.

1.4. Materiales diseñados para promover el desarrollo del pensamiento geométrico

1.4.1. Hacia una cultura Matemática, para desarrollar las capacidades de los alumnos(as)[16]

Tasayco (1998) señala que con una clase impartida en la resolución de problemas se promueve la capacidad y desarrollo de razonamiento en los estudiantes. En la mayoría de colegios la enseñanza sigue siendo tradicional, pues se plantea a los estudiantes una serie de ejercicios del mismo tipo y que se resuelven por el mismo método. Lo que se quiere en la actualidad para la enseñanza, es proponer actividades retadoras con problemas interesantes que para los alumnos sean significativos, dado que los puedan explorar y no únicamente aplicar un método previamente establecido para resolverlos, y además que los puedan aplicar en su contexto social. Considera la resolución de problemas para promover el pensamiento geométrico, pero no aborda la cuestión de determinar las características de dicho pensamiento.

[16] Tasayco, R. (1998). Revista QUBO Volumen 1, numero 3 Lima. Recuperable: 8 de abril del 2014. Obtenido de http://pedroosoriorojas.blogspot.com/2012/02/cultura-matematica.html

1.4.2. El área, recursos didácticos para su enseñanza en la primaria[17]

Coberán (1996) proporciona a los docentes información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de área en superficies planas con el fin de facilitar el proceso de enseñanza de los docentes y el proceso de aprendizaje de los estudiantes. El autor menciona que, teniendo en cuenta las investigaciones consultadas para el desarrollo de su trabajo, comprendió que la enseñanza de área se limita al estudio del cálculo de fórmulas, lo que demuestra la gran pobreza con la que los docentes enseñan este concepto. También critica los textos proporcionados por las distintas editoriales donde se maneja el concepto de área como el producto de dos dimensiones lineales. Coberán propone una serie de actividades para desarrollar en el salón de clases para que los estudiantes asimilen e interioricen el concepto de área de figuras planas.

1.4.3. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales[18]

Este proyecto pretende implementar la geometría dinámica que tiene como principio el estudio de los componentes básicos de las figuras geométricas, sus relaciones y propiedades. A partir de estas construcciones los estudiantes tienen la oportunidad de explorar y manipular directa y dinámicamente figuras en el plano lo que conduce a la elaboración de conjeturas; estas experiencias permiten desarrollar las habilidades mentales que les posibilitarán acceder posteriormente al estudio formal de la geometría.

El programa dinámico escogido por los investigadores fue Cabri Géométre, programa que permite una exploración geométrica a fondo, utilizando interacción directa sin un lenguaje de programación. El

[17] Corberán, R. (1996). El área, recursos didácticos para su enseñanza en la geometría. Valencia. Recuperable: 9 de abril del 2014. Obtenido de www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

[18] Castiblanco, A. U. (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Recuperable: 10 de mayo 2014. Obtenido de http://www.slideshare.net/colsaludcoopnorte/articles-p-g-archivo

principio fundamental del uso de la geometría dinámica *es dudar de lo que se ve, y ver más de lo que se ve*. Este estudio se centra en tres aspectos para aumentar el razonamiento de los estudiantes:

- Los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas;
- Los procesos de justificación propios de la actividad geométrica; y
- El papel que juegan las construcciones geométricas en el desarrollo del conocimiento geométrico.

Este proyecto propone describir cómo se desarrolla el pensamiento geométrico en los estudiantes, y en consecuencia cómo debe orientarse el desarrollo de las habilidades desde formas intuitivas iníciales, hasta niveles formales finales. En el artículo se plantea una serie de problemas para realizar en clase en los cuales los estudiantes deben llevar a cabo sus construcciones teniendo en cuenta sus conocimientos previos. Se describen algunas actividades que se implementaron en los colegios objeto de estudio para determinar la factibilidad del uso de Cabri Géométre en la enseñanza de la geometría. Los investigadores llegan a las siguientes conclusiones:

- La geometría dinámica es visual y abstracta.
- Las herramientas tecnológicas permiten que el docente cree actividades que transforman su práctica docente.
- La exploración con sistemas dinámicos permite que los estudiantes aumenten su capacidad de argumentación.
- Cabri Géométre permite visualizar invariantes geométricos al utilizar el arrastre y observar si las figuras se deforman o no ante el movimiento, visualizando las características invariantes de la figura.
- Aunque se tuvieron algunas dificultades cuando los estudiantes estaban haciendo las construcciones, se encontró que, con base en éstas, los estudiantes nombraban algunas propiedades de las construcciones.

Otras investigaciones consultadas en la elaboración del estado de arte en cuanto a materiales para desarrollar el pensamiento geométrico fueron:

- Stockton (2009)[19] propone utilizar el origami como herramienta de enseñanza en la escuela media para mejorar las habilidades espaciales de los estudiantes.
- Rojas (2009)[20] propone un modelo didáctico que favorezca el proceso de enseñanza – aprendizaje desarrollador de la geometría del espacio en el duodécimo grado de preuniversitario en Cuba y de esta forma dar solución a los problemas que presentan los estudiantes para el aprendizaje de la geometría en el espacio.

1.5. Pensamiento geométrico desde la ciencia cognitiva

1.5.1. Neurociencia cognitiva y educación[21]

Este libro propone al lector que se puede lograr la comprensión de la neurociencia cognitiva con cierta facilidad, y en pos de ello comienza relatando la importancia de este campo y las nuevas investigaciones que han surgido en la denominada ***"era del cerebro"***.

Uno de los estudios que ha realizado la ciencia cognitiva es proponer un contexto donde se valide la interpretación de concepciones con respecto al aprendizaje.

Algunos autores señalan que la adquisición de conocimiento se rige por la interacción entre cuatro variables:

1) Las actividades o estrategias que utiliza el aprendiz para codificar, almacenar y recordar la información.

[19] Stockton, R. (2009). Mathematics Teacher, Nueva Jersey. Tomo 32. No. 7, p. 1-12
[20] Rojas, O. (2009). Una concepción Didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario diversificado. Cuba.
[21] Gómez, J. (2004). Neurociencia Cognitiva y educación. FACHSE.

2) Las características del aprendiz (habilidades) que influyen en los procesos de codificación, almacenamiento y recuperación de información.
3) Los materiales de aprendizaje, su estructura y su nivel de dificultad.
4) La tarea criterio o tipo de prueba que se utiliza para evaluar el aprendizaje (Bransford, 1979; Jenkins, 1979).

Estas variables forman parte del modelo tetrahedral del aprendizaje cuya naturaleza identifica la interacción entre estas variables. En tal sentido, una estrategia específica utilizada por un aprendiz con baja habilidad verbal puede promover un tipo de ejecución mientras que la misma estrategia utilizada por un sujeto con alta habilidad en el mismo campo puede generar una ejecución muy diferente.

Con respecto a la solución de problemas, los autores del libro informan que uno de los objetivos fundamentales de las instituciones educativas, desde el nivel preescolar hasta el universitario, es desarrollar habilidades cognitivas a través de la solución de problemas. Las actividades que realizan los individuos cuando resuelven problemas pueden ser analizadas en función de las estrategias cognitivas involucradas.

Newell y Simon (1982) definen problema como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el curso de la acción necesaria para lograr lo que quiere o como una situación en la cual el individuo actúa con el fin de lograr una meta utilizando para ello alguna estrategia en particular (Chi y Glaser, 1983).

Mayer (1983), señala que los tipos de conocimiento necesarios para resolver problemas incluyen:

1) Conocimiento lingüístico, reconocimiento de palabras, oraciones, etc.
2) Conocimiento semántico, conocimiento del área relevante al problema.
3) Conocimiento esquemático, conocimiento de los tipos de problemas.
4) Conocimiento procedimental, conocimiento de los algoritmos necesarios para resolver el problema.
5) Conocimiento estratégico, técnicas para utilizar tipos de conocimiento y procesos heurísticos.

Existen diversos procedimientos que facilitan la adquisición de habilidades para resolver problemas, y entre ellas se señalan ofrecer a los estudiantes representaciones metafóricas (Mayer, 1975, 1976, 1980), permitir la verbalización durante la solución del problema (Webb, 1983), hacer preguntas (Mackenzie y Herrington, 1981), ofrecer ejemplos (Simón, 1984), utilizar el aprendizaje por descubrimiento vs el aprendizaje expositivo (Puente, 1985), ofrecer descripciones verbales (Kersch, 1962), trabajar en grupos (Webb, 1983).

Esta investigación realiza una descripción de los procesos de aprendizaje y tipos de memorización que realiza un individuo, también puntualiza algunos procesos que ejecutan los estudiantes cuando se afrontan a la solución de un problema, pero no hay una caracterización en la cual se indiquen las etapas del proceso de razonamiento que puede tener un individuo para la solución de un problema ni se encuentra una descripción de los procesos de construcción de significado de los conceptos que sea adecuada para la naturaleza particular de los conceptos matemáticos.

1.5.2. Steven Pinker y los módulos cognitivos[22]

Steven Arthur Pinker, es canadiense, psicólogo experimental, científico cognitivo, lingüista y escritor. Es profesor en el Harvard Collage y titular del “Johnstone Family Professorship” en el departamento de psicología de la Universidad de Harvard. Dentro de sus especialidades académicas se destacan la percepción y el desarrollo del lenguaje de los niños.

Con respecto a la enseñanza de las matemáticas y la física, Pinker afirma que se pueden facilitar los procesos de aprendizaje de la matemática por medio de dos de los diecisiete módulos mentales que él ha postulado, los de **mecánica intuitiva** y **número**, trabajando primero la construcción de conceptos y reglas, y luego introduciendo los gráficos y sistemas simbólicos que representan los números y relaciones con ecuaciones escritas. Comenta que, equivocadamente, el sistema educativo tradicional inicia con

[22] Tomado de los escritos realizados por la Doctora Constance de Losada. Universidad Antonio Nariño

representaciones simbólicas y escritas utilizando la memorización y abstracción y logrando poco entendimiento en los estudiantes.

Otra investigación consultada fue la de Sharma (1979) quién describe el proceso del razonamiento del ser humano a través del hemisferio derecho y hemisferio izquierdo del cerebro, señalando que hay dos perfiles para el aprendizaje de la geometría las cuales las denomina de naturaleza visual y de naturaleza verbal.

1.6. Referencias de varios autores donde se intenta caracterizar el pensamiento geométrico

A continuación, se realizará un análisis de autores que desde sus perspectivas han caracterizado el pensamiento geométrico de un individuo, se tendrán en cuenta a Piaget, la teoría de los esposos Van Hiele y David Tall.

1.6.1. Piaget

Jean Piaget (1896 – 1980), aunque educado como biólogo, fue el psicólogo infantil más eminente del siglo XX. Entre sus obras se destacan *Epistemología matemática y psicología (1980), La psicología de la inteligencia (1983) y La construcción de lo real en el niño (1985)*.

En sus investigaciones de la epistemología genética, señala que el mecanismo básico con que llega a trabajar la inteligencia son las llamadas "operaciones", las cuales consisten en acciones interiorizadas y coordinadas en estructuras. Además, indica que la experiencia es un factor de primer orden para explicar los mecanismos de adquisición de conocimiento, llegando a la conclusión de que la experiencia es siempre *asimilación de estructuras*.

Piaget junto con otros investigadores aportaron elementos importantes sobre el desarrollo geométrico en niños y jóvenes. "*Las investigaciones de Piaget e Inhelder (1956, 1960), sugieren que los primeros conceptos espaciales son de naturaleza topológica y dan al niño un conocimiento muy amplio de su* *mundo espacial que puede ser refinado con las percepciones más detalladas y complejas descritas a través de las características de varios tipos de geometría*"[23].

Las observaciones recogidas por Piaget e Inhelder los llevaron a proponer cuatro etapas de desarrollo en el pensamiento espacial, la sensorio-motora, la de pre-operaciones, la etapa operacional concreta y la etapa de las operaciones formales, que están en correspondencia con la edad de los estudiantes.

Así las cuatro etapas de desarrollo en el pensamiento espacial según Piaget son sensorio-motor (0–2 años), pre-operacionales (2–7 años), operacional concreta (7–12 años), operaciones formales (12 –18 años).

> *Piaget complementa su teoría global de etapas al formular varios modos en los cuales se construyen los conceptos nuevos. El primero es la abstracción empírica por medio del juego con objetos para ser consciente de sus propiedades (por ejemplo, para reconocer un triángulo como una figura de tres lados y para distinguirlo de un cuadrado o de un círculo).*
>
> *El segundo es la abstracción pseudo-empírica mediante el énfasis en las acciones sobre los objetos. Esto juega un papel grande en matemáticas en donde las operaciones tales como el contar y el partir conducen a conceptos tales como número y fracción.*
>
> *Él también formula la abstracción reflexiva donde las operaciones en un nivel se vuelven objetos mentales de pensamiento en un nivel superior. Esto ha probado ser fructífero al describir como la adición se vuelve suma, adiciones repetitivas se vuelven producto y, más generalmente, una operación del tipo "doble un número y añada seis" se convierte en una expresión algebraica (2x+6) que es tanto un proceso de evaluación como un objeto algebraico pensable que puede manipularse para resolver*

[23] Esta descripción se hace con base en un trabajo de Jenni Way. Recuperable el 5 de diciembre de 2015 de la URL: http://nrich.maths.org/2483

problemas. La abstracción reflexiva es esencialmente una sucesión de extensiones de alto nivel de la abstracción pseudo-empírica.

Por analogía, hay un cuarto tipo de abstracción que generaliza la abstracción empírica de las propiedades de los objetos físicos, para imaginarse objetos mentales que existen solo en la mente, tales como los puntos que no tienen tamaño y las líneas rectas que tienen un largo pero no tienen ancho. Esto puede llamarse abstracción platónica debido a que forma objetos mentales platónicos al centrarse en las propiedades esenciales de las figuras[24] . Observemos la Figura 2.

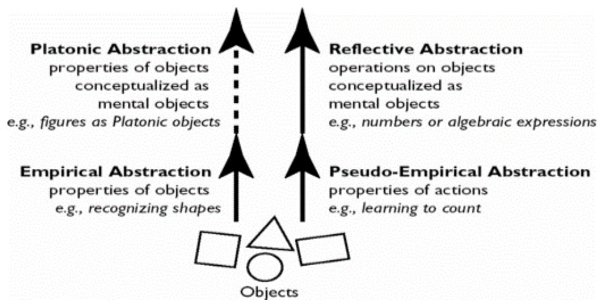


Figura 2. Abstracción Piagiatiana y Platonica. Tomado de Tall, David How Humans Learn to Think Mathematically.

David Tall, educador matemático inglés, afirma que estos cuatro tipos de abstracción pertenecen a dos desarrollos a largo plazo, uno que se construye de las propiedades de los objetos (abstracción empírica y platónica) y la segunda de las acciones sobre los objetos (abstracción pseudo-empírica y reflexiva). Estos dos desarrollos se relacionan directamente con las dos primeras formas de desarrollo a largo plazo en el razonamiento matemático formuladas anteriormente. El primero se centra en la estructura de los objetos, el segundo en las acciones que se vuelven operaciones y se simbolizan como objetos mentales tales como los números y las expresiones algebraicas. A ellas se refiere como *abstracción estructural* y *abstracción operacional.* (Figura 3). Se tratará las propuestas de Tall con mayor detenimiento en el Capítulo 2 de la presente tesis.

[24] Tall, D (2013). How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the three worlds of mathematics

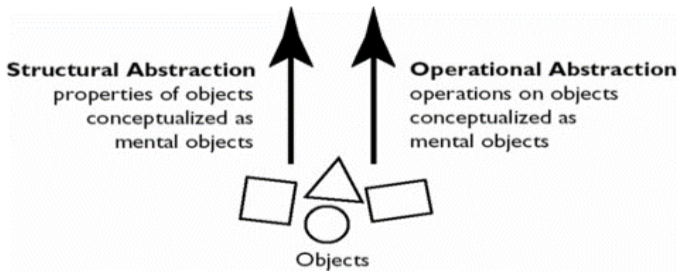


Figura 3. Abstracción a largo plazo. Tomado de Tall, David How Humans Learn to Think Mathematically.

1.6.2. Teoría de Van Hiele

A finales de la década de los cincuenta, los esposos Van Hiele hicieron una propuesta frente a la enseñanza de la geometría que lleva su nombre; desde ese momento ha sido usada por muchos investigadores y actualmente goza de aceptación en gran parte de la comunidad de educadores matemáticos. Está incluida en los estándares norteamericanos y en publicaciones de alto nivel se siguen publicando nuevas investigaciones basadas en este modelo.

Sin embargo, otros investigadores consideran que es un modelo parcial y no puede tomarse como único orientador del proceso de enseñanza de la geometría. Algunos señalan que no ofrece mayor información sobre aspectos del aprendizaje de la geometría diferentes al razonamiento[25]. Lo anterior es cierto especialmente de quienes consideran el trabajo en solución de problemas como eje dinamizador y desarrollador del currículo matemático y quienes le apuestan al desarrollo del pensamiento avanzado desde los primeros años. También se cuestiona el nivel jerárquico y discontinuo de los niveles, y se señala que no tiene en cuenta la diversidad en el comportamiento de los estudiantes.[26]

La premisa fundamental de este modelo es que el aprendizaje de la geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no están asociados a la edad (dependen más del trabajo y estimulación del docente), y que sólo se puede pasar a un nivel superior si se ha alcanzado

[25] Huerta, M.P (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía solo: un análisis comparado, una integración necesaria. En Enseñanza de las ciencias, 17 (2), 291-309.
[26] Pegg J. (1997). Broadening the Descriptors of Van Hiele's Levels 2 and 3. En MERGA 20 Aotearoa.

el anterior. Otros elementos importantes son, por una parte, el lenguaje utilizado, ya que se considera que en cada nivel se requiere el uso adecuado de un lenguaje; y por otra parte, la significatividad de los contenidos, que implica que los estudiantes van a asimilar aquello que les es presentado en cada nivel de su razonamiento, por lo cual no puede enseñarse un contenido nuevo hasta que no tengan el dominio del contenido del nivel anterior.

Sin duda, ésta puede ser una premisa refutable, sería como decir que los niños no pueden aprender a leer si no conocen primero todo el alfabeto[27]. También se considera que la ubicación de un estudiante en un nivel de razonamiento es local, es decir, depende del contenido, puede estar ubicado en nivel tres en el tema de triángulos, pero en nivel uno si se trata de rombos, es decir, que este modelo no da una idea global de nivel de pensamiento geométrico que ha alcanzado un estudiante. Finalmente se señala que no existe una edad determinada en la cual se alcancen todos los niveles, pues depende de la instrucción recibida.

En este modelo se considera la existencia de cinco niveles jerárquicos que en su orden son visualización o reconocimiento, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor.

Finalmente es importante señalar que la raíz del modelo Van Hiele es el trabajo realizado por Piaget, y aunque en ambos se considera la existencia de diferentes niveles de pensamiento, existen diferencias fundamentales entre las dos posturas como se esclarece a continuación.

- Para Piaget el paso de un nivel de pensamiento a otro está dado en función del desarrollo, el modelo de Van Hiele considera que es producto del aprendizaje.
- Para Piaget el uso del lenguaje no es importante para dar el paso de un nivel al otro, en Van Hiele cada nivel desarrolla un lenguaje propio que lo caracteriza.

---

[27] La descripción del modelo de Van Hiele se hace tomando como fuente los documentos “Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría” de Fernando Fouz, Berritzegune de Donosti y “The Development of Spatial and Geometric Thinking: the Importance of Instruction” de Jenni Way.

Se observa que la propuesta de Van Hiele está directamente relacionada con la organización del currículo; como la presente investigación propone divergir del currículo usual se considera de poca relevancia para ella.

1.6.3. David Tall

Una de las últimas investigaciones que busca caracterizar el pensamiento geométrico es el desarrollado por Tall (2013), en su libro titulado *Como los seres humanos aprenden a pensar matemáticamente*.

Este libro describe el desarrollo del pensamiento matemático desde el niño menor hasta el adulto sofisticado. El profesor Tall (2013) revela las razones de por qué los conceptos y procedimientos matemáticos que tienen sentido en un contexto pueden generar problemas en otro. Por ejemplo, la experiencia de un niño en cuanto a la aritmética con números naturales, como por ejemplo que la multiplicación de dos números produce un número mayor (o igual cuando uno de ellos es 1) y que la división produce un número menor (o igual) sucesivamente puede afectar su posterior comprensión de fracciones, números negativos, álgebra y la introducción a definiciones y comprobaciones.

Tall (2013) analiza cómo los niños y estudiantes mayores intentan hacer sentido de los conceptos matemáticos sucesivos, de tal modo que emerge una imagen total del crecimiento del pensamiento matemático. Este texto revela la teoría de Tall acerca de cómo los humanos construimos ideas a través de la *percepción, la operación y el razonamiento* cada vez más sútil, usando símbolos matemáticos y desarrollos sútiles en el lenguaje.

Se revela además un fundamento profundo que está basado en lo que puede llamarse *el lenguaje sensoriomotor de las matemáticas* que sustenta tres formas distintas del desarrollo matemático, uno basado en la percepción de los objetos en el mundo que nos conduce a la imaginería visual y a experimentos de pensamiento, otro basado en las operaciones, como el contar, que nos llevan a los conceptos de número y a perfeccionamientos simbólicos más sofisticados, y un tercero basado en razonamientos cada vez más sofisticados que culminan en la matemática formal de la definición de teorías y de la demostración formal.

Con respecto a la geometría Tall (2013) sostiene que

> *La geometría comienza cuando el niño juega con los objetos, reconociendo sus propiedades a través de los sentidos y describiéndolos utilizando el lenguaje. Con el tiempo, las descripciones se hacen más precisas y se usan como definiciones verbales para especificar figuras que pueden construirse con regla y compás y eventualmente las propiedades de las figuras pueden relacionarse en el enfoque formal de la geometría euclidiana.*
>
> *Estas acciones se vuelven operaciones matemáticas coherentes y se introducen los símbolos que permiten realizar las operaciones rutinariamente con muy poco esfuerzo consciente. Más sutilmente, los símbolos en sí mismos pueden verse no solo como operaciones a realizarse sino también comprimidos en conceptos numéricos mentales que pueden manipularse en la mente.*
>
> *Los sistemas de medidas también se desarrollan a partir de acciones: medir longitudes, áreas, volúmenes, pesos y otros. Estas cantidades pueden calcularse en forma práctica usando fracciones o usando decimales si se desea un nivel mayor de precisión.* [28]

Tall (2013) afirma entonces que para la medición el aprendiz comienza con acciones tales como medir, y abstrae el concepto de sus acciones por medio de las operaciones rituales sobre los objetos y no sobre los objetos en sí.

Tall (2013) dice específicamente que el área de superficies es simbólica, argumentando que hay un elemento de simbolismo ya que es necesario introducir una expresión para dichas áreas.

Además, Tall (2013) asevera que un individuo desarrolla tres formas de pensamiento que se describen a continuación.

[28] Tall, D (2013). How Humans Learn to Think Mathematically. Exploring the three worlds of mathematics.

La primera involucra el estudio de los objetos y sus propiedades, que lleva a una imaginería mental descrita en el lenguaje que crece paulatinamente más sutil. La segunda se desarrolla a partir de las acciones que se simbolizan y desarrollan en operaciones de aritmética y álgebra compresas en objetos mentales tales como números y expresiones algebraicas que pueden usarse para formular y resolver problemas utilizando el simbolismo operacional. Ambas se desarrollan inicialmente a través de experiencias prácticas en el hogar y en el colegio se desarrollan por medios que llegan a incluir el uso de definiciones teóricas y deducciones.

La tercera forma del conocimiento matemático florece en la aproximación formal a las matemáticas puras que se encuentra en la universidad. Nótese como, al igual que el esquema Van Hiele, las consideraciones de Tall se relacionan estrechamente con los currículos escolares usuales.

Así Tall (2013) sostiene que hay unas diferencias fundamentales entre el pensamiento geométrico, por un lado, y el pensamiento aritmético y métrico por otro. Está posición será evaluada en la presente investigación.

Conclusiones Capítulo 1

Investigadores como Corberan y otros (1994), Malloy (1999), Pugalee y Malloy (1999), Beltrametti y otros (2003), Frimel (2004), entre otros, hacen referencia de cómo se entiende el pensamiento geométrico desde los niveles de Van Hiele. Sus propuestas van orientadas al diseño de métodos de enseñanza – aprendizaje a través de los niveles de Van Hiele. Por otra parte Bower (1983), Godino y otros (2011), Hitt (1998), entre otros, relacionan el pensamiento geométrico y la visualización. En sus trabajos brindan importancia a la relación entre los objetos geométricos y el desarrollo de determinadas operaciones o transformaciones. También consideran significativo el proceso de generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de las habilidades de visualización en la resolución de problemas en el salón de clases. Estos trabajos no hacen referencia a la caracterización del pensamiento geométrico.

Concerniente a la visualización Clements y Battista (1992), Del Grande (1990), Presmeg (1986), De Guzmán (1996) desarrollan diversos aportes, en particular De Guzmán (1996) establece varias categorías de visualización: isomorfa, homeomorfa, análoga y diagramática. Estos investigadores no llegan a concretar una caracterización del pensamiento geométrico en la construcción de significado de un concepto geométrico. Por otro lado, Coberán (1996), Tasayco, (1998), Richar (2009), Rojas (2009), entre otros, proponen en sus investigaciones la utilización de diversos materiales diseñados para desarrollar el pensamiento geométrico, sin precisar una caracterización de éste. Sus propuestas las desarrollan a través de materiales manipulables y elaborados con el apoyo de software de geometría dinámica.

Un intento por caracterizar el pensamiento geométrico lo hacen Piaget e Inhelder, los Van Hiele y Tall. Los primeros investigan acerca de las relaciones espaciales de los niños y proponen cuatro etapas de desarrollo en el pensamiento espacial. Los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en el año 1957, elaboran un esquema o teoría de cinco niveles de razonamiento en geometría: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor, que explican cómo se produce el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes y proponen las fases de enseñanza-aprendizaje (interrogación, orientación dirigida, explicación, orientación libre, integración), lo cual resume su propuesta didáctica para el aula. Por su parte Tall (2013) propone una clasificación del pensamiento matemático en términos de tipos de abstracción que diferencia entre el pensamiento geométrico, por una parte, y el pensamiento aritmético-algebraico y métrico, por otra, y explica la construcción del concepto de área a través de acciones físicas de medir, dándole un carácter esencialmente aritmético.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene como objetivo situar al lector de la presente investigación en la perspectiva conceptual utilizada en ella concerniente a la construcción de significado del concepto de área de regiones y figuras planas por parte de estudiantes de sexto grado y la caracterización del pensamiento involucrado en tal construcción.

Se retomará el marco teórico desarrollado por la misma autora en la tesis de grado de maestría ya que se continúa con la misma línea de investigación en la cual, a partir de la aparición de ciertos problemas retadores en concursos de solución de problemas matemáticos, se indagó acerca de tratamientos esencialmente geométricos del concepto de área, en oposición al tratamiento casi estrictamente numérico prevaleciente en la matemática escolar, llegando a encontrar en los planteamientos griegos abordados por Euclides un modelo que se quiso seguir.

El marco teórico estará dividido en cinco partes.

Primero, se expone un marco geométrico, en el cual se trata elementos de los inicios de la geometría pertinentes al concepto de área. Se expone el enfoque euclidiano del concepto en algún detalle y se destacan algunos otros matemáticos que aportaron proposiciones generales (teoremas) de área por medio de argumentos de descomposición y recomposición de figuras geométricas.

Segundo, se estudia con precisión la parte pertinente de la teoría piagetiana de la construcción de conceptos geométricos en el niño, en particular, la construcción del concepto de área.

Tercero, se compara lo anterior con el punto de vista de Tall acerca de la forma en que los seres humanos aprenden a pensar geométricamente y en particular cómo construyen el concepto de área.

Cuarto, se enmarca la investigación en la epistemología de Lakatos, Hersh y Davis que aprecia el “hacer matemáticas” como una empresa de una comunidad que, en un diálogo que se desarrolla en la historia, avanza por medio de “pruebas y refutaciones”. Se espera poder detallar los intercambios estudiantiles en el contexto de la solución de una serie de problemas relacionados con la determinación del área de ciertas figuras o regiones planas, operando sobre las figuras o regiones (descomposición, recomposición, comparación), y produciendo así soluciones que van construyendo significado para el concepto de área cada vez más apropiado en relación con el concepto que se maneja en la comunidad matemática.

Por último, se describirá el modelo de Etienne Wenger presentando los aspectos que se tendrán en cuenta para el desarrollo de esta investigación. Específicamente, se retoma la teoría *Communities of Practice: learning, meaning and identity* (Wenger, 1998, 2007); esta teoría contribuye al proceso de aprendizaje de los estudiantes elementos que otras teorías no consideran prioritarias. Se dirige a describir cómo la práctica social propicia y mejora en el estudiante el desarrollo cognitivo. El modelo se toma en cuenta en el desarrollo metodológico de las actividades que se adelantan como parte de la investigación.

2.1. Pensamiento métrico y geométrico en la historia

2.1.1. La geometría y la métrica en la prehistoria, Mesopotamia y Egipto

2.1.1.1. Prehistoria[29]

Los orígenes de la geometría son más antiguos que el arte de la escritura. La geometría siempre ha estado relacionada con el desarrollo de la humanidad, ligada a actividades culturales, sociales, tecnológicas, se encuentra el conocimiento geométrico plasmado en arte, artefactos y arquitectura, entre otros, lo que ha hecho que se desarrolle tanto en lo visual como en lo conceptual. Desde la prehistoria existen evidencias de cómo en diferentes culturas se utilizaron representaciones geométricas para describir su realidad y para adornar sus pertenencias, incluso para pintar sus cuerpos. Los dibujos, diseños de alfarería y tejidos revelan un interés en las relaciones espaciales, y en ellos se evidencian congruencias y simetrías que son en esencia partes de la geometría elemental.

[29] Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL:
http://webdelprofesor.ula.ve/humanidades/yrondon/Taller_geo/Historia%20geometria.pdf

Sin embargo, algunos escritos señalan que la geometría se había originado en Egipto, porque allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del Nilo se fue desarrollando conocimiento geométrico abstracto y resolviendo problemas no totalmente prácticos.

Al examinar los orígenes de la geometría referentes al cálculo de área se destacan algunos casos que son de interés para la presente investigación y que se informan a continuación.

2.1.1.2. Mesopotamia y Egipto[30]

En lo que sigue no se pretende utilizar las mismas expresiones ni simbología que se usaban históricamente, pero sí resaltar elementos que contribuyen a apreciar la evolución y las características del pensamiento geométrico en estas culturas.

En esta época se conocía el Teorema de Pitágoras centrado en su contenido aritmético o de longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Por ejemplo, los egipcios conocían el teorema de Pitágoras para triángulos particulares, como el de lados 3, 4 y 5, y utilizaban el método de los 12 nudos (que todavía se usa en la construcción en Colombia) para trazar ángulos rectos en el terreno (Figura 4).

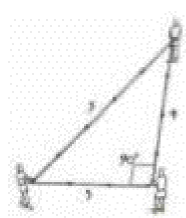


Figura 4. El Teorema de Pitágoras haciendo 12 nudos[31].

Este conocimiento se empleaba en problemas concretos como: una viga de longitud (…) apoyada en una pared o similar, se desliza en (…) unidades en el extremo superior… ¿cuánto se ha alejado el extremo

[30] Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: file:///C:/Users/usuario/Downloads/TFG-L2.pdf

[31] Recuperable el 20 de Abril de 2015 de la URL: http://naukas.com/2011/11/28/ingenio-egipcio-o-como-adelantarse-a-pitagoras-atando-12-nudos/

inferior de la pared? Y se empleaba en problemas de corte teórico como calcular el volumen de una pirámide truncada.

Referente al teorema de Pitágoras, quizás la más famosa de las tablillas mesopotámicas sea la tablilla Plimpton 322 (Figura 5) que se conserva en la Universidad de Columbia, en la que aparece la primera relación que se conoce de ternas pitagóricos, es decir, de tres números naturales que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 5. Tablilla Plimpton[32].

En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo ABC (Figura 6) de lados a = 60, b = 45 y c = 75, subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, cuyas áreas eran conocidas y a partir de cuyos valores calculaban la longitud de AD utilizando aparentemente un tipo de “fórmula de semejanza” que viene a ser equivalente al teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como el cuadrado de la razón entre los lados correspondientes.

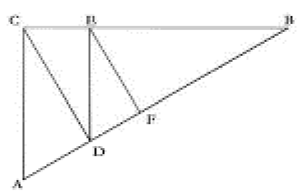


Figura 6. Triángulo rectángulo ABC[33].

En Egipto se encuentra uno de los más antiguos manuscritos elaborado en 1700 a.C. El manuscrito original se conserva en el museo Británico y se conoce con el nombre de “Papiro de Ahmes” o con el de

[32] González, P (2008). El teorema llamado Pitágoras. Recuperable el 20 de Abril de 2015 de la URL: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf

[33] Ariza, L. (2011). Aplicación de la semejanza al Cálculo de distancias inaccesibles. Recuperable el 20 de Abril de 2015 de la URL: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Laura_Ariza_2011.pdf

“Papiro de Rhind” (Figura 7). En él se encuentra una colección de reglas y problemas con sus respuestas, que tratan de cuestiones aritméticas y de la medida de varias figuras geométricas.

Figura 7. Papiro de Rhind[34].

Dos de los problemas de medición que son tratados en el Papiro de Rhind son los siguientes.

1. Cálculo del área de un triángulo isósceles.

El área del triángulo isósceles es igual al área del rectángulo formado por sus dos mitades. (Ver Figura 8.)

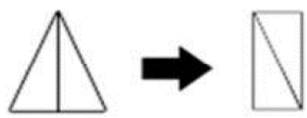


Figura 8. Cálculo del área de un triángulo isósceles[35].

2. Cálculo del área del círculo por medio de un octágono a partir de un cuadrado de lado nueve unidades, dividiendo cada parte en tres partes iguales y suprimiendo los cuatro triángulos isósceles de las esquinas (Figura 9).

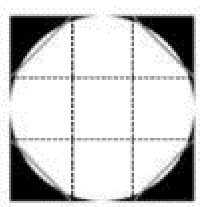


Figura 9. Representación geométrica del cálculo de los egipcios del área del círculo[36].

[34] Pulpón, A. (s.f). Historia del Papiro de Rhind y similares. Recuperable el 12 de octubre de 2015 de la URL: http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf
[35] Ariza, L. (2011). Aplicación de la semejanza al Cálculo de distancias inaccesibles. . Recuperable el 20 de Abril de 2015 de la URL: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Laura_Ariza_2011.pdf
[36] Soto E, Alanís J. (2014). Antecedentes y surgimiento de la integral acorde a Leibniz. Recuperable el 20 de abril del 2014 de la URL: http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n31/sotoalan.pdf

Por otra parte, los egipcios usaron la fórmula $A = (8d/9)^2$ para calcular el área del círculo, donde d es el diámetro. Esto es equivalente a $A = (16r/9)^2$, que a su vez es equivalente a $A = 256/81r^2$. La fracción 256/81 produce un valor aproximado de 3.1605 para número π. Es un buen ejercicio relacionar la fórmula con el enfoque geométrico de la figura anterior.

Es de destacar que todos los papiros egipcios, así como las tablillas babilónicas sólo contienen problemas concretos y casos particulares, sin ningún tipo de formulación general, pero con la clara intención de introducir algoritmos aplicables en otras situaciones similares.

2.1.2. Algunos antecedentes del concepto de área entre los griegos con énfasis en *Los Elementos* de Euclides

Con base en los escritos que perduran, se aprecia que los matemáticos griegos desde antes de Euclides desarrollaban sus demostraciones a través de descomposiciones geométricas con el propósito de mostrar que dos figuras diferentes tienen áreas equivalentes. Toda la gama de problemas relacionados con ***cuadraturas*** trata, en efecto, de problemas de descomposición y recomposición de figuras, buscando construir un cuadrado cuya área sea igual al área de una figura dada.

A continuación, se estudiarán aspectos del trabajo de los principales autores que trataron el concepto de área.

2.1.2.1. Tratamiento del concepto de área en la geometría griega

En el desarrollo histórico de la geometría y especialmente el tratamiento del concepto de área se pueden destacar en forma cronológica los siguientes autores.

Hipócrates de Quíos 470 – 410 a.C., fue el geómetra más importante del siglo V a.C. y escribió una obra de tipo enciclopédico titulada los “Elementos” para reunir todo el saber matemático de su época. En lo que se ha conservado de la obra de Hipócrates se aprecia que el problema central del tratamiento de área es el de construir un cuadrado cuya área sea igual al área de una figura dada. Nótese, entonces, que el planteamiento central concierne “igualdad de áreas” de distintas figuras y no concierne asignar un valor numérico determinado que represente el área de una figura dada. Es evidente que para la época de Hipócrates ya estaba planteado y estudiándose el problema de la cuadratura del círculo y que se contaba con métodos estrictamente geométricos para la cuadratura de cualquiera de las figuras poligonales. En este contexto Hipócrates resolvió problemas sorprendentes relacionados con la cuadratura del círculo, esto es, problemas de encontrar regiones poligonales con la misma área que ciertas regiones curvilíneas (lúnulas), figuras que, por su parentesco con el círculo, están fuera de lo ordinario[37].

Se presenta a continuación una cuadratura de lúnula atribuida a Hipócrates con el objetivo de mirar el pensamiento geométrico involucrado en ella. Observe la Figura 10.

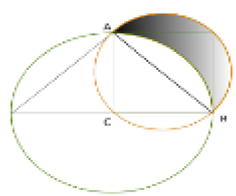


Figura 10. Cuadratura de la lúnula[38].

Hipócrates demuestra que el área de la lúnula (sombreada en la figura anterior) es igual al área del triángulo rectángulo isósceles *ABC.* Lo demostró apoyándose en lo que ya se había demostrado de proporcionalidad: que las áreas de los círculos son entre sí como el cuadrado de sus diámetros.

Sin embargo, dejando a un lado la demostración como la hizo Hipócrates, se puede ver que el área de la lúnula es igual al área de un círculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo isósceles rectángulo menos el área del segmento del círculo mayor determinado por la cuerda *AB.* Por otro lado el área del triángulo rectángulo es igual al área del cuarto de círculo cuyo diámetro es el doble del cateto del triángulo

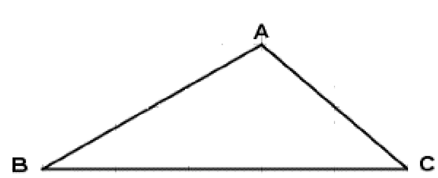
37 El círculo es una figura ordinaria en la Geometría de la regla y el compás.
38 Falk, M. (2014). Apuntes sobre los seminarios de la Historia de la Matemática. Antonio Nariño.

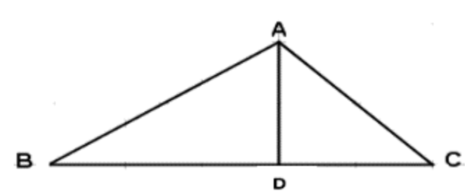
menos el área del mismo segmento. (Un sencillo cálculo demuestra que área de la lúnula es igual al área del triángulo.)

Como se observa, Hipócrates en su demostración utilizó descomposición de las regiones en partes para afirmar la igualdad de áreas.

Ahora bien, habiendo hecho esto Hipócrates afirma que ha logrado la cuadratura de la lúnula, aunque solamente ha mostrado la equivalencia de su área con el área de un triángulo. Ello se hace en razón a que con anterioridad sabe (pues es autor de “Elementos” que organizan deductivamente el saber matemático de su época) que ya se ha resuelto el problema de construir un rectángulo cuya área sea igual al área del triángulo y también el problema de construir un cuadrado igual en área a un rectángulo dado. Es decir, la afirmación de Hipócrates se habría soportado con construcciones como las siguientes en las cuales sobresale la descomposición de una figura y la recomposición de sus partes en otra figura, conservando el área, es decir, nuevamente centradas en el concepto de “igualdad de áreas” y en argumentos de semejanza y proporcionalidad que permiten establecer relaciones entre las áreas de diferentes figuras. La primera de esas es construir un rectángulo equivalente (cuya área sea igual al área de) un triángulo dado.

En el espíritu del trabajo que más adelante se plantea en las actividades que se desarrollaron con estudiantes, se presenta la demostración en una serie de diagramas sin explicación ni justificación, como se muestra a continuación en la Figura 11.





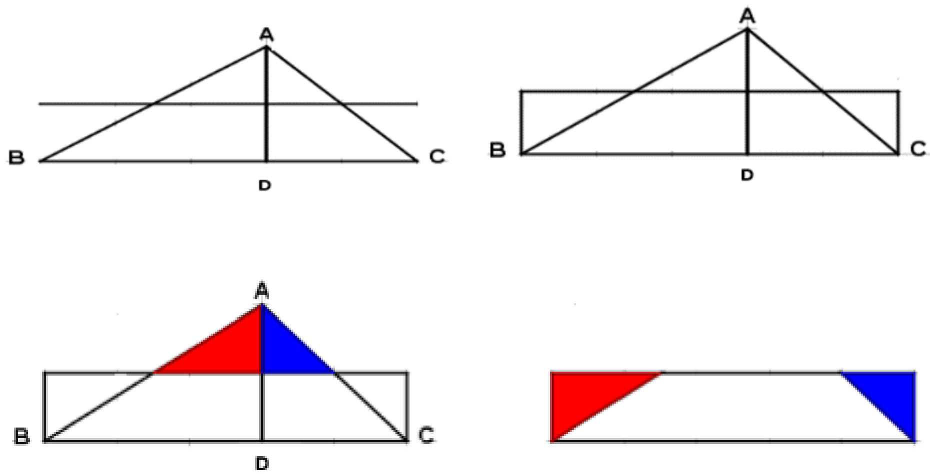


Figura 11. Construcción de un rectángulo equivalente (cuya área sea igual al área de) un triángulo dado.

La segunda es construir un cuadrado equivalente en área a un rectángulo dado. Dado el rectángulo ADEC (Figura 12), se rota el segmento AD y se obtiene el diámetro, sobre el cual se trazará una semicircunferencia. El segmento AC que es la base del rectángulo, tiene como medida “a”, el segmento obtenido de la rotación tendrá como longitud “b”.

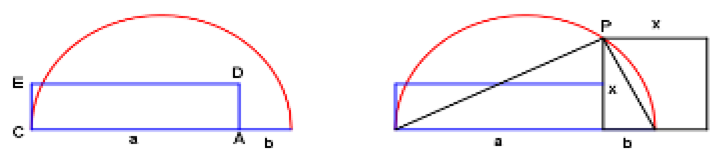


Figura 12. Construir un cuadrado equivalente en área a un triángulo dado.

Se traza una línea perpendicular del vértice A hasta que intersecte la semicircunferencia en un punto, digamos P. Se une P con los extremos del diámetro y se usa el hecho de que el triángulo formado sea rectángulo (el triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo, un teorema que conocía Tales). Luego se usa la semejanza de triángulos para ver que la altura trazada desde A hasta la semicircunferencia (digamos *x*) es una media proporcional entre a y b (en notación moderna $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$) o, lo que es lo mismo que $x^2 = ab$, lo cual significa que el cuadrado construido sobre el segmento de longitud *x* tendrá área igual al área del rectángulo original.

A elaborar “Elementos”, el trabajo de Hipócrates ya evidencia tanto la construcción de cadenas de razonamiento y el entrelazar resultados o proposiciones, como un enfoque geométrico del concepto de área concentrado en la igualdad de áreas.

Platón 428 – 347 a.C., miembro o simpatizante de la escuela pitagórica, estableció con claridad el carácter abstracto de las matemáticas y sus entes y examinó el razonamiento y certeza matemáticos con el objetivo de determinar si el razonamiento filosófico podría emplear métodos y estrategias similares. En el diálogo socrático *El Menón*, Platón, en la boca de Sócrates, plantea el problema de la duplicación del cuadrado, o sea, el problema de construir un cuadrado cuya área sea el doble del área de un cuadrado dado. El problema es tratado como asequible a un público general. En diálogo con un joven foráneo, Sócrates, a partir de preguntas conduce a la siguiente construcción.

Se tiene un cuadrado ABCD cualquiera y se pretende hallar otro cuya área sea el doble del área del cuadrado dado.

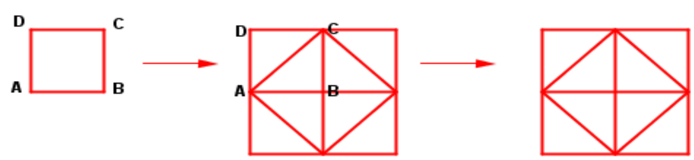


Figura 13. Construcción de un cuadrado cuya área sea el doble del área del cuadrado dado

Se toma el cuadrado ABCD y se cuadruplica formando un cuadrado cuyo lado es el doble del lado del cuadrado ABCD. Se trazan las diagonales en cada cuadrado quedando éstos divididos en dos partes iguales, y se obtiene un nuevo cuadrado formado por cuatro de los triángulos rectángulos que se muestran mientras que el cuadrado original es formado por dos de los mismos, de modo que el cuadrado cuyos lados son las diagonales que se han trazado tiene área igual al doble del área del cuadrado original. Se enfatiza en la razón entre áreas, con un enfoque visual y geométrico en diagramas que aparecen tal cual se presentan aquí en el mismo diálogo platónico.

Analizando la situación, es claro que si se toma el cuadrado original como de lado unitario, aplicando el teorema de Pitágoras se puede hallar la magnitud de la diagonal, a saber, $\sqrt{2}$ (escrito en notación moderna). Pero los griegos habían demostrado que este valor no es conmensurable con la unidad (es irracional). Si bien lo podían aproximar, porque conocían el trabajo de los babilonios con fracciones sexagesimales, la mentalidad griega buscaba certeza, verdades universales y necesarias en la matemática, y la aproximación no satisface los criterios de tal búsqueda.

La matemática griega, entonces, recurre a la exactitud de la geometría. Si bien no se tenía forma de expresar esa magnitud numéricamente, se podría representar con exactitud por la magnitud de la diagonal del cuadrado unitario. La existencia de números no conmensurables con la unidad (y, por tanto, no expresables como una razón entre números enteros) llevó a la matemática griega a privilegiar la geometría sobre la aritmética, y a desarrollar un concepto de área basado en igualdad y la comparación de áreas más no representado en general por una cantidad numérica.

Con base a esta situación, surge la siguiente inquietud: ¿Cómo tener certeza en cuanto a los métodos que se utilizaban para dar solución a problemas de áreas? Los griegos buscaban dar respuesta a estos problemas iniciando con métodos que les permitieran, dada cualquier figura geométrica, hallar un cuadrado equivalente en área a la figura dada. Para esto realizaban transformaciones, como la descomposición, de la figura original y luego buscaban formas de hacer comparaciones. Entonces, es claro que los griegos no expresaban el área con un número, sino con comparación de figuras directamente o referente a un cuadrado equivalente.

Eudoxo 408 – 355 a.C., fue discípulo de Platón y se convirtió en el matemático y astrónomo más importante de su época. Definió razón de magnitudes y a partir de ella proporción o igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables, o sea magnitudes racionales e irracionales. La respectiva teoría generalizada de la proporción se encuentra recopilada en el Libro V de los ***Elementos*** de Euclides.

Eudoxo desarrolló el método de exhaución o agotamiento para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. Fundamentalmente aproximaba estas figuras por otras poligonales para las que sí conocía el valor del área o volumen, tanto por exceso como por defecto, utilizando una doble reducción al absurdo,

Más exactamente, este método griego de agotamiento consistió en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a ella, aumentar el número de los lados de los polígonos y así tratar de hallar el área buscada, usando aproximaciones sucesivas, por medio del cual se buscaba equivalencias entre las áreas de figuras no rectilíneas y las figuras rectilíneas asimilables al cuadrado. Eudoxo consiguió de esa manera encontrar una aproximación a la fórmula del área de un círculo. Entre otras cosas pudo demostrar que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios.

Euclides (fechas aproximadas son 325 - 265 a.C.). Entre los grandes pensadores preocupados por la demostración de proposiciones (teoremas y construcciones) concernientes al área sobresale Euclides, cuyo tratamiento y métodos de demostración se han tenido en cuenta como base de las actividades elaboradas para buscar la construcción de significado del concepto de área y la caracterización del pensamiento geométrico involucrado, objetivo del desarrollo de esta investigación.

Al pesar de su intención, al elaborar los ***Elementos*** o recopilación de la matemática conocida en sus tiempos, de seguir los lineamientos aristotélicos para las ciencias demostrativas, Euclides no define área y demuestra sus proposiciones acerca del área de determinada figura por medio de argumentos de congruencia, con la suposición implícita que figuras congruentes son iguales en área (énfasis en igualdad de áreas), para luego llegar a compararlas demostrando por medios geométricos que tienen igual área o estableciendo la razón entre sus áreas. Se hace una exposición pormenorizada de este tratamiento netamente geométrico del concepto de área más adelante en la Sección 2.1.3 ya que éste ha sido una de las inspiraciones principales para la presente investigación.

Arquímedes 287 -212 a.C. utilizó con gran maestría el método de exhaución para determinar relaciones entre las áreas de diferentes figuras. Así Arquímedes mostró que el área de un círculo es equivalente al área de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean uno de magnitud igual al radio del círculo y el otro de magnitud igual a la longitud (perímetro) de dicho círculo. Si bien esta proposición continúa la tradición de centrarse en igualdad de áreas, adicionalmente en el trabajo de Arquímedes se nota el comienzo de una transición hacia fórmulas aritméticas para expresar el área de las figuras geométricas, pues él utilizó el mismo método de exhaución para dar una aproximación del valor de la constante que hoy día se denota por π ($3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$) que a la postre reemplazaría el uso de proporcionalidad entre los cuadrados de los radios de dos círculos para comparar sus áreas.

Herón vivió en algún lapso entre los años 100 a.C. y 100 d.C. y fue uno de los matemáticos más característicos del período alejandrino y el último en destacar en este recuento. Se le atribuye la obra ***Métricas***. En ella Herón desarrolla teoremas y reglas aritméticas para áreas planas, áreas de superficies y volúmenes de gran número de figuras. Se le atribuye la fórmula para el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus tres lados. Herón utilizó para la demostración de esa fórmula herramientas puramente geométricas con base en proporciones, equivalencias, semejanzas y comparaciones de áreas.

Se quiere con esto enfatizar lo tardío que apareció entre los matemáticos griegos un tratamiento aritmético asociado con el concepto de área, y cómo la generación de fórmulas de área se logró con base en propiedades netamente geométricas de las respectivas figuras.

Se puede concluir que los griegos por siglos encontraban el área de las figuras geométricas por medio de la transformación y comparación de figuras equivalentes, por lo que en sus resultados no se encontraron valores numéricos, ni asignaban unidades a las longitudes de los lados correspondientes, pues sólo utilizaban herramientas de equivalencia y comparación de figuras geométricas. De esta forma trabajaron con la igualdad de áreas sin antes haber dado una definición formal de área y sólo hacia finales de la época de oro de la matemática griega aparece el tratamiento aritmético del concepto de área.

Las actividades que forman parte de la presente investigación se inspiran en esta secuencia de enfoques, ya que finalizan con la obtención de fórmulas aritméticas para las áreas de las figuras, tomando como dada o conocida la fórmula para el área del rectángulo. Como soporte de ello, también se trae a cuenta el libro reciente titulado ***Measure Theory*** y escrito por el Fields medalist Terrence Tao (2010) en el cual el autor afirma:

> *One of the most fundamental concepts in Euclidean geometry is that of the measure m(E) of a solid body E in one or more dimensions. In one, two, and three dimensions, we refer to this measure as the length, area, or volume of E respectively. In the classical approach to geometry, the measure of a body was often computed by partitioning that body into finitely many components, moving around each component by a rigid motion (e.g. a translation or rotation), and then reassembling those components to form a simpler body which presumably has the same area. One could also obtain lower and upper bounds on the measure of a body by computing the measure of some inscribed or circumscribed body; this ancient idea goes all the way back to the work of Archimedes at least. Such arguments can be justified by an appeal to geometric intuition, or simply by postulating the existence of a measure m(E) that can be assigned to all solid bodies E, and which obeys a collection of geometrically reasonable axioms*.[39]

Tao (2010) procede a definir la medida de “cajas” de *d* dimensiones de manera similar a cómo en la presente investigación se define el área del rectángulo, o la caja de dimensión 2, como punto de partida para definir medida elemental. Luego Tao introduce la noción de conjunto elemental como sigue: un conjunto elemental es cualquier subconjunto de R^d, que es la unión de un número finito de cajas. Nótese, entonces, como se compone cualquier conjunto elemental, como unión de conjuntos elementales, de manera algo análogo, pero por supuesto mucho más sofisticado, del tratamiento que se llevará a cabo en

[39] Tao, T. (2010). An Introduction to Measure Theory. Recuperado en: https://terrytao.files.wordpress.com/2012/12/gsm-126-tao5-measure-book.pdf . Pág. 2

la presente investigación, cuando se trata la descomposición y recomposición de figuras y regiones del plano.

Así es claro que una posibilidad para lograr que el estudiante construya significado apropiado para el concepto de área es a partir de actividades que se centran en la igualdad de áreas de distintas figuras que se establece por medio de las transformaciones de descomposición y recomposición, y luego, usando lo que llamaremos "unidades de referencia", la comparación de las áreas de distintas figuras y, más generalmente, regiones planas. Más adelante cuando se busca establecer fórmulas aritméticas para calcular las áreas de ciertas figuras, en las actividades se toma el área del rectángulo como básica, y a partir de allí por medio de transformaciones se muestra cómo se puede deducir fórmulas para las áreas de otras figuras geométricas (paralelogramo, triángulo, trapecio, hexágono, etc.) a partir de la fórmula para el área del rectángulo.

2.1.3. *Los Elementos* de Euclides

Los Elementos de Euclides es la obra maestra de Euclides que resume la matemática griega conocida en el momento de su elaboración. La obra contiene 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas.

En esta obra se presenta la geometría plana como un sistema deductivo, es decir, el interés se centra en los aspectos conceptuales que se tomarán como marco para el desarrollo de esta investigación, pues el enfoque de su presentación de muchos temas, entre ellos la medición, puede incentivar a los estudiantes a lograr una construcción apropiada del significado de los conceptos relacionados y resolver problemas con métodos ideados por Euclides.

> *Euclides manifiesta en su pensamiento aspectos tomados de los pitagóricos y de Platón, así como un compromiso con las exigencias que impuso Aristóteles sobre las "ciencias demostrativas", lo que hoy en día se denominan sistemas axiomáticos. Se había dedicado a reflexionar sobre las cuestiones y entes matemáticos, cuya abstracción e intangibilidad obligaba a garantizar la existencia de todo lo definido y estudiado a partir de la posibilidad de construirlo con regla y compás (de acuerdo con sus axiomas) y a ofrecer demostraciones cuidadosamente construidas de las afirmaciones hechas acerca de ellos. Si bien la obra contiene fallas desde el punto de vista de una axiomática moderna, su valor y su impacto en el*

desarrollo histórico de la matemática es innegable. En particular su construcción de significado para el concepto de área, aunque en efecto Euclides no define área explícitamente.[40]

Las construcciones y demostraciones realizadas por Euclides, permitirán a esta investigación dar fundamento para que los estudiantes construyan significado robusto para el concepto de área, ya que a partir de estos escritos se puede caracterizar el pensamiento geométrico de la escuela griega, y en particular la forma en que Euclides empleaba ciertos métodos para realizar sus demostraciones.

Aunque Euclides consignó sus reflexiones en una obra escrita, *Los Elementos*, en esta obra no manifestó ninguna pretensión de originalidad, y está claro que debió hacer uso de las obras de sus predecesores, pero se cree que la ordenación final es suya y presumiblemente algunas de las demostraciones se deben a él.

Los Elementos tuvo un impacto tal que ha seguido leyéndose durante siglos y se han tomado muchas de sus construcciones y demostraciones para la enseñanza de la geometría a nivel de la escuela secundaria.

En estos escritos se puede caracterizar el pensamiento geométrico de la escuela griega, y en particular la forma en que Euclides realizaba sus demostraciones; en los métodos empleados, se reconoció una capacidad de llegar a la verdad muy superior a la de cualquier tipo de razonamiento empírico.
Las teorías matemáticas griegas manifiestan un desarrollo de modelos y demostraciones, y un raciocinio conceptual no fundamentado exclusivamente en algoritmos matemáticos[41].

Euclides propone en sus libros las definiciones de conceptos geométricos y a partir de estas definiciones propone y demuestra propiedades generales y conceptos más avanzados; *Los Elementos* son una fuente que permiten un acercamiento a los orígenes los modos de pensar de las matemáticas griegas.

Los Elementos están divididos en trece libros, ocho de estos libros: I, II, III, IV, y VI a la geometría plana, y los libros XI, XII y XIII a la geometría del espacio o geometría sólida. Tres de ellos están dedicados a la

[40] Falk, M. (2014). Apuntes de los seminarios de la Historia de la Matemática. Universidad Antonio Nariño.
[41] Ibídem

aritmética, el Libro V dedicado a la teoría de la proporción y el Libro X a la clasificación de las longitudes irracionales.

El Libro I parte con una lista de 23 definiciones, empezando por las de punto, línea y superficie, continuando con las de ángulos y las de diferentes figuras planas, concluyendo con la definición de líneas rectas paralelas. Cada una de éstas se encuentra posteriormente elaborada a partir de la construcción deductiva de una serie de proposiciones.

> *Los primeros teoremas y definiciones de Euclides en los libros primero y segundo, se conectan en una lógica deductiva una tras otra, formándose una base sólida para la geometría, con un concepto de orden y exactitud en el mundo de nuestro pensamiento en coherencia con el pensamiento aristotélico, con ciertas excepciones, como el no indicar explícitamente cuáles son los términos que deja sin definir (términos primitivos en la terminología moderna) y el ofrecer definiciones de punto y línea recta, por ejemplo, que deberían dejarse precisamente como términos primitivos.*
>
> *Es importante también mencionar a Hipócrates de Quíos, matemático griego, precursor de Euclides en diversos temas de la geometría, quien se ocupó especialmente del problema de la cuadratura del círculo y consiguió, con las llamadas lúnulas de Hipócrates, trazar entre otras una lúnula de área igual a la de un triángulo que es la mitad de un cuadrado dado. El hecho de que Hipócrates realiza la equivalencia del área de la lúnula con la del triángulo, y de allí concluye que haya resuelto el problema de la cuadratura de la lúnula sin considerar necesario realizar la equivalencia del área del triángulo con la del cuadrado indica que él ya está trabajando con la concatenación de proposiciones que más adelante formaliza Euclides en Los Elementos, pues toma por sentado que ya se ha mostrado cómo lograr la equivalencia del área del triángulo con la del cuadrado*[42].

En la enseñanza del concepto de área para figuras geométricas y la construcción de significado para la medida de cualquier magnitud en la matemática escolar se inicia con la utilización del concepto de número real, probablemente porque se piensa que de esta forma los estudiantes tendrán una mejor comprensión de estos conceptos, mientras que los matemáticos griegos, y en especial Euclides, pudieron resolver el problema de área, sin disponer de una comprehensión completa del conjunto de números reales, pero sí con un modelo adecuado para ellos identificándolos con magnitudes de segmentos de recta. Euclides usó como principales herramientas la proporción, la comparación de figuras geométricas y la descomposición de éstas.

[42] Falk, M. (2014).Texto inédito en Seminario Filosofía de La Matemática y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño.

Esto puede explicar por qué no se consigue en ***Los Elementos*** u otros textos griegos definiciones de términos como longitud, área y volumen; la definición de estos conceptos se sustituye entonces por modelos y teorías alternas a los estrictamente numéricos que dan un marco aceptable para la comprensión de estos conceptos, con la ayuda de la intuición.

Específicamente, como se ha dicho, Euclides no define área y supone, sin plantearlo como postulado ni demostrarlo, que figuras congruentes tienen igual área. Su enfoque del concepto, entonces, es desde la igualdad de áreas. Notamos a continuación un paralelo importante ya que proviene de la matemática moderna.

Al respecto se quiere enfatizar que en los tiempos modernos se encuentran matemáticos que buscan dar definiciones a determinados conceptos comenzando con procesos similares a los que realizaron los griegos y en especial Euclides. Un ejemplo es Gottlob Frege (1848 - 1925), quién se dio a la tarea de definir número como parte fundamental de su derivación de la matemática a partir de la lógica pura. Analicemos la naturaleza del proceso que manejó Frege para llegar a la definición.

Frege (1884) trabaja la noción de concepto y a lo largo de su obra llega a asociarla con la noción de conjunto. Para Frege la extensión de un concepto es el conjunto de todos los objetos que subyacen al concepto; así, un conjunto es definido por extensión cuando se "listan" sus elementos mientras que es definido por intensión mediante una propiedad o característica común a todos los elementos. De hecho, Frege llega a reemplazar el término de "concepto" por "conjunto" en su desarrollo de la aritmética con base a la lógica pura.

Después de rechazar otros enfoques del concepto de número diciendo que los números no son objetos espaciales ni imágenes mentales, sino objetos lógicos y de determinar que un número no es una colección de cosas, ni una propiedad de tal colección, ni tampoco el producto subjetivo de un proceso mental, concluye que:

“*Los números son objetos lógicos que subyacen a determinados conceptos.”* Para derivar el concepto de número de la lógica pura, Frege primero define correspondencia uno a uno insistiendo que su definición es puramente lógica y no incluye conceptos numéricos (no hay círculo vicioso). Luego, define conceptos igualmente numerados. Hasta aquí se ve un paralelo con el tratamiento que hace Euclides del concepto de área, pues Euclides define implícitamente igualdad de áreas (dos figuras congruentes tienen igual área y figuras compuestas por figuras respectivamente congruentes tienen igual área).

Pero luego Frege prosigue definiendo el número de un concepto como la extensión del concepto “igualmente numerado con” ese concepto. Su definición de número es, en palabras de Bertrand Russell, “cualquier cosa que es el número de algún concepto”. Finalmente proporciona una definición de los números individuales. 0 es el número del concepto “no ser idéntico consigo mismo; 1 es el número del concepto “ser idéntico con 0”; 2 es el número del concepto “ser idéntico con 0 o ser idéntico con 1”, y así sucesivamente.

Si se realiza la comparación con el trabajo que hacían los griegos, y en particular Euclides, con el concepto de área, se observa que se basa su tratamiento en el concepto de igualdad de áreas de distintas figuras, sus criterios iniciales son la congruencia y el uso de la cuadratura, y luego se establecen criterios generales para cada figura a partir de proposiciones acerca de la igualdad de área entre paralelogramos (por ejemplo, paralelogramos sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales en área) de manera similar al comienzo del procedimiento que hace Frege, pero a diferencia de Frege, no se llega a definir área explícitamente. Frege comienza con la definición de la expresión igualmente numeradas, su criterio es de correspondencia uno a uno, pero a partir del concepto de igualmente numerado logra formular una definición de número. Este paralelo muestra que el enfoque euclidiano estaba encaminado en una dirección sólida.

Para desarrollar el abordaje y el concepto de área, se describirán algunas de las proposiciones de Euclides de los Libros I, II, III y VI.

En el Libro I de ***Los Elementos*** de Euclides se encuentran las Proposiciones 33 a la 48 que tratan de los paralelogramos, triángulos y cuadrados, con referencias especiales a las relacionadas de área. La proposición I.47 es el teorema de Pitágoras, y la proposición I.48 es el recíproco de este teorema.

Las proposiciones I.35 al I.41 muestran de qué forma se puede entender las ideas que hoy representamos las ecuaciones $A = bh$ y $A = \frac{1}{2}bh$ para las áreas de los paralelogramos y triángulos, respectivamente.

Proposición I.34: Los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales uno al otro y la diagonal divide el área en dos partes iguales.

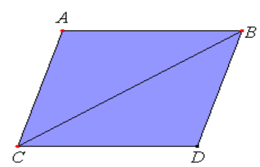


Figura 14 Figura tomada de *Los seis libros primeros de Euclides*[43].

Sea ACBD una región de un paralelogramo y BC su diagonal (Figura 14). Por ser paralelas las rectas AB y CD, los ángulos ABC y BCD son iguales, por ser alternos; de igual manera, los ángulos DBC y ACB. Entonces, los triángulos BAC y CBD son iguales, por tener un lado común y los ángulos adyacentes iguales. Se puede concluir que los lados y ángulos opuestos son iguales: y luego que la diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos de igual área.

Proposición I.35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

La siguiente figura ayuda a entender la demostración de Euclides.

[43] Camorano, R (2007). Los seis Primeros Libro de Euclides. Sevilla. España

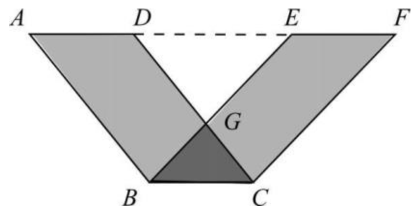


Figura 15. Figura tomada de *Los seis libros primeros de Euclides*[44].

Los paralelogramos ABCD y EBCF, comparten la base BC y tienen paralela AF, podemos observar que el triángulo BCG es común a los dos paralelogramos. Para demostrar la igualdad de los trapecios ABGD y FEGC podemos evidenciar que ambos trapecios provienen de restar el triángulo DEG a los triángulos EAB y FDC que son iguales (congruentes) por la igualdad de sus tres lados. Esta igualdad de lados la justifica Euclides citando propiedades de los paralelogramos que ha demostrado con anterioridad.

En la demostración anterior es evidente que no se emplean números en su discurso, se demuestra a través del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas.

De manera similar, la demostración de la proposición I-47 conocida como el "Teorema de Pitágoras" procede mostrando la equivalencia de la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados adyacentes al ángulo recto en un triángulo rectángulo, con el área del cuadrado construido sobre lado opuesto al mismo ángulo. Lejos de la formulación algebraica que comúnmente se cita hoy en día, en Euclides el Teorema de Pitágoras es netamente geométrico, concierne la igualdad de áreas y se demuestra haciendo uso de una descomposición del cuadrado sobre la hipotenusa en dos rectángulos.

Otras proposiciones relacionadas con el concepto de área se encuentran en los libros II, III, VI y XII de ***Los Elementos*** y culminan con la **Proposición XII.2:** Los círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.

[44] Camorano, R (2007). Los seis Primeros Libro de Euclides. Sevilla. España

Por otra parte, se tomaron cuatro proposiciones del Libro II y dos proposiciones del Libro XII para trabajarlas con los estudiantes que participan en la investigación, con el propósito de que encuentren el área de ciertas regiones señaladas que se encuentran en el círculo.

Si se piensa la definición de medida de figuras poligonales, ésta se aborda desde dos perspectivas, la *relativa* y la *numérica*. Para el desarrollo de la presente investigación se iniciará con los estudiantes la construcción de significado robusto del concepto de área con el uso de la *medida relativa*, pues así fue abordada por Euclides en el contexto de la cuadratura de figuras poligonales. Además, para los estudiantes la noción de igualdad de áreas precede la noción de área como un proceso que consiste en descomponer una figura en figuras congruentes que se utilizan como patrón y comparar el patrón seleccionado con la figura que se desea medir para ver cuántas veces el patrón está contenido en ella. Este es uno de los procesos que debe desarrollar el estudiante y que se estudiará para llegar a una caracterización del pensamiento geométrico; con ello el estudiante debe construir redes conceptuales lo que se espera le permita llegar a construir significado robusto del concepto de área.

En la presente investigación se considera que el tratamiento euclidiano es altamente positivo para el aprendizaje de la geometría, ya que se logra construir significado robusto del concepto de área geométricamente, permitiendo que los estudiantes actúen en sus propias soluciones por medio de diferentes estrategias y argumenten su razonamiento de acuerdo al significado que han construido.

Sin dar una definición, en los ***Elementos*** se está construyendo significado robusto del concepto implicado. Este enfoque de la noción de igualdad de áreas es utilizado por el estudiante a través de acciones de descomposición – recomposición – comparación, permitiendo que el estudiante se apropie del concepto de área y logrando así un aprendizaje significativo.

Cuando el estudiante logra enfocar este concepto geométricamente, teniendo en cuenta los pasos descritos anteriormente, puede luego deducir expresiones aritméticas (fórmulas) que le permitirán calcular el área de una figura usando lo que se ha denominado medida numérica. Construido el significado robusto para el concepto, deben desaparecer o al menos disminuir errores que cometen los estudiantes. En particular, no deben presentarse los siguientes.

- Confundir perímetro y área. Es probable que este error se da porque los dos son presentados como números que se obtienen reemplazando valores que representan largo y ancho o base y altura en ciertas fórmulas. En el caso del rectángulo $2(x+y)$ y xy. El estudiante no ha construido significado para los conceptos, sino que los asocia con procedimientos y fórmulas a memorizar y se confunde en el sentido de no recordar cuál fórmula corresponde a perímetro y cuál a área.
- El hecho de que dos figuras tengan la misma área, induce a algunos estudiantes a creer que tienen el mismo perímetro.
- El tratamiento lineal de las medidas de superficie, lo cual induce a creer que al duplicar el lado de una figura se duplicará también su área.

Una de las estrategias de aprendizaje que se introducirán para que los estudiantes logren hacer la transición entre la medida relativa y la medida numérica para comenzar a utilizar fórmulas es permitirles buscar equivalencias por medio de la descomposición y recomposición. Además, esta experiencia va a permitir, junto al concepto de figuras congruentes, deducir las fórmulas para calcular el área de otras figuras geométricas, y de esta manera, generar un significado más robusto.

Oliver Byrne. Uno de los autores que realiza este tratamiento es Oliver Byrne (1847) quien explica ***Los Elementos*** de Euclides por medio de diagramas de diferentes colores, manejando un lenguaje sencillo, con el fin de utilizarlo como medio didáctico para facilitar la comprensión de las demostraciones de las proposiciones y construcciones euclidianas, ya que el autor estaba convencido que el aprendizaje de la geometría no se puede reducir a argumentos verbales sino que sólo es posible a través de la construcción de significado por medio de la visualización. Observemos un ejemplo.

Proposición I.37: Triángulos que están en bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales porque:

Figura 16. Proposición I-37[45].

2.2. Piaget

Piaget considera dos propiedades fundamentales de las operaciones pertenecientes de la medición sobre las que se sostiene la comprensión de medida: la conservación y la transitividad. La conservación se refiere a identificar los aspectos que permanecen invariantes en los objetos a pesar de operar sobre ellos. Por ejemplo, el número de fichas no cambia si se tienen en una caja o se esparcen en el suelo. Por otra parte, la transitividad hace referencia a

> *La utilización de un instrumento en una situación de medida se sustenta en la idea de transitividad, así por ejemplo el hecho de comprobar que dos niños tienen la misma estatura utilizando un listón o una marca sobre la pared se basa en el hecho siguiente: conociendo que el*

[45] Byrne, O. (1847). Los dos primeros libros de Euclides.

niño X es tan alto como el listón y el niño Y también es tan alto como el listón, luego los niños X e Y tienen la misma estatura[46].

No es sorprendente observar que Euclides usó esta clase de razonamientos en las proposiciones que demostró para la igualdad de áreas de polígonos, donde se desarrollan la noción principal de "*figuras que se pueden descomponer en partes dos a dos congruentes tienen igual área*"[47], sin mencionar el valor para cada una de sus partes.

Piaget enunció su teoría de cómo los niños llegaban a comprender la longitud y la medida dando las siguientes conclusiones:

- Hasta los 4 años y medio el niño sólo tiene una comprensión visual, donde utiliza su cuerpo como referencia de medida hasta alrededor de los siete años.
- Desde los siete años utiliza objetos que se encuentren a su alrededor para realizar medidas.

Cuándo el niño comienza a emplear el pensamiento lógico es cuando obtiene el concepto de medida, pues, como Piaget señala, para poder construir en el niño el concepto de área se necesita haber construido la noción de conservación[48], este concepto de conservación se alcanza hasta la etapa lógica concreta que comprende edades de 6 a 12 años.

Además, otro de los resultados de los estudios de Piaget y sus seguidores manifiesta estadios de desarrollo en la comprensión del proceso de medida los cuáles, siguiendo la exposición que hace Dickson y otros (1991), son:

- *Estadios iniciales: El niño se apoya en estimaciones visuales. Es incapaz de aplicar con significado ningún instrumento de medida. No dispone de las nociones de conservación ni de la transitividad del término intermediario móvil.*

---

[46] Castro E., Olmo M. y Castro E. (2002). Desarrollo del pensamiento matemático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
[47] Dieulefait, L. (2003). Medida de Jordan. Miscelánea Matemática. 37. 29-63.
[48] Definida como un proceso operacional de la mente que produce la comprensión de ciertos aspectos de una condición cambiante.

- *Estadios en que comienza a emerger la conservación y la transitividad: hacia los 6 o 7 años el niño empieza a apreciar, por experimentación basada en tanteos, que si hacen falta más unidades para cubrir A que B (por ejemplo, pasos) entonces A es mayor que B, pero no es capaz de coordinar medida en diferentes direcciones ni comprende la necesidad de que las unidades de medida sean del mismo tamaño.*
- *Estadio caracterizado por el inicio de la conservación operacional y de la transitividad: El niño sabe por ejemplo medir la altura de una torre con una vara que sea al menos tan alta como la torre haciendo una marca y usarla como guía para construir otra torre de la misma altura. Pero no sabe utilizar como instrumento de medida algo que sea más corto que la torre. Esto último se suele alcanzar hacia los 7 u 8 años.*
- *Estadio en el que se capta la idea de la unidad de medida menor que el objeto a medir: Según Piaget hasta este momento el desarrollo de los conceptos de medida lineal, superficial, y de capacidad han progresado conjuntamente, pero la del volumen va rezagada.*
- *Etapa final del desarrollo de las nociones de medida: Hacia los 11 o 12 años se alcanza el pensamiento operacional formal según Piaget. El niño en este estadio es capaz de medir áreas y volúmenes mediante cálculos basados en las dimensiones lineales.*

Piaget presenta un cuadro resumen respecto al concepto de área según diferentes actividades que se presentaron a grupos de individuos.

Tabla 1. Estadios de Piaget, adaptado de Del Olmo M; y Gil F., 1993

Estadio	Objetivo	Conclusiones
1 (hasta los 5 años)	Conservación de la superficie de perímetro cerrado frente a estructuraciones	Los niños creen que la superficie cambia con la forma
	Medición de superficies por iteración	Los niños manifiestan sólo consideraciones perceptuales
2ª (hasta los 6 años)	Conservación de la superficie de perímetro cerrado frente a estructuraciones	Los niños creen que la superficie cambia con la forma
	Medición de superficies por iteración	Los niños manifiestan sólo consideraciones perceptuales
2b (hasta los 7 años)	Conservación de la superficie de perímetro cerrado frente a estructuraciones	Efectúan juicios verdaderos, pero son incapaces de Generalizar
	Medición de superficies por interacción	Cuando dos figuras planas tienen un borde en común, el niño afirma que son equivalentes
3ª (7 años en adelante)	Conservación de superficies	Comprende la conservación de la superficie cuándo se redistribuyen las partes o se altera la forma. Sin embargo, no comprende el concepto de unidad de medida
	Medición de superficies por iteración	Deja de considerar que dos figuras planas con un borde común son equivalentes cuando se les señala el error
3b	Conservación de superficies	Igual que la 3ª
	Medición de superficies por iteración	Entre varias opciones de unidad de medida, selecciona una como patrón

4	Medición de superficies por iteración	Pasan de la longitud a la superficie por multiplicación Aritmética

2.3. Tall

Tall ha interactuado con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cada uno de los niveles desde pre-escolar hasta investigaciones de postgrado. Con estas experiencias ha reflexionado acerca de lo que ocurre en cada etapa del aprendizaje y afirma que éste es consecuencia de los conocimientos previos y tiene un efecto significativo en el desarrollo de cada individuo en etapas posteriores.

En la misma dirección, es criterio de la autora de esta tesis que se puede construir un significado robusto de determinado concepto a partir de la evolución de los significados previamente construidos por el estudiante, lo que lo lleva a la construcción de significado cada vez más apropiado para el concepto, o sea, la construcción de lo que algunos autores llaman la imagen del concepto como algo que va perfeccionándose.

Además, Tall (2013) señala que la maduración del pensamiento matemático en individuos diferentes depende de sus composiciones genéticas y de las sucesivas experiencias en su aprendizaje de matemáticas, o más simplemente, en términos de la naturaleza y la educación. Al analizar cómo los niños y estudiantes mayores intentan hacer sentido de los conceptos matemáticos sucesivos, emerge una imagen total del crecimiento del pensamiento matemático. Los humanos construyen ideas a través de la *percepción, la acción (operación) y el razonamiento* cada vez más sutil, donde se usan símbolos matemáticos y desarrollos hacia una mayor exactitud en el lenguaje.

Lo antes planteado tiene eco y contraste en la investigación desarrollada por Pérez (2011)[49] en la cual se demostró que los estudiantes construyeron significados del concepto de área a través de la solución de

[49] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

problemas que involucra acciones de descomposición, recomposición y comparación sin la utilización de símbolos matemáticos y el análisis, el "hacer sentido de" los resultados que se arrojan en consecuencia de acciones como éstas.

Para Tall, el pensamiento matemático comienza en la percepción y acción sensorio motora y se desarrolla a través del lenguaje y del simbolismo. Lakoff y Núñez, citados por Tall (2013), formulan los orígenes del pensamiento matemático en el subtítulo "cómo la mente a través de conceptos materializados en objetos (en inglés *embodied concepts)* da origen a las matemáticas"[50]. Esta clasificación del pensamiento basada en lo "embodied"[51] puede ser realzada utilitariamente por la subdivisión de la representación en subcategorías que operan en formas claramente diferentes. El término "sensoriomotor" ya se refiere a dos aspectos diferentes del cerebro: la parte *sensorial* está relacionada con como percibimos el mundo a través de los sentidos, mientras que la parte *motora* está relacionada con como operamos en el mundo por medio de las acciones.

Aunque Tall (2013) intenta hacer una clasificación del pensamiento humano basada por un lado en la percepción y por otro en las acciones u operaciones del sujeto, asevera que el pensamiento matemático comienza con los objetos físicos y las operaciones sobre los objetos. En la geometría los objetos son categorizados por medio de la experiencia visual y táctil. El lenguaje permite que esta categorización se vuelva más refinada por medio de una sucesión de abstracciones estructurales ya que las propiedades son reconocidas, descritas, definidas y luego usadas para deducir propiedades en la geometría que usa la demostración euclidiana.

Tall (2013) categoriza el pensamiento geométrico como visual y el proceso que desarrolla dicho pensamiento como abstracción a partir de los objetos, pero no tiene en cuenta otras acciones que puede

[50] Where Mathematics Comes From, Capìtulo 13.
[51] Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically.

realizar, y de hecho realiza, la persona como la transformación de los entes geométricos por medio de su descomposición o su modificación por medio del trazo de líneas auxiliares.

El pensamiento simbólico en aritmética y algebra comienza cuando a partir de operaciones como reunir objetos, ordenarlos y reordenarlos, se genera el concepto de número para posteriormente usar los números para contar objetos, las fracciones para medir cantidades, y representaciones más sofisticadas que usan números con signos, decimales finitos e infinitos. En cada etapa la abstracción operacional de conceptos numéricos ocurre a partir de operaciones y se sintetiza por medio de la encapsulación.

Las operaciones en aritmética tienen propiedades que pueden *reconocerse, describirse* y luego *definirse* como "reglas de aritmética". De este modo la aritmética y su generalización al álgebra involucran tanto la abstracción operacional para construir conceptos numéricos y algebraicos como la abstracción estructural de las propiedades aritméticas y del álgebra.

En un nivel superior, ocurre una nueva forma de abstracción que lleva al pensamiento matemático a un nuevo nivel. *La abstracción formal* se construye desde las definiciones enunciadas verbalmente (teorías fijas) y se deduce las propiedades de los objetos definidos matemáticamente por medio de la justificación formal. (Ver Figura 17.)

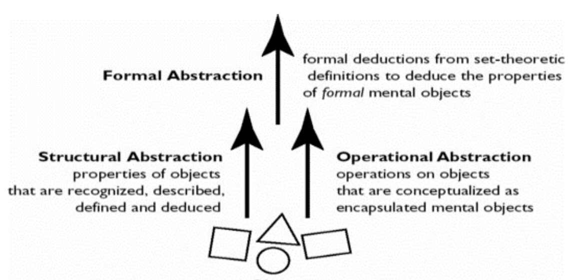


Figura 17. Tres formas de abstracción. Tomado de Tall, David *How Humans Learn to Think Mathematically*.

Como se ha observado con respecto a la abstracción estructural y la abstracción operacional, Tall (2013) las define y las divide como dos tipos de pensamiento diferentes separando la geometría de la aritmética y el álgebra. Pero es la posición de la autora de esta tesis que hay que tener en cuenta que éstas van articuladas en la geometría, pues se promueve la abstracción a partir o bien de los objetos o bien de acciones que realiza la persona para ejecutar transformaciones y así construir significado robusto para los conceptos pertinentes a las figuras geométricas.

2.4. Lakatos, Hersh y Davis

Para está investigación se tendrá en cuenta el texto *Experiencia Matemática* de Philip Davis y Reuben Hersh, en el cual los autores exponen sus puntos de vista sobre lo que son las matemáticas, la construcción del conocimiento matemático y la forma en que éstas se enseñan. Además, Davis y Hersh sostienen que la clase magistral no tiene ninguna incidencia en el aprendizaje de los contenidos de los alumnos y que el verdadero aprendizaje se consigue cuando cada individuo se enfrenta a problemas para los que ve la necesidad de encontrar una solución.

A partir de la obra de Lakatos y su apreciación acerca de la naturaleza del conocimiento matemático, se puede aseverar que la enseñanza, para ser consecuente con esta visión epistemológica frente a la matemática, no se debe limitar al proceso formal de encadenar axiomas, definiciones y teoremas. Para Lakatos, más allá de eso existe la historia de la construcción o descubrimiento del conocimiento matemático, una matemática informal creada por un proceso cuasiempírico, proceso ineludible para llegar al conocimiento aceptado como tal por la comunidad matemática. Siguiendo la línea de investigación de Lakatos (1978), se adopta el cambio de un enfoque formalista o deductivo de las matemáticas hacia otro más inductivo y heurístico.

Similarmente, se puede caracterizar la concepción y enseñanza de la geometría por tres aspectos fundamentales, la geometría como razonamiento, la geometría como resolución de problemas, la geometría como establecer conexiones matemáticas. El NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, USA), siguiendo una epistemología influenciada por Lakatos y la psicología constructivista, promueve la utilización de una metodología de aula más activa y participativa que permita al estudiante construir su propio conocimiento. La premisa que se maneja es que este tipo de metodología favorece el aprendizaje geométrico y que, en adición, contribuye al aprendizaje la aplicación de la geometría por medio de la solución de problemas que se encuentran en el entorno, de esta forma logrando la autonomía del estudiante en su aprendizaje.

2.4.1. Hersh y Davis

El texto *Experiencia Matemática* tiene como propósito mostrar la sustancia de la matemática, su historia, su filosofía y el modo en que se construye el conocimiento matemático. Esto se origina en varias inquietudes que plantean Hersh y Davis para dar respuesta a las preguntas: ¿Cuál es la naturaleza de las matemáticas?, ¿Qué significado tienen?, ¿De qué se ocupan?, ¿Cuál es su metodología?, ¿Cómo se utilizan?, entre otras.

Hersh y Davis, comienzan abordando dentro de su análisis las siguientes preguntas, ¿Qué son las matemáticas? y ¿Dónde se puede encontrar el conocimiento matemático? El libro se centra en las diversas formas en las que se adquiere la experiencia matemática, aseverando que en cada momento el estado de los conocimientos es el resultado de una compleja red de motivaciones e intereses personales y sociales, así como de las interpretaciones y posibilidades de las matemáticas disponibles. Los autores señalan además que al adquirir una experiencia matemática se podría llegar a una "*matemática ideal*", cuestionándose si puede adquirirse a través de una comunidad donde exista intercambio de ideas en el que se podría crear un aprendizaje más productivo, o por lo contrario se trata de una persona que se especializa en un campo del que tan solo unos pocos especialistas saben y al que dedica toda su atención, a quien en ocasiones le resulta difícil hacer comprender su conocimiento e investigaciones, y quien también tiene dificultades para convencer a los demás de lo que él llama, por ejemplo, demostración o lo que él puede afirmar de una demostración que es "*un razonamiento que convence a quienes conocen bien la cuestión*".

Los autores comentan que en la mayoría de instituciones educativas se concibe el aprendizaje como un proceso individual, donde cada estudiante de manera individual realiza actividades propuestas por el docente. La gran mayoría de estas acciones consta de ejercicios rutinarios que se presentan para que el estudiante practique, pero en ellas no se está construyendo un significado robusto de los conceptos y los estudiantes se limitan a memorizar, como si la matemática fuera igual a las fechas históricas o los nombres de los continentes. Algunos docentes piensan que sus estudiantes no podrían construir significado a un concepto por medio de la solución de problemas no rutinarios por qué los consideran inexpertos. Por otra parte, algunos docentes no se acostumbran a trabajar en una práctica social donde los estudiantes puedan socializar e intercambiar ideas para llegar a un entendimiento en común y de esta forma poder encontrar estrategias de solución a determinado problema no rutinario que se les presente.

En la presente investigación se comparte los criterios de Hersh y Davis en los cuales se considera que la construcción de conocimiento matemático se realiza cuándo cada individuo se enfrenta a problemas e idea las soluciones no necesariamente trabajando aisladamente pero sí participando activamente. Además, el desarrollo de la matemática por comunidades de personas dedicadas a su estudio, permite que se llegue a un entendimiento más profundo.

2.4.2. Lakatos

Lakatos en su libro *Proofs and Refutations* presenta una concepción del conocimiento matemático distinta a las corrientes formalistas que prevalecían en la primera mitad del siglo XX y en la cual se considera que el conocimiento matemático se origina, se genera de manera informal con una metodología cuasi-empírica.

Para Lakatos, la naturaleza del conocimiento matemático en su desarrollo es conjetural e informal basándose en la formulación de hipótesis con "*una gran potencia explicativa y heurística*", en la que la demostración pierde su antiguo significado.

Es incorrecto afirmar que el objetivo de un "problema (en matemática) a demostrar" es o bien mostrar concluyentemente que es verdadera determinada afirmación claramente enunciada, o bien mostrar que es falsa. El objetivo real de un "problema a demostrar" debería ser el de mejorar la conjetura ingenua original para hacerla un teorema[52].

La idea de Lakatos de mejorar la conjetura matemática ingenua hace parte de la heurística lakatosiana envuelta en toda actividad científica[53], en la que se incluyen construcciones de demostraciones para establecer la corrección de una conjetura, la posibilidad de la presentación de contraejemplos que falseen las pruebas o a la conjetura misma[54]. Lakatos señala que las teorías y demostraciones matemáticas no son siempre teorías y demostraciones perfectamente formalizadas (sistemas axiomáticos claramente definidos con unas reglas de transformación y formación establecidas y unos falseadores lógicos delimitados), sino que a menudo los matemáticos trabajan sobre teorías y demostraciones informales, conjeturas y refutaciones intuitivas sujetas a continuos cambios, problemas a resolver en la línea investigadora de la disciplina matemática.

En la investigación realizada por Pérez (2011)[55], se trabajó cada una de las actividades propuestas con una matemática informal como plantea Lakatos en su teoría expuesta en *Pruebas y Refutaciones*; los estudiantes construían significado para el concepto y descubrían diferentes estrategias de solución a un problema determinado utilizando su creatividad, realizaban conjeturas y entre ellos las aceptaban o rechazaban, exponiendo sus razones y llegando a un significado en común.

En la presente tesis, se propone continuar con este trabajo que se inspira en las ideas de Lakatos, pues los resultados obtenidos en la investigación anterior fueron positivos ya que los estudiantes lograron construir un significado robusto para el concepto de área por medio de argumentos sólidos pero

---

[52] Lakatos, I. (1986). *Pruebas y Refutaciones*. La lógica del descubrimiento matemático, edición de J. Worral p.58

[53] Lakatos da una excelente explicación de lo que él entiende por heurística (heurística negativa, heurística positiva) en la parte tercera de su artículo "La crítica y la metodología de los programas científicos de investigación" (Lakatos, 1981).

[54] Lakatos ejemplifica todas estas estrategias heurísticas de manera insuperable en su Pruebas y Refutaciones.

[55] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

informales, permitiéndoles además idear fórmulas para una serie de figuras especiales por medio de acciones de descomposición, recomposición y comparación. De esta manera se busca llegar a caracterizar el pensamiento involucrado en este proceso bajo ciertas condiciones iniciales, a saber, los estudiantes no estarán expuestos a reglas ni presupuestos lógicos, sino podrán actuar sobre la situación planteada y analizar cada uno de los procedimientos realizados autónomamente por ellos mismos.

2.5. Comunidades de práctica

La teoría denominada "*Práctica Social de Wenger*" afirma que el conocimiento se origina en la interacción social, en diferentes roles culturales, y en diferentes ciencias.

> *La contribución de una persona más experimentada, como guía durante el aprendizaje es fundamental; esta persona debe brindar apoyo gradual según se van desarrollando las competencias del aprendiz. La interacción entre el individuo que está aprendiendo y la persona más experimentada activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo*. (Lerman, 1996; Blanton y Stylianou, 2003).

Dentro del marco educativo, este principio es importante, pues el docente, como miembro experto de la clase, introduce al estudiante al conocimiento, a través de actividades que éste es capaz de desarrollar, llegando a convertirse en un individuo experto a través de su participación social.

En la introducción de su libro, *Communities of Practice: learning, meaning, and identity* Wenger (1998; 2007) comienza invitando a la reflexión sobre los problemas de aprendizaje que pueden surgir a través de la vida estudiantil. Él menciona que la mayoría de las instituciones educativas fundamentan su práctica principalmente a partir de la premisa que el aprendizaje es un proceso individual, donde cada estudiante de manera individual realiza actividades propuestas por el docente y las concepciones que así construye se toman como el resultado del proceso de aprendizaje.

Como resultado, gran parte de la enseñanza es percibida por los estudiantes como algo irrelevante y difícil; y al no sentirse involucrados y motivados en ocasiones los estudiantes piensan que no están hechos para las matemáticas.

La participación no se refiere sólo a la socialización y discusión de determinadas actividades con ciertas personas, sino a un proceso de ser participantes activos en las prácticas con comunidades sociales y la construcción de identidades en relación con estas comunidades. Wenger (1998) menciona cuatro aspectos que considera parte importante de la naturaleza del conocimiento y el aprendizaje:

i) "*Somos seres sociales y éste es un aspecto esencial del aprendizaje".*

ii) "El conocimiento es un asunto de competencia en relación con ciertas actividades valoradas socialmente".

iii) "Conocer es cuestión de participar de manera activa en la consecución de estas empresas (actividades intencionadas)".

iv) "El producto del aprendizaje es el significado, visto como nuestra posibilidad de experimentar el mundo en que vivimos y nuestro compromiso con él". (Wenger, 1998)

Estos aspectos llevan al eje central de esta teoría: el aprendizaje es logrado por la persona como participante en comunidades sociales y por medio de la construcción de la identidad con relación a dichas comunidades en las que se desenvuelve.

Con este enfoque, en el presente estudio se intenta mostrar el proceso de participación social de los estudiantes de grado sexto, para construir significado apropiado para el concepto de área en geometría y aporta a la caracterización del pensamiento involucrado, buscando generar actividades oportunas para que los estudiantes participen en una comunidad, en este caso la clase de matemáticas y subgrupos de ella, donde los alumnos con ayuda mutua busquen su propias estrategias de solución a problemas planteados. Esta teoría social del aprendizaje integra todos los componentes necesarios que caracterizan una participación social como proceso de estudio y de saber. Los componentes se muestran en la siguiente Figura 18.

Figura 18. Componentes que caracterizan una participación social[56].

En la figura se aprecia que Wenger parte de los siguientes cuatro componentes que considera necesarios para poder caracterizar el aprendizaje como un proceso de participación y que se describen a continuación.

1) Significado. Una forma de hablar sobre nuestra (cambiante) habilidad de experimentar – individual y colectivamente – nuestra vida y el mundo exterior en tanto comportan significado.

2) Práctica. Una forma de hablar sobre los recursos, marcos y perspectivas compartidas, históricas y sociales, que puedan sostener el compromiso mutuo en la acción.

3) Comunidad. Una forma de hablar sobre las configuraciones sociales en las cuales lo que emprendemos se define en términos del mérito que tiene para seguir desarrollándose y nuestra participación se reconoce como competente.

4) Identidad. Una forma de hablar sobre cómo el aprender cambia quiénes somos y crea historias personales al interior de las comunidades a las que pertenecemos.

Para el desarrollo de esta investigación se definirá cada componente según las exigencias de la misma. Dentro del primer componente, el *significado* no se adquiere sólo con la absorción de conocimientos por medio de la realización de actividades mecánicas, sino que se tendrá en cuenta que en el proceso de

[56] Wenger, 2007. Communities of Practice: learning, meaning, and identity.

enseñanza – aprendizaje la contribución de los estudiantes en un grupo de trabajo crea la construcción del conocimiento en forma colectiva, por medio del intercambio de ideas e información de los integrantes de la comunidad de clase.

Para el segundo componente, al promover la participación de los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades para la construcción colectiva de significado para el concepto de área, se generará en cada grupo un compromiso mutuo para cumplir con su objetivo. El compromiso mutuo que se genera y que caracteriza una comunidad de práctica, no va a ser homogéneo en todos los participantes del grupo ya que cada miembro de la comunidad se encuentra en un lugar propio, donde asume una tarea, genera cierto tipo de situación y aporta ideas para resolver un problema, adquiriendo una *identidad* dentro de su comunidad de práctica y demostrando su grado de competitividad. Estos componentes están interrelacionados y se definen mutuamente. Este modelo se basa en el aprendizaje significativo, en el cual el maestro se convierte en un mediador entre los conocimientos y los alumnos. Para que esto suceda los alumnos deben participar en lo que están aprendiendo y para lograr que ellos participen se deben crear estrategias que permitan que el alumno se sienta motivado por aprender.

"Para Wenger, la participación, la imaginación y la alineación son tres modos de pertenencia a una comunidad de práctica por la cual los estudiantes pueden construir su identidad"[57]. Aquí se define la participación como la interacción que puede surgir al debatir un tema determinado, la imaginación que permite comprender más fácilmente el mundo que rodea al que aprende permitiendo llegar a soluciones propias, y la alineación es la coordinación de programas y actividades que permiten que los estudiantes se apropien del problema que tienen que resolver.

Conclusiones Capítulo 2

El marco teórico de la presente investigación se construyó sobre cinco pilares.

[57] ICME11 Grupo temático de estudio 37.

- Un estudio histórico que sustenta cada uno de los componentes de las actividades, así como la metodología empleada. Se aprecia la gran importancia del pensamiento y los planteamientos de Euclides para demostrar proposiciones y dar solución a problemas que involucran áreas.
- Una apreciación de la teoría de Piaget, en especial en cuanto que los niños construyen su mundo al interactuar con él. Este autor pone énfasis en el rol de la acción y la coordinación de acciones en el proceso de aprendizaje.
- La consideración y cuestionamiento de la propuesta de Tall en la cual realiza una caracterización del pensamiento matemático del ser humano, resalta diferentes formas para el desarrollo del pensamiento matemático, y plantea una diferenciación fundamental en la naturaleza del pensamiento geométrico y la del pensamiento aritmético - algebraico.
- La teoría de la comunidad de práctica de Wenger para la organización del ambiente en la cual se buscará la construcción de significado del concepto de área por parte de los estudiantes.
- La importancia de construir significado de un concepto a través de la solución de problemas no rutinarios por medio de un enfoque cuasiempírico de la creación de la matemática y de la recreación de la misma por la comunidad de estudiantes, y la participación de todos en esa empresa.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO Y DE ACTIVIDADES

En este capítulo se presenta la metodología utilizada en el desarrollo de esta investigación.

3.1. Diseño metodológico

La investigación es de tipo teórico-descriptivo y es un estudio evolutivo y transversal, ya que en ella se produce una fotografía instantánea de una población en un momento determinado y se evalúan los cambios que se producen comparando las mismas personas en diferentes etapas de desarrollo de las actividades y demás componentes.

Adicionalmente, se trabaja con un análisis temático para interpretar el significado de la realidad del sujeto o autor de una situación estudiando sus representaciones, estrategias de solución y actitudes, y de esta forma indagar sobre las diferentes etapas y procesos del pensamiento geométrico que desarrolla el individuo para construir significado robusto del concepto a estudiar y lograr categorizarlos.

Se diseñaron actividades didácticas para ser desarrolladas en forma grupal e individual, observando tanto su desarrollo como sus resultados.

Está investigación se desarrolló en cuatro colegios distintos, de diferentes perfiles en cuanto a su estudiantado, y está dividida en dos etapas. En la primera fase se aplicó cada una de las actividades propuestas a un grupo de estudiantes de grado sexto pertenecientes a los colegios seleccionados.

Se grabaron videos para analizar las estrategias que utilizaron los equipos de estudiantes cuando estaban ejecutando sus respectivas actividades lo cual sirvió para el mejoramiento continuo de las mismas, perfeccionando los materiales para luego ser implementados con un segundo grupo de estudiantes.

Se diseñó y elaboró la serie final de actividades didácticas que se realizaron con la participación de estudiantes de grado sexto pertenecientes a los colegios seleccionados.

Al finalizar el estudio se realizó una prueba - entrevista de forma individual, el cual se llevó a cabo con el segundo grupo de los cuatro colegios escogidos, para de este modo analizar cada una de las fases por las cuales el estudiante progresa en la construcción de significado del concepto de área.

Antes de comenzar con la implementación de las actividades se realizó una prueba de entrada, para indagar acerca del pensamiento geométrico que han desarrollado previamente en relación con la medición de áreas.

Las actividades están divididas en dos etapas, en una primera se trabaja en forma grupal para construir el concepto de área y en una segunda etapa se presentan nuevas actividades para trabajarlas en forma individual. Cada uno de los puntos está conformado por preguntas abiertas para indagar, precisar y describir cada uno de los procedimientos desarrollados por los estudiantes.

Para las actividades que corresponden a la primera etapa, se ha seguido la siguiente estructura:

- Actividades de descomposición y recomposición con rompecabezas (figuras geométricas específicas). Se presentan 12 rompecabezas que contienen una muestra de figuras geométricas comunes y una guía de preguntas que acompaña a cada uno. Esta actividad estimula la creatividad de los estudiantes utilizando la descomposición y recomposición (armar el rompecabezas de varias maneras) y la posibilidad de manipulación y apreciación de las figuras y sus componentes desde diferentes perspectivas. Se armaron grupos para esta actividad, y con base en la guía de trabajo, se realizaron preguntas respecto a las figuras que observaron en el rompecabezas y las que pudieron construir autónomamente con las piezas que lo componen.
- Realización de talleres especialmente diseñados de acuerdo con los significados a construir empleando el modelo de Wenger. Como parte del sistema de actividades en la solución de problemas, se buscó conformar equipos de trabajo; de esta forma se espera que los estudiantes realicen aportes a sus compañeros de equipo en cuanto a experiencias, comentarios, sugerencias y reflexiones sobre el trabajo que están desarrollando (correspondiente al tema de áreas), para

después transformar el trabajo individual en un producto más rico donde se tienen en cuenta las observaciones hechas por todos los compañeros de equipo.

El diseño de estas actividades se desarrolló con problemas nuevos, algunos de los cuales requieren una simple respuesta, tomados de los libros de Olimpiadas de Matemáticas de Primer Nivel año 2002, 2005 y 2009, y otros que requieren una solución completa del estudiante con su respectiva justificación para determinar la manera en que ha construido significado del concepto de área.

A continuación, se da una explicación de cada una de las categorías que compone las actividades escritas.

- Descomposición y recomposición: Se le presentaron a cada grupo de trabajo 16 problemas interesantes, en los cuales los estudiantes debían realizar descomposición y recomposición de figuras, planteados en relación con experiencias cotidianas y matemáticas.
- Comparación: Dentro de estas actividades se presentaron 15 problemas compuestos con diferentes figuras geométricas planas con el objetivo de que los estudiantes hallaran el área de una conociendo la de la otra.
- Actividades de razón entre áreas (comparación aritmética). Se presentaron 22 problemas, y para cada pregunta se presentó una serie de figuras geométricas, divididas en componentes iguales o no, donde se buscó que, de manera individual y grupal, se determinara cuál es la razón entre las respectivas áreas.
- Deducción de fórmulas aritméticas: Se plantearon situaciones en las cuales el estudiante debió analizar la relación rectángulo-paralelogramo, triángulo–paralelogramo, paralelogramo – trapecio, triángulo – trapecio, entre otras, y de esta forma comenzar a usar los resultados y las actividades anteriores para generar él mismo fórmulas para calcular el área de esas figuras a través de la

descomposición y recomposición de una figura base para la cual se conoce de antemano una tal fórmula.

Al finalizar este proceso se realizó una prueba - entrevista con diez estudiantes de cada colegio elegidos al azar y quienes participaron en las etapas anteriores de la investigación, con el propósito de observar el carácter conceptual y procedimental del conocimiento que ponen en juego los estudiantes.

Esta prueba - entrevista está dividida en dos fases; en la primera se comienza con un ambiente para generar confianza con el estudiante, en el cual se entabló una conversación realizando preguntas informales hechas al niño por el entrevistador. Luego se colocaron sobre la mesa una serie de tarjetas, para que el estudiante tuviera la posibilidad de escoger dos de ellas y, a partir del contenido de cada tarjeta, se le pidió que inventara y formulara un problema relacionado con él, consignarlo en el lugar correspondiente del cuestionario, y continuar respondiendo a las preguntas revelando y justificando la forma en que lo pensó, hasta terminar.

Se diseñó como modelo de formato a diligenciar por cada estudiante, una vez escogidas las fichas, la siguiente estructura, que se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Formato a diligenciar por cada estudiante.

Clave **(número que se le asigne al estudiante)**	**Producción del estudiante**
Problema	(NÚMERO DEL PROBLEMA ESCOGIDO POR EL ESTUDIANTE)
Repuesta del estudiante	(PROBLEMA INVENTADO POR EL ESTUDIANTE Y SOLUCIÓN)
Repuesta alternativa del estudiante si la tiene	
Conclusiones por parte del entrevistador	(EL ENTREVISTADOR DILIGENCIARÁ EN ESTE CAMPO SUS OBSERVACIONES)

Para esta primera fase, se analizó las etapas en la que consta el problema inventado, interpretación, significado del concepto de área, dominio de los procedimientos empleados para resolver los problemas, posibles errores cometidos, clase de descomposiciones, recomposiciones o comparaciones u otras estrategias utilizadas.

En la segunda fase de la prueba - entrevista, se le entregó al estudiante una serie de problemas para de esta forma analizar las acciones (físicas o imaginarias) y estrategias que utilizó para dar solución al problema planteado. Al menos uno de estos problemas fue tal que su solución pudo hacerse por descomposición, recomposición y comparación con figuras cuya área es conocida, incluyendo el establecer igualdad de áreas, comparación vía fracciones, o el uso creativo de las fórmulas entrelazadas con las acciones anteriores. Igualmente, en la solución de los problemas planteados existió la posibilidad de aplicar fórmulas. Se diseñaron estos problemas de tal modo que el estudiante tuviera que explicar y justificar su solución por escrito complementado por explicaciones verbales en caso de ser necesarias para los fines de la investigación.

Adicionalmente, cada una de las actividades fue videograbada.

Para el análisis de las actividades desarrolladas por los estudiantes, incluyendo la prueba – entrevista, se realizó una descripción de cada una de las acciones que lleva a cabo el estudiante, clasificándolas de acuerdo a las estrategias utilizadas. Por ejemplo, se buscó determinar si usó métodos clásicos y conocidos o creativos, si utilizó argumentos geométricos, si “reagrupó” para formar figuras más fáciles (cuáles figuras trató de acomodar o comparar: rectángulos, cuadrados, etc.), si se basó en las fórmulas o trató de buscar una unidad de referencia para medir, si trazó otras rectas para formar figuras geométricas conocidas, con la finalidad de, fundamentado en estos análisis, llegar a caracterizar el pensamiento desplegado por el estudiante.

Para finalizar, en cada etapa de la construcción del concepto se realizó una comparación con la teoría propuesta por Tall (2013) y de esta forma determinar si los postulados dados por este autor se cumplen o no, y así poderlos refrendar o, de lo contrario, refutar y reemplazar con una explicación alternativa, constituyéndose en el aporte teórico de esta investigación.

3.2. Diseño y aplicación de las actividades

En lo que sigue se describen los objetivos que se pretenden en cada una de las actividades y la aplicación de éstas para el desarrollo de la presente investigación, con el propósito de caracterizar el pensamiento geométrico con respecto a la medición.

Antes de diseñar las diferentes actividades que ayudaran a los estudiantes a construir el significado de área de ciertas figuras geométricas planas y caracterizar el pensamiento involucrado, se pensó en actividades que no fueran de tipo rutinario - memorístico, pues no se pretende desarrollar la habilidad sólo para responder una prueba, se busca ver si el estudiante construye este concepto por medio de la descomposición – recomposición – comparación, de esta forma analizar cuáles son los procesos de pensamiento que desarrolla el estudiante para construir el significado de este concepto.

Estas actividades presentan una estructura en la cual se tienen en cuenta el concepto de área y las estrategias utilizadas en las demostraciones euclidianas.

El propósito de estas actividades es que el estudiante construya el significado del concepto de área por medio de la descomposición y recomposición de algunas figuras geométricas planas, y la posterior comparación, presentando en cada actividad una serie de problemas con el objetivo que el estudiante a medida que vaya solucionando cada problema, comience a construir el significado del concepto que se está trabajando.

Para el desarrollo de las actividades de descomposición – recomposición se plantean dos etapas, una de manipulación física que tiene como objetivo apreciar en cuántas formas se puede descomponer una figura. La segunda etapa es de manipulación mental; se proyectaron actividades en el papel donde el estudiante tiene la necesidad de utilizar su imaginación para determinar cómo poder comparar las figuras planas y hacer correctamente esta representación en su dibujo.

El diseño contempla luego que los estudiantes realizarán esa comparación, que tiene como objetivo que lleguen a la conclusión que una misma área puede estar representada por diferentes formas geométricas. Esta etapa se realizará de dos maneras, en la primera no se utiliza una unidad de referencia, y en la segunda se descompone en unidades de comparación, representados en triángulos, rectángulos, rombos, cuadrados, entre otros.

En la próxima actividad se pretende los estudiantes efectúen actividades de deducción de procedimientos aritméticos para encontrar el área de las figuras geométricas propuestas, y en la última actividad se aborda el círculo donde el estudiante debe encontrar el área del círculo por métodos de aproximación.

Al finalizar este proceso se realizó una prueba - entrevista para la cual se tomó una muestra de los estudiantes que participaron en las etapas anteriores de la investigación para observar el carácter conceptual y procedimental del conocimiento que ponen en juego los estudiantes.

Para el desarrollo de cada una de las actividades se tuvo en cuenta en su diseño los componentes de la teoría social del aprendizaje propuestos por E. Wenger(1998), Lakatos, Hersh y Davis, enfatizando aspectos como los siguientes: Contextualizar el problema de una manera que se conecte con los alumnos y sus intereses; ofrecer una situación que sale de las actividades habituales; poner a los alumnos en condiciones de apropiarse de la situación, para que puedan desarrollar por sí mismos la comprensión de su participación; colocar a los estudiantes en interacciones, invitándoles a trabajar en equipo o como un grupo; animar a los estudiantes a crear sus propias estrategias de uso de sus conocimientos matemáticos estableciendo vínculos entre los conceptos; animar al debate y a la adopción de variadas estrategias para las diferentes soluciones que presentan.

3.2.1. Diseño de las actividades

A continuación, se presenta la descripción de cada una de las actividades. Las actividades completas se encuentran en anexos.

3.2.1.1. Actividad 1: Rompecabezas

Para el inicio de la actividad se toma una acción lúdica para comenzar a introducir el tema de área, donde el estudiante comience a sentirse motivado y curioso sobre este tema.

Objetivo: Potenciar el pensamiento geométrico a través de la descomposición – recomposición, manipulación y apreciación de figuras geométricas planas desde diferentes posiciones y perspectivas.

Estructura: Los rompecabezas fueron diseñados por la autora de la presente tesis teniendo en cuenta el abordaje de problemas de área en las proposiciones de Euclides, en el cual el estudiante puede realizar la descomposición y recomposición de las figuras geométricas planteadas.

Metodología: Para el desarrollo de esta actividad se tuvo en cuenta la comunidad de práctica a la manera de Wenger adaptado a un contexto sencillo, y según el número de estudiantes que conforman la muestra a investigar se conformarán grupos de tres y dos estudiantes. A cada grupo de trabajo se le entregará una guía con una serie de preguntas las cuales, deben dar solución, se espera que se realice la descomposición, recomposición y relación de las figuras geométricas que se observan en el rompecabezas.

Para lograr el objetivo de la actividad se plantean una serie de preguntas estructuradas. (Ver Anexo 2.)

Finalidad de la actividad: Los estudiantes observan de cuántas formas se puede descomponer algunas figuras geométricas planas y de qué figuras se puede componer otra.

3.2.1.2. Actividad 2: Descomposición y recomposición

Objetivo: Construcción inicial del significado del concepto de área por medio de la descomposición y recomposición planteadas en relación con experiencias cotidianas y matemáticas.

Estructura: Para esta actividad se tiene en cuenta el enfoque de Euclides en su libro ***Elementos***, donde, sin hacer una definición de área, se comparan áreas de figuras geométricas (paralelogramos, triángulos, cuadrados) a través de la descomposición y recomposición de figuras, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 2.

Las preguntas 1 a 4 tienen como objetivo que el estudiante realice mentalmente la descomposición de las figuras respectivas y concluya si tienen la misma área (aunque no se introduce el término área todavía), y de esta forma comenzar a enriquecer la construcción del significado de este concepto.

La pregunta 5 tiene como objetivo que los estudiantes descompongan el trapecio en un rectángulo y dos triángulos, visualizando cuáles figuras geométricas pueden recomponer un trapecio.

De la pregunta 6 a la 10 se desarrolla como objetivo que el estudiante establezca equivalencias entre la extensión de regiones planas a través del recubrimiento.

Las preguntas 11, 12 y 13 tienen como objetivo descomponer la zona sombreada para obtener una figura geométrica.

En las preguntas 14, 15 y 16 el estudiante debe utilizar su imaginación para encontrar la figura teniendo en cuenta las características dadas.

Metodología: A cada grupo de trabajo se le entregará las guías para la actividad para que entre ellos encuentren la solución a cada problema planteado; luego cada grupo expondrá sus soluciones ante la clase para verificar su respuesta. Esta corrección la realizarán sus compañeros de clase, y, teniendo en cuenta las respuestas, si es necesario, podrá intervenir el docente.

Finalidad de la actividad: Determinación de igualdad de área de ciertas figuras geométricas por medio de descomposiciones.

3.2.1.3. Actividad 3: Comparación

Objetivo: Medir el área mediante el recubrimiento total de una figura, utilizando, sin nombrarla, una unidad de comparación o referencia (triángulos, cuadrados, rectángulos, rombos).

Estructura: Para esta actividad se diseñaron los puntos teniendo en cuenta el enfoque de Euclides, en las proposiciones donde se comparan diferentes figuras para determinar el área de un rectángulo a través del área de dos triángulos.

Algunas de las preguntas se hacen en el contexto de la cuadrícula ya que es una primera etapa por la cual deben pasar los estudiantes, para luego realizar construcciones mentales sin la ayuda de la cuadrícula, así logrando un mejor desarrollo de su pensamiento geométrico.

Las preguntas de la 1 hasta la 6 permiten que los estudiantes establezcan equivalencias entre regiones a través de la comparación y el recubrimiento.

Las preguntas 7 hasta la 9, tienen como objetivo descomponer la figura en unidades de referencia.

En las preguntas 10 hasta 14 se pretende que los estudiantes demuestren de cuántas de estas unidades está compuesta la figura.

La pregunta 15 permite que los estudiantes descompongan el trapecio en cuatro partes de igual tamaño.

Metodología: A cada grupo de trabajo se le entregará las guías para la actividad para que entre ellos encuentren la solución a cada problema planteado; luego cada grupo expondrá sus soluciones ante la clase para verificar su respuesta. Esta corrección la realizarán sus compañeros de clase, y, teniendo en cuenta las respuestas, si es necesario, podrá intervenir el docente.

Finalidad de la actividad: Los estudiantes tomarán una unidad como patrón de comparación determinando cuántas veces cabe en la figura señalada; se pretende que de esta manera los estudiantes se van adelantando en la construcción de significado del concepto de área.

3.2.1.4. Actividad 4: Razón entre áreas

Objetivo: Dividir las diferentes figuras geométricas para hallar el área de una región sombreada.

Estructura: En las preguntas 1 hasta la 6, los estudiantes tienen la necesidad de descomponer cada figura geométrica obteniendo partes iguales para compararlas encontrando la fracción de área solicitada.

Las preguntas 7 hasta la 21 plantean problemas interesantes en los cuales los estudiantes deben encontrar el área de la región sombreada por medio de la división en partes iguales.

En la pregunta 22, los estudiantes deben calcular la fracción del total que representa cada figura.

Metodología: A cada grupo de trabajo se le entregará las guías para la actividad para que entre ellos encuentren la solución a cada problema planteado; luego cada grupo expondrá sus soluciones ante la clase para verificar su respuesta. Esta corrección la realizarán sus compañeros de clase, y, teniendo en cuenta las respuestas, si es necesario, podrá intervenir el docente.

Finalidad de la está actividad: Los estudiantes empiezan a realizar subdivisiones de igual tamaño a diferentes figuras geométricas, de esta forma comienzan a comparar identificando qué es una razón y cómo pueden encontrarla y así progresar en la construcción de significado del concepto de área.

3.2.1.5. Actividad 5: Deducción de procedimientos aritméticos para el cálculo de áreas

Esta actividad está dividida en tres etapas que tienen el mismo objetivo y metodología.

Objetivo: Establecer la relación de figuras geométricas por medio de la descomposición y recomposición formando nuevas figuras geométricas, teniendo en cuenta el enfoque euclidiano, proceso en el cual el estudiante puede realizar la descomposición, recomposición y comparación de las figuras geométricas para hallar su área e inducirle a encontrar nuevos procedimientos de tipo aritmético para hallar el área de ciertas figuras geométricas.

Metodología: A cada grupo de trabajo se le entregará las guías para que entre ellos encuentren la solución a cada problema planteado; luego cada grupo expondrá sus soluciones ante la clase para verificar su respuesta. Esta corrección la realizarán sus compañeros de clase, y, teniendo en cuenta las respuestas, si es necesario, podrá intervenir el docente.

3.2.1.5.1. Actividad 5: Explorando el cuadrado y el rectángulo

Estructura: Las preguntas 1 y 2 se diseñaron para permitir al estudiante encontrar el área del rectángulo.

En las preguntas 3, 4 y 5 teniendo los estudiantes claro el procedimiento aritmético para encontrar el área de un rectángulo, se dan las dimensiones de la longitud de la base y de la altura de varios rectángulos y cuadrados para que se encuentre el número de unidades cuadradas que recubre la figura.

En la pregunta 6 los estudiantes deben ordenar los rectángulos de mayor área a menor área.

En las preguntas 6, 7 y 8 se presentan rectángulos y cuadrados para que los estudiantes, conociendo en área total, encuentren sus dimensiones.

Frente a las preguntas 9 y 10 los estudiantes explicarán qué procedimientos aritmético-algebraicos encontraron para hallar el área del cuadrado y el rectángulo. En las preguntas 11 y 12 los estudiantes darán solución a los problemas planteados teniendo en cuenta las estrategias y el entendimiento que construyeron.

3.2.1.5.2. Actividad 6: Explorando el rectángulo y el paralelogramo

Estructura: Las preguntas 1 y 2 se diseñaron para inducir al estudiante a encontrar el área del paralelogramo. Las preguntas 3 y 4, teniendo los estudiantes claro el procedimiento aritmético – algebraico para encontrar el área de un rectángulo y paralelogramo, se dan dimensiones de la longitud de la base y la longitud de la altura de varios rectángulos y paralelogramos para que comparen sus áreas. El objetivo de las preguntas 5 hasta la 7 es que los estudiantes construyan rectángulos y paralelogramos de igual área pero con diferentes dimensiones. En cuanto a las preguntas 8 hasta la 11, el objetivo de estas preguntas es encontrar la relación del rectángulo y paralelogramo proporcionándoles datos numéricos para que concluyan los procedimientos aritméticos que permiten calcular el área de cualquier paralelogramo es la misma que la del rectángulo.

3.2.1.5.3. Actividad 7: Explorando el triángulo

Estructura: En la pregunta 1 se busca que el estudiante observe que al trazar una línea diagonal en el paralelogramo la figura queda conformada en dos triángulos congruentes, de esta forma inducirles a buscar estrategias para encontrar el área de uno de los triángulos encontrando procedimientos aritméticos.

En las preguntas 2 hasta la 4 se les presentan varios triángulos para que los estudiantes los representen en un paralelogramo y un rectángulo.

Las preguntas 5 y 6 se diseñaron para dar herramientas al estudiante para encontrar el área del triángulo.

En las preguntas 8 y 9 se dan unas dimensiones para que se encuentre el área de los triángulos.

En la pregunta 10 se presenta dos triángulos para que los estudiantes relacionen el área de estas dos figuras.

Las preguntas 11 y 12 son problemas de olimpiadas para que los estudiantes realicen descomposiciones y comparaciones para dar solución al problema.

3.2.1.5.4. Actividad 8: Explorando el trapecio y el hexágono

Estructura: En la pregunta 1 se presentan dos trapecios para que los estudiantes armen un paralelogramo y de esta forma ver la relación que se puede establecer entre estas dos figuras.

La pregunta 2 presenta un trapecio para que se encuentre el área a través de la descomposición en un cuadrado y un triángulo.

Las preguntas 3 y 4 buscan la descomposición de un trapecio no rectángulo en dos triángulos para calcular su área.

En la pregunta 5 se busca que el estudiante manipule el trapecio para que se formen dos rectángulos y a partir de esto encontrar su área.

En las preguntas 6 a la 8 se plantean problemas para que los estudiantes descompongan el hexágono y puedan observar las diferentes regiones en que se puede descomponer para de esta forma sacar conclusiones con respecto al área de las mismas.

Las preguntas 9 hasta la 12 presentan problemas en los cuales los estudiantes realizan descomposiciones y recomposiciones de las figuras geométricas para hallar su área.

3.2.1.6. Actividad 9: El círculo

Objetivo: Encontrar la constante de proporcionalidad entre el lado y el perímetro de algunas figuras como el cuadrado, triángulo equilátero, hexágono regular, pentágono regular y la circunferencia (en este caso entre el radio o diámetro y el perímetro).

Determinar inductivamente la fórmula del área de la circunferencia.

Metodología: A cada grupo de trabajo se le entregará cuatro cuadrados de lados 1cm, 2cm, 3cm y 4cm, triángulos equiláteros de lados 1cm, 2cm, 3cm y 4cm, hexágonos regulares de lados 1cm, 2cm y 3cm, pentágonos regulares de 1cm, 2cm y 3cm, círculos de diámetro 1cm, 2cm, 3cm y 4cm. Luego se le hará entrega de un rollo de cinta de enmascarar, tijeras y gráficas del plano cartesiano para cada figura geométrica.

Se les pedirá que tomen cada figura desde la más pequeña a la más grande, con la cinta enrollen la figura, corten y la peguen en el plano entregado en el punto del eje horizontal correspondiente a la longitud de su lado. Este mismo procedimiento lo deben realizar en diferente plano cartesiano con cada figura geométrica entregada. Luego se les señalará que con una regla midan el largo de la cinta pegada en cada plano cartesiano aclarándoles que éste será el perímetro de cada figura geométrica, que para el círculo se llama también la longitud. Al tener estos datos se les pedirá que, dependiendo de cada lado de la figura geométrica con su respectivo perímetro, hallen la razón entre el área y la longitud del lado para cada figura. Para el círculo tendrán en cuenta el diámetro y su longitud. Al realizar los cálculos se darán cuenta, por ejemplo, para el cuadrado, que la razón de área se llega a un mismo número que es cuatro, para el triángulo 3, para el hexágono 6, pentágono 5 y para el círculo aproximadamente 3,1 encontrando un valor aproximado del número π. También se les indicará que si tomamos cada número encontrado y lo multiplicamos por el número de lados encontramos su perímetro y para el círculo si tomamos 3,1 y lo multiplicamos por su diámetro encontramos una aproximación de la longitud de la circunferencia. El docente luego preguntará ¿cómo se encuentra el área del cuadrado? Con las respuestas de los estudiantes se reconstruirá el camino de lo que se realizó con las primeras actividades y luego se buscará por inducción que se encuentre el área del círculo.

3.2.2. Prueba - entrevista

Como se ha informado, la entrevista está dividida en dos fases; en la primera se comienza con un ambiente de confianza con el estudiante, en el cual se entablará una conversación realizando preguntas informales hechas al niño por el entrevistador. Luego se colocarán sobre la mesa una serie de tarjetas (ver Anexo 1), para que el estudiante tenga la posibilidad de escoger dos de ellas y a partir del contenido de cada tarjeta se le pedirá que invente y formule un problema relacionado con cada una de ellas, consignarlo en el lugar correspondiente del cuestionario, y continuar respondiendo a las preguntas revelando y justificando la forma en que la pensó, hasta terminar.

Para esta primera fase, se analizará la interpretación, significado del concepto de área, dominio de los procedimientos empleados para resolver los problemas, posibles errores cometidos, clase de descomposiciones, recomposiciones o comparaciones u otras estrategias utilizadas.

En la segunda fase de la prueba – entrevista, se le entregará al estudiante una serie de problemas para de esta forma analizar las acciones (físicas o imaginarias) y estrategias que utiliza para dar solución a cada problema planteado. Se diseñarán estos problemas de tal modo que el estudiante tenga que explicar y justificar su solución por escrito complementado por explicaciones verbales en caso de ser necesario para los fines de la investigación.

3.2.3. Corrección de actividades: Colegio Tibabuyes Universal I.E.D. y Liceo Fesán

Se inició la investigación en el Colegio Tibabuyes Universal I.E.D. y Liceo Fesán con los estudiantes de grado sexto, el primer colegio conformado por 45 estudiantes y el segundo por 39. Con estos estudiantes se quiso observar las dificultades que se pudieran presentar en el desarrollo de cada una de las actividades para perfeccionarlos y luego aplicarlos a los estudiantes del Colegio Antonio Nariño sede Usme, Colegio Bilingüe el Bosque y Liceo Fesán donde está centrada la investigación. El número de estudiantes que participaron en esta actividad fueron: Colegio Antonio Nariño sede Usme 35 estudiantes, Colegio Bilingüe el Bosque 18 estudiantes, Liceo Fesán 39 estudiantes.

Para desarrollar el modelo de Wenger, se conformaron grupos de tres y dos integrantes, a cada grupo se les entregó las respectivas actividades, y se observó el trabajo en equipo para hallar la solución de los problemas planteados. (Esto quedó grabado en el Video 1.) Se debatieron algunas de las respuestas encontradas por los estudiantes, y en adición entre ellos mismos discutían sus resultados.

Con base a lo observado se concluyó:

Prueba de entrada

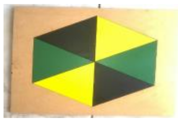
Se observó que los estudiantes de ambos colegios entendieron las preguntas, pero no sabían cómo abordar algunos problemas por falta de conocimiento, por lo que se opta por no hacerle cambios.

1. **Actividad con rompecabezas**

No se encontró ninguna dificultad con el rompecabezas, los estudiantes dieron respuesta rápidamente a las preguntas planteadas, señalaban que estaba muy fácil.

La pregunta común que realizaron los estudiantes en ambos colegios fue: ¿cómo se llama la figura de color amarillo?, no tuvieron inconvenientes en dar solución a las preguntas planteadas.

El grupo de trabajo al cuál le correspondió éste rompecabezas no se acordaban del nombre de la figura que componía el rompecabezas por lo que lo llamaban pentágono, se aclaró el nombre de la figura geométrica. No hubo problemas con la solución de las preguntas propuestas.

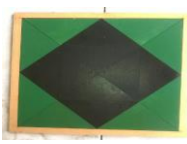


No se encontró ninguna dificultad con la solución de las preguntas planteadas de este rompecabezas.

No se encontró ninguna dificultad con el rompecabezas, los estudiantes dieron respuesta rápidamente a las preguntas planteadas.

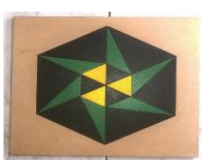
El equipo de trabajo que le correspondió este rompecabezas tuvo dificultad en la solución de los ítems c y d, pero esta dificultad no fue por el planteamiento del problema, sino que no sabían cómo era un triángulo rectángulo.

El grupo al que le correspondió este rompecabezas no tuvo inconvenientes para dar solución a las preguntas planteadas.



Los estudiantes encontraron varias formas de armar el rompecabezas y argumentaron cada una de las preguntas planteadas.

Los grupos de trabajo señalaron con facilidad de cuántas formas pueden descomponer el rompecabezas.



Los grupos de trabajo identificaron con facilidad que la unión de las piezas compone el rompecabezas, con las fichas del rompecabezas encontraron varias otras figuras geométricas.

Se interactuó con cada grupo luego de que exploraran los rompecabezas, para apreciar qué conclusiones percibieron en la descomposición de cada figura y las explicaciones que realizaban para dar respuesta a las preguntas planteadas; al finalizar la actividad se preguntó a nivel grupal de cuántas formas se podría descomponer un hexágono y un trapecio, entre otros, en regiones iguales.

Terminada esta sesión se presentó la **Actividad 1; sección 2: Descomposición y Recomposición.**

Para el punto 6 se mejora la figura ya que los estudiantes observaban la figura sombreada dividida en dos triángulos. En la pregunta 4, se especifica que se quiere criar gallinas en la zona sombreada ya que tuvieron problemas en la comprensión del problema. En los puntos 15 y 16 algunos grupos tuvieron dificultad para su desarrollo, pero se tomó la decisión de dejarlos sin modificaciones para analizar la reacción de los estudiantes que pertenecen a la investigación.

Actividad 2: Comparación

Se observó dificultad por parte de los estudiantes en la solución del punto 5, pues no sabían cómo recubrir la figura. Se decide dejarlo sin modificaciones ya que la dificultad por parte de los estudiantes no tiene que ver con la estructura del ejercicio. Para la pregunta 8, los estudiantes no sabían a qué se refiere cuando se habla de cuadrados parciales y enteros; se realiza la explicación al grupo por lo que los estudiantes pudieron continuar con el desarrollo de la actividad. Se decide dejar la estructura de la actividad ya que la mayoría de estudiantes termina antes del tiempo programado.

Actividad 3: Razón entre áreas

Se observó dificultad para el desarrollo de esta actividad con los estudiantes del Liceo Fesán ya que no tenían un conocimiento previo sobre fracción; además tuvieron inconvenientes en dividir una figura en partes iguales para encontrar la razón de área. Esta última dificultad también lo tuvieron algunos de los estudiantes del Colegio Tibabuyes Universal I.E.D.

Se decide dejar la totalidad de la estructura de la actividad y para la implementación con los estudiantes del estudio se opta por hacer una introducción de fracción antes de comenzar a trabajar la actividad.

Actividad 4: Sección 1: Explorando el cuadrado y el rectángulo

Se observó dificultad en la solución del punto 2 porque los estudiantes no sabían cómo dibujar dos rectángulos de igual área con diferentes dimensiones. Se hizo la explicación del concepto “dimensión”. En el punto 12 la mayoría de grupos tuvo dificultad en la solución del problema; comprendieron la pregunta, pero no sabían cómo dar solución. Se decide dejar este punto para observar en el grupo de investigación la reacción para dar respuesta a esta pregunta.

Actividad 4: Sección 2: Explorando el rectángulo y el paralelogramo

Al igual que la actividad anterior los estudiantes tuvieron dificultad en dar solución en el punto 5, y en el punto 11 algunos de los grupos de trabajo no supieron cómo abordar el problema. Se decide dejar la totalidad de la estructura de la actividad.

Actividad 4: Sección 3: Explorando el triángulo

Se observa dificultad en el punto 4 por la forma del triángulo, en el punto 7 la mayoría de los grupos de trabajo encuentra el área del rectángulo y lo dividen en dos para encontrar el área de la región sombreada. No tienen en cuenta la pregunta que se formuló. Además, se evidencia en el Colegio Tibabuyes Universal I.E.D. la falta de comprensión lectora para dar solución a esta actividad. Se decide dejar los problemas planteados en esta actividad ya que las dificultades evidenciadas no fueron por la estructura de los problemas.

Actividad 4: Sección 4: Explorando el trapecio

Se observó la dificultad en los grupos de estudiantes para formar un paralelogramo con dos trapecios. En el punto 4 se decide que los estudiantes construyan solo dos trapecios ya que es la continuación del punto 2. Para las preguntas 10 y 11 los estudiantes tuvieron dificultad en encontrar las dimensiones de la figura descompuesta.

Actividad 5: El Círculo

Para el desarrollo de esta actividad no se evidenció ninguna dificultad por parte de los grupos de trabajo ya que, por ser una actividad diferente a las actividades que se venían trabajando, demostraron buena motivación por realizarla.

Conclusiones Capítulo 3

Teniendo en cuenta cada una de las observaciones realizadas en la implementación de las actividades se corrigen y se implementan al grupo de estudiantes donde va dirigida la investigación.

CAPITULO 4. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA METODOLOGÍCA Y DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS EPISODIOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL CONCEPTO DE ÁREA

En el presente capítulo se da un breve reporte de la ejecución de la investigación señalando algunas condiciones particulares de ésta, alcances y dificultades.

4.1. Implementación de la propuesta

La investigación se desarrolló en el Colegio Antonio Nariño sede Usme, Liceo Fesán, y Colegio del Bosque Bilingüe de la ciudad de Bogotá. Para iniciar con el modelo de la teoría social de aprendizaje propuesto por Wenger (1998), Lakatos (1978), Hersh y Davis (1988), se conformaron equipos de trabajo de dos y tres estudiantes, por afinidad. En cada grupo de trabajo, el liderazgo es compartido en correspondencia a la actividad.

En las sesiones, se analizó la manera en que cada equipo de trabajo busca las estrategias de solución para los problemas propuestos de forma grupal dentro del salón de clases, problemas que están diseñados para que se logre la construcción del concepto de área de ciertas figuras geométricas planas. Los problemas que se proponen en cada una de las actividades están centrados en la descomposición, recomposición y comparación de figuras planas.

La caracterización del pensamiento geométrico que se va desarrollando se hará por medio del análisis de las estrategias de solución y los aportes que realizan los estudiantes a su grupo y al grupo en conjunto, demostrando las formas en que van construyendo significado cada vez más robusto del concepto de área. Para determinar si los objetivos propuestos por la metodología para la construcción de significado robusto del concepto de área y caracterización del pensamiento involucrado se cumplieron, se aplicó una prueba – entrevista dividida en dos etapas.

Las interacciones que se desarrollan en cada grupo de trabajo se refieren a las discusiones que los estudiantes tienen entre ellos cuando resuelven un problema. Se motiva a los estudiantes a socializar las respuestas de las diferentes actividades en la clase contando con una mediación permanente por parte del docente como interlocutor reaccionando a las intervenciones de los estudiantes y estimulando al diálogo.

La presentación de los talleres se caracteriza por involucrar a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento geométrico desde el momento que se presenta la primera actividad. En este proceso, cuando los estudiantes estén desarrollando las diferentes etapas que conforman la investigación, se les pide que presenten la solución a la que llegaron para compartir los diferentes métodos y procedimientos de solución ante la comunidad de clase. Los estudiantes describen sus estrategias y dan sus puntos de vista frente a la solución expuesta por sus compañeros, y así se comparan las respuestas aclarando dudas y llegando a un consenso a nivel grupal.

Para realizar un análisis a profundidad, cada una de las actividades fue videograbada, de modo que se pudo constatar las ideas, generalizaciones y conclusiones a las que llegaron los estudiantes, como se muestra en el CD que se anexa a la tesis.

4.2. Descripción de algunos episodios en la construcción de significado del concepto de área

En esta sección se da un breve reporte de la ejecución de la investigación, donde se mencionan algunas condiciones particulares de ésta, sus alcances y dificultades que se presentaron.

4.2.1. Prueba de entrada

Al realizar el análisis de la prueba de entrada en cada uno de los colegios, se observó que los estudiantes buscaban procedimientos aritméticos para dar solución a los problemas planteados; la gran mayoría de estudiantes no buscaba otro tipo de estrategia, por ejemplo, lo relacionado a los métodos de descomposición y recomposición. A continuación, se analiza algunas respuestas dadas por los estudiantes.

Figura 19. Resolucion del problema 1.

En el punto 1 (ver Figura 19), los estudiantes verificaron la cantidad de baldosas que están puestas en cada cocina y de esta forma justifican quién ha puesto más baldosas. Otros estudiantes lo que realizan contando la cantidad de baldosas que caben en la pared y cuántas llevan puestas, obteniendo estos datos, justifican su respuesta.

Figura 20. Resolucion del problema 4.

En el punto 4, la mayoría de los estudiantes justificaba su respuesta por medio de la observación, señalando que *“… gastan menos pintura porque hay menos espacio”*[58].

En la pregunta 6, algunos estudiantes no dieron respuesta al problema planteado; aunque entendían lo que se les pedía, no sabían cómo abordarlo. Algunas respuestas dadas por los estudiantes que trabajaron este punto fueron: “… *un centímetro por un centímetro; pues es el más pequeño*, *la baldosa de 2 cm, puede utilizar las 3 baldosas de 1 cm por 1cm porque las otras se tenían que cortar, y de uno y dos centímetros por qué entre más grande termina más rápido*”[59].

[58] Opiniones de los estudiantes.
[59] Opiniones de los estudiantes.

Es de precisar que los estudiantes anotaron estas respuestas, pero no las justificaban, también se observa que no realizaron ningún trazo en la figura dada. Además, no tuvieron presente que podían combinar las baldosas. Un solo estudiante por colegio trabajó de forma correcta la respuesta. Uno de ellos plantea la siguiente solución: *"… 4 baldosas de 1 cm, 3 baldosas de 2 cm y una baldosa de 3 cm"*[60]. También ofrecen una justificación a través de los trazos respectivos en la figura dada.

Dificultades. A continuación, se indican el porcentaje de respuestas correctas que obtuvieron los estudiantes en la presentación de la prueba- entrada.

	PREGUNTAS CORRECTAS EN %					
COLEGIOS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Colegio 1[61] 6A	94%	0%	72%	0%	50%	11%
Colegio 1[62] 6B	100%	20%	93%	7%	60%	0%
Colegio 2[63]	75%	0%	50%	0%	25%	8%
Colegio 3[64]	90%	0%	44%	3%	3%	5%

Con base a estos resultados se concluye:

	PREGUNTAS CORRECTAS EN %					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Población participante en la investigación	89%	4%	59%	2%	26%	6%

Conclusiones. Los estudiantes no han construido significado apropiado del concepto de área, lo cual se evidencia en las respuestas dadas, no consideran la descomposición y recomposición de figuras.

[60] Opinión del estudiante FP, del colegio del Bosque
[61] Colegio Antonio Nariño sede Usme
[62] Colegio Antonio Nariño sede Usme
[63] Colegio Bilingüe el Bosque
[64] Liceo Fesán

4.2.2. Actividad rompecabezas

Antes de comenzar la implementación de la investigación, los estudiantes estaban curiosos sobre el tema a trabajar, se les indicó la metodología de trabajo y se les señaló que a medida que se le diera solución a cada actividad, ellos iban a descubrir el concepto a trabajar.

Se conformaron equipos de trabajo y se les entregó tres rompecabezas por grupo, luego se les indicó que no desarmaran los rompecabezas, sin antes leer y analizar cada una de las preguntas formuladas en la guía de trabajo. Los estudiantes al ver los rompecabezas se emocionaron y señalaron *"… el concepto que vamos a trabajar es de geometría"*[65].

Descripción de algunos episodios.

El docente pasa por cada equipo de trabajo y realiza algunas preguntas respecto a la descomposición y recomposición del rompecabezas, además pide que se le explique algunas preguntas formuladas en la guía de trabajo, como se evidencia en el CD que se anexa a la tesis.

Se observa que algunos grupos de trabajo no recuerdan el nombre de ciertas figuras geométricas, como son el hexágono, trapecio y rombo; para dar respuesta a esta inquietud, se decide preguntar a nivel grupal los nombres para evitar que se identifiquen a los estudiantes que tienen dudas.

Los estudiantes siguieron explorando cada uno de los rompecabezas asignados y visualizaron con qué figuras geométricas se puede componer otra. A continuación, a nivel del grupo total se dio la solución a algunas preguntas formuladas en cada guía de trabajo.

Dificultades. La mayoría de estudiantes no recordaba los nombres de los polígonos, aunque distinguían perfectamente entre ellos. Por otra parte, no tenían claro cómo ubicar la altura de los triángulos y paralelogramos.

Logros. En el análisis de los resultados de esta actividad, se constatan los siguientes aspectos positivos.

---

[65] Opiniones de los estudiantes.

- Identifican las figuras geométricas involucradas.
- Logran descomponer los rompecabezas en otras figuras.
- Argumentan las respuestas de las preguntas correspondientes a cada guía de trabajo.
- Justifican por qué dos figuras geométricas tienen igual tamaño.
- Descubren por cuántos triángulos equiláteros está compuesto el trapecio isósceles que es una de las piezas de los rompecabezas y comparan la base de un triángulo con la base mayor del trapecio.
- Manifiestan de cuántas formas se puede descomponer un hexágono en las fichas del rompecabezas.
- Desarrollan la creatividad para formar nuevas figuras geométricas con las fichas del rompecabezas.
- Comparan la altura y la base del cuadrado y el triángulo.
- La manipulación posibilita vivencias y experiencias significativas.

Conclusiones. Los estudiantes utilizan los procesos de visualización para descubrir figuras dentro de una figura compuesta, invierten y rotan las fichas para obtener otras figuras geométricas, comparan tamaños de las diferentes figuras obtenidas.

Esta actividad de los rompecabezas propicia la manipulación geométrica, facilitando la descomposición y recomposición a través de estos objetos concretos, proceso que es básico para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Los rompecabezas geométricos ayudaron a los estudiantes a estimular y potenciar su pensamiento geométrico, pues permiten identificar las figuras geométricas y reconocer diferentes maneras de descomponer y recomponer éstas. Además, los estudiantes comienzan a realizar descripciones cortas de las formas y de algunas propiedades de las diferentes figuras. De esta manera, los estudiantes van incrementando su vocabulario geométrico conforme estén pensando geométricamente.

4.2.3. Actividad: Descomposición y recomposición

Al iniciar esta actividad se indicó que se conformarán grupos de trabajo, y se sugirió que podrían ser los mismos grupos de la actividad anterior, pero se permitió algunas reorganizaciones de los grupos.

Una vez organizados, se hizo entrega de la guía de trabajo correspondiente a esta sesión. Al comenzar a trabajar se observó que los integrantes del grupo daban su punto de vista para dar solución a los problemas planteados. Entre ellos mismos aceptaban o rechazaban la opinión de sus compañeros, explicándoles el por qué no aceptaban su respuesta. Algunos grupos expresaban sus inquietudes y consultaron al docente para aclarar sus dudas, inquietudes que se manejaban mediante el diálogo.

Al igual que en el trabajo con los rompecabezas, se pasó por cada equipo de trabajo a pedir explicaciones de cómo llegaron a la respuesta de algunos problemas planteados, de esta manera se fueron anotando sus procesos de argumentación y pensamiento para llegar a sus soluciones.

Descripción de algunos episodios.

En la pregunta 1, aunque la gran mayoría de los grupos llegó a la respuesta correcta, algunos equipos de trabajo señalaron que les era difícil escribir su método de solución, que les era más fácil explicarlo en forma verbal. A continuación, se observa algunas respuestas, las cuales son incorrectas (ver Figura 21), que fueron comunes en todos los colegios.

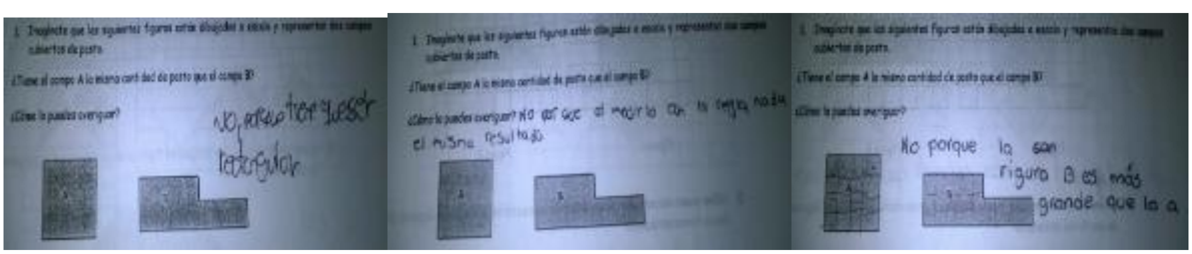


Figura 21. Respuestas de algunos equipos de trabajo.

Los estudiantes no fueron rigurosos para analizar la situación presentada, sólo se fijaron en la forma de la figura o se pusieron a medir con regla. En la Figura 22 se puede observar una solución correcta a esta pregunta.

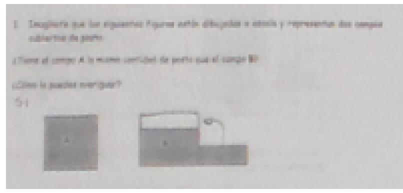


Figura 22. Respuestas de algunos equipos de trabajo.

Los estudiantes dividieron la Figura B en dos rectángulos, tomaron el rectángulo formado al lado derecho y señalaban que, si la colocaban encima del cuadrado de la Figura B, se tendría la misma cantidad de pasto de la Figura A.

Como una evidencia del trabajo realizado, se presentan algunas respuestas dadas por los equipos de trabajo en los diferentes colegios participantes de la investigación. Los estudiantes plantean: "… *lo podemos averiguar poniendo el A en B y ocupan el mismo espacio; … sí, colocamos la parte dividida de la figura B arriba queda igual a la A; … sí, lo averiguamos descomponiendo la figura B y así vimos que era la misma figura A; …sí, tiene la misma cantidad de pasto que la A, pues si le cortamos la parte sobrante de la figura B y la ubicamos encima, da igual; …sí, porque la figura B está separado por un rectángulo al lado; …sí reconstruyéndola",* entre otros[66].

En la pregunta 2, se les presenta dos parques, se les pregunta si el parque A, tiene la misma cantidad de pasto que el parque B. Las respuestas por parte de los estudiantes a nivel general, fue que no, porque al descomponer la Figura B, no se obtiene la Figura A.

En la pregunta 3, los estudiantes comienzan con el proceso de descomposición de las figuras dadas, para argumentar si tienen igual área o diferente; estos procesos los siguen realizando para toda la guía de trabajo.

Dificultades. Los estudiantes utilizaban un lenguaje inadecuado para dar explicaciones a sus respuestas. En el desarrollo de esta actividad los estudiantes querían dar solución a los problemas con la utilización

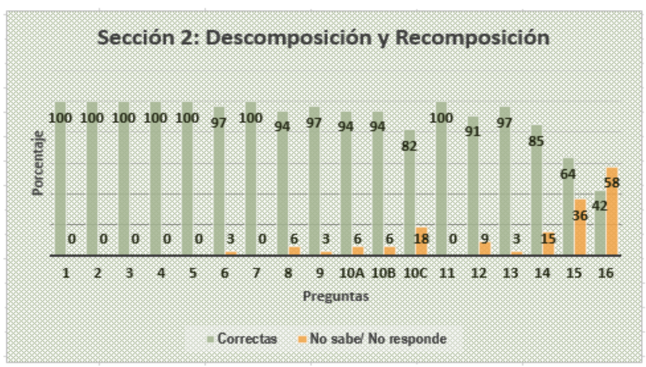
[66] Respuestas de algunos equipos de trabajo pertenecientes a los colegios de la investigación.

de la regla para realizar las respectivas medidas a las figuras, pero se les indicó que guardaran las reglas y solo usaran lápiz y borrador. De esta manera los estudiantes comienzan a construir el significado de área por medio de la descomposición y recomposición.

Logros. A partir del punto tres, todos los grupos de trabajo comenzaron a realizar las descomposiciones y recomposiciones necesarias para dar solución a los problemas. Los estudiantes terminaron antes de tiempo con el desarrollo de la actividad.

Conclusiones. Como se indica en la Gráfica 1, un gran porcentaje de los estudiantes empezaron a construir el significado de área por medio de la descomposición y recomposición. Algunos estudiantes realizaban estas descomposiciones mentalmente, luego en forma verbal se las explicaban a sus compañeros. Algunos miembros del grupo no les entendían, por lo que el estudiante comenzaba a realizar los trazos en la figura para hacerse entender.

Los estudiantes comienzan a operar con los objetos realizándoles la descomposición y recomposición necesarias por medio de trazos sobre la figura.



Gráfica 1. Actividad Sección 2: Descomposición y Recomposición

4.2.4. Actividad: Comparación

Los estudiantes se organizan en grupos de trabajo y esperan que se comience la introducción del tema que se va a trabajar en esa sesión. Al igual que en la actividad anterior, se observa la curiosidad y entusiasmo por saber qué actividad se va a trabajar.

Descripción de algunos episodios.

En la pregunta 1, se observa que la mayoría de equipos de trabajo realizan trazos apropiados para cubrir la figura, algunos equipos trazan una línea que no pertenece a la figura conllevándolos a obtener una unidad de más. En la Figura 23, se puede observar este tipo de respuesta.

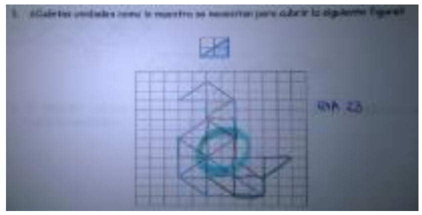


Figura 23. Respuesta incorrecta por parte de algunos equipos de trabajo.

En la Figura 24 se observa, algunas soluciones correctas dadas por la mayoría de equipos de trabajo.

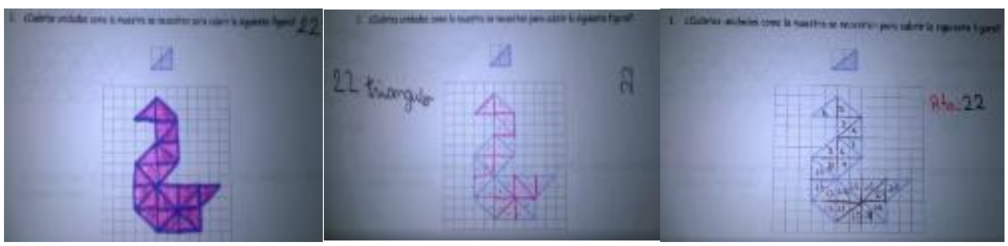


Figura 24. Respuesta correctas de algunos equipos de trabajo.

Los estudiantes no tuvieron inconvenientes para dar solución a los problemas 2, 3 y 4 (ver Anexo 4).

En la pregunta 6, los estudiantes encuentran varias estrategias de soluciòn. Algunas respuestas destacadas por parte de algunos equipos de trabajo son:

- Contaron la cantidad de cuadros que contiene cada una de las partes del terreno.
- Para el terreno ACDE trazaron una diagonal de AD, observaron que obtenían un triángulo rectángulo ACD igual al triángulo ABC que corresponde a la otra parte del terreno, concluyen que el terreno ACDE tiene más área porque este terreno contiene un triángulo rectángulo más otra figura adicional.
- Compararon las regiones externas de cada figura, y determinaron que la figura ACDE tiene mayor área, porque la región externa a esta figura es menor que la región externa de la figura ABC.

En la pregunta 10, los estudiantes formulan preguntas y dan su respectiva respuesta, se evidencia que comienzan a involucrar el término de "área". Algunas preguntas realizas por ellos son:

"… *¿cuàntos cuadrados tiene la figura 1?;… ¿con la figura 1, se puede formar la figura 2?;… ¿ las dos figuras tienen la misma área?;… ¿se puede hacer otra figura, con la misma área de la figura 1?;… ¿las dos figuras qué tienen en común?;…¿cuántos cuadrados se necesitan para formar la figura 1?;…¿cuál de las dos figuras es más grande?;… ¿en la figura 1 y 2 cuántos triángulos hay?;… ¿cuántos rectángulos se necesitan para hacer la figura1?;…¿por cuántos cuadrados está conformada la figura 1?;…¿al mover los cuadrados de la figura 2, puede ser la figura 1?* , entre otros"[67].

En el punto 12, los estudiantes cuentan la cantidad de cuadros que conforman la figura sombreada; se evidencia como los estudiantes comienzan a unir partes de la región sombreada para formar cuadrados.

En el pregunta 13, los estudiantes observan las figuras y concluyen que tienen la misma área ya que poseen la misma cantidad de cuadrados.

Dificultades. Los estudiantes no presentaron dificultad para el desarrollo de esta actividad.

Logros. Los estudiantes construyeron el concepto de medir área mediante el recubrimiento total de la figura utilizando una unidad de referencia.

Conclusiones. Los estudiantes para encontrar la unidad de referencia, toman las partes sombreadas de una figura y realizan las respectivas recomposiciones para obtener figuras geométricas conocidas.

En el Gráfico 2, se presenta los resultados obtenidos tras la aplicación de la actividad 2.

[67] Respuestas de algunos equipos de trabajo pertenecientes a los colegios de la investigación.

Gráfica 2. Actividad 2: Comparación

4.2.5 Actividad: Razón entre áreas

Antes de comenzar esta actividad y teniendo en cuenta las observaciones escritas en el capítulo anterior, se realizó una inducción con respecto a este tema para que los estudiantes no tuvieran inconvenientes para el desarrollo de esta sesión.

Al terminar la explicación se les indicó que se organizaran en grupos para hacerles entrega de la respectiva guía; cada equipo de trabajo comenzó a interactuar para dar respuesta a cada problema, realizando la respectiva descomposición de la figura para encontrar la razón buscada.

Descripción de algunos episodios.

En las preguntas 1 y 2, los estudiantes realizaron descomposiciones apropiadas para encontrar la fracción de cada figura correspondiente a la región sombreada. Se les preguntó si se podría simplificar la fracción encontrada, el grupo en general respondió que sí, y se les pidió que lo realizaran para cada fracción encontrada para los siguientes problemas de la guía.

En las preguntas 3 y 4, los equipos de trabajo dividieron la figura en partes iguales para encontrar la fracción de área que representa la zona sombreada. En la Figura 25, se observa la solución a nivel general.

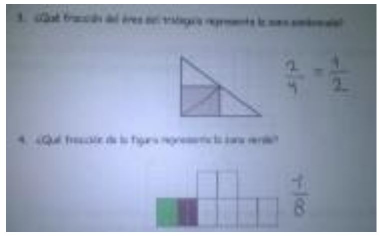


Figura 25. Respuesta correcta de algunos equipos de trabajo.

En uno de los colegios, hubo un equipo de trabajo que para el punto 3, no buscó la fracción de área, sino planteó comparar el área de la región sombreada y la región que no está sombreada, dando la siguiente conclusión (ver Figura 26).

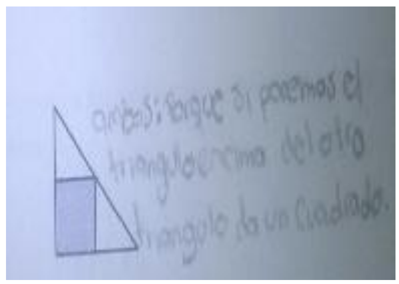


Figura 26. Respuesta dada por un equipo de trabajo en uno de los colegios.

En la pregunta 7, se observó que los estudiantes comienzan a ubicar en el denominador el total de triángulos que contiene la figura, y para encontrar el numerador comienzan a buscar un número que al simplificarlo con el denominador les dé ¾.

Para las preguntas 8, 9 y 10, los estudiantes observan cada una de las figuras y comienzan a realizar la recomposición de las partes sombreadas para obtener una figura geométrica y tomarla como patrón, para de esta manera, obtener la fracción del área de la figura correspondiente al área sombreada.

A continuación, se presentan algunas estrategias de solución que plantearon los estudiantes en los diferentes colegios, para el problema 9. Ver Figura 27.

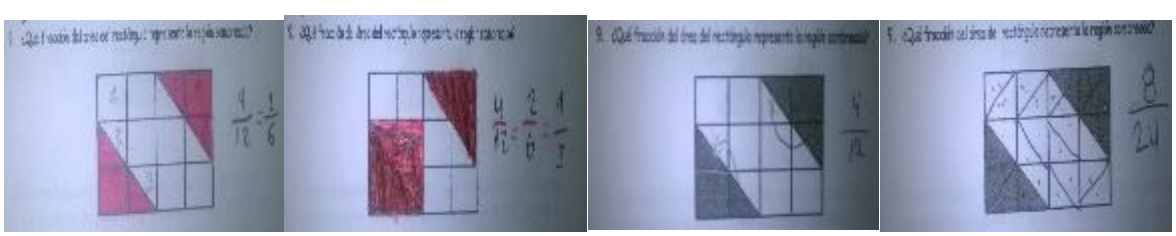


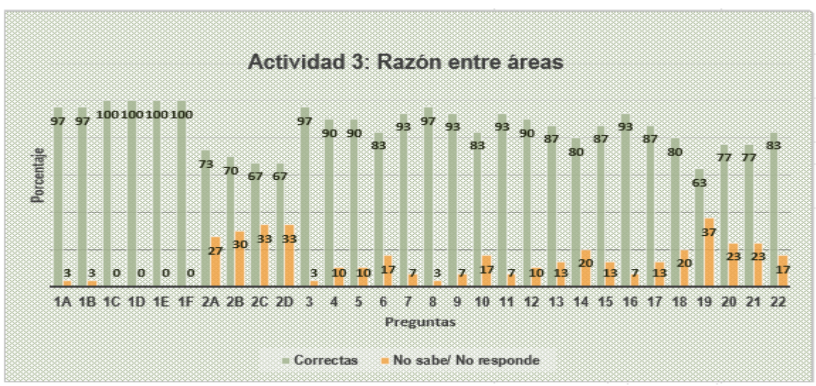
Figura 27. Diferentes estrategias de solución.

Con base en estas respuestas, los estudiantes siguieron proponiendo diferentes descomposiciones y recomposiciones para encontrar la fracción del área en el resto de los problemas de la actividad.

Dificultades. Se evidenció que algunos de los estudiantes no distinguen las partes de una fracción, lo que los conllevaba a confundir los términos de los valores que iban en el denominador y numerador.

Logros. Los estudiantes encontraron diferentes formas de dividir las figuras geométricas para hallar la fracción de la figura total correspondiente a la región sombreada.

Conclusiones. Los estudiantes para encontrar la fracción representada por la región sombreada de ciertas figuras planteadas, observan y emprenden diferentes acciones, como el trazar líneas y descomponer la figura. De esta manera, actúan sobre sus soluciones para dar sus argumentos sobre cómo determinar la fracción correspondiente a las regiones sombreadas que se presentaron en los diferentes problemas. En el Gráfico 3, se indica el porcentaje de respuestas correctas en cada una de las preguntas realizadas en esta actividad.



Gráfica 3. Actividad 3: Razón entre áreas

4.2.6 Actividad: Explorando las figuras geométricas

Esta actividad estuvo dividida en cuatro sesiones cuyo objetivo fue que los estudiantes comenzaran a establecer cómo una figura geométrica se podía descomponer y recomponer en otra ya conocida, para determinar su área por medio de procedimientos aritméticos. Asimismo que cuando se les planteara encontrar el área de cierta figura, pudieran descomponer y recomponerla en una ya conocida y utilizar los procedimientos aritméticos encontrados.

Descripción de algunos episodios.

En la primera sesión, se trabajó la actividad denominada “explorando el cuadrado y el rectángulo”.

En la pregunta 3, los estudiantes debieron completar la tabla identificando las unidades de longitud de la base y las unidades de longitud de la altura de cada uno de los rectángulos. Para encontrar el área de los rectángulos en unidades cuadradas, lo que hicieron algunos grupos fue contar por cuántos cuadrados estaban compuesto cada uno de los rectángulos, mientras que otros equipos de trabajo señalaban que para obtener este resultado multiplicaban el número de las unidades en la base y altura y de esta manera acortaban el trabajo de contar cuadro por cuadro. (Nótese que, aunque en esencia multiplican base por altura, su objetivo es más geométrico que aritmético, fijándose en la composición de la figura.)

En la pregunta 4, se pide a los estudiantes que construyan cuadrados de área 4, 9 y 16 unidades cuadradas, el grupo en general construyó cuadrados 2x2, 3x3 y 4x4. (Se encontró un equipo de trabajo que construyó “un cuadrado” de área 16 con dimensiones de 8x2.) Luego los estudiantes completaron una tabla donde se les solicitaba que para cada cuadrado construido anotaran la longitud de la base y encontraran su área. Cuando los grupos tenían estos datos, se les preguntó, ¿qué relación existe entre el área del cuadrado y la longitud de sus lados? Las respuestas dadas por algunos de los equipos de trabajo en los diferentes colegios muestran claramente dificultades para expresar la relación aritmética observada, a pesar de haber determinado correctamente el valor del área a partir del significado de este concepto que han venido construyendo:

“…*la longitud del lado es la mitad del área del cuadrado;…si elevamos raíz cuadrada a la respuesta*[68]*, se encuentra la longitud del lado de cada cuadrado;…si se multiplican 2 veces las longitudes da su área;…*

[68] El equipo de trabajo se refiere al área para cada cuadrado construido.

la longitud del lado son divisores de las áreas de los cuadrados;… son los mismos cuadrados y son la mitad;… el área del cuadrado es el doble de uno de sus lados;… 4 es el doble de 2, 9 es el doble de 3, 16 es el doble de 4;… el área es el doble del lado; … que los múltiplos son la mitad del resultado; … el área es la longitud elevado al cuadrado; … 4 es múltiplo de 2, 9 es múltiplo de 3, 16 es múltiplo de 4"[69].

Sin embargo, en general los estudiantes comienzan a afianzar los procedimientos aritméticos para encontrar el área de un cuadrado y un rectángulo en términos de sus lados; esto se evidencia al dar solución a los problemas propuestos a partir del punto 5.

En la pregunta 6, los estudiantes calcularon el área de cada rectángulo y luego los ordenaron de mayor a menor área. Para el problema 7, los estudiantes comenzaron a determinar la longitud BC al azar buscando dos números que al multiplicarlos les diera 441cms^2. Observemos en la Figura 28, una de las soluciones de un equipo de trabajo.

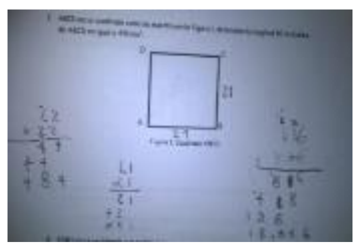


Figura 28. Respuestas de uno de los equipos de trabajo.

Los puntos de esta actividad son suficientemente similares a sus experiencias anteriores que algunos estudiantes hacen referencia a éstas. Un equipo de trabajo en uno de los colegios propone otra estrategia de solución. Ellos señalaron que para encontrar el área de un cuadrado se hace la multiplicación de las longitudes de sus lados. Afirman que área es igual a lado por lado, por lo tanto, el área es igual a lado al cuadrado y recuerdan que su profesora titular en clases anteriores les había indicado que la operación inversa a la potenciación es la radicación. Luego utilizan este procedimiento aritmético y de esta forma encuentran la longitud de los lados del cuadrado.

[69] Respuestas de algunos equipos de trabajo pertenecientes a los colegios de la investigación

A continuación, se evidencia la solución de este equipo de trabajo (ver Figura 29).

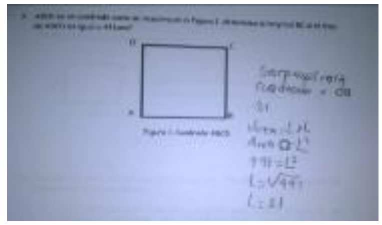


Figura 29. Estrategia de solución de un equipo de trabajo.

En la pregunta 8, para dar solución al problema, el grupo en general tomó el área total del rectángulo y lo dividió por el la longitud del lado PQ, para determinar la longitud del lado PS del rectángulo. Señalaron que el problema estaba fácil de resolver.

En la pregunta 11, a muchos de los equipos de trabajo que participaron en la investigación se les dificultó encontrar la respuesta correcta. Se decidió que los equipos de trabajo que tenian la solución correcta la explicaran en el tablero para que sus compañeros aclararan sus inquietudes, como se evidencia en el CD que se anexa a la tesis.

A continuación, se evidencia algunas estrategias de solución por parte de los equipos de trabajo de los colegios participantes en la investigación. Ver Figura 30.

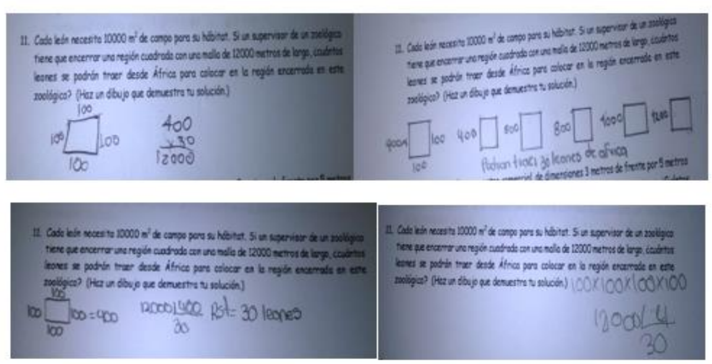


Figura 30. Estrategias de solución de algunos equipos de trabajo.

A continuación, se muestra el porcentaje de respuestas correctas obtenidas en el desarrollo de la actividad.

Gráfica 4. Actividad 4: Explorando el Cuadrado y el Rectángulo

En la segunda sesión, se trabajó la actividad denominada "explorando el rectángulo y paralelogramo".

En la pregunta 1, se presentan un rectángulo y un paralelogramo en una cuadrícula. Luego que los estudiantes observan las dos figuras geométricas, se les pregunta sobre las longitudes de la altura y la base de las respectivas figuras. Las respuestas más comunes que los estudiantes ofrecen con respecto a si tienen igual o diferente altura, son las siguientes:

"… tienen la misma altura; …igual altura 3 cuadrados; … la altura del rectángulo y paralelogramo son exactamente igual; …el rectángulo y paralelogramo por su forma son iguales[70]*; … la altura del rectángulo y el paralelogramo son exactamente iguales".*

Con respecto a si tiene igual o diferente longitud de base, se transcriben a continuación algunas de las respuestas dadas.

"… igual porque si cortas la esquina te va a quedar un rectángulo; …tienen la misma base porque al contar los cuadrados da lo mismo; …tienen la misma porque si juntamos la que está incompleto queda igual al rectángulo; …la misma porque al quitar una parte del paralelogramo, lo mueve y da igual al rectángulo; …las dos figuras tienen igual base; …son iguales por lo tanto sus áreas son iguales", entre otros.

[70] El equipo afirma que son iguales al convertir el paralelogramo en un rectángulo

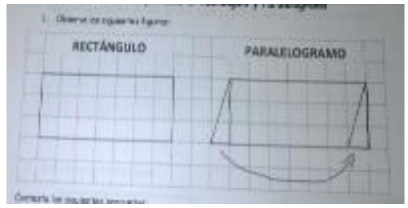


Figura 31. Estrategias de solución de algunos equipos de trabajo.

Los estudiantes, a medida que van dando solución a esta actividad comienzan transformando el paralelogramo en un rectángulo de igual área, de esta forma, cuando se les pregunta, ¿qué procedimiento aritmético podríamos utilizar para calcular el área del paralelogramo y el rectángulo?, los estudiantes llegan a la siguiente conclusión:

"… multiplicar sus lados; … multiplicar la base y la altura" [71] .

Aunque los estudiantes encuentran el procedimiento aritmético para encontrar el àrea del paralelogramo y el rectángulo, algunos equipos de trabajo señalan que para calcular el área de estás figuras, lo que cambia es el nombre de sus lados[72], es decir, lo que para el paralelogramo puede ser base por altura, para el rectángulo es lado por lado o largo por ancho. Esta proliferación de nombres no afecta el significado claro que han construido para el concepto de área de las dos figuras.

En la Gráfica 5, se muestran los resultados obtenidos tras la aplicación de la actividad.

Gráfica 5. Actividad 4 – Sección 2: Explorando el Rectángulo y Paralelogramo

Para la tercera sesión, se trabajó la actividad denominada "explorando el triángulo".

[71] Respuestas de los equipos de trabajo pertenecientes a los colegios de la investigación.
[72] Los estudiantes se refieren a las longitudes.

En la pregunta 1, los estudiantes observaron las dos figuras geométricas frente a las cuales se pretende que comenzaran a buscar procedimientos aritméticos para encontrar el área del triángulo.

Al dar respuesta a las preguntas planteadas, para la pregunta "a" (ver Anexo 6), afirman que cuando se traza una diagonal en el paralelogramo, esta figura queda dividida en dos triángulos.

Para el ítem "b" (ver Anexo 6), se les indica que el área del paralelogramo es de 50 cuadrados (unidades cuadradas de referencia). Luego se pregunta, ¿cómo se puede averiguar la cantidad de cuadrados en uno de los triángulos que compone el paralelogramo? Obteniendo como respuesta *"… 25 porque es la mitad de 50; … 25 se divide 50 en 2; … hay 25 cuadrados en cada triángulo; … 25 cuadrados; … parto a la mitad la primera figura; … contando los cuadrados; … 25 porque está dividido en 2…"*[73].

Con análisis como éste llegaron a plantear cada una de las fórmulas aritmético-algebraicas que permitirían hallar el área de las figuras. El porcentaje de respuestas correctas está consignado en la Gráfica 6 que se muestran a continuación.

Gráfica 6. Actividad 4 – Sección 3: Explorando el Triángulo

Para la cuarta sesión, se trabajó la actividad denominada "explorando el trapecio y el hexágono", en la cual se pretendía que los estudiantes utilizaran procedimientos como los vistos hasta el momento que incluyen actividades de descomposición, recomposición y comparación referidas a las fórmulas halladas para figuras ya analizadas.

[73] Respuestas de los equipos de trabajo pertenecientes a los colegios de la investigación.

Se observó que los estudiantes habían adquirido agilidad en la solución de problemas ya que descomponían figuras, respetando sus propiedades y así determinaban el valor del área solicitada. Esto se puede observar en las soluciones que se presentan a continuación.

En la pregunta 1, para encontrar el área del trapecio construyen un paralelogramo.

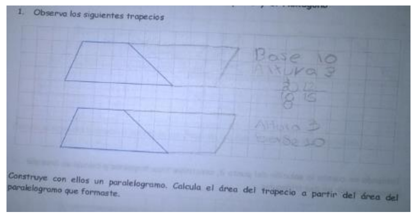


Figura 32. Estrategias de solución de los equipos de trabajo participantes de la investigación.

En la pregunta 2, se les pide que calculen el área del trapecio por descomposición en un cuadrado y un triángulo.

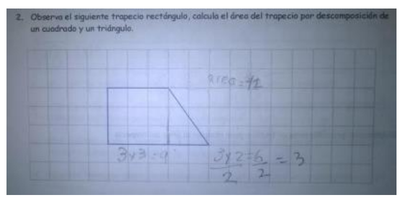


Figura 33. Estrategias de solución de los equipos de trabajo participantes de la investigación.

En la pregunta 3, los estudiantes construyen un trapecio no rectángulo y calculan su área por descomposición de dos triángulos.

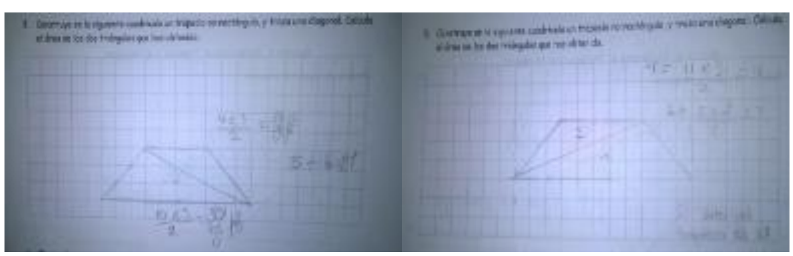


Figura 34. Estrategias de solución de los equipos de trabajo participantes de la investigación.

En la pregunta 5, encuentran el área del trapecio por descomposición en dos rectángulos.

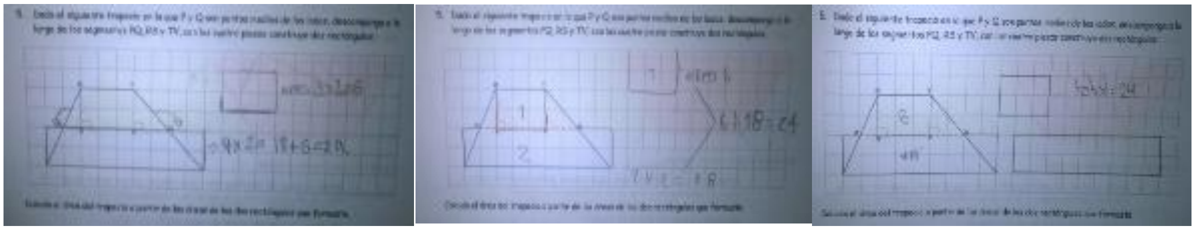


Figura 35. Estrategias de solución de los equipos de trabajo participantes de la investigación.

En la pregunta 9, transforman el trapecio en un rectángulo y calculan el área del rectángulo.

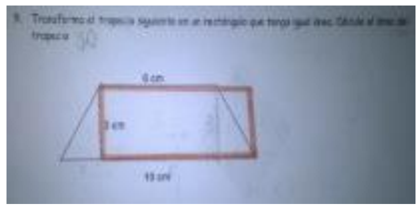


Figura 36. Estrategias de solución de un equipos de trabajo.

En la pregunta 11, para encontrar el área del rombo, buscan el área de uno de los triángulos que conforman la figura geométrica y luego este valor lo multiplican por dos.

En la pregunta 12, encuentran el área de la Figura 2 y señalan que es la misma área para la Figura 3.

A continuación, se muestra el porcentaje de los resultados obtenidos tras la aplicación de la actividad.

Gráfica 7. Actividad 4 – Sección 4: Explorando el Trapecio y el Hexágono

Dificultades. Se evidenciaron las siguientes dificultades:

- No poder construir un rectángulo cuya área sea el doble del área del paralelogramo dado.
- Identificar la altura de un triángulo.
- Dado un triángulo dibujar un paralelogramo cuya área sea el doble.
- Reconocer un trapecio no rectángulo.

Logros. En el análisis de los resultados de esta actividad, se constatan los siguientes aspectos positivos que lograron los estudiantes.

- Establecen la relación de figuras geométricas por medio de la descomposición y recomposición para construir nuevas figuras geométricas.
- Al obtener una nueva figura geométrica la comparan con una ya conocida para encontrar procedimientos aritméticos y hallar su área.

Conclusiones. Los estudiantes construyeron significado robusto del concepto de área a partir de acciones de descomposición, recomposición y comparación.

4.2.7. Actividad: El círculo

Teniendo en cuenta el objetivo y la metodología descrita en el Capítulo 4, los estudiantes desarrollaron la actividad donde encontraron las relaciones planteadas.

En el cuadrado, la razón del perímetro a la longitud del lado es 4, para el triángulo equilátero 3, para el hexágono regular 6 y para el círculo aproximadamente 3.1; se les indicó que este último número encontrado se llama π. Los estudiantes mostraron su asombro de cómo hallaron este valor, pues señalaban que ellos habían escuchado este número, pero no sabían de donde se originaba.

Luego con estos valores por inspección, es decir, determinada la razón y dada la longitud del lado correspondiente a cada figura, dedujeron que al multiplicar estos dos valores hallaban el perímetro, el mismo valor que ellos habían encontrado con la regla. Para el círculo al tomar 3.1 y al multiplicarlo por su diámetro encontraban una aproximación de la longitud de la circunferencia.

En la Figura 37, se observa algunas actividades realizadas por los estudiantes.

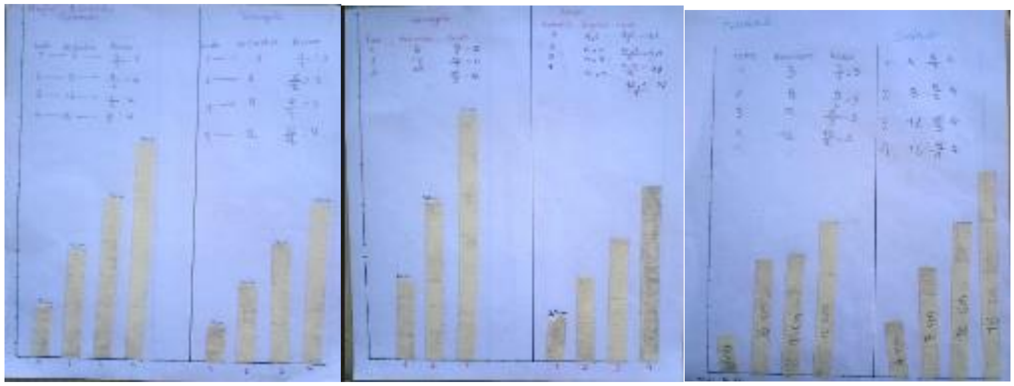


Figura 37. Soluciones de los equipos de trabajo.

Al terminar esta actividad, se introduce los nombres de algunas partes de la circunferencia, luego se les pregunta cuáles fueron los procedimientos que encontraron para hallar el área del cuadrado. Al escuchar sus respuestas, se explica que para la circunferencia por no tener lados se tiene en cuenta el cuadrado de su radio. Por inducción encontraron el área del círculo.

Se les presentó una serie de problemas para que realizaran descomposiciones y recomposiciones y encontraran el área de las regiones sombreadas, correspondientes a las circunferencias.

Dificultades. No se presentó ninguna dificultad para el desarrollo de esta actividad.

Logros. Se constatan los siguientes aspectos positivos:

- Los estudiantes se sintieron motivados para desarrollar la actividad, pues el trabajo era diferente a las actividades anteriormente desarrolladas.
- Encontraron con facilidad la razón entre el área y la longitud del lado correspondiente a cada figura geométrica regular, así como entre el perímetro y esa longitud.
- Justificaban la relación entre la medida correspondiente a cada figura geométrica y la razón hallada.
- Argumentaban cómo encontrar la longitud aproximada de la circunferencia haciendo uso de los datos obtenidos.
- Por inducción propusieron cómo encontrar el área del círculo.
- Realizaban descomposiciones y recomposiciones para encontrar el área de algunas regiones y subdivisiones de un círculo.

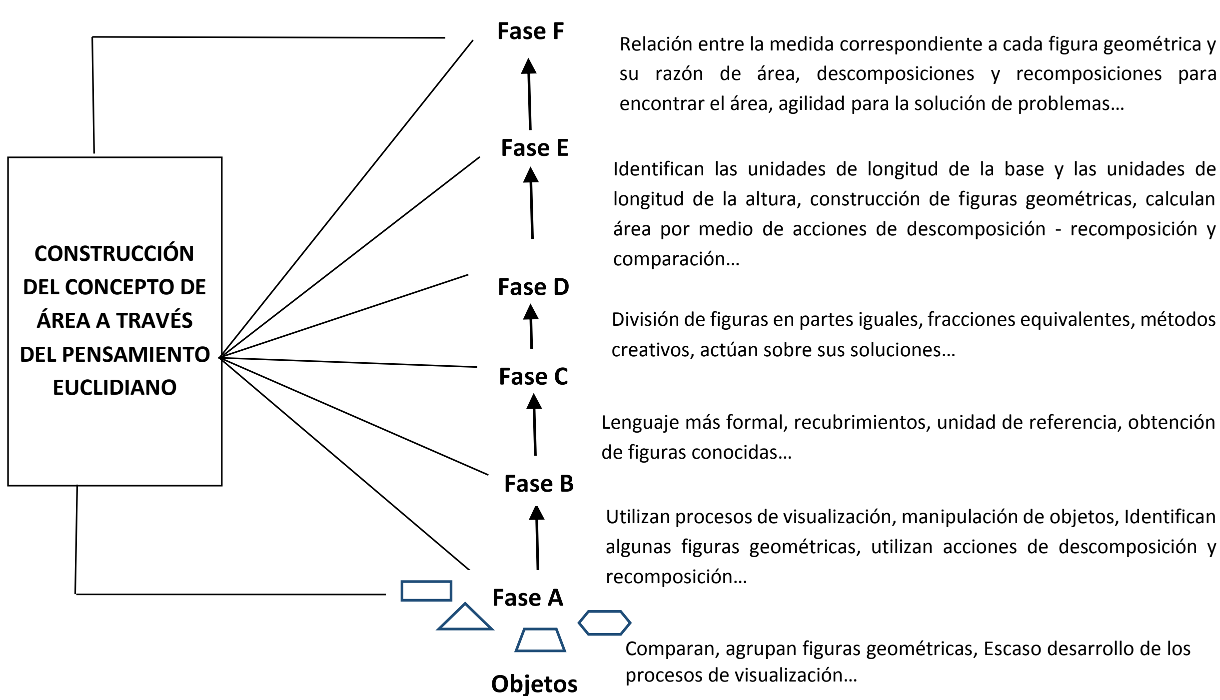
Conclusiones. Los estudiantes determinaron el área del círculo a partir de acciones sobre los objetos, explorando y analizando las situaciones presentadas concernientes a cada figura geométrica. Además, dieron soluciones a problemas a través de descomposiciones y recomposiciones.

Conclusiones Sección 4.2.

A continuación, se realiza una caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes mientras desarrollaban cada una de las actividades en la etapa práctica de esta investigación, además se indica que el trabajo autónomo de los estudiantes resulta un factor motivacional muy fuerte.

Caracterización de las acciones y estrategias usadas por los estudiantes

La caracterización progresiva se refleja en el Gráfico 7, en la que se muestra cómo los estudiantes avanzan en sus procesos para la construcción de significado robusto del concepto de área, iniciando en una fase que se ha denominado Fase A hasta llegar a una fase culminante de la construcción que se ha nombrado Fase F.



Gráfica 7. Avances de los estudiantes en cada Fase

Se diseñaron cinco actividades que contribuyeron a caracterizar el pensamiento en cada fase y se identificaron las características del pensamiento que evidencian los estudiantes en cada una de éstas.

En la Fase A, se inicia con una prueba de entrada donde el desempeño estudiantil se caracteriza en general por los siguientes aspectos.

- Falta de claridad en los procesos a realizar para dar solución a los problemas que involucran medición.
- Comparación de figuras geométricas midiendo a través de una regla.
- Agrupación de figuras geométricas y comparación visual para observar si son congruentes.
- Falta de dominio de un lenguaje geométrico.
- Dificultad en la comprensión lectora.
- Escaso desarrollo de los procesos de visualización.
- Dificultad en la identificación de algunas figuras geométricas, como por ejemplo hexágono y trapecio.
- No utilización de una unidad de referencia a emplear para realizar recubrimientos.

Con base en el análisis de procesos históricos y la generación de propuestas propias en una tesis de maestría anterior, así como en estas características, se propuso desarrollar procesos de pensamiento en los estudiantes por medio de experiencias retadoras y enriquecedoras. De esta manera, los estudiantes comenzaron a desarrollar una serie de acciones sobre las figuras geométricas, y así llevar a cabo la medición de área. Con base en estas acciones los estudiantes comienzan a construir significado del concepto de área. En este proceso se toma como marco la teoría euclidiana, que tiene como característica el uso de herramientas de proporción, descomposición y comparación de figuras geométricas.

Para la Fase B, se propuso una actividad de descomposición y recomposición de figuras geométricas, en la cual se observó que los estudiantes aumentaron sus capacidades en los siguientes aspectos:

- Identifican algunas figuras geométricas como los cuadrados, rectángulos y triángulos.
- Comienzan a realizar descripciones cortas de algunas figuras geométricas.
- Utilizan procesos de visualización.
- Manifiestan de cuántas formas se puede descomponer una figura geométrica.
- Justifican por qué dos figuras geométricas tienen igual tamaño.
- Realizan descripciones cortas de algunas propiedades de las figuras geométricas.
- Ejecutan descomposiciones de las figuras geométricas mentalmente.

Esta caracterización se logra por medio de la manipulación de objetos geométricos, que es una primera etapa que desarrolla la teoría euclidiana en la cual se realizan demostraciones de los teoremas acerca del área de figuras geométricas a través del reacomodo de las "piezas" geométricas y sustentada en sus propiedades. Estas características fueron evidenciadas en la actividad uno, sección uno y dos.

Durante la Fase C, se desarrolló una actividad de comparación de figuras geométricas en la cual los estudiantes comenzaron a medir variadas figuras geométricas mediante recubrimientos. Los avances significativos que se lograron identificar fueron los siguientes:

- Utilizan una unidad de referencia.
- Realizan las respectivas recomposiciones para obtener figuras geométricas conocidas teniendo en cuenta sus propiedades.
- Utilizan un lenguaje más formal para sustentar sus respuestas.
- Continúan utilizando procesos de visualización de una forma más rigurosa.

Los estudiantes utilizaron algunas estrategias manifestadas por Byrne (1847) en su libro *Los primeros seis libros de Euclides*, en el cual las demostraciones se construyen a través de diferentes métodos, como la descomposición, recomposición y comparación, además de los procesos de visualización. Esto se evidenció cuando los estudiantes realizaron las respectivas recomposiciones, para obtener figuras geométricas conocidas y de esta manera, ubicar una unidad de referencia y comenzar a realizar el recubrimiento total de la figura, según los resultados arrojados en la Actividad 2.

Cabe resaltar que los estudiantes al encontrar la unidad de referencia hacían uso de las propiedades de las figuras geométricas, como lados opuestos de un paralelogramo son iguales, las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en partes iguales, lados opuestos de un paralelogramo son paralelos, las diagonales de un rectángulo son iguales, el cuadrado es a su vez paralelogramo, rectángulo y rombo, entre otras. De esta forma identificaron cuadrados, rectángulos y paralelogramos, concluyendo cuántas de estas unidades recubrían la figura en cuestión.

En la Fase D, se propuso determinar la razón entre áreas de figuras geométricas. En ella los estudiantes comenzaron a utilizar herramientas de proporción, descomposición y comparación de figuras geométricas. El trabajo realizado por los estudiantes en esta Fase se caracteriza por:

- Subdividen las figuras en partes iguales.
- Comparan las partes constituidas respecto a cada división realizada.
- Señalan por qué el polígono quedó dividido en partes iguales.
- Encuentran fracciones equivalentes.
- Observan y comparan si las partes divididas de una figura geométrica tienen igual área.
- Utilizan diferentes acciones para dividir una figura geométrica en partes iguales.
- Actúan sobre sus soluciones para comenzar a dar justificaciones.

Los estudiantes utilizaron muchas de las herramientas principales que utilizó Euclides para resolver problemas de áreas, llegaron a manejar el término de igualdad a través de acciones de descomposición, recomposición y comparación, aspectos que se evidenciaron en la Actividad 3.

Para la Fase E, se propusieron varias actividades para que los estudiantes dedujeran fórmulas para calcular el área de figuras geométricas específicas evidenciando que los estudiantes poseían la habilidad de desarrollar procedimientos aritméticos para encontrar el área de las principales figuras geométricas planas. En ella se encuentran los siguientes avances en su pensamiento.

- Identifican las unidades de longitud de la base y la altura de rectángulos y triángulos.
- Construyen diferentes figuras geométricas, donde tienen en cuenta los datos indicados y encuentran la relación de proporcionalidad que puede existir entre una figura y otra.
- Argumentan por qué se usa un tratamiento similar que involucra las longitudes de la base y altura en un rectángulo y en un paralelogramo.
- Calculan el área de figuras geométricas por medio de descomposiciones y recomposiciones obteniendo una figura geométrica conocida para el cual ya se conoce una fórmula de área.
- Adquieren habilidades para la solución de problemas.

Las características logradas en esta fase se pudieron constatar a través de los resultados de la Actividad 5, sesiones uno, dos, tres y cuatro.

Por último, durante la Fase F se estudiaron las fórmulas para la longitud y el área del círculo, actividades en las cuales se confirma que los estudiantes utilizaron estrategias plenamente consolidadas para hallar el área por medio de descomposiciones y recomposiciones. Con base en lo anterior se logró identificar los siguientes progresos en el desarrollo de su pensamiento.

- Encuentran con facilidad la razón entre lado y perímetro y entre lado y área correspondiente a cada figura geométrica regular.
- Justifican dichas razones.
- Argumentan cómo encontrar la longitud aproximada para la circunferencia haciendo uso de los datos obtenidos.

- Realizan descomposiciones y recomposiciones para encontrar el área de diferentes regiones relacionadas con el círculo.

Se demostró que a medida en que el estudiante va utilizando las propiedades de los objetos para llevar a cabo la descomposición, recomposición y comparación, interioriza y obtiene un mejor entendimiento[74] de las propiedades de las figuras geométricas y sus implicaciones.

Factor motivacional

Actualmente los estudiantes esperan que los profesores formulen las preguntas para luego ser contestadas en un proceso de mecanización. Se ha evidenciado en múltiples estudios que el estudiante en el transcurso de su vida estudiantil va perdiendo el interés por aprender autónomamente, dado que no se valoran sus acciones, ideas y aportes. Esto es, a todas luces, el primer paso para el fracaso escolar. Sin motivación para aprender es difícil obtener buenos resultados.

En el desarrollo de esta investigación se evidenció que los estudiantes responden positivamente a cada uno de los problemas planteados, pues se sienten motivados por cada una de las situaciones presentadas, se sienten retados para buscar estrategias de solución, adquiriendo un conjunto de conceptos e ideas que van a ser interiorizados con base en experiencias propias convirtiéndose en un aprendizaje más significativo.

Los estudiantes desarrollan cada una de las actividades de una forma intrínseca (parte del mismo sujeto y el disfrute por lo que está haciendo), y esto se evidencia en el momento que se socializan algunas preguntas de las actividades, donde la mayoría de estudiantes indicaban que querían participar.

En uno de los colegios se encontró a un estudiante que dijo no tener afinidad con sus compañeros para trabajar en grupo y manifestó que no era bueno para las matemáticas. En el transcurso de la investigación se notó su avance; se convirtió en un individuo más activo y creativo para dar solución a los problemas y

[74] Construcción de conexiones robustas entre los nuevos conocimientos y aquellos que se conocen de forma previa, donde son capaces de elaborar sus propios procedimientos o herramientas para resolver problemas.

fue uno de los estudiantes que más participo cuándo se socializaban las actividades. Además, este grupo de estudiantes revelaron que les gustaba la idea que los profesores de matemáticas diseñaran actividades con esta estructura porque se aprendían de una manera divertida, y, por otra parte, afirmaron que el trabajar en grupo les facilitaba aclarar sus dudas, pues en el colegio no es común trabajar en grupo.

También en el colegio oficial que tomó parte en el presente estudio los estudiantes trabajaron con entusiasmo cada una de las actividades. En cada encuentro esperaban en la puerta del colegio la llegada del docente investigador o lo buscaban para que se empezara a trabajar. Además, fue uno de los colegios donde los estudiantes entendían muy rápido el objetivo de las actividades y terminaban de desarrollarlas antes de tiempo.

En este colegio se encontraron dos casos en particular que vale la pena relatar. El primero trata de tres estudiantes que tenían problemas en convivencia, ausencias y retardos. Estos estudiantes en la primera sesión llegaron tarde, pero en el transcurso de cada una de las sesiones observaron cómo era la metodología de las actividades y comenzaron a trabajar activamente, señalando que les gustaban las matemáticas. A partir de este momento se convirtieron en estudiantes más activos y compañeristas, hasta el punto que en ocasiones cuando algún grupo quería solucionar alguna inquietud, los tres colaboraban para aclarar sus dudas. Estos tres estudiantes dijeron que ellos se sintieron como si fueran monitores, y hasta colaboraban con la entrega y recibimiento de las guías en cada sesión.

Otro de los estudiantes perteneciente a este colegio comunicó al docente investigador que se iba a ausentar en una sesión, pidiendo el favor de hacerle llegar la actividad correspondiente a ese día para trabajarla en casa y no atrasarse, evidenciando el gusto por la solución de los problemas planteados y la continuación con el proceso de la construcción del concepto que se estaba llevando a cabo.

En otros de los colegios los estudiantes manifestaron que habían mejorado su rendimiento en matemáticas.

Teniendo en cuenta este aspecto de motivación, se concluye la importancia del diseño de cada una de las actividades planteadas y la formulación de cada uno de los problemas, para que los estudiantes desarrollen capacidades interpretativas y propositivas y de esta manera desarrollar su pensamiento geométrico. Además, las formas de razonamiento euclidianas permiten construir significado coherente y apropiado para el concepto de área en un nivel de abstracción apropiado, pues los conceptos se construyen partiendo de situaciones concretas y llegando a métodos generalizables. Ni la observación., ni siquiera la abstracción estructural, es suficiente para la abstracción de los conceptos, sino es necesario operar sobre los objetos, realizando transformaciones y explorando a través de las operaciones de descomposición, recomposición y comparación.

4.3. Análisis de la prueba-entrevista

Teniendo en cuenta la metodología descrita en el Capítulo 3, en la cual se planteó que, para realizar un correcto análisis de los resultados de las actividades, se entrevistara a varios estudiantes (por lo general, 10) por curso, los cuáles fueron escogidos de forma aleatoria. Cada una de las respuestas dadas por los estudiantes respondía a determinadas características específicas, como más adelante se detallan. Las entrevistas tuvieron como objetivos:

- Caracterizar el pensamiento del estudiante en la solución de problemas no rutinarios en los cuales interviene el concepto de área.
- Analizar las acciones (físicas o imaginarias) y estrategias que utiliza el estudiante para dar solución a los problemas planteados para caracterizar su pensamiento al desarrollar un enfoque predominantemente geométrico de la medición.

Para la primera fase, se utilizaron nueve tarjetas en cada una de las cuales aparece una figura geométrica (ver Anexo 10). El estudiante debió escoger dos de las tarjetas, inventar un problema relacionado con la figura dada y escribirlo en los respectivos formatos. Además, para cada tarjeta se diseñó una serie de preguntas que se podían realizar al estudiante si no llegara a dar solución al problema que planteó o no lograra plantear un problema.

En la segunda fase, se le entregó al estudiante siete problemas para que explicara y justificara su solución por escrito complementado por explicaciones verbales.

Las entrevistas se llevaron a cabo en distintos momentos y de forma individual para cada uno de los sujetos elegidos, y en todos los casos se usó un cuestionario preparado. Dentro del desarrollo de las entrevistas, el docente investigador se vio en la necesidad de hacerse participe en este proceso, pues los estudiantes por sí solos no expresaban fácilmente las heurísticas que realizaban para dar solución al problema, probablemente debido a que no están acostumbrados a expresar libremente sus ideas y porque en su formación es usual que se espera que el docente realice las preguntas para luego ser contestadas.

Todas las sesiones comenzaban con preguntas informales hechas a los niños por el entrevistador sobre temas sin relación con el contenido de la entrevista, planteadas con la intención de establecer un ambiente de confianza entre los niños y el entrevistador.

A continuación, se presentan algunas respuestas dadas por los estudiantes en cada colegio a la pregunta; *¿Te gustaron las actividades que desarrollamos en clase?*

Colegio 1.

"…Sí, p*orque aprendimos cosas nuevas de matemáticas y cada vez íbamos avanzando más y nuestra capacidad mental iban aumentando; … Sí, porque aprendí cosas que no sabía, me divertí trabajar en grupo; … Sí, porque a mí desde pequeño siempre me han gustado las matemáticas y las actividades fueron un complemento más, por ejemplo, lo del círculo me ayudo a reforzar; … Sí, porque me parecieron divertidas y nos ayudó a mejorar nuestro rendimiento; … Sí, más que todo la del círculo; … Sí, porque* *trabajamos varias figuras geométricas y aprendí a encontrar el área; … Sí, porque fueron unas actividades que nos estimularon bastante en nuestra forma de ver las figuras y aprendimos bastante de lo que nos enseñaron; … Sí, porque aprendí de una forma divertida; … Sí, porque son interesantes y nos ayudan a solucionar problemas; … Si, porque nos ponían a pensar; … Sí, porque nos ayuda a reforzar en matemáticas y las actividades cada vez nos hacían más fuertes; … Sí, porque eran divertidas y en el colegio nunca nos presentan actividades así; … Sí, porque eran en grupo y algunas cosas que no entendía me las explicaban…"*[75]

Colegio 2.

"…Sí porque aprendimos más matemáticas y nos reforzaron en temas que no entendíamos; … Sí, porque hacían que uno pensara demasiado y uno a veces formulaba varias respuestas; … Sí, porque hicieron que nosotros aprendiéramos mucho con cada una de las actividades; … Sí, porque nos pusieron a funcionar la mente; … Sí, porque me gustó trabajar en equipo; … Sí, porque aprendí más sobre matemáticas; … Sí, porque eran divertidas algunas como la del rompecabezas y la de sacar la fracción, … Sí, porque eran muy entretenidas, me gustaron todas, algunas se me dificultaron, pero las pude superar; … Sí, porque aprendimos más matemáticas, y por ejemplo, yo el período pasado perdí matemáticas y en este período me está yendo bien en matemáticas; … Sí, porque en cada actividad nos divertimos con las matemáticas…"[76]

Colegio 3.

"… Sí, porque eran divertidas, aprendí nuevas cosas; … Sí, porque nos enseñaron cómo podemos averiguar las fracciones y las áreas; … Sí, porque hacíamos la matemática más diferente que en clases; … Si, porque fueron dinámicas, me gustó trabajar en grupo porque no lo hacemos muy seguido; … Sí,

[75] Respuestas por parte de los estudiantes.
[76] Respuestas por parte de los estudiantes.

porque eran lúdicas, me gusta trabajar en matemáticas y en grupo porque lo que no entendía me lo explicaban los compañeros; … Sí, porque aprendí mucho aparte que eran divertidas; … Si, porque eran dinámicas y no son simplemente teoría…”[77]

Colegio 4.

“…Sí, porque aprendimos para nuestro futuro a solucionar problemas; … Sí, porque se aprendió más; … Si, porque me gusta las matemáticas y me gusta resolver problemas; … Sí, porque se pasó bien y aprendimos; … Sí, porque eran fáciles, chéveres y aprendíamos; … Sí, porque aprendimos sobre área, aprendimos sobre geometría y como descomponer figuras…” [78]

4.3.1. Prueba-entrevista Fase 1

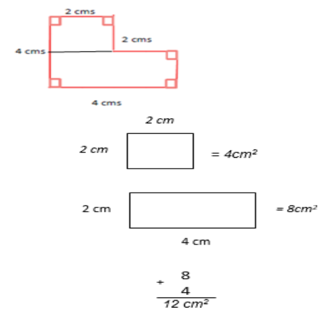
Se obtuvieron un total de 41 producciones, las cuales fueron transcritas en un formato semejante al de la Tabla 3.

En la primera fila de la tabla, la clave recoge la inicial del colegio y el número de la producción (del 1 al 10). Por ejemplo, B7, implica que se trata del niño número siete del Colegio del Bosque Bilingüe. En la segunda fila se ubica el número de la ficha que el estudiante escogió. En la tercera fila se ubica el problema inventado y la respuesta dada a la solución del problema. En la cuarta fila una solución alternativa. En la quinta, observaciones por parte del entrevistador.

Tabla 3 Recogida de la produción de uno de los estudiantes.

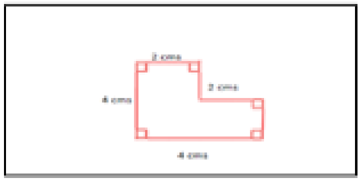
Clave: B7	**Producción del estudiante**
Problema	1

[77] Respuestas por parte de los estudiantes.
[78] Respuestas por parte de los estudiantes.

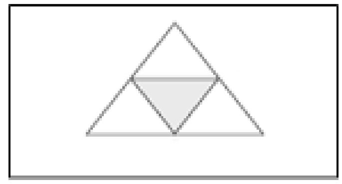
Repuesta del estudiante	*¿Cuál es el área de la figura?* 
Repuesta alternativa del estudiante si la tiene	
Conclusiones por parte del entrevistador	*El estudiante realizó correctamente las descomposiciones de la figura para dar solución al problema que planteó, además, contestó apropiadamente las inquietudes realizadas por el entrevistador. Se evidencia que el estudiante construyó un significado robusto del concepto de área.*

De acuerdo con lo descrito en el Capítulo 3, en las producciones de los estudiantes se quiere observar si los estudiantes construyeron significado robusto para el concepto de área de figuras y regiones geométricas planas, además, de analizar el carácter conceptual y creativo del conocimiento que ponen en juego los estudiantes para así poder caracterizar este pensamiento geométrico.

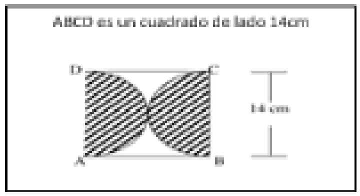
Con respecto, el número asignado a cada ficha se indica a continuación:



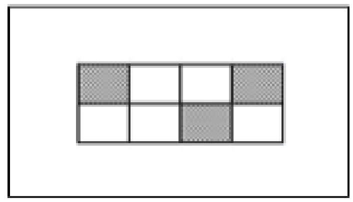
Ficha 1.



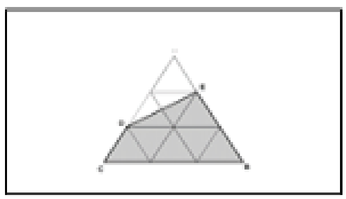
Ficha 2.



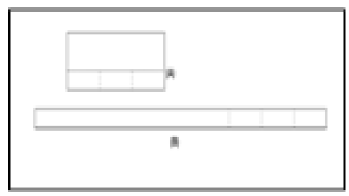
Ficha 3.



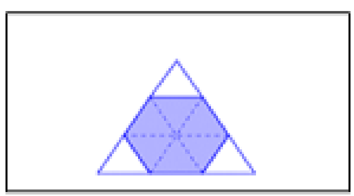
Ficha 4.



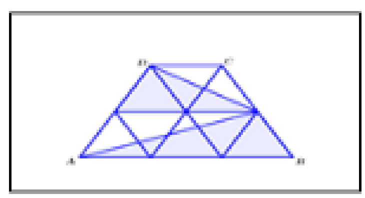
Ficha 5.



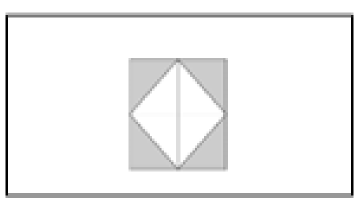
Ficha 6.



Ficha 7.



Ficha 8.



Ficha 9.

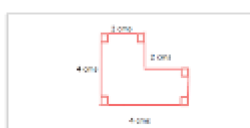
Posteriormente, se indica el número de estudiantes que escogieron cada ficha.

	Número de Ficha								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
No. de estudiantes	7	19	3	18	2	9	9	2	11

En general, los estudiantes ante la tarea de escoger una tarjeta y formular una pregunta, se detuvieron por varios minutos a pensar cuál ficha escoger, esto probablemente por ir explorando y buscando el camino para dar solución a la pregunta que iban a formular. Al respecto se destacan los siguientes aspectos.

Plantearon cuestiones sobre los objetos, por ejemplo, "*¿cuál es el área de la figura?… ¿la figura A tiene la misma área que la figura B?; … ¿cuál es la razón de la parte sombreada a la figura?, si el área del rectángulo es de 16cm^2, ¿cuánto equivale el área sombreada?; …¿cuánto equivale en fracción el área que está sombreada?"*[79], entre otros. Los estudiantes enunciaron verbalmente o dieron por escrito la formulación de la pregunta; algunos de ellos construyeron el enunciado pero no lo cerraron mediante una pregunta.

Para la ficha número uno, se encuentran las siguientes soluciones:



Los estudiantes calcularon el área de la figura por medio de acciones de descomposición, una de las soluciones que surgió fue descomponiendo la figura en un rectángulo y un cuadrado, asignando luego la longitud de cada lado a las figuras obtenidas, determinando su área, y tomando estos resultados, los sumaron y así encontraron el área total de la figura. Ver Figura 38.

[79] Respuestas por parte de algunos estudiantes participantes en la prueba-entrevista.

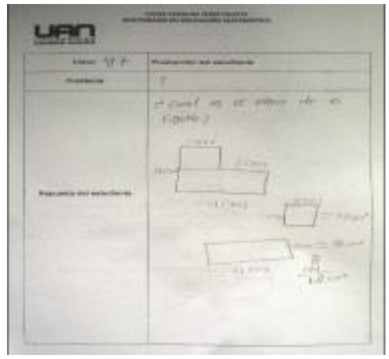
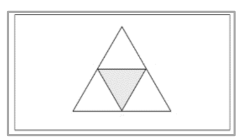


Figura 38. Solucion del estudiante B7.

Otra de las soluciones proporcionadas por los estudiantes, es la descomposición en tres cuadrados, como se puede observar en la siguiente figura.

Figura 39. Solucion del estudiante U2.

Para la ficha número dos se encontraron las siguientes soluciones:

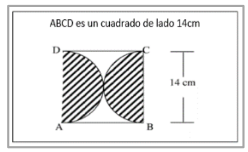


Determinaron la razón de área de la región sombreada con respecto a la figura, indicando que es ¼ , la observaron en su totalidad y señalaron que todos los triángulos que componen el triángulo equilátero son iguales. Para los estudiantes que no lograron inventar el problema se les preguntó: ¿de cuántas maneras crees que es posible dividir la figura en regiones iguales? Para responder a esta pregunta comenzaron a hacer trazos a la figura y concluyeron que, si hacían los trazos en el centro de cada triángulo, dividían la figura en ocho triángulos iguales. Un estudiante lo que realizó fue descomponer la figura y componer rombos.

El estudiante U3, formula la siguiente pregunta, *¿si se sombrea otro triángulo qué otra* figura se *podría formar?* El mismo contesta: con los cuatro triángulos se pueden formar rombos.

El estudiante F6 del grado 603, descompone la figura y señala que con los triángulos puede formar dos paralelogramos.

Para la ficha tres se encuentran los siguientes resultados.



Esta ficha fue escogida por los estudiantes T1, T4 y F1-602, las preguntas que plantearon fueron:

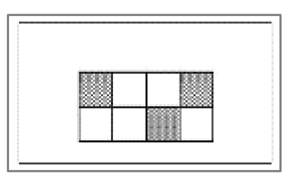
"*¿Cuál es el área de la parte sombreada de la figura?"*[80]

"¿A cuánto equivale el área sombreada de la circunferencia?"[81]

"Las letras ABCD forman un cuadrado de 14cm, pero necesitamos hallar el área de la parte sombreada"[82].

Los estudiantes señalaron que, si se toman las partes sombreadas y se unen, se forma una circunferencia. Comenzaron encontrando el área del cuadrado; al tener este dato, se detuvieron a observar la figura original para determinar el radio. Luego, recordaron el valor de π y hallaron el área de la circunferencia. Finalmente, indicaron que tenían que realizar una resta entre las áreas encontradas para obtener el valor de la región sombreada.

Para la ficha cuatro se evidencian los siguientes resultados.

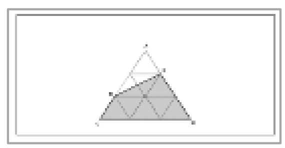


[80] Pregunta formulada por el estudiante T4
[81] Pregunta formulada por el estudiante F1-602
[82] Pregunta formulada por el estudiante T1

Algunos estudiantes encontraron la razón entre el área recubierta por los cuadrados grises y el área total, indicando que es ⅜. Otros estudiantes hallaron el área del rectángulo, pero no tuvieron en cuenta los cuadrados que se encuentran sombreados dentro del rectángulo, viendo la figura como un todo. Al indicarles que argumentaran qué procedimientos utilizaron para hallar el área de la figura, comenzaron a señalar que en la base del rectángulo se encuentran 4 cuadrados y en su altura 2, luego indicaron que al multiplicar estos dos valores se obtiene el área del rectángulo.

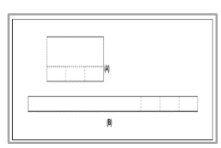
Se evidencia que los estudiantes tomaron como unidad de referencia la unidad de cada uno de los lados de los cuadrados que componen el rectángulo.

Para la ficha cinco se encuentran los desarrollos que se muestran a continuación.



Los estudiantes hallaron la razón entre el área recubierta por los triángulos grises y el área total. Se observó que los estudiantes realizaron la recomposición de las partes sombreadas para obtener una figura geométrica y tomarla como patrón, y, de esta forma, obtener la fracción de la figura correspondiente al área sombreada.

La ficha seis se muestra a continuación.



Los estudiantes propusieron el problema de comparar el área de las dos figuras. Para ello se encontraron tres estrategias de solución.

En la primera solución, tomaron la Figura A y la dividieron en tres partes iguales, luego realizaron este mismo procedimiento para la Figura B. Para este último, lo descompusieron y recompusieron para formar la Figura A, y de esta manera compararon las dos figuras y llegaron a la conclusión que tienen igual área.

En la segunda solución, dividieron las figuras en tres partes iguales, y determinaron por descomposición y recomposición si tenían igual área.

En la tercera solución, los estudiantes observaron que la parte inferior de la Figura A está compuesta por tres rectángulos, lo tomaron como referencia para seguir construyendo estos rectángulos en toda la figura. Este mismo procedimiento lo realizaron para la Figura B. Luego, contaron la cantidad de rectángulos que hay en cada una de las figuras y concluyeron que cada una de las figuras tiene la misma cantidad de rectángulos por lo que las figuras A y B tienen igual área.

A continuación, se observan las estrategias de solución utilizadas por los estudiantes F4-602, U4 y B7.

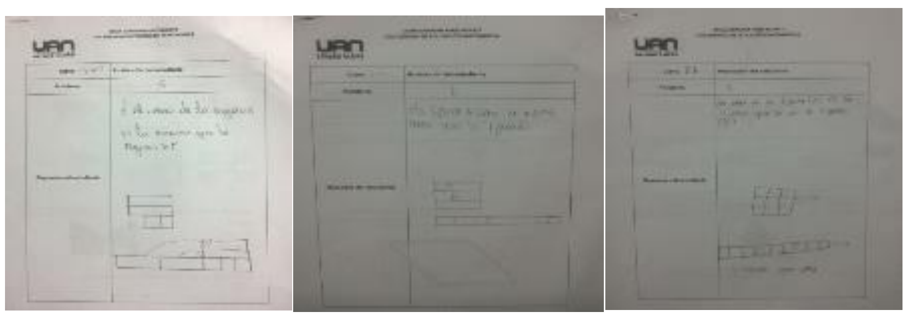
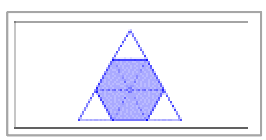


Figura 40. Estrategias de solución por parte de los estudiantes participantes de la investigación.

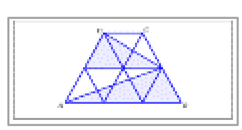
Para la ficha siete se observan los siguientes desarrollos.



Los estudiantes encontraron la razón de área recubierta por los triángulos azules y el área total, señalando que es $\frac{6}{9}$. Se encontró sólo un estudiante que formuló otra pregunta que se indica a continuación:

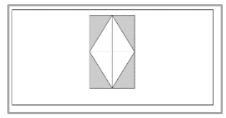
¿Cuántos triángulos están conformando la figura?, contestando: *"la figura está compuesta por nueve triángulos de los cuáles seis de ellos están sombreados y forman un hexágono".*

Para la ficha ocho se tuvieron los siguientes planteamientos.



Está ficha fue escogida por los estudiantes B4 y B8, quienes encontraron la cantidad de triángulos sombreados y no sombreados que se hallan dentro de la figura.

Para la ficha nueve, se destacan las siguientes soluciones.



Los estudiantes comparan y justifican que las dos regiones en que está dividida la figura tienen igual área. A continuación, se muestra una de las soluciones en la Figura 41.

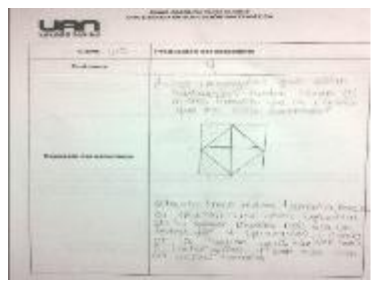


Figura 41. Solución del estudiante U5.

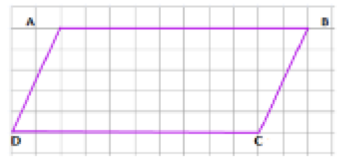
Determinaron la razón del área de la región sombreada de la figura con respecto al área de la región total, descompusieron la figura y señalaron cuántos cuadrados pueden formar, descompusieron la figura y determinaron cuántas figuras geométricas pueden formar, observaron la figura e indicaron por cuántos triángulos está formado el rombo que se encuentra en el centro de la figura.

4.3.2. Prueba-entrevista Fase 2

Para el análisis de cada una de las preguntas presentadas por los estudiantes se encontró lo que se detalla a continuación.

En la pregunta 1, donde se pide encontrar el área de paralelogramo, el 93% de los estudiantes respondió correctamente la pregunta. (Ver Anexo 12.)

Cada cuadrado de la cuadricula siguiente tiene lados de longitud 1cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, del paralelogramo ABCD?

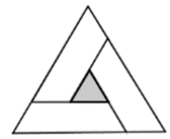


Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
…" Quité este pedazo que es un triángulo y lo puse al otro lado y formé un rectángulo, entonces conté los cuadrados de la base que es 10 y de la altura que es 5, los multipliqué y me da 50" *…" Yo dividí la figura en 2 triángulos y un cuadrado, en el cuadrado conté la base que es 8 y la altura 5, entonces, 5x8 es 40, después, conté la base de este triángulo que es 2 y la altura 5, los multipliqué y dividí en 2, entonces sería 10 dividido en 2 que es 5, entonces el área es 5 y del otro triángulo también porque son iguales, sume las 2 áreas de los 2 triángulos y luego el área del rectángulo y me dio el área del paralelogramo"* *…" Dividí en 10 triángulos el paralelogramo, encontré el área de un triángulo que es 5 y los multipliqué por 10 triángulos y me da 50cm^2"*[83]*…*	Para la primera respuesta se evidencia que el estudiante utiliza herramientas de descomposición, traslación y rotación para convertir el paralelogramo en una figura conocida, para este caso en un rectángulo. Luego, logró identificar los valores correspondientes a cada uno de sus lados para encontrar el área de la nueva figura geométrica. Para la segunda respuesta el estudiante observa e identifica las propiedades de la figura para descomponerla, realiza este procedimiento para buscar una comparación de áreas e identificar otras figuras en este polígono, logra descomponerlo en un cuadrado y dos triángulos, identifica que los triángulos rectángulos son iguales (congruentes) porque tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Para la tercera respuesta, aplica el concepto de congruencia, divide la figura en 10 triángulos iguales, encuentra el área de uno de ellos. Teniendo en cuenta que los demás triángulos son equivalentes, multiplica el área encontrada por la cantidad de triángulos que compone el paralelogramo.

En la pregunta 2, el objetivo es encontrar el área de un trapecio por descomposición. Acertó el 98% de los estudiantes. (Ver Anexo 12.)

[83] Respuestas dadas por los estudiantes pertenecientes a la investigación.

En la figura el triángulo equilátero exterior tiene 16 unidades cuadradas de área, el triángulo equilátero interior tiene 1 unidad cuadrada de área, y los tres trapecios son congruentes. ¿Cuántas unidades cuadradas tiene el área de uno de los trapecios?

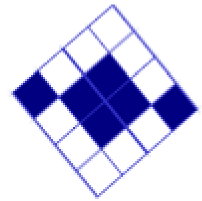


Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
...” para el trapecio fue muy fácil, si 16 unidades es el área total y si quitamos los trapecios solo quedaría este triángulo, entonces, se lo restamos a 16 y me queda 15, si son tres trapecios entonces 15 entre 3 sería 5, por lo que 5+5+5 es 15” *…” Entonces aquí hay 3 trapecios, entonces lo descompuse en 5 triángulos y así hice con todos, entonces, el área del trapecio es 5”* *…” Yo dividí los trapecios en partes iguales como el triángulo que se encuentra en la mitad del triángulo equilátero, entonces cada trapecio queda conformado por 5 triángulos”* *… “Había 3 trapecios, entonces, cada trapecio lo divido en triángulos, entonces las unidades cuadradas de cada trapecio es 5”* *… “Quité este triángulo, entonces sería una unidad menos, entonces me quedo 15 y como hay tres trapecios lo divido entre 3 y me da 5, quito el triángulo de la mitad porque no hace parte de los trapecios”* *… “En cada uno de los trapecios caben 5 unidades cuadradas, lo cual significa que, como hay 3 trapecios y en cada uno caben 5, y en total sería 15, pero hay una unidad cuadrada en el centro se puede decir que hay 16 unidades cuadradas”*[84]	En la primera y quinta respuestas, se evidencia que el estudiante comienza a comparar cada una de las partes de la figura para establecer semejanzas y diferencias. Los estudiantes determinan que el triángulo equilátero que se encuentra en el centro de la figura no hace parte de los trapecios, llega a esta conclusión cuando utiliza sus procesos de visualización para realizar acciones de descomposición. Para la segunda, tercera, cuarta y sexta respuesta, el estudiante da solución del problema de manera directa usando un patrón de medida, el estudiante identifica este patrón utilizando herramientas de comparación y descomposición.

En la pregunta 3, en la que se pedía encontrar la razón entre el área recubierta por los cuadrados azules y el área total, los estudiantes acertaron en un 100%. (Ver Anexo 12.)

[84] Respuestas dadas por los estudiantes pertenecientes a la investigación.

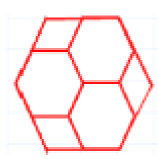
En la figura, ¿cuál es la razón entre el área recubierta por los cuadrados azules y el área total?



Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
…" 6 azules y 16 en total" … "6 es el área sombreada y 16 es el total de toda la figura, por lo tanto, sería 6/16" …" 6 parte recubierta y 16 área total, 6/16" … "Entonces yo conté 6 cuadrados sombreados y luego conté los cuadrados totales y medio 16, entonces puse acá 6/16" … "Conté cuántos había sombreados y son 6 azules y en total de la figura hay 16" …" Lo que hice primero fue contar los cuadrados azules que son 6, después conté todos los cuadrados y son 16 y entonces es seis dieciseisavos"[85]	Los estudiantes para dar solución al problema planteado, observan que el polígono está descompuesto por 16 cuadrados, de esta manera reconocen que esta figura está dividida en partes iguales, identifican la razón y ubican los valores correspondientes del numerador y denominador.

En la pregunta 4, cuyo objetivo es encontrar el área de un rombo, se obtuvo un 85% de respuestas correctas. (Ver Anexo 12.)

Un hexágono regular se divide en tres hexágonos regulares más pequeños y tres rombos iguales, tal como se muestra en la figura. Si el área del hexágono grande es de 360 cm^2, el área de cada uno de los rombos, en cm^2, es:



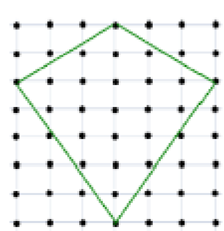
Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
… *"Dividí 360 por la cantidad de rombos que hay en la figura que es 12 y eso me da 30" … "Yo cogí y dividí el hexágono en triángulos y como el rombo está compuesto por esta figura ósea por 2 triángulos y los triángulos son 24 por la*	Los estudiantes para calcular el área de la figura, inician descomponiendo la figura geométrica en partes iguales, de tal forma que estas partes cuándo las vuelvan a juntar

[85] Respuestas dadas por los estudiantes pertenecientes a la investigación.

mitad es 12, esto lo dividí en 360 que es el área total y me dio 30” *…” Dividí la figura en triángulos pequeños y los conté y hay 24 y como cada rombo está formado por 2 triángulos, entonces 24 dividido en 2 da 12 y este lo divido en 360 y da 30”* *…” En el hexágono tracé una equis para que me quedaran 3 rombos, entonces sume todos los rombos y tome 360 y lo dividí en 12 y me da 30”* *… “Acá había 3 rombos, entonces a estos los agrupo y me da un hexágono, lo que hice fue tomar 360 y dividirlo en 4 hexágonos, como había formado otro hexágono al dividirlo me dio 90 y 90 lo divido en 3 rombos me da 30, entonces el área de cada rombo es 30cm^2”* *… “Decía cuál es el área de cada uno de los rombos, entonces, dividí en triángulos el hexágono, hay 6 triángulos para cada hexágono, los rombos también los dividí en dos triángulos, después sumé todos los triángulos y me dio 24 y el área del hexágono grande es 360, puse 360 dividido en 24 y me dio 15, luego como el rombo tiene 2 triángulos sume dos veces 15 y me da 30”* *… “Dividí cada hexágono por 3 rombos, después sumé todos los rombos y dividí 360 en 12 y da 30”*[86]	puedan formar la misma figura geométrica que están analizando. Los estudiantes descomponen el hexágono en rombos (congruentes). Además, identifican otra clase de descomposición como es la división de la figura en triángulos equiláteros, algunos estudiantes señalan que un rombo se puede descomponer en dos triángulos equiláteros.

En la pregunta 5, donde se pide calcular el área de la figura por descomposición, el 44% de los estudiantes respondió correctamente. (Ver Anexo 12.)

Para promocionar el Festival Anual de Cometas de su Colegio, Angélica hace una cometa pequeña. La cometa se ve como la que aparece en la figura. Para su cometa, Angélica la dibuja sobre una retícula donde la distancia entre los puntos vecinos es igual a 1 cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la cometa pequeña?

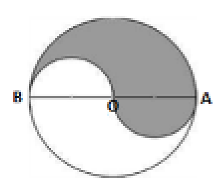


[86] Respuestas dadas por los estudiantes pertenecientes a la investigación.

Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
…" Divido la figura en cuatro triángulos, entonces este triángulo chiquito lo pase para este lado y me quedo un rectángulo y multiplico base por altura y me dio 6, después pase este triángulo grande al otro lado y me da otro rectángulo, multiplico base por altura y medio 15, entonces 15 + 6 es 21, el área de la cometa es 21" … *… "Yo divido la figura y me dieron 3 triángulos, entonces encontré base por altura 3 x 2 sobre 2 es igual a 3, para el otro triángulo hago lo mismo, para el triángulo grande tiene 6 de base y 5 de altura, lo multiplique y me dio 30 y sobre 2 es 15, entonces sume todo y me dio 21" …* *… "Dividí la figura en 2 triángulos, encontré el área de los triángulos y luego los sume, el primero es 2 de altura y 6 de base, entonces es 12 dividido en 2 da 6, para el triángulo grande es 6 x 5 da 30, lo divido en 2 es 15, sumo 15 + 6 da 21" …*	En cada una de las respuestas proporcionadas por los estudiantes se encontró que: Ejecutan acciones sobre los objetos como, comparar, descomponer, recomponer, contar, usar algoritmos, estimar y superponer. Descomponen la figura y dependiendo del número de descomposiciones obtenidas agrupan las piezas para juntarlas y formar una figura más sencilla y conocida para encontrar su área.

En la pregunta 6, el objetivo es encontrar el área de la región sombreada, el 73% de los estudiantes obtuvo la respuesta correcta. (Ver Anexo 12.)

Fernando diseño un escudo en forma de circunferencia como emblema para el concierto de Rock al Parque, si O es el centro, AB el diámetro de la circunferencia y AO mide 6cm. Calcula el área de la región sombreada



Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
… "Pasé esta figura sombreada aquí y el problema me dice que el radio es 6, entonces 6 por 6 es 36 y 36 por π que es 3,1 y el resultado lo divido en 2 y me da el área" … *"Se corrió la parte sombreada hacia este lado y queda la mitad del círculo blanca y la otra sombreada, entonces el*	Los estudiantes utilizan procesos de traslación y rotación, de esta forma, observan que la mitad de la circunferencia queda sombreada. Identifican los datos que necesitan para encontrar el área de la región sombreada.

área del círculo se saca con Pi por radio al cuadrado, entonces Pi por 36 da 111,6 luego divido entre 2 porque es la mitad y da 56,54” *… “Para encontrar el área de un círculo hay que tener Pi por radio al cuadrado, entonces me dio 113,09 divido entre 2 y me da 56,5”* *... “Multiplique 36 por Pi que es 3,1 y me dio 111,6 y divido en 2 y me da 55,8”* [87]	

En la pregunta 7, en la que se pedía encontrar el área de una región sombreada, un 85% de los estudiantes obtuvo la respuesta correcta.

Juanita tiene un cuadrado compuesto por cuatro cuadrados de 4 cm de lado, ella traza una circunferencia dentro del cuadrado como se puede observar en la figura 1, si ella recorta la figura de tal forma que obtiene un nuevo diseño, ver figura 2. ¿Cuál es el área de la región sombreada de la nueva figura que obtuvo Juanita?

Figura 1. Figura 2. Nueva figura de Juanita

Respuestas por parte de algunos de los estudiantes	Análisis
...” Completo los cuadrados sombreados y dice que cada uno tiene 1cm de lado, entonces 4 por 4 es 16 y se suma 2 veces y me da 32” *... Ver figura 2. “Si la parte sombreada que se encuentra en el primer cuadrado lo pasamos para el segundo cuadrado, estamos rellenando el espacio vacío, para el tercer cuadrado hacemos lo mismo, entonces nos quedan dos cuadrados sombreados completamente, luego encuentro el área de cada cuadrado que es 4 x 4 da 16 porque el lado de cada cuadrito es (de) 4cm, se suman y dan 32”* *... “Coloqué está parte aquí, y como cada lado mide 4, entonces tengo 2 cuadrados y como estas dos figuras son iguales, tomé solo en cuenta éste y luego 4 x 4 sería 16 y como esta figura es igual entonces sería 16 + 16 es 32”*[88]	Los estudiantes descomponen y recomponen las partes sombreadas del cuadrado, mediante transformaciones de quitar y rehacer para obtener una figura conocida y de esta manera calcular el área.

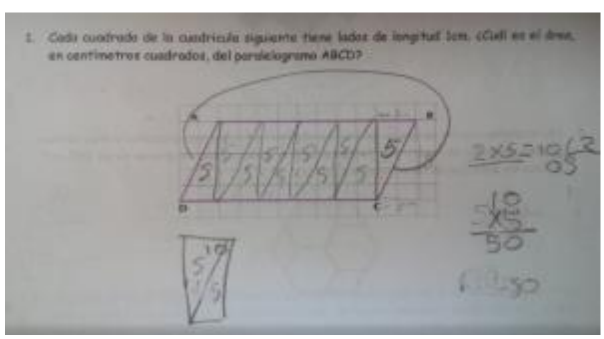
[87] Respuestas dadas por los estudiantes pertenecientes a la investigación.
[88] Respuestas dadas por los estudiantes pertenecientes a la investigación.

Conclusiones Capítulo 4

Los estudiantes para dar solución a cada uno de los problemas planteados, comenzaron con operar sobre los objetos mediante acciones de descomposición y recomposición de las figuras presentadas, luego buscaban transformarlas en otras figuras geométricas.

Con base a estas transformaciones los estudiantes encontraban relaciones geométricas en cada una de sus descomposiciones reconociendo sus propiedades y buscando figuras equivalentes por medio de la recomposición, lo que les permitió desarrollar su pensamiento geométrico, convirtiéndose en individuos más activos y creativos, capaces de argumentar y generar estrategias que los conllevaban a dar solución a la situación planteada a través de procedimientos geométricos y posteriormente a través de procedimientos aritmético – numéricos.

Los estudiantes utilizaron para la solución de cada problema herramientas que hemos identificado como elementos del enfoque euclidiano del concepto de área y de la demostración de proposiciones relacionadas con él, determinaban figuras por medio de argumentos de congruencia de sus partes constitutivas, indicando que obtenían figuras geométricas con igual área, pero con diferente forma y tamaño, comparándolas geométricamente, los estudiantes demostraron su avance en sus habilidades de razonamiento. Veamos el siguiente ejemplo.



Se observa que el estudiante inicia con manipular el objeto descomponiendo la figura en partes iguales y concluye que la figura queda dividida en regiones congruentes. El siguiente paso que realiza el estudiante es encontrar el área de uno de los triángulos que componen el paralelogramo. Para ello, se da cuenta que dos triángulos forman un rectángulo, por lo que, el tercer paso a seguir es tomar dos triángulos y recomponerlos en un rectángulo. Usando las unidades de la cuadrícula, expresa el área del rectángulo. Luego, toma este valor numérico y lo divide en dos para encontrar el área de uno de los triángulos. Finaliza contando la cantidad de triángulos que componen el paralelogramo y multiplica ese número por el área de uno de los triángulos.

El estudiante para dar solución a problemas de áreas opera sobre una figura empleando sus propiedades y no solamente contempla esas propiedades, actúa estableciendo y usando las relaciones entre las figuras que dibuja, actúa analizando geométricamente las relaciones entre el área de las figuras resultantes de la descomposición y la de la figura original, y solo entonces interpreta esos resultados en términos de valores numéricos para llegar a una respuesta final. Estos procesos de pensamiento dan lugar a un cuestionamiento de la postura teórica de Tall (2013).

Para finalizar, el hecho que la mayoría de estudiantes pudieron enunciar problemas relacionados con las figuras presentadas y dar solución a los problemas planteados, indica la solidez y robustez del significado del concepto de área que lograron construir a través de las actividades planteadas; esto demuestra que la utilización del abordaje del concepto a la manera de Euclides le permite al estudiante buscar métodos creativos para dar la solución a un problema, y trabajar sobre los “objetos” geométricos interiorizando sus propiedades.

CONCLUSIONES

Robustez del significado del concepto de área

Con base en el análisis histórico desarrollado en el Capítulo 2, la experiencia que se obtuvo en la implementación de cada una de las actividades propuestas y los resultados obtenidos en las entrevistas, se tienen los elementos requeridos para definir la construcción de significado robusto del concepto de área.

Una primera etapa en la construcción de un significado robusto del concepto de área se logra cuando el individuo usa la estrategia euclidiana basada en igualdad de área buscando diferentes estrategias de división de una región del plano o figura geométrica. Con base en estas transformaciones el individuo utiliza herramientas de traslación y rotación, entre otras, para reconfigurar estas "piezas" geométricas, y de esta manera, formar una nueva figura geométrica, comprendiendo con claridad que el área permanece igual (invariante).

En una segunda etapa, se comparan figuras que no tienen igual área, utilizando patrones de referencia que permiten hacer comparaciones parte-todo de la misma configuración introduciendo un conteo de partes constituyentes (unidades iguales de referencia).

Una tercera etapa aborda la búsqueda de fórmulas aritméticas para calcular el área. Dichas fórmulas se obtienen mediante la descomposición y recomposición de las figuras basadas en una fórmula primitiva tomada como conocida, en este caso la del rectángulo, al igual de lo que sucede en la teoría matemática de la medida.

Finalmente, se es capaz de resolver problemas no rutinarios y hasta retadores que involucran el concepto de área empleando una gama de estrategias que se desarrollaron en etapas anteriores.

El pensamiento métrico es primeramente geométrico.

En esta investigación se evidencia que los jóvenes estudiantes han construido conceptos de medición a través de la solución de problemas no rutinarios que involucran acciones de descomposición, recomposición y comparación de figuras geométricas, sin la utilización de símbolos aritmético-algebraicos. Esto va en contravía de la postura teórica de David Tall (2013), donde señala que el pensamiento geométrico es la abstracción a partir de las figuras percibidas (abstracción estructural) y el pensamiento métrico (la medición) es la abstracción a partir de acciones de medición de longitudes (abstracción operacional).

Para esta investigación, la medición, y en particular, la construcción del significado del concepto de área, es primariamente geométrico, combinando luego elementos aritméticos que, a su vez, se basan en relaciones geométricas. Detrás de las estrategias de descomposición y recomposición, se halla la identificación y uso de propiedades geométricas de las figuras involucradas, propiedades que sustentan la corrección de las descomposiciones y recomposiciones (que las figuras "calcen", que depende del reconocimiento de propiedades de los ángulos, las longitudes de los segmentos, paralelismo, entre otros). Tal identificación, a su vez, tiene su raíz, por ejemplo, en la manipulación física de fichas con cierta forma, pero se hace efectiva en la construcción del significado del concepto de área, no por intermedio de la percepción sino en el reconocimiento de invariantes bajo las transformaciones efectuadas, es decir, las operaciones del sujeto sobre las figuras.

Estas manipulaciones se emprenden por medio de realizar acciones de transformación o modificación de las figuras geométricas por medio de descomposiciones y trazos de líneas auxiliares.

Clasificación del pensamiento humano con respecto a la construcción del concepto de área

Se tiene presente que para Tall (2013) los conceptos de longitud y área inician con acciones de medir, un proceso esencialmente numérico – aritmético, y de esta forma se abstrae el concepto con base en las acciones del sujeto por medio de operaciones rituales sobre los objetos y no por medio de los objetos en sí. Además, Tall intenta hacer una clasificación del pensamiento humano basada en la percepción por una parte y en acciones que se van convirtiendo en operaciones, por otra. Para esto, siguiendo parcialmente a Piaget, formula dos maneras en las cuales el individuo construye conceptos nuevos. Una primera, denominada *abstracción estructural* y una segunda llamada *abstracción operacional*, ilustradas en la Figura 42 .

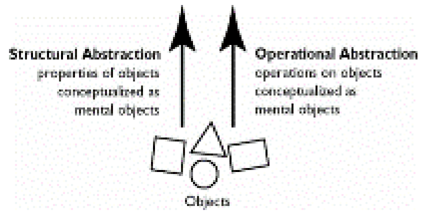


Figura 42. Tomado de Tall, David (2013) How Humans Learn to Think Mathematically pg. 65

La *abstracción estructural* se define como centrarse en contemplar la estructura de los objetos y abstraer de ahí sus propiedades. Tall (2013) afirma que ésta es la abstracción propia del pensamiento cuyo producto son los conceptos geométricos.

En cambio, la abstracción operacional se logra a partir de las acciones del sujeto por medio de procesos que se van interiorizando y organizando de modo que se vuelven con el tiempo operaciones sobre las cuales se logra abstraer los conceptos aritméticos y algebraicos.

En cuanto, a su caracterización del pensamiento geométrico, Tall (2013) no tiene en cuenta las diferentes operaciones que puede realizar un individuo para construir un concepto geométrico nuevo, ya que se limita a un pensamiento contemplativo y no activo.

Tall (2013) plantea que la abstracción estructural y la operacional son dos tipos de pensamiento diferentes, separando el pensamiento geométrico del aritmético y algebraico. Pero en la presente investigación se ha demostrado que este señalamiento no es cierto, ya que estas dos abstracciones van articuladas en la geometría, pues se promueve la abstracción a partir o bien de los objetos o bien de las acciones que realiza el sujeto para ejecutar transformaciones.

Por otra parte, como se dijo en el aparte anterior, el planteamiento central de la presente investigación es que el pensamiento métrico es esencialmente geométrico.

En la investigación se evidenció que las actividades diseñadas para este estudio seguían el concepto griego de área, donde los estudiantes al enfrentarse a un problema, y buscar darle solución, comienzan utilizando su pensamiento geométrico operacionalmente.

El pensamiento geométrico involucrado en la construcción de significado del concepto de área y llevado a cabo en el contexto de la solución de problemas no rutinarios requiere de construcciones, descomposiciones, recomposiciones y comparaciones, todas estas acciones realizadas por el individuo. Este pensamiento geométrico no es la abstracción a partir de las figuras geométricas como lo indica Tall (2013), sino a partir de transformar la figura y utilizar activamente sus propiedades. Concluimos que Tall no ha tenido en cuenta y no ha analizado el pensamiento utilizado por un individuo al resolver problemas geométricos no rutinarios relacionados con el concepto de área.

Por otro lado, en cuanto al pensamiento métrico, incluyendo el relacionado con el concepto de área, Tall (2013) argumenta que es la abstracción a partir de acciones de medición de longitudes, involucrando un elemento de simbolismo, ya que se introduce además unas expresiones numérico - aritméticos. Con base en este señalamiento, Tall (2013) sostiene que la medición involucra operaciones del sujeto y termina empleando fórmulas de tipo algebraico, y por lo tanto, que el pensamiento métrico, se relaciona con la abstracción operacional, separando así el pensamiento métrico del geométrico.

Basado en los resultados de esta investigación, se difiere de estos señalamientos ya que en ella se muestra que se construye significado del concepto de área a partir de actividades que recorren tres fases.

Primero, se centran en la igualdad de áreas de distintas figuras por medio de las transformaciones de descomposición y recomposición. Segundo, usando lo que se han denominado “unidades de referencia”, se logra la comparación de las áreas de distintas figuras y, más generalmente de diferentes regiones planas. Tercero, formando nexos entre los aspectos geométricos y aritmético – algebraicos de la medición de áreas se toma la fórmula del área del rectángulo como básica, y a partir de allí, por medio de la misma clase de transformaciones, se muestra cómo se puede relacionar y referir las fórmulas de las áreas de otras figuras geométricas (paralelogramo, triángulo, trapecio, hexágono, entre otros) al área del rectángulo. Reiteramos, como se mostró en el Capítulo 2, que se procede de manera similar en la matemática avanzada, en particular, en la teoría matemática de la medida.

Con base en estos resultados, se evidenció que el pensamiento requerido para la construcción del concepto de área y la solución de problemas involucrados en términos de medición utiliza un pensamiento geométrico operacional.

El pensamiento geométrico y el pensamiento euclidiano van más allá del acto de la contemplación, es mucho más rico de lo que Piaget y Tall señalan en su teoría, no está limitado al análisis de las propiedades de los objetos, sino es activo y operacional. Se concluye que, las actividades inspiradas en los planteamientos griegos alrededor del concepto de área, permiten al estudiante construir significado robusto de ese concepto por medio de operaciones netamente geométricas.

Se observa, además, que Tall (2013) sigue de cerca el tradicional tratamiento curricular de la geometría para hacer sus planteamientos.

La autora de la presente investigación discrepa de la caracterización realizada por Tall (2013), por lo que en lo que sigue se proponen dos clasificaciones para la construcción de significado del concepto de área y la caracterización del pensamiento involucrado.

La primera es el análisis; cuando el estudiante se centra en examinar las configuraciones e identifica sus propiedades para transformarlas, con el propósito de encontrar figuras geométricas equivalentes (de igual área).

El segundo aspecto, es el razonamiento y la argumentación. En esta etapa se encuentran las diferentes operaciones que se realizan sobre la configuración por medio de métodos creativos como visualizar la situación, subdividir, descomponer, recomponer y comparar, entre otros, para obtener figuras geométricas nuevas conservando el área de la figura original. Se procede de forma similar para establecer fórmulas de tipo algebraico para determinar su área.

Estas dos clasificaciones son llevadas a cabo con la utilización de un pensamiento geométrico operacional, las cuales se ilustran en la Figura 43.

Figura 43. Replanteamiento del proceso en la construcción del concepto de área.

La construcción de significado robusto de los conceptos de longitud y área en un proceso sólido de enseñanza – aprendizaje no se inicia con acciones de medir, como lo señala Tall (2013), y sí, por el contrario, se basa directamente en la aritmética y las fórmulas, el aprendizaje es transitoria y carece de profundidad, tanto así, que los estudiantes apenas identifican las palabras perímetro y área con fórmulas aritmético - algebraicas y hasta las confunden. Se concluye que los conceptos geométricos cuyo significado robusto se construye con base en transformaciones y propiedades geométricas facilita la adquisición del concepto de área y la solución de problemas no rutinarios, además, podemos afirmar con certeza que la utilización del enfoque y abordaje euclidiano potencia y desarrolla el pensamiento geométrico.

Esquema del proceso para la construcción del concepto de área

Teniendo en cuenta la clasificación planteada en esta investigación para la construcción de significado del concepto de área para estudiantes de aproximmadamente12 años de edad, se propone el esquema o mapa conceptual que se muestra en la Figura 44.

Como puede apreciarse en el esquema, se parte de observar que una figura geométrica o región del plano puede descomponerse en partes iguales, trazando líneas de subdivisión. Esto permite comparar el área de la figura geométrica con la de otras figuras por medio de unidades de referencia.

De otra parte, en el mapa conceptual se muestra que es posible recomponer estas partes teniendo en cuenta la conservación de área y las propiedades de las figuras, para obtener otras figuras geométricas equivalentes y, a partir de estas, buscar fórmulas aritméticas para calcular el área de la figura o región geométrica inicial.

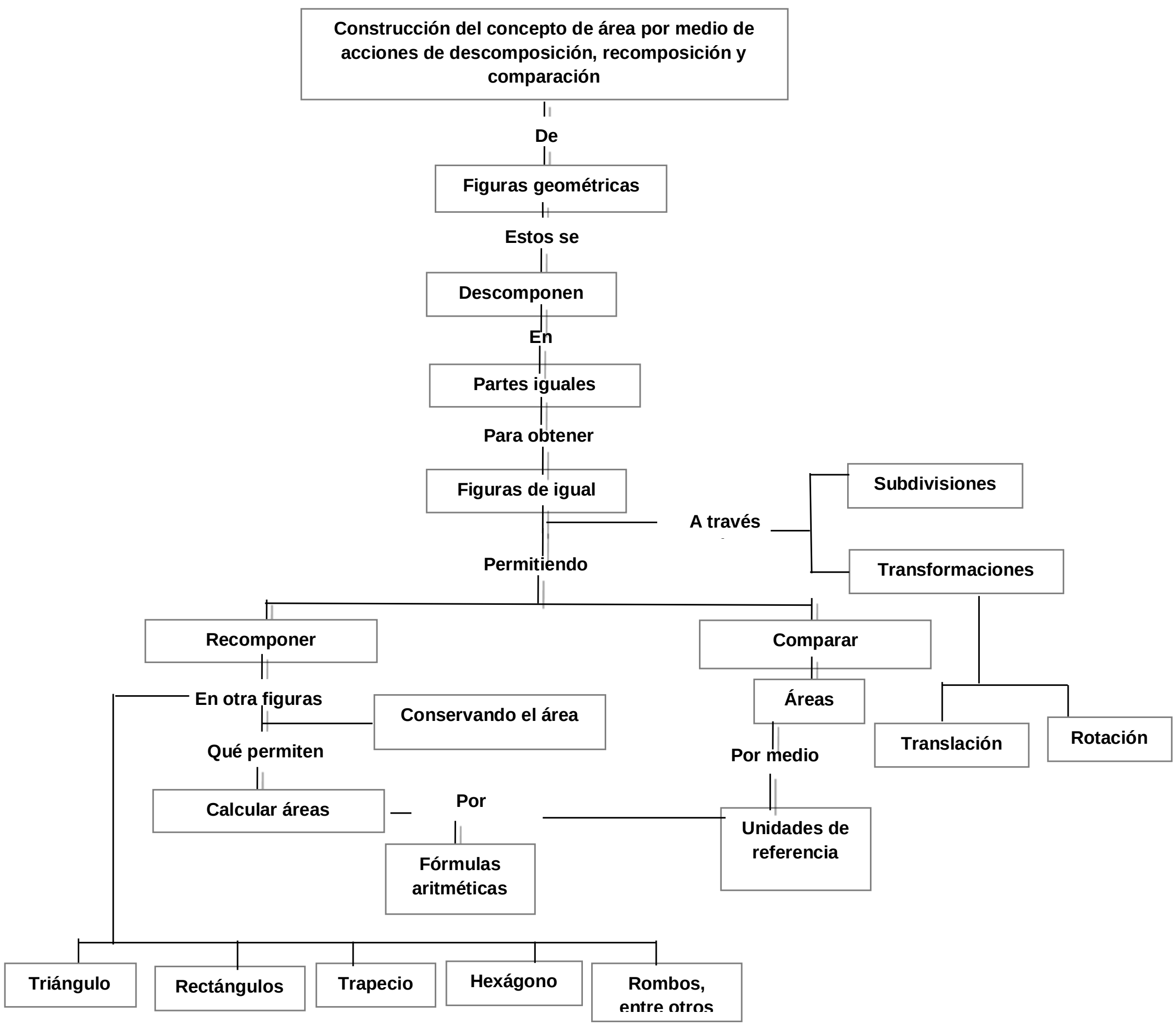


Figura 44. Esquema del proceso para la construcción de área.

RECOMENDACIONES

A través del tiempo se ha demostrado que la construcción del concepto de área en la geometría escolar colombiana se continúa enseñando bajo los mismos planteamientos de la educación tradicional, donde el estudiante se considera un individuo que capta información y memoriza fórmulas para dar respuestas a ejercicios sin saber el por qué lo está haciendo. Con base en estos cuestionamientos los estudiantes no están aprendiendo a razonar ni mucho menos construyen significado apropiado para el concepto, por lo que esta investigación propone una transformación del enfoque que incide en el modo de pensar de los estudiantes, con respecto a la construcción de significado robusto del concepto de área, en la cual se conviertan en individuos más activos, más creativos y más analíticos.

Para el diseño de cada una de las actividades propuestas dirigidas a la construcción del concepto de área, se tuvo en cuenta cada uno de los componentes desarrollados en el enfoque euclidiano. En este proceso se muestra con claridad que el dar solución a problemas de área está íntimamente relacionado, no apenas con la medición práctica por medio de procedimientos aritméticos y numéricos como lo propone Tall (2013), sino con un conocimiento operativo de las propiedades de las figuras que permite buscar diferentes subdivisiones y descomposiciones, para luego recomponer las partes obtenidas a sabiendas que, por sus propiedades, "calzaran" perfectamente, utilizando acciones físicas y mentales de comparación que dan lugar a enunciar razones entre sus áreas y desarrollar fórmulas aritméticas para el cálculo de éstas, y a poder abordar con éxito la resolución de problemas retadores relacionados con el concepto de área.

Es de esta forma, si las escuelas llevan una práctica diferente de enseñar por medio de solución de problemas no rutinarios y teniendo en cuenta el legado histórico de las matemáticas, los estudiantes inician sus procesos de razonamiento y construyen su conocimiento en lugar de reducirse a memorizar sin comprender. Por lo cual se recomienda, que en las instituciones educativas se planteé el trabajo escolar en términos de promover el pensamiento geométrico, por medio de actividades que reten al aprendizaje autónomo. Además, esto podría lograrse difundiendo las actividades y los resultados de la investigación en los diferentes centros educativos del país para hacer conocer este método de enseñanza y de esta forma comenzar a replantear las orientaciones del currículo frente a los conceptos de medición. Se sugiere explorar la posibilidad de extender los planteamientos expuestos en esta tesis para la construcción de significado de otros conceptos geométricos y métricos.

En esta investigación se realizó un estudio puntual acerca de la posición de Tall (2013) con respecto a la caracterización del pensamiento para la construcción del concepto de área. Queda abierto el espacio de investigación y discusión para otros aspectos matemáticos que este autor trata en su libro.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

Abdullanh, A. Z. (2011). Students´ perceptions towards the Van Hieles phases of learning geometry using geometer´s sketchpad software.Australian Journal of Basic and Applied Sciences.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. EMA, Vol. 8 No.1, págs. 30-46 .

Antioquia, U. d. (1 de Noviembre de 2014). Cápituo 8. Áreas. Obtenido de http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometría/pdf/Capitulo8GE.pdf

Barreto, J. (2010). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Recuperable: 28 de Junio 2014. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php

Batista, L. M. (2008). La adquisición de los primeros conceptos científicos en el niño según Piaget. Recuperable: 23 de Junio del 2014. Obtenido de http://www.sinewton.org/numeros/Boletines/08/Articulos09.pdf

Berthelot, R. S. (1999). L'enseignement de l'espace à l'ecole primarie. Grand N, nº65,pp. 37-59.

Bordonaba, P. (2007). El nacimiento de la Inteligencia en el niño. Jean Piaget. Barcelona: Ares y Mares.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática. España: Alianza.

Byrne, O. (1847). Los primeros seis libros de los elementos de Euclides. Falkland Island: Taschen.

Camargo, L. (2012). Investigaciones en Educación geométrica. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Campos, A. (2006). Introducción a la Historia y a la filosofia de la matemática. Bogotá: Universidad Nacional.

Castiblanco, A. U. (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Recuperable: 10 de Mayo 2014. Obtenido de http://www.slideshare.net/colsaludcoopnorte/articles-p-g-archivo

Castro, E. O. (2002). Desarrollo del pensamiento Matemàtico. Departamento de Didàctica de la Matemàtica. universidad de Granada. Recuperable: 20 de Junio del 2014 . Obtenido de htt://wdb.ugr.es/-encastro/wp-content/uploads/DesarrolloPensamiento.pdf

Corberàn, R. (1996). El àrea, recursos didàcticos para su enseñanza en la geometrìa.Recuperable: 9 de abril del 2014. Obtenido de www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Crowley, M. (1987). The Van Hiele model of the development of geometric thought. In Do, T.V. and Lee, J.-W. (2009). A multiple-level 3D-LEGO Game in augmented reality for improving spatial ability. . Proceedings of the International Conference on Human-Computer Interaction, 296-303.San Diego,CA.

D'Amore, B. (20016). Didáctica de la matemática. Bogotá: Magisterio.

Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. Lindquist & A.P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry K-12 (pp.126-135). Reston, VA:National Council of Teachers of mathematics.

Dickson, L. B. (1991). El Aprendizaje de las matemàticas. Barcelona: Labor S.A.

Dieulefait, L. (2003). Medida de Jordan. Miscelànea Matemàtica 37. pàg. 29-63. Recuperable: 6 de Julio del 2014. Obtenido de http://www.miscelaneamatematica.org/Misc37/Dieulefait.pdf

Discovering Geometry Condensed Lesson. (5 de Febrero de 2008). Obtenido de http://math.kendallhunt.com/documents/dg3/condensedlessonplansspanish/dg_clps_08.pdf

Discovering Geometry Condensed Lesson. (20 de Febrero de 2015). Obtenido de http://math.kendallhunt.com/documents/dg3/condensedlessonplansspanish/dg_clps_08.pdf

Douglas, J. (2010). El problema del área en los elementos de Euclides. Boletín de la Asociación Matemática de Venezuela. Vol. XVII, No. 2, 179 – 216. Obtenido de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol17/BAMV_XVII-2_p179-207.pdf

Duque Navarro, J. H., & Maca Córtes, O. E. (2012). Análisis histórico y epistemólogico de la noción de cuadratura en los libros I y II de los elementos. Universidad del Valle, 15.

Falk, M. (2002). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2005). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones. Primer Nivel. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Fernández, T. C. (2006). Configuraciones epistémicas y cognitivas en las tareas de visualización y razonamiento espacial. Contribución al grupo de investigación, "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM. Huesca, 7-9 Septiembre 2006.

Ferreiro, E. (1975). Introducción a la Epistemologia Genetica. Jean Piaget. Buenos Aires: Paidos.

Garcá, E. (2006). La formación de la inteligencia. Piaget. Mexico: Trillas.

Geométria Euclidiana. (s.f.). Obtenido de https://deymerg.files.wordpress.com/2011/07/geucap07.pdf

González, E. V. (2009). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas Problemas y Soluciones Primer Nivel . Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Gonzalez, M. (1999). La gestiòn en clase de Geometrìa utilizando sistemas de geometrìa dinàmica. Recuperable 5 de marzo del 2014. Obtenido de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/Gonzalez-LopezM01-2595.PDF

Guzman, M. (2006). El rincón de la pizarra. Recuperable: 25 de marzo del 2014. Obtenido de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/visualizacion

Heath, S. (1921). A History GreeK Mathematics, Vol.No. 1: From Thales to Euclid (Vol. 1). Oxford:Printed in England, at the Oxford University Press.

Hershkowita, R. (1991). Memorias del tercer Congreso Internacional sobre investigaciones de Educaciòn Maremàtica. Valencia.

Hitt, F. (1998). Visualizaciòn matemàtica, representaciones, nuevas tecnologìas y currìculum. Educaciòn Matemàtica, 10(2), 23-45.

Jaime, C. (2005). Olimpiadas de matemáticas para primaria: Problemas y soluciones 1995 - 1999. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Jaime, C. (2010). Problemas y Soluciones Olimpiadas de matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Laborde, C. (1998). Cabri-geòmetra o una nueva relaciòn con la geometrìa. En L. Puig (Ed.), Investigar y enseñar. Variedades de la educaciòn matemàtica (pp.33-48). Bogotà:una empresa docente .

Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones. la lògica del descubrimiento matemàtico. Versiòn Española de Carlos Solis.

López, F. A. (2002). La geometría:de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula. España: Cofás.

Malloy, C. (1999). Perimeter and Àrea through the Van Hiele Model. Mathematics Teaching in the Middle School. 87-90.

Márquez, C. (2001). El concepto de numero: La posición de Gottlob Frege. Saga Universidad Nacional, 67-73.

Moise, E. D. (1972). Matemática Moderna. Norma.

Nàpoles, J. (2009). Elementos para una historia de las Matemáticas griegas. Argentina: Universidad Tecnológica Nacional.

Pandiscio, E. (2002). Geometry. Mathematics Teacher, tomo 95, 1 - 32.

Paz, A. (2013). Cómo funciona la mente: algunas tesis de Stiven Pinker. Recuperable: 20 de Agostodel 2014. Obtenido de http://soyandrespaz.wordpress.com/2013/05/18/como-funciona-la-mente-algunas-tesis-de-steven-pinker/

Pèrez, D. (2011). Diseño, Aplicaciòn y Evaluaciòn de un sistema de Actividades para la construcción de significado del concepto de àrea, en una comunidad de pràctica para sexto grado. Bogotà.

Pérez, F. J. (2005). ¿ Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico del alumno del nivel medio Básico?. Tercer congreso virtual. " Integración sin barreras en el siglo XXI". Recuperable: 13 de Julio 2014. Obtenido de

http://www.quadernsdigitals.net/indez.php?accionmenu.hemeroteca

Philip, D. (1923). Experirncia Matemàtica. Barcelona.

Pinker, S. (1994). The blank slate. The Modern Daniel of Human Nature.

Pulpón, A. (2015). Historia del papiro de Rhind . Obtenido de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pdf

Rizo, C. C. (2003). Aprendizaje y geometrìa dinàmica en la Escuela Bàsica. Ciencia y Sociedad. Volumen XXVII, Nùmero 4, Octubre-Diciembre 2003. Recuperable: 5 de marzo del 2014. Obtenido de file:///G:/Tareas%20de%20Orlando/celia.pdf

Rojas, O. (2009). Una concepciòn Didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario diversificado . Cuba.

Rondón, Y. (2012). Historia de la geometría. Obtenido de:

http://webdelprofesor.ula.ve/humanidades/yrondon/Taller_geo/Historia%20geometria.pdf

Samper, C. C. (2010). Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Stockton, R. (2009). Mathematics Teacher, Enero, tomo 32, No. 7, 1-12.

Sun, W. Z. (2014). International Mathematics Competition. Taiwan: Chiu Chang Math.

Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge.

Tao, T. (2010). Introduction to Measure Theory. Obtenido de

https://terrytao.files.wordpress.com/2012/12/gsm-126-tao5-measure-book.pdf . Pág. 2

Tasayco, R. (1998). Revista QUBO Volumen 1, numero 3 Lima. Recuperable: 8 de abril del 2014. Obtenido de http://pedroosoriorojas.blogspot.com/2012/02/cultura-matematica.html

Thomas, H. (1981). A History of greek mathematics. New York: Dover Publications.

Vera, F. (1970). Cientificos Griegos. Madrid: Selecciones Gráficas.

Villiers, M. (1999). Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometrìa.The Future of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve, Novembre-Dècembre 1999.Francia.Recuperable 5 de marzo del 2014. Obtenido de http://mzone. mweb.co.za/residents/profmd/futured.pdf

Vygotsky, L. (2009). Play and its role in the mental development of the child. (C. Mulholland, Tranns.). Recuperable: 12 de Junio del 2014 . Obtenido de http://www.fhcds.org/ftpimages/436/download/Play and Child Development.pdf

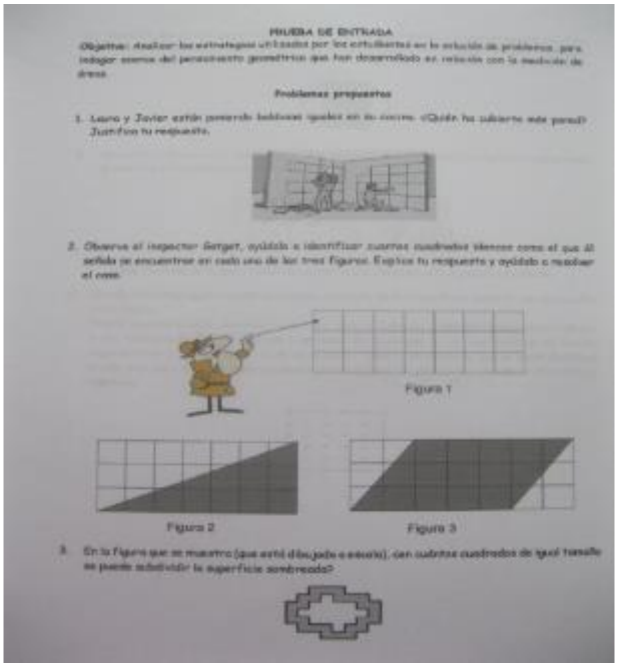
Wenger, E. (2001). Comunidades en práctica. Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2007). Communities of practice:learning,meaning, and identity. Cambridge: University Press.

ANEXOS

A continuación, se muestran las actividades diseñadas para el desarrollo de la investigación:

Anexo 1. Prueba de entrada



PRUEBA DE ENTRADA

Objetivo: Analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en la solución de problemas, para indagar acerca del pensamiento geométrico que han desarrollado en relación con la medición de áreas.

Problemas propuestos

1. Laura y Javier están poniendo baldosas iguales en su cocina. ¿Quién ha cubierto más pared? Justifica tu respuesta.

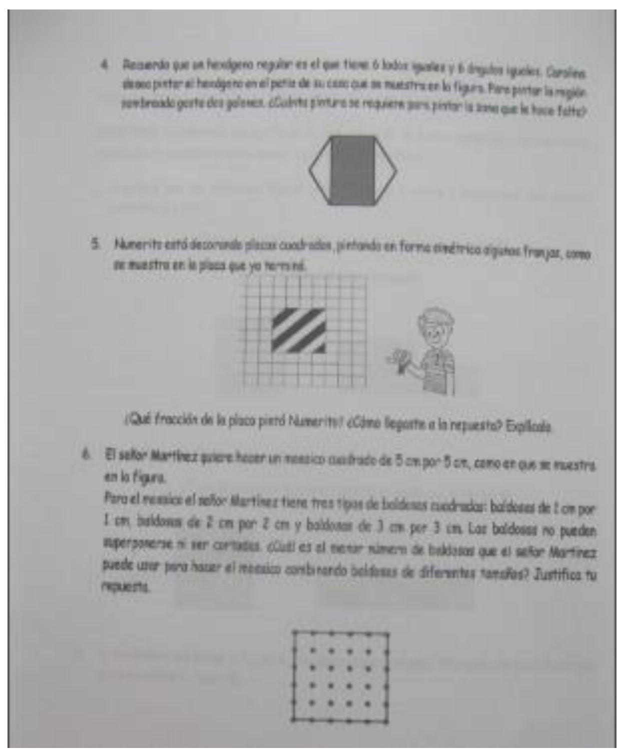
2. Observa al inspector Gadget, ayúdalo a identificar cuantos cuadrados iguales como el que él señala se encuentran en cada uno de las tres figuras. Explica tu respuesta y ayúdalo a resolver el caso.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

3. En la figura que se muestra (que está dibujada a escala), con cuántos cuadrados de igual tamaño se puede subdividir la superficie sombreada?



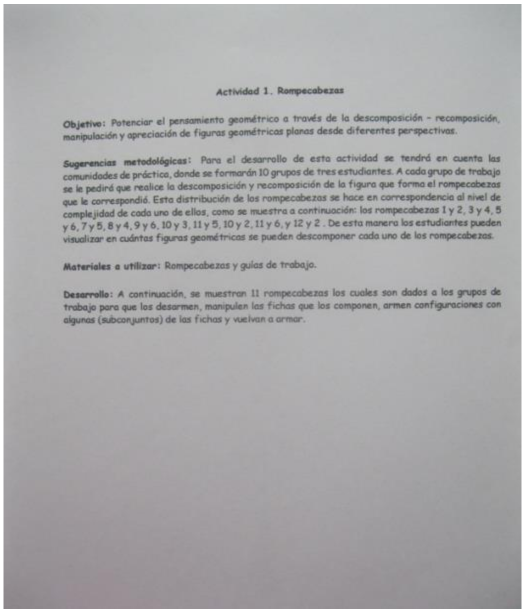
4. Recuerda que un hexágono regular es el que tiene 6 lados iguales y 6 ángulos iguales. Carolina desea pintar el hexágono en el patio de su casa que se muestra en la figura. Para pintar la región sombreada gastó dos galones. ¿Cuánta pintura se requiere para pintar la zona que le hace falta?

5. Numerito está decorando placas cuadradas, pintando en forma simétrica algunas franjas, como se muestra en la placa que ya terminé.

¿Qué fracción de la placa pintó Numerito? ¿Cómo llegaste a la respuesta? Explícalo.

6. El señor Martínez quiere hacer un mosaico cuadrado de 5 cm por 5 cm, como el que se muestra en la figura.
Para el mosaico el señor Martínez tiene tres tipos de baldosas cuadradas: baldosas de 1 cm por 1 cm, baldosas de 2 cm por 2 cm y baldosas de 3 cm por 3 cm. Las baldosas no pueden superponerse ni ser cortadas. ¿Cuál es el menor número de baldosas que el señor Martínez puede usar para hacer el mosaico combinando baldosas de diferentes tamaños? Justifica tu respuesta.

Anexo 2. Actividad 1. Rompecabezas



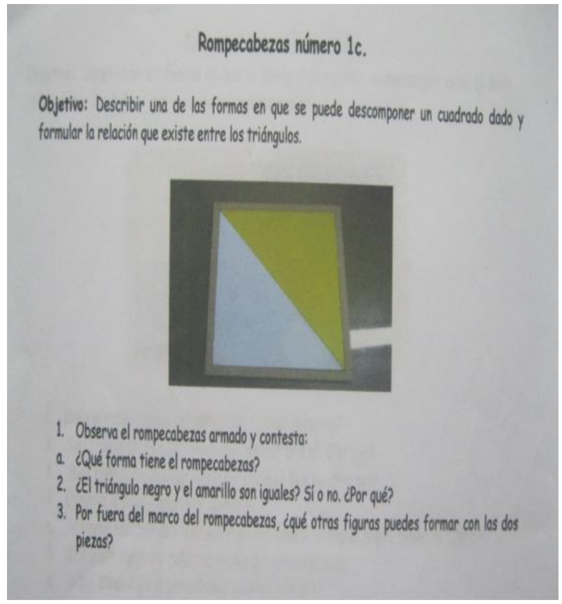
Actividad 1. Rompecabezas

Objetivo: Potenciar el pensamiento geométrico a través de la descomposición – recomposición, manipulación y apreciación de figuras geométricas planas desde diferentes perspectivas.

Sugerencias metodológicas: Para el desarrollo de esta actividad se tendrá en cuenta las comunidades de práctica, donde se formarán 10 grupos de tres estudiantes. A cada grupo de trabajo se le pedirá que realice la descomposición y recomposición de la figura que forma el rompecabezas que le correspondió. Esta distribución de los rompecabezas se hace en correspondencia al nivel de complejidad de cada uno de ellos, como se muestra a continuación: los rompecabezas 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6, 7 y 5, 8 y 4, 9 y 6, 10 y 3, 11 y 5, 10 y 2, 11 y 6, y 12 y 2 . De esta manera los estudiantes pueden visualizar en cuántas figuras geométricas se pueden descomponer cada uno de los rompecabezas.

Materiales a utilizar: Rompecabezas y guías de trabajo.

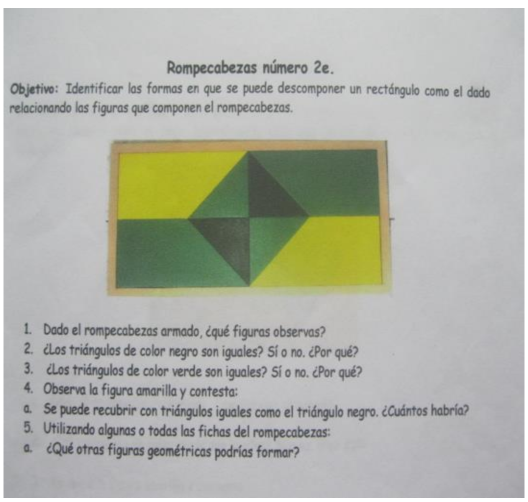
Desarrollo: A continuación, se muestran 11 rompecabezas los cuales son dados a los grupos de trabajo para que los desarmen, manipulen las fichas que los componen, armen configuraciones con algunas (subconjuntos) de las fichas y vuelvan a armar.



Rompecabezas número 1c.

Objetivo: Describir una de las formas en que se puede descomponer un cuadrado dado y formular la relación que existe entre los triángulos.

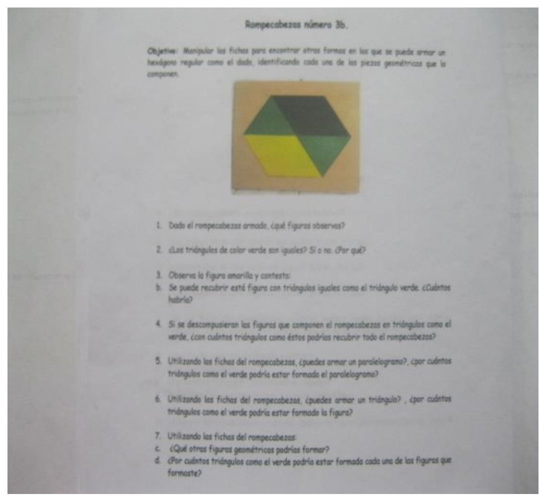
1. Observa el rompecabezas armado y contesta:
a. ¿Qué forma tiene el rompecabezas?
2. ¿El triángulo negro y el amarillo son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
3. Por fuera del marco del rompecabezas, ¿qué otras figuras puedes formar con las dos piezas?



Rompecabezas número 2e.

Objetivo: Identificar las formas en que se puede descomponer un rectángulo como el dado relacionando las figuras que componen el rompecabezas.

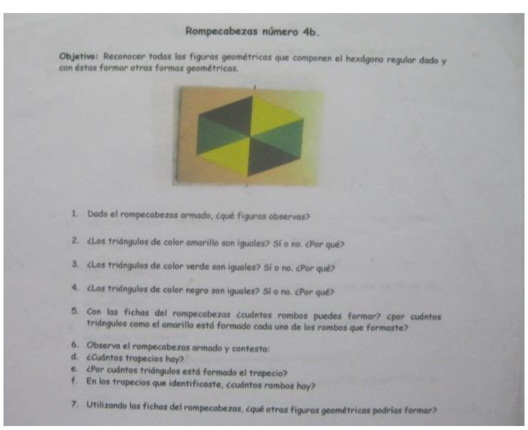
1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. ¿Los triángulos de color negro son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
3. ¿Los triángulos de color verde son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
4. Observa la figura amarilla y contesta:
a. Se puede recubrir con triángulos iguales como el triángulo negro. ¿Cuántos habría?
5. Utilizando algunas o todas las fichas del rompecabezas:
a. ¿Qué otras figuras geométricas podrías formar?



Rompecabezas número 3b.

Objetivo: Manipular las fichas para encontrar otras formas en las que se puede armar un hexágono regular como el dado, identificando cada una de las piezas geométricas que la componen.

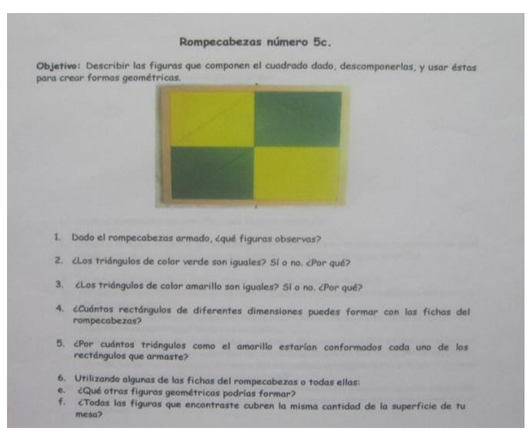
1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. ¿Los triángulos de color verde son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
3. Observa la figura amarilla y contesta:
b. Se puede recubrir está figura con triángulos iguales como el triángulo verde. ¿Cuántos habría?
4. Si se descompusieran las figuras que componen el rompecabezas en triángulos como el verde, ¿con cuántos triángulos como éstos podrías recubrir todo el rompecabezas?
5. Utilizando las fichas del rompecabezas, ¿puedes armar un paralelogramo?, ¿por cuántos triángulos como el verde podría estar formado el paralelogramo?
6. Utilizando las fichas del rompecabezas, ¿puedes armar un triángulo? , ¿por cuántos triángulos como el verde podría estar formado la figura?
7. Utilizando las fichas del rompecabezas:
c. ¿Qué otras figuras geométricas podrías formar?
d. ¿Por cuántos triángulos como el verde podría estar formada cada una de las figuras que formaste?



Rompecabezas número 4b.

Objetivo: Reconocer todas las figuras geométricas que componen el hexágono regular dado y con éstas formar otras formas geométricas.

1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. ¿Los triángulos de color amarillo son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
3. ¿Los triángulos de color verde son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
4. ¿Los triángulos de color negro son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
5. Con las fichas del rompecabezas ¿cuántos rombos puedes formar? ¿por cuántos triángulos como el amarillo está formado cada uno de los rombos que formaste?
6. Observa el rompecabezas armado y contesta:
d. ¿Cuántos trapecios hay?
e. ¿Por cuántos triángulos está formado el trapecio?
f. En los trapecios que identificaste, ¿cuántos rombos hay?
7. Utilizando las fichas del rompecabezas, ¿qué otras figuras geométricas podrías formar?



Rompecabezas número 5c.

Objetivo: Describir las figuras que componen el cuadrado dado, descomponerlas, y usar éstas para crear formas geométricas.

1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. ¿Los triángulos de color verde son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
3. ¿Los triángulos de color amarillo son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
4. ¿Cuántos rectángulos de diferentes dimensiones puedes formar con las fichas del rompecabezas?
5. ¿Por cuántos triángulos como el amarillo estarían conformados cada uno de los rectángulos que armaste?
6. Utilizando algunas de las fichas del rompecabezas o todas ellas:
e. ¿Qué otras figuras geométricas podrías formar?
f. ¿Todas las figuras que encontraste cubren la misma cantidad de la superficie de tu mesa?

Rompecabezas número 6c.

Objetivo: Describir las formas en que se puede descomponer un hexágono regular dado y formular la relación que existe entre los trapecios.

1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. Observa la figura amarilla. Si te pidieran descomponerla en triángulos equiláteros de igual tamaño, ¿cuántos de estos triángulos equiláteros habría en la figura amarilla?
3. Forma un paralelogramo con las piezas del rompecabezas y responde:

a. Compara el largo del paralelogramo con la base de los triángulos equiláteros del punto 2. ¿Qué puedes concluir?
b. Compara la altura del paralelogramo con la altura de los triángulos equiláteros del punto 2. ¿Qué lograste identificar? Explica tu respuesta.
c. Ahora imagínate uno de los triángulos equiláteros del punto 2 dividido en dos partes iguales (triángulos rectángulos). ¿Puedes formar un rectángulo con los dos triángulos rectángulos? ¿Puedes formar un rectángulo con estos dos triángulos rectángulos y cinco de los triángulos equiláteros del punto 2? ¿Qué puedes concluir?
d. ¿Puedes formar un cuadrado con los triángulos rectángulos?, ¿Cuántos de estos cuadrados se podrían formar con todos los triángulos rectángulos como éstos que caben en el hexágono?

Rompecabezas número 7c.

Objetivo: Señalar las características que tiene el rompecabezas, nombrar las piezas que lo componen, y descubrir cuáles otras figuras geométricas se pueden formar con la manipulación de las fichas.

1. Dado el rompecabezas armado, contesta:

a. ¿Qué figuras observas?
b. Observa el cuadrado negro. ¿Con cuántos cuadrados como éste se podría recubrir todo el rompecabezas armado?
c. Observa la figura que se forma con las fichas amarillas y contesta. ¿Con cuántas figuras como ella se podría formar una figura igual a la que se puede formar con 3 cuadrados como el negro? Explica tu respuesta.
d. Observa la figura que se forma con las fichas amarillas. ¿Se puede recubrir con triángulos iguales como el triángulo verde? ¿Cuántos habría?

2. ¿Con cuántos triángulos como el negro podrías recubrir todo el rompecabezas?
3. ¿El triángulo de color amarillo y negro son iguales? Sí o no. ¿Por qué?
4. Utilizando las fichas del rompecabezas, ¿qué otras figuras geométricas podrías formar? ¿Con cuántos triángulos como el negro podrías formar cada una de las figuras que formaste?

Rompecabezas número 8e.

Objetivo: Clasificar las figuras que componen el rectángulo dado descomponiéndolo y recomponiendo las fichas para formar nuevas formas geométricas.

1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. Observa el rompecabezas armado, fíjate que en el centro del rompecabezas hay un cuadrado, contesta:

a. Si se armara un cuadrado de igual tamaño con los triángulos verdes y amarillos, ¿por cuántos triángulos estaría conformado dicho cuadrado? Explica tu respuesta.

3. Toma dos triángulos verdes, arma un cuadrado, ahora usando las fichas restantes del rompecabezas, ¿cuántos cuadrados como el que construiste puedes armar?
4. Toma tres triángulos negros, arma una figura geométrica utilizando estas tres fichas.

a. ¿Qué figura obtuviste?
b. Usando las fichas restantes, ¿cuántas figuras como ésta puedes obtener?
c. ¿Sobró alguna ficha?

5. Utilizando todas o algunas de las fichas del rompecabezas, ¿qué otras figuras geométricas podrías formar? ¿Todas las figuras que encontraste cubren la misma cantidad de la superficie de tu mesa? Explica tu respuesta.

Rompecabezas número 9a.

Objetivo: Describir de cuántas formas se puede descomponer el rompecabezas, señalar las figuras geométricas que lo componen y formar otras figuras usando algunas o todas ellas.

1. Dado el rompecabezas armado, ¿qué figuras observas?
2. Observa el cuadrado negro, ¿cuántos de estos cuadrados pueden recubrir todo el rompecabezas?
3. Si se tuvieran suficientes fichas, ¿cuántos triángulos como el negro cabrían en el rompecabezas?
4. Utilizando algunas o todas las fichas del rompecabezas, ¿qué otras figuras geométricas podrías formar?
5. Observa el cuadrado y el triángulo negro, contesta:

a. Compara la altura del cuadrado y el triángulo. ¿Qué puedes concluir?
b. Compara la base (el largo) del cuadrado y el triángulo. ¿Qué puedes concluir?

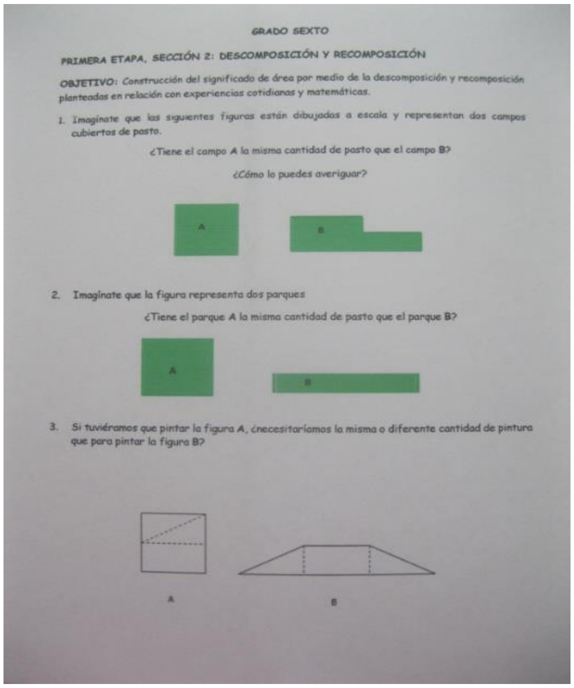
Rompecabezas número 10.

Objetivo: Identificar por medio de la unión de las piezas que componen el rompecabezas qué figura geométrica representa.

Dado el rompecabezas armado, contesta:

1. ¿Cuántos trapecios observas en el rompecabezas?
2. ¿Cuántos rombos se pueden formar con las fichas del rompecabezas?
3. ¿Cuántos paralelogramos se pueden formar con las fichas del rompecabezas? ¿Son todos del mismo tamaño?
4. Utilizando las fichas del rompecabezas, ¿qué otras figuras geométricas podrías formar? Descríbelas.

Anexo 3. Primera etapa, Sección 2: Descomposición y recomposición



GRADO SEXTO

PRIMERA ETAPA, SECCIÓN 2: DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN

OBJETIVO: Construcción del significado de área por medio de la descomposición y recomposición planteadas en relación con experiencias cotidianas y matemáticas.

1. Imagínate que las siguientes figuras están dibujadas a escala y representan dos campos cubiertos de pasto.

¿Tiene el campo A la misma cantidad de pasto que el campo B?

¿Cómo lo puedes averiguar?

A B

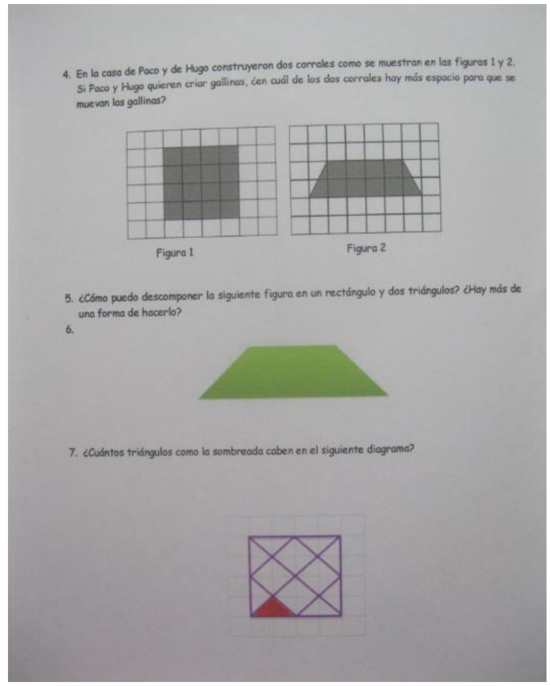
2. Imagínate que la figura representa dos parques

¿Tiene el parque A la misma cantidad de pasto que el parque B?

A B

3. Si tuviéramos que pintar la figura A, ¿necesitaríamos la misma o diferente cantidad de pintura que para pintar la figura B?

A B



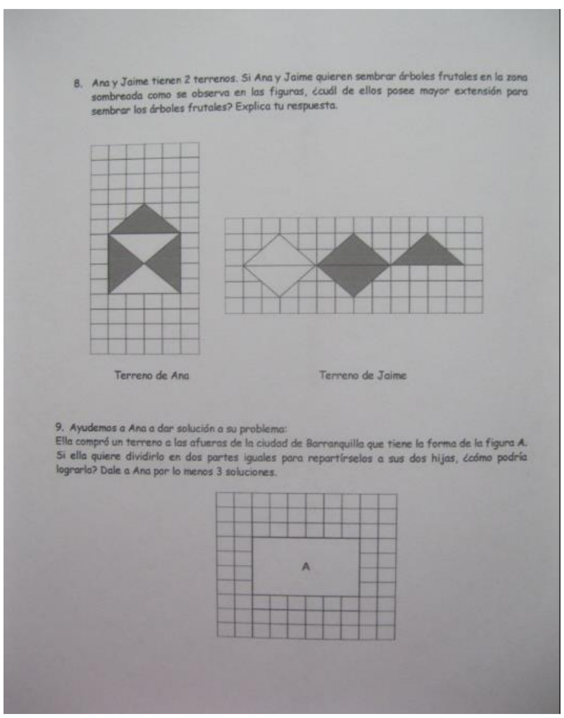
4. En la casa de Paco y de Hugo construyeron dos corrales como se muestran en las figuras 1 y 2. Si Paco y Hugo quieren criar gallinas, ¿en cuál de los dos corrales hay más espacio para que se muevan las gallinas?

Figura 1 Figura 2

5. ¿Cómo puedo descomponer la siguiente figura en un rectángulo y dos triángulos? ¿Hay más de una forma de hacerlo?

6.

7. ¿Cuántos triángulos como la sombreada caben en el siguiente diagrama?

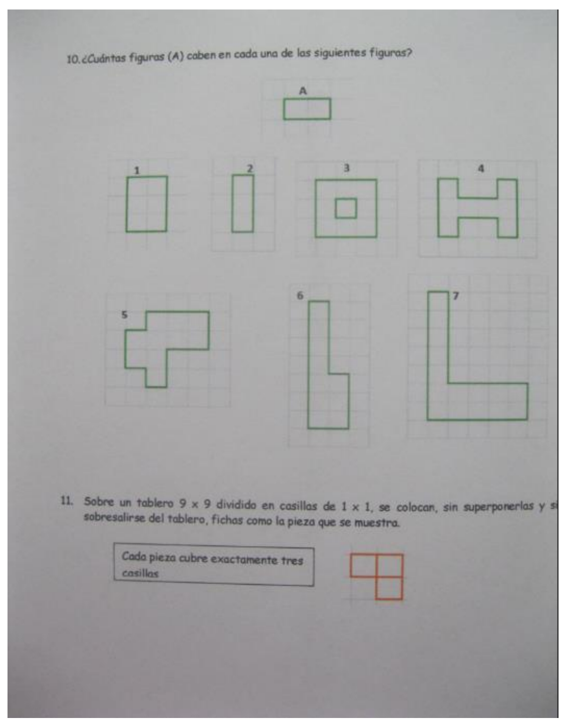


8. Ana y Jaime tienen 2 terrenos. Si Ana y Jaime quieren sembrar árboles frutales en la zona sombreada como se observa en las figuras, ¿cuál de ellos posee mayor extensión para sembrar los árboles frutales? Explica tu respuesta.

Terreno de Ana Terreno de Jaime

9. Ayudemos a Ana a dar solución a su problema:
Ella compró un terreno a las afueras de la ciudad de Barranquilla que tiene la forma de la figura A. Si ella quiere dividirlo en dos partes iguales para repartírselos a sus dos hijas, ¿cómo podría lograrlo? Dale a Ana por lo menos 3 soluciones.

A



10. ¿Cuántas figuras (A) caben en cada una de las siguientes figuras?

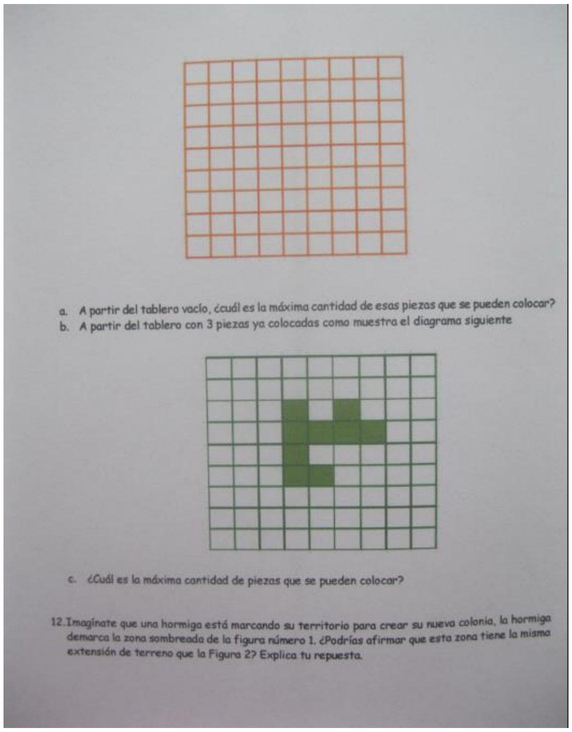
A

1 2 3 4

5 6 7

11. Sobre un tablero 9 × 9 dividido en casillas de 1 × 1, se colocan, sin superponerlas y s sobresalirse del tablero, fichas como la pieza que se muestra.

Cada pieza cubre exactamente tres casillas



a. A partir del tablero vacío, ¿cuál es la máxima cantidad de esas piezas que se pueden colocar?
b. A partir del tablero con 3 piezas ya colocadas como muestra el diagrama siguiente

c. ¿Cuál es la máxima cantidad de piezas que se pueden colocar?

12. Imagínate que una hormiga está marcando su territorio para crear su nueva colonia, la hormiga demarca la zona sombreada de la figura número 1. ¿Podrías afirmar que esta zona tiene la misma extensión de terreno que la Figura 2? Explica tu repuesta.

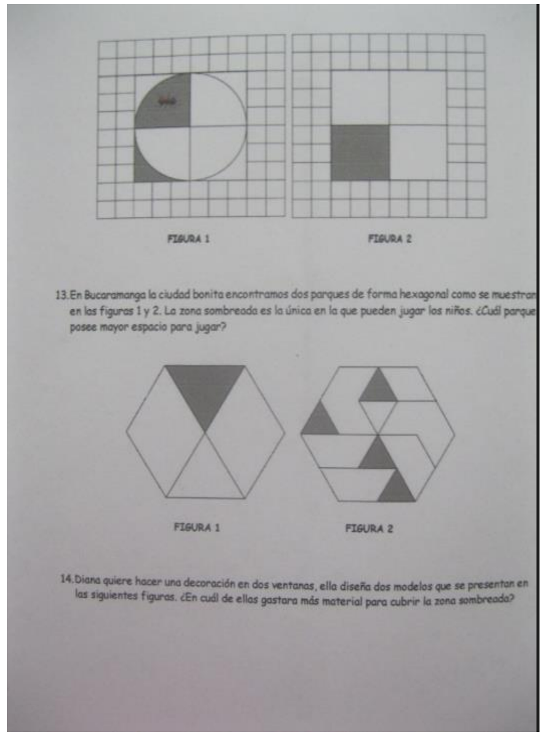
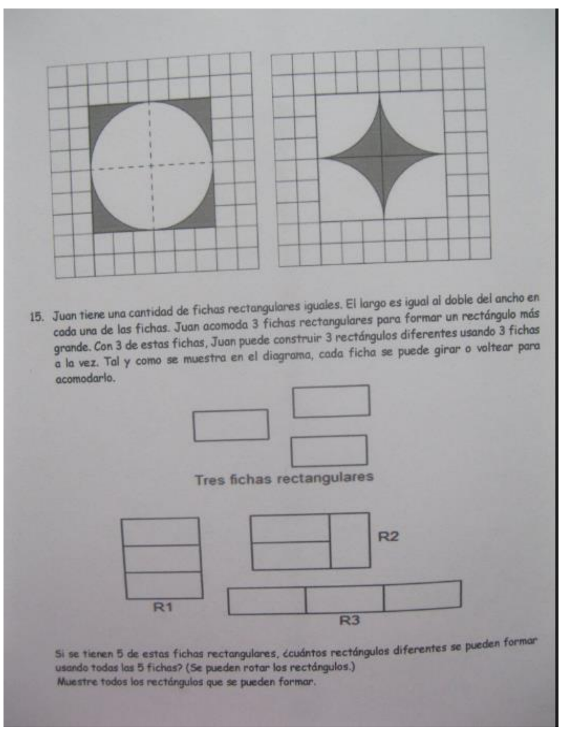


FIGURA 1 FIGURA 2

13. En Bucaramanga la ciudad bonita encontramos dos parques de forma hexagonal como se muestran en las figuras 1 y 2. La zona sombreada es la única en la que pueden jugar los niños. ¿Cuál parque posee mayor espacio para jugar?

FIGURA 1 FIGURA 2

14. Diana quiere hacer una decoración en dos ventanas, ella diseña dos modelos que se presentan en las siguientes figuras. ¿En cuál de ellas gastara más material para cubrir la zona sombreada?

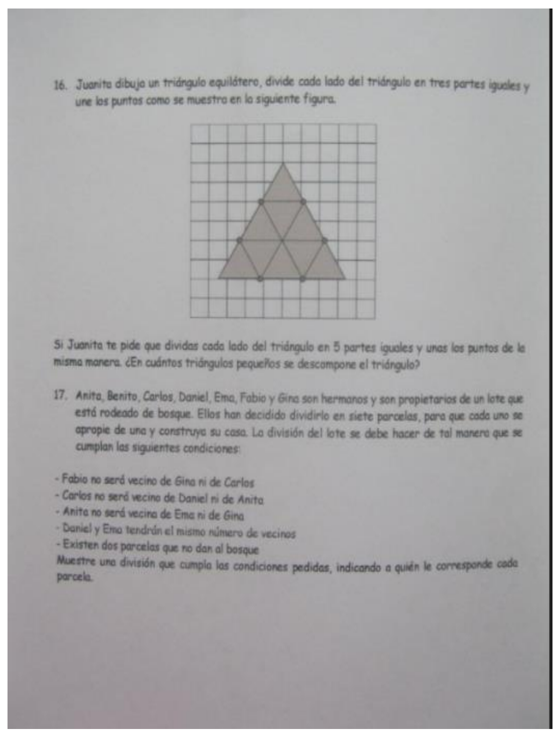


15. Juan tiene una cantidad de fichas rectangulares iguales. El largo es igual al doble del ancho en cada una de las fichas. Juan acomoda 3 fichas rectangulares para formar un rectángulo más grande. Con 3 de estas fichas, Juan puede construir 3 rectángulos diferentes usando 3 fichas a la vez. Tal y como se muestra en el diagrama, cada ficha se puede girar o voltear para acomodarlo.

Tres fichas rectangulares

R1 R2 R3

Si se tienen 5 de estas fichas rectangulares, ¿cuántos rectángulos diferentes se pueden formar usando todas las 5 fichas? (Se pueden rotar los rectángulos.)
Muestre todos los rectángulos que se pueden formar.



16. Juanita dibuja un triángulo equilátero, divide cada lado del triángulo en tres partes iguales y une los puntos como se muestra en la siguiente figura.

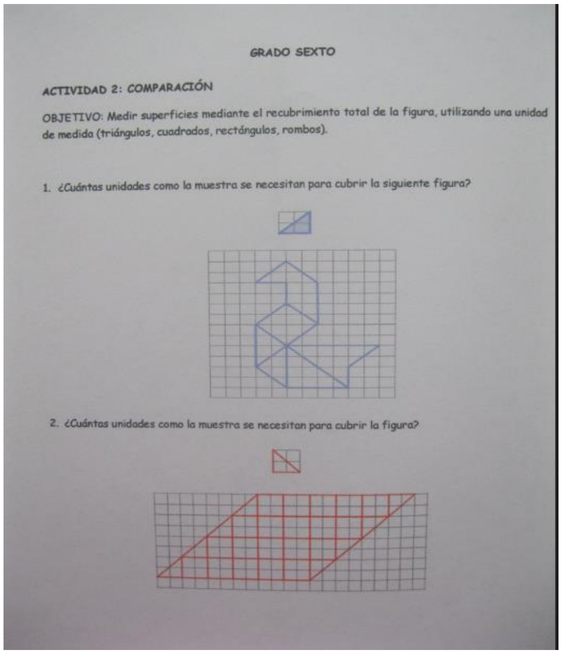
Si Juanita te pide que dividas cada lado del triángulo en 5 partes iguales y unas los puntos de la misma manera. ¿En cuántos triángulos pequeños se descompone el triángulo?

17. Anita, Benito, Carlos, Daniel, Ema, Fabio y Gina son hermanos y son propietarios de un lote que está rodeado de bosque. Ellos han decidido dividirlo en siete parcelas, para que cada uno se apropie de una y construya su casa. La división del lote se debe hacer de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- Fabio no será vecino de Gina ni de Carlos
- Carlos no será vecino de Daniel ni de Anita
- Anita no será vecina de Ema ni de Gina
- Daniel y Ema tendrán el mismo número de vecinos
- Existen dos parcelas que no dan al bosque

Muestre una división que cumpla las condiciones pedidas, indicando a quién le corresponde cada parcela.

Anexo 4. Actividad 2: Comparación



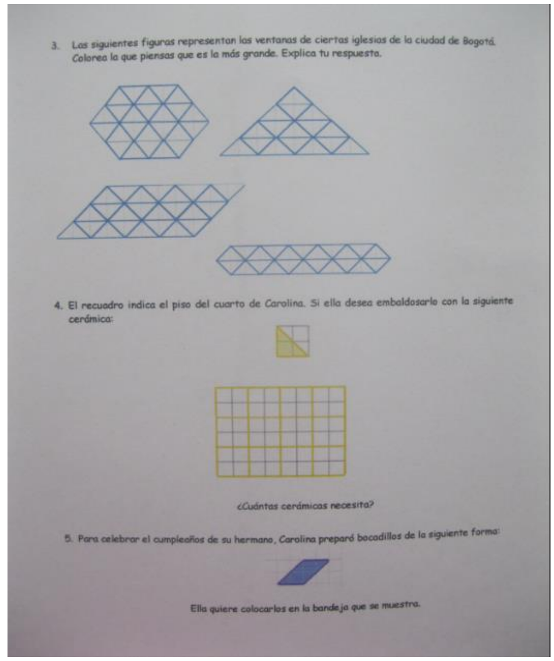
GRADO SEXTO

ACTIVIDAD 2: COMPARACIÓN

OBJETIVO: Medir superficies mediante el recubrimiento total de la figura, utilizando una unidad de medida (triángulos, cuadrados, rectángulos, rombos).

1. ¿Cuántas unidades como la muestra se necesitan para cubrir la siguiente figura?

2. ¿Cuántas unidades como la muestra se necesitan para cubrir la figura?



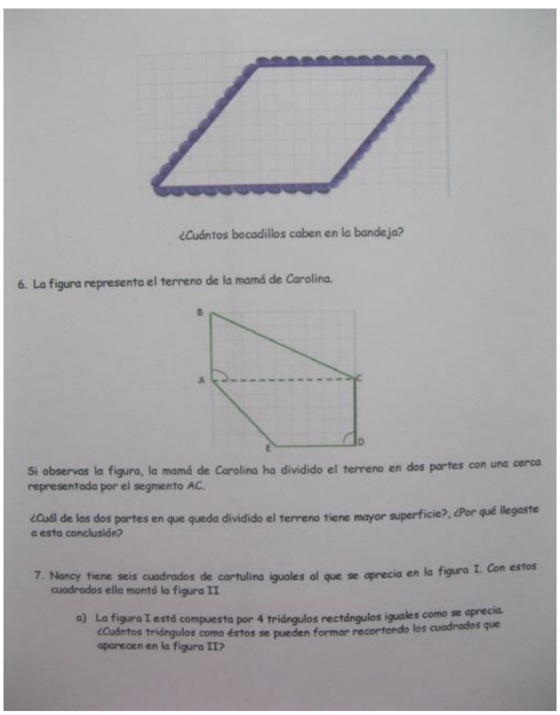
3. Las siguientes figuras representan las ventanas de ciertas iglesias de la ciudad de Bogotá. Colorea la que piensas que es la más grande. Explica tu respuesta.

4. El recuadro indica el piso del cuarto de Carolina. Si ella desea embaldosarlo con la siguiente cerámica:

¿Cuántas cerámicas necesita?

5. Para celebrar el cumpleaños de su hermano, Carolina preparó bocadillos de la siguiente forma:

Ella quiere colocarlos en la bandeja que se muestra.



¿Cuántos bocadillos caben en la bandeja?

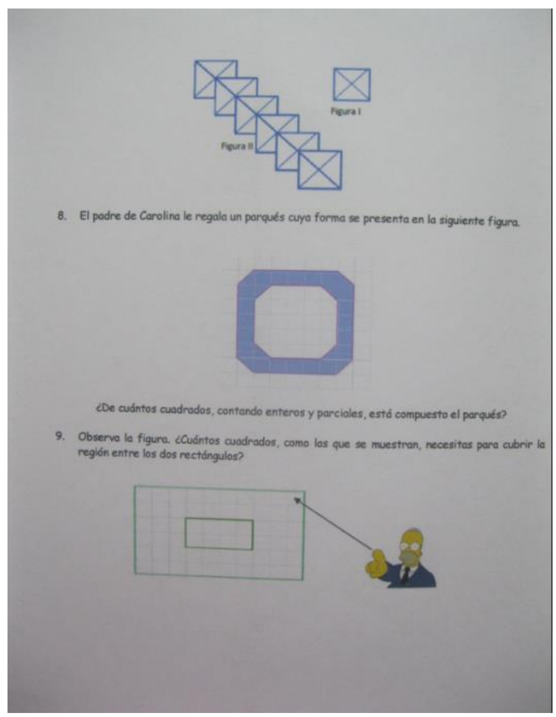
6. La figura representa el terreno de la mamá de Carolina.

Si observas la figura, la mamá de Carolina ha dividido el terreno en dos partes con una cerca representada por el segmento AC.

¿Cuál de las dos partes en que queda dividido el terreno tiene mayor superficie?, ¿Por qué llegaste a esta conclusión?

7. Nancy tiene seis cuadrados de cartulina iguales al que se aprecia en la figura I. Con estos cuadrados ella montó la figura II

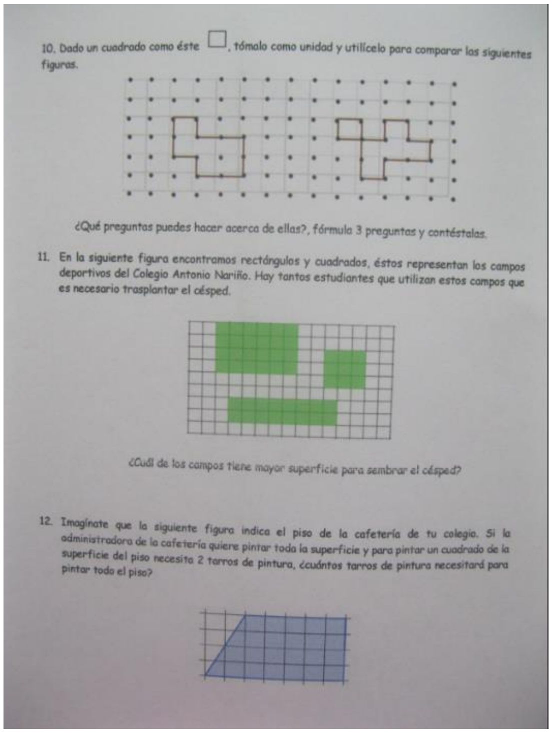
a) La figura I está compuesta por 4 triángulos rectángulos iguales como se aprecia. ¿Cuántos triángulos como éstos se pueden formar recortando los cuadrados que aparecen en la figura II?



8. El padre de Carolina le regala un parqués cuya forma se presenta en la siguiente figura.

¿De cuántos cuadrados, contando enteros y parciales, está compuesto el parqués?

9. Observa la figura. ¿Cuántos cuadrados, como las que se muestran, necesitas para cubrir la región entre los dos rectángulos?



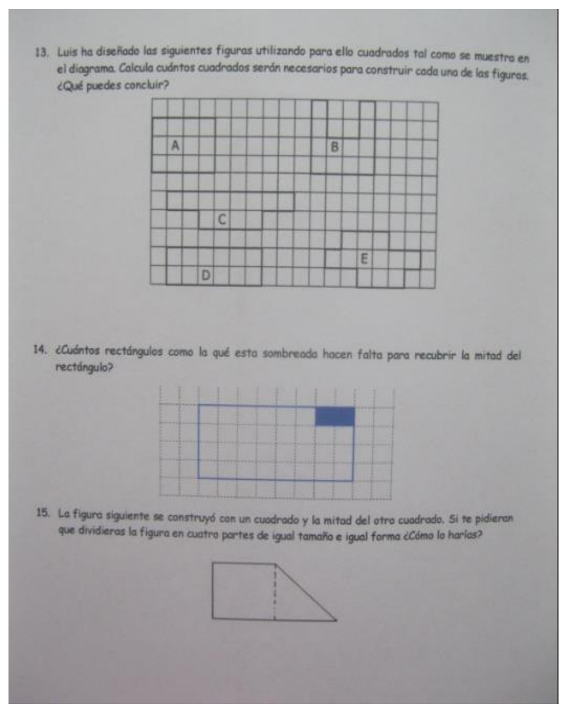
10. Dado un cuadrado como éste □, tómalo como unidad y utilícelo para comparar las siguientes figuras.

¿Qué preguntas puedes hacer acerca de ellas?, fórmula 3 preguntas y contéstalas.

11. En la siguiente figura encontramos rectángulos y cuadrados, éstos representan los campos deportivos del Colegio Antonio Nariño. Hay tantos estudiantes que utilizan estos campos que es necesario trasplantar el césped.

¿Cuál de los campos tiene mayor superficie para sembrar el césped?

12. Imagínate que la siguiente figura indica el piso de la cafetería de tu colegio. Si la administradora de la cafetería quiere pintar toda la superficie y para pintar un cuadrado de la superficie del piso necesita 2 tarros de pintura, ¿cuántos tarros de pintura necesitará para pintar todo el piso?



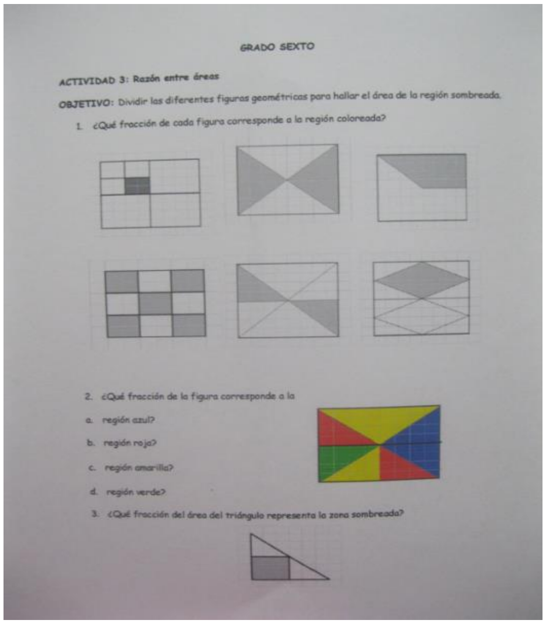
13. Luis ha diseñado las siguientes figuras utilizando para ello cuadrados tal como se muestra en el diagrama. Calcula cuántos cuadrados serán necesarios para construir cada una de las figuras. ¿Qué puedes concluir?

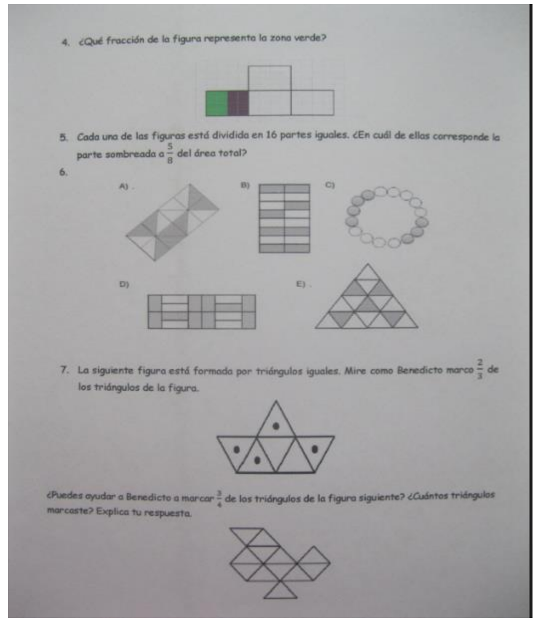
A
B
C
D
E

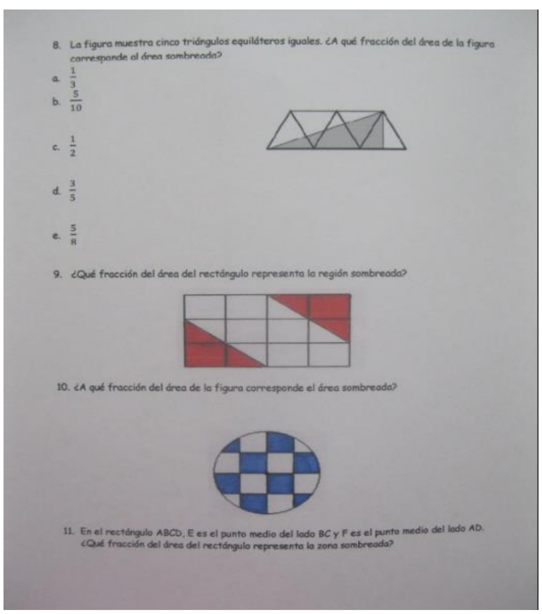
14. ¿Cuántos rectángulos como la qué esta sombreada hacen falta para recubrir la mitad del rectángulo?

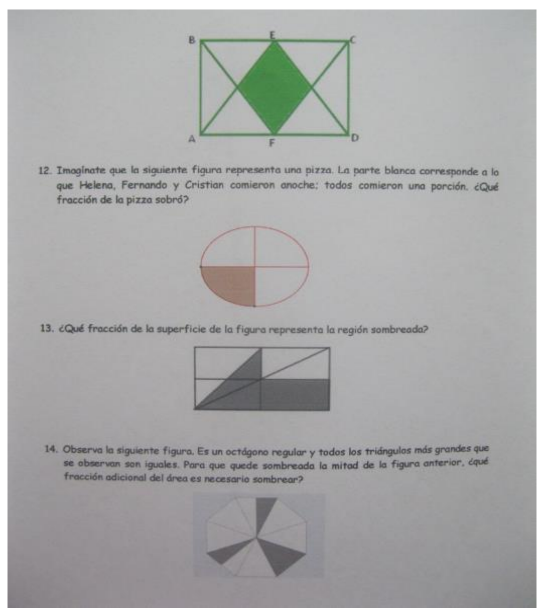
15. La figura siguiente se construyó con un cuadrado y la mitad del otro cuadrado. Si te pidieran que dividieras la figura en cuatro partes de igual tamaño e igual forma ¿Cómo lo harías?

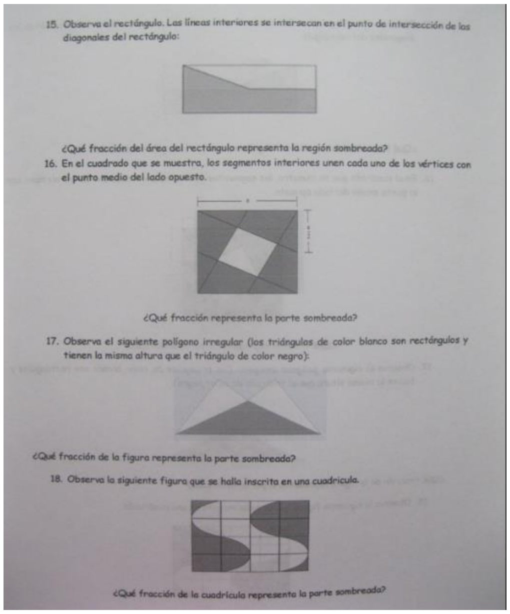
Anexo 5. Actividad 3: Razón entre áreas











15. Observa el rectángulo. Las líneas interiores se intersecan en el punto de intersección de los diagonales del rectángulo:

¿Qué fracción del área del rectángulo representa la región sombreada?

16. En el cuadrado que se muestra, los segmentos interiores unen cada uno de los vértices con el punto medio del lado opuesto.

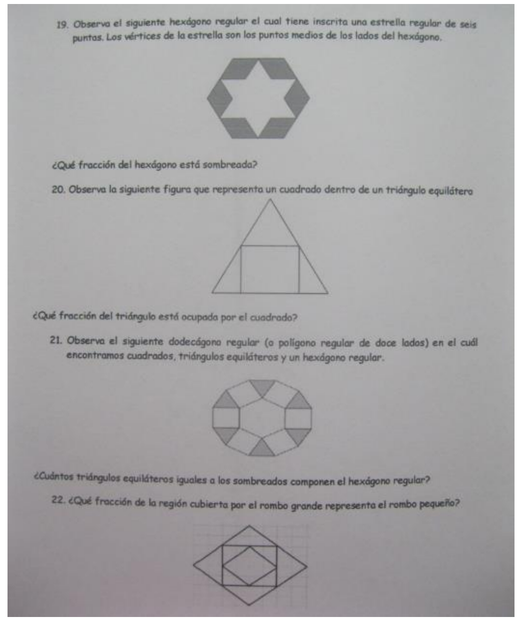
¿Qué fracción representa la parte sombreada?

17. Observa el siguiente polígono irregular (los triángulos de color blanco son rectángulos y tienen la misma altura que el triángulo de color negro):

¿Qué fracción de la figura representa la parte sombreada?

18. Observa la siguiente figura que se halla inscrita en una cuadricula.

¿Qué fracción de la cuadrícula representa la parte sombreada?



19. Observa el siguiente hexágono regular el cual tiene inscrita una estrella regular de seis puntas. Los vértices de la estrella son los puntos medios de los lados del hexágono.

¿Qué fracción del hexágono está sombreada?

20. Observa la siguiente figura que representa un cuadrado dentro de un triángulo equilátero

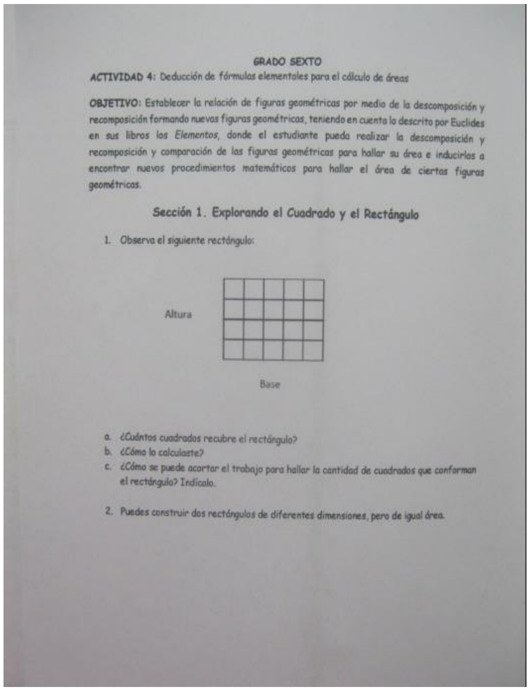
¿Qué fracción del triángulo está ocupada por el cuadrado?

21. Observa el siguiente dodecágono regular (o polígono regular de doce lados) en el cuál encontramos cuadrados, triángulos equiláteros y un hexágono regular.

¿Cuántos triángulos equiláteros iguales a los sombreados componen el hexágono regular?

22. ¿Qué fracción de la región cubierta por el rombo grande representa el rombo pequeño?

Anexo 6. Actividad 4: Deducción de fórmulas elementales para el cálculo de áreas



GRADO SEXTO

ACTIVIDAD 4: Deducción de fórmulas elementales para el cálculo de áreas

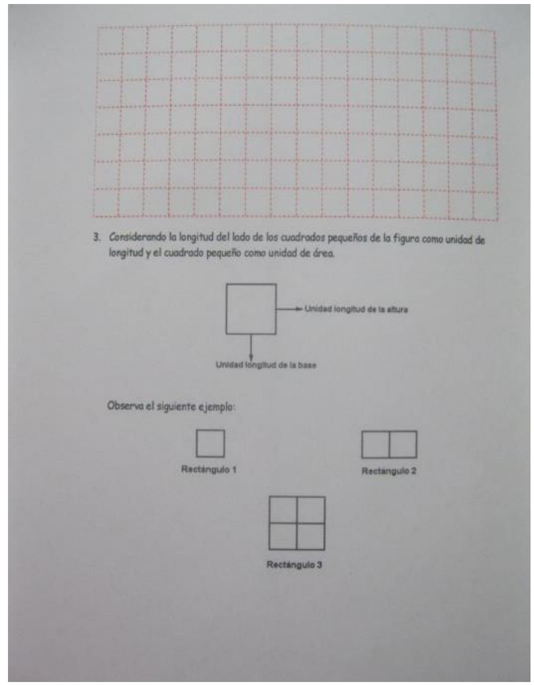
OBJETIVO: Establecer la relación de figuras geométricas por medio de la descomposición y recomposición formando nuevas figuras geométricas, teniendo en cuenta lo descrito por Euclides en sus libros los *Elementos*, donde el estudiante pueda realizar la descomposición y recomposición y comparación de las figuras geométricas para hallar su área e inducirlos a encontrar nuevos procedimientos matemáticos para hallar el área de ciertas figuras geométricas.

Sección 1. Explorando el Cuadrado y el Rectángulo

1. Observa el siguiente rectángulo:

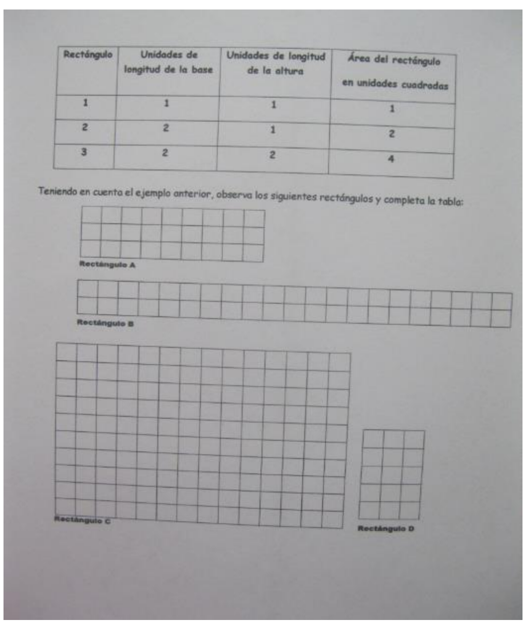
a. ¿Cuántos cuadrados recubre el rectángulo?
b. ¿Cómo lo calculaste?
c. ¿Cómo se puede acortar el trabajo para hallar la cantidad de cuadrados que conforman el rectángulo? Indícalo.

2. Puedes construir dos rectángulos de diferentes dimensiones, pero de igual área.



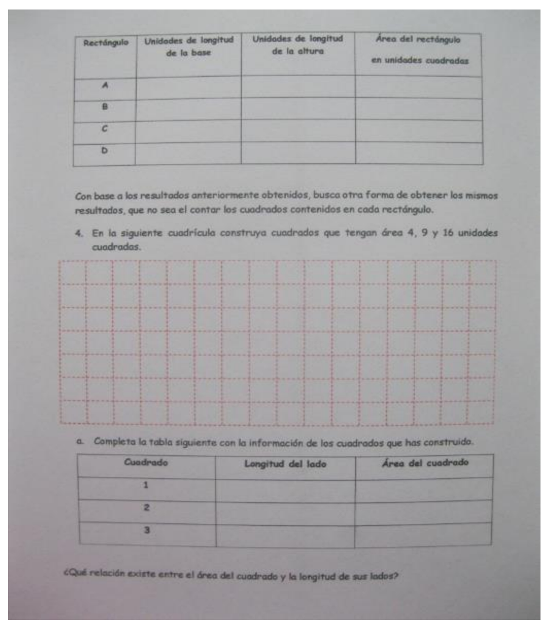
3. Considerando la longitud del lado de los cuadrados pequeños de la figura como unidad de longitud y el cuadrado pequeño como unidad de área.

Observa el siguiente ejemplo:



Rectángulo	Unidades de longitud de la base	Unidades de longitud de la altura	Área del rectángulo en unidades cuadradas
1	1	1	1
2	2	1	2
3	2	2	4

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, observa los siguientes rectángulos y completa la tabla:



Rectángulo	Unidades de longitud de la base	Unidades de longitud de la altura	Área del rectángulo en unidades cuadradas
A			
B			
C			
D			

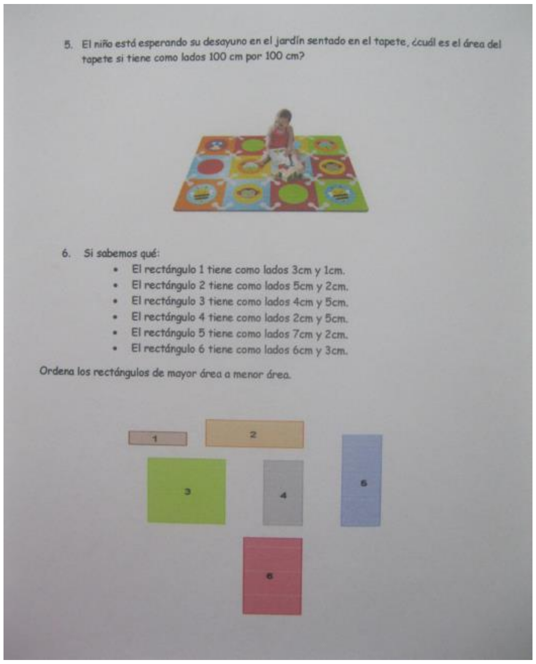
Con base a los resultados anteriormente obtenidos, busca otra forma de obtener los mismos resultados, que no sea el contar los cuadrados contenidos en cada rectángulo.

4. En la siguiente cuadrícula construya cuadrados que tengan área 4, 9 y 16 unidades cuadradas.

a. Completa la tabla siguiente con la información de los cuadrados que has construido.

Cuadrado	Longitud del lado	Área del cuadrado
1		
2		
3		

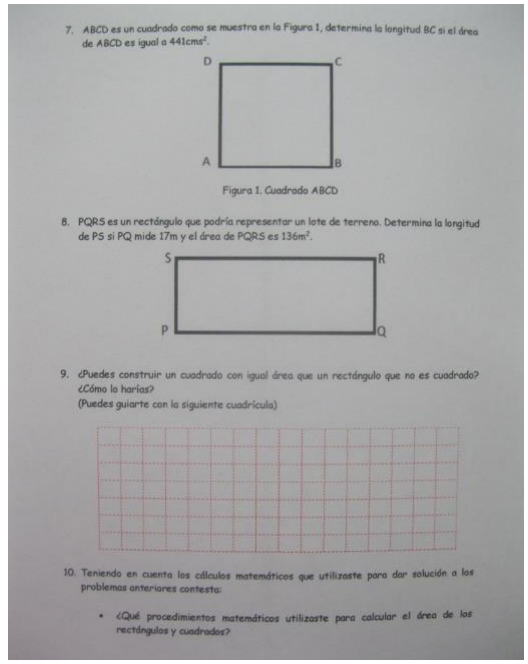
¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y la longitud de sus lados?



5. El niño está esperando su desayuno en el jardín sentado en el tapete, ¿cuál es el área del tapete si tiene como lados 100 cm por 100 cm?

6. Si sabemos qué:
   - El rectángulo 1 tiene como lados 3cm y 1cm.
   - El rectángulo 2 tiene como lados 5cm y 2cm.
   - El rectángulo 3 tiene como lados 4cm y 5cm.
   - El rectángulo 4 tiene como lados 2cm y 5cm.
   - El rectángulo 5 tiene como lados 7cm y 2cm.
   - El rectángulo 6 tiene como lados 6cm y 3cm.

Ordena los rectángulos de mayor área a menor área.



7. ABCD es un cuadrado como se muestra en la Figura 1, determina la longitud BC si el área de ABCD es igual a $441cms^2$.

D C A B

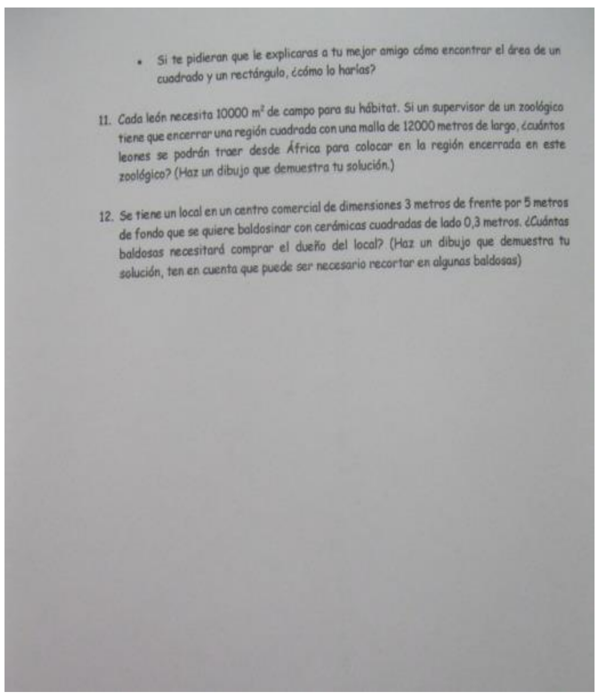
Figura 1. Cuadrado ABCD

8. PQRS es un rectángulo que podría representar un lote de terreno. Determina la longitud de PS si PQ mide 17m y el área de PQRS es $136m^2$.

S R P Q

9. ¿Puedes construir un cuadrado con igual área que un rectángulo que no es cuadrado? ¿Cómo lo harías?
(Puedes guiarte con la siguiente cuadrícula)

10. Teniendo en cuenta los cálculos matemáticos que utilizaste para dar solución a los problemas anteriores contesta:
    - ¿Qué procedimientos matemáticos utilizaste para calcular el área de los rectángulos y cuadrados?

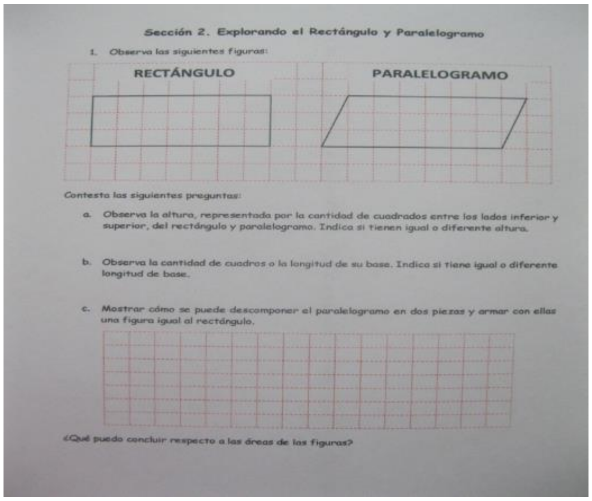


- Si te pidieran que le explicaras a tu mejor amigo cómo encontrar el área de un cuadrado y un rectángulo, ¿cómo lo harías?

11. Cada león necesita 10000 m^2 de campo para su hábitat. Si un supervisor de un zoológico tiene que encerrar una región cuadrada con una malla de 12000 metros de largo, ¿cuántos leones se podrán traer desde África para colocar en la región encerrada en este zoológico? (Haz un dibujo que demuestra tu solución.)

12. Se tiene un local en un centro comercial de dimensiones 3 metros de frente por 5 metros de fondo que se quiere baldosinar con cerámicas cuadradas de lado 0,3 metros. ¿Cuántas baldosas necesitará comprar el dueño del local? (Haz un dibujo que demuestra tu solución, ten en cuenta que puede ser necesario recortar en algunas baldosas)

Anexo 7. Sección 2. Explorando el Rectángulo y Paralelogramo


Sección 2. Explorando el Rectángulo y Paralelogramo

1. Observa las siguientes figuras:

RECTÁNGULO

PARALELOGRAMO

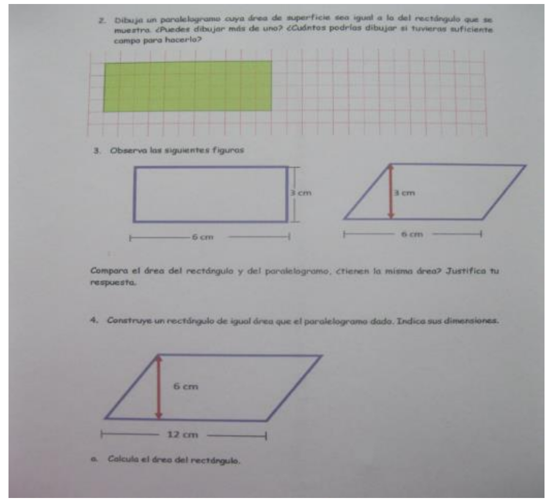
Contesta las siguientes preguntas:

a. Observa la altura, representada por la cantidad de cuadrados entre los lados inferior y superior, del rectángulo y paralelogramo. Indica si tienen igual o diferente altura.

b. Observa la cantidad de cuadros o la longitud de su base. Indica si tiene igual o diferente longitud de base.

c. Mostrar cómo se puede descomponer el paralelogramo en dos piezas y armar con ellas una figura igual al rectángulo.

¿Qué puedo concluir respecto a las áreas de las figuras?


2. Dibuja un paralelogramo cuya área de superficie sea igual a la del rectángulo que se muestra. ¿Puedes dibujar más de uno? ¿Cuántos podrías dibujar si tuvieras suficiente campo para hacerlo?

3. Observa las siguientes figuras

3 cm

6 cm

3 cm

6 cm

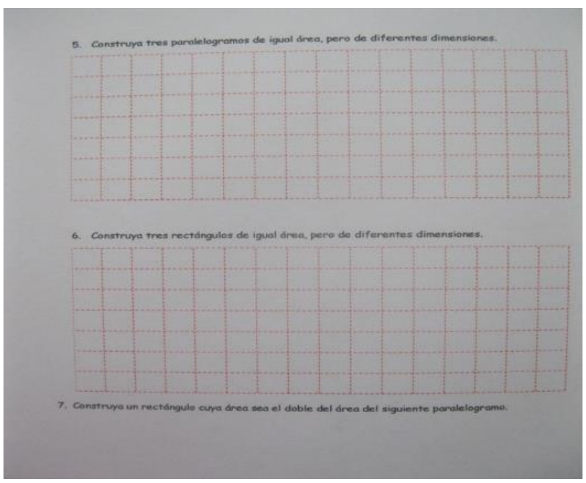
Compara el área del rectángulo y del paralelogramo, ¿tienen la misma área? Justifica tu respuesta.

4. Construye un rectángulo de igual área que el paralelogramo dado. Indica sus dimensiones.

6 cm

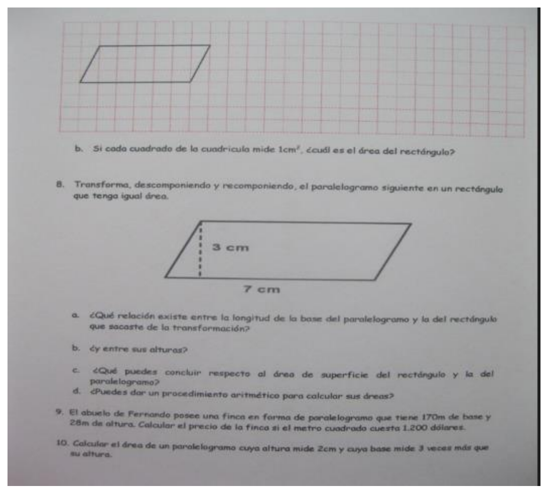
12 cm

a. Calcula el área del rectángulo.


5. Construya tres paralelogramos de igual área, pero de diferentes dimensiones.

6. Construya tres rectángulos de igual área, pero de diferentes dimensiones.

7. Construya un rectángulo cuya área sea el doble del área del siguiente paralelogramo.


b. Si cada cuadrado de la cuadrícula mide $1cm^2$, ¿cuál es el área del rectángulo?

8. Transforma, descomponiendo y recomponiendo, el paralelogramo siguiente en un rectángulo que tenga igual área.

3 cm

7 cm

a. ¿Qué relación existe entre la longitud de la base del paralelogramo y la del rectángulo que sacaste de la transformación?

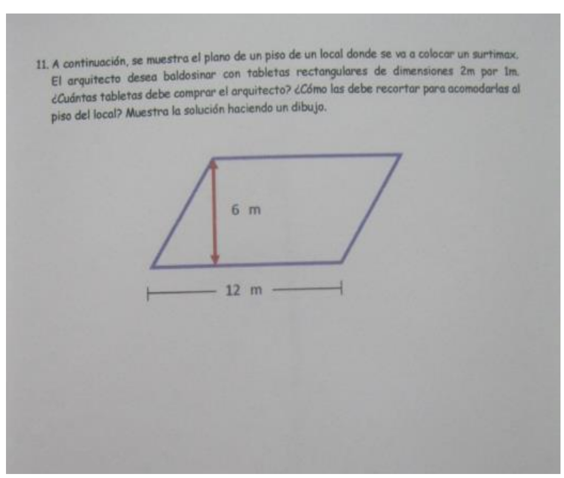
b. ¿y entre sus alturas?

c. ¿Qué puedes concluir respecto al área de superficie del rectángulo y la del paralelogramo?

d. ¿Puedes dar un procedimiento aritmético para calcular sus áreas?

9. El abuelo de Fernando posee una finca en forma de paralelogramo que tiene 170m de base y 28m de altura. Calcular el precio de la finca si el metro cuadrado cuesta 1.200 dólares.

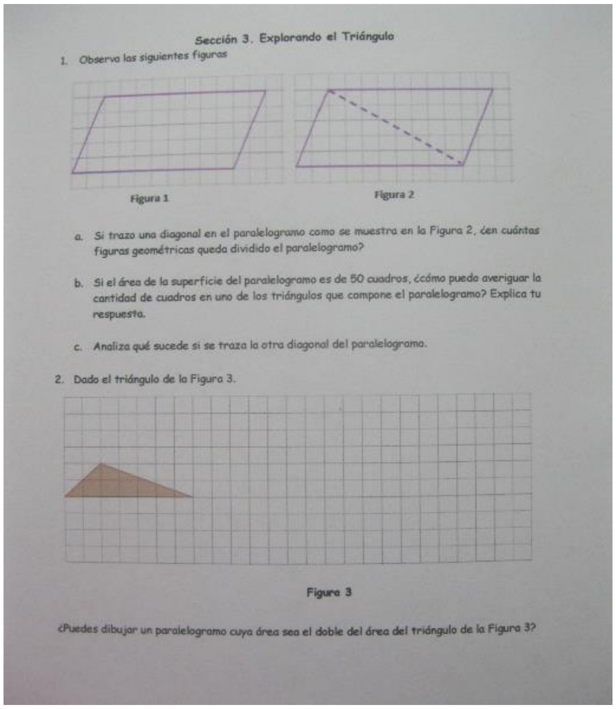
10. Calcular el área de un paralelogramo cuya altura mide 2cm y cuya base mide 3 veces más que su altura.


11. A continuación, se muestra el plano de un piso de un local donde se va a colocar un surtimax. El arquitecto desea baldosinar con tabletas rectangulares de dimensiones 2m por 1m. ¿Cuántas tabletas debe comprar el arquitecto? ¿Cómo las debe recortar para acomodarlas al piso del local? Muestra la solución haciendo un dibujo.

6 m

12 m

Anexo 8. Sección 3. Explorando el Triángulo



Sección 3. Explorando el Triángulo

1. Observa las siguientes figuras

Figura 1 Figura 2

a. Si trazo una diagonal en el paralelogramo como se muestra en la Figura 2, ¿en cuántas figuras geométricas queda dividido el paralelogramo?

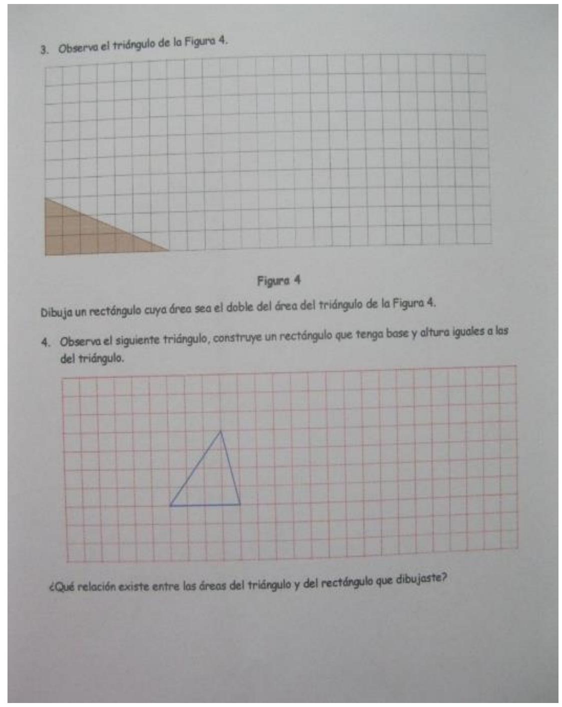
b. Si el área de la superficie del paralelogramo es de 50 cuadros, ¿cómo puedo averiguar la cantidad de cuadros en uno de los triángulos que compone el paralelogramo? Explica tu respuesta.

c. Analiza qué sucede si se traza la otra diagonal del paralelogramo.

2. Dado el triángulo de la Figura 3.

Figura 3

¿Puedes dibujar un paralelogramo cuya área sea el doble del área del triángulo de la Figura 3?



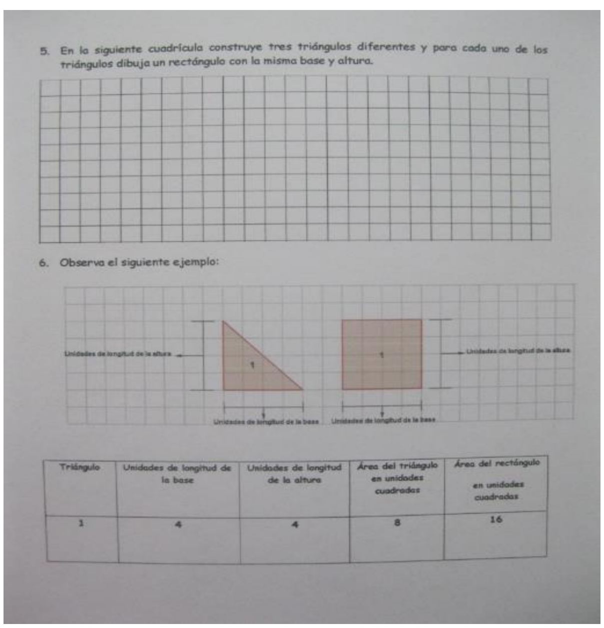
3. Observa el triángulo de la Figura 4.

Figura 4

Dibuja un rectángulo cuya área sea el doble del área del triángulo de la Figura 4.

4. Observa el siguiente triángulo, construye un rectángulo que tenga base y altura iguales a las del triángulo.

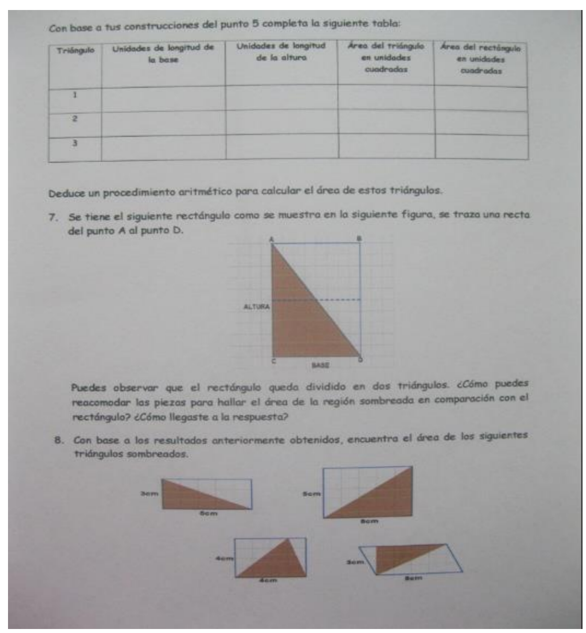
¿Qué relación existe entre las áreas del triángulo y del rectángulo que dibujaste?



5. En la siguiente cuadrícula construye tres triángulos diferentes y para cada uno de los triángulos dibuja un rectángulo con la misma base y altura.

6. Observa el siguiente ejemplo:

Triángulo	Unidades de longitud de la base	Unidades de longitud de la altura	Área del triángulo en unidades cuadradas	Área del rectángulo en unidades cuadradas
1	4	4	8	16



Con base a tus construcciones del punto 5 completa la siguiente tabla:

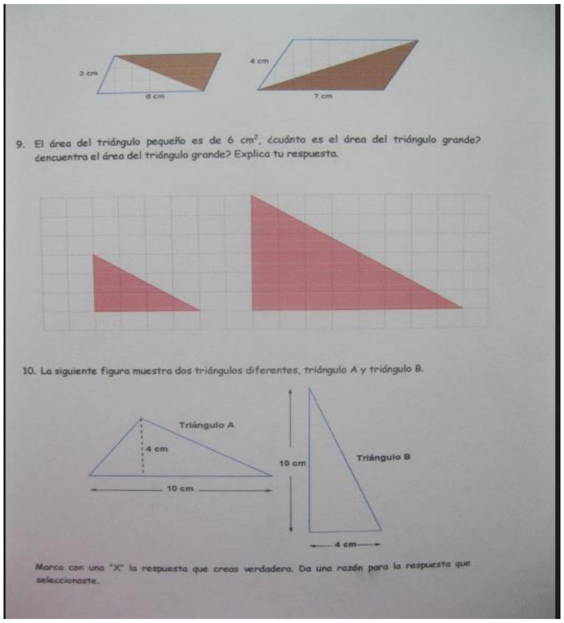
Triángulo	Unidades de longitud de la base	Unidades de longitud de la altura	Área del triángulo en unidades cuadradas	Área del rectángulo en unidades cuadradas
1				
2				
3				

Deduce un procedimiento aritmético para calcular el área de estos triángulos.

7. Se tiene el siguiente rectángulo como se muestra en la siguiente figura, se traza una recta del punto A al punto D.

Puedes observar que el rectángulo queda dividido en dos triángulos. ¿Cómo puedes reacomodar las piezas para hallar el área de la región sombreada en comparación con el rectángulo? ¿Cómo llegaste a la respuesta?

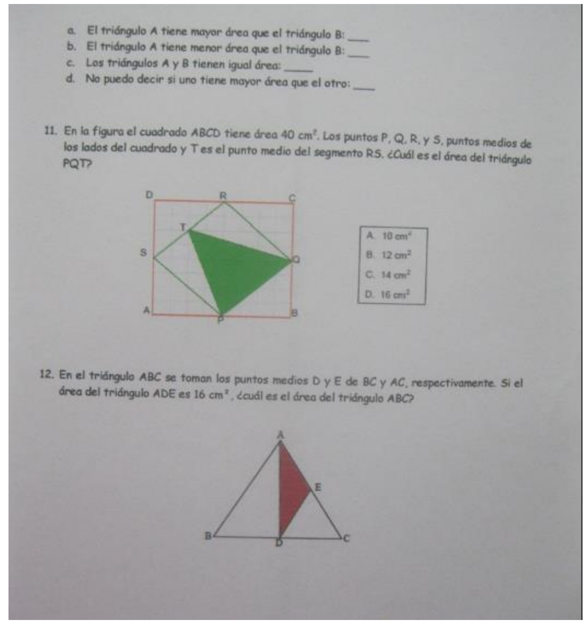
8. Con base a los resultados anteriormente obtenidos, encuentra el área de los siguientes triángulos sombreados.



9. El área del triángulo pequeño es de 6 cm^2, ¿cuánto es el área del triángulo grande? ¿encuentra el área del triángulo grande? Explica tu respuesta.

10. La siguiente figura muestra dos triángulos diferentes, triángulo A y triángulo B.

Marca con una "X" la respuesta que creas verdadera. Da una razón para la respuesta que seleccionaste.

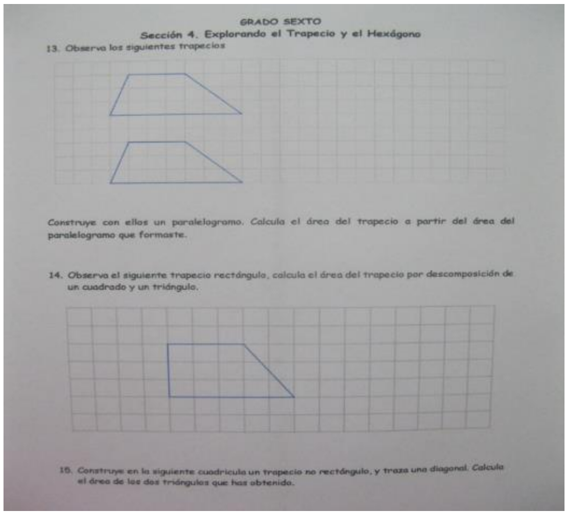


a. El triángulo A tiene mayor área que el triángulo B: ____
b. El triángulo A tiene menor área que el triángulo B: ____
c. Los triángulos A y B tienen igual área: _____
d. No puedo decir si uno tiene mayor área que el otro: ____

11. En la figura el cuadrado ABCD tiene área 40 cm^2. Los puntos P, Q, R, y S, puntos medios de los lados del cuadrado y T es el punto medio del segmento RS. ¿Cuál es el área del triángulo PQT?

12. En el triángulo ABC se toman los puntos medios D y E de BC y AC, respectivamente. Si el área del triángulo ADE es 16 cm^2, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

Anexo 9. sección 4. explorando el trapecio y el hexágono



GRADO SEXTO

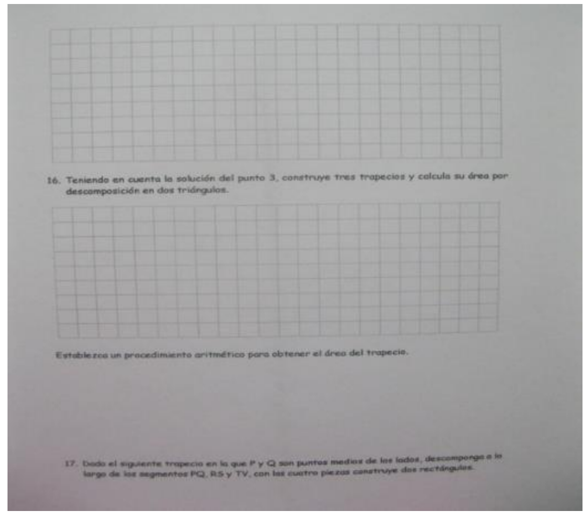
Sección 4. Explorando el Trapecio y el Hexágono

13. Observa los siguientes trapecios

Construye con ellos un paralelogramo. Calcula el área del trapecio a partir del área del paralelogramo que formaste.

14. Observa el siguiente trapecio rectángulo, calcula el área del trapecio por descomposición de un cuadrado y un triángulo.

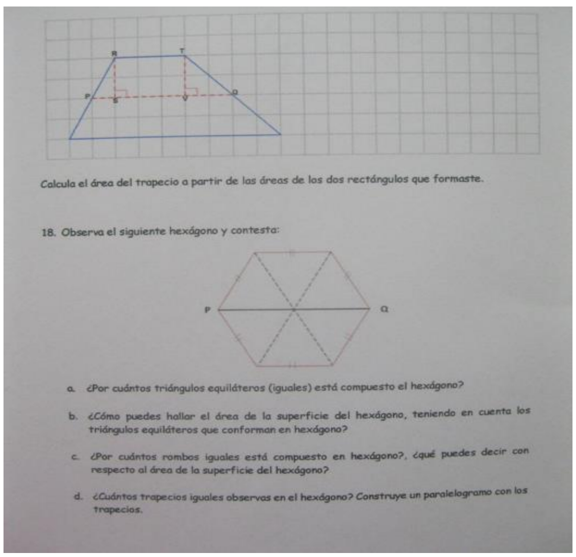
15. Construye en la siguiente cuadricula un trapecio no rectángulo, y traza una diagonal. Calcula el área de los dos triángulos que has obtenido.



16. Teniendo en cuenta la solución del punto 3, construye tres trapecios y calcula su área por descomposición en dos triángulos.

Establezca un procedimiento aritmético para obtener el área del trapecio.

17. Dado el siguiente trapecio en la que P y Q son puntos medios de los lados, descomponga a lo largo de los segmentos PQ, RS y TV, con las cuatro piezas construye dos rectángulos.



Calcula el área del trapecio a partir de las áreas de los dos rectángulos que formaste.

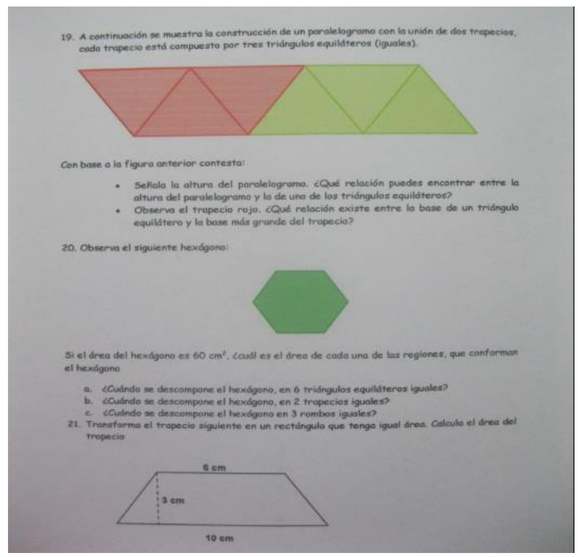
18. Observa el siguiente hexágono y contesta:

a. ¿Por cuántos triángulos equiláteros (iguales) está compuesto el hexágono?

b. ¿Cómo puedes hallar el área de la superficie del hexágono, teniendo en cuenta los triángulos equiláteros que conforman en hexágono?

c. ¿Por cuántos rombos iguales está compuesto en hexágono?, ¿qué puedes decir con respecto al área de la superficie del hexágono?

d. ¿Cuántos trapecios iguales observas en el hexágono? Construye un paralelogramo con los trapecios.



19. A continuación se muestra la construcción de un paralelogramo con la unión de dos trapecios, cada trapecio está compuesto por tres triángulos equiláteros (iguales).

Con base a la figura anterior contesta:

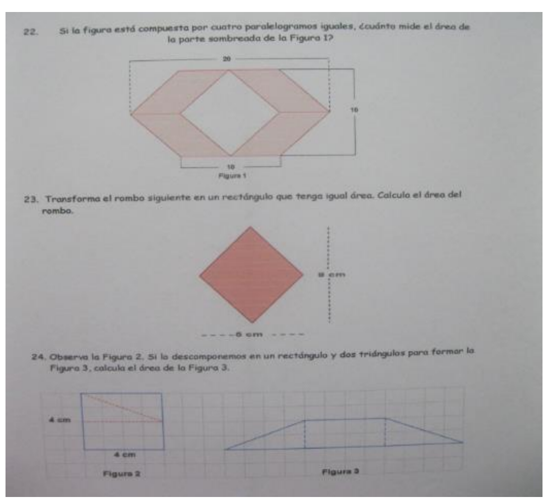
- Señala la altura del paralelogramo. ¿Qué relación puedes encontrar entre la altura del paralelogramo y la de uno de los triángulos equiláteros?
- Observa el trapecio rojo. ¿Qué relación existe entre la base de un triángulo equilátero y la base más grande del trapecio?

20. Observa el siguiente hexágono:

Si el área del hexágono es 60 cm^2, ¿cuál es el área de cada una de las regiones, que conforman el hexágono

a. ¿Cuándo se descompone el hexágono, en 6 triángulos equiláteros iguales?
b. ¿Cuándo se descompone el hexágono, en 2 trapecios iguales?
c. ¿Cuándo se descompone el hexágono en 3 rombos iguales?

21. Transforma el trapecio siguiente en un rectángulo que tenga igual área. Calcula el área del trapecio



22. Si la figura está compuesta por cuatro paralelogramos iguales, ¿cuánto mide el área de la parte sombreada de la Figura 1?

Figura 1

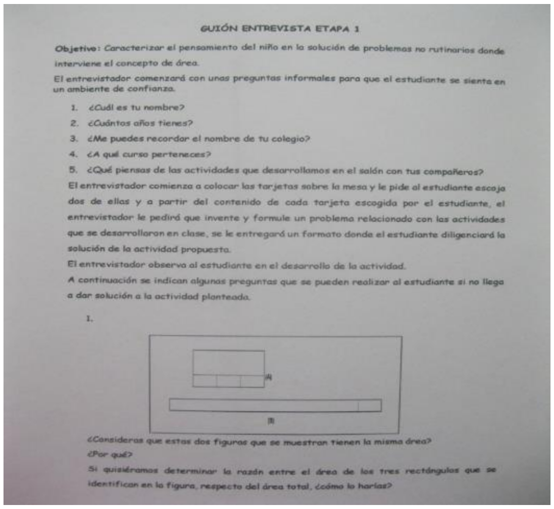
23. Transforma el rombo siguiente en un rectángulo que tenga igual área. Calcula el área del rombo.

24. Observa la Figura 2. Si la descomponemos en un rectángulo y dos triángulos para formar la Figura 3, calcula el área de la Figura 3.

Figura 2

Figura 3

Anexo 10. Guión entrevista etapa 1


GUIÓN ENTREVISTA ETAPA 1

Objetivo: Caracterizar el pensamiento del niño en la solución de problemas no rutinarios donde interviene el concepto de área.

El entrevistador comenzará con unas preguntas informales para que el estudiante se sienta en un ambiente de confianza.

1. ¿Cuál es tu nombre?
2. ¿Cuántos años tienes?
3. ¿Me puedes recordar el nombre de tu colegio?
4. ¿A qué curso perteneces?
5. ¿Qué piensas de las actividades que desarrollamos en el salón con tus compañeros?

El entrevistador comienza a colocar las tarjetas sobre la mesa y le pide al estudiante escoja dos de ellas y a partir del contenido de cada tarjeta escogida por el estudiante, el entrevistador le pedirá que invente y formule un problema relacionado con las actividades que se desarrollaron en clase, se le entregará un formato donde el estudiante diligenciará la solución de la actividad propuesta.

El entrevistador observa al estudiante en el desarrollo de la actividad.

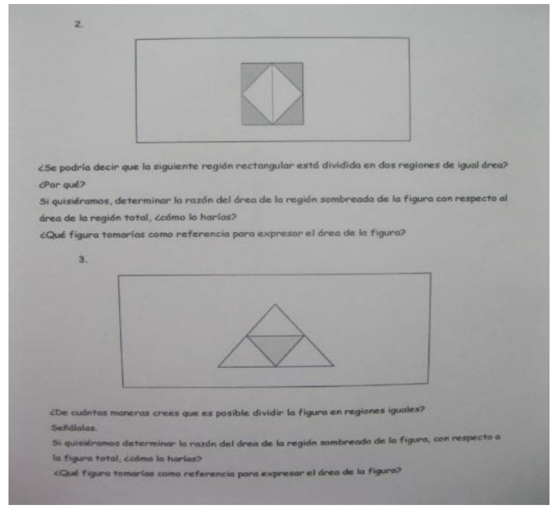
A continuación se indican algunas preguntas que se pueden realizar al estudiante si no llega a dar solución a la actividad planteada.

1.

(A)

(B)

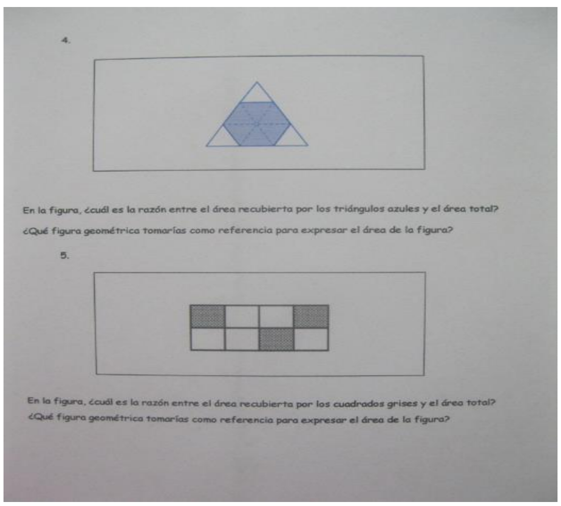
¿Consideras que estas dos figuras que se muestran tienen la misma área?
¿Por qué?
Si quisiéramos determinar la razón entre el área de los tres rectángulos que se identifican en la figura, respecto del área total, ¿cómo lo harías?


2.

¿Se podría decir que la siguiente región rectangular está dividida en dos regiones de igual área?
¿Por qué?
Si quisiéramos, determinar la razón del área de la región sombreada de la figura con respecto al área de la región total, ¿cómo lo harías?
¿Qué figura tomarías como referencia para expresar el área de la figura?

3.

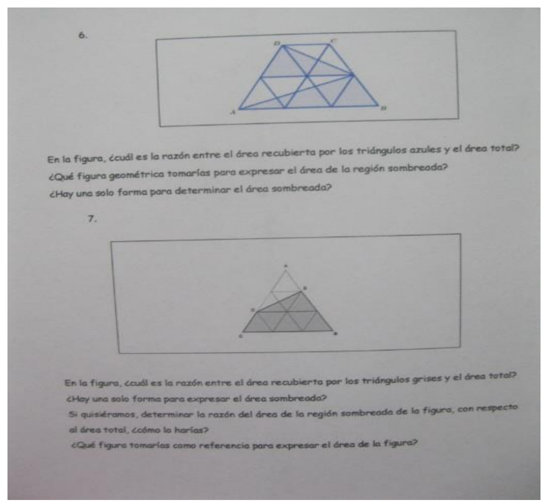
¿De cuántas maneras crees que es posible dividir la figura en regiones iguales?
Señálalas.
Si quisiéramos determinar la razón del área de la región sombreada de la figura, con respecto a la figura total, ¿cómo lo harías?
¿Qué figura tomarías como referencia para expresar el área de la figura?


4.

En la figura, ¿cuál es la razón entre el área recubierta por los triángulos azules y el área total?
¿Qué figura geométrica tomarías como referencia para expresar el área de la figura?

5.

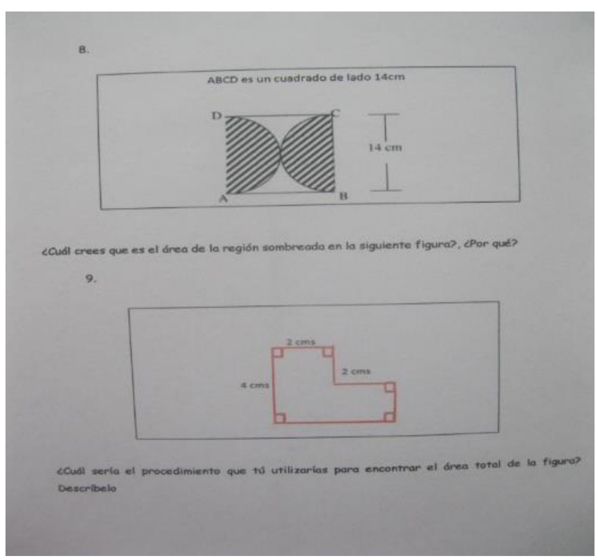
En la figura, ¿cuál es la razón entre el área recubierta por los cuadrados grises y el área total?
¿Qué figura geométrica tomarías como referencia para expresar el área de la figura?


6.

En la figura, ¿cuál es la razón entre el área recubierta por los triángulos azules y el área total?
¿Qué figura geométrica tomarías para expresar el área de la región sombreada?
¿Hay una solo forma para determinar el área sombreada?

7.

En la figura, ¿cuál es la razón entre el área recubierta por los triángulos grises y el área total?
¿Hay una solo forma para expresar el área sombreada?
Si quisiéramos, determinar la razón del área de la región sombreada de la figura, con respecto al área total, ¿cómo lo harías?
¿Qué figura tomarías como referencia para expresar el área de la figura?


8.

ABCD es un cuadrado de lado 14cm

D C A B

14 cm

¿Cuál crees que es el área de la región sombreada en la siguiente figura?, ¿Por qué?

9.

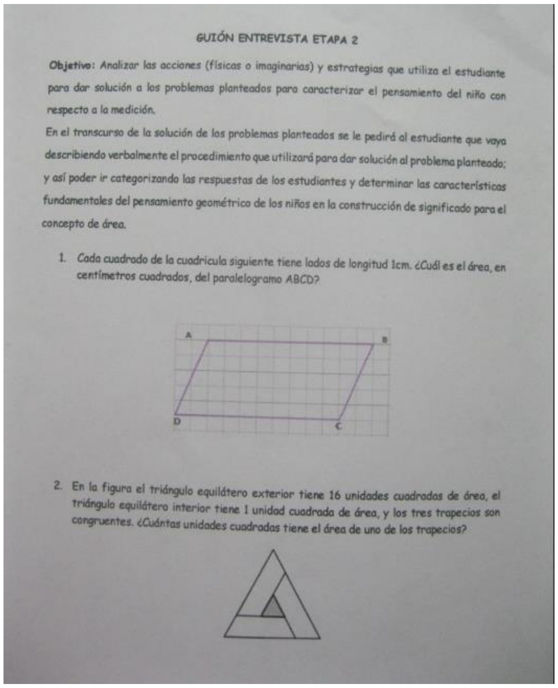
2 cms

2 cms

4 cms

¿Cuál sería el procedimiento que tú utilizarías para encontrar el área total de la figura?
Descríbelo

Anexo 11. Guión entrevista etapa 2



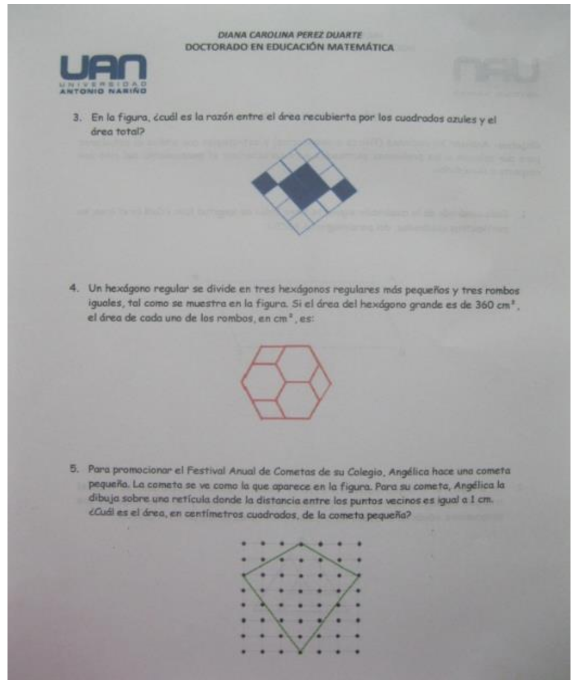
GUIÓN ENTREVISTA ETAPA 2

Objetivo: Analizar las acciones (físicas o imaginarias) y estrategias que utiliza el estudiante para dar solución a los problemas planteados para caracterizar el pensamiento del niño con respecto a la medición.

En el transcurso de la solución de los problemas planteados se le pedirá al estudiante que vaya describiendo verbalmente el procedimiento que utilizará para dar solución al problema planteado; y así poder ir categorizando las respuestas de los estudiantes y determinar las características fundamentales del pensamiento geométrico de los niños en la construcción de significado para el concepto de área.

1. Cada cuadrado de la cuadricula siguiente tiene lados de longitud 1cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, del paralelogramo ABCD?

2. En la figura el triángulo equilátero exterior tiene 16 unidades cuadradas de área, el triángulo equilátero interior tiene 1 unidad cuadrada de área, y los tres trapecios son congruentes. ¿Cuántas unidades cuadradas tiene el área de uno de los trapecios?

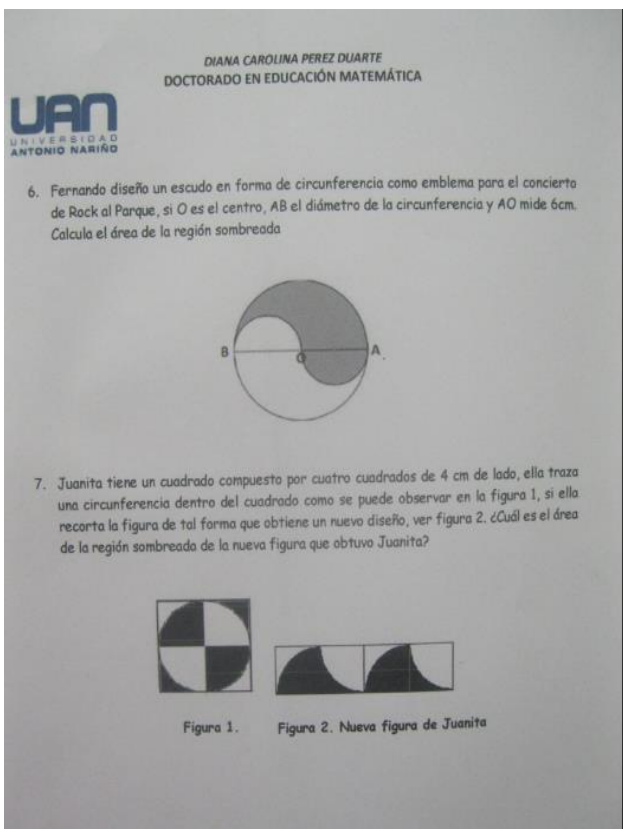


DIANA CAROLINA PEREZ DUARTE
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

3. En la figura, ¿cuál es la razón entre el área recubierta por los cuadrados azules y el área total?

4. Un hexágono regular se divide en tres hexágonos regulares más pequeños y tres rombos iguales, tal como se muestra en la figura. Si el área del hexágono grande es de 360 cm^2, el área de cada uno de los rombos, en cm^2, es:

5. Para promocionar el Festival Anual de Cometas de su Colegio, Angélica hace una cometa pequeña. La cometa se ve como la que aparece en la figura. Para su cometa, Angélica la dibuja sobre una retícula donde la distancia entre los puntos vecinos es igual a 1 cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la cometa pequeña?



DIANA CAROLINA PEREZ DUARTE
DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

6. Fernando diseño un escudo en forma de circunferencia como emblema para el concierto de Rock al Parque, si O es el centro, AB el diámetro de la circunferencia y AO mide 6cm. Calcula el área de la región sombreada

7. Juanita tiene un cuadrado compuesto por cuatro cuadrados de 4 cm de lado, ella traza una circunferencia dentro del cuadrado como se puede observar en la figura 1, si ella recorta la figura de tal forma que obtiene un nuevo diseño, ver figura 2. ¿Cuál es el área de la región sombreada de la nueva figura que obtuvo Juanita?

Figura 1. Figura 2. Nueva figura de Juanita

Anexo 12. Porcentaje de preguntas correctas. Guión entrevista etapa 2