UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS TIPOS DE INSIGHT EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PLANTEADOS EN EL SALON DE CLASES

Mg. Carlos Alberto Cañón Rincón

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2017

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS TIPOS DE INSIGHT EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PLANTEADOS EN EL SALON DE CLASES

Mg. Carlos Alberto Cañón Rincón

Tesis que se presenta como requisito parcial para obtener

El título de Doctor en Educación Matemática

Director de tesis: Dr. Mauro García Pupo (Ph.D)

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2017

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, Enero de 2017

Agradecimientos

Al Doctor Mauro Misael Garcia Pupo, por su dedicación, paciencia, como tutor, por sus aportes y orientaciónes ofrecidos para el desarrollo y culminación de esta investigación, además de sus consejos ofrecidos en todo mi proceso de formación en el doctorado.

A la Doctora Mary Falk de Losada por sus aportes valiosos recibidos en los diferentes talleres de tesis.

Al cuerpo docente del doctorado por su formación en la diferentes asignaturas que recibí y que aportaron para mi crecimiento profesional y personal.

A mis compañeros del doctorado por sus contribuciones que me ayudaron a culminar otra etapa de vida profesional.

Dedicatoria

A Dios, por ser mi fuente de inspiración, otorgarme salud, y conocimiento para lograr mis objetivos.

A mi hijo Gabriel David Cañón Cárdenas, por ser el eje central de mi vida y mi razón de ser.

A mi familia, por su apoyo incondicional.

A Francy por acompañarme en esta nueva etapa de mi vida.

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo diseñar una metodología que permitiera apreciar y caracterizar la ocurrencia del *insight* en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución de problemas por los estudiantes, propuestos en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Se utilizó una metodología con un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos en dos experiencias; la primera correspondiente al segundo semestre de 2015 y la segunda al primer semestre de 2016, por medio de un curso electivo el cual se denominó “Desarrollo del pensamiento matemático a través de la solución de problemas”, con la finalidad de contribuir a la formación del futuro profesor de matemáticas de tal forma que pueda profundizar en el conocimiento matemático ya adquirido como resultado del pensamiento matemático empleado en el proceso de la solución de problemas.

Como parte del análisis y discusión de los resultados obtenidos en las dos experiencias fue posible identificar y caracterizar tres tipos de *insight* en relación con los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la solución de problemas matemáticos propuestos en el salón de clases, que cuando ocurren permiten encontrar una solución de forma exitosa.

Abstract

This research had as an objective the design of a methodology that would allow appreciating and characterizing the occurrence of *Insight* in convergent and divergent types of mathematical thinking that are present in the problem solving achieved by students of a course of the bachelor's degree in mathematics teaching in the Antonio Nariño University.

A qualitative approach was used in a case study composed of two experiences, the first experience corresponding to the second academic semester of 2015, and the second, to the first academic semester of 2016. An elective course entitled "Development of mathematical thought through problem solving", was the setting in which this observation was made. This elective course had also the aim of contributing to the formation of the future mathematics professor, in a way that he or she can deepen the mathematical thought used in the process of problem solving.

As part of the analysis and discussion of the results obtained in the two experiments, it was possible to identify and characterize three types of *insight* in relation to the types of convergent and divergent mathematical thinking present in the solution of mathematical problems proposed in the classroom, that when they occur allow us to find a successful solution.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación *“Contribuciones epistemológicas a la educación matemática”* cuya finalidad es la búsqueda de respuestas aproximadas a tres preguntas estrechamente relacionadas a la solución de problemas matemáticos. Sierpinska y Lerman (1996) proponen éstas:

- ¿Cuáles son los orígenes de los conocimientos científicos?
- ¿Cuáles son los criterios de validez de los conocimientos científicos?
- ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico?

Sin embargo, este trabajo también está en relación directa con otra de las líneas de investigación contemplada en los programas de Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, la referida a e*strategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para estudiantes talentosos)*[1].

Sin embargo, se considera que muchos de los aspectos que se manifiestan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas presentan elementos que son de sumo interés lo cual sugiere la realización de un estudio sistemático.

Las relativas al pensamiento matemático encierran una riqueza que al estudiarlas pueden revelar propiedades que permitan enriquecer una parte del estado del arte, en relación a los fenómenos cognitivos que puedan caracterizar el pensamiento matemático.

[1] Documento del programa de Doctorado en Educación Matemática, 2011.

Existen diferentes clasificaciones para el pensamiento matemático. Se va a tener presente una de ellas, en la que algunos autores clasifican en dos categorías el pensamiento matemático:

1. Pensamiento convergente
2. Pensamiento divergente[2]

Para Guilford (1950) el pensamiento convergente se fundamenta en la búsqueda de una respuesta determinada o convencional cuyo resultado lo identifica con una única solución a un problema. Por otro lado, el pensamiento divergente se identifica con una situación en la cual se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor y/o novedosa solución al problema. Además, incluye la creatividad al considerar que todos los individuos poseen ambos tipos de pensamiento, pero no todos tienen la misma capacidad para utilizarlas.

El autor de esta investigación considera que en la construcción de una parte de las contribuciones en las ciencias matemáticas ha prevalecido un pensamiento convergente. Sin embargo, se considera que los grandes aportes, aquellos que marcan nuevos horizontes y que transcienden, han estado soportados por un pensamiento divergente.

Por otra parte, se ha podido constatar directamente que en la construcción de soluciones a problemas matemáticos relevantes o en la solución de problemas de competiciones matemáticas se han presentado experiencias singulares en las cuales, después de transcurrido un cierto tiempo de búsqueda infructuosa de una solución a un problema, ésta ha emergido abruptamente, incluso después de haberse

[2] Términos introducidos por Guilford en 1950.

abandonado la búsqueda. Esto puede ocurrir en circunstancias muy ajenas al ambiente académico de la labor matemática; por ejemplo, se puede hacer referencia a Gauss, quien escribía así refiriéndose en una carta a cierto teorema de teoría de números que había tratado de demostrar, sin éxito, durante varios años.

"Finalmente, hace dos días, lo logré, no por mis penosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como tras un repentino resplandor de relámpago, el enigma apareció resuelto. Yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que conectó lo que yo sabía previamente con lo que hizo mi éxito posible… (De una carta comentada en Revue des questions scientifiques, octubre 1886, p. 575. Citado por Hadamard, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, cap.1)"[3].

En un artículo Miguel de Guzmán (2001) relata un suceso ocurrido en 1858, donde Hamilton describe su hallazgo de la teoría de los cuaternios, tras quince años de infructuosos esfuerzos.

"Mañana será el aniversario quince de los cuaternios. Vinieron a la vida, o a la luz, completamente maduros, el 16 de octubre de 1843, cuando paseaba con la señora Hamilton hacia Dublín, al llegar al puente de Brougham. Allí, y en aquel momento, sentí que el circuito galvánico del pensamiento se cerraba, y las chispas que saltaron de él fueron las ecuaciones fundamentales que ligan i, j, k [los nuevos números que hacen el papel de i de los complejos], exactamente tal como los he usado siempre desde entonces.... Sentí que en aquel momento se había resuelto un problema, que se había

[3] Guzmán, M. (2001). *La actividad subconsciente en la resolución de problemas*. Recuperado el 2 de abril de 2014 del URL: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/04vida/parapensarmejor/27capitulo.html

satisfecho una necesidad intelectual que me había perseguido por lo menos quince años" …[4]

Por otra parte, a finales del siglo XIX, Poincaré quiso caracterizar el cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido se puede encontrar descripciones en la literatura de educación matemática vinculada con la solución de problemas, el cual se relaciona a veces con el talento o con la capacidad y con la creatividad de cada individuo, como parte sustancial de sus competencias.

Ahora bien, la definición de problema ofrecida por Campistrous y Rizo (1996):

"Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación"[4]*,* permite relacionar la definición de problema y el proceso de solución de manera directa con el proceso del pensamiento matemático que se puede activar para transformar las situaciones iniciales a que estos autores se refieren.

Podría preguntarse: ¿Son o no los procesos de los dos tipos de pensamiento matemático, ya mencionados, consecuentes con el problema mismo? La respuesta es no. Se tienen ejemplos de sujetos que ante un mismo problema de la matemática elemental presentan diferentes tipos de pensamiento, ya que algunos podrán mostrar sólo una solución correcta, mientras que otros podrán ofrecer varias soluciones, y para otros ninguna solución inmediata. Aquí se puede preguntar ¿en estos últimos existe una ausencia total de pensamiento matemático de cualquiera de los dos tipos?

---

[4] Campistrous l. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Planteamiento del problema

En la actualidad se pueden encontrar numerosos trabajos en el campo de la educación matemática dedicados al desarrollo del pensamiento matemático convergente o divergente relacionado con la resolución de problemas desde la escuela hasta la universidad.

Por otra parte, se considera que, durante el proceso de solución de un problema, pueden darse pequeños saltos en el pensamiento, correspondientes a la superación del bloqueo que provoca el mismo problema cuando no se encuentra una solución inmediata. Por lo general, esto ocurre porque es característico del cerebro humano que, después de estudiar cierto problema por un buen tiempo, sin encontrar dicha solución, el subconsciente continúa trabajando a pesar de que se esté realizando otras actividades muy diferentes y que, luego de un tiempo, que puede durar poco o hasta años; aparece de repente la solución del mismo. Esto es lo que se describe como el *insight* (Lisa Aziz-Zadek, (2013), Poincaré (1908)), o la experiencia de **iluminación** que de alguna forma le da una solución a lo que parecía imposible.

Algunos autores, entre ellos Lisa Aziz-Zadek[5], (2013) suponen que este tipo de *fenómeno cognitivo* está asociado al pensamiento divergente que produce una activación alta e inesperada al asociar ideas remotas y que además activa las áreas de placer del cerebro.

El insight se produce cuando se da el desbloqueo interno, dando paso a la aclaración de lo que tan insistentemente se buscaba y de acuerdo a lo que manifestaba

[5] Aziz-Zadek, Lisa, et.al.(2013). Exploring the Neural Correlates of Visual Creativity. *Soc. Cogn. Affect. Neurosci.*,8 (4): pp. 475-480.

Hadamard seguidor de las ideas de Poincaré[6] forma parte de cuatro fases en el proceso creador: i) preparación, ii) incubación; iii) iluminación y iv) verificación.

Davis y Hersh (1990), lo describen como *"destellos de insight",* algo que ha dado paso a la luz, una nueva comprensión de la persona.

Lo anterior sugiere la necesidad de responder:

- ¿Qué tipos de *insight* podrían propiciarse dentro y fuera del aula en el transcurso de los esfuerzos de los estudiantes por resolver problemas no rutinarios?
- ¿Si el pensamiento divergente debe asociarse únicamente a situaciones donde se encuentran diferentes caminos que permiten encontrar una mejor o novedosa solución?
- ¿Se podría asociar el pensamiento divergente sólo con una solución novedosa o excepcional?

Justificación del problema

Actualmente se encuentran diferentes investigaciones sobre el pensamiento divergente y convergente, y que involucran la resolución de problemas en diferentes niveles.

En este trabajo se pretende comprender si en los dos tipos de pensamiento matemático, tanto el convergente como el divergente, pueden describirse diferentes tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa.

[6]Poincaré, H. (1908). *L'Enseignement Mathématique.*

Durante este proceso, se busca establecer si el *insight* puede ser propiciado en los estudiantes cuando adquieren un nuevo conocimiento a través de la resolución de problemas no rutinarios cuidadosamente construidos.

Por otra parte, en el trabajo de Fauconnier & Turner (1998 y 2002) *"Conceptual Integration Networks"* se sostiene que la integración conceptual en general es una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales, y la categorización conceptual. Los autores presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar, que se denominan *cognitive blending,* la que se considera relacionada con el fenómeno del *insight.* Estos autores describen una estructura de entrada de los espacios mentales y un salto o proyección a nuevos espacios mentales independientes de los primeros realizado por medio de una combinación inesperada de operaciones. En el Gráfico 1 se ilustra lo explicado por estos autores en sus obras, gráfico en el cual el autor de esta investigación inserta dicho *insight* como mediador de los espacios mentales.

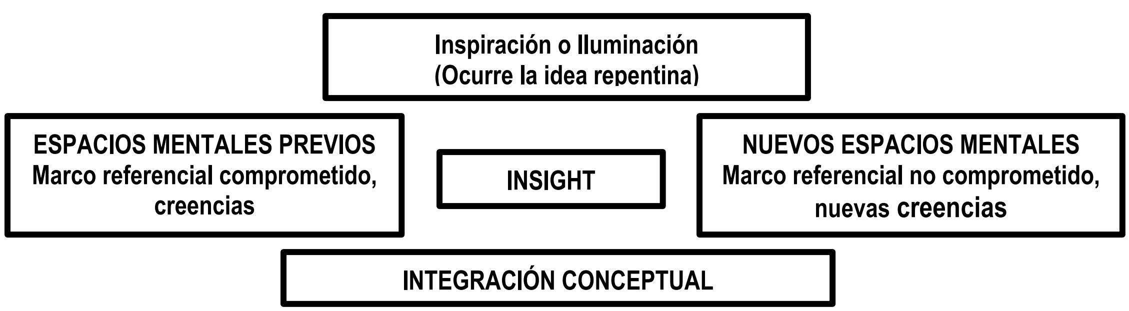


Gráfico 1[7]. Esquema de la ocurrencia de un *insight*.

Es uno de los intereses centrales del presente estudio dar una caracterización a este tipo de *fenómeno cognitivo*[8] en relación con los dos tipos de pensamiento matemático

[7] García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. Convergence vs. Divergence. International Congress of Mathematicians, Seoul, Korea

[8] Por denominarlo de esta manera.

que se pueden presentar en el proceso de solución, a partir de la observación de dos grupos de estudiantes que trabajan en la solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, en dos semestres consecutivos.

Lo anterior induce a formular el siguiente **problema de investigación**:

¿Qué características tienen las ideas que emergen y que se conocen como *insight* cuando ocurren en los tipos de pensamiento convergente o divergente y que se evidencian en los estudiantes en el proceso de solución de problemas matemáticos propuestos en clases?

Objeto de estudio: el pensamiento matemático convergente y divergente en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Se pretende establecer que en estos dos tipos de pensamiento matemático pueden describirse varios tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa, cuestión que se explicitará más adelante en la hipótesis de esta investigación. Ahora se propone el siguiente

Objetivo general

Describir las ocurrencias del *insight* en los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente presentes en la resolución por parte de los estudiantes de problemas propuestos en las clases de un curso de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Antonio Nariño.

Objetivo específico

Determinar las diferentes dimensiones que deben permitir apreciar el *insight*, así como caracterizar su ocurrencia dentro de los tipos de pensamiento matemático (convergente y divergente) que puedan ocurrir durante el proceso de solución de problemas planteados en clase.

Todo lo anterior direcciona el **campo de acción** como:

El *insight* dentro de los dos tipos de pensamiento matemático, el convergente y el divergente, que se manifiestan en el proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño cuando asisten a cursos relacionados con la resolución de problemas matemáticos.

En adición posibilita formular la siguiente:

Hipótesis de investigación

Se pueden describir diferentes tipos de *insight* los que regularmente, cuando suceden, culminan la solución de problemas matemáticos de forma exitosa y novedosa. (Ver Gráfico 2.)

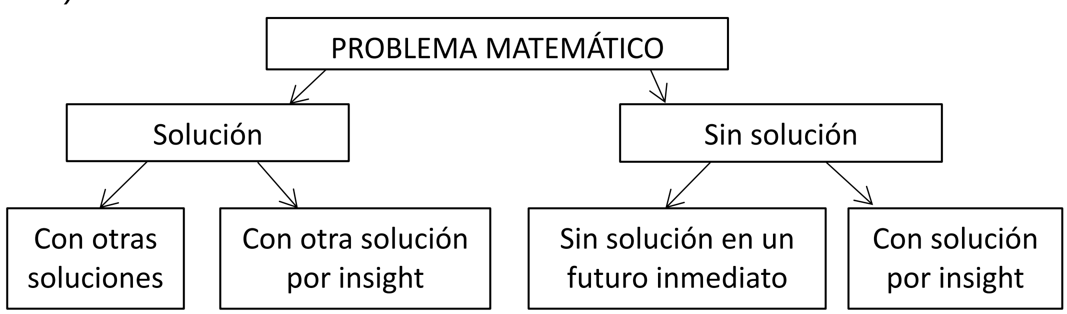


Gráfico 2. Sobre los posibles tipos de insight en la solución de problemas matemáticos.

Tareas

1. Determinar el estado del arte y el marco teórico.
2. Diseñar una metodología de trabajo basada en la observación y seguimiento del comportamiento de aquellos estudiantes a quienes se les pueda presentar el *insight* en el proceso de solución de los problemas matemáticos propuestos.

3. Describir cada situación singular, dentro o fuera del salón de clases como "estudio de casos".
4. Analizar los resultados y descripción de características encontradas en los *insight* en el marco de los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente (o en ninguno).
5. Construir argumentos alrededor de la hipótesis o conjetura planteada.
6. Elaborar y presentar el texto científico de esta investigación.

Aporte teórico y práctico

El diseño y fundamentación de un esquema de resolución de problemas que permita apreciar y caracterizar los diferentes tipos de *insight* que puedan ocurrir en los dos tipos de pensamiento matemático estudiados y que pueden estar presentes en el proceso de resolución de problemas no rutinarios en el salón de clases.

Novedad científica

La relación de los tipos de pensamiento matemático convergente y divergente con el proceso o fenómeno denominado *insight.*

Estructura de la tesis

La tesis está estructurada con una introducción, cuatro capítulos: un capítulo 1 Estado del arte, un capítulo 2. Marco teórico; un capítulo 3. Diseño metodológico de la investigación y un capítulo 4. Resultados, discusión y análisis. Además, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y referencias y Anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En esta sección se presenta una selección de trabajos que se han considerado relevantes para esta investigación. Éstos están relacionados con el pensamiento divergente, convergente, el *insight* y la creatividad en la resolución de problemas matemáticos, sin que ellos representen todo el material que pueda existir con respecto a estos temas, y que se hayan publicado desde la segunda mitad del pasado siglo hasta la fecha. Sin embargo, una cuidadosa selección de diversos autores con resultados muy representativos y de una alta calidad debe permitir orientar la investigación hacia un marco teórico y una metodología de trabajo acertada.

1.1. Sobre el insight según las ciencias psicológicas

1.1.1. Creatividad e insight[9]

Martín, C. (1999) resalta las aportaciones más clásicas de la psicología de la Gestalt, término alemán que hace alusión a la creatividad.

Cuando se solucionan problemas, algunas personas sienten de forma repentina que conocen las respuestas, sin poder explicar cómo lo han logrado (Metcalfe, 1986; Wallas, 1926). La anterior experiencia del denominado "Ahá" ha constituido bases de algunas definiciones de *insight* según (Duncker, 1945; Kohler, 1956; Maier, 1930). Algunas contribuciones han mostrado y sugerido que la solución de tipo *insight* de un problema es contraria a las formas rutinarias y menos repentinas del mismo según (Gruber, 1979; Nickles, 1978).

[9] Martín, C. (1999). Creatividad e insight. *Revista de altas capacidades.* ISSN 1136-8136, Nº.7, pp. 63-84 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2476241.

Investigaciones sobre el *insight* se pueden encontrar en los estudios de la psicología de la Gestalt (Dunker, 1945, Maier, 1930, Wertheimer, 1959) cuyos autores creyeron que el *insight* es un proceso que podría ser diferenciado cualitativamente de otros tipos de procesos mentales y que tiene las siguientes características:

1. Corresponde a una restructuración repentina de un problema que está acompañado de la sensación de “saltos inconscientes” en el pensamiento.
2. Es un proceso mental acelerado.
3. Es una especie de corto circuito en el proceso normal de razonamiento.

Hadamard (1949) ofrece una explicación al fenómeno del *insight*, en la cual identifica cuatro etapas que describen muy bien el *insight* científico: preparación, incubación, iluminación y verificación. Estas características constituyen un conjunto de generalizaciones empíricas relacionadas con el *insight*.

La primera etapa implica un importante esfuerzo en el intento de solucionar un problema dado; en algunos problemas ese intento puede llevar directamente a una solución. Pero para los problemas más difíciles, la persona puede abandonarlos o apartarse.

El abandono permite entrar a la siguiente etapa de incubación, en la cual a nivel consciente la persona está procesando otras cosas. Dependiendo de la situación, esta segunda fase puede durar desde segundos hasta años, pero la persona que experimenta el *insight* propone la solución en la etapa más importante que es la iluminación, la cual debe ocurrir de forma inesperada y rápida, conocida como la experiencia del “Ahá”.

Este salto puede llevar a falsos insight de modo que la cuarta y última etapa, verificación, es la encargada de repasar todos los detalles.

La siguiente tabla resume las cuatro etapas del insight según Hadamard

Tabla 1. Etapas por donde pasa el insight según Hadamard (1949)[10].

ETAPAS	RASGOS	SUJETO
1. PREPARACIÓN	• Gran esfuerzo • Pensamiento consciente • Generar ideas relevantes	• Puede abandonar si la tarea es compleja.
2. INCUBACIÓN	• Puede durar segundos o años. • Proceso inconsciente.	• Se puede procesar otra información.
3. ILUMINACIÓN (insight)	• Es la hora del "Ahá" o del "eureka" • Puede haber "Ahás" falsos.	• Notifica y explicita lo dado en la incubación.
4. VERIFICACIÓN	• Repasa detalles • Puede demostrarse que no existe insight.	• Resuelve de forma consciente.

Se considera que este trabajo presenta aspectos que serán de gran utilidad para la presente investigación, al tratar de describir los posibles insight que pueden emerger en el transcurso de solución de problemas planteados en el aula de clases.

1.1.2. Psicología de la ciencia y la creatividad[11]

Esta investigación se fundamenta en el estudio de la creatividad científica en el marco de la psicología de la ciencia, en él se analizan los orígenes previos desde que esta disciplina de las metaciencias se consolidó como la forma de estudio de una epistemología científica.

Se revisan cuatro métodos de investigación utilizados en el estudio de la creatividad: psicométrico, experimental, historiométrico y estudio de casos.

[10] Martín, C. (1999). Creatividad e insight. *Revista de altas capacidades.* ISSN 1136-8136, Nº. 7, 1999, pp. 63-84 http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo =2476241

[11] Romo, M. (2007). Psicología de la ciencia y creatividad. *Revista creatividad y sociedad.* Nº 10, pp. 7-31, Marzo de 2007, disponible en http://www.creatividadysociedad.com/articulos/14/Creatividad %20y%20Sociedad.%20Psicologia%20de%20la%20ciencia%20y%20la%20creatividad.pdf

Se define como una subdisciplina que surge entre dos campos como son la psicología y las matemáticas. Feist manifestó que: *"La psicología de la ciencia es el estudio empírico de las influencias biológicas, cognitivas, evolutivas, sociales y de personalidad sobre el pensamiento y conducta científica"*[12].

Romo (2009) entiende *"la creatividad como una forma de pensar cuyo resultado es un producto que tiene, a la vez, novedad y valor"*[13]. Ella señala que el estudio de casos puede ser de sumo interés y de utilidad, tal como lo señaló Gruber[14] quien publicó un estudio psicológico de la creatividad científica de Darwin. Este estudio ha sido punto de partida de algunas investigaciones acerca de la creación y que posteriormente hacen parte de los doce casos presentados en otro trabajo de Gardner[15].

Gruber analiza los pasos fallidos en la vida de los grandes científicos, además del papel heurístico de las imágenes que condensan y organizan la información.

Se considera de gran importancia para esta investigación implementar el estudio de casos que de alguna forma permitirá darle seguimiento u observar a los estudiantes a quienes se les pueda presentar algún tipo de *insight* dentro o fuera del salón de clases.

1.1.3. Studying insight problem solving with neuroscientific methods[16]

En esta investigación se estudian los aspectos metodológicos en investigaciones del cerebro cuando ocurre el *insight*, en ella se describen los procesos que suceden

[12] Feist, G. (2006). *The Psychology of Science and the Origins of the Scientific Mind.* Yale University Press, p.4.
[13] Romo, M. (2009). *Psicología de la creatividad.* Barcelona: Paidós (segunda impresión Marzo de 2012).
[14] Gruber, H. E. (1974). Darwin sobre el hombre. Un estudio psicológico de la creatividad científica. Madrid. Alianza, 1981.
[15] Gardner, H. (1993). *Creative minds. An anatomy of creativity*. (trad. cast.: *mentes creativas*. Barcelona, Paidós, 1995).
[16] Luo, J. Knoblich, G. (2007). Studying insight problem solving with neuroscientific methods. *ScienceDirect.* pp. 77-86. Available online at www.sciencedirect.com.

durante la resolución de problemas, como momentos de corta duración de un pensamiento excepcional.

El *insight* requiere una reestructuración de la situación del problema que es relativamente poco frecuente y difícil de obtener en el laboratorio. Una forma de tratar este problema es catalizar estos procesos de reestructuración utilizando indicios de solución, lo cual permite obtener múltiples momentos de *insight,* y de sus tiempos de inicio, que son requeridos para los diseños relacionados con eventos en imágenes de resonancia magnética funcional (FMRI) y el electroencefalograma (EEG), para grabar confiablemente la actividad asociada con el componente de reestructuración del *insight*. La hipótesis de la investigación sostiene que, durante el proceso de reestructuración, nuevas asociaciones se forman entre los nodos de conocimientos existentes.

De acuerdo a lo que manifiestan los autores, se pueden producir *insight* en el proceso de solución de problemas, en los cuales no se activan las mismas partes del cerebro en la reestructuración, ya que es un proceso cognitivo dinámico, que requiere una amplia reorganización de la representación del problema.

1.1.4. Intuition, Incubation, and Insight: Implicit Cognition in Problem Solving[17]

Los autores describen las etapas del pensamiento de acuerdo a lo que propuso Wallas (1926), donde la intuición, incubación y el insight son vistos como "un logro individual del pensamiento" (p. 79). Él descompone las etapas presentes en la resolución de problemas:

[17] Dorfman, J. Shames, V. Kihlstrom, J. (1996). Intuition, incubation, and insight: Implicit cognition in problem solving. Underwood, Geoffrey D. M. (Ed), (1996). *Implicit cognition*. (pp. 257-296). New York, NY, US: Oxford University Press.

- La etapa de *preparación* consiste en la acumulación de conocimientos y el dominio de las reglas lógicas que gobiernan el campo particular donde reside el problema. También implica la adopción de una actitud definitiva ante el problema, incluyendo la toma de conciencia de que existe un problema que debe ser resuelto y el análisis del problema en sí mismo. A veces, el problema se resuelve en ese momento. Por lo general, esto ocurre en la solución de problemas rutinarios, en los cuales la aplicación de un algoritmo, permite llegar a la solución correcta.
- La etapa de *incubación*, una vez comprendido el problema llega el momento de interiorizarlo de forma inconsciente. En esta etapa la persona abandona el problema, abandono que puede durar desde horas hasta meses, deteniendo aparentemente el proceso creador.
- En la etapa de *iluminación*, llega la idea repentina, el *flash*, lo que la persona estaba buscando tan insistentemente puede llegar en los momentos menos inesperados cuando la persona puede estar realizando actividades diferentes.
- La etapa de *verificación,* es el espacio en que la solución es evaluada y rectificada, en algunas ocasiones la persona retrocede a la etapa de incubación, para encontrar una nueva solución.

Además, los autores describen que, en la solución de problemas por insight, de acuerdo con lo que sostiene Bowers (1990, 1995), está presente la activación automática e inconsciente del conocimiento que cada individuo posee.

Estos aspectos pueden ser útiles en la descripción de los posibles tipos de insight que puedan darse en el proceso de la solución de problemas matemáticos dentro o fuera del salón de clases, también mencionado por Hadamard (1949).

1.1.5. The Language Instinct: How the Mind Creates Language[18]

Steven Arthur Pinker, es canadiense, psicólogo experimental, científico cognitivo, lingüista y escritor. Es profesor en el Harvard College y titular del “Johnstone Family Professorship” en el departamento de psicología de la Universidad de Harvard. Dentro de sus especialidades académicas se destacan la percepción y el desarrollo del lenguaje de los niños.

Con respecto a la enseñanza de las matemáticas y la física, Pinker afirma que se pueden facilitar los procesos de aprendizaje de la matemática por medio de dos de los diecisiete módulos mentales que él ha postulado, los de **mecánica intuitiva** y **número**, trabajando primero la construcción de conceptos y reglas, y luego introduciendo los gráficos y sistemas simbólicos que representan los números y relaciones con ecuaciones escritas. Comenta que, equivocadamente, el sistema educativo tradicional, inicia con representaciones simbólicas y escritas en la que utiliza la memorización y abstracción y logra poco entendimiento en los estudiantes.

Otra investigación consultada fue la de Sharma (1979) quién describe el proceso del razonamiento del ser humano a través del hemisferio derecho y hemisferio izquierdo del cerebro, señalando que hay dos perfiles para el aprendizaje de la geometría las cuáles las denomina de naturaleza visual y de naturaleza verbal.

[18] Pinker, S. (1994). *The Language Instinct: How the Mind Creates Language*. p 437. (material sugerido por la Dra. Constance Bohanon, consultora de este trabajo)

1.1.6. Aha!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students[19]

Liljedahl (2004) en su trabajo responde la pregunta ¿Qué impacto tendría la experiencia del ¡Aha! (*insight*) en un grupo de estudiantes próximos a terminar su carrera? Para ello se utilizó una metodología cualitativa fundamentada en la observación, seguimiento y entrevista de una muestra de 76 estudiantes de la licenciatura de matemáticas de la Universidad Simon Fraser, matriculados en el curso Fundamentos de matemáticas para profesores y cuyo principal objetivo fue el de desarrollar la comprensión de las matemáticas en el nivel de primaria. Su duración fue de trece semanas con una intensidad de cuatro horas semanales e hicieron seguimiento y análisis de los estudiantes que optaron por describir su experiencia del denominado ¡Aha!

Los datos para este estudio provienen del proyecto final de semestre, una de las opciones consistió en escribir sobre un ¡Aha! matemático que habían experimentado durante su participación en el curso.

El proyecto valía el 10% de su nota final y tuvieron cuatro semanas para trabajar en él. En una parte de uno de los proyectos presentado por un estudiante se refiere a una experiencia de un ¡Aha! en los siguientes términos: *"Yo había estado trabajando en el problema durante mucho tiempo sin ningún progreso. Entonces de repente me*

[19] Liljedahl, P. (2004). AHA: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. A paper presented in TSG3 at ICME-10. Available online at http://www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG3_Liljedahl.pdf.

sabía la solución, entendí, todo tenía sentido. ¡Pareció como si hubiese acabado de hacer clic! "[20]

El propósito de los proyectos era reflexionar sobre la experiencia de ¡Aha!, y explorar lo que se había aprendido en cada caso.

De acuerdo a las respuestas de los participantes del conjunto de todos los proyectos se destacan cuatro factores en torno a la experiencia del ¡Aha!

1. Ansiedad

Algunos estudiantes manifestaron cierta inquietud sobre el curso de matemáticas que iban a tomar, además de sus sentimientos cambiantes hacia él, se manifestaban en términos de antipatía, miedo, temor y recuerdos traumáticos.

2. Placer

La experiencia del ¡Aha!, en la gran mayoría de estudiantes les produjo un cambio positivo, que de alguna forma contribuyó al cambio de las creencias y actitudes hacia las matemáticas, y les creó un mayor interés para encontrar una solución.

3. Cambio de creencias

Algunos estudiantes se centran en sus propias concepciones en torno a sus habilidades y de cómo ellos hacen matemáticas, y cómo estas creencias pueden cambiar, como se ve en la siguiente expresión de un estudiante: *"Yo solía pensar que la matemática era todo acerca de la respuesta correcta, pero ahora estoy más consciente del valor del proceso."*[21]

[20] Liljedahl, P. (2004). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. A paper presented in TSG3 at ICME-10. Available online at http://www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG3_Liljedahl.pdf.
[21] Ibidem.

4. Cambio de actitudes

El autor considera que las actitudes son las manifestaciones de las creencias, en algunas ocasiones era difícil distinguir entre las dos, ya que toda expresión de un cambio de actitud, tuvo un cambio perceptible en las creencias asociadas a ella. En este sentido destaca las experiencias por parte de dos estudiantes:

"Tengo una mejor actitud; ahora soy más optimista. Esto es útil en el aprendizaje de los procesos de un pensamiento, que puede ser impedido por una actitud de no sentirse retado."[22]

"También, me gustan las matemáticas ahora. Siento que este logro estimuló tener más éxitos. Ahora he ampliado mis expectativas en matemáticas."[23]

En la conclusión de esta investigación evidencian que la experiencia de iluminación (¡Aha!), no sólo es propia de los grandes matemáticos. Su poder se basa en transformar actitudes y creencias en el aprendizaje en las matemáticas, con lo cual se está totalmente de acuerdo, ya que si esta experiencia se relaciona a lo que referían Fauconnier y Turner (1998 y 2002), forma parte de lo que se denominan los espacios mentales previos descritos anteriormente, y que muestra el insight como mediador hacia nuevos espacios mentales. Sin embargo, en esta investigación no se menciona nada con respecto a diferentes tipos de insight que pudieran emerger dentro del pensamiento matemático convergente y/o divergente.

[22] Liljedahl, P. (2004). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. A paper presented in TSG3 at ICME-10. Available online at http://www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG3_Liljedahl.pdf.
[23] Ibidem.

Muchas de las ideas metodológicas de este artículo se han tenido presentes en la propuesta de los dos cursos que se desarrollaron en la Licenciatura en Matemáticas de la UAN, fundamentalmente en los aspectos evaluativos y sobre la importancia de propiciar un clima académico agradable en el acompañamiento por parte del docente. (Ver Anexo 1.)

1.2. Sobre el pensamiento divergente y convergente

1.2.1. Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems[24]

Sak, U. y Maker, C. (2005) indagaron acerca de las relaciones de pensamiento divergente y convergente basadas en la fluidez, originalidad, flexibilidad y la elaboración dentro de la actividad matemática de los estudiantes. Se utilizó una sección de una evaluación basada en el desempeño para evaluar a 867 estudiantes de los grados de 1° a 6° en su dominio matemático. Estadísticamente los autores encontraron correlaciones significativas entre los componentes del pensamiento divergente y convergente, validando la matriz "*Problem Continuum" (Schiever and Maker, 1991, 1997)*, donde las correlaciones entre los tipos de problemas pueden variar de acuerdo a la proximidad de los tipos entre sí.

Los autores hacen referencia que al solucionar problemas se debe abandonar la idea de pensar como se hace habitualmente, y tratar de pensar de una forma no habitual, a esta forma de pensar la denominan pensamiento flexible.

---

[24] Sak, U., Maker, C. (2005). Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems. *International Education Journal*, 2005, 6(2), pp. 252-260. http://iej.cjb.net.

En cuanto al pensamiento divergente están en acuerdo a lo que define Runco (1990), al pensamiento divergente como la generación y aplicación de muchas ideas diferentes para resolver un problema dado considerándose como un buen predictor creativo. Para Guilford, (1967), el objetivo principal del pensamiento divergente está en la cantidad y calidad de las ideas, generadas por el solucionador. También hace referencia a Cropley (1992, 1999) quien elaboró la distinción y la relación entre el pensamiento divergente y convergente. Según este último, los primeros investigadores en la creatividad tienden a separar los dos tipos de pensamiento y los consideran como funciones en diferentes formas de dones. En cuanto a la parte de los estudiantes sostiene que los estudiantes talentosos son poseedores tanto de un pensamiento convergente como divergente; además, muy variado.

Estos referentes pueden ser útiles para el diseño y selección y/o modificación de los tipos de problemas cerrados propuestos en las diferentes actividades.

1.2.2. Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving[25]

Este autor plantea que los enfoques utilizados por los estudiantes al resolver problemas varían significativamente y esas variaciones se deben a los diferentes métodos que requieren de la comprensión conceptual y formas visuales de solución. El objetivo principal que adelantó el autor fue encontrar las dificultades que tuvieron los estudiantes al resolver los problemas en cuanto a la comparación de los dos tipos de pensamiento, el convergente y el divergente, en la solución de problemas matemáticos de cálculo gráfico.

[25] Alamolhodaei, H. (1997). Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving. *Journal of science and mathematics education* in s.e. Asia vol. xxiv, no. 2.

Este estudio se realizó en tercer año de la carrera de matemáticas de los estudiantes de la Universidad Ferdowsi de Mashhad en el noreste de Irán con una muestra de 93 estudiantes que estaban recibiendo cursos de matemáticas como parte de sus carreras.

El procedimiento de análisis de datos se realizó principalmente por medio del uso de la puntuación media; el estudio analizó la varianza de una sola vía que se aplica para comparar las diferencias significativas de dos o más medias por medio de la distribución F. Este instrumento fue utilizado para determinar las diferencias en el desempeño de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas gráficos, éste se clasificó en convergente, intermedio y divergente. Los resultados de las actividades la presentaron en las siguientes tablas:

Resultados de la investigación[26]

Table 1
Statistical information of (Convergent/Divergent) tests

Group	Mean Score	SD	Maximum Score	Minimum Score
N=93	54.53	11.30	32.00	92.00

Table 2
The distribution of cognitive styles over the sample

Group	Convergent	Intermediate	Divergent
N=93	48.6%	22.58%	36.55%

El análisis de los resultados mostró una correlación significativa entre los tipos de pensamiento presentes en la resolución de problemas matemáticos donde intervienen las formas visuales en temas de cálculo.

[26] Alamolhodaei, H. (1997). Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving. *Journal of science and mathematics education* in s.e. Asia vol. xxiv, no. 2.p 109.

Ellos sugieren la planificación de actividades que propicien tanto el pensamiento matemático convergente como el divergente; sin embargo, se considera que esta cuestión no debe resultar nada fácil planificarla a priori, ya que un mismo problema puede provocar un pensamiento convergente en un sujeto, en otro divergente y en otro la situación de no encontrar solución alguna.

1.3. Sobre la resolución de problemas y pensamiento matemático

1.3.1. La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas[27]

Miguel Cruz (2006) en su libro describe los aspectos más importantes en la enseñanza de la matemática por medio de la solución de problemas, desde la influencia de la psicología, en la cual destaca las cuatro fases de la creación propuesto por Wallas: preparación, incubación, iluminación y verificación. Además, destaca la obra de Polya, quien sostiene que para resolver un problema hay que comprender el problema, concebir el plan, ejecutar el plan y verificar la solución obtenida, y enfatiza además las heurísticas que hay que tener en cuenta en cada fase.

Resalta el modelo propuesto por Silver en el cual se expresa la compleja relación entre la memoria humana y el proceso de resolución de problemas.[28]

[27] Cruz, M. (2006). *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas*. Órgano Editor Educación Cubana.
[28] Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed.): *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33–60). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

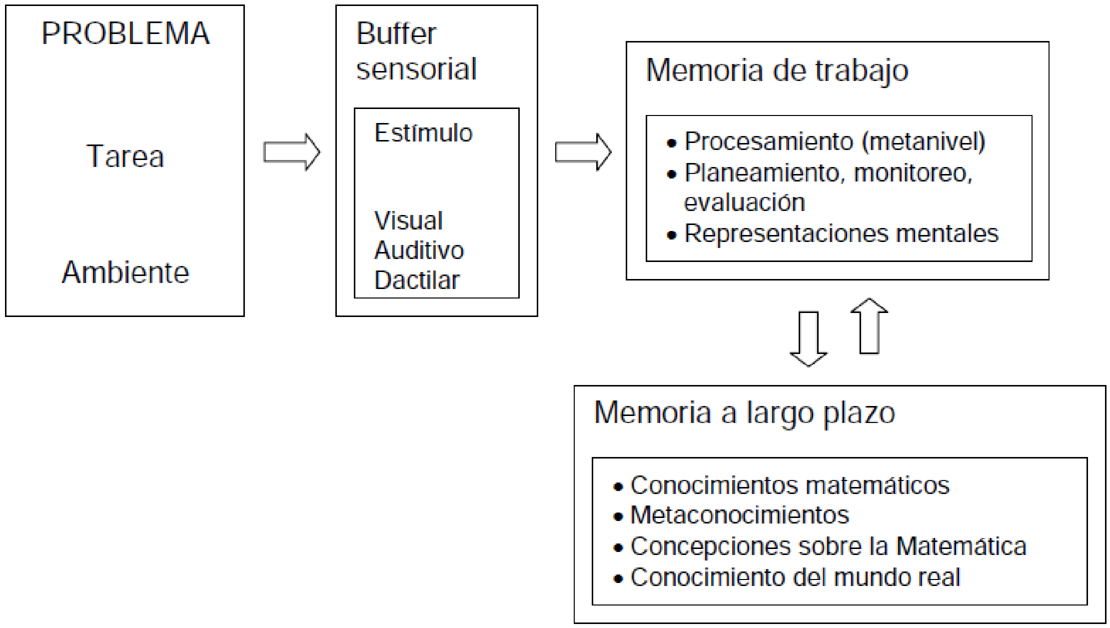


Gráfico 3. Papel de la memoria durante el proceso de solución de problemas.[29]

Otro aspecto importante al que el autor hace referencia corresponde a la resolución de problemas como habilidad generalizada en la cual destaca a Álvarez quien define habilidad como *"una dimensión del contenido que muestra el comportamiento del hombre en una rama del saber propio de la cultura de la humanidad. Es, desde el punto de vista psicológico, el sistema de acciones y operaciones dominado por el sujeto que responde a un objetivo"*[30].

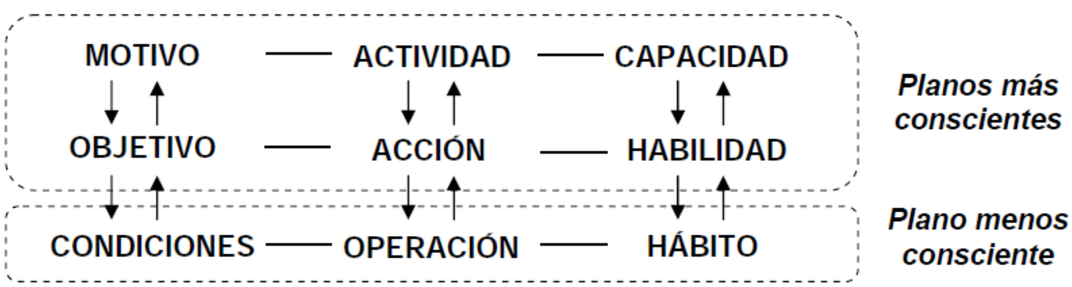


Gráfico 4. Formación por etapas de las acciones mentales[31]

[29] Álvarez, C. M. (1999). *La escuela en la vida.* Pueblo y Educación. La Habana. P. 71.
[30] Ibidem.
[31] Ibidem.

Algunos de los aspectos que este autor considera motivaron la concepción de esta investigación, al que permitir una mejor comprensión de otros autores.

1.3.2. La resolución de problemas una revisión teórica[32]

En este trabajo el autor da presenta un modelo que comprende las etapas siguientes:

1. Identificación de la situación problemática
2. Definición precisa del problema
3. Análisis medios-fines. Plan de solución
4. Ejecución del plan
5. Evaluación de la solución. Supervisión y generalización.

Polya (1945) plantea que un estudiante al resolver un problema debe pasar por las ya conocidas cuatro fases.

Cada una de estas fases debe estar acompañada por principios heurísticos que permiten llevar a cabo cada una de estas fases.

En contraposición a Polya, Schoenfeld sostiene que el proceso de resolución no es lineal, sino que se debe ir a veces haciendo marcha atrás, por cada una de las cuatro etapas que propone que son:

1. Análisis
2. Exploración
3. Ejecución
4. Comprobación

---

32 Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Revista SUMA* N° 21. Pp.11-20. Disponible en URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf.

En cada una de ellas presenta una relación exhaustiva de pautas y heurísticas; este método ha sido aplicado en otras disciplinas. Por otro lado, Mason, Burton y Stacey, en su libro *Thinking Mathematically* sostienen que analizar *a posteriori* el proceso de solución de problemas permite retroalimentar la experiencia.

Schoenfeld propone la idea del *monitor* como una especie de tutor que vigila y dirige los procesos, tanto personales como técnicos, que desembocan en la resolución de problemas. Los autores proponen la técnica del rotulado como medio de propiciarlo, la cual describe los momentos claves de la resolución y los estados afectivos que se provocan. Lo anterior puede ser resumido en el siguiente modelo que ha sido difundido, además de encontrarse en una gran variedad de trabajos, libros y artículos.

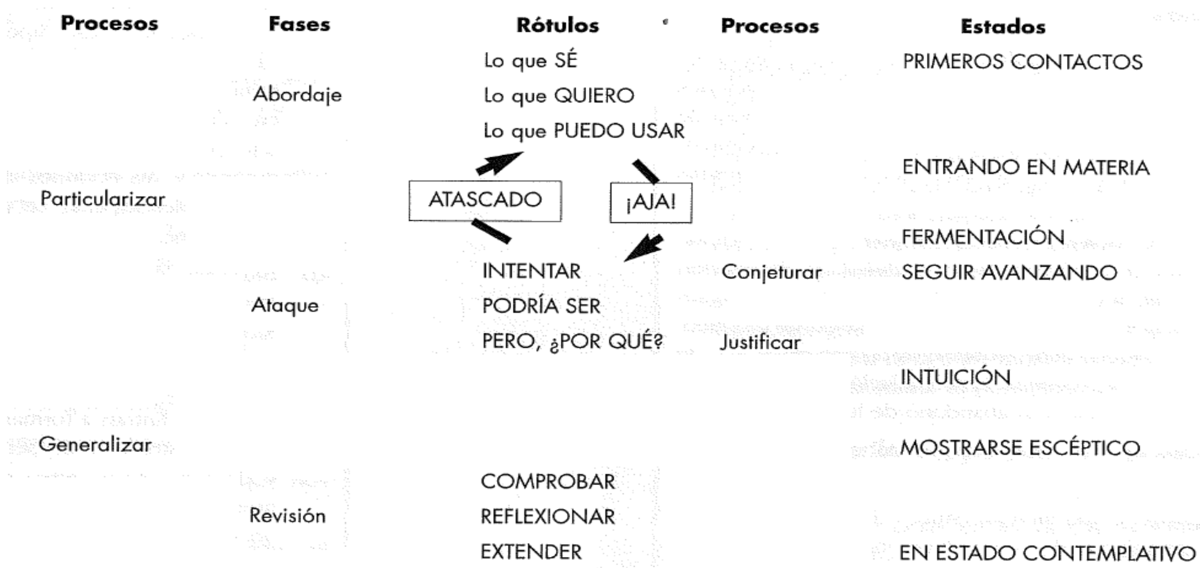


Gráfico 5. Modelo de resolución de Problemas.[33]

[33] Mason, J, Burton,L. y K. Stacey (1988). *Pensar Matemáticamente,* MEC-Labor, Barcelona.

Algunos referentes presentes aquí son de gran utilidad en la construcción de un modelo que permita apreciar los diferentes tipos de insight que se pueden propiciar en el salón de clases en la solución de problemas.

Conclusiones parciales de capítulo 1

Al analizar el alcance de los resultados de los trabajos anteriores, se puede concluir que ellos constituyen una buena base para alcanzar, con esta investigación, los objetivos para la caracterización de los posibles insight que se puedan apreciar y que surgen en la actividad escolar con estudiantes que son retados a solucionar problemas matemáticos planteados en clases.

La mayoría de las metodologías implementadas en las anteriores investigaciones son cualitativas, lo que sugiere que la implementación de un estudio de casos para la detección de características, de este tipo de fenómeno cognitivo (insight), que presumiblemente puedan observarse en los procesos de solución de problemas planteados en el aula de clases es una decisión acertada.

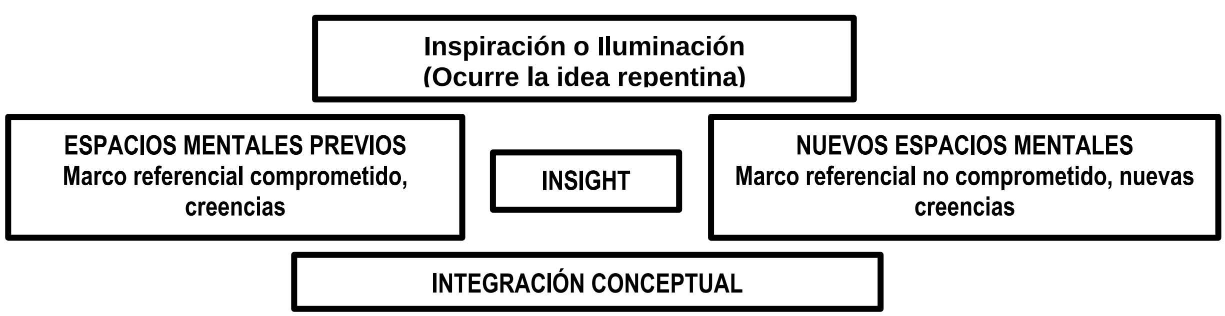
Los resultados de estos trabajos permiten ajustar un marco teórico. Además, debe sugerir un diagrama del flujo que conecte la resolución de problemas con las ocurrencias de insight, así como, clarificar la relación de éstos con los pensamientos convergente y divergente.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El objetivo principal de este capítulo es retomar las ideas esenciales del trabajo de Fauconnier & Turner, descritos anteriormente y que se considera que están en una relación directa con el *insight*, además de los modelos de resolución de problemas propuestos por Polya, Mason, Burton y Stacey, para definir el sustento teórico de esta investigación.

Lo que se ha denominado como *insight* se ha explicado en diferentes trabajos de investigación. Este *fenómeno cognitivo* descrito anteriormente puede ocurrir en los dos tipos de pensamiento, tanto el convergente como el divergente, que se resaltan en la literatura consultada.

Se ha detallado innumerables veces por diferentes autores que el *insight* puede verse como un salto inesperado del pensamiento y momento en el que el sujeto está resolviendo el problema, produce una activación alta e inesperada en asociar ideas remotas, definiciones, conceptos, experiencias. Dicho salto se puede apreciar en su concepción a priori ya mencionada en la Introducción en el Gráfico 1, que por su relevancia, como un aspecto principal desde una perspectiva de las ciencias psicológicas, será considerada en esta investigación (Fauconnier & Turner, 1998, 2002) y se enfatizará nuevamente a continuación:



2.1. Métodos de los cuatro pasos

Su autor es Polya (1965), quien propone el "Método de los Cuatro Pasos, para resolver problemas matemáticos en las etapas siguientes:

- *comprender el problema,*
- *concebir un plan,*
- *ejecutar el plan y*
- *examinar la solución*"[34].

Para cada una de estas etapas él propone una serie de preguntas y sugerencias, de las cuales se retomarán las más importantes en esta investigación, que permiten de alguna forma propiciar algún tipo de *insight* en el proceso de solución de problemas en el salón de clases.

Comprender el problema

"*Para esta etapa se siguen las siguientes preguntas:*

- *¿Cuál es la incógnita?*
- *¿Cuáles son los datos?*
- *¿Cuál es la condición?*
- *¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?*

Es la etapa para determinar la incógnita, los datos, las condiciones, y decidir si esas condiciones son suficientes"[35].

Una vez que se comprende el problema se debe pasar a concebir un plan.

[34] Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C, pp. 7-12.
[35] Ibidem.

Concebir un plan

En esta etapa Polya sugiere que el problema *"debe relacionarse con problemas semejantes. También debe relacionarse con resultados útiles, y se debe determinar si se pueden usar problemas similares o sus resultados (aquí se subraya la importancia de los problemas análogos).*

Algunas interrogantes útiles en esta etapa son:

- *¿Se ha encontrado con un problema semejante?*
- *¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?*
- *¿Conoce un problema relacionado?*
- *¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?*
- *¿Podría enunciar el problema en otra forma?"*[36]

Una vez que se piensa el plan corresponde la:

Ejecución del plan

Durante esta etapa Polya considera que *"es fundamental analizar todos los detalles y es muy importante recalcar la diferencia entre percibir que un paso es correcto y, por otro lado, demostrar que un paso es correcto"*[37]*.* Para lo anterior, él plantea los siguientes Interrogantes:

- *"¿Puede ver claramente que el paso es correcto?*
- *¿Puede demostrarlo?"*[38]

[36] Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C, pp. 7-12.
[37] Ibidem.
[38] Ibidem.

En síntesis: al ejecutar el plan de solución debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

Examinar la solución

En esta fase del proceso es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo; se necesita verificar el resultado y el razonamiento seguido al interrogarse:

- *"¿Puede verificar el resultado?*
- *¿Puede verificar el razonamiento?*
- *¿Puede obtener el resultado en forma diferente?*
- *¿Puede verlo de golpe?*
- *¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?"*[39]

Las anteriores fases permiten dar un análisis y retroalimentación para abordar otros futuros problemas, además Polya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), también, se están creando habilidades que servirán posteriormente para resolver cualquier tipo de problema.

2.2. Otros fundamentos teóricos sobre el planteamiento y la resolución de problemas

Polya en su obra *"Matemáticas y razonamiento plausible"*[40] sostiene que el conocimiento matemático está soportado por el razonamiento demostrativo; pero este trabajo se apoya en las conjeturas mediadas por el razonamiento plausible*,"…ya que una prueba matemática es un razonamiento demostrativo, pero la evidencia inductiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del*

[39] Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C, pp. 7-12.
[40] Polya. G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press. New Jersey. P.13.

historiador y la evidencia estadística del economista pertenecen al razonamiento plausible."[41]

Se entiende como un razonamiento conjetural aquél que permite elaborar hipótesis y examinar su validez en cualquier momento, además de contrastarlas y reformularlas según sea el caso para obtener nuevas hipótesis susceptibles a ser demostradas.

Él hace la distinción entre estos dos tipos de razonamiento basada en que el demostrativo es seguro y definitivo, mientras que el plausible es azaroso, discutible y provisional.

A continuación se describe el capítulo de interés para la presente investigación titulado *"El razonamiento plausible en la invención y en la enseñanza."*[42]

Polya sostiene que *"resolver un problema es un proceso extremadamente complejo. Ya que ninguna teoría o descripción de este proceso puede agotar sus múltiples aspectos; cualquier descripción o teoría del mismo está abocada a ser incompleta, esquemática y muy simplificada"*[43].

En el proceso de solución de un problema él sugiere lo siguiente:

1. *Proponiéndonos un problema nosotros mismos*

Para esta fase el problema es tomado con seriedad cuando se está dispuesto a darle una respuesta por medios propios y realmente existe un interés en él.

2. *Atención selectiva*

---

[41] Polya. G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press. New Jersey. P.13.
[42] Ibidem. pp. 445-476.
[43] Ibidem. p. 448.

Cuando el problema es propuesto por sí mismo y se está convencido de ello, su mente se hace selectiva, se hace más sensible a cualquier cosa que parezca estar conectada con el problema. Se recoge ávidamente cualquier observación, sugestión o hecho que le permita resolver, entonces se cierran otras vías de solución.

3. *Registrando el progreso en la marcha*

Hay un factor que permite reconocer que se está comprometido con el problema, que aumenta la sensibilidad hacia él, que se siente la marcha progresiva del mismo, que proporciona un sentimiento de ánimo si se avanza rápido, pero de depresión si sucede lo contrario. Todo lo que llega a la mente es clasificado como:

- “Parece bueno”
- “Podría ayudar”
- “No es bueno”
- “No ayuda”

Los anteriores juicios o sentimientos son importantes para un sujeto; ellos guían su esfuerzo.

4. *Donde empieza el razonamiento plausible*

Por lo general el sujeto se encamina en alguna vía prometedora, en donde sus sentimientos hacen creer que todo parece bueno y no se da el espacio de preguntarse ¿por qué parece bueno?, ya que se encuentra motivado y sigue su camino. Pero en ocasiones se puede contar con tan mala suerte que encuentra alguna dificultad que lo estanca en el camino a la solución sin progreso alguno. A partir de ese momento comienzan las dudas: ¿fue un buen comienzo?, ¿es ésta la dirección correcta? Si se tiene un fracaso se debe aprender de él, en cierta medida eso permitirá abordar otra vía que puede ser prometedora y que de seguro acercará a la anhelada solución; o de lo contrario, el proceso se repite.

2.3. Pensar matemáticamente

En esta obra Mason, Burton y Stacey[44], describen los procesos que rigen el pensamiento matemático en general; el objetivo es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir cómo atacarlo de una forma eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia.

Para esto los autores describen dos procesos generales en la resolución de problemas el de **particularización** y el de **generalización.**

Para ello sugieren tres fases:

Abordaje

En esta fase se basa en dar respuesta a tres preguntas:

¿Qué es lo que SÉ?

Para esta pregunta se sugiere:

- Leer el problema con cuidado
- Particularizar para saber qué es lo que está pasando
- ¿Qué ideas, aspectos, hechos parecen relevantes?
- ¿Conozco problemas similares?

¿Qué es lo que QUIERO?

[44] Mason, J, Burton. L. y K. Stacey (1988*). Pensar Matemáticamente,* MEC-Labor, Barcelona.

Para intentar resolver la anterior pregunta se sugiere:

- Clasificar la información
- Descubrir ambigüedades
- Particularizar para descubrir cuál es el problema real.

¿Qué puedo USAR?

Lo que sugiere:

- Usar imágenes, diagramas y símbolos
- Usar representación, notación y organización.

Ataque

En esta fase se siente que el problema es nuestro, los estados de ánimo que se asocian se describen en ¡Atascado! y ¡Ajá!, y el proceso matemático fundamental que tiene lugar es el de hacer conjeturas y justificarlas convincentemente, ya que éstos a su vez dependen de la particularización y generalización.

Durante esta fase de ataque se pueden usar diferentes enfoques, como ejecución de nuevos planes que de alguna forma permiten progresar a gran velocidad, pero por lo general cuando ya se han probado todas las ideas, esta fase se caracteriza por largos períodos de espera de nuevas ideas o planteamientos.

Revisión

Es el momento de mirar hacia atrás, revisar el trabajo hecho, para mejorar y ampliar su capacidad de razonamiento, para lograr de cierta forma situar la resolución en un contexto más amplio. Esta fase se caracteriza en tres momentos:

- **Comprobar** la solución.

- **Reflexionar** en las ideas y momentos claves.
- **Generalizar** a un contexto más amplio.

Todo lo anterior constituye un elemento esencial en la elaboración y selección de los diferentes problemas que permiten de alguna forma dar una caracterización de los diferentes tipos de *insight* que puedan emerger en el transcurso de la solución de problemas dentro y fuera del salón de clases.

2.4. Sobre el insight

Aquí se retoman los aspectos mencionados en el estado del arte, para construir una caracterización de los diferentes tipos de *insight* que se pueden propiciar en el aula por medio de la resolución de problemas, además de un esquema que lo permita apreciar.

2.5. Sobre el pensamiento convergente y divergente

Para el pensamiento convergente se toman la definición propuesta por Guilford (1950), el que fundamenta en la búsqueda de una respuesta determinada o convencional y cuyo resultado se identifica con una única solución al problema. Por otro lado, Puccio (1998), sostiene que el pensamiento convergente es el proceso mental que permite la obtención de la mejor solución de un problema a partir de la información disponible.

Para el pensamiento divergente se asumen la concepción de Runco (1990), el que sostiene que este pensamiento está relacionado con la generación y aplicación de diferentes ideas para resolver un problema dado, así como, con la fluidez (¿cuántas ideas?), flexibilidad (¿cuán diversa es la clasificación de las ideas?), originalidad y elaboración.

Muchos autores asumen que el pensamiento divergente está asociado con la obtención de múltiples o diferentes vías de soluciones a un mismo problema, concepción que no se comparte por este autor, ya que este pensamiento puede estar relacionado con una única solución a un problema; esto dependerá de la calidad, complejidad y trascendencia de la solución del mismo.

2.6. A manera de una integración de la relación psicológica y didáctica como soporte del estudio

Tal como se refirió en la introducción, Fauconnier & Turner (1998 y 2002) en su trabajo "Conceptual Integration Networks" sostienen que la integración conceptual es en general una operación cognitiva a la par con la analogía, la recursividad, los modelos mentales y la categorización conceptual. Ellos presentan operaciones cognitivas dinámicas, flexibles y activas que entran en juego en el momento de pensar, que denominan cognitive blending, la que se considera relacionada con el fenómeno del *insight* en la solución de problemas matemáticos dentro y fuera del salón de clases. Estos autores hacen referencia a los espacios mentales, como dominios de cognición, que se proyectan a nuevos espacios mentales con características y propiedades diferentes. Es decir, se abandona las viejas formas de pensar por nuevas formas.

Además, tomando los aspectos más relevantes de los esquemas de resolución de problemas propuestos por Polya, Mason, Burton y Stacey, mencionados en los epígrafes anteriores, se propone el siguiente diagrama de flujos como soporte teórico para este estudio.

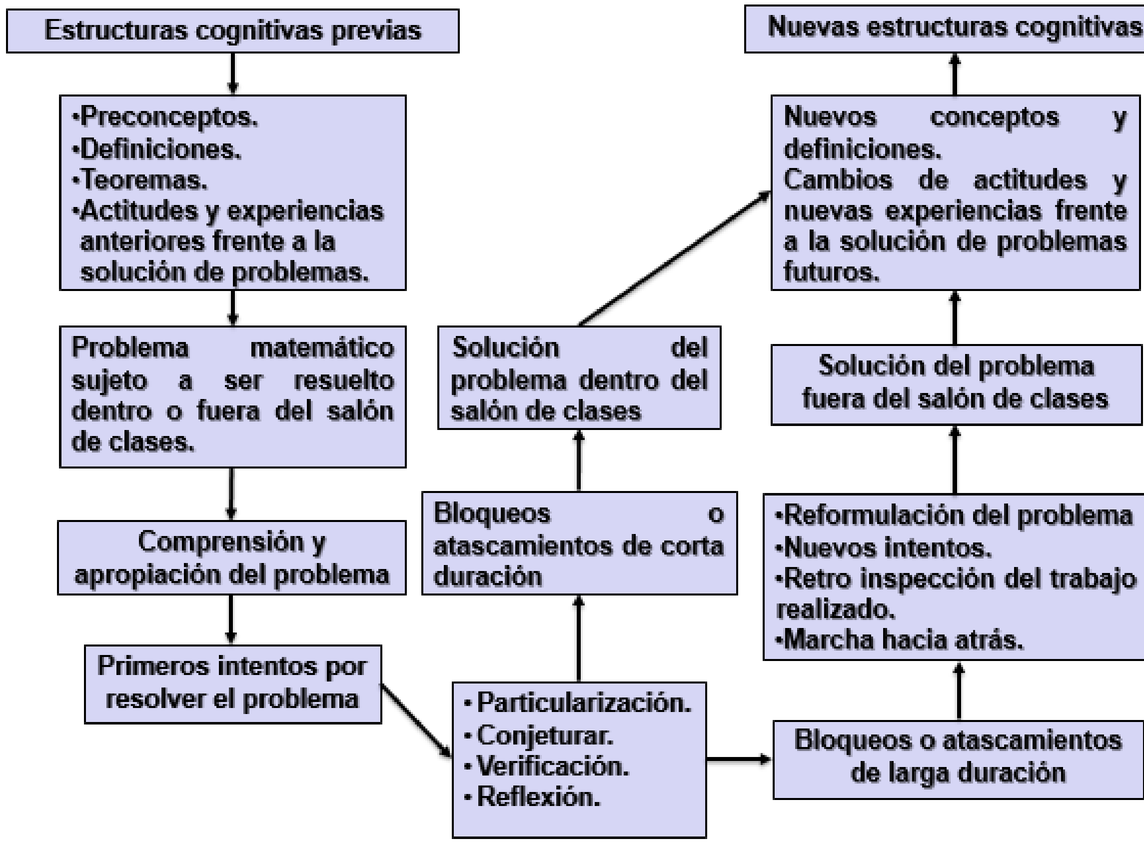


Gráfico 6: Diagrama teórico de la investigación.

Conclusiones parciales del capítulo 2

En este estudio se considera una integración de algunas categorías de la psicología y un procedimiento con un enfoque didáctico relacionado con la resolución de problemas matemáticos. Desde las dimensiones psicológicas se consideran las ideas expuestas anteriormente de Fauconnier y Turner, y en relación con los diferentes esquemas de resolución de problemas, los propuestos por Polya, Mason, Burton y Stacey, que constituyen el soporte teórico para la concreción práctica de esta investigación.

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo principal de este capítulo es describir la metodología que se asumió e implementó en esta investigación. A continuación, se presenta el enfoque de la investigación, diseño del curso electivo y de las actividades aplicadas.

3.1. Enfoque de la investigación

Dada la naturaleza del fenómeno cognitivo que se pretende estudiar, es necesaria una metodología de investigación fundamentada en el paradigma cualitativo. Fraenkel y Wallen (1996) presentan cinco características básicas que describen las particularidades de este tipo de estudio:

1. El ambiente natural y el contexto que se da, el asunto o problema es la fuente directa y primaria, y la labor del investigador constituye el instrumento clave en la investigación.
2. La recolección de los datos es más verbal que cuantitativa.
3. Los investigadores enfatizan tanto en los procesos como en los resultados.
4. El análisis de los datos se da más de modo inductivo.
5. Interesa saber cómo piensan los sujetos en una investigación y qué significado tiene el asunto que se investiga.

El estudio se implementó en un curso electivo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño correspondientes a los semestres II-2015 y I-2016.

Este curso, de carácter electivo, se denominó *“Desarrollo del pensamiento matemático a través de la solución de problemas”* (Anexo 1). En ambos semestres se hizo un seguimiento sistemático a cinco estudiantes, en el que se relató, entrevistó, grabó y filmó las correspondientes sesiones de clase para su posterior análisis[45].

La sistematicidad de estas acciones debe facilitar una descripción que permita conocer las situaciones de hábitos, creencias, actitudes, habilidades y capacidades en la solución de problemas matemáticos. En particular, se hizo una observación de situaciones, eventos y características de los estudiantes, durante el proceso de resolución de problemas que permitió dar una caracterización de los diferentes tipos de *insight* que pudieran estar presente y su relación con ambos tipos de pensamiento tanto el convergente como el divergente.

El procedimiento está soportado en la observación continua de un grupo estudiantes que permita:

- Describir los procesos y caminos que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas y permitan dar una apreciación del tipo de pensamiento utilizado.
- Observar actitudes, nivel de aceptación y grado de acogida frente a los problemas propuestos implementados en el curso electivo de la Universidad Antonio Nariño.
- Incentivar el ingenio y creatividad para resolver los diferentes problemas propuestos.
- Observar la ocurrencia o no de posibles insight en los estudiantes para el seguimiento y descripción de los mismos.

En resumen, se presenta un esquema de la metodología a seguir en esta investigación:

[45] Se recibió por parte de los estudiantes del estudio, el consentimiento para que el sujeto de la investigación tomara constancia gráfica y visual de ellos a lo largo de las dos etapas de estudio.

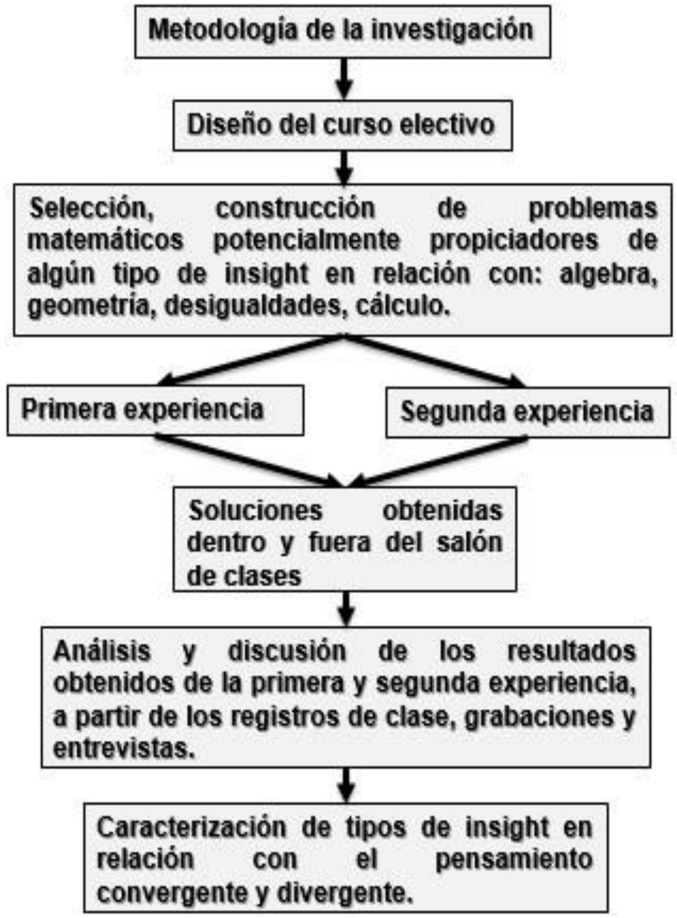


Gráfico 7: Esquema para una metodología de la investigación.

3.2. Diseño del curso electivo

El curso electivo se estructuró de acuerdo a las necesidades de los estudiantes que cursan la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño con la finalidad de contribuir a su formación en matemáticas y en el conocimiento ya adquirido como resultado del pensamiento matemático empleado en el proceso de la solución de problemas.

Para el primer curso correspondiente al periodo II-2015, el trabajo se organizó en 16 semanas de clase con una duración de dos horas, en las cuales se propusieron dos problemas para hacer abordados en cada clase. La metodología adoptada para el desarrollo de las clases permitió dividir los contenidos temáticos de la forma siguiente:

1. Presentación por el docente del método de los cuatro pasos según Polya correspondientes a las actividades 1, 2, 3.
2. Explicación por el docente de lo que significa un razonamiento plausible en la resolución de problemas matemáticos. Actividades 4, 5.
3. Presentación del modelo de resolución de problemas propuestos por Mason, Burton y Stacey. Sobre los aspectos: *Pensar matemáticamente, obtención de respuestas para cuando estés atascado, la fase de ataque: haciendo conjeturas y el desarrollo del pensamiento matemático.* Actividades 6, 7, 8, 9, 10.
4. Presentación de problemas relacionados con: Álgebra, teoría de números, geometría y desigualdades. Actividades 11, 12, 13, 14 y 15.
5. Discusión final del curso.

Para la etapa correspondiente al período I-2016, algunos de los problemas de las actividades se eliminaron y se reemplazaron por otros para que permitieran otros resultados, el trabajo se organizó en 16 semanas de la siguiente forma:

1. Presentación por el docente del método de los cuatro pasos según Polya correspondientes a las actividades 1, 2, 3. Explicación por el docente de lo que significa un razonamiento plausible en la resolución de problemas matemáticos. Actividad 4, 5.
2. Presentación del modelo de resolución de problemas propuestos por Mason, Burton y Stacey. Aspectos de las fases que estos autores contemplan para el logro de: *Pensar matemáticamente, de obtener respuestas para cuando estés atascado, la*

fase de ataque: haciendo conjeturas y el desarrollo del pensamiento matemático. Actividades 6, 7, 8, 9, 10,11 y 12.

3. Presentación de problemas relacionados con: Álgebra, Teoría de números, Geometría y Desigualdades. Actividades 13, 14 y 15.
4. Discusión final del curso.

3.3. Diseño de las actividades

Cada clase se desarrolló de acuerdo a la parcelación del curso, donde se propusieron dos problemas con la finalidad de implementar los diferentes esquemas de resolución de problemas.

Los problemas se eligieron con diferentes grados de dificultad acordes con las temáticas planteadas al desarrollo de curso, sin perder la finalidad de desarrollar algún tipo de pensamiento matemático en el estudiante. Algunos de los problemas propuestos fueron seleccionados y modificados de las Olimpiadas de Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño, otros de los Círculos Matemáticos de Rusia, de varias Competiciones Internacionales de Matemáticas, entre otros. Se debe destacar que algunos de los problemas sobre desigualdades con la aplicación de MA≥MG son originales del autor. Todo esto, con un buen nivel de complejidad y que pudieran potenciar algún tipo de *insight* en los procesos de solución de los mismos por los estudiantes.

3.4. Problemas matemáticos propuestos en las diferentes actividades

Los problemas seleccionados que corresponden a las actividades 1, 2 y 3, fueron elegidos acordes al método de los cuatro pasos de Polya, con la finalidad de que los estudiantes pudieran aplicar de cierta medida este esquema de solución de problemas dentro y fuera del salón de clases.

Actividad 1

Problema 1: Encontrar una expresión algebraica que permita calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$.

Finalidad del problema:

Se busca que el estudiante aplique un resultado obtenido durante el desarrollo de la clase 1, de tal forma que encuentre sin mayor dificultad la expresión que permite calcular la distancia de dos puntos cualquiera en $\mathbb{R}^3$.

Problema 2: En una universidad el bloque B se encuentra al este del bloque A a una distancia de 30m, el bloque C está ubicado a 40m en dirección nororiente del bloque B. ¿A qué distancia debe estar ubicado un punto de encuentro en caso de emergencia, de tal forma que quede a igual distancia de los tres bloques?

Finalidad del problema:

Se busca que el estudiante por medio de alguna representación gráfica de la situación pueda encaminarse a la solución ya sea por una vía geométrica o analítica.

Actividad 2

Problema 1: Trace una gráfica de un polinomio que tenga un extremo relativo, dos extremos relativos, tres extremos relativos, a partir de la anterior experiencia responda:

¿Qué relación tienen los extremos relativos de una función polinómica con sus raíces?

¿De acuerdo al grado de la función polinómica es posible determinar cuántos extremos relativos podría tener la función?

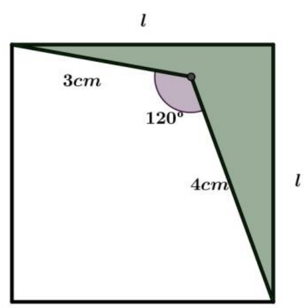
¿Es posible que una función polinómica de grado 5 tenga 3 extremos relativos?

Explique.

Finalidad del problema:

Se busca que el estudiante dibuje algunas gráficas de funciones polinomiales de acuerdo a las características solicitadas, de tal forma que pueda inferir y conjeturar algunos resultados clásicos de las funciones polinómicas.

Problema 2: Determine el área de la región sombreada de la siguiente *Figura*



Finalidad del problema:

Se busca que estudiante evoque algunos resultados básicos de la trigonometría, que le permitan encaminarse a una solución rápida dentro del salón de clases.

Actividad 3

Problema 1: Se saben que algunas de las raíces de un polinomio de grado 5 son:

-2,-1, 3, 2i, y que su gráfica pasa por el punto de coordenadas (2,-2). Determine la ecuación del polinomio.

Finalidad del problema:

Aplicar el teorema del cero conjugado, del factor y el de la factorización completa, para encontrar el polinomio pedido.

Problema 2[46]: ¿Cuál es el número de parejas ordenadas de números reales (a, b) tales que $(a+bi)^{2015} = a - bi$?

Finalidad del problema:

Aplicar las propiedades básicas de los números complejos para inferir y justificar el resultado.

Las actividades 4 y 5, se diseñaron para que los estudiantes incursionaran en los elementos del razonamiento plausible propuesto por Polya.

Los problemas correspondientes a las actividades 6 al 12 fueron propuestos con la finalidad de que los estudiantes pudieran implementar algún esquema de solución de problemas visto durante el desarrollo del curso además de observar y documentar el desarrollo de los mismos dentro y fuera del salón de clases.

Actividad 4

Problema 1: Para medir la altura de las de nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β. Determine una ecuación que permite calcular la altura h de las nubes.

Finalidad del problema:

[46] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, pp. 19, 2002.

Hacer una representación adecuada de la situación y a partir de ella deducir una ecuación que permita calcular la altura h de las capas de las nubes.

Problema 2[47] Supongamos que α, β, y γ, denotan los ángulos de un triángulo.

Mostrar que

a. $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

b. $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4\cos(\alpha) cos(\beta) cos(\gamma)$

c. $\sin(4\alpha) + \sin(4\beta) + \sin(4\gamma) = 4\cos(2\alpha) cos(2\beta) cos(2\gamma)$

Finalidad de problema:

Demostrar cualquier identidad y a partir de ella demostrar los dos restantes.

En esta parte del curso se hizo la discusión del texto *"Pensar matemáticamente"* de Mason, Burton y Stacey. Los problemas propuestos en las actividades 5 al 12, se eligieron de tal forma que se pudiera implementar el esquema de resolución de problemas propuestos por estos autores

Actividad 5

Problema 1: ¿Cómo se podría argumentar que todo polinomio con coeficientes complejos de grado impar, necesariamente debe tener al menos un cero real?

Recordar: un cero o raíz de un polinomio P, es un número real c, tal que $P(c) = 0$.

Finalidad del problema:

[47] Polya, G., (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid. p. 469

Hacer uso de teoremas de las funciones polinómicas para aplicarlos a algún caso particular que permita inferir el resultado.

Problema 2: ¿Cómo podría usted demostrar que el perímetro de un triángulo es menor que los 4/3 de las sumas de sus medianas?

Finalidad del problema:

Particularizar algunos casos para verificar que la proposición anterior se cumple y de alguna forma demostrar la veracidad de ésta al aplicar algún resultado conocido.

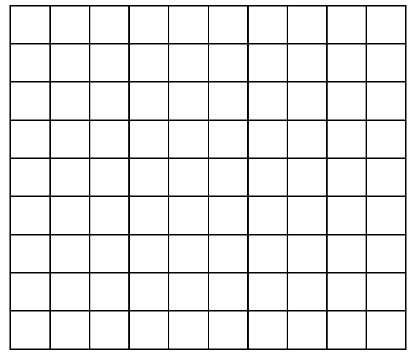
Actividad 6

Problema 1: ¿Cuántos cuadrados de diferentes tamaños hay en un tablero de 1x1, 2x2, 3x3, 8x8 (ajedrez)? ¿Podrías generalizar a un tablero nxn?

Finalidad del problema:

Particularizar y contar los cuadrados para los tableros de 1x1, 2x2, 3x3 y 4x4, conjeturar y demostrar una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadrados de un tablero de nxn.

Problema 2: Dos jugadores se turnan para reemplazar con X y con O en un cuadrado de un tablero de 9x9. El primer jugador inicia con X y el segundo con O, el jugador obtiene un punto si obtiene más X o más O en la misma fila o columna. El jugador con más puntos obtenidos es el que gana.



¿Cuál debe ser la estrategia del ganador?

¿Funcionaría la misma estrategia si el tablero fuera de 8x8?

¿Cuál debe ser el tamaño del tablero para que la estrategia funcione?

Finalidad del problema:

Poner a jugar a los estudiantes entre ellos de tal forma que alguno proponga una estrategia ganadora y pueda generalizarlo a un tablero de cualquier tamaño.

Actividad 7

Problema 1: Se sabe que hay dos raíces cuadradas de 1, 1 y -1. Estas corresponden a la solución de la ecuación $x^2 = 1$, o su equivalente a $x^2 - 1 = 0$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$, o $x^4 - 1 = 0$

¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay?

¿Cómo encontraría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay?

¿Cuál sería el número de las raíces n-ésimas de 1?

Finalidad del problema:

Particularizar y conjeturar una forma de poder calcular todas las raíces de la unidad.

Problema 2: ¿Cuál es el área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo de lados 3,5 y 7?

Finalidad del problema:

Representar un triángulo con esas medidas y desde una vía geométrica o analítica determinar el área del mayor círculo inscrito en el triángulo.

Actividad 8

Problema 1: Si x, y, z son números reales positivos tal que $xyz = a$, ¿cuál es el valor mínimo de $x^n + y^n + 3z^{\frac{n}{3}}$?

Finalidad del problema:

Verificar la expresión algebraica con algunos casos particulares y poderla reescribir de tal forma que se pueda aplicar la desigualdad MA≥MG.

Problema 2[48]: Si el último dígito de 2^x, con $x \in \mathbb{Z}^+$, es 4, ¿cómo debe ser la forma de x? ¿Cuál sería el último dígito de 2^{50019}?

Finalidad del problema:

Calcular algunas potencias de 2 y a partir de éstas conjeturar y demostrar una forma para calcular el último dígito de las potencias de 2.

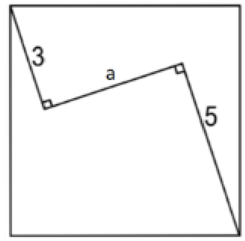
Actividad 9

Problema 1[49]: Se sabe que el área del cuadrado es $40u^2$, determinar el valor de a.

---

[48] Adaptado del recuperado 4 de abril de 2015 del URL: http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/TeoriaDeNumeros.pdf.

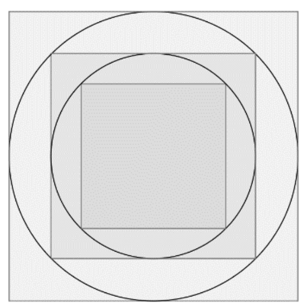
[49] Adaptado del recuperado el 4 de abril de 2015 del URL: https://www.facebook.com/148210950842/photos/a.151449605842.126810.148210950842/10152726406510843/?type=1&fref=nf.



Finalidad del problema:

A partir de la figura, hacer alguna construcción auxiliar que permita encontrar el área del cuadrado utilizando algún criterio de semejanza.

Problema 2: Dibuje un cuadrado de área A_1, en el anterior cuadrado dibuje el mayor círculo inscrito. Ahora dibuje el mayor cuadrado inscrito en el anterior círculo cuya área se denotará por A_2, repita este proceso un número de veces como se puede apreciar en la siguiente figura.



Sea $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, la suma de las áreas de los primeros n cuadrados, y $M_n = kA_1 - S_n$, donde k es un entero positivo ¿cuál es el menor valor de k para que M_n sea positivo?[50]

Finalidad del problema:

[50] Puzzle from Zawaira and Hitchcock "*A Primer for Mathematics Competitions"* OUP 2009.

Calcular las áreas de algunos cuadrados, a partir de éstas inferir una expresión que permita calcular la suma de los primeros n cuadrados y así determinar el mínimo valor de *k*.

Actividad 10

Problema 1[51]: Si hay exactamente 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$, ¿cuántos valores enteros de b son posibles?

Finalidad del problema:

Aplicar los conceptos de longitud de intervalo y discriminante de la ecuación cuadrática, que permita al estudiante acercarse a la solución del problema que es de alta dificultad.

Problema 2[52]: ¿Cuál es el mínimo valor que puede alcanzar la expresión

$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$?

Finalidad del problema:

Reconocer que las raíces que conforman la expresión algebraica son las distancias fijas a un punto P(x,y) del plano, para así aplicar la desigualdad triangular y encaminarse a la solución del problema.

Actividad 11

Problema 1[53]:

---

[51] Modificado, del recopilado "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p, 12, 2005.
[52] Ibidem.
[53] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). P. 234.

Si $a, b,$y c son números positivos, demuestre que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

Finalidad del problema:

Aplicar la desigualdad MA≥MG, a cada término que conforma el miembro izquierdo de la desigualdad para así demostrarla.

Problema 2[54]: Si $x, y > 0$, demuestre que $\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y^2}{x}} > \sqrt{x}+\sqrt{y}$

Finalidad del problema:

Hacer uso de las desigualdades básicas que se cumplen en los números reales positivos.

Actividad 12

Problema 1: Demuestre que si $x \geq 0$, entonces $3x^3-6x^2+4 \geq 0$

Finalidad del problema:

Reescribir la desigualdad de forma tal que se pueda aplicar la desigualdad MA≥MG.

Problema 2[55]: Dado un triángulo de área unidad cuyos lados están dados por a, b, c, donde $a \geq b \geq c$. Demuestre que $b \geq \sqrt{2}$.

Finalidad del problema:

[54] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). p. 237.
[55] Ibidem. p. 214.

Usar las propiedades del triángulo que para conjeturar y demostrar la desigualdad fundamental del área del triángulo $A \leq \frac{ab}{2}$, donde A es el área del triángulo, a y b son dos lados del triángulo.

Los problemas propuestos en las actividades restantes se seleccionaron con temáticas de geometría, álgebra, desigualdades y teoría de números, con la finalidad de que los estudiantes aplicaran cualquier esquema de solución de problemas ya estudiados durante el desarrollo del curso. Hay que resaltar que los problemas no están en una escala ascendente de acuerdo a su nivel de dificultad, ya que para un estudiante, un problema puede resultarle muy difícil y para otros no.

Actividad 13

Problema 1: Demostrar que para cualquier x, y se cumple $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

Finalidad del problema:

Particularizar con algunos números reales para verificar la desigualdad, lograr reescribir el miembro izquierdo de tal forma que sea aplicable la desigualdad MA≥MG.

Problema 2[56]: Dos números distintos a y b, se escogen aleatoriamente del conjunto $\left\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^{25}\right\}$ ¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un número entero?

Finalidad del problema:

Particularizar algunos casos donde $\log_a b$ sea un número entero, para inferir la cantidad total de 25 y poder calcular la probabilidad total de $\frac{31}{300}$.

[56] Tomado de “Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones”, nivel superior, p.19, 2005.

Actividad 14

Problema 1[57]**:** Calcular el valor de $2015^2 - 2014^2 + 2013^2 - \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$

Finalidad del problema:

Particularizar algunos casos, para inferir la suma total o reagrupar los datos de dos en dos para factorizarlos como una diferencia de cuadrados, e inferir la recurrencia que permite calcular la suma total.

Problema 2: ¿Existe un número de 4 dígitos tal que la suma del mismo número, más sus correspondientes dígitos sea 2015?

Ejemplo: Para el número 2005, está el 1979, ya que al sumar 1979+1+9+7+9=2005

Finalidad de problema:

Particularizar algunos casos de tal forma que se pueda encontrar el primer número y de alguna forma inferir un modo diferente de encontrar otros números con esa particularidad.

Actividad 15

Problema 1[58]**:** Para cualquier x real ¿cuál es el valor máximo para $\sqrt{2016 - x} + \sqrt{x - 2008}$?

Finalidad del problema:

Reescribir la expresión de tal forma que se pueda inferir que la suma de $2016 - x$, y $x - 2008$, es constante para demostrar que el valor mínimo que alcanza la expresión es 4.

[57] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p. 13.
[58] Ibidem. p.190.

Problema 2[59]**:** Para m, n enteros positivos, ¿cuál es máximo valor de n tal que $\sqrt{m-174} + \sqrt{m+34} = n$?

Finalidad del problema: Utilizar el producto notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, a partir de la expresión de tal forma que se pueda determinar el mayor valor de n que es 104.

Para el conjunto de problemas anteriores se les pedía a los estudiantes tratar de responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo logró construir el camino que permitió resolverlo?

2. ¿Qué dificultades encontró en la resolución del problema?

3. ¿Podría haber otra forma de resolverlo? ¿Se le ocurre algo nuevo?

Para el primer semestre de 2016 se modificaron el orden de algunos de los problemas, otros se cambiaron dado el nivel de dificultad de la solución de aquellos que no se resolvieron en el segundo semestre de 2015.

Actividad 1

Se cambió el **problema 2** por:

Dibújese un cuadrilátero convexo, ahora ubíquese un punto interior M, tal que la suma de las distancias del punto a sus vértices sea mínima.

Finalidad del problema:

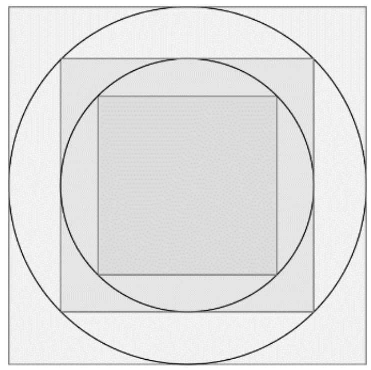
A partir de un cuadrilátero que cumpla la condición demostrar que el único punto que satisface la condición es la intersección de las dos diagonales.

Actividad 2

[59] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p.175.

Se cambió el **problema 2** por:

Dibuje un cuadrado de área A_1, en el anterior cuadrado dibuje el mayor círculo inscrito. Ahora dibuje el mayor cuadrado, cuya área se denotará por A_2, inscrito en el anterior círculo, repita este proceso un número de veces como se puede apreciar en la siguiente figura:



Sea $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, la suma de las áreas de los primeros n cuadrados, y $M_n = kA_1 - S_n$, donde k es un entero positivo ¿cuál es el menor valor de k para que M_n sea positivo?[60]

Finalidad del problema:

Calcular el área de algunos cuadrados, a partir de éstos inferir una expresión que permita calcular la suma de los primeros n cuadrados y así determinar el mínimo valor de *k*.

Actividad 9

Se cambió el **problema 2** por:

Problema 2: Sea $P(x) = x^2 + px - q$, donde p y q, son enteros positivos.

a) Encuentre una pareja de enteros positivos tal que las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$, sean enteros menores que 7.

[60] Puzzle from Zawaira and Hitchcock "*A Primer for Mathematics Competitions*" OUP 2009.

b) ¿Cuántas parejas (p,q) hacen que la ecuación $x^2+px-q=0$, sean menores que 2016?[61]

Finalidad del problema:

Particularizar algunos casos donde se cumpla la condición y a partir de esos casos inferir la forma de todas las parejas ordenadas (p,q) equivalentes a 2'029,105.

Actividad 13

Se cambiaron los dos problemas por:

Problema 1

Calcular el valor de[62] $2015^2-2014^2+2013^2-\cdots+3^2-2^2+1^2$

Finalidad del problema:

Particularizar algunos casos, para inferir la suma total o reagrupar los datos de dos en dos para factorizarlos como una diferencia de cuadrados, e inferir la recurrencia que permite calcular la suma total.

Problema 2

¿Existe un número de 4 dígitos tal que la suma de mismo número, más sus correspondientes dígitos sea 2015?

Ejemplo: Para el número 2005, está el 1979 ya que al sumar 1979+1+9+7+9=2005

Finalidad de problema:

Particularizar algunos casos de tal forma que se pueda encontrar el primer número y de alguna forma inferir un modo diferente de encontrar otros números con esa particularidad.

---

[61] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p. 26, 2002.

[62] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p.13.

Actividad 14

Los problemas se cambiaron por:

Problema 1[63]

Para cualquier x real ¿cuál es el valor máximo para $\sqrt{2016-x}+\sqrt{x-2008}$?

Finalidad del problema:

Reescribir la expresión de tal forma que se pueda inferir que la suma de $2016-x$, y $x-2008$, es contante para demostrar que el valor mínimo que alcanza la expresión es 4.

Problema 2[64]**:** Para m, n enteros positivos, ¿cuál es máximo valor de n tal que $\sqrt{m-174}+\sqrt{m+34}=n$?

Finalidad del problema:

Utilizar el producto notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, a partir de la expresión de tal forma que se pueda calcular el mayor valor de n que es 104.

Actividad 15

Los dos problemas se cambiaron por:

Problema 1: Demostrar que para cualquier x, y se cumple $x^4+y^4+8\geq 8xy$.

Finalidad del problema:

Particularizar con algunos números reales para verificar la desigualdad, lograr reescribir el miembro izquierdo de tal forma que sea aplicable la desigualdad MA≥MG.

[63] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p. 190.
[64] Ibidem. p. 175.

Problema 2[65]

Dos números distintos a y b se escogen aleatoriamente del conjunto $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^{25}\}$.

¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un número entero?

Finalidad del problema:

Particularizar algunos casos donde $\log_a b$ sea un número entero, para inferir la cantidad total de 25 y poder calcular la probabilidad total de $\frac{31}{300}$.

La modificación del orden de algunos de los problemas de las actividades se debe a que varios de ellos implementados en segundo semestre de 2015, no fueron resueltos por su grado de dificultad, a la espera de que se den mejores resultados para el primer semestre de 2016.

Conclusión parcial del capítulo 3

Se considera que la metodología implementada y un adecuado diseño de las actividades deban permitir la ocurrencia de diferentes tipos de *insight* y, por tanto, la posibilidad de poder apreciar y caracterizar diferentes estadios de los mismos.

[65] Tomado del recopilado "olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p. 12, 2005.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS, DISCUSIÓN Y ANÁLISIS

Este capítulo tiene como objetivo describir cada uno de los resultados que se obtuvieron en las dos experiencias implementadas en los períodos II-2015 y I-2016. A partir de la implementación del diagrama teórico de esta investigación definida en el marco teórico, para el análisis de los resultados obtenidos en la primera experiencia, se identificaron y caracterizaron tres tipos de insight, que suceden cuando los estudiantes culminan exitosamente la solución del problema. Para la segunda experiencia se verifican los mismos comportamientos encontrados en la primera.

Retomando la metodología de trabajo implementada en los cursos electivos, en cada clase se presentaron dos problemas con diferentes grados dificultad, con los cuales se les dio un seguimiento a dos estudiantes en el primer semestre de 2015 (se identifican con **E1** y **E2**) y que se identificó como I Experiencia y a tres en el primer semestre de 2016 (se identifican con **E3**, **E4** y **E5**) y que se identificó como II Experiencia.

Ambas experiencias permitieron valorar el desarrollo de los estudiantes en la solución de los problemas presentados en las actividades diseñadas para el estudio.

4.1. Primera Experiencia: Resultados y análisis de las actividades correspondientes al segundo semestre del 2015

A continuación, se describen los resultados obtenidos de cada una de las actividades.

Actividad 1

En el desarrollo de la clase se hizo una exposición detallada del método de los cuatro pasos de Polya, se analizó un ejemplo, propuesto en el libro de *“Cómo plantear y resolver problemas”*

Ejemplo de discusión: *“Determinar la diagonal de un paralelepípedo si se conocen las longitudes de su ancho, largo y altura”*.[66]

Los estudiantes identifican los datos del problema, además de justificar que los datos eran suficientes para dar la solución y, como lo que tenían que determinar era la longitud de la diagonal, en sus primeros intentos por resolver el problema fueron apoyados, a través de una representación gráfica de un paralelepípedo con la correspondiente identificación de sus respectivas aristas.

Un estudiante, que identificaremos como **E1** se percató rápidamente que al aplicar el teorema de Pitágoras dos veces se podía encontrar la expresión para la diagonal de dicho paralelepípedo. Situó el paralelepípedo en el espacio cartesiano, de tal forma que la diagonal del rectángulo proyectada sobre el plano xy era perpendicular a la altura del paralelepípedo. El objetivo principal de este problema era que los estudiantes identificaran en la práctica el método de los cuatro pasos expuesto en la primera clase.

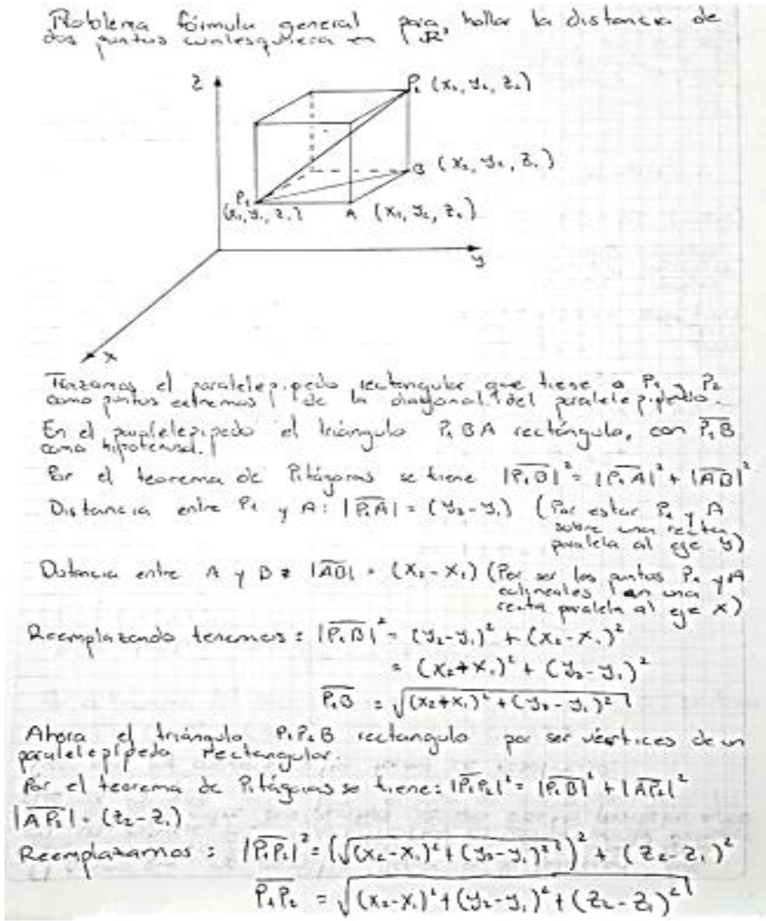
Para los dos problemas propuestos en clase, se resolvió el siguiente:

Problema 1: Encontrar una expresión algebraica que permita calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$.

El estudiante **E1** identifica muy rápido la analogía del problema con el ejemplo discutido al darse cuenta que los puntos en el espacio determinan la diagonal de un paralelepípedo, y de una manera convencional encuentra la expresión solicitada.

---

[66] Pólya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C. Pág. 29.


Problema fórmula general para hallar la distancia de dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$

z

$P_2\ (x_2, y_2, z_2)$

$B\ (x_2, y_2, z_1)$

$P_1\ (x_1, y_1, z_1)$

$A\ (x_1, y_2, z_1)$

y

x

Trazamos el paralelepípedo rectangular que tiene a P_1 y P_2 como puntos extremos de la diagonal del paralelepípedo.

En el paralelepípedo el triángulo P_1BA rectángulo, con $\overline{P_1B}$ como hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras se tiene $|\overline{P_1B}|^2 = |\overline{P_1A}|^2 + |\overline{AB}|^2$

Distancia entre P_1 y A: $|\overline{P_1A}| = (y_2 - y_1)$ (Por estar P_1 y A sobre una recta paralela al eje y)

Distancia entre A y B = $|\overline{AB}| = (x_2 - x_1)$ (Por ser los puntos P_1 y A colineales en una recta paralela al eje x)

Reemplazando tenemos: $|\overline{P_1B}|^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$

$= (x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\overline{P_1B} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Ahora el triángulo P_1P_2B rectángulo por ser vértices de un paralelepípedo rectangular.

Por el teorema de Pitágoras se tiene: $|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1B}|^2 + |\overline{AP_2}|^2$

$|\overline{AP_2}| = (z_2 - z_1)$

Reemplazamos: $|\overline{P_1P_2}|^2 = \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Figura 1. Solución del estudiante E1 del problema 1 de la actividad 1 de 2015.

Problema 2: En una universidad el bloque B se encuentra al este del bloque A a una distancia de 30 m, el bloque C está ubicado a 40m en dirección nororiente del bloque B. ¿A qué distancia debe estar ubicado un punto de encuentro en caso de emergencia, de tal forma que quede a igual distancia de los tres bloques?

Este problema no fue resuelto en el salón de clases.

Actividad 2

Para está clase se hizo una discusión de la primera parte del texto de Polya *"Cómo plantear y resolver problemas",* aplicada a un problema clásico de cálculo tomado del mismo texto.

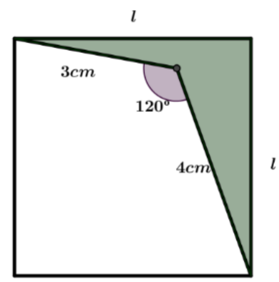
Ejemplo de discusión:

“Se vierte agua en un deposito cónico con una rapidez r, su vértice apunta hacia abajo, el radio del cono es a, su altura es h. Determinar la velocidad con la que sube el nivel del agua cuando tiene una profundidad y.”

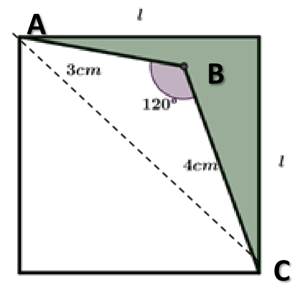
En la discusión colectiva del problema los estudiantes aportan algunas ideas esenciales que permiten dar la solución. En sus primeros intentos por resolver el problema hacen una representación gráfica del ejemplo bajo discusión e identifican que la operación a utilizar es la derivación. Un bloqueo de corta duración identificado en la discusión en clase, fue la determinación de una función que les permitiera calcular la velocidad con la que sube el nivel del agua en función del tiempo. Este bloqueo fue superado en el momento que construyeron la representación gráfica del problema.

Problema 1: Trace una gráfica de un polinomio que tenga un extremo relativo, dos extremos relativos, tres extremos relativos, a partir de la anterior experiencia responda:
¿Qué relación tienen los extremos relativos de una función polinómica con sus raíces?
¿De acuerdo al grado de la función polinómica es posible determinar cuántos extremos relativos podría tener la función?
¿Es posible que una función polinómica de grado 5 tenga 3 extremos relativos? Explique
Este problema no fue resuelto en el salón de clases.
Para esta sesión de clase se resolvió el siguiente:

Problema 2: Determine el área de la región sombreada de la siguiente figura.



El estudiante **E1** comprende y se apropia del problema el cual resuelve de forma inmediata al utilizar un resultado clásico de la trigonometría. Para ello, él traza la diagonal del cuadrado y denomina A, B y C los vértices del triángulo ABC_{Δ}.



Calcula la longitud de la diagonal AC, para ello hace uso de la Ley del coseno $(AC)^2 = b^2 = (3)^2 + (4)^2 - (2)(3)(4)cos120° = 25 - 12(-\frac{1}{2}) = 25+12 = 37$, de donde $b=\sqrt{37}$. Luego aplica el teorema de Pitágoras, obtiene la igualdad $(AC)^2 = b^2 = 2\cdot\ell^2$, y así logra calcular el área total del cuadrado de lado ℓ con $\ell^2 = \frac{(AC)^2}{2} = \frac{37}{2}$. Como el área del triángulo formado por los lados del cuadrado y la diagonal es la mitad, entonces $\frac{37}{4}$ es ese valor. Calcula a continuación el área del triángulo ABC_{Δ} que forman los dos lados dados de la figura con la diagonal y que se obtiene por la fórmula $ABC_{\Delta} = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 \cdot sin(120°) = 2 \cdot 3 \cdot sin(120°)$. Finalmente, el área sombreada la encuentra restando ésta al triángulo formado por los lados del cuadrado y la diagonal; es decir: el área sombreada calculada por **E1** fue: $\frac{37}{4} - 6 \cdot sen(120°) = 9{,}25 - 5.197 = 4.053$ siendo esta la solución buscada.

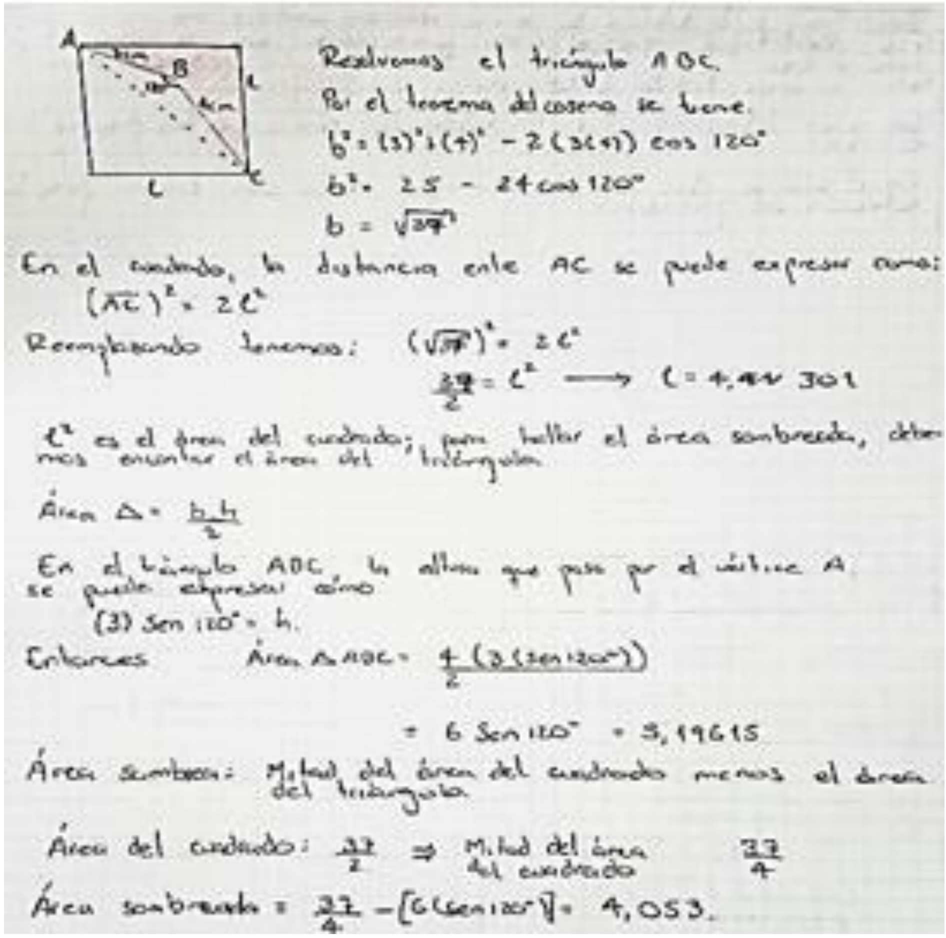


Figura 2. Solución del estudiante E1 del problema 2 de la actividad 2 de 2015.

Actividad 3

Problema 1: Se saben que algunas de las raíces de un polinomio de grado 5 son: -2,-1, 3, 2i, y que su gráfica pasa por el punto de coordenadas (2,-2). Determine la ecuación del polinomio.

Problema 2[67]: ¿Cuál es el número de parejas ordenadas de números reales (a, b) tales que $(a + bi)^{2015} = a - bi$?

[67] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, pp. 19, 2002.

En esta actividad ninguno de los problemas propuestos es resuelto; una de las dificultades encontradas en los estudiantes radica en que no cuentan con las suficientes bases para poder abordarlos, en este caso el manejo de las propiedades y operaciones básicas con números complejos. Por tanto, se hizo una intervención en la clase con el fin que los estudiantes retomaran posteriormente los problemas que consistió en la explicación de algunas de las generalidades básicas de los números complejos como: definición, propiedades y operaciones básicas.

Actividad 4

Para esta clase se hizo la discusión de los elementos esenciales que conforman el razonamiento plausible de Polya, para ser aplicados a problemas futuros.

El estudiante **E2** resolvió el siguiente problema.

Problema 1: Para medir la altura de las de nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β. Determine una ecuación que permite calcular la altura h de las nubes.

Este estudiante resuelve el problema. La comprensión e interpretación fue determinante para su solución. Es de resaltar que el problema no ofreció ninguna ilustración gráfica de la situación en mención.

Desde sus primeros intentos por resolver el problema, **E2** ilustra adecuadamente la situación, permitiéndole deducir la expresión algebraica para calcular la altura de las capas de las nubes tal como se muestra en la figura 3.

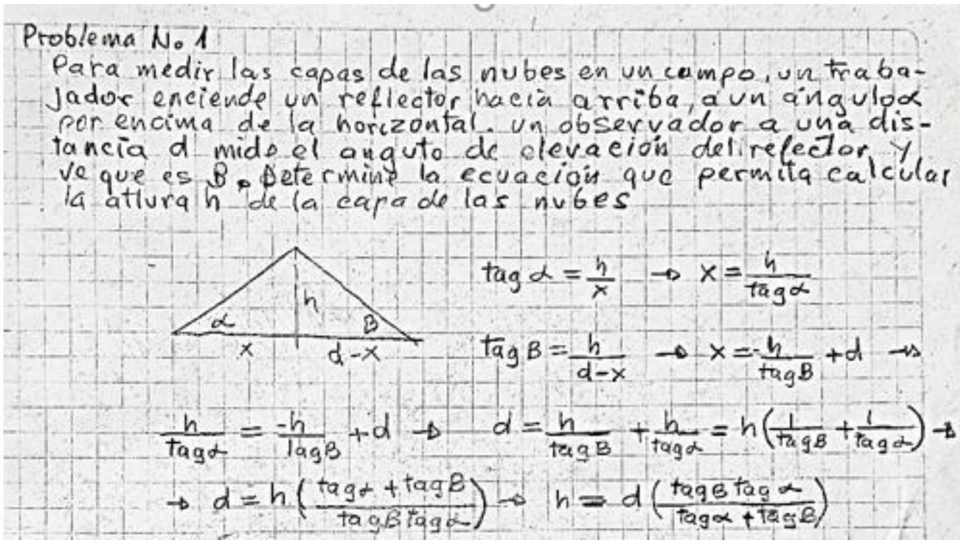


Figura 3. Solución del estudiante E2 del problema 1 de la actividad 4 de 2015.

Problema 2[68] Supongamos que α, β, y γ, denotan los ángulos de un triángulo. Mostrar que

a. $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

b. $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4\cos(\alpha) cos(\beta) cos(\gamma)$

c. $\sin(4\alpha) + \sin(4\beta) + \sin(4\gamma) = 4\cos(2\alpha) cos(2\beta) cos(2\gamma)$

Este problema no fue resuelto en el salón de clases.

Actividad 5

Problema 1: ¿Cómo se podría argumentar que todo polinomio con coeficientes complejos de grado impar, necesariamente debe tener al menos un cero real?

Recordar: un cero o raíz de un polinomio P, es un número real c, tal que $P(c) = 0$.

Problema 2: ¿Cómo podría usted demostrar que el perímetro de un triángulo es menor que los 4/3 de las sumas de sus medianas?

---

[68] Polya, G., (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid. p. 469

Estos dos problemas no fueron resueltos en el salón de clases.

Actividad 6

Para esta clase se hizo discusión de la primera parte del texto de Mason, Burton y Stacey, *“Pensar Matemáticamente”,* correspondiente al primer capítulo *“Todo el mundo puede empezar”,* en el cual se describen los dos procesos centrales que conforman el pensamiento matemático: particularización y generalización.

En esta actividad, el estudiante **E1** hace una aproximación de la solución del problema 1 en clase, después presenta una solución del mismo en una actividad posterior.

Problema 1: ¿Cuántos cuadrados de diferentes tamaños hay en un tablero de 1x1, 2x2, 3x3, 8x8 (ajedrez)? ¿Podrías generalizar a un tablero nxn?

En los primeros intentos de solución en el aula por este estudiante, se destaca el conteo inicial de los cuadrados en los diferentes tableros, que le permiten inferir la cantidad de cuadrados en un tablero de 8x8. Durante el desarrollo del problema se genera un bloqueo de larga duración que se dio en el momento de tratar de generalizarlo, ya que no era evidente ver que la cantidad de cuadrados en un tablero de nxn corresponde a $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ pero sin demostrarla por alguna vía.

Este bloqueo fue superado por el mismo estudiante posteriormente, al darse cuenta que para el tablero de 1x1 hay un cuadrado. Para el tablero de 2x2 hay un total de 5 cuadrados correspondientes a un cuadrado de tamaño 2x2, más 4 cuadrados de tamaño 1x1. Para el tablero de 3x3 hay un total 14 cuadrados correspondientes a un cuadrado de 3x3, más cuatro cuadrados de 2x2, más nueve de cuadrados de 1x1.

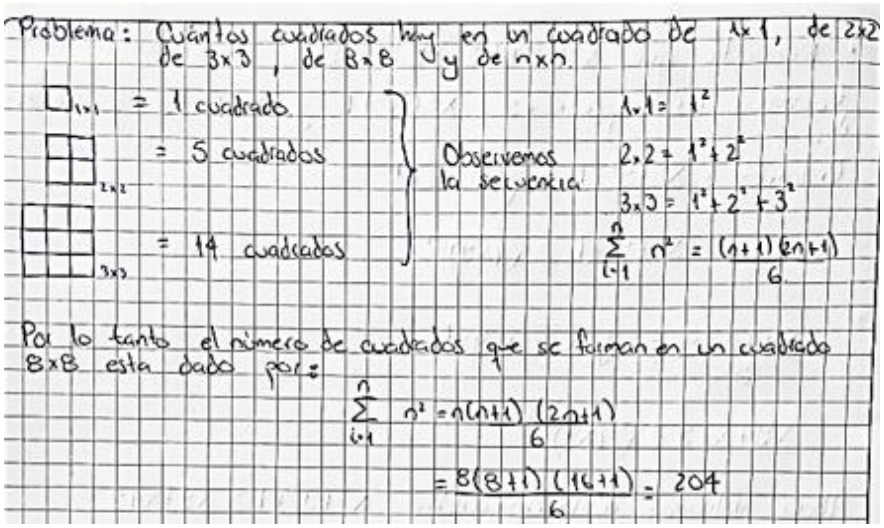
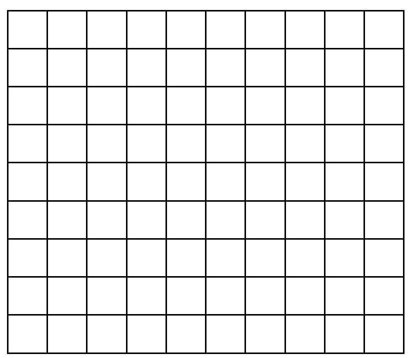


Figura 4: Solución del estudiante E1 del problema 1 posterior a la actividad 6 de 2015.

Problema 2: Dos jugadores se turnan para reemplazar con X y con O en un tablero de 9x9. El primer jugador inicia con X y el segundo con O, el jugador obtiene un punto si obtiene más X o más O en la misma fila o columna. El jugador con más puntos obtenidos es el que gana.



¿Cuál debe ser la estrategia del ganador?

¿Funcionaría la misma estrategia si el tablero es de 8x8?

¿Cuál debe ser el tamaño del tablero para que la estrategia funcione?

Los dos estudiantes jugaron entre ellos y rápidamente el estudiante **E2**, descubrió la estrategia ganadora, la tiene el jugador 1 que empieza marcando en el centro de tablero y juega simétricamente al jugador 2; de esta forma, siempre va obtener la mayor cantidad de puntos al hacer el conteo vertical u horizontal.

Actividad 7

En esta clase se hizo discusión al capítulo dos del texto de Mason, Burton y Stacey, *"Fases del trabajo".* Específicamente sobre los procesos de particularización y generalización, y las fases de: abordaje, ataque y revisión.

Para esta actividad el estudiante **E2** resuelve el siguiente problema:

Problema 1

Se sabe que hay dos raíces cuadradas de 1, es decir 1 y -1. Estas corresponden a la solución de la ecuación $x^2 = 1$, o su equivalente a $x^2 - 1 = 0$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$, o $x^4 - 1 = 0$

¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay?

¿Cómo encontraría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay? ¿Cuál sería el número de las raíces n-ésimas de 1?

El estudiante **E2** resuelve el problema sin dificultad alguna, ya que anteriormente se les había dado las propiedades y operaciones básicas de los números complejos. Él calculó las raíces de 1 por medio de la factorización.

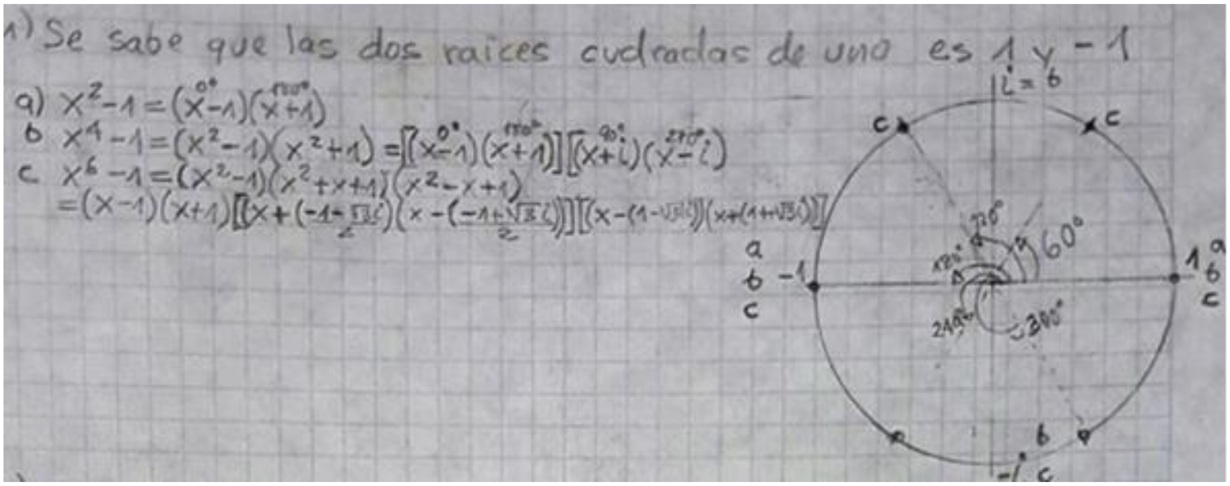


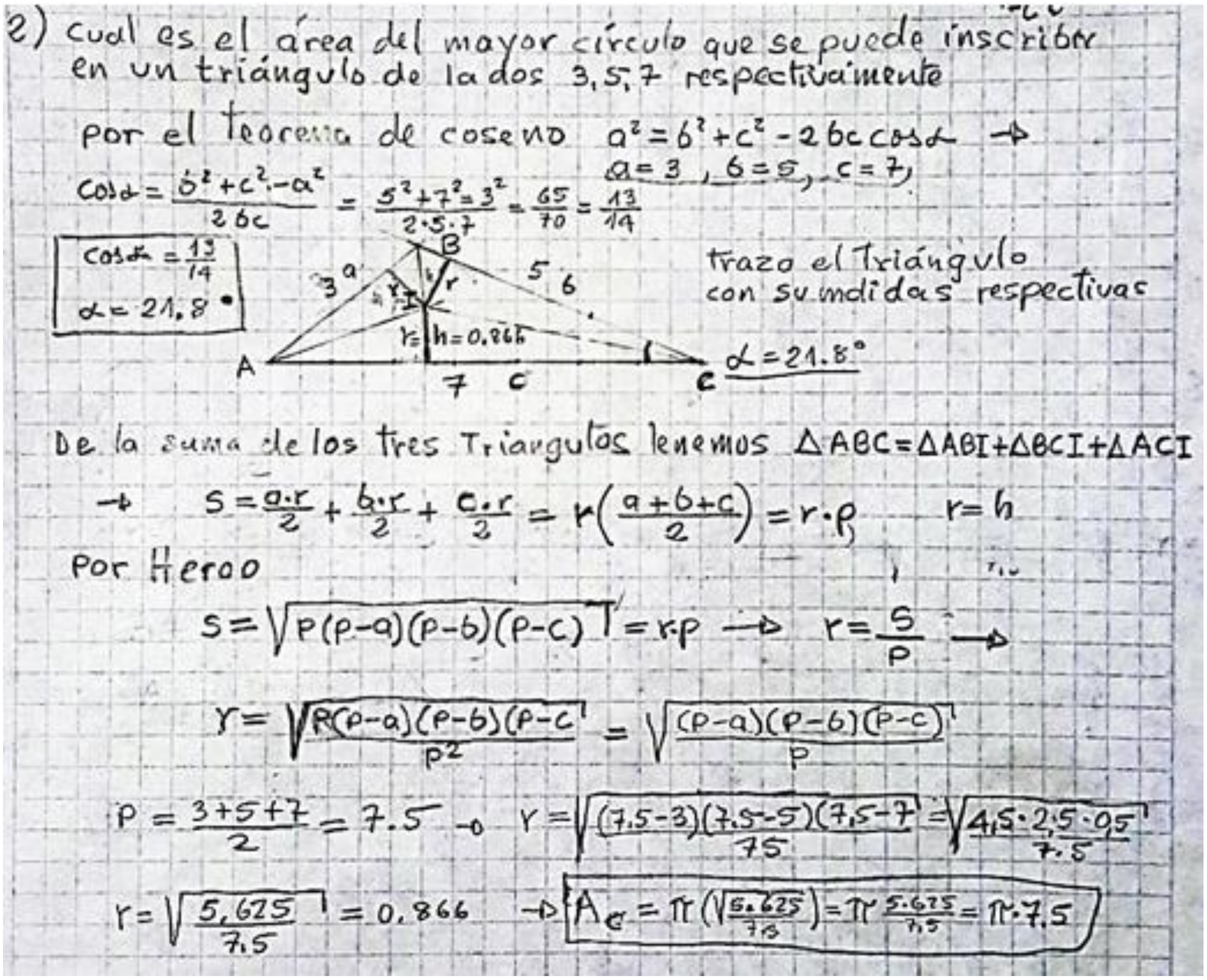
Figura 5: Solución del estudiante E2 del problema 1 de la actividad 7 de 2015.

Para el segundo problema, el mismo estudiante **E2** presenta una solución en días posteriores a esta actividad, que le requirió tiempo y trabajo al desarrollarla.

Problema 2

¿Cuál es el área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo de lados 3, 5, y 7?

E2 hace intentos de aplicar la ley de los cosenos, que no lo lleva a la solución y le surge un bloqueo prolongado al tratar de determinar el radio de dicho círculo por esa vía, el día de dicha actividad. Este bloqueo fue superado por él al considerar que incentro del triángulo divide al triángulo en tres triángulos y que el radio de este círculo es cualquiera de las alturas correspondiente a estos tres triángulos desde el incentro y la suma del área de estos tres triángulos correspondía al producto del semiperímetro por el radio. Concluye con una solución correcta, pero con un lapsus y en lugar de $\pi(0.75)$ concluye que la solución es $\pi(7.5)$. Tal como se puede apreciar en la figura siguiente:



2) Cual es el área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo de lados 3, 5, 7 respectivamente

por el teorema de coseno $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ →

$a=3$, $b=5$, $c=7$

$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$

$\boxed{\cos\alpha=\frac{13}{14} \quad \alpha=21.8}$

trazo el Triángulo con sus medidas respectivas

De la suma de los tres Triangulos tenemos $\Delta ABC=\Delta ABI+\Delta BCI+\Delta ACI$

→ $S=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}=r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=r\cdot p$ $\quad r=h$

Por Heron

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=r\cdot p \rightarrow r=\frac{S}{p} \rightarrow$$

$$r=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$p=\frac{3+5+7}{2}=7.5 \rightarrow r=\sqrt{\frac{(7.5-3)(7.5-5)(7.5-7)}{7.5}}=\sqrt{\frac{4.5\cdot2.5\cdot0.5}{7.5}}$$

$$r=\sqrt{\frac{5.625}{7.5}}=0.866 \rightarrow \boxed{A_O=\pi\left(\sqrt{\frac{5.625}{7.5}}\right)=\pi\frac{5.625}{7.5}=\pi\cdot7.5}$$

Figura 6: Solución del estudiante E2 del problema 2 posterior a la actividad 7 de 2015.

Actividad 8

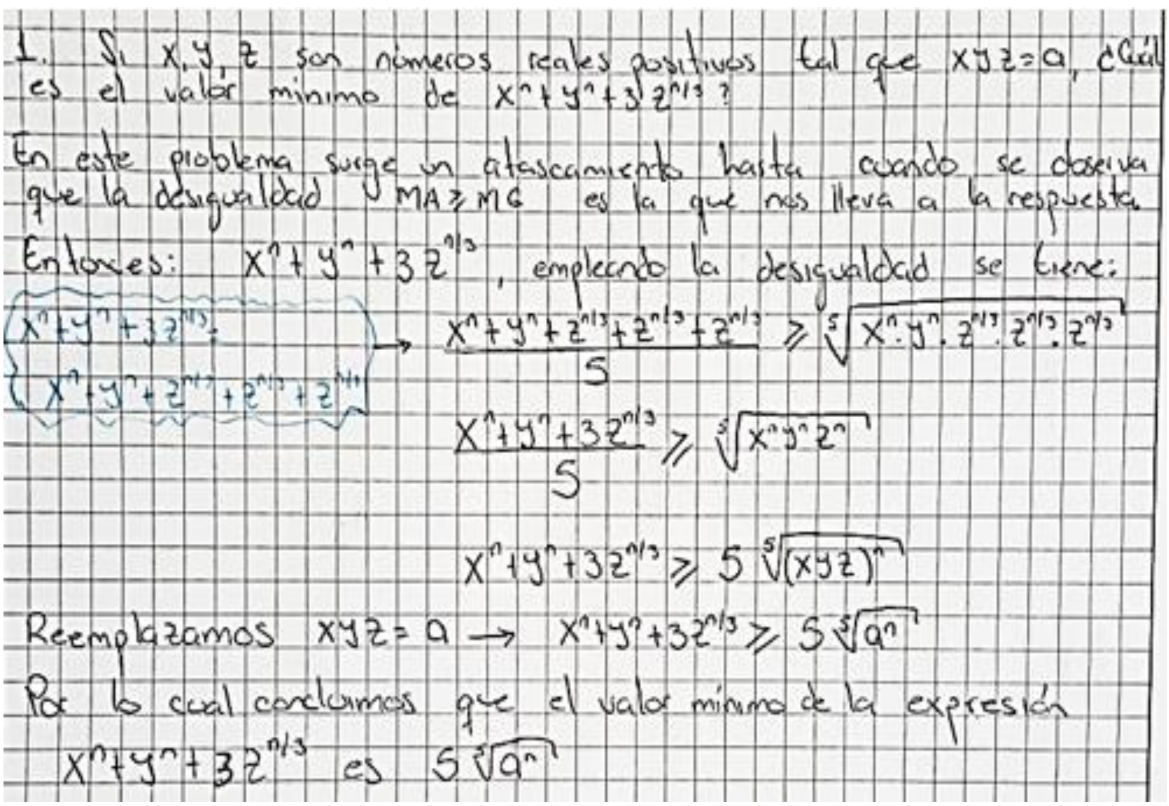
Para esta clase se hizo una discusión de un capítulo del mismo texto ya mencionado, el correspondiente a *"Respuestas cuando esté atascado"*. Aquí los estudiantes trabajan algunos ejemplos propuestos en el capítulo, además de hacer énfasis al rotulado de la fase del abordaje: lo que SE, lo que QUIERO y lo que puedo USAR.

El problema 1, se resolvió en una clase posterior por el estudiante **E1.**

Problema 1

Si x, y, z son números reales positivos tal que $xyz = a$, ¿cuál es el valor mínimo de $x^n + y^n + 3z^{\frac{n}{3}}$?

En sus primeros intentos por resolver el problema, **E1** trató de aplicar la desigualdad MA≥MG en varias ocasiones sin resultado alguno, generando así un bloqueo prolongado que fue superado cuando logró reescribir la expresión algebraica $x^n + y^n + 3z^{\frac{n}{3}}$ como $x^n + y^n + z^{\frac{n}{3}} + z^{\frac{n}{3}} + z^{\frac{n}{3}}$, y de esta forma encontrar el valor mínimo al aplicar la desigualdad MA≥MG tal como se aprecia en la figura 7.



1. Si x, y, z son números reales positivos tal que $xyz = a$, ¿Cuál es el valor mínimo de $x^n + y^n + 3z^{n/3}$?

En este problema surge un atascamiento hasta cuando se observa que la desigualdad MA ≥ MG es la que nos lleva a la respuesta.

Entonces: $x^n + y^n + 3z^{n/3}$, empleando la desigualdad se tiene:

$x^n + y^n + 3z^{n/3}$:

$x^n + y^n + z^{n/3} + z^{n/3} + z^{n/3}$

$$\longrightarrow \frac{x^n + y^n + z^{n/3} + z^{n/3} + z^{n/3}}{5} \geq \sqrt[5]{x^n \cdot y^n \cdot z^{n/3} \cdot z^{n/3} \cdot z^{n/3}}$$

$$\frac{x^n + y^n + 3z^{n/3}}{5} \geq \sqrt[5]{x^n y^n z^n}$$

$$x^n + y^n + 3z^{n/3} \geq 5\sqrt[5]{(xyz)^n}$$

Reemplazamos $xyz = a \longrightarrow x^n + y^n + 3z^{n/3} \geq 5\sqrt[5]{a^n}$

Por lo cual concluimos que el valor mínimo de la expresión $x^n + y^n + 3z^{n/3}$ es $5\sqrt[5]{a^n}$

Figura 7: Solución del estudiante E1 del problema 1 posterior a la actividad 8 de 2015.

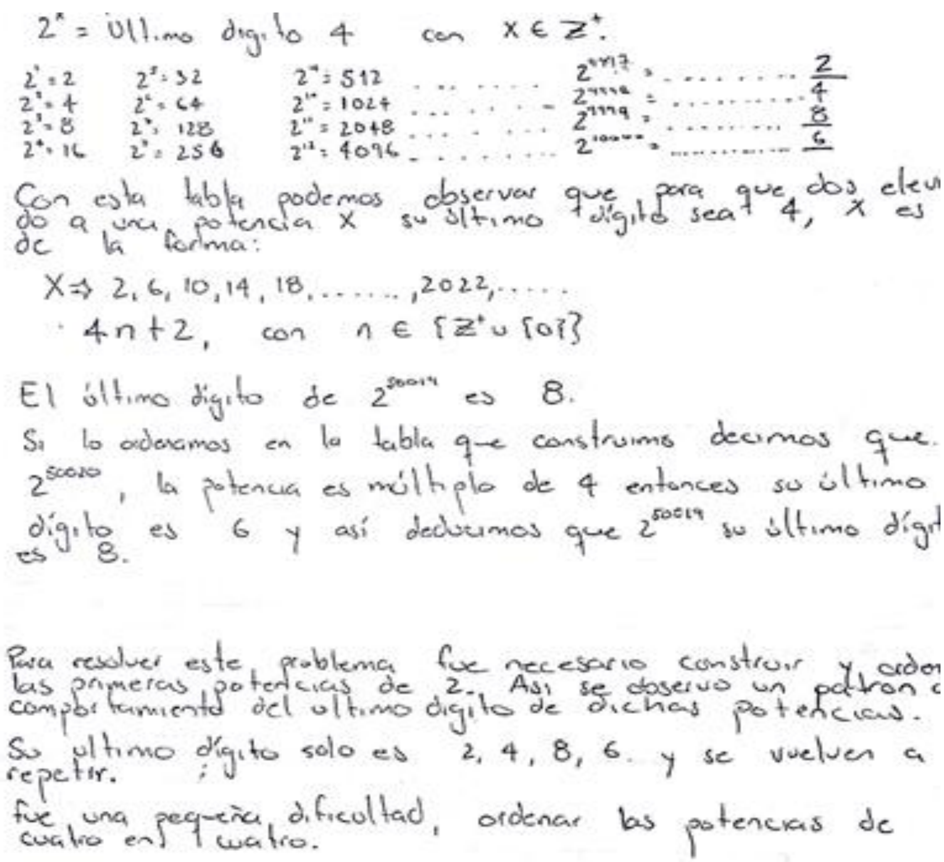
Para el problema 2 los estudiantes **E1** y **E2** lo resuelven en el salón de clases.

Problema 2[69]

Si el último digito de 2^x, con $x \in \mathbb{Z}^+$, es 4, ¿cómo debe ser la forma de x?

¿Cuál sería el último digito de 2^{50019}?

El estudiante **E1**, calcula varias potencias del 2 y los organiza en una tabla que le permite conjeturar que los valores que puede asumir x corresponden a $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$, es decir $x = 4n + 2$, con $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, para que el último dígito de la potencia de 2^x, termine en 4, y así poder calcular el último dígito de 2^{50019} que es 8, debido a que el exponente de 2^{50020}, es divisible entre 4 y su último dígito terminará en 6.



2^x = último digito 4 con $x \in \mathbb{Z}^+$.

$2^1 = 2$ $2^5 = 32$ $2^9 = 512$ .... 2^{9997} = ... 2

$2^2 = 4$ $2^6 = 64$ $2^{10} = 1024$ .... 2^{9998} = ... 4

$2^3 = 8$ $2^7 = 128$ $2^{11} = 2048$ .... 2^{9999} = ... 8

$2^4 = 16$ $2^8 = 256$ $2^{12} = 4096$ .... 2^{10000} = ... 6

Con esta tabla podemos observar que para que dos elevado a una potencia x su último dígito sea 4, x es de la forma:

$X \Rightarrow 2, 6, 10, 14, 18, \ldots\ldots, 2022, \ldots\ldots$

$4n+2$, con $n \in \{\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$

El último digito de 2^{50019} es 8.

Si lo ordenamos en la tabla que construimos decimos que 2^{50020}, la potencia es múltiplo de 4 entonces su último dígito es 6 y así deducimos que 2^{50019} su último dígito es 8.

Para resolver este problema fue necesario construir y ordenar las primeras potencias de 2. Así se observo un patron de comportamiento del ultimo digito de dichas potencias.

Su ultimo dígito solo es 2, 4, 8, 6. y se vuelven a repetir.

fue una pequeña dificultad, ordenar las potencias de cuatro en cuatro.

Figura 8: Solución del estudiante E1 del problema 2 de la actividad 8 de 2015.

69 Adaptado del problema recuperado el de 4 de abril de 2015 del URL: http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/TeoriaDeNumeros.pdf. Nieto, J. (sin año).Teoría de Números para Olimpiadas Matemáticas. Venezuela.

El estudiante **E2**, calcula varias potencias de 2 para poder conjeturar una forma de calcular el último dígito de cualquier potencia. Se da cuenta a partir de los cálculos que realiza que las potencias de 2 se repite en el orden de $2,4,8,6,2,4,8,6,\dots$. Por lo tanto puede inferir que si toma $x = 4n + 2$, encuentra todas la potencias de 2 que terminan en 4, la cual verifica para $n = 1,2,3,4$. Demuestra que para el caso particular de $x = 50018$, el último dígito termina en 4, por tanto para $x = 50019$, el último dígito termina en 8.

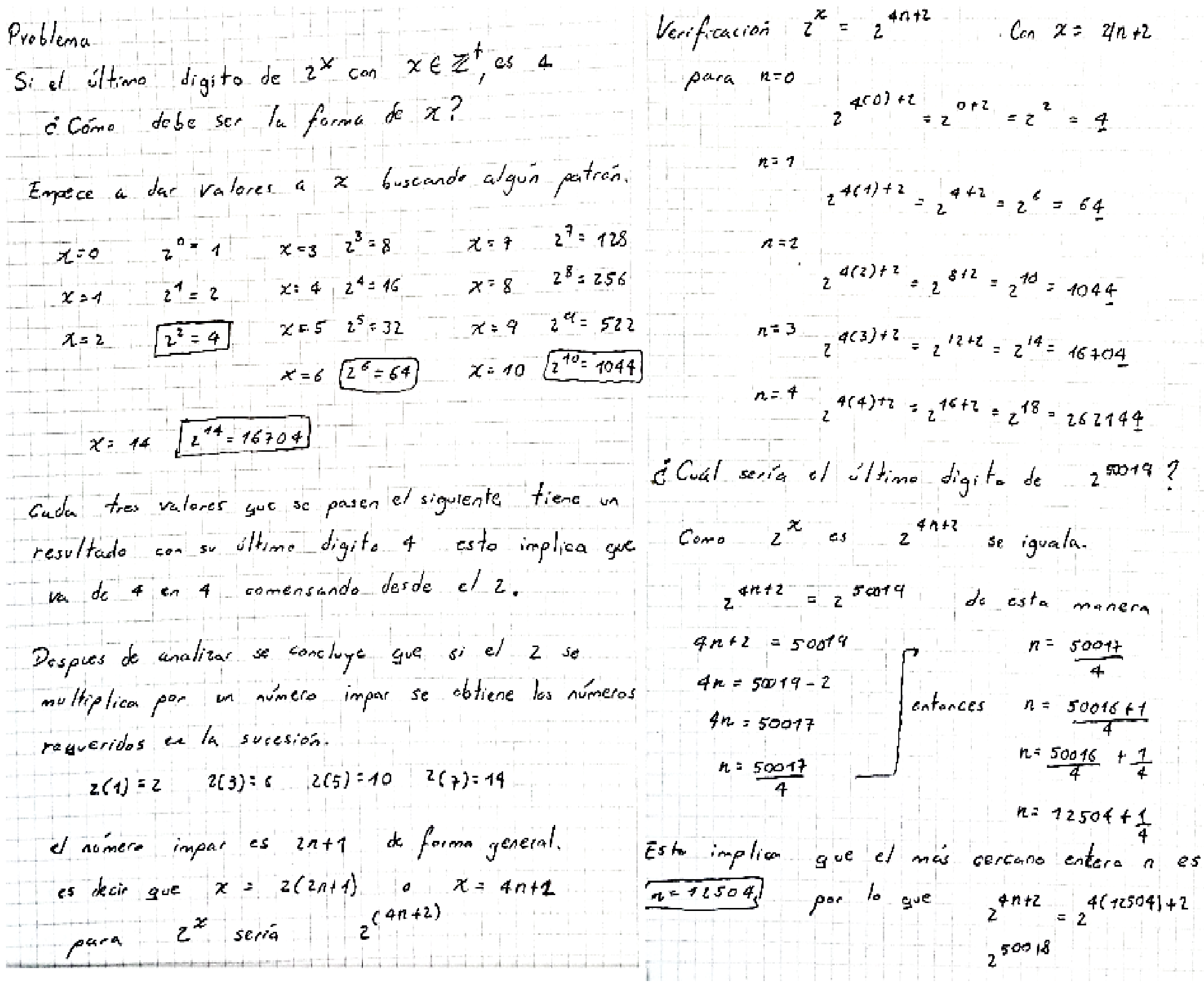

Problema
Si el último digito de 2^x con $x \in \mathbb{Z}^+$, es 4
¿Cómo debe ser la forma de x?
Empece a dar valores a x buscando algún patrón.
$x=0$ $2^0=1$ $x=3$ $2^3=8$ $x=7$ $2^7=128$
$x=1$ $2^1=2$ $x=4$ $2^4=16$ $x=8$ $2^8=256$
$x=2$ $\boxed{2^2=4}$ $x=5$ $2^5=32$ $x=9$ $2^9=522$
$x=6$ $\boxed{2^6=64}$ $x=10$ $\boxed{2^{10}=1044}$
$x=14$ $\boxed{2^{14}=16704}$
Cada tres valores que se pasen el siguiente tiene un resultado con su último digito 4 esto implica que va de 4 en 4 comensando desde el 2.
Despues de analizar se concluye que si el 2 se multiplica por un número impar se obtiene los números requeridos en la sucesión.
$2(1)=2$ $2(3)=6$ $2(5)=10$ $2(7)=14$
el número impar es $2n+1$ de forma general.
es decir que $x = 2(2n+1)$ o $x = 4n+2$
para 2^x sería $2^{(4n+2)}$
Verificación $2^x = 2^{4n+2}$ Con $x = 4n+2$
para $n=0$
$2^{4(0)+2} = 2^{0+2} = 2^2 = 4$
$n=1$
$2^{4(1)+2} = 2^{4+2} = 2^6 = 64$
$n=2$
$2^{4(2)+2} = 2^{8+2} = 2^{10} = 1044$
$n=3$ $2^{4(3)+2} = 2^{12+2} = 2^{14} = 16704$
$n=4$ $2^{4(4)+2} = 2^{16+2} = 2^{18} = 262144$
¿Cual sería el último digito de 2^{50019}?
Como 2^x es 2^{4n+2} se iguala.
$2^{4n+2} = 2^{50019}$ de esta manera
$4n+2 = 50019$
$4n = 50019 - 2$
$4n = 50017$
$n = \frac{50017}{4}$
entonces
$n = \frac{50017}{4}$
$n = \frac{50016+1}{4}$
$n = \frac{50016}{4} + \frac{1}{4}$
$n = 12504 + \frac{1}{4}$
Esto implica que el más cercano entero n es $\boxed{n = 12504}$ por lo que $2^{4n+2} = 2^{4(12504)+2}$
2^{50018}

Figura 9 (hoja 1): Solución del estudiante E2 al problema 2 de la actividad 8 de 2015.

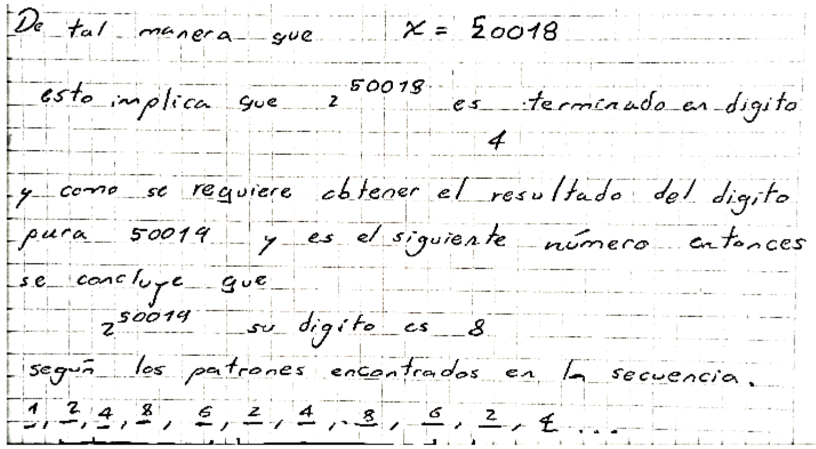

De tal manera que $x = 50018$
esto implica que 2^{50018} es terminado en digito
4
y como se requiere obtener el resultado del digito
para 50019 y es el siguiente número entonces
se concluye que
2^{50019} su digito es 8
según los patrones encontrados en la secuencia.
1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4 ...

Figura 9 (hoja 2): Solución del estudiante E2 al problema 2 de la actividad 8 de 2015.

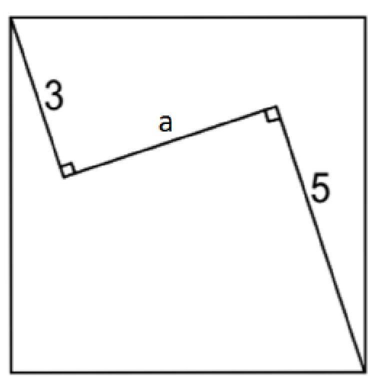
Actividad 9

En esta clase los estudiantes continúan con el capítulo del mismo texto correspondiente a *"Haciendo conjeturas",* que se considera la espina dorsal de la solución de problemas.

De los dos problemas propuestos, el estudiante **E2** plantea una solución muy completa al siguiente primer problema:

Problema 1[70]

Se sabe que el área del cuadrado es $40u^2$, determinar el valor de a.



[70] Adaptado del recuperado el 4 de abril de 2015 del URL: https://www.facebook.com/148210950842/photos/a.151449605842.126810.148210950842/10152726406510843/?type=1&fref=nf.

En sus primeros intentos el estudiante dibuja la diagonal del cuadrado que le permite calcular el área en términos del lado l, de esta forma la diagonal junto con los segmentos cuyas longitudes están dadas en el problema forman dos triangulos semejantes. Al estabecer la igualdad entre las razones dadas, forma dos ecuaciones que le permiten encontrar el valor de a.

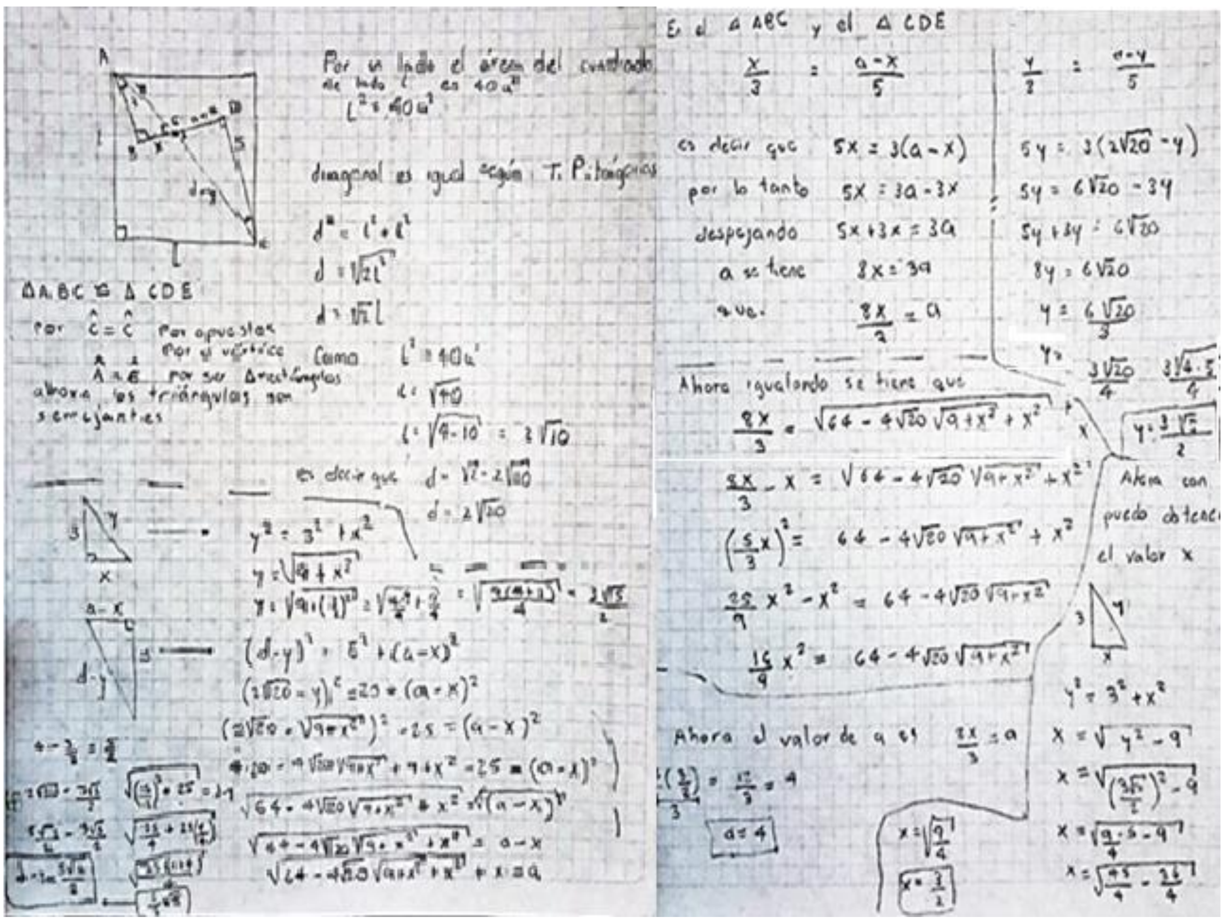
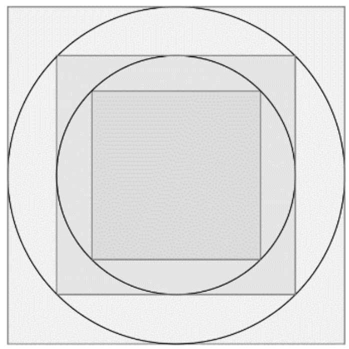


Figura 10: Solución del estudiante E2 al problema 1 de la actividad 9 de 2015.

El problema 2 fue resuelto parcialmente por el estudiante **E1.**

Problema 2[71]:

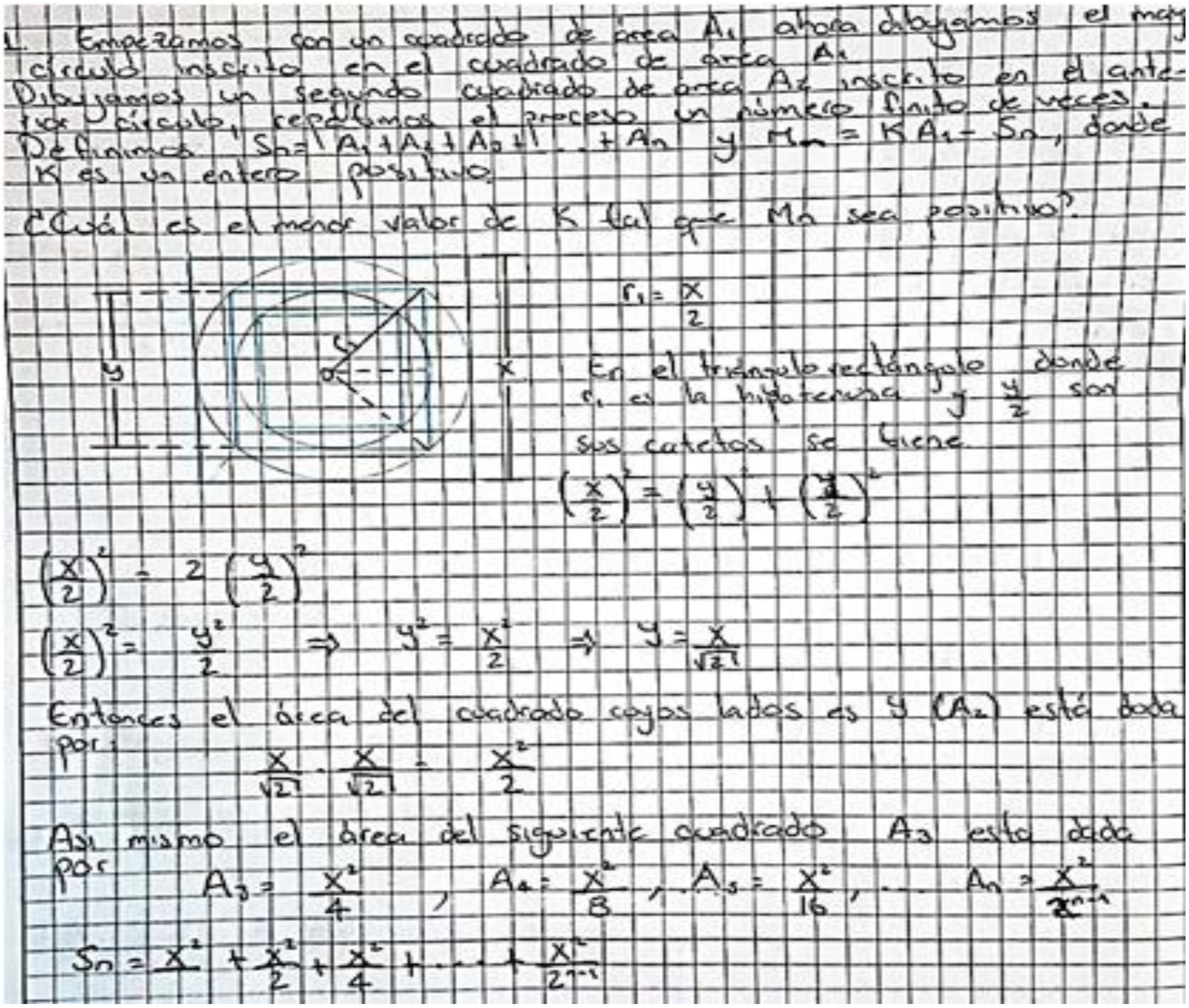
Dibuje un cuadrado de área A_1, en el anterior cuadrado dibuje el mayor círculo inscrito. Ahora dibuje el mayor cuadrado inscrito en el anterior círculo cuya área se denotará por A_2, repita este proceso un número de veces como se puede apreciar en la siguiente figura.



Sea $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, la suma de las áreas de los primeros n cuadrados, y $M_n = kA_1 - S_n$, donde k es un entero positivo ¿cuál es el menor valor que puede tomar k para que M_n sea positivo?

En sus primeros intentos por resolver el problema, a partir del diagrama, el estudiante **E1** calcula el área de los primeros cuadrados para definir su suma. Intuitivamente tenía la sospecha que al factorizar x^2 de $x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{x^2}{2^2}$ la sucesión de sumas finitas $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ converge a 2 y, de ser así, $M_n = kx^2 - 2x^2 = x^2(k-2) > 0$, para $k > 2$, pero no pudo demostrarlo.

[71] Puzzle from Zawaira and Hitchcock "*A Primer for Mathematics Competitions*" OUP 2009.


1. Empezamos con un cuadrado de área A_1 ahora dibujamos el may[or] círculo inscrito en el cuadrado de área A_1. Dibujamos un segundo cuadrado de área A_2 inscrito en el anterior círculo, repetimos el proceso un número finito de veces. Definimos $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ y $M_n = KA_1 - S_n$, donde K es un entero positivo.

¿Cuál es el menor valor de K tal que M_n sea positivo?

$r_1 = \frac{x}{2}$

En el triángulo rectángulo donde r_1 es la hipotenusa y $\frac{y}{2}$ son sus catetos se tiene

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Entonces el área del cuadrado cuyos lados es y (A_2) está dada por:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{2}$$

Así mismo el área del siguiente cuadrado A_3 está dada por

$$A_3 = \frac{x^2}{4}, \quad A_4 = \frac{x^2}{8}, \quad A_5 = \frac{x^2}{16}, \ldots \quad A_n = \frac{x^2}{2^{n-1}}$$

$$S_n = x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \ldots + \frac{x^2}{2^{n-1}}$$

Figura 11: Solución parcial del estudiante E1 al problema 2 de la actividad 9 de 2015.

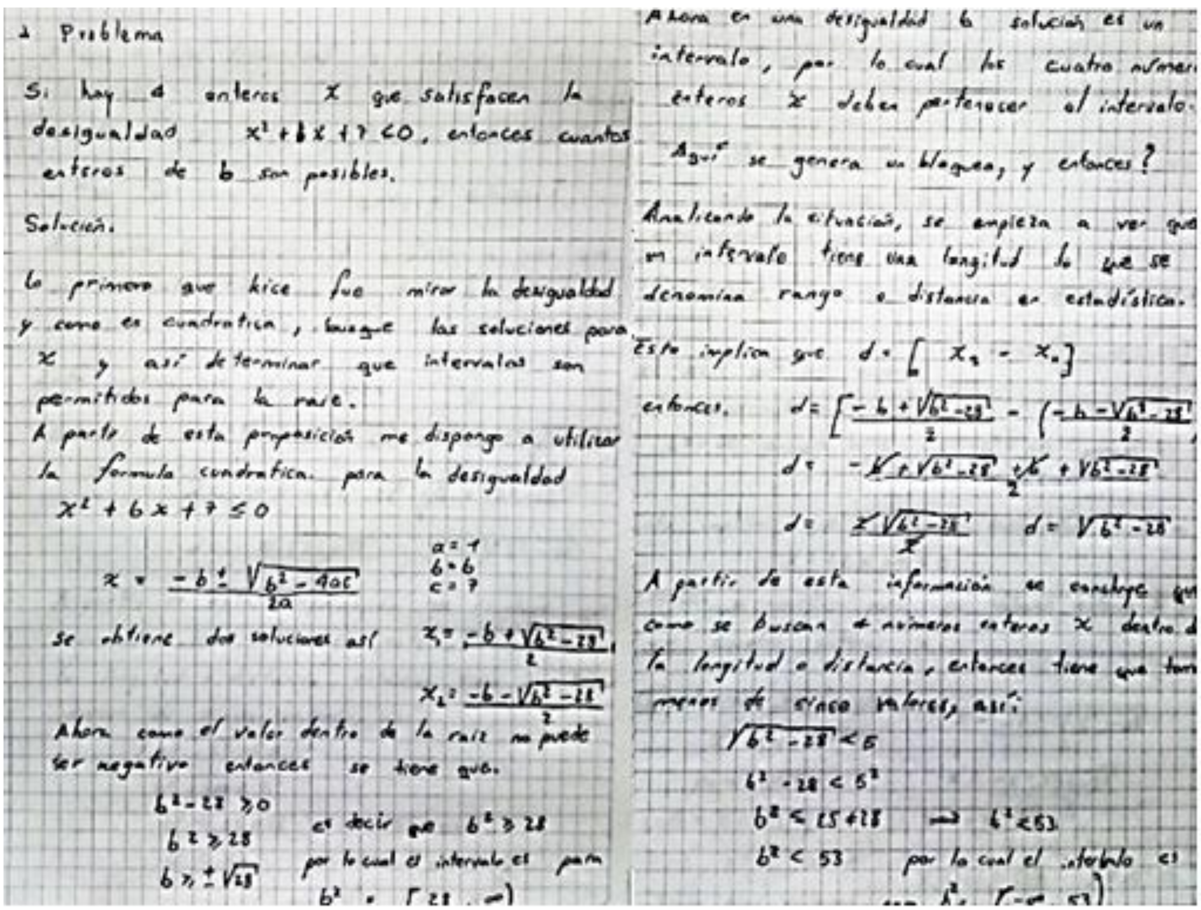
Actividad 10

Para esta actividad ninguno de los dos problemas propuestos es resuelto en el salón de clases, el estudiante **E2** presenta una solución posterior al problema 1 que le requirió varias horas de trabajo.

Problema 1[72]: Si hay exactamente 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$, ¿cuántos valores enteros de b son posibles?

[72] Modificado, del recopilado “Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones”, nivel superior, p, 12, 2005.

A partir de la solución de la ecuación cuadrática, el estudiante **E2** determina el intervalo solución en términos de la variable desconocida b de la desigualdad, por tanto $x \in \left[\frac{-b-\sqrt{b^2-28}}{2}, \frac{-b+\sqrt{b^2-28}}{2}\right]$, esto le permite calcular la longitud del intervalo que corresponde a $d = \sqrt{b^2 - 28}$, y deducir que esta longitud debe ser menor a 5, debido al hecho de que $b^2 - 28 > 0$, por tanto $b > 5$, para que sea entero de acuerdo a la condición dada en el problema. Él establece la desigualdad $\sqrt{b^2 - 28} < 5$, cuyas únicas soluciones enteras corresponden a $-7, -6, 6, 7$. Finalmente verifica sus resultados de una forma rigurosa encontrando los cuatro valores enteros de x, para cada valor entero de b.



1 Problema

Si hay 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 < 0$, entonces cuantos enteros de b son posibles.

Solución.

Lo primero que hice fue mirar la desigualdad y como es cuadratica, busque las soluciones para x y así determinar que intervalos son permitidos para la raíz.

A partir de esta proposición me dispongo a utilizar la formula cuadratica para la desigualdad

$x^2 + 6x + 7 \leq 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad a = 1$, $b = 6$, $c = 7$

se obtiene dos soluciones así $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 28}}{2}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 28}}{2}$

Ahora como el valor dentro de la raiz no puede ser negativo entonces se tiene que.

$b^2 - 28 \geq 0$

$b^2 \geq 28$ es decir que $b^2 \geq 28$

$b \geq \pm\sqrt{28}$ por lo cual el intervalo es para $b^2 = [28, \infty)$

Ahora en una desigualdad la solución es un intervalo, por lo cual los cuatro numeros enteros x deben pertenecer al intervalo.

Aquí se genera un bloqueo, y entonces?

Analizando la situación, se empieza a ver que un intervalo tiene una longitud lo que se denomina rango o distancia en estadística.

Esto implica que $d = [x_1 - x_2]$

entonces. $d = \left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 28}}{2} - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 28}}{2}\right)\right]$

$d = \frac{-\cancel{b} + \sqrt{b^2 - 28} + \cancel{b} + \sqrt{b^2 - 28}}{2}$

$d = \frac{\cancel{2}\sqrt{b^2 - 28}}{\cancel{2}}$ $\quad d = \sqrt{b^2 - 28}$

A partir de esta información se concluye que como se buscan 4 números enteros x dentro de la longitud o distancia, entonces tiene que tomar menos de cinco valores, así:

$\sqrt{b^2 - 28} < 5$

$b^2 - 28 < 5^2$

$b^2 < 25 + 28 \longrightarrow b^2 < 53$

$b^2 < 53$ por lo cual el intervalo es para $b^2 = [-\infty, 53)$

Figura 12 (hoja 1): Solución del estudiante E2 al problema 1 de la actividad 10 de 2015.

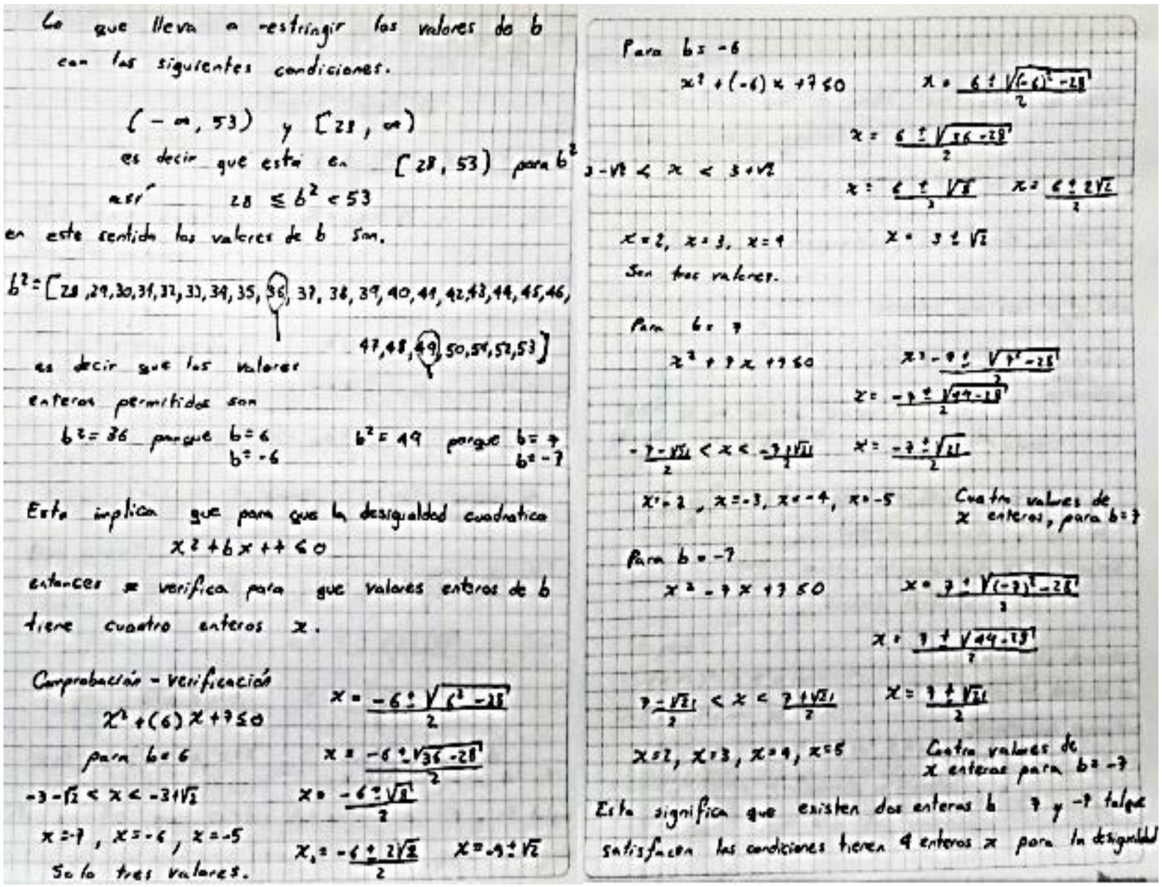

Lo que lleva a restringir los valores de b
con las siguientes condiciones.
$(-\infty, 53)$ y $[28, \infty)$
es decir que está en $[28, 53)$ para b^2
así $28 \leq b^2 < 53$
en este sentido los valores de b son.
$b^2 = [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53]$
es decir que los valores
enteros permitidos son
$b^2 = 36$ porque $b = 6$, $b = -6$
$b^2 = 49$ porque $b = 7$, $b = -7$
Esto implica que para que la desigualdad cuadrática
$x^2 + bx + 7 \leq 0$
entonces se verifica para que valores enteros de b
tiene cuatro enteros x.
Comprobación - verificación
$x^2 + (6)x + 7 \leq 0$
para $b = 6$
$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 28}}{2}$
$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2}$
$x = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2}$
$x_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ $x = -3 \pm \sqrt{2}$
$-3 - \sqrt{2} < x < -3 + \sqrt{2}$
$x = -7$, $x = -6$, $x = -5$
Solo tres valores.
Para $b = -6$
$x^2 + (-6)x + 7 \leq 0$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 28}}{2}$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2}$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$ $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$
$x = 3 \pm \sqrt{2}$
$3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}$
$x = 2$, $x = 3$, $x = 4$
Son tres valores.
Para $b = 7$
$x^2 + 7x + 7 \leq 0$
$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 28}}{2}$
$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2}$
$x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}$
$\frac{-7 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{-7 + \sqrt{21}}{2}$
$x = -2$, $x = -3$, $x = -4$, $x = -5$
Cuatro valores de x enteros, para $b = 7$
Para $b = -7$
$x^2 - 7x + 7 \leq 0$
$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 28}}{2}$
$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2}$
$x = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$
$\frac{7 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{7 + \sqrt{21}}{2}$
$x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$
Cuatro valores de x enteros para $b = -7$
Esto significa que existen dos enteros b 7 y -7 tal que satisfacen las condiciones tienen 4 enteros x para la desigualdad

Figura 12 (hoja 2): Solución del estudiante E2 al problema 1 de la actividad 10 de 2015.

Problema 2[73]: ¿Cuál es el mínimo valor que puede alcanzar la expresión

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}?$$

Este problema no es resuelto en el salón de clases.

Actividad 11

Problema 1[74]: Si $a, b, c, d,$ son números positivos, demuestre que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

[73] Modificado, del recopilado "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p, 12, 2005.
[74] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). P. 234.

Problema 2[75]**:** Si $x, y > 0$, demuestre que $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} > \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Ninguno de los dos problemas fue resuelto en el salón de clases.

Actividad 12

En esta actividad los dos estudiantes intentan resolver el siguiente problema

Problema 1

Demuestre que $x \geq 0$, entonces $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$

En este problema ambos estudiantes (**E1, E2**) intentan aplicar la desigualdad $MA \geq MG$, sin acercarse a la solución del problema. Se les sugiere reescribir la desigualdad de otra forma, el estudiante E1 rescribe la desigualdad como $3x^3 + 4 \geq 6x^2$, pero no logra avanzar en la solución al problema, ya que al aplicar la desigualdad directamente se tiene $\frac{3x^3+4}{2} \geq \sqrt{12x^3}$. Se esperaba que algún estudiante se diera cuenta que $3x^3 + 4 = x^3 + 2x^3 + 4$ y al aplicar la desigualdad MA≥MG, se tiene que: $\frac{x^3+2x^3+4}{3} \geq \sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$.

Problema 2[76]**:** Dado un triángulo de área unidad cuyos lados están dados por *a, b, c*, donde $a \geq b \geq c$. Demuestre que $b \geq \sqrt{2}$.

Este problema no fue resuelto en el salón de clases.

[75] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). p. 237.
[76] Ibidem p. 214.

Actividad 13

En esta actividad el estudiante **E2** resuelve el problema 1 y trata de resolver el problema 2 sin resultado alguno.

Problema 1

Demostrar que, para cualquier x, y se cumple $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

En este problema **E2** aplica la desigualdad $MA \geq MG$, sin acercarse a la solución como se muestra a continuación:

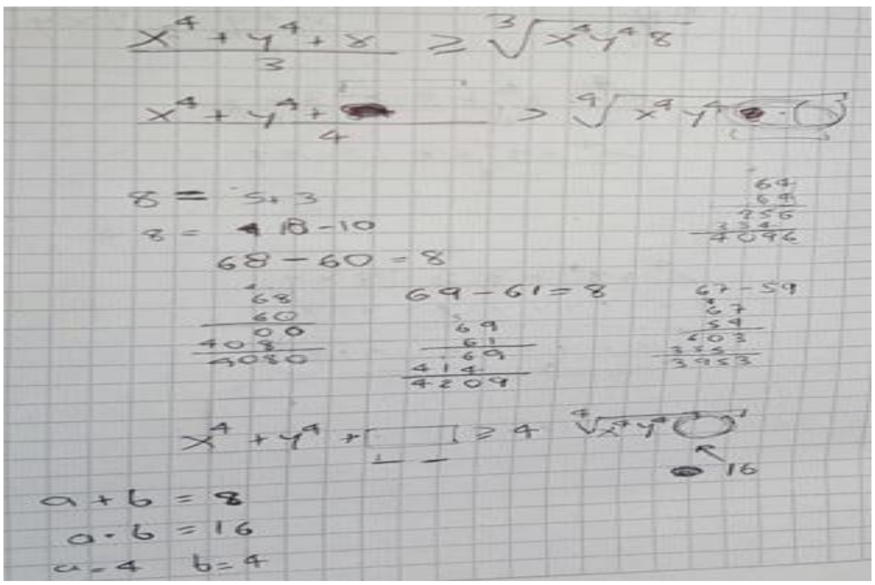


Figura 13: Intentos del estudiante E2 por resolver el problema 1 de la actividad 13 de 2015.

El bloqueo de este problema se supera cuando **E2** reescribe la desigualdad en la forma adecuada para que la desigualdad $MA \geq MG$ sea aplicable, tal como aparece en la Figura 14.

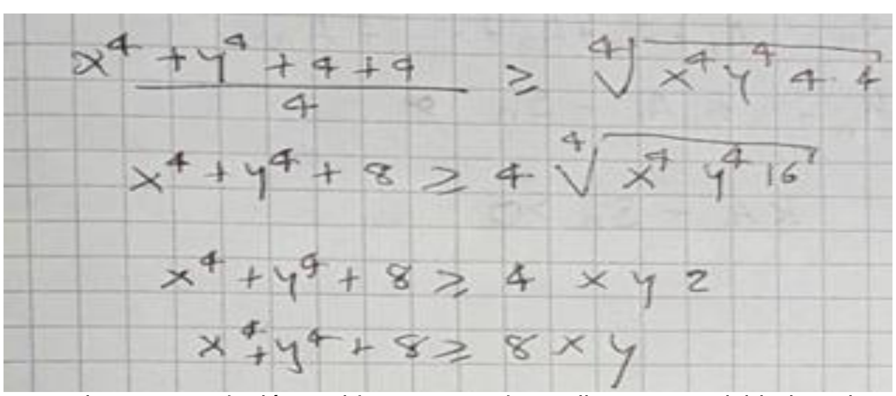


Figura 14: Solución problema 1 por el estudiante E2 actividad 13 de 2015.

Problema 2[77]: Dos números distintos a y b se escogen aleatoriamente del conjunto $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^{25}\}$ ¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un número entero?

En este problema el estudiante **E1** particulariza en algunos casos, tratando de ver alguna regularidad que le permita calcular la probabilidad, pero sin éxito alguno.

Actividad 14

Problema 1[78]: Calcular el valor de $2015^2 - 2014^2 + 2013^2 - \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$

Problema 2: ¿Existe un número de 4 dígitos tal que la suma de mismo número, más sus correspondientes dígitos sea 2015?

Ejemplo: Para el número 2005, está el 1979, ya que al sumar 1979+1+9+7+9=2005

Actividad 15

Problema 1[79]: Para cualquier x real ¿cuál es el valor máximo para $\sqrt{2016-x} + \sqrt{x-2008}$?

Problema 2[80]: Para m, n enteros positivos, ¿cuál es máximo valor de n tal que $\sqrt{m-174} + \sqrt{m+34} = n$?

Ninguno de los problemas de estas dos actividades fue resuelto por los estudiantes.

[77] Tomado del recopilado "olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p. 12, 2005.
[78] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p. 13.
[79] Ibidem. p.190.
[80] Ibidem. p.175.

4.2. Segunda Experiencia: Resultados de las actividades de la etapa del primer semestre de 2016

Para esta fase de la investigación algunos de los problemas que se utilizaron en el semestre del 2015 se modificaron y/o sustituyeron por otros, de acuerdo a la experiencia descrita en la metodología de este trabajo.

Actividad 1

En el desarrollo de esta clase se hizo una exposición detallada del método de los cuatros pasos de Polya, al igual como se hizo en el semestre del 2015 con el problema abordado en el salón de clases: *"Determinar la diagonal de un paralelepípedo si se conocen las longitudes de su ancho, largo y altura"*[81]. Los resultados obtenidos en los estudiantes son similares a los que se obtuvieron en la primera experiencia, ya que los estudiantes identificaron los datos del problema, se realizó la representación del paralelepípedo, en el cual etiquetaron correctamente las variables, un estudiante al cual se identifica como **E3**[82] en esta fase de la investigación, se propone dibujar la diagonal de la base del paralelepípedo y aplicar dos veces el teorema de Pitágoras para encontrar la expresión algebraica que permita encontrar la longitud de la diagonal del paralelepípedo en términos de las longitudes de los lados conocidos.

En cuanto a los dos problemas planteados en esta actividad, el mismo estudiante de manera casi inmediata propone la solución del **problema 1**.

Problema 1:

[81] Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C. p. 29.
[82] Los estudiantes de esta II Experiencia (I-2016) de la investigación no coinciden con los de la I experiencia (II-2015).

Encontrar una ecuación que permita calcular la distancia de dos puntos cualquiera en $\mathbb{R}^3$.

El estudiante **E3** propone dibujar dos puntos en el espacio y definir la distancia entre los dos puntos como la longitud de la diagonal del paralelepípedo que se puede construir con los puntos dados como vértices opuestos y al aplicar el resultado obtenido en el ejemplo de discusión, obtiene la expresión algebraica que permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$.

El segundo problema que fue modificado de la **Actividad 1** correspondiente a la primera experiencia no fue abordado, pero hubo una aproximación a la solución por el estudiante **E3.**

Problema 2:

Dibújese un cuadrilátero convexo, ahora ubíquese un punto interior M tal que la suma de las distancias del punto a sus vértices sea mínima.

El estudiante **E3,** dibuja un cuadrilátero convexo de vértices A, B, C, D y un punto interior cualquiera del cuadrilátero M, al trazar las dos diagonales de cuadrilátero forma los triángulos A, M, C y B, M, D, se percató de la relación entre el punto M y la intersección de las dos diagonales, demuestra por medio de la desigualdad triangular que el único punto interior del cuadrilátero que satisface la condición de que la suma de las distancias del punto a sus vértices es la mínima, corresponde a la intersección de las dos diagonales.

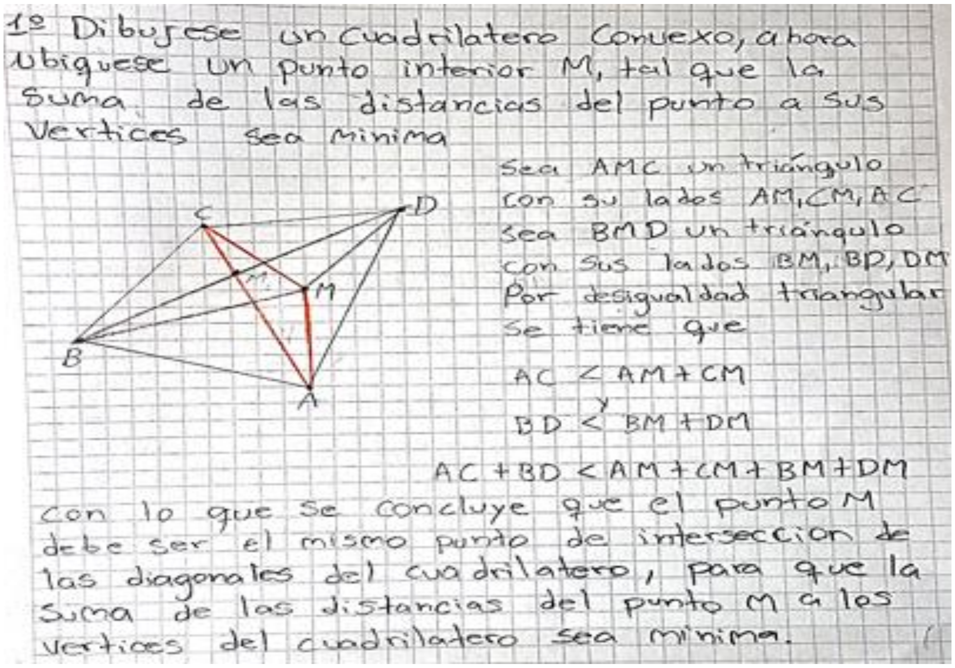


Figura 15: Solución propuesta por el estudiante E3 posterior a la actividad 1 del primer semestre de 2016.

Actividad 2

En esta clase se hizo el mismo desarrollo propuesto en el segundo semestre del 2015, los problemas fueron modificados como se describió en el **Capítulo 3.**

Problema 1: Trace una gráfica de un polinomio que tenga un extremo relativo, dos extremos relativos, tres extremos relativos, a partir de la anterior experiencia responda:

¿Qué relación tienen los extremos relativos de una función polinómica con sus raíces?

¿De acuerdo al grado de la función polinómica es posible determinar cuántos extremos relativos podría tener la función?

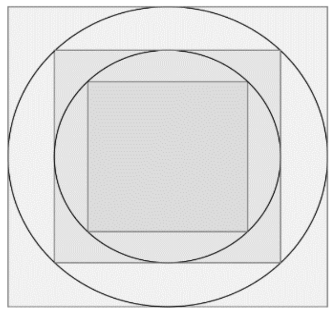
¿Es posible que una función polinómica de grado 5 tenga 3 extremos relativos?

Explique

Este problema no fue resuelto en el salón de clases, mientras que el segundo problema fue resuelto parcialmente por **E3**.

Problema 2[83]:

Dibuje un cuadrado de área A_1, en el anterior cuadrado dibuje el mayor círculo inscrito. Ahora dibuje el mayor cuadrado, cuya área se denotará por A_2, inscrito en el anterior círculo, repita este proceso un número de veces como se puede apreciar en la siguiente figura:



Sea $S_n = A_1 + A_2 + \cdots A_n$, la suma de las áreas de los n cuadrados, y $M_n = kA_1 - S_n$, donde k es un entero positivo ¿cuál es el menor valor de k para que M_n, sea positivo?

El estudiante **E3** construyó la expresión algebraica que permite encontrar la suma de los n primeros cuadrados. De una manera muy intuitiva verificó que la sucesión de las expresiones $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, para n ≥ 1, tiene límite 2. Se le propuso que lo demostrara de forma rigurosa, pero no lo logró, por lo que se considera sólo una solución parcial.

Actividad 3

Problema 1: Se saben que algunas de las raíces de un polinomio de grado 5 son:

-2,-1, 3, 2i, y que su gráfica pasa por el punto de coordenadas (2,-2). Determine la ecuación del polinomio.

---

[83] Puzzle from Zawaira and Hitchcock "*A Primer for Mathematics Competitions"* OUP 2009.

Problema 2[84]: ¿Cuál es el número de parejas ordenadas de números reales (a, b) tales que $(a+bi)^{2015} = a - bi$?

Para esta actividad hubo la necesidad de intervenir con los estudiantes, ya que ellos no contaban con el manejo básico sobre los números complejos; es por ello que ninguno de los dos problemas fue resuelto.

Actividad 4

Para esta clase se discutieron los elementos más esenciales del razonamiento plausible para ser aplicados a problemas futuros.

Problema 1: Para medir la altura de las de nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β. Determine una ecuación que permite calcular la altura h de las nubes.

Problema 2[85] Supongamos que α, β, y γ denotan los ángulos de un triángulo.

Mostrar que

a. $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

b. $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4\cos(\alpha) cos(\beta) cos(\gamma)$

c. $\sin(4\alpha) + \sin(4\beta) + \sin(4\gamma) = 4\cos(2\alpha) cos(2\beta) cos(2\gamma)$

---

[84] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, pp. 19, 2002.

[85] Polya, G., (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid. p. 469

En cuanto a los problemas presentados, no hubo acercamiento alguno a una solución. Es de resaltar que el problema 1 fue resuelto de forma inmediata por el estudiante **E2** en la primera experiencia del curso electivo.

Actividad 5

Problema 1: ¿Cómo se podría argumentar que todo polinomio con coeficientes complejos de grado impar, necesariamente debe tener al menos un cero real?

Recordar: un cero o raíz de un polinomio P, es un número real c, tal que $P(c) = 0$.

Problema 2: ¿Cómo podría usted demostrar que el perímetro de un triángulo es menor que los 4/3 de las sumas de sus medianas?

Ninguno de los problemas fue resuelto en el salón de clases.

Actividad 6

Para esta clase se hizo discusión de la primera parte del texto de Mason, Burton y Stacey, "Pensar Matemáticamente", correspondiente al primer capítulo "Todo el mundo puede empezar", en el cual se describen los dos procesos centrales que conforman el pensamiento matemático: particularización y generalización.

En esta actividad, de los dos problemas, el estudiante **E4** logra resolver el problema 1 en el aula.

Problema 1: ¿Cuántos cuadrados de diferentes tamaños hay en un tablero de 1x1, 2x2, 3x3, 8x8 (ajedrez)? ¿Podrías generalizar a un tablero nxn?

En esta solución propuesta por el estudiante **E4**, se evidencia una regularidad encontrada en la mayoría de las soluciones obtenidas en el salón de clases, los estudiantes particularizan de manera natural y es la particularización la que permite inferir conjeturas, que pueden ser ciertas o falsas, pero que no son demostradas de una forma rigurosa.

En la solución propuesta, el mismo estudiante hace el conteo de los primeros cuadrados, para los diferentes tableros, que le permite inferir la cantidad que hay en cada uno de ellos.

De esta manera conjetura que la cantidad de cuadrados que hay en un tablero de nxn, corresponde a la suma de los primeros n cuadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ pero no lo demuestra.

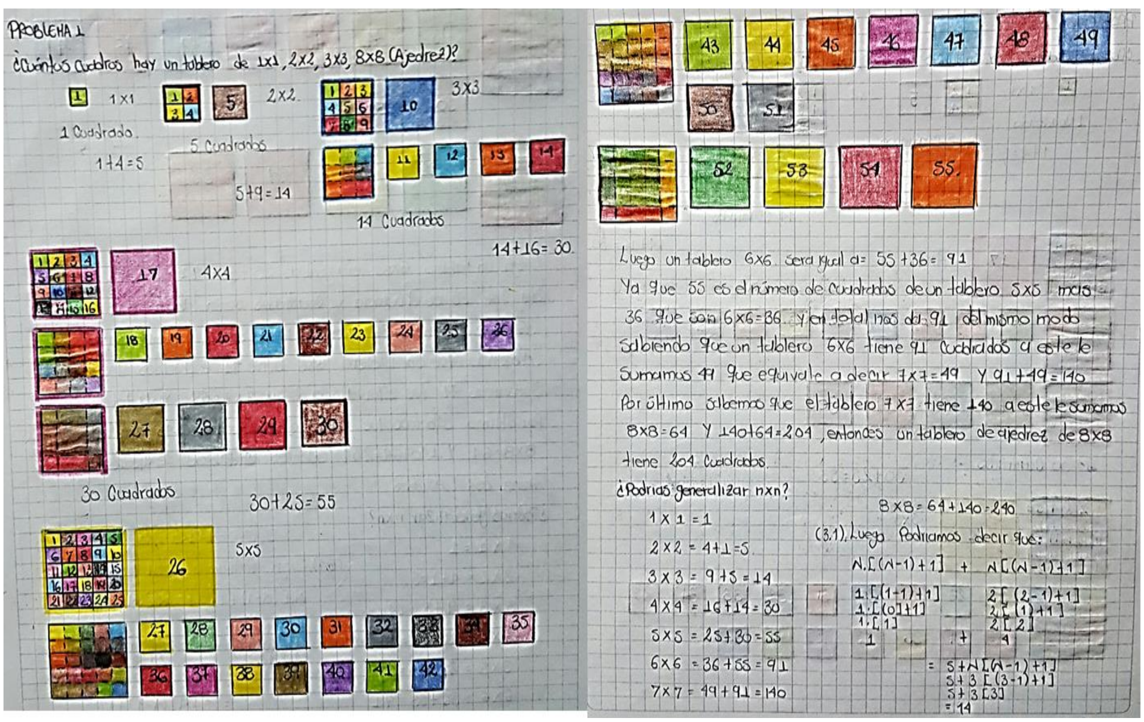
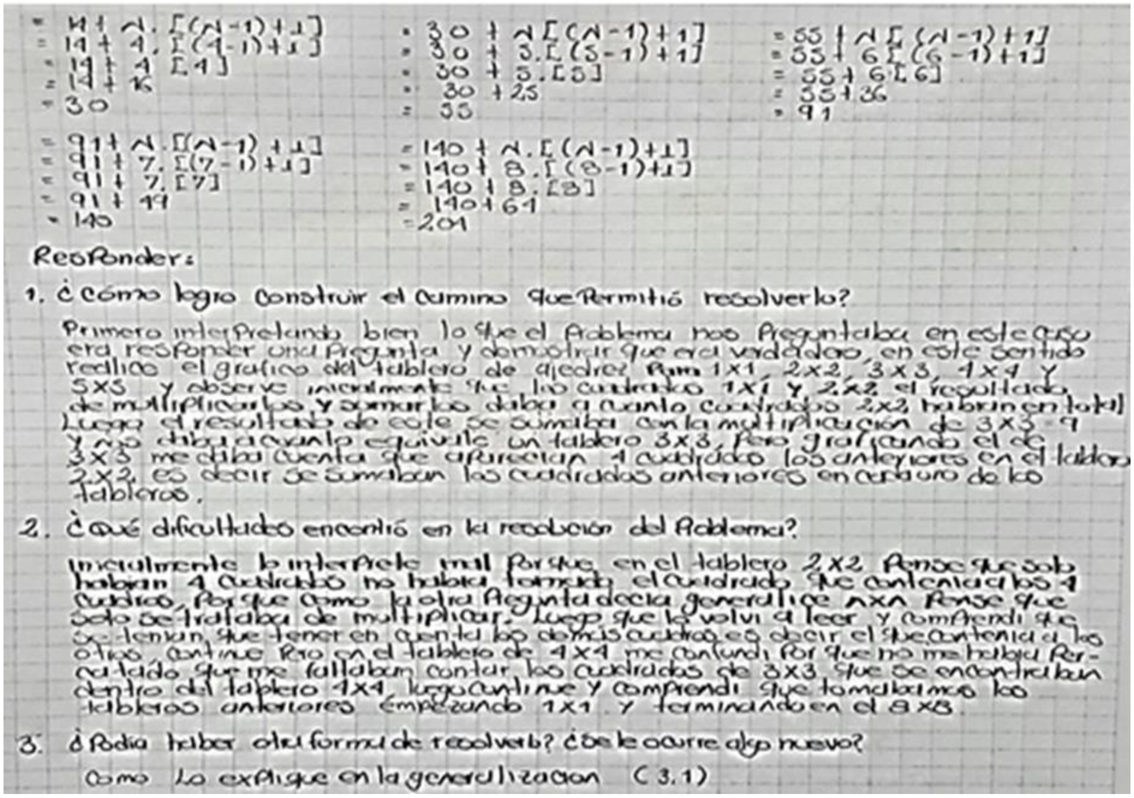


Figura 16 (hoja1): Solución del estudiante E4 al problema 1 de la actividad 6 del primer semestre de 2016.


= 14 + n . [(n-1) + 1]
= 14 + 4 . [(4-1) + 1]
= 14 + 4 [4]
= 14 + 16
= 30

= 30 + n [(n-1) + 1]
= 30 + 5 . [(5-1) + 1]
= 30 + 5 . [5]
= 30 + 25
= 55

= 55 + n [(n-1) + 1]
= 55 + 6 [(6-1) + 1]
= 55 + 6 [6]
= 55 + 36
= 91

= 91 + n . [(n-1) + 1]
= 91 + 7 . [(7-1) + 1]
= 91 + 7 . [7]
= 91 + 49
= 140

= 140 + n . [(n-1) + 1]
= 140 + 8 . [(8-1) + 1]
= 140 + 8 . [8]
= 140 + 64
= 204

Responder:

1. ¿Cómo logro construir el camino que permitió resolverlo?

Primero interpretando bien lo que el problema nos preguntaba en este caso era responder una pregunta y demostrar que era verdadero, en este sentido realice el grafico del tablero de ajedrez para 1x1, 2x2, 3x3, 4x4 y 5x5 y observe inicialmente que los cuadrados 1x1 y 2x2 el resultado de multiplicarlos y sumarlos daba a cuanto cuadrados 2x2 habrian en total. Luego el resultado de este se sumaba con la multiplicación de 3x3 = 9 y nos daba a cuanto equivale un tablero 3x3, pero graficando el de 3x3 me daba cuenta que aparecian 4 cuadrados los anteriores en el tablero 2x2, es decir se sumaban los cuadrados anteriores en cada uno de los tableros.

2. ¿Qué dificultades encontró en la resolución del problema?

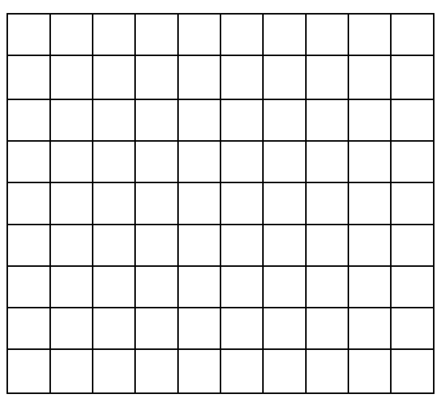
Inicialmente lo interprete mal porque en el tablero 2x2 pense que solo habian 4 cuadrados no habia formado el cuadrado que contenia a los 4 cuadros, porque como la otra pregunta decia generalice nxn pense que solo se trataba de multiplicar. Luego que lo volvi a leer y comprendi que se tenian que tener en cuenta los demás cuadros es decir el que contenia a los otros, continue pero en el tablero de 4x4 me confundi por que no me habia percatado que me faltaban contar los cuadrados de 3x3 que se encontraban dentro del tablero 4x4, luego continue y comprendi que tomabamos los tableros anteriores empezando 1x1 y terminando en el 8x8.

3. ¿Podia haber otra forma de resolverlo? ¿Se le ocurre algo nuevo?

Como lo explique en la generalizacion (3.1)

Figura 16 (hoja 2): Solución del estudiante E4 al problema 1 de la actividad 6 del primer semestre de 2016.

Problema 2: Dos jugadores se turnan para reemplazar con X y con O en un tablero de 9x9. El primer jugador inicia con X y el segundo con O, el jugador obtiene un punto si obtiene más X o más O en la misma fila o columna. El jugador con más puntos obtenidos es el que gana.



¿Cuál debe ser la estrategia del ganador?

¿Funcionaría la misma estrategia si el tablero es de 8x8?

¿Cuál debe ser el tamaño del tablero para que la estrategia funcione?

Para este segundo problema los estudiantes jugaron entre ellos, pero ninguno se percató de la estrategia del ganador, que consistía en que el jugador 1 siempre ganaría si empezaba marcando en el centro del tablero y jugaba simétricamente al jugador 2.

Actividad 7

En esta clase se hizo la discusión del Capítulo 2 del texto en mención, correspondiente a las fases de abordaje, ataque y revisión, dentro de los procesos de resolución de problemas.

Problema 1: Se sabe que hay dos raíces cuadradas de 1, es decir 1 y -1. Estas corresponden a la solución de la ecuación $x^2 = 1$, o su equivalente a $x^2 - 1 = 0$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$, o $x^4 - 1 = 0$

¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay?

¿Cómo encontraría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay?

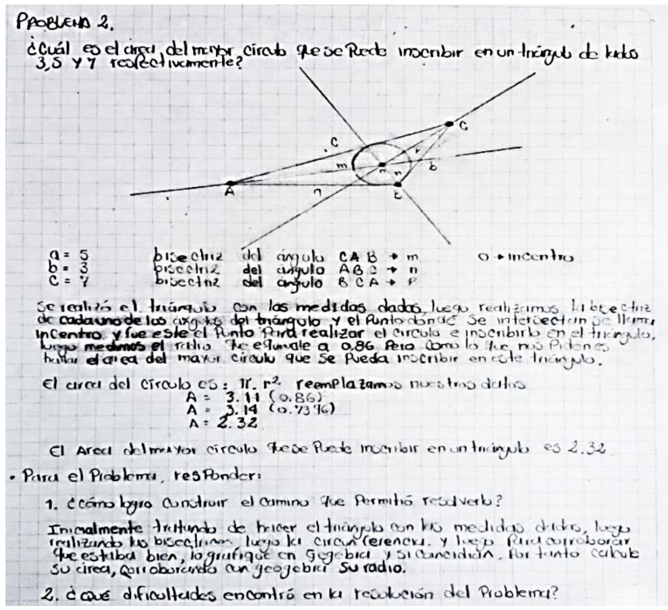
¿Cuál sería el número de las raíces n-ésimas de 1?

Este problema no fue resuelto en el salón de clases.

Para el problema 2 el estudiante **E4** hace un acercamiento a la respuesta.

Problema 2: ¿Cuál es el área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo de lados 3, 5 y 7?

Él identifica que la intersección de las tres bisectrices es el centro del mayor círculo que se puede inscribir y que es tangente a sus lados, pero no demostró rigurosamente ni su centro ni el radio, sino que lo midió directamente del papel y así aproximarse a su valor.


PROBLEMA 2.

¿Cuál es el área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo de lados 3, 5 y 7 respectivamente?

a = 5 bisectriz del ángulo CAB → m o → incentro
b = 3 bisectriz del ángulo ABC → n
c = 7 bisectriz del ángulo BCA → p

Se realizó el triángulo con las medidas dadas, luego realizamos la bisectriz de cada uno de los ángulos del triángulo y el punto donde se intersectan se llama incentro y fue este el punto para realizar el círculo e inscribirlo en el triángulo, luego medimos el radio que equivale a 0.86 pero como lo que nos piden es hallar el área del mayor círculo que se pueda inscribir en este triángulo.

El área del círculo es: $\pi \cdot r^2$ reemplazamos nuestros datos

$A = 3.14\ (0.86)$
$A = 3.14\ (0.7396)$
$A = 2.32$

El área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo es 2.32

- Para el problema, responder:

1. ¿Cómo logró construir el camino que permitió resolverlo?

Inicialmente tratando de hacer el triángulo con las medidas dadas, luego realizando las bisectrices, luego la circunferencia. y luego para corroborar que estaba bien, lo grafiqué en Geogebra y si coincidían. Por tanto calculé su área, corroborando con geogebra su radio.

2. ¿Qué dificultades encontró en la resolución del problema?

Figura 17: Acercamiento del estudiante E4 a la respuesta del problema 2 posterior a la actividad 7 del primer semestre de 2016.

Actividad 8

Para esta clase se abordó por parte de los estudiantes, el capítulo del texto en mención correspondiente a “Respuestas cuando esté atascado”, algunos ejemplos propuestos, además de hacer énfasis al rotulado de la fase del abordaje: lo que SE, lo que QUIERO y lo que puedo USAR.

El problema 1 es resuelto por el estudiante **E3**.

Problema 1: Si x, y, z son números reales positivos tal que $xyz = a$ ¿Cuál es el valor mínimo de $x^n + y^n + 3z^{\frac{n}{3}}$?

El estudiante **E3** logra reescribir la expresión $3z^{\frac{1}{3}}$, como $z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}$, para poder hacer uso de la desigualdad $MA \geq MG$, y así solucionar el problema tal como se puede apreciar en la figura 18.

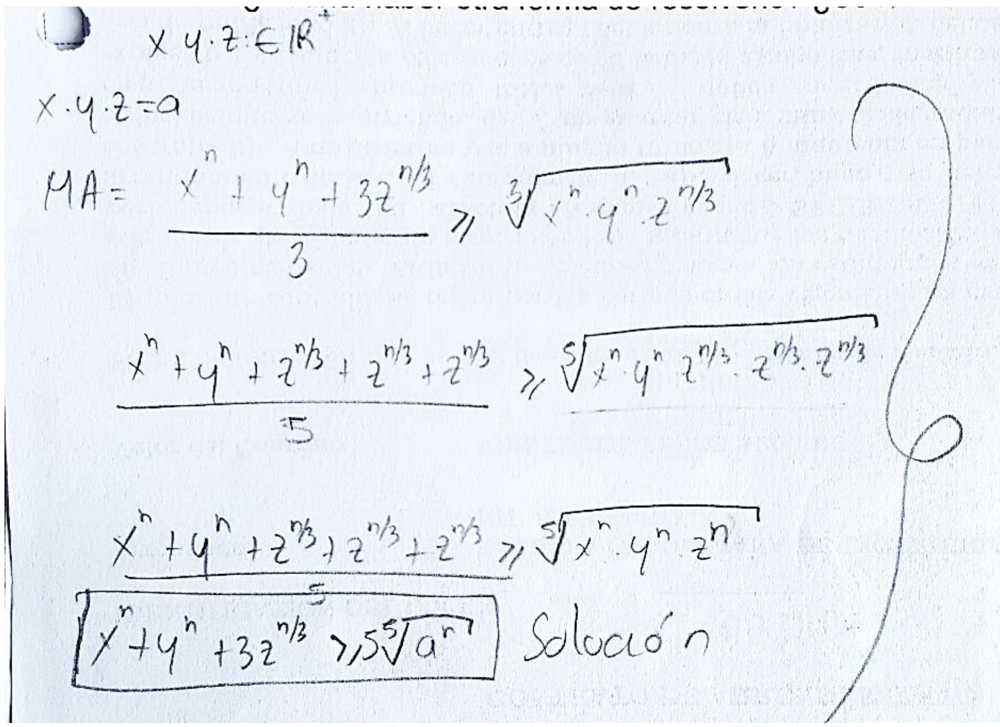


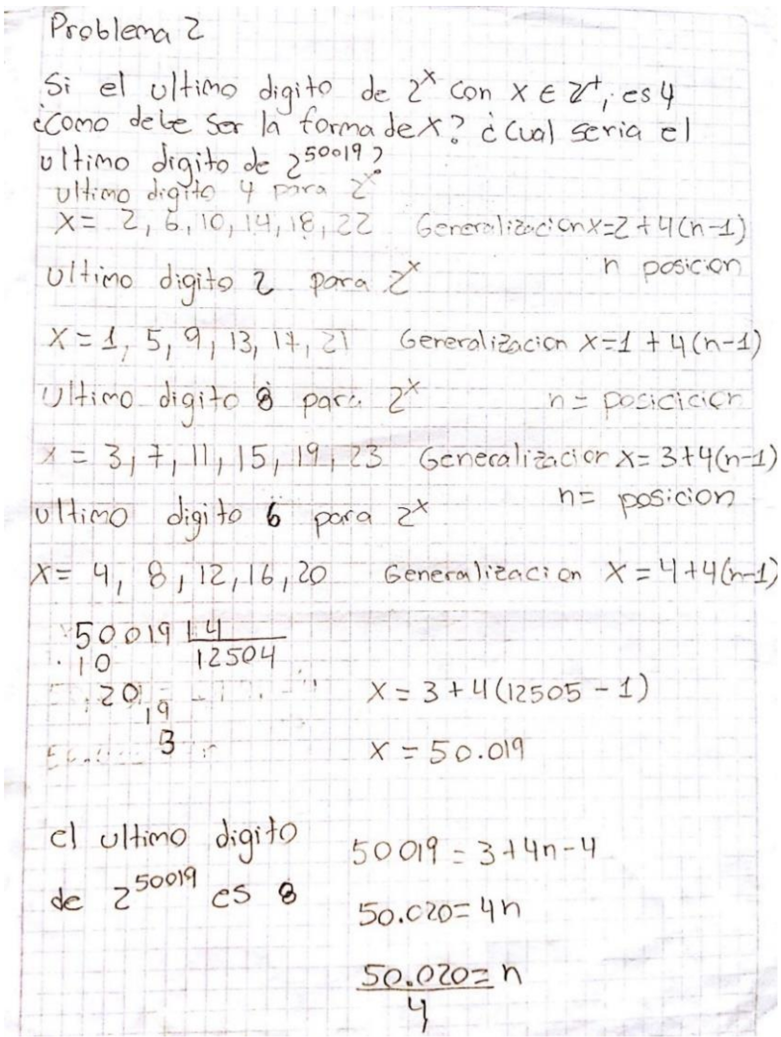
Figura 18: Solución del estudiante E3 al problema 1 de la actividad 8 del primer semestre de 2016.

Problema 2[86]: Si el último dígito de 2^x, con $x \in \mathbb{Z}^+$, es 4, ¿cómo debe ser la forma de x? ¿Cuál sería el último dígito de 2^{50019}?

Este problema fue resuelto en el salón de clases por el estudiante **E3,** quien en sus primeros intentos particulariza y se da cuenta que el último digito de las potencias del 2 varían en 2,4,6,8, de forma periódica y a partir de esto generaliza para cada uno de los casos y muestra que al dividir el exponente entre 4 y al tomar su residuo puede determinar cuál es el último dígito de las potencias de 2. Si el residuo termina en 0

[86] Adaptado del recuperado el 4 de abril de 2015 del URL: http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/TeoriaDeNumeros.pdf.

entonces el último dígito de esa potencia es 6, si el residuo termina en 1 entonces el último dígito de esa potencia es 2, si el residuo termina en 2 entonces el último dígito de esa potencia termina en 4, si el residuo termina en 3 entonces el último dígito de esa potencia es 8. Él verifica sus resultados cuando $x = 50019$, ya que al dividirlo entre 4 da como residuo 3, por tanto, el último dígito de 2^{50019} es 8. La Figura 19 muestra esta solución.


Problema 2

Si el ultimo digito de 2^x con $x \in \mathbb{Z}^+$, es 4 ¿Como debe ser la forma de x? ¿Cual seria el ultimo digito de 2^{50019}?

ultimo digito 4 para 2^x

$x = 2, 6, 10, 14, 18, 22$ Generalización $x = 2 + 4(n-1)$ n posicion

ultimo digito 2 para 2^x

$x = 1, 5, 9, 13, 17, 21$ Generalizacion $x = 1 + 4(n-1)$

ultimo digito 8 para 2^x n = posicicion

$x = 3, 7, 11, 15, 19, 23$ Generalizacion $x = 3 + 4(n-1)$

ultimo digito 6 para 2^x n = posicion

$x = 4, 8, 12, 16, 20$ Generalizacion $x = 4 + 4(n-1)$

50019 |4
10 12504
20
19
3

$x = 3 + 4(12505 - 1)$

$x = 50.019$

el ultimo digito de 2^{50019} es 8

$50019 = 3 + 4n - 4$

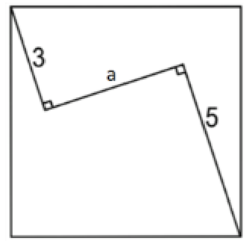
$50.020 = 4n$

$\frac{50.020}{4} = n$

Figura 19: Solución del estudiante E3 al problema 2 de la actividad 8 del primer semestre de 2016.

Actividad 9

Problema 1[87]: Se sabe que el área del cuadrado es $40u^2$, determinar el valor de a.



Problema 2: Sea $P(x) = x^2 + px - q$, donde p y q, son enteros positivos.

c) Encuentre una pareja de enteros positivos tal que las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$, sean enteros menores que 7.

d) ¿Cuántas parejas (p, q) hacen que la ecuación $x^2 + px - q = 0$, sean menores que 2016?[88]

Para esta clase los estudiantes expusieron una parte del libro guía.

Estos dos problemas no fueron resueltos.

Actividad 10

Problema 1[89]: Si hay exactamente 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$, ¿cuántos valores enteros de b son posibles?

Este problema no fue resuelto en el salón de clases.

Problema 2[90]: ¿Cuál es el mínimo valor que puede alcanzar la expresión

[87] Adaptado del recuperado el 4 de abril de 2015 del URL: https://www.facebook.com/148210950842/photos/a.151449605842.126810.148210950842/10152726406510843/?type=1&fref=nf.
[88] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p. 26, 2002.
[89] Modificado, del recopilado "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior. p, 12, 2005.
[90] Ibidem.

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$?

El estudiante **E5,** hace un acercamiento a la solución, particularizando y analizando los resultados obtenidos, lo cual le permite inferir la posición de cuatro puntos fijos en el plano, pero lo que no logra ver es que, si incluye un punto $P(x,y)$, la expresión algebraica corresponde a la suma de las distancias del punto P a los puntos fijos identificados anteriormente.

Acercamiento de la solución del **problema 2** por estudiante **E5**

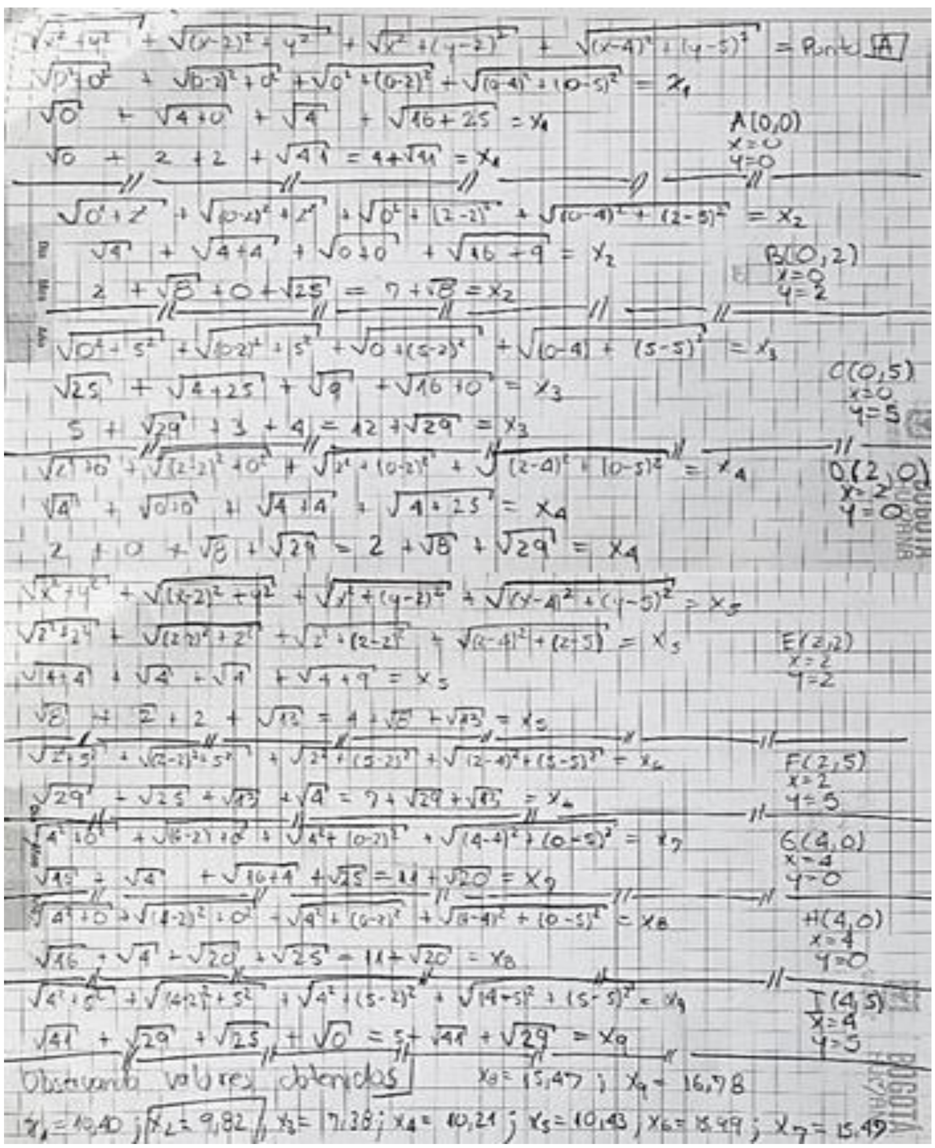


Figura 20: Primeros intentos de solución al problema 2 por el estudiante E5

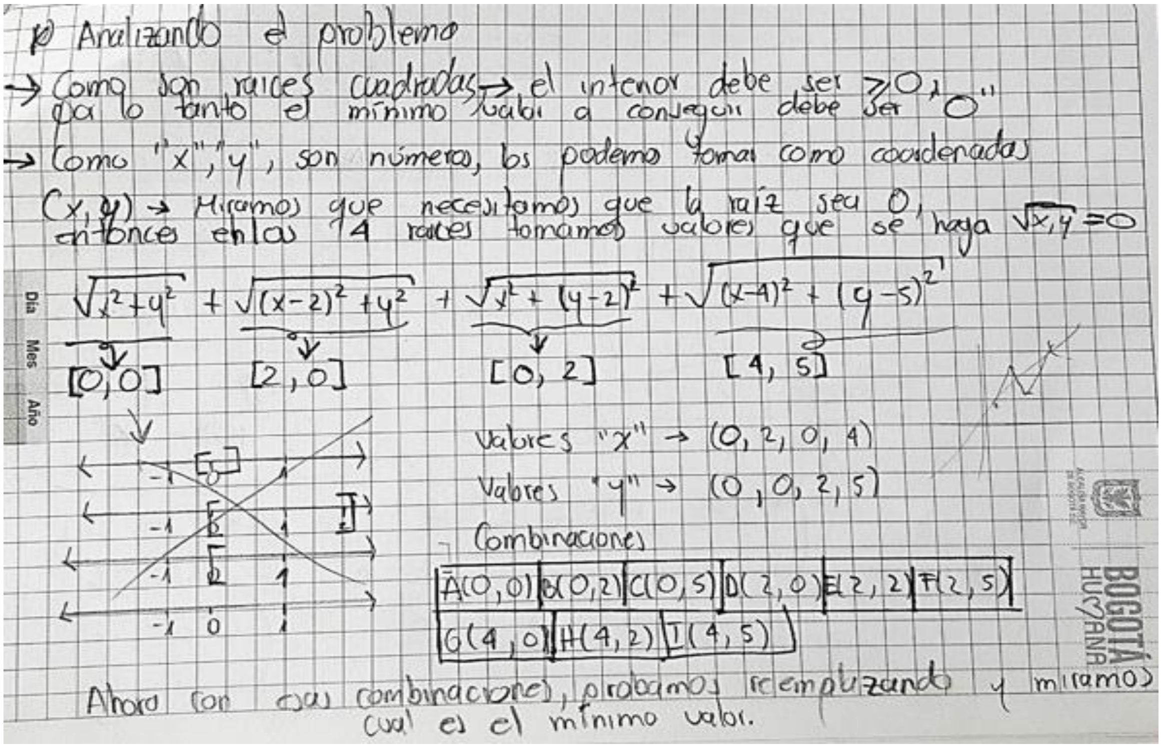


Figura 21: Acercamiento a la solución del problema 2 por el estudiante E5.

Actividad 11

Problema 1[91]:

Si $a, b,$ y c son números positivos, demuestre que $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

Problema 2[92]: Si $x, y > 0$, demuestre que $\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y^2}{x}} > \sqrt{x}+\sqrt{y}$

Ninguno de los dos problemas planteados es resuelto en el salón de clases por la dificultad que representan para los estudiantes.

Actividad 12

Problema 1: Demuestre que $x \geq 0$, entonces $3x^3-6x^2+4 \geq 0$

[91] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). P. 234.
[92] Ibidem p. 237.

Problema 2[93]: Dado un triángulo de área unidad cuyos lados están dados por *a, b, c*, donde $a \geq b \geq c$. Demuestre que $b \geq \sqrt{2}$.

Ninguno de los dos problemas planteados es resuelto en el salón de clases.

Actividad 13

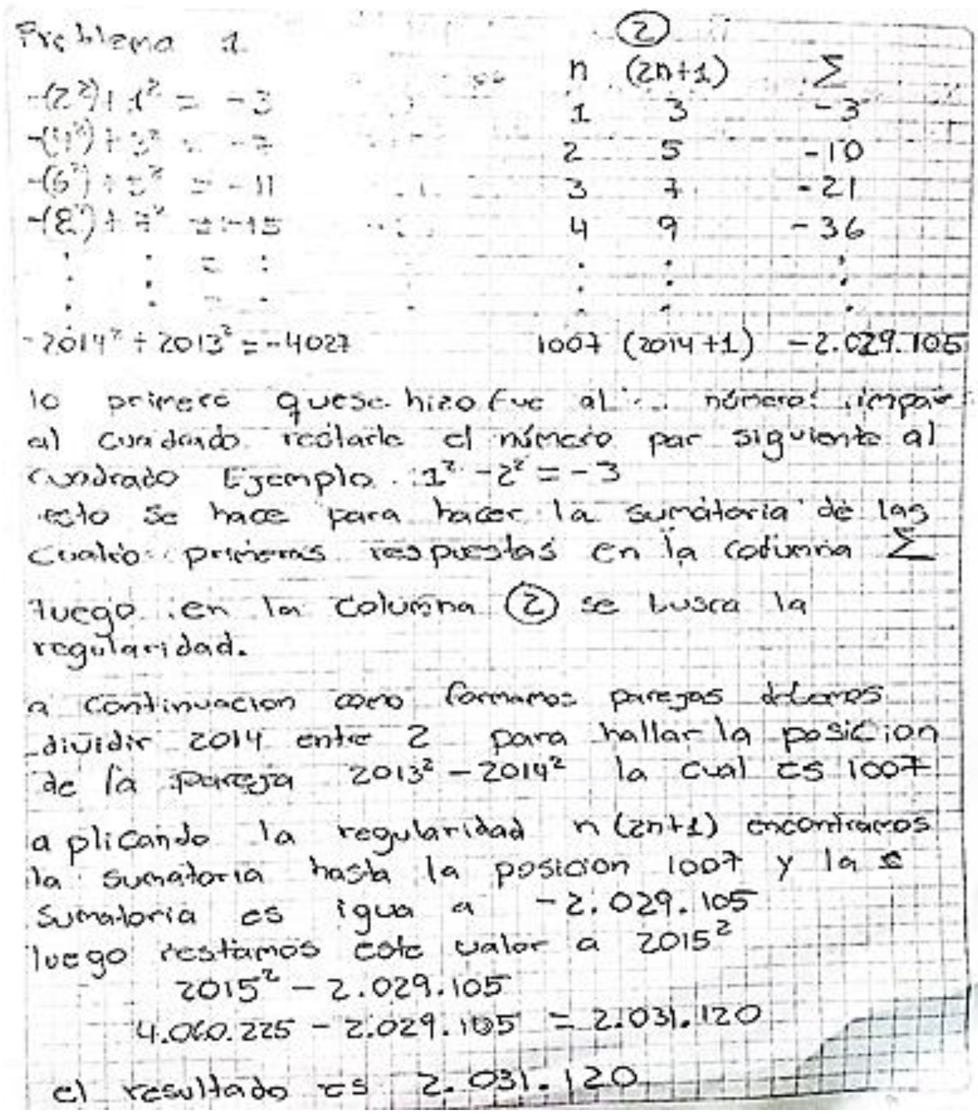
Los estudiantes **E3** y **E4**, logran resolver el problema 1 dentro del salón de clases. Ambos ofrecen dos formas de soluciones distintas, pero que comparten la regularidad de que ambos lo hacen a partir de casos particulares e infieren argumentos que les permite calcular la misma solución.

Problema 1

Calcular el valor de[94] $2015^2 - 2014^2 + 2013^2 - \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$

El argumento del estudiante **E3** consiste en calcular las diferencias de dos cuadrados consecutivos hasta el 2014, $2^2 - 1^2 = 3$, $4^2 - 3^2 = 5$, $6^2 - 5^2 = 11, \ldots, 2014^2 - 2013^2$ para inferir la regularidad de la suma $3 + 7 + 11 + \cdots + 4027$, es decir la suma de los primeros 1007 términos que corresponden a $2'029{,}105$, para restárselos al último término, es decir $2015^2 - 2',029{,}105 = 2',031{,}120$ tal como se puede apreciar en la solución propuesta por ese estudiante**.**

[93] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). p. 214.
[94] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p.13.



Problema 1 ②

$-(2^2)+1^2 = -3$ | n $(2n+1)$ Σ

$-(4^2)+3^2 = -7$ | 1 3 -3

$-(6^2)+5^2 = -11$ | 2 5 -10

$-(8^2)+7^2 = -15$ | 3 7 -21

4 9 -36

$-2014^2 + 2013^2 = -4027$ | $1007\ (2014+1) = -2.029.105$

lo primero que se hizo fue al número impar al cuadrado restarle el número par siguiente al cuadrado Ejemplo $1^2 - 2^2 = -3$

esto se hace para hacer la sumatoria de las cuatro primeras respuestas en la columna Σ

luego en la columna ② se busca la regularidad.

a continuacion como formamos parejas debemos dividir 2014 entre 2 para hallar la posición de la pareja $2013^2 - 2014^2$ la cual es 1007

aplicando la regularidad $n(2n+1)$ encontramos la sumatoria hasta la posicion 1007 y la sumatoria es igua a $-2.029.105$

luego restamos este valor a 2015^2

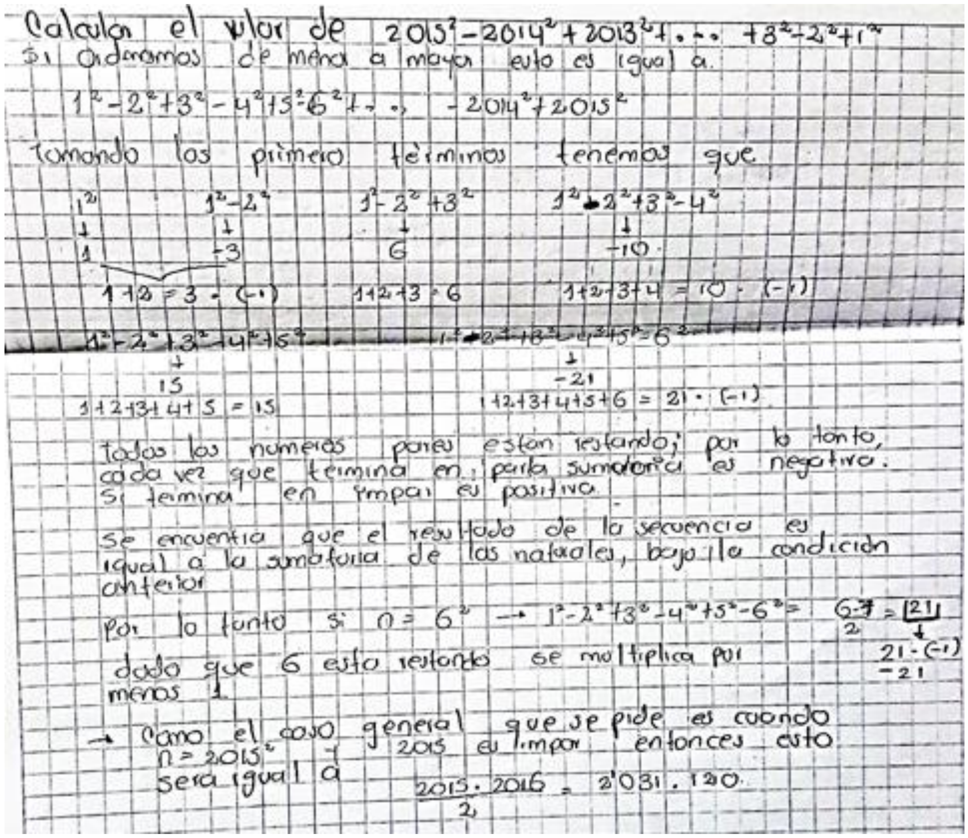
$2015^2 - 2.029.105$

$4.060.225 - 2.029.105 = 2.031.120$

el resultado es 2.031.120

Figura 22: Solución del estudiante E3 al problema 1 de la actividad 13 del primer semestre de 2016.

El estudiante **E4** organiza los términos de menor a mayor en dos columnas, se da cuenta que los términos pares están restando, por tal razón si la sumatoria termina en número par es negativa, pero si termina en número impar es positiva, $1^2 - 2^2 = -3$, $1^2 - 2^2 + 3^2 = 6$, así sucesivamente. Al hacer varios cálculos se percata que corresponde con la sumatoria de los primeros 2015 números naturales por tal motivo $\frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2'031{,}120$.



Calcular el valor de $2015^2-2014^2+2013^2+\dots+3^2-2^2+1^2$

Si ordenamos de menor a mayor esto es igual a

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\dots-2014^2+2015^2$

Tomando los primeros términos tenemos que

$1^2 \to 1$ $\quad$ $1^2-2^2 \to -3$ $\quad$ $1^2-2^2+3^2 \to 6$ $\quad$ $1^2-2^2+3^2-4^2 \to -10$

$1+2=3\cdot(-1)$ $\quad$ $1+2+3=6$ $\quad$ $1+2+3+4=10\cdot(-1)$

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2 \to 15$ $\quad$ $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2 \to -21$

$1+2+3+4+5=15$ $\quad$ $1+2+3+4+5+6=21\cdot(-1)$

Todos los números pares están restando; por lo tanto, cada vez que termina en par la sumatoria es negativa. Si termina en impar es positiva.

Se encuentra que el resultado de la secuencia es igual a la sumatoria de los naturales, bajo la condición anterior

Por lo tanto si $n=6^2 \to 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2 = \frac{6\cdot 7}{2} = \boxed{21} \to 21\cdot(-1) = -21$

dado que 6 esta restando se multiplica por menos 1

→ Como el caso general que se pide es cuando $n=2015^2$, 2015 es impar entonces esto será igual a $\frac{2015\cdot 2016}{2} = 2'031.120$

Figura 23: Solución del estudiante E4 al problema 1 de la actividad 13 del primer semestre de 2016.

Problema 2

¿Existe un número de 4 dígitos tal que la suma de mismo número, más sus correspondientes dígitos sea 2015?

Este problema no fue resuelto en el salón de clases.

Actividad 14[95]

Los dos problemas se cambiaron por:

Problema 1

Para cualquier x real ¿cuál es el valor máximo para $\sqrt{2016-x}+\sqrt{x-2008}$?

[95] Modificado del texto “International Mathematics Competition” Junior High School Division 1999-2013. p. 190.

Problema 2[96]: Para m,n enteros positivos, ¿cuál es máximo valor de n tal que $\sqrt{m-174}+\sqrt{m+34}=n$?

Actividad 15

Problema 1: Demostrar que, para cualquier x, y se cumple $x^4+y^4+8\geq 8xy$.

Problema 2[97]: Dos números distintos a y b se escogen aleatoriamente del conjunto $\{2,2^2,2^3,...,2^{25}\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un número entero?

Los problemas propuestos en estas actividades 14 y 15 no fueron resueltos.

4.2.1. Respuestas de los estudiantes a preguntas sobre el proceso de la resolución de problemas

Al inicio y finalización de las experiencias se entrevistaron (video) algunos estudiantes con el objetivo de conocer sus respuestas sobre aspectos relacionados con la solución de problemas.

Al inicio del curso se les preguntó acerca de:

¿Qué entendían por resolución de problemas?

La gran mayoría de las respuestas que dieron los cinco estudiantes apuntan a lo que se entiende por resolver un problema. Después se les presentó la definición ofrecida por Campistrous, L. y Rizo, C. (1996).

Al finalizar el curso se les pregunto:

[96] Modificado del texto “International Mathematics Competition” Junior High School Division 1999-2013. p.175
[97] Tomado del recopilado “olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones”, nivel superior, p. 12, 2005.

¿Cómo lograron superar los bloqueos experimentados en la solución de los diferentes problemas?

El estudiante **E1** hace referencia a los problemas de desigualdades, cuyos bloqueos fueron superados después de transcurrido un cierto tiempo al lograr reescribirlas de una manera equivalente, y así aplicar la desigualdad MA≥MG para llegar a la solución.

¿Cómo consideran el curso que se acaba de concluir?

Las respuestas dadas giraron alrededor de:

1. *Conocieron esquemas para la resolución de problemas que seguro les será muy útil en su profesión como futuros docentes de matemáticas.*
2. *Les gustó la dinámica del curso, sobre todo por las discusiones en clase, por compartir las soluciones que encontraron.*
3. *Se percataron como cambiaban sus formas de acometer las soluciones a los problemas que se les presentaron.*
4. *El curso contribuyó en su formación académica.*
5. Un estudiante de la segunda experiencia manifiesta: "*como por ejemplo los ejercicios propuestos por Mason, Burton y Stacey del libro Pensar matemáticamente donde lo lee y vuelve leer, e intenta razonar, pero siente que no lo entiende por lo que lo vuelve a leer y así sucesivamente hasta que en algún momento se enciende el bombillo y dice esto es por este camino*". (Ver Anexo 4.).

4.3. Caracterización de los insight en la solución de problemas matemáticos planteados en el salón de clases

De los resultados obtenidos de las dos experiencias correspondientes al segundo semestre de 2015 y al primer semestre de 2016, a partir de la observación del comportamiento de los estudiantes y el análisis de cada una de las clases; así como, el seguimiento que se le dio a cada uno de los que experimentaron este fenómeno cognitivo, se pudieron encontrar ciertas regularidades en las soluciones dadas dentro del salón de clases. Estas observaciones fueron las que permitieron caracterizar dicha ocurrencia como un *insight inmediato.*

Cuando un mismo estudiante establece dos soluciones al mismo problema, se considera que es muy posible, que después de obtener una primera solución, posteriormente encuentre otra; por supuesto, del mismo problema. En tal caso se puede describir lo que se le denominará un *insight por comprensión.* Esto se plantea porque en el problema 2 de la actividad 7 en la primera experiencia y por el problema 1 de la actividad 14 de la segunda experiencia, dos estudiantes ofrecieron soluciones que no eran las que proponía el autor de este trabajo (Ver Anexo 3).

Cuando, los problemas cuyas soluciones fueron obtenidas fuera del salón de clases días después y que requirieron de una apropiación e interés del estudiante por resolver posibilitan la descripción de lo que se denominó un *insight a posteriori.*

En resumen, dentro del proceso de solución de problemas dentro y fuera del salón de clases, a partir del seguimiento y observación a los dos grupos de estudiantes a modo de estudio de casos, se pueden identificar, caracterizar y asociar estos tres tipos de *insight* y su relación con el pensamiento matemático convergente o divergente, que cuando suceden permiten solucionar un problema matemático de forma exitosa. Para cada uno de éstos tres *insight* se identificaron una serie de características propias como se describen a continuación:

4.3.1. Insight inmediato. Una aproximación descriptiva

El estudiante en sus primeros intentos madura algunas ideas que le permiten encaminarse a la solución del problema matemático dentro del salón de clases, los atascamientos o bloqueos que presenta el estudiante son de corta duración:

1. Por lo general comprende y se apropia del problema, en estos intentos por llegar a una solución, con instancias que permiten apreciar regularidades, invariantes que puedan conducir a una solución.
2. El estudiante evoca experiencias similares con otros problemas que le permiten relacionarlos con el problema actual.
3. Un factor indispensable en la solución de la mayoría de los problemas son los preconceptos que tiene el estudiante con las diferentes temáticas abordadas, además de la identificación de lo que se quiere determinar con el problema.
4. Este *insight* está en relación al tipo de pensamiento convergente en el estudiante ya que éste llega a la solución del problema de forma casi inmediata, sus soluciones son de forma convencional y no requieren grandes esfuerzos en su construcción.

4.3.2. Insight a posteriori. Una aproximación descriptiva

El estudiante en sus primeros intentos por resolver el problema no tiene avance alguno, los momentos de atascamiento o bloqueo son prolongados y en la mayoría de los casos pueden tomar bastante tiempo. Por lo general el estudiante se siente motivado a buscarle solución, además de asumir el problema con seriedad; se maduran nuevas ideas que pueden tardar un buen tiempo en desarrollarse. Precisamente, esto es lo que se le ha denominado *incubación.* A veces, emerge una solución cuando menos la espera. Pero la mayoría de las veces la obtienen al hacer una retro inspección de su trabajo, que les permitió ir hacia atrás y comprender mejor la situación.

Un factor identificado en los estudiantes es las diferentes percepciones del problema mismo, que de alguna manera maduran nuevas ideas, que se encadenan repentinamente; en fin, llegan a una solución del mismo.

Se manifiesta una sensación de descanso, alegría, felicidad al romper la frustración que causaba el no poder resolver el problema.

4.3.3. Insight por comprensión. Una aproximación descriptiva

El insight por comprensión se identifica cuando se encuentra posteriormente otra solución al problema; el estudiante genera ideas que le permiten encontrar una nueva vía de solución que puede ser más novedosa que la primera, lo cual puede darse dentro o fuera de salón de clases. Este *insight* se relaciona con el tipo de pensamiento divergente, por lo general presenta las siguientes características:

1. Los bloqueos o atascamientos pueden ser de corta o larga duración.
2. Las soluciones presentadas por los estudiantes son distintas a las esperadas.
3. Hay un buen entendimiento y apropiación del problema.
4. Hay novedad en la segunda solución.

4.4. Consideraciones sobre la relación del insight y los tipos de pensamientos convergente y divergente

De los resultados correspondientes a la primera y segunda experiencia, se identificaron tres tipos de *insight,* en el proceso de solución de problemas dentro y fuera del salón de clases. Los mismos se relacionan con los tipos de pensamiento convergente y divergente de la siguiente forma:

El pensamiento convergente es un proceso mental fundamentado en la búsqueda de una solución convencional o determinada a un problema que no requiere un gran esfuerzo, solución que se puede alcanzar con la información disponible que descansa en espacios mentales previos, constituido por conceptos, definiciones, resultados, y experiencias anteriores. Es por ello que el *insight inmediato* se relaciona con este pensamiento. Se puede resumir que:

- Por lo general ocurre dentro del salón de clases.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.

Es de resaltar que en la gran mayoría de los problemas resueltos dentro del salón de clases los bloqueos son de corta duración y en los primeros intentos por resolverlos emergen y se desarrollan las ideas que se constituyen en la solución de los mismos. Sin embargo, se conocen situaciones de estudiantes que han experimentado este tipo de insight, con una solución muy novedosa y una explicación fuera de lo común que, muy bien puede asociarse a un pensamiento divergente.

El *insight a posteriori* y el *insight por comprensión* se relacionan con el pensamiento divergente de la siguiente forma:

El pensamiento divergente es un proceso mental que no necesariamente debe estar ligado a múltiples vías de solución de un problema; las soluciones requieren de un gran esfuerzo y tiempo en desarrollarse, además debe incluir perspicacia, fluidez, y novedad por parte del estudiante.

Se puede resumir que:

- Los bloqueos o atascamientos son de larga duración.
- Hay un buen entendimiento y comprensión del problema.
- El estudiante requiere hacer cortas pausas para reanudar el problema.
- El estudiante intenta verificar sus conjeturas de una forma rigurosa.
- El problema es asumido con compromiso y seriedad.
- Las soluciones de los problemas son presentadas de una forma clara, fluida, en algunas ocasiones hay novedad.

El bloqueo del problema es superado por el estudiante cuando hace una retro inspección de su trabajo y hace una marcha hacia atrás, dando paso a nuevas ideas que, al desarrollarlas, permiten alcanzar la solución del problema.

4.5. Resumen de dos tipos de insight en las dos etapas del estudio

Se presenta una tabla que resume las dos experiencias de las actividades propuestas en el salón de clases con los diferentes problemas que los estudiantes les dieron solución por insight y que permitió las anteriores caracterizaciones.

Tabla 2. Resumen de las dos experiencias en la implementación del estudio

<table>
<tr><th colspan="16">ETAPAS DEL ESTUDIO</th></tr>
<tr><th colspan="8">Primera experiencia</th><th colspan="8">Segunda experiencia</th></tr>
<tr><td colspan="8">Soluciones propuestas dentro del salón de clase, que permitieron identificar un <u>insight inmediato</u>. E1 y E2 representa que el problema indicado fue resuelto por el respectivo estudiante.</td><td colspan="8">Soluciones propuestas dentro del salón de clase, que permitieron identificar un <u>insight inmediato</u>. E3, E4, y E5, representa que el problema indicado fue resuelto por el respectivo estudiante.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Actividades</th><th colspan="8">Actividades</th></tr>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><th>P1</th><td>E1</td><td></td><td></td><td>E2</td><td></td><td></td><td>E2</td><th>P1</th><td>E3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>E4</td><td></td></tr>
<tr><th>P2</th><td></td><td>E1</td><td></td><td></td><td></td><td>E2</td><td></td><th>P2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th></th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th><th></th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th></tr>
<tr><th>P1</th><td></td><td>E2</td><td></td><td></td><td></td><td>E1</td><td></td><th>P1</th><td>E3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>E3,E4</td><td></td></tr>
<tr><th>P2</th><td>E1,E2</td><td>E1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><th>P2</th><td>E3</td><td></td><td>E5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="16">Características encontradas</th></tr>
<tr><td colspan="16">• Los bloqueos o atascamientos son de corta duración.
• Hay un buen entendimiento del problema.
• Los estudiantes evocan situaciones similares en cuanto a la resolución de problemas.
• Hay un esfuerzo considerable de presentar sus soluciones de una manera clara y convincente.
• Hay mayor interés en resolver los problemas.
• Los estudiantes no necesitan de tantas herramientas conceptuales ni procedimentales en el abordaje y ataque de los problemas.
• No requieren de mucho esfuerzo por resolver los problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="8">Soluciones propuestas fuera del salón de clase, que permitieron identificar un <u>insight a posteriori</u>. Los símbolos E1 y E2 representan que el problema indicado fue resuelto por el respectivo estudiante.</td><td colspan="8">Soluciones propuestas fuera del salón de clase, que permitieron identificar un <u>insight a posteriori</u>. Los símbolos E3, E4, E5 representan el problema indicado fue resuelto por el respectivo estudiante.</td></tr>
<tr><th colspan="8">Actividades</th><th colspan="8">Actividades</th></tr>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><th>P1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>E1</td><td></td><th>P1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>P2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>E2</td><th>P2</th><td>E3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th></th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th><th></th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th></tr>
<tr><th>P1</th><td>E1</td><td></td><td>E2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><th>P1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>P2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><th>P2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="16">Características encontradas</th></tr>
<tr><td colspan="16">• Los bloqueos o atascamientos son de larga duración.
• Los estudiantes conjeturan e intentan verificar sus conjeturas de forma rigurosa.
• Hay un buen entendimiento y apropiación del problema.
• Los estudiantes no pierden el interés en resolver el problema y éstos son asumidos con seriedad.
• Las soluciones presentadas por los estudiantes toman un buen tiempo en desarrollarse.
• Los estudiantes hacen una marcha hacia atrás de su trabajo en los diferentes atascamientos. presentados en el proceso de solución del problema.
• Los estudiantes hacen cortas pausas y retoman el problema posteriormente, no lo abandonan.
• Las soluciones planteadas por los estudiantes son presentadas de una manera clara.
• Los estudiantes experimentaron una sensación de descanso y alegría al resolver los problemas, ya que hicieron parte de ellos mientras intentaban resolver.</td></tr>
</table>

4.6. Un esquema que describe el lugar que ocupa un insight en el desarrollo de la solución de problemas matemáticos planteados en el salón de clases

De la descripción de los tres tipos de insight presentados anteriormente; además de la base de las contribuciones de Fauconnier y Turner, George Polya, Mason, Burton y Stacey construidas en el marco teórico de este trabajo, en lo que a resolución de problemas se refiere, y el lugar que ocupa una posible ocurrencia del *insight* según Hadamard, se propone el esquema de resolución de problemas que permite apreciar la ocurrencia de los dos tipos de insight caracterizados anteriormente (***Gráfico* 8**):

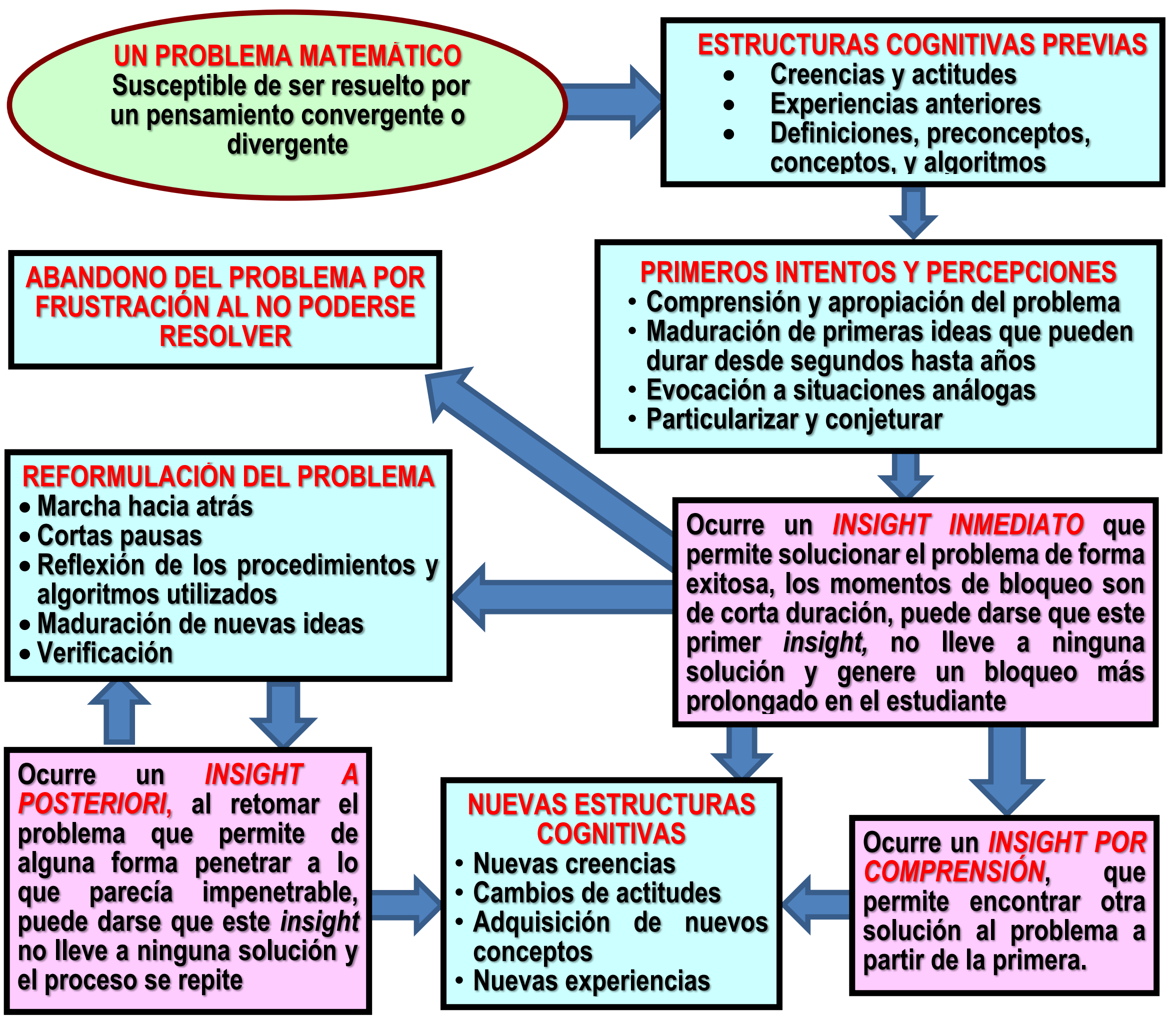


Gráfico 8: Un esquema que describe el lugar que ocupa una solución por insight en el proceso del desarrollo de la resolución de problemas.

Conclusiones parciales del capítulo 4

A partir del análisis de los resultados anteriores se pudieron identificar y caracterizar tres tipos de insight los cuales se denominaron:

- Insight inmediato.
- Insight por comprensión.
- Insight a posteriori.

Estos tipos de insight cuando ocurren dentro o fuera del salón de clases permiten solucionar el problema matemático de forma exitosa.

Se diseñó un esquema de resolución de problemas el cual integra los tres tipos de insight descritos anteriormente. Dentro del resumen de los resultados de las dos experiencias, se describen características manifestadas en los estudiantes producto de la observación y seguimiento a los cinco estudiantes.

CONCLUSIONES

Se describieron las características que permitieron diferenciar a cada uno de los tres tipos de *insight.* Esto fue posible al apreciar la ocurrencia de éstos bajo una estricta observación a los cinco estudiantes en los dos semestres.

Está muy claro que, en los procesos de solución de problemas, además de los tres tipos de insight, existen dos diferentes niveles de *insight*. No es lo mismo aquellos que están muy bien documentados en la literatura y que permitieron y están permitiendo aportes a las matemáticas y por tanto de una cierta o gran magnitud y además de trascendencia científica por lo que han significado y significan. Muchos de ellos marcan un antes y un después en las Ciencias Matemáticas cada vez que ocurrieron. Es conveniente diferenciar los mismos atendiendo a dicha trascendencia.

Se deben diferenciar estas dos categorías o niveles de *insight*. La primera se identifica como la **científica** y la segunda la **escolar**. Claro está, la **científica** es aquella cuyo resultado se ha heredado y construido en ese edificio que llamamos Ciencias Matemáticas. La **escolar** es aquella que, sin grandes pretensiones, los estudiantes la experimentan en sus clases de matemáticas y que pueden conducirlos a enriquecer no sólo su pensamiento matemático sino a profundizar en esta importante rama de las ciencias y empoderarlos para que puedan experimentar, en el futuro, *insight* científicos. Los tres tipos de *insight* caracterizados en este estudio deben agruparse en la categoría **escolar**. Algunos *insight* **científicos** fueron relatados en la introducción.

Es seguro que la **escolar** precede a la **científica**, no se puede descartar que los grandes matemáticos no la hayan experimentado en el proceso de desarrollo de la construcción de sus conocimientos desde una etapa escolar temprana. Son muchos los ejemplos al respecto. Se considera que la mayoría de los matemáticos creadores de teorías también los hayan experimentado, así como, aquellas personas que se han destacado en competiciones matemáticas.

Se diseñó una metodología netamente cualitativa a manera de estudio de casos en la cual se le hizo un seguimiento continuo a cinco estudiantes, que permitió identificar las ocurrencias de estos tipos de *insight* en el proceso de resolución de problemas dentro y fuera del salón de clases.

Los esquemas de resolución de problemas propuestos en el marco teórico fueron acertados en el sentido que les propició a los estudiantes nuevos horizontes para la resolución de problemas futuros, además de incentivar el desarrollo del pensamiento matemático que puede ser utilizado en su ejercicio profesional, ya que los mismos se están formando como docentes en la carrera de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño.

En cuanto a la hipótesis de la investigación planteada se puede asegurar que significó una buena ruta de trabajo para toda la investigación ya que se pudo describir tres diferentes tipos de *insight.*

Se relacionan dimensiones didácticas y psicológicas que derivaron en un esquema de resolución de problemas donde se pudiera apreciar la ocurrencia de los *insight*. Además, se logró establecer una relación de éstos con el pensamiento convergente, divergente.

El éxito o no en la solución de problemas matemáticos presentados en el salón de clases depende en gran medida del nivel de conocimiento y desarrollo del pensamiento que tenga cada estudiante, ya que para algún estudiante el problema le puede generar un *insight inmediato*, y para otro un *insight a posteriori*.

Los problemas escogidos para implementar las actividades, se diseñaron y adaptaron cuidadosamente para que potencialmente elevaran el interés en la obtención de su solución. Era deseable que los estudiantes se apropiaran del problema y lo asumieran con seriedad. Sin embargo, esto no fue suficiente, ya que muchos de los problemas no fueron solucionados.

Una dificultad presentada en desarrollo de las actividades fue la comunicación de los resultados obtenidos, ya que en algunas ocasiones los estudiantes no hacen un buen uso de un vocabulario matemático adecuado, haciéndoles perder las ideas que pretendían expresar. Sin embargo, la claridad de las soluciones fue mejorando en el transcurso del desarrollo de las actividades.

Por todo lo anterior se tiene la certeza del cumplimiento de los objetivos propuestos para este estudio.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda que se utilicen los resultados de esta tesis en la investigación de temas relacionados con el pensamiento convergente o divergente.
2. Se recomienda los enfoques de resolución de problemas propuesto por Mason, Burton y Stacey, en su obra “Pensar matemáticamente”, ya que a los estudiantes les permite ver nuevos horizontes.
3. Los problemas para implementar actividades de esta naturaleza se deben diseñar y/o adaptar bajo una concepción extremadamente cuidadosa, para que potencialmente logren el interés en la obtención de su solución por parte de los estudiantes y que además puedan causar bloqueos de corta o larga duración con consiguientes momentos de *insight* dentro o fuera de salón de clases.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Alamolhodaei, H. (1997). Convergent/divergent cognitive styles and mathematical problem solving*. Journal of science and mathematics education* in s.e. Asia vol. xxiv, no. 2.
2. Álvarez, C. M. (1999) *La escuela en la vida*. La Habana: Pueblo y Educación, p. 71.
3. Aziz-Zadek, L. et.al. (2013). Exploring the Neural Correlates of Visual Creativity. *Soc. Cogn. Affect. Neurosci.*,8 (4):475-480.
4. Blanco, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Revista SUMA* N° 21. P11-20. Disponible en URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf.
5. Bowers, K.S., Farvolden, P., & Mermigis, L. (1995). Intuitive antecedents of insight. In S.M. Smith, T.M. Ward, & R.A. Finke (Eds.), The creative cognition approach (pp. 27-52). Cambridge, Ma.: MIT Press.
6. Bowers, K. S., Regehr, G., Balthazard, C. G., & Parker, K. (1990). Intuition in the context of discovery. Cognitive Psychology, 22, 72-110.
7. Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.
8. Cañón, C. y García, M. (2015). Una caracterización preliminar de los tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en el aula. Ponencia magistral en el Evento Internacional COMPUMAT 2015. 25 al 27 de noviembre de 2015, La Habana. pp. 1-11.
9. Cropley, A. J. (1992). *Fostering Creativity in the Classroom*. Norwood, NJ: Ablex.

10. Cropley, A. J. (1999). Creativity and cognition: producing effective novelty. *Roeper Review*, 21, 253-260.

11. Cruz, M. (2006). *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas.* Órgano editor Educación Cubana.

12. Davis, P., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston, MA: Birkhauser.

13. Department of Cognitive Science Technical Report 9401. [Disponible en *http://cogsci.ucsd.edu*].

14. Dorfman, J. Shames, V. Kihlstrom, J. (1996). Intuition, incubation, and insight: Implicit cognition in problem solving. Underwood, Geoffrey D. M. (Ed), (1996). *Implicit cognition*. , (pp. 257-296). New York, NY, US: Oxford University Press.

15. Duncker, K. (1945). On problem solving. Psychological Monographs, 58(5), whole nº 270.

16. Fauconnier, G. & Turner, M. (1994). Conceptual projection and middle spaces. *UCSD.*

17. Fauconnier, G. & Turner, M. (1998). Conceptual Integration Networks. *Cognitive Science*, 22(2), 133-187.

18. Fauconnier, G. & Turner, M. (2002). *The way we think: conceptual blending and the mind's hidden complexity.* Basic Books. NY.

19. Feist, G. (2006) *The Psychology of Science and the Origins of the Scientific Mind.* Yale University Press.

20. Fraenkel Jr, Wallen Ne. 1996. How to design and evaluate research in education (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
21. García, M. (2014). A metacognitive reflection of the thinking types through mathematical research. Convergence vs. Divergence. *International Congress of Mathematicians*, Seoul, Korea.
22. Gardner, H., 1993. *Creative minds. An anatomy of creativity*. (Trad. cast.: *Mentes creativas*. Barcelona, Paidós, 1995)
23. Copenhagen, Denmark. http://www.icme10.com/conference/2_paperreports/3_section.
24. Gray, E. Pinto, M, Pitt, D y Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, Volume 38, Issue 1-3, pp 111-133.
25. Gruber, H.E. (1979). On the relation between “Ahá experiences” and the construction ideas. *History of Science*, 19, 41-59.
26. Gruber, H.E. (1974) Darwin sobre el hombre. Un estudio psicológico de la creatividad científica. Madrid. Alianza, 1981.
27. Guilford, J. P. (1950). Creativity. *The American Psychologist*, 5: 444-454.
28. Guilford, J. P. (1959). Three faces of intellect. *The American Psychologist,* 459-479.
29. Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.
30. Guilford, J. P., Hoepfner, R. (1971). *The Analysis of intelligence.* New York, Mc. Graw Hill.

31. Guilford, J. P. (1978). *Traits of creativity*. In P. E. Vernon (Ed.) Creativity. Harmondsworth, Penguin Books.

32. Guzmán. M. (1991). *Para pensar mejor,* Labor, Barcelona.

33. Guzmán, M. (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Recuperado el 10 de febrero de 2014 del URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html.

34. Hadamard, (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

35. Hudson, L. (1966). *Contrary imagination.* London: Penguin Books.

36. Hudson, L. (1968). *Frames of mind.* London: Methuen.

37. Kohler, W. (1956). The mentality of apes (2nd ed.) New York: Harcourt Brace.

38. Krutetskii VA (1976). The Psychology of Mathematical Abilities. *Schoolchildren. Chicago*: The University of Chicago Press.

39. Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations.* Cambridge University Press. New York.

40. Liljedahl, P. (2004). AHA!: The effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students. A paper presented in TSG3 at ICME-10. Available online at http://www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG3_Liljedahl.pdf.

41. Luo, J., Knoblich, G. (2007). Studying insight problem solving with neuroscientific methods. ScienceDirect. Pp. 77-86. Available online at www.sciencedirect.com.

42. Mairer, N.R.E. (1930). Reasoning in humans: I. On direction. *Journal of Comparative psychology,* 12. 115-143., M. (1959). Productive thinking. New York: harper and Row.

43. Martín, C (1999). Creatividad e Insight. ISSN 1136-8136, Nº. 7, 1999, págs. 63-84 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2476241

44. Mason, J, Burton, L. y K. Stacey (1988*). Pensar Matemáticamente,* MEC-Labor, Barcelona.

45. Mason, J. (2000). Creativity in mathematics lessons.

46. Messick, S. (1976). *Individuality in learning.* New York: Jossey-Bass Publishers.

47. Metcalfe, J. (1986). Premonitions of insight predict impending error. *Journal of Experimental Psychology: Learning*, Memory, and Cognition, 12, 288-294.

48. Nickles, T. (1978). Scientific discovery: Case studies Dordrecht: Reidel.

49. Pehkonen E (1997). The State-of-Art in *Mathematical Creativity*. http://www.fiz.karlsruhe.de/fiz/publications/zdm ZDM Volume 29 (June 1997) Number 3. Electronic Edition ISSN 1615-679X.

50. Pinker, S. (1994). The Language Instinct: How the Mind Creates Language, p. 437.

51. Poincaré, H (1914). *Science and method*. Translated from French. Tomas Nelson and sons. New York.

52. Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton : Princeton University Press. New Jersey.

53. Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C, p 7-12.

54. Puccio G.J. letters from the field. *Roeper Review, 21, 85-86.*

55. Romo, M. (2007). Psicología de la ciencia y creatividad. Revista creatividad y sociedad. Nº 10, pp 7-31, marzo de 2007, disponible en http://www.creatividadysociedad.com/articulos/14/Creatividad%20y%20Sociedad.% 20Psicologia%20de%20la%20ciencia%20y%20la%20creatividad.pdf.

56. Romo, M. (2009). *Psicología de la creatividad.* Barcelona: Paidós (segunda impresión marzo de 2012).

57. Runco, M. A. (1990). The divergent thinking of young children: Implications of the research. *Gifted Child Today*, 13, 37-39.

58. Sak, U. Maker, C. (2005). Divergence and convergence of mental forces of children in open and closed mathematical problems. *International Education Journal*, 2005, 6(2), 252-260. http://iej.cjb.net.

59. Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando.

60. Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). *Epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática*, CINVESTAV, IPN, México.

61. Silver, E. A. (1987) Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed.): *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33–60). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

62. Wallas, G. (1926). *The art of thought.* New York: Harcourt Brace Jovanovivh.

63. Wertheimer, M. (1959). *Productive Thinking.* New York: Harper and Row.

ANEXOS

Anexo 1. Curso electivo de la Licenciatura en Matemáticas UAN. Periodos 2-2015 y 1-2016

Nombre del curso electivo: **Desarrollo del Pensamiento Matemático a través de la solución de problemas.** Licenciatura en Matemáticas, UAN

Intensidad horaria:

2 horas jueves 20-22 correspondiente a 2-2015

2 horas viernes 18-20 correspondiente a 1-2016

Justificación:

Cuando se hace referencia al pensamiento matemático, se hace alusión a: pesar, razonar, y argumentar, además de los procesos matemáticos que dan lugar en la construcción del conocimiento. Se pretende de alguna forma complementar a la formación de futuro profesor de Matemáticas por medio de la solución de problemas no rutinarios en el aula en relación al pensamiento convergente y divergente, que se pueda dar en el estudiante en el proceso de solución de problemas.

Objetivo general:

Contribuir a la formación del futuro profesor de matemáticas, de tal forma que por medio de la resolución de problemas puedan construir una parte del conocimiento matemático como resultado del pensamiento matemático dentro de la matemática escolar.

Objetivos específicos:

- Fortalecer el desarrollo del pensamiento abstracto y formal.

- Ampliar algunas herramientas teóricas en relación con la solución de problemas.
- Potenciar la capacidad para enseñar matemáticas a partir de problemas no rutinarios en la matemática escolar.

Desarrollo del pensamiento matemático a través de la solución de problemas

(Electiva interdisciplinar)
Programa y Parcelación de la Asignatura
II Semestre 2015

Contenido Temático	Objetivo	Metodología	Lecturas	Fecha
1. **Presentación** **Método de los cuatro pasos**	• Socializar con los estudiantes el objetivo general del curso, forma de trabajo y evaluación • Conocer y analizar el esquema de resolución de problemas propuesto por Polya, en el trabajo dentro del salón de clases.	Exposición por parte del docente	Programación del curso Libro "Como plantear y resolver problemas" http://www.ingverger.com.ar/ver-polya-resolucion-problemas.asp	Ago 6
2. **Método de los cuatro pasos de Polya** **Primera Parte**	Analizar algunos problemas matemáticos en donde se aplique este esquema además de resolver algunos problemas propuestos.	Exposición por parte del docente, participación activa de los estudiantes.	Como plantear y resolver problemas lectura previa primera parte pág. 25-40:	Ago 13
3. **Método de los cuatro pasos** **Segunda Parte**		Los estudiantes socializaran esta parte del texto, con algunos ejemplos propios de ellos dentro de su misma labor, además del desarrollo de la actividad 1	Lectura previa segunda parte del texto	Ago 20
4. **Razonamiento plausible de Polya**	Conocer y analizar los elementos que conforman el razonamiento plausible de Polya en la resolución de problemas.	Exposición de los elementos más importante del capítulo XVI, del texto Matemáticas y Razonamiento Plausible	Material facilitado por el docente	Ago 27
5. **Seguimiento** **Primera parte**	Conocer las primeras posturas de los estudiantes, en cuanto a la solución de problemas y el pensamiento matemático.	Análisis y revisión de los problemas propuestos en la primera parte del curso. Actividad 2	Material diseñado por el docente	Sep 3
6. **Pensar matemáticamente**	Conocer y analizar algunos aspectos que componen el modelo de resolución de problemas propuestos por Mason, Burton y Stacey	Exposición por parte del docente	Lectura previa capítulo 1: Todo el mundo tiene que empezar. Material facilitado por el docente	Sep 10
7. **Pensar matemáticamente:** **Fases del trabajo**		Exposición por parte de los estudiantes, resolución de algunos problemas propuestos actividad 3		Sep 17
8. **Pensar matemáticamente:**		Exposición por parte de los		Sep

Respuestas para cuando estés atascado		estudiantes, resolución de algunos problemas propuestos actividad 4		24
9. **Pensar matemáticamente: Ataque: Haciendo conjeturas**		Exposición por parte de los estudiantes.		Oct 1
10. Pensar matemáticamente: Desarrollar el pensamiento matemático		Exposición por parte del docente y resolución de algunos problemas propuestos actividad 5		Oct 8
11. **Seguimiento segunda parte**	Conocer y analizar segundas posturas de los estudiantes, en cuanto a la solución de problemas y el pensamiento matemático.	Análisis y revisión de los problemas propuestos en la segunda parte del curso.	Recolección de actividades anteriores.	Oct 15
12. **Pruebas y refutaciones de Lakatos Apéndice 1**	Analizar un ejemplo del método de pruebas y refutaciones propuesto por Lakatos.	Exposición por parte de los estudiantes.	Material facilitado por el docente.	Oct 22
13. **Problemas relacionados con geometría**	Potenciar la capacidad para enseñar matemáticas a partir de problemas no rutinarios.	Resolución de problemas		Oct 29
14. **Problemas relacionados con desigualdades**		Resolución de problemas		Nov 5
15.**Problemas relacionados con funciones**		Resolución de problemas		Nov 12
16. Proyecto final	Apropiarse de alguna postura en cuanto a la resolución de problemas matemáticos en el aula.	Describir en un documento, las experiencias, creencias, actitudes adquiridas en cuanto a la resolución de problemas matemáticos en el aula.	Texto escrito	Nov 19

Porcentajes de evaluación

CORTES	EXPOSICIONES	ACTIVIDADES	PROYECTO	TOTAL
PRIMERO	15%	20%	-	35%
SEGUNDO	15%	20%	-	35%
TERCERO	-	10%	20%	30%

Fuentes de Información o referentes (digitales e impresos)

Texto Guía

- Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations.* Cambridge University Press. New York.
- Mason, J, Burton,L. y K. Stacey (1988*). Pensar Matemáticamente,* MEC-Labor, Barcelona.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press. New Jersey.

1. Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C

Contenido Temático	Objetivo	Metodología	Lecturas	Fecha
1. Presentación Método de los cuatro pasos	• Socializar con los estudiantes el objetivo general del curso, forma de trabajo y evaluación • Conocer y analizar el esquema de resolución de problemas propuesto por Polya, en el trabajo	• Exposición por parte del docente. • Problemas propuestos	Programación del curso Libro "Como plantear y resolver problemas" http://www.ingverger.com.ar/ver-polya-resolucion-problemas.asp	Feb 5

	dentro del salón de clases.			
1. Método de los cuatro pasos de Polya **Primera Parte**	Analizar algunos problemas matemáticos en donde se aplique este esquema además de resolver algunos problemas propuestos.	• Exposición por parte del docente, participación activa de los estudiantes. • Problemas propuestos	Como plantear y resolver problemas lectura previa primera parte pág 25-40:	Feb 12
2. Método de los cuatro pasos **Segunda Parte**		Los estudiantes socializaran esta parte del texto, con algunos ejemplos propios de ellos dentro de su misma labor, además desarrollo de los problemas propuestos.	Lectura previa segunda parte del texto	Feb 19
3. Razonamiento plausible de Polya	Conocer y analizar los elementos que conforman el razonamiento plausible de Polya en la resolución de problemas.	Exposición de los elementos más importante del capítulo XVI, del texto Matemáticas y Razonamiento Plausible. Problemas propuestos.	Material facilitado por el docente	Feb 26
4. Seguimiento **Primera parte**	Conocer las primeras posturas de los estudiantes, en cuanto a la solución de problemas y el pensamiento matemático.	Análisis y revisión de los problemas propuestos en la primera parte del curso.	Material diseñado por el docente	Mar 4
5. **Pensar matemáticamente**	Conocer y analizar algunos aspectos que componen el modelo de resolución de problemas propuestos por Mason, Burton y Stacey	Exposición por parte del docente. Problemas propuestos	Lectura previa capítulo 1: Todo el mundo tiene que empezar.	Mar 11
6. Pensar matemáticamente: **Fases del trabajo**		Exposición por parte de los estudiantes, resolución de problemas	Material facilitado por el docente	Mar 18
7. **Seguimiento segunda Parte**		Análisis y revisión de los problemas propuestos en la primera parte del curso.		Abril 1
8. Pensar matemáticamente: Respuestas para cuando estés atascado		Exposición por parte de los estudiantes, resolución de problemas		Abril 8
9. Pensar matemáticamente: Ataque: Haciendo conjeturas				Abr. 15
10. Pensar matemáticamente: Ataque: justificación y convencimiento				Abr. 22

11. Pruebas y refutaciones de Lakatos Apéndice 1	Analizar un ejemplo del método de pruebas y refutaciones propuesto por Lakatos.	Exposición por parte del docente.	Material facilitado por el docente.	Abr. 29
12. **Problemas relacionados teoría de números**	Potenciar la capacidad para enseñar matemáticas a partir de problemas no rutinarios.	Resolución de problemas		Mayo 6
13. **Problemas relacionados con desigualdades**				May 13
15.**Problemas Varios**				May 20
16. Proyecto final	Apropiarse de alguna postura en cuanto a la resolución de problemas matemáticos en el aula.	Describir en un documento la postura propia en cuanto a la resolución de problemas matemáticos en el aula y cómo esta contribuye a la construcción del pensamiento matemático, además de las experiencias, creencias, actitudes adquiridas.	Texto escrito	May 27

Porcentajes de evaluación

CORTES	**Exposiciones**	**Actividades**	**Escrito**	**TOTAL**
PRIMERO	15%	20%	-	20%
SEGUNDO	15%	20%	-	20%
TERCERO	10%	20%		30%
CUARTO	-	10%	20%	30%

Fuentes de Información o referentes (digitales e impresos)
Texto Guía

1. Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations.* Cambridge University Press. New York.
2. Mason, J, Burton,L. y K. Stacey (1988*). Pensar Matemáticamente,* MEC-Labor, Barcelona.
3. Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Vol. I (Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press. New Jersey.
4. Pólya G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México D.C

Anexo 2. Solucionario de los diferentes problemas contenidos en las actividades implementadas en el estudio

Actividad 1

Problema 1: Encontrar una ecuación que permita calcular la distancia de dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Representamos dos puntos A y B en el espacio, el cual denotamos como $A(x_1, y_1, z_1)$, y $B(x_2, y_2, z_2)$, estos puntos corresponden a la diagonal de un paralelepípedo generado por la proyecciones de las componentes de A y B, sobre los ejes x,y,z. Aplicando dos veces el teorema de Pitágoras sobre el plano xy y el plano yz, encontramos que la diagonal del paralelepípedo es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Problema 2: En una universidad el bloque B se encuentra al este del bloque A a una distancia de 30 m, el bloque C está ubicado a 40m en dirección nororiente del bloque B. ¿A qué distancia debe estar ubicado un punto de encuentro en caso de emergencia, de tal forma que quede a igual distancia de los tres bloques?

Solución:

Ubicamos el bloque A en el origen del plano coordenado (0,0) y el bloque B en el punto de coordenadas (30,0), ahora se debe encontrar las coordenadas del bloque $C\ (x, y)$, en dirección nororiente tal que la distancia de B a C sea 40. Por tanto, ha de tenerse que:

1. $d(A, C) = 30$

2. $d(B,C)=\sqrt{(x-30)^2+(y-0)^2}=40$

3. El bloque C, debe estar sobre la recta $y=x$, para que esté en dirección noreste, de la ecuación 2 y 3 se encuentra que la posición del bloque C es $(38.9,38.9)$.

Consideramos el triángulo ABC, formado por los tres bloques, necesitamos calcular el punto de intersección de dos de las mediatrices del triángulo, ya que dicho punto es el centro de un círculo que circunscribe al triángulo garantizando así que los tres bloques estén a la misma distancia, por lo tanto, ese es el punto de encuentro en caso de emergencia.

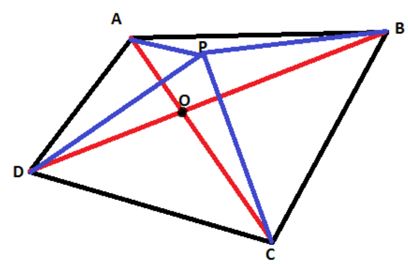
Ahora se procede a calcular la ecuación de dos de las mediatrices para $\overline{AB}$, se tiene la recta $x=15$, para $\overline{AC}$, se tiene la recta $y=-x+38.9$, al solucionar las anteriores ecuaciones tenemos la ubicación del punto de encuentro $D(15,23.9)$, por tanto queda a una distancia de 28. 2 m de los tres bloques.

Problema 2 (Primer semestre de 2016):

Dibújese un cuadrilátero convexo, ahora ubíquese un punto interior M tal que la suma de las distancias del punto a sus vértices sea mínima.

Solución:

Dibujamos un cuadrilátero convexo donde O corresponde a la intersección de las diagonales AC y BD, además de un punto interior P como se muestra en la siguiente figura:



La suma de O a los vértices es igual a $AC + BD$, pero para cualquier punto P es $PA + PC \geq AC$, por desigualdad triangular, análogamente $PD + PB \geq BD$. Lo anterior significa que la suma de las distancias de P a los vértices no es menor que $AC + BD$, esta suma es igual si y sólo si P y O coinciden.

Actividad 2

Problema 1: Trace una gráfica de un polinomio que tenga un 1 extremo relativo, dos extremos relativos, tres extremos relativos, a partir de la anterior experiencia responda:

¿Qué relación tiene los extremos relativos de una función polinomial con sus raíces?

¿De acuerdo al grado de la función polinómica es posible determinar cuántos extremos relativos podría tener la función?

¿Es posible que una función polinómica de grado 5 tenga 3 extremos relativos? Explique

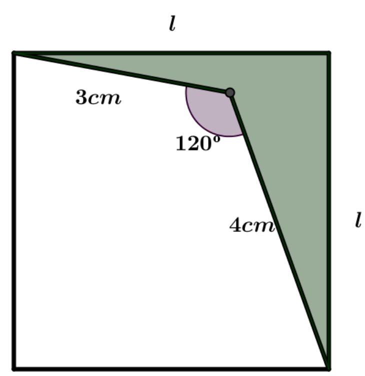
Solución:

Se busca que el estudiante particularice y generalice algunas situaciones que le permitan inferir algunas conjeturas que llevan a los resultados de la teoría de las funciones polinomiales, por ejemplo, las funciones de grado 2 siempre tienen un extremo relativo, la relación a sus raíces es que puede tener 2 raíces reales repetidas, diferentes o ninguna, para la función de grado 3 sólo hay tres posibilidades para sus raíces reales, si corta una vez al eje x no tiene ningún extremo relativo, si corta tres veces siempre asegura la existencia de dos extremos relativos. Para la función de grado 4 se puede dar que la función no corte al eje x y solo tenga un extremo relativo, que corte sólo dos veces y que tenga sólo un extremo relativo o que corte cuatro veces al eje x y que tenga 3 extremos relativos.

De la anterior experiencia se busca que el estudiante logre conjeturar que:

- La cantidad de extremos relativos de una función polinómica de grado par puede ser impar y que la cantidad de extremos relativos de una función polinómica de grado impar puede ser par.
- Toda función polinómica de grado n, puede tener a lo sumo $n-1$ extremos relativos.

Problema 2: Determine el área de la región sombreada de la siguiente *Figura*



Solución:

Trazar la diagonal del cuadrado y mediante la ley de los cosenos determinar su longitud cuyo valor corresponde a $\sqrt{37}$ cm, el área del triángulo formado por la diagonal y los lados dados corresponde a $3\sqrt{3}cm^2$, ahora el área de cuadrado en términos de su diagonal corresponde a $\left(\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}}\right)^2 = 9.25cm^2$, luego el área de la región sombreada corresponde a $9.25cm^2 - 3\sqrt{3}cm^2 \approx 4.05cm^2$.

Actividad 3

Problema 1: Se saben que algunas de las raíces de un polinomio de grado 5 son:

-2,-1, 3, 2i, y que su gráfica pasa por el punto de coordenadas (2,-2). Determine la ecuación del polinomio.

Solución:

Por el teorema de cero conjugado -2i también es una raíz del polinomio, por lo tanto p(x), se puede escribir de forma factorizada como $p(x) = a(x+1)(x+2)(x-2i)(x+2i)(x-3) = a(x-3)(x+1)(x+2)(x^2+4)$,lo cual faltaría por determinar el coeficiente principal del polinomio que es único para que pase por el punto (2,-2), al reemplazar el punto en la anterior ecuación se determina el valor de a, finalmente la ecuación buscada es $p(x) = -\frac{1}{48}(x-3)(x+1)(x+2)(x^2+4)$.

Problema 2[98]: ¿Cuál es el número de parejas ordenadas de números reales (a, b) tales que $(a+bi)^{2015} = a - bi$?

Solución:

Sea $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, y $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, la relación dada implica, $z^{2015} = a - bi$. Teniendo en cuenta que $|z|^{2015} = |z^{2015}| = |\bar{z}| = |z|$, de donde $|z|(|z|^{2014} - 1) = 0$, luego $|z| = 0$, y $(a, b) = (0,0)$, ó $|z| = 1$. En el caso que $|z| = 1$, se tiene que $z^{2015} = \bar{z}$, multiplicando por z a ambos lados de la anterior expresión se tiene $z^{2016} = \bar{z}z = 1$,

[98] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p. 19, 2002.

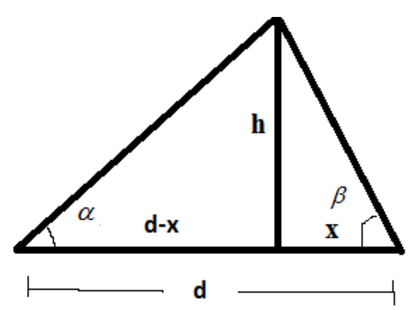
como la ecuación $z^{2016} = 1$, tiene 2016 soluciones distintas, hay 1+2016=2017, parejas ordenadas que satisfacen las condiciones del problema.

Actividad 4

Problema 1: Para medir la altura de las nubes en un campo, un trabajador enciende un reflector hacia arriba a un ángulo α por encima de la horizontal. Un observador a una distancia d mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es β. Determine una ecuación que permite calcular la altura h de las nubes.

Solución:

De acuerdo al diagrama se tiene



$\tan(\alpha) = \frac{h}{d-x}$, y $\tan(\beta) = \frac{h}{x}$, luego $(d-x)\tan(\alpha) = xtan(\beta)$, ahora resolviendo para x, se tiene $d = xtan(\beta) + x$, $x = \frac{dtan(\alpha)}{tan(\beta)+\tan(\alpha)}$, por la altura de las nubes está determinada por $h = \frac{dtan(\alpha)\tan(\beta)}{tan(\beta)+\tan(\alpha)}$.

Problema 2[99] Supongamos que α, β, y γ, denotan los ángulos de un triángulo.

Mostrar que

[99] Polya, G., (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid. p. 469

a. $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) cos\left(\frac{\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

b. $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4\cos(\alpha) cos(\beta) cos(\gamma)$

c. $\sin(4\alpha) + \sin(4\beta) + \sin(4\gamma) = 4\cos(2\alpha) cos(2\beta) cos(2\gamma)$

Solución:

La relación de (a) a (b), parece similar a la relación que hay de (b) a (c), luego para mostrar la transición de (a) a (b) utilizamos el hecho de $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, ahí $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$, por lo cual $(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi$, dado que (a), es válido para cualquier tres ángulos α, β, γ, que sumen π, obtenemos (b), sustituyendo estos valores en (a), de la misma forma pasamos de (b) a (c), con la misma sustitución, para verificar (a), sustituimos $2u$, $2v$ y $\pi - 2u - 2v$, en lugar de α, β, γ, para transformar (a) en $sin(u)\cos(u) + \sin(v)\cos(v) = [2\cos(u)\cos(v) - \cos(u+v)]\sin(u \mp v)$, finalmente utilizamos las identidades de la suma de senos y cosenos.

Actividad 5

Problema 1: ¿Cómo se podría argumentar que todo polinomio con coeficientes complejos de grado impar, necesariamente debe tener al menos un cero real?

Recordar: un cero o raíz de un polinomio P, es un número real c, tal que $P(c) = 0$.

Solución:

Una forma de argumentarlo, supongamos que existe un polinomio de grado impar que no tiene ceros reales, lo cual tendría n raíces complejas para alguna multiplicidad k, pero por el teorema del cero conjugado si r_1, es una raíz compleja también lo seria $\overline{r_1}$, por lo cual habrían otras k raíces del polinomio, pero la suma de todas las multiplicidades es n, por lo cual $k + k = 2k$, lo cual sería de grado par, lo cual contradice que el polinomio es de grado impar.

Problema 2: ¿Cómo podría usted demostrar que el perímetro de un triángulo es menor que los 4/3 de las sumas de sus medianas?

Solución:

Supongamos que las medianas del triángulo A, B, C se cortan en el punto M, por tanto al aplicar la desigualdad triangular se tienen las tres desigualdades $AM + BM > AB$, $BM + CM > BC$, y $CM + AM > AC$, teniendo en cuenta que AM, BM, y CM, son cada una 2/3 de la mediana, se logra la desigualdad pedida.

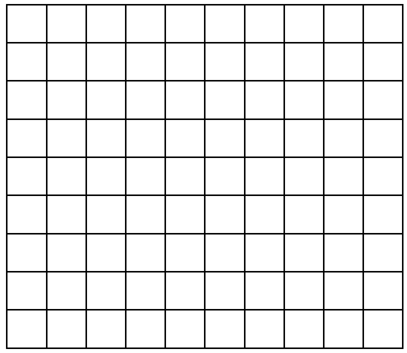
Actividad 6

Problema 1: ¿Cuántos cuadrados de diferentes tamaños hay en un tablero de 1x1, 2x2, 3x3, 8x8 (ajedrez)? ¿Podrías generalizar a un tablero nxn?

Solución:

Se hace un conteo de los cuadrados que hay de los diferentes tableros por ejemplo para el de 1x1 hay 1 cuadrado, para el de 2x2 hay 5 cuadrados, para el de 3x3 hay 14 cuadrados, por lo cual sugiere la siguiente regularidad $1 = 1$, $5 = 1 + 2^2$, $14 = 1^2 + 2^3 + 3^2$, por lo cual, para el tablero de nxn hay $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, cuadrados. Por inducción matemática se puede demostrar que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Problema 2: Dos jugadores se turnan para reemplazar con X y con O en un tablero de 9x9. El primer jugador inicia con X y el segundo con O, el jugador obtiene un punto si obtiene más X o más O en la misma fila o columna. El jugador con más puntos obtenidos es el que gana.



¿Cuál debe ser la estrategia del ganador?

¿Funcionaria la misma estrategia si el tablero es de 8x8?

¿Cuál debe ser el tamaño del tablero para que la estrategia funcione?

Solución:

Hay que jugar varias veces en los tableros de tamaño impar, la estrategia ganadora consiste en empezar marcando en el centro del tablero y jugar simétricamente al segundo jugador, para tableros de tamaño par la estrategia no funciona.

Actividad 7

Problema 1: Se sabe que hay dos raíces cuadradas de 1, es decir 1 y -1. Estas corresponden a la solución de la ecuación $x^2 = 1$, o su equivalente a $x^2 - 1 = 0$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$, o $x^4 - 1 = 0$

¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay?

¿Cómo encontraría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay?

¿Cuál sería el número de las raíces n-ésimas de 1?

Solución:

Para las raíces cuartas de 1 hay cuatro raíces que se obtienen al resolver $x^4 - 1 = 0$, como $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$, de ahí aparecen dos reales y dos complejas.

Para las raíces sextas de 1 hay seis raíces que se encuentra al resolver $x^6 - 1 = 0$, de modo que $(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$, de modo que hay 2 reales y cuatro complejas.

Esto nos lleva a conjeturar que para el caso de las n raíces pares de 1 hay n raíces, que se pueden calcular con la fórmula clásica $w_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0,1,2, \dots, n - 1$.

Problema 2: ¿Cuál es el área del mayor círculo que se puede inscribir en un triángulo de lados 3,5 y 7?

Solución:

Representamos el triángulo A, B, C en el plano coordenado con $A = (0,0)$, $B = (5,0)$, de esta forma garantizamos que $\overline{AB} = 5$, se calcula un punto $C = (x, y)$, de tal forma que $\overline{AC} = 3$, y $\overline{BC} = 7$. Esto es posible con la intersección de dos circunferencias, la primera con centro en A y radio 3, la segunda con centro en B y radio 7, las ecuaciones de estas dos circunferencias corresponde a $x^2 + y^2 = 9$, y $(x - 5)^2 + y^2 = 49$, respectivamente. Al resolver este sistema no lineal tenemos dos opciones de ubicación para el vértice C, $C_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $C_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, el incentro del triángulo se puede calcular por la siguiente fórmula $(x_I, y_I) = \left(\frac{ax_a+bx_b+cx_c}{a+b+c}, \frac{ay_a+by_b+cy_c}{a+b+c}\right)$, donde los vértices del triángulo son (x_a, y_a), (x_b, y_b), y (x_c, y_c), y los respectivos lados opuestos a,b, y c. Al aplicar esta fórmula con C_2 tenemos las coordenadas del incentro $I = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Al calcular el radio de este círculo, tenemos que es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ya que la recta que contiene el segmento $\overline{AB}$, es constante y pasa por el origen, por tanto el radio del círculo inscrito corresponde a la ordenada del incentro, finalmente el área del mayor círculo inscrito en el triángulo corresponde a: $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} \approx 2.35$.

Otra solución (propuesta por un estudiante):

Sea el triángulo A, B, y C, con sus correspondientes lados opuestos, a, b, y c. El incentro del triángulo lo divide en tres triángulos, con la particularidad de que el radio del círculo inscrito es la altura para cada uno de los tres triángulos, por tanto el área del triángulo se puede escribir como $A = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$, es decir el producto del radio del círculo inscrito por el semiperímetro del triángulo, pero por la fórmula de Herón se tiene que el área es $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s denota el semiperímetro del triángulo. Por eso, al reemplazar los correspondientes lados del triángulo e igualando las dos fórmulas anteriores, se tiene que $r = \sqrt{\frac{5.625}{7.5}} = 0.866$, finalmente el área de dicho círculo corresponde a $\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{5.625}{7.5}}\right)^2 = \pi \cdot 0.75$.

Actividad 8

Problema 1: Si x, y, z son números reales positivos tal que $xyz = a$, ¿cuál es el valor mínimo de $x^n + y^n + 3z^{\frac{n}{3}}$?

Solución:

Al reescribir el término de la izquierda como $x^n + y^n + z^{\frac{n}{3}} + z^{\frac{n}{3}} + z^{\frac{n}{3}}$, se puede definir la media aritmética de estos 5 términos como $\frac{x^n+y^n+z^{\frac{n}{3}}+z^{\frac{n}{3}}+z^{\frac{n}{3}}}{5}$, y por la desigualdad MA≥MG, se tiene que $\frac{x^n+y^n+z^{\frac{n}{3}}+z^{\frac{n}{3}}+z^{\frac{n}{3}}}{5} \geq \sqrt[5]{x^n y^n z^n} = \sqrt[5]{a^n}$, por tanto se tiene que $x^n + y^n + 3z^{\frac{n}{3}} \geq 5\sqrt[5]{a^n}$.

Problema 2[100]: Si el último digito de 2^x, con $x \in \mathbb{Z}^+$, es 4, ¿cómo debe ser la forma de x? ¿Cuál sería el último digito de 2^{50019}?

Solución:

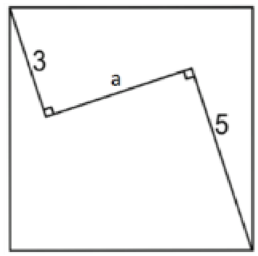
Al calcular algunas potencias del 2, el último dígito varía entre 2,4,6,8, por cual se puede inferir que 2^{4n+1}, siempre termina en 2 para $n = 1,2,3$ ..., 2^{2n+2}, siempre termina en 4, 2^{4n+3}, siempre termina en 8 y 2^{4n+4}, siempre termina en 6, por lo cual cualquier potencia del 2^x termina en 2, si al dividir x entre 4 nos da como residuo 1, termina en 4, si al dividir x entre 4 nos da como residuo 2, termina en 6, si al dividir x entre 4 nos da como residuo 0 y termina en 8 si al dividir n entre 4 nos da como residuo 3.

Por tanto el residuo de dividir 50019 entre cuatro es 3, luego el último digito de 2^{50019} es 8.

[100] Adaptado del recuperado el 4 de abril de 2015 del URL: http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/TeoriaDeNumeros.pdf

Actividad 9

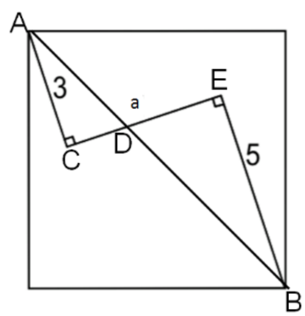
Problema 1: Se sabe que el área del cuadrado es $40u^2$, determinar el valor de a[101]



Solución:

Al trazar la diagonal del cuadrado se forman dos triángulos semejantes con las respectivas longitudes de 3 y 5 respectivamente.

De la *Figura* se tiene que:



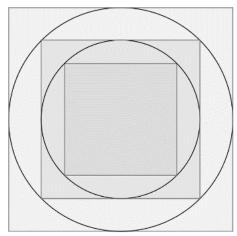
Los triángulos rectángulos ACD y DEB son semejantes. Como ACD~DEB se cumple la relación: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} = \frac{\boldsymbol{CD}}{\boldsymbol{a-CD}}$ De donde $CD = \frac{3a}{8}$, entonces $ED = a - CD = a - \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}$

Calculemos las hipotenusas AD y DB. De donde AD^2= CD^2+3^2=($\frac{3a}{8}$)^2+ 9= $\frac{9a^2}{64} + 9 = \frac{9a^2+576}{64}$ y DB^2= ED^2+5^2= ($\frac{5a}{8}$)^2 +5^2= $\frac{25a^2}{64} + 25 = \frac{25a^2+1600}{64}$. De donde la diagonal AB será

[101] Adaptado del recuperado el 4 de abril de 2015 del URL: https://www.facebook.com/148210950842/photos/a.151449605842.126810.148210950842/10152726406510843/?type=1&fref=nf

la suma AD + DB = $\sqrt{\frac{9a^2+576}{64}} + \sqrt{\frac{25a^2+1600}{64}} = 80$, al desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación de segundo grado $a^2 + 64 = 80$, cuya solución es $a = 4$.

Problema 2: Dibuje un cuadrado de área A_1, en el anterior cuadrado dibuje el mayor círculo inscrito. Ahora dibuje el mayor cuadrado, cuya área se denotará por A_2, inscrito en el anterior círculo, repita este proceso un número de veces como se puede apreciar en la siguiente figura:



Sea $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, la suma de las áreas de los primeros n cuadrados, y $M_n = kA_1 - S_n$, donde k es un entero positivo ¿cuál es el menor valor de k para que M_n, sea positivo?[102]

Solución:

Se calculan la suma de las áreas de los primeros n cuadrados concéntricos de longitud x, lo cual nos da la expresión:

$S_n = x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + .. + \frac{x^2}{2^n} = x^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$, por lo cual la expresión M_n, se transforma en $M_n = kx^2 - 2x^2 = x^2(k-2)$, se tiene $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ tiene $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2$, y como x es positivo, se deduce que $k > 2$.

[102] Puzzle from Zawaira and Hitchcock "*A Primer for Mathematics Competitions*" OUP 2009.

Problema 2 (segunda experiencia): Sea $P(x) = x^2 + px - q$, donde p y q, son enteros positivos.

a) Encuentre una pareja de enteros positivos tal que las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$, sean enteros menores que 7.

b) ¿Cuántas parejas (p, q) hacen que la ecuación $x^2 + px - q = 0$, sean menores que 2016?[103]

Solución:

Al factorizar $P(x) = x^2 + px - q$, se tiene que $P(x) = (x - r_1)(x - r_1)$, donde r_1, y r_2, son las raíces del polinomio, por tanto se tendría que $r_1 < 2016$, $r_2 < 2016$, además debe tenerse que $r_1 r_2 = -q$, $r_1 + r_2 = p$. De la anterior se deduce que una raíz debe ser positiva y la otra negativa.

Suponiendo que r_1, es positivo debe ser un entero entre 1 y 2015, y r_2, es un entero negativo entre -1 y $1 - r_1$, donde el resultado buscado será equivalente a $1 + 2 + 3 + \cdots + 2014 = \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 2'029{,}105$.

Actividad 10

Problema 1[104]: Si hay exactamente 4 enteros x que satisfacen la desigualdad $x^2 + bx + 7 \leq 0$, ¿cuántos valores enteros de b son posibles?

Solución:

[103] Modificado, del material "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p. 26, 2002.
[104] Modificado, del recopilado "olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p.12, 2005.

La solución de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + 7 = 0$, es $x_1 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2-28}}{2}$, $x_2 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2-28}}{2}$, todas las soluciones de la inecuación se encuentran entre x_1 y x_2, luego la longitud de intervalo corresponde a $x_1 - x_2 = \sqrt{b^2 - 28} < 5$, de ahí tenemos que existen 4 posibles valores para b, los cuales son $b = -7, -6, 6, 7$, ya que $b^2 > 28$.

Problema 2[105]: ¿Cuál es el mínimo valor que puede alcanzar la expresión

$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$?

Solución:

Sean A(0,0), B(2,0), C(4,5), D(0,2), y P(x,y), puntos en el plano, por la expresión corresponde a la suma de las distancias de P a cada uno de los puntos A, B, C y D, respectivamente, la mínima distancia es alcanzada si p coincide en la intersección de AC y BD, por lo cual se tiene que $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} \geq AC + BD = \sqrt{41} + 2\sqrt{2}$.

Actividad 11

Problema 1[106]: Si $a, b,$ y c son números positivos, demuestre que $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Solución:

105 Modificado, del recopilado "olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p.12,
106 Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). p. 234.

Del miembro izquierdo de la desigualdad se tiene que, $a+b+c$, es $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, y que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, es $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}$, por desigualdad MA≥MG, al multiplicar miembro a miembro las dos desigualdades se tiene $\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} = \frac{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9}$, y que

$\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}} = 1$, luego $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Problema 2[107]: Si $x, y > 0$, demuestre que $\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y^2}{x}} > \sqrt{x}+\sqrt{y}$

Solución:

La desigualdad a demostrar es equivalente a $\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y^2}{x}}-\sqrt{x}-\sqrt{y} > 0$, como

$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-\sqrt{y} > 0$, se tiene que $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$.

Dos casos:

a) Si $x > y$, entonces $x-y$, y $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, son positivos, por tanto su producto también.

b) Si $x < y$, se tiene que $x-y$, y $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, son negativos, y su producto $\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$, es positivo.

[107] Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society, (1996). p. 237.

Actividad 12

Problema 1: Demuestre que $x \geq 0$, entonces $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$

Solución:

Reescribimos la expresión $3x^3 + 4 \geq 6x^2$, pero $2x^3 + x^3 + 4 \geq 6x^2$, al utilizar la MA≥MG, se tiene que $\frac{2x^3+x^3+4}{3} \geq \sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$, y se tiene que $3x^3 + 4 \geq 6x^2$.

Problema 2[108]: Dado un triángulo de área unidad cuyos lados están dados por a, b, c, donde $a \geq b \geq c$. Demuestre que $b \geq \sqrt{2}$.

Solución:

De la propiedad fundamental del triángulo se tiene que $A \leq \frac{ab}{2}$, donde A es el área del triángulo y por tanto $1 \leq \frac{ab}{2}$, y como a y b son dos lados del triángulo cualesquiera, entonces también $\frac{bc}{2} \geq 1$, Si $b \geq c$, entonces $\frac{b^2}{2} \geq 1$ de donde $b^2 \geq 2$.

Actividad 13

Problema 1: Demostrar que para cualquier x, y se cumple $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

Solución:

El miembro izquierdo de la desigualdad se puede reescribir como $x^4 + y^4 + 4 + 4$, y por la MA≥MG, se tiene que $\frac{x^4+y^4+4+4}{4} \geq \sqrt[4]{16x^4y^4} = 2xy$, por tanto $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

108 Modificado de Mathematical Circles (Russian experience), American Mathematical Society p. 214.

Problema 2[109]**:** Dos números distintos a y b, se escogen aleatoriamente del conjunto $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^{25}\}$ ¿Cuál es la probabilidad de que $\log_a b$ sea un número entero?

Solución:

Sea $a = 2^j$ y $b = 2^k$. Entonces $\log_a b = \log_{2^j} 2^k = \frac{\log(2^k)}{\log(2^j)} = \frac{klog(2)}{jlog(2)} = \frac{k}{j}$, así que $\log_a b$ es un entero si y sólo si k es un múltiplo entero de j. Para cada j, el número de múltiplos enteros de j que son a lo sumo 25 que es la parte entera, es decir, $\left\lfloor \frac{25}{j} \right\rfloor$. Dado que $j \neq k$, el número de posibles valores de k para cada j es $\left\lfloor \frac{25}{j} \right\rfloor - 1$.

Por tanto el número total de parejas ordenadas (a, b) es $\sum_{j=1}^{25} \left\lfloor \frac{25}{j} \right\rfloor - 1 = 24 + 11 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2(2) + 4(1) = 62$.

Dado que el número total de posibilidades para a y b es $24 \cdot 25 = 600$, finalmente la probabilidad de que $\log_a b$, sea un entero es $\frac{62}{600} = \frac{31}{300}$

Actividad 14

Problema 1[110]**:** Calcular el valor de $2015^2 - 2014^2 + 2013^2 - \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$

Solución:

Expresamos $2015^2 - 2014^2 + 2013^2 - \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$, como $(2015 - 2014)(2015 + 2014)(2013 - 2012)(2013 + 2014).\cdots.(2 - 1)(2 + 1) = 2015 + 2015 + \cdots + 2 + 1 = \frac{2016 \cdot 2015}{2} = 2'031{,}120$.

[109] Tomado de "Olimpiadas colombianas de matemáticas problemas y soluciones", nivel superior, p.19, 2005.
[110] Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013 p. 13.

Otra solución: (propuesta por un estudiante):

Se calculan las diferencias de los cuadrados consecutivos de dos en dos, como sigue: $2^2 - 1^2 = 3$, $4^2 - 3^2 = 5$, $6^2 - 5^2 = 11$, $2014^2 - 2014^2 = 4027$, luego se deduce la regularidad de la suma $3 + 7 + 11 + \cdots + 4027$, es decir la suma de los primeros 1007 términos que corresponde a $2', 029{,}105$, que finalmente se le resta al cuadrado de 2015, para llegar al resultado $2015^2 - 2', 029{,}105 = 2'031{,}120$.

Problema 2: ¿Existe un número de 4 dígitos tal que la suma de mismo número más sus correspondientes dígitos sea 2015?

Ejemplo: Para el número 2005, esta 1979 ya que al sumar 1979+1+9+7+9=2005

Solución:

Para el 2015 debe ser el 2011, ya que 2011+2+0+1+1=2015.

Actividad 15

Problema 1[111]: Para cualquier x real ¿cuál es el valor máximo para $\sqrt{2016 - x} + \sqrt{x - 2008}$?

Solución:

Si se parte de que $\left(\sqrt{2016 - x} + \sqrt{x - 2008}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{(2016 - x)(x - 2008)}$. Ahora $2016 - x$, y $x - 2008$ son reales positivos con suma constante 8. Por MA≥MG, se tiene que $\frac{(2016-x)+(x-2008)}{2} \geq \sqrt{(2016 - x)(x - 2008)}$, luego $\sqrt{(2016 - x)(x - 2008)} \leq 4$, para que este valor se alcance $\sqrt{2016 - x}$ = $\sqrt{x - 2008}$ = 2, por tanto el máximo valor de $\sqrt{2016 - x} + \sqrt{x - 2008}$, es $2 + 2 = 4$.

111 Modificado del texto "International Mathematics Competition" Junior High School Division 1999-2013. p.190.

Problema 2[112]**:** Para m, n enteros positivos, ¿cuál es máximo valor de n tal que $\sqrt{m-174}+\sqrt{m+34}=n$?

Solución:

Tomando $a^2=m-174$, y $b^2=m+34$, y por el producto notable $(b-a)(b+a)=b^2-a^2$, se tiene que $b^2-a^2=34-(-174)=208$, por tanto $(b+a)\leq 104$, y $(b-a)\geq 2$ de ahí $n\leq 104$, al resolver el sistema $a+b=104$, y $b-a=2$, se tiene que $b=53$, finalmente al tomar $m=53^2-34=2775$, al sustituir en $\sqrt{m-174}+\sqrt{m+34}=n$ se tiene $\sqrt{2775-174}+\sqrt{2775+34}=\sqrt{2601}+\sqrt{2809}=51+53=n$ que $n=104$.

[112] Modificado del texto “International Mathematics Competition” Junior High School Division 1999-2013. p. 175.

Anexo 3. Consentimiento informado de los estudiantes participantes de la investigación

Yo ____ estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño, identificado con el código _________________ acepto participar voluntariamente en el estudio “Una caracterización de tipos de *insight* en la solución de problemas matemáticos planteados en el salón de clases.

Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es “Describir el proceso de la **iluminación (*insight*)** en la resolución de problemas matemáticos propuestos en el salón de clases”. También he sido informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, las clases serán grabadas en audio y video.

Tengo conocimiento que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar al docente titular del curso “Desarrollo del pensamiento matemático a través de la solución de problemas”: C.Dr. Carlos Alberto Cañón Rincón por medio del correo carloscanon@uan.edu.co

En constancia firmo a los ____ días del mes de _______________ de 201__.

FIRMA DEL ESTUDIANTE

Anexo 4. Ensayo final de un estudiante de la segunda experiencia

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para abordar este tema primero dejaremos claro que es pensamiento matemático y solución de problemas. La resolución de problemas es algo que todos los seres humanos enfrentamos en la cotidianidad, desde el momento de nacer un bebe tiene que aprender a comunicar cuando tiene hambre, sueño, frio entre otros y así sucesivamente a medida que vamos creciendo nos enfrentamos a diversos problemas los cuales debemos buscar la forma de solucionar. En la matemática la realización de ejercicios de forma mecánica no es un problema ya que no nos exige un esfuerzo que nos permita generar nuevos conocimientos, el problema surge cuando nos enfrentamos a una situación en la cual no vemos una solución inmediata y por tal razón no sabemos cómo abordarla.

El pensamiento proviene del intelecto y tiene una serie de operaciones tales como el análisis, la comparación, la síntesis, la abstracción y la generalización los cuales vamos desarrollando a medida que los trabajamos, nuestro pensamiento es el encargado de emitir juicios, conceptos y razonamientos cuando es oportuno.

Pero el pensamiento matemático por definición es "***El pensamiento matemático*** *consiste en la* ***sistematización y la contextualización del conocimiento de las matemáticas****. Este tipo de pensamiento se desarrolla a partir de conocer el origen y la evolución de los conceptos y las* <u>*herramientas*</u> *que pertenecen al ámbito matemático".* (definicion.de, 2016)

En la educación el pensamiento matemático se va desarrollando a medida que nos enfrentamos a diversos problemas matemático los cuales nos permite comprender las relaciones que se dan en la matemática y nos posibilita cuantificarlas y formalizarlas para entenderlas mejor y poder comunicarlas, esta forma de pensamiento se traduce en el uso y manejo de procesos cognitivos tales como: razonar, demostrar, argumentar, identificar, efectuar algoritmos, relacionar, graficar, interpretar, calcular, inferir, y modelizar, pero en la actualidad podemos ver que a los estudiantes se les enseña a solucionar formulas, a dar sólo el resultado de una operación, por lo cual el pensamiento matemático se está dejando a un lado y en consecuencia cuando se enfrenta a un problema donde necesita analizar, sistematizar, contextualizar los conceptos previos queda atascado.

A partir de lo anterior surge la importancia de aprender a solucionar problemas para el desarrollo del pensamiento matemático el cual se evidencio en la clase cuando nos enfrentamos a los problemas propuestos por el docente basado en el método de los cuatro pasos de Polya. Por lo cual expondré mi experiencia al momento de solucionar un problema con el método de Polya “Comprender el problema, crear un plan, atacar el problema y revisar la solución, ver si hay otros caminos.”

Al momento de comprender el problema ya me encontré con un problema el cual se me hizo evidente en casi todos los problemas propuestos y era no entender cuál era el problema como tal, Polya propone al momento de intentar comprender el problema realizarse una seria de preguntas para ver si se hace más entendible.

Paso 1: Entender el Problema.

- *¿Entiendes todo lo que dice?* Muchas veces leemos tan rápido el problema que no sabemos que es lo que vamos hacer y pasamos directamente a atacar el problema y cuando nos encontramos en el punto de que no nos da es donde nos devolvemos a mirar cual era el error y es en ese momento donde es evidente que no sabíamos que era lo que teníamos que hacer, “no leí bien la instrucción, no supe entender que era lo que me pedían, o simplemente no analice lo que me pedían y me desvié” *¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?* El querer plantear el problema con mis propias palabras me sirvió para entender que es lo que debo encontrar o realizar, te lleva a analizar más el problema, *¿Distingues cuáles son los datos?,* el preguntarse qué datos tengo y como los puedo utilizar me llevo a evidenciar que me faltaban conocimientos previos para poder desarrollar los ejercicios, *¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?*

Cuando veía que no arrancaba con el ejercicio intente buscar ejercicios que fueran similares.

Por ejemplo cuando quise trabajar el problema que dice: *“dibujar un cuadrilátero convexo, ahora dibuje un punto interno M, tal que la suma de las distancias del punto a sus vértices sea mínima” leí* muchas veces el enunciado y lo primero que se me vino a la cabeza fue hacer un dibujo para intentar verlo más claro, por lo cual dibuje un plano y puse el cuadrilátero sobre él, a los vértices los nombre desde (A,B,C,D) y trace las diagonales donde salió el puno M, yo sabía que el punto que une las dos diagonales del cuadrilátero es la distancia más corta pero no sabía cómo demostrarlo, entonces comencé a dibujar los triángulos que me salían, y no veía ninguna relación, pensaba en la clase de geometría euclidiana que las diagonales las había visto y trabajado pero no me acordaba.

Luego pensé el darle valores a los vértices y hallar el punto medio, comprobando que las distancias de un vértice al punto M era de intersección de las dos diagonales, luego nombre cada segmento como una distancia, pero hasta este punto no estaba demostrando nada, pensé como hago para demostrar que la intersección de las diagonales son la distancia más corta a cada vértice, entonces pensé si tomo otro punto L y trazo segmentos desde cada el vértice al punto L podré hacer la comparación de cuál es la distancia más corta si el punto M que son las diagonales a los vértices o el punto L que es un punto cualquiera en el cuadrilátero.

En cuanto a las exposiciones se pudo evidenciar que razonar matemáticamente es un proceso gradual que se va ejercitando a medida que lo practicas, muchas veces pasamos cosas porque nos parecen obvias pero es en lo obvio donde surge las respuesta que estábamos buscando, por eso la importancia de darse un respiro cuando sientes que no avanzas y luego retomar, pero en los ejercicios propuestos por el docente, observe que cuando estábamos en clase y empezábamos un ejercicio las probabilidades de resolverlo eran más altas que cuando lo dejábamos para después, en los ejercicios de seguimiento se trabajaba más.

Además, que a pesar de que se nos sugiere no borrar nada el empezar a tener ese hábito se dificulta porque tendemos a empezar a escribir o desarrollar un problema, pero cuando sentimos que lo que estamos haciendo no nos lleva para ningún lado lo borramos y volvemos a empezar sin darnos cuenta que a veces volvemos a escribir lo que habíamos borrado.

En otras ocasiones se escribe en hojas las cuales se pierden por lo que todo lo que se había avanzado se olvida, es en este punto donde resalto la importancia de dejar todos los apuntes, para en el momento de volver a retomarlo hacer una revisión de que era lo que se había hecho y ver si por ese camino se va bien o toca buscar otro camino, además que al momento de revisar los apuntes pueden surgir nueva ideas que antes no había considerado, el releer los apuntes es tan valioso que lo lleva a entender las cosas mejor, por decirlo de otra forma cuando relees los apuntes sientes que vas entendiendo cosas que antes no eran tan claras.

Como por ejemplo los ejercicios propuestos por Mason, Burton y Stacey del libro *Pensar matemáticamente* donde lo lee y vuelve leer, e intenta razonar, pero siente que no lo entiende por lo que lo vuelve a leer y así sucesivamente hasta que en algún momento se enciende el bombillo y dice esto es por este camino.

Esto es visible en los problemas del tostado rápido, en el de la edad del padre y el hijo, la diferencia de los ángulos, el de unir los 9 puntos, entre otros.

Estos problemas lo llevan a pensar que es lo que me preguntan, que es lo que yo sé y a donde quiero llegar, por lo cual podría decir que si cualquier persona quiere solucionar un problema primero tiene que hacer un proceso de fermentación de la información permitiéndose tener claro que es lo que sabe y si eso que sabe es suficiente para poder solucionar el problema, cuando se evidencia que no es suficiente no debe ser razón para abandonar el problema, sino más bien un aliciente para buscar tener más información que me permita solucionarlo, siempre teniendo claro a donde es que el problema lo quiere llevar.

Cuando estamos atascado es importante darse un respiro para así continuar con una actitud positiva frente al problema, pero cuando intentaba retomar los ejercicios ya se me había olvidado por lo cual me sentía más atascada que antes.

De esta electiva puedo concluir que me dejo una visión diferente de cómo estudiar la matemática, se está acostumbrado a ir directamente al ataque de un problema y no al hecho de detenerse a razonar que es lo que voy hacer, la resolución de problemas es una estrategia que permite planificar una estratega para atacar y ejecutar de una forma articulada un problema por lo cual puede hacer que la solución sea más rápida.

Además, nos alienta a no abandonar los problemas, aunque admito que abandone muchos problemas, soy consciente que si los hubiera retomado y trabajado como debería, hubiera encontrado la solución de estos.

Empecé la electiva con un pensamiento desordenado para resolver un ejercicio y la termino con una serie de herramientas y estrategias que me facilitaran el trabajo de las matemáticas a futuro tanto para mi desarrollo cognitivo como para la enseñanza de la misma ya que enseñare a mis futuros estudiantes a trabajar de una forma ordenada y atener pautas para no olvidar que se estaba haciendo logren desarrollar un pensamiento matemático.

BIBLIOGRAFIA

- Definición.de. (19 de 05 de 2016). *DEFINICIÓN DE.* Obtenido de http://definicion.de/pensamiento-matematico/
- Apuntes cuaderno de trabajo electiva desarrollo del pensamiento a través de la resolución de problemas
- Mason, J, Burton, L y K., Stacey (1988). Pensar matemáticamente.
- Polya G. como plantear y resolver problemas.