APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DESDE UN ENFOQUE CUALITATIVO

Edinson Caicedo Parra

Universidad Antonio Nariño

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá, Colombia

2016

APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DESDE UN ENFOQUE CUALITATIVO

Edinson Caicedo Parra

Tesis que se presenta como requisito para obtener

El título de Doctor en Educación Matemática

Dirigido por

Dr. Gerardo Antonio Chacón

Universidad Antonio Nariño

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá, Colombia

2016

Nota de aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, 5 de diciembre de 2.016

Dedicatoria

A mi madre por inculcarme la fe y constancia que se

Requieren para transformar los sueños en realidad.

A Ángela por acompañarme en este tramo del camino.

A Juan Pablo, Sergio y Sara por motivarme a vivir en un futuro más bonito.

Agradecimientos

Mi sincero agradecimiento al doctor Gerardo Chacón, por su incondicional apoyo y diligencia para guiarme y apoyarme durante la consolidación de este arduo trabajo. Agradezco también a la Universidad Antonio Nariño, por brindarme la oportunidad de poner en marcha mis iniciativas y de esta manera enriquecer mi formación y experiencia académica.

Agradezco también a todo el cuerpo docente del doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, encabezado por la Doctora Mary Falk de Losada y el Doctor Mauro Pupo por sus valiosos aportes y críticas en aras de que esta investigación arrojara los mejores resultados posibles.

Finalmente agradezco a mi familia, amigos, compañeros y estudiantes ya que, de manera consiente y a veces sin saberlo, me motivaron a continuar con este enriquecedor proceso y así consolidar un importante logro para mi formación y a la vez para la educación matemática.

Síntesis

El propósito de esta investigación es diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, con un enfoque cualitativo y a través de la resolución de problemas, para establecer una metodología que sea aplicable a los cursos de ecuaciones diferenciales. Se diseñó un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis en los métodos cualitativos y basados en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, en el que participaron cinco estudiantes de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño. Una vez aplicados los planes de clase y las encuestas semi-estructuradas se analizaron desde un enfoque cualitativo.

Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes tienen una gran motivación e interés durante el curso, debido a que la metodología empleada basada en la resolución de problemas, empleando conjeturas desde la construcción del modelo hasta llegar la solución final y el uso de la tecnología para estudiar los métodos cualitativos y numéricos favorecen su comprensión de los contenidos del curso. Por otro lado el modelo didáctico resultado de la investigación ofrece una ruta y ciertos recursos que promueven la actividad matemática en los cursos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo se recomienda que tanto el syllabus del curso como los planes de clase sean revisados, adaptados o ajustados de acuerdo a las necesidades de los estudiantes o docentes que deban impartir el curso.

Abstract

The purpose of this research is to design and evaluate a didactic model for the learning of differential equations, based on the quasi-empirical conception of mathematics, with a qualitative approach and through the resolution of problems, to establish a methodology that is applicable to the courses of differential equations. A complete course of differential equations was designed with emphasis on qualitative methods and based on the quasi-empirical conception of mathematics, in which five engineering students from the Antonio Nariño University participated. Once the class plans and the semi-structured surveys were applied, they were analyzed from a qualitative approach.

The obtained results show that the students have a great motivation and interest during the course, because the methodology used based on problem solving, using conjectures from the construction of the model until arriving at the final solution and the use of the technology to study The qualitative and numerical methods favor their understanding of the course contents. On the other hand the didactic model resulting from the research offers a route and certain resources that promote mathematical activity in the courses of differential equations. However, it is recommended that both the syllabus of the course and the class plans be reviewed, adapted or adjusted according to the needs of the students or teachers who must teach the course.

Tabla de contenido **Pág.**

Lista de figuras **Pág.**

Lista de tablas **Pág.**

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge debido a la importancia que tiene la modelación mediante ecuaciones diferenciales tanto en las ciencias básicas como en las humanas y sociales, lo cual es de suma relevancia, ya que desde que Newton logró desarrollar el cálculo, y más importante aún, modelar las leyes de la mecánica clásica valiéndose de las ecuaciones diferenciales, éstas se convirtieron en un importante recurso para la modelación y solución de problemas.

Un obstáculo que presenta el trabajo con las ecuaciones diferenciales tiene que ver con la dificultad o imposibilidad para resolver analíticamente muchas de ellas, situación que ha representado un gran reto para la comunidad matemática. Con el propósito de hacer frente a tal dificultad Henri Poincaré, hacia finales del siglo XIX estableció un nuevo paradigma en la solución de las ecuaciones diferenciales, al tratar el problema de los tres cuerpos (Delshams A. , 2005), que hoy se conoce como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

No obstante las observaciones anteriores y la gran disponibilidad de recursos tecnológicos con que se cuenta para el aprendizaje de las matemáticas y más específicamente de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, actualmente se observa que algunos de los cursos que abordan estas disciplinas, lo hacen desde una perspectiva netamente algorítmica.

De este modo, el docente se limita a recitar los distintos tipos de ecuaciones que se presentan en los problemas habituales y la respectiva receta o algoritmo que permite resolverla de manera analítica. Así, el curso se reduce a estudiar un libro con un esquema predefinido que no da lugar a la generación de un pensamiento matemático que faculte al estudiante para hacer frente a problemas retadores que encontrará en su práctica profesional (Moreno & Azcárate, 2003).

Un concepto fundamental en educación matemática es el de sistemas de práctica, que se entienden como la actuación o expresión realizada por una persona o institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, 2009). La práctica es, por tanto, una acción reflexiva, situada, intencional y mediada por recursos lingüísticos y materiales. Bajo esta perspectiva a continuación, se enuncian una serie de factores vistos inicialmente y considerados como insuficiencias en los sistemas de práctica actuales en relación con la enseñanza – aprendizaje de ecuaciones diferenciales:

- Algunos planes de estudio y libros de texto contemplan la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales bajo un enfoque cualitativo, no obstante el rol protagónico sigue siendo del docente (Unesco, 1996).
- La modelación y la resolución de problemas relacionados con sistemas dinámicos no constituye el eje articulador en los cursos de ecuaciones diferenciales (Moreno & Azcárate, 2003).
- Aunque en la literatura de investigación en educación matemática existen diversos escritos sobre las ecuaciones diferenciales y sus implicaciones, no se cuenta con registros donde se relaten experiencias sobre un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis cualitativo y desde el cuasi-empirismo.

La propuesta de un modelo para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales fundamentada en una concepción cuasi empírica de las matemáticas, promueve sistemas de práctica adecuados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Lakatos, 1978), de manera que los egresados de las carreras de ingeniería estén en mejores posibilidades de aportar soluciones creativas e innovadoras a los problemas retadores y propios de esta disciplina, apoyándose además en la tecnología.

Debido a la naturaleza del proyecto, se considera que está en consonancia con las siguientes líneas de investigación del Doctorado en Educación Matemática:

- La enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas
- Cálculo intensivo y uso de la tecnología en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, y
- La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas avanzadas a través de sus aplicaciones.

Por lo cual se plantea como **problema la investigación**: ¿qué implicaciones tiene un modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, para potenciar la actividad matemática en la resolución de problemas retadores?

Se precisa como **objeto de la investigación**: sistemas de prácticas empleados para la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería.

El **objetivo general** consiste en diseñar y valorar un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas con un enfoque cualitativo, a partir del estudio de los sistemas dinámicos, que promueva la actividad matemática orientada hacia la resolución de problemas retadores.

Los **objetivos específicos** son:

1. Determinar los elementos más relevantes que se deben considerar para el diseño de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo.

2. Caracterizar los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, evidenciados en los estudiantes durante las diferentes fases de la valoración del modelo didáctico.

3. Establecer y estudiar los principales aportes que deriven de la valoración del modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático.

El **campo de acción** se enmarca en los sistemas de práctica empleados en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Las **preguntas científicas** son:

1. ¿Cuáles son los elementos más relevantes que se deben tener en cuenta para el diseño y valoración de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?

2. ¿Cuáles son las principales características de los procesos de aprendizaje de los estudiantes durante las diferentes fases del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?

3. ¿Cuáles son los principales aportes y características de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático y su incidencia en la solución de problemas retadores?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Revisar el estado del arte de la investigación dirigida a la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

2. Determinar los fundamentos teóricos y metodológicos que sustentan un modelo didáctico ajustado al proyecto.

3. Elaborar un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para favorecer el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

4. Análisis de resultados, obtenidos de la validación del modelo.

5. Elaboración de conclusiones y redacción del documento científico.

La tesis se sustenta en investigación cualitativa, a través de métodos teóricos y empíricos, la información recolectada inicialmente es comparada, para luego establecer categorías de significado.

Durante el desarrollo de la investigación se emplearon los siguientes métodos:

Métodos teóricos

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, propiciando una concatenación lógica de las tareas realizadas.

Análisis-síntesis e inducción-deducción. Esta metodología está presente en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del diagnóstico relacionados con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados y elaborar las conclusiones y generalizaciones.

Métodos del nivel empírico

La observación científica. Método que permite conocer la realidad mediante la percepción directa en clases, talleres y otras actividades docentes.

Encuesta. Se realizó una encuesta a los profesores y los estudiantes.

Los datos recolectados se analizaron mediante Atlas.ti® y se organizaron para efectuar una codificación en un primer plano. Posteriormente la codificación en un segundo plano permitió comparar categorías y agrupar en temas, con el fin de obtener clasificaciones.

El **aporte teórico** radica en el diseño de un modelo didáctico para implementar el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales con un enfoque cualitativo, basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas y orientado a la solución de problemas retadores en sistemas dinámicos. Además, se elaboró el cuerpo de recomendaciones, derivadas del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para su inclusión en los sistemas de práctica empleados para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, desde un enfoque cualitativo.

Por otro lado se enuncian algunos elementos teóricos que permitan comprender los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, desde un enfoque cualitativo basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, apoyado en un paquete computacional (Maple®) y sustentado en la resolución de problemas retadores.

El **aporte práctico** consistió en el diseño de un curso completo de ecuaciones diferenciales con énfasis en el uso de la teoría cualitativa.

Se considera que los aportes novedosos y originales del trabajo tienen que ver con la reflexión acerca de las implicaciones en torno a:

- El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo y

- El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas.
- La modelación y solución de problemas retadores relacionados con las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, a partir del razonamiento cuasi empírico y desde un enfoque cualitativo.

La estructura de la tesis es la siguiente:

Introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos.

- Introducción, justificación de la investigación.
- Primer capítulo, estado del arte.
- Segundo, fundamentos teóricos sobre la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos en los sistemas de práctica empleados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Tercero, elaboración del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de la matemática, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, así como una metodología fundamentada en una revisión de los sistemas de práctica, que considere el uso de un Maple 18® en aplicaciones prácticas.
- Cuarto, aplicación y valoración del modelo formulado y su metodología mediante la aplicación del mismo en cursos regulares de ecuaciones diferenciales en la Universidad Antonio Nariño; la información se recolectará empleando métodos cualitativos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

A continuación, se presenta de manera sucinta la información que se ha recabado acerca de las investigaciones existentes que se consideran relevantes para esta investigación, la cual ha sido recolectada desde hace dos años, tanto de libros de texto como de tesis y artículos de investigación científica en relación con la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos. Del mismo modo se incluyen documentos de actualidad relacionados con el modelo teórico cuasi empírico de pruebas y refutaciones en la educación matemática.

1.1. Enseñanza - Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales con enfoque cualitativo.

Desde finales de la década de 1980 se han hecho esfuerzos por incorporar el enfoque cualitativo en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, algunos de los cuales se describen a continuación.

1.1.1 Cross thematic activities in physics and mathematics are performed while students use dynamic geometry to simulate their own constructions[1].

El autor presenta tres actividades temáticas transversales en los campos de la física y las matemáticas que se llevaron a cabo durante el curso académico 2009 - 2010 en una escuela privada en la isla de Rodas, Grecia. Estas tienen que ver con la simulación de caída libre gravitatoria, para explorar el centro de masa de un cuerpo no regular y el modelado de un cordón en movimiento sobre una varilla giratoria. Los estudiantes

[1] Pipinos, S. (2011). Cross thematic activities in physics and mathematics are performed while students use dynamic geometry to simulate their own constructions. Rodas: Min readers Publications.

usan dibujos en un ambiente de geometría dinámica para simular, verificar y utilizar sus resultados o con el fin de hacer conjeturas acerca de propiedades teóricas de estos modelos, mientras que la geometría euclidiana es primordial en el desarrollo de la experiencia. Los autores realizaron un diseño temático triangular que toma en cuenta los tres ejes básicos, el aprendizaje colaborativo en la computadora, los modelos científicos y un enfoque temático transversal que se utilizó para diseñar estas actividades en las que se anima a los estudiantes a descubrir varias nociones y reconstruir las leyes físicas a nivel de conjetura por sí solas.

Es una experiencia interesante en la medida en que utilizan herramientas tecnológicas para el aprendizaje que además es colaborativo y con un enfoque transversal, pero se dedica exclusivamente al análisis geométrico, sin hacer aproximaciones numéricas ni revisar algunos modelos que se pueden resolver analíticamente, de modo que los estudiantes puedan contrastar las soluciones obtenidas y así lograr una mejor comprensión de los fenómenos estudiados.

1.1.2 Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking[2]

La investigación se orienta a determinar cómo los estudiantes, mediante una aplicación de las ecuaciones diferenciales relacionada con la ecuación logística para el crecimiento de una población y su análisis cualitativo de la línea de fase, logran abordar la actividad matemática avanzada mediante la simbolización que se da en dos

[2] Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2011). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. San Diego: Universidad de San Diego.

etapas, una horizontal que tiene que ver con la manera en que los estudiantes desarrollan una actividad matemática informal, para luego pasar a la formalización, lo cual los autores denominan actividad matemática vertical.

Es interesante el planteamiento de la actividad matemática horizontal que surge de la conjetura para luego pasar al nivel formal o de teorema, pero se detiene únicamente en ecuaciones diferenciales autónomas, como lo es la ecuación logística; deberían dar a conocer soluciones a otras ecuaciones, para establecer comparaciones con los métodos numéricos y analíticos en aras de profundizar y brindar un mejor panorama a los estudiantes.

1.1.3 Un Siglo de Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales[3]

El autor efectúa un recorrido histórico por lo que ha sido la evolución de los sistemas dinámicos, centrándose particularmente en el análisis de dispositivos de control automático que se estudian a través de los ciclos límites, los cuales proveen un panorama acerca del análisis cualitativo de los sistemas dinámicos, especialmente en la observación de los diferentes comportamientos que toman ciertas soluciones y luego la determinación de si son fuentes sumideros o puntos de silla manifestando comportamientos caóticos o estables dependiendo de las condiciones y de lo que se quiera observar.

Es artículo que involucra conceptos importantes para abordar los sistemas dinámicos, caracteriza adecuadamente los equilibrios de un sistema y la evolución de algunos

[3] Nápoles, J. (2004). Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Cuenca del Plata: Lecturas Matemáticas.

conceptos de los sistemas dinámicos a lo largo de la historia, pero se centra en una aplicación de los sistemas dinámicos a la ingeniería en lo relacionado con los dispositivos de control que, a pesar de ser interesante para los ingenieros electrónicos, no aporta mucho en cuanto al aprendizaje de los sistemas dinámicos.

1.1.4 Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint[4]

En este artículo se hace especial énfasis en cuanto al tratamiento de los sistemas no lineales, los cuales brindan una rica fuente de conocimiento en la medida en que permiten, a través de recursos tecnológicos y paquetes computacionales, entender geométricamente las soluciones de ciertos modelos que no podrían ser comprendidos de otra manera.

Se considera la gran importancia de combinar los métodos cualitativos con los cuantitativos, de modo que se evidencie la comprensión acerca de los fenómenos, guiando a los estudiantes a la verbalización en lenguaje cotidiano sobre su experiencia en el tratamiento de estos temas.

Otra idea relevante respecto al curso consiste en incentivar a los estudiantes para que tomen parte activa durante las clases de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, de modo que ellos puedan modelar, verificar y caracterizar ciertos patrones, no sólo en cuanto a sistemas dinámicos discretos, sino también a los continuos. De hecho se propone tratar modelos clásicos de crecimiento poblacional, depredador presa, el Atractor de Lorenz y otros más que presentan un comportamiento caótico, de

[4] Blanchard, P. (1994). Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems viewpoint. Boston: *The College Mathematics Journal*.

modo que los estudiantes tengan una nueva perspectiva acerca del conocimiento matemático.

Como se puede apreciar el artículo hace un énfasis en los métodos cualitativos, además el curso que describe emplea bien los recursos tecnológicos y pondera el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde los sistemas dinámicos. Una carencia del artículo es que se centra en sistemas autónomos y no trata los métodos analíticos, asimismo las conclusiones son muy pobres para la envergadura del proyecto.

Cabe destacar que Paul Blanchard es coautor del libro de texto “Ecuaciones diferenciales”. Este libro es radicalmente diferente de los libros de texto empleados habitualmente en un curso de ecuaciones diferenciales, ya que, se centra más en la interpretación de las soluciones desde el punto de vista cualitativo y numérico, reemplazando así los métodos analíticos que son limitados y en muchos casos no aportan para la comprensión de una situación problema y su solución.

El texto es ampliamente utilizado en esta investigación, pero es simplemente un recurso, el cual no permite retroalimentación alguna y no se conoce documentación alguna acerca de su aplicación en algún curso en particular.

1.1.5 A Methodology for the Teaching of Dynamical Systems Using Analogous Electronic Circuits[5]

Los autores tratan la manera cómo el comportamiento de los sistemas dinámicos puede ser reproducido mediante circuitos electrónicos análogos, los cuales permiten el estudio de muchos fenómenos asociados con ellos, usando componentes electrónicos de bajo costo y versátiles que se encuentran fácilmente en el mercado. En este trabajo se propone una metodología para desarrollar plataformas didácticas tendientes al estudio de los sistemas dinámicos basados en circuitos electrónicos análogos. Finalmente se presenta el diseño y la implementación de tres circuitos electrónicos que imitan sistemas naturales caóticos: el sistema Duffing forzado, el sistema de Lorenz y el sistema de Rössler.

Es un artículo para estudiantes e ingenieros electrónicos, por tratarse de una aplicación de los sistemas dinámicos en los circuitos electrónicos análogos, pero se centra en temas propios de los sistemas dinámicos dejando de lado otros campos de interés para el estudio de las ecuaciones diferenciales y los métodos de resolución.

---

[5] Rocha, R., Luiz S., Martins, F. y Romuel, F. (2006). A methodology for the teaching of dynamical systems using analogous electronic circuits, Manchester: *International Journal of Electrical Engineering Education.*

1.2. Enseñanza-Aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales con uso de la tecnología.

1.2.1 Los Sistemas Cognitivos Artificiales en la Enseñanza de la Matemática[6]

El autor presenta la implementación de los sistemas cognitivos artificiales en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La justificación teórica de tal implementación se hace desde el punto de vista de la matemática y la educación matemática como ciencias y la ciencia cognitiva, de las cuales emerge el modelo computacional-representacional de la matemática (MCRMAT). Este modelo de las matemáticas da cuenta del por qué los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas pueden y deben ser mediados a través de los sistemas cognitivos artificiales, que son entendidos como herramientas de reorganización cognitiva. La comprensión que se alcance sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas proporcionadas por los sistemas cognitivos artificiales es importante para la enseñanza de la matemática. En los ejemplos que se presentan en este trabajo se ha empleado software licenciado como Matlab y Mathcad.

El artículo enfatiza la importancia de los sistemas cognitivos artificiales para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general, tomando como un caso particular las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos. Como se observa, el estudio de las ecuaciones diferenciales se emplea como un medio mas no como fin,

[6] Toro, L. y Ortiz, H. (2012). Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de la matemática. Bogotá: Universidad de la Sabana.

se emplea como ejemplo simplemente por conveniencia, pero no ahonda en la solución y comprensión de los problemas propios de las ecuaciones diferenciales.

1.2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias con Máxima[7]

En este trabajo se presentan soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el uso del paquete libre Maxima. Los comandos básicos de solución de este paquete se explican mediante una serie de ejemplos representativos de un curso tradicional, donde quedan expuestas algunas de sus fortalezas y debilidades como herramienta para la enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias. Además, se incluyen unas indicaciones básicas para iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales mediante el uso de Maxima y, de esta manera, beneficiarse con la utilización de esta herramienta computacional.

El artículo se limita a estudiar las bondades y desventajas del programa en el estudio de las ecuaciones diferenciales, pero no aporta elementos adicionales que sean propios del estudio de las ecuaciones diferenciales ni al proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.2.3 Introducción a los sistemas dinámicos, un abordaje práctico con Maple[8]

Este libro aborda la física de los sistemas dinámicos para un curso en el período 2003/2004, no se propone como un curso tradicional que siga el método axiomático de la física o la matemática. El texto surge del estudio de los sistemas dinámicos como

[7] Ortigoza, C. (2009). Ecuaciones diferenciales ordinarias con máxima, México: Redalyc.
[8] Villate, J. (2007). *Introducción a los sistemas dinámicos, un abordaje practico con Maple*. Porto: Facultad de Ingeniería Universidad de Porto.

una nueva área de investigación, inicia con sistemas lineales, pasando por los no lineales y en capítulos subsiguientes trata algunas características de los fenómenos caóticos. A lo largo del documento se hace uso de Maple para realizar diversos cálculos y gráficos que aportan a la comprensión de los problemas propuestos.

El texto también explora algunos temas de la dinámica de los sistemas, en forma activa y apropiada. A pesar de ser un documento muy completo que trata los sistemas dinámicos de una manera adecuada, no profundiza en el análisis de las diferentes soluciones geométricas, de modo que puedan caracterizarse y extraer conclusiones que enriquezcan el aprendizaje y la comprensión por parte de los estudiantes.

En la actualidad los recursos tecnológicos y computacionales hacen parte importante de nuestra experiencia cotidiana; no obstante, su importancia y necesidad en algunos campos son subutilizados. Los computadores nos benefician por la rapidez para calcular, la generación de gráficas y más precisamente los numerosos programas para estudiar las matemáticas, que no solo amplían nuestro horizonte de conocimiento, sino que nos permiten estudiar eficientemente ciertos temas, en este caso las ecuaciones diferenciales.

En esta investigación, se propone el uso de Maple® por ser un programa de fácil manejo, que además cuenta con ayuda en línea y la experiencia de otras investigaciones que se han apoyado en Maple®.

Un temor común en los docentes tiene que ver con que, al facilitar el uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes tiendan a restar importancia a los contenidos y procedimientos que están implícitos en las tareas realizadas por el computador, de manera que no les interese aprenderlas y ponerlas en práctica de manera explícita.

1.2.4 Student's Lab Assignments in PDE Course with MAPLE®[9]

Algunos paquetes computacionales se han utilizado intensivamente en muchos cursos de matemáticas, por ejemplo para resolver problemas de valor inicial y en la frontera en ecuaciones diferenciales. Muchos de estos paquetes como FORTRAN, PASCAL, MATLAB, MATHEMATICA y MAPLE® fueron utilizados por estudiantes en trabajos de laboratorio con el fin de acelerar la comprensión de algunos conceptos y mejorar su habilidad computacional.

Este estudio encontró que MAPLE® fue el programa más eficaz en la resolución, así como para comparar y visualizar soluciones numéricas y analíticas en las ecuaciones diferenciales. La discusión se centra en un proyecto computacional empleado para resolver, comparar y visualizar la solución de la ecuación de onda, y la ecuación de Laplace.

Para hacer la clase más eficiente, se organizaron los estudiantes con base en sus principales habilidades teóricas mezclando estudiantes de matemática pura y computacional. Como resultado, se encontró un incremento de la atmósfera (Lesh, Galbraith, Haines, & Hurford, 2013) académica entre los estudiantes. También se logró que los estudiantes tuvieran nuevas experiencias y percepciones sobre el modelado,

---

[9] Ponidi, B. (1999). Student's Lab Assignments in PDE Course with MAPLE, Indonesia: Universidad de Indonesia.

los métodos de resolución, la visualización y la verdadera interpretación de los problemas de las ecuaciones diferenciales.

Este artículo se enfoca básicamente en un curso tradicional de ecuaciones diferenciales haciendo uso de MAPLE® lo que posibilita un mayor ambiente académico entre los estudiantes, pero no se mencionan los sistemas dinámicos ni el enfoque cualitativo para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

1.3. Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.

1.3.1 Reform in Differential Equations: A Case Study of Students' Understandings and Difficulties.[10]

Este estudio de caso investigó los entendimientos y dificultades de seis estudiantes con los métodos cualitativos y numéricos para el análisis de ecuaciones diferenciales. Desde una perspectiva cognitiva individual, se encontraron los siguientes obstáculos que influyen en el desarrollo del entendimiento de los estudiantes: El dilema de la función, la tendencia a generalizar en exceso, la interferencia de las nociones informales o intuitivas, y la complejidad de las interpretaciones gráficas.

Desde una perspectiva sociocultural, los entendimientos de los estudiantes se vieron limitados por el uso de tecnología que fue desvinculada del proceso de aprendizaje, la instrucción que no buscó dar explicaciones a los alumnos, y las interacciones en el aula que implícitamente establecieron justificaciones basadas en procedimientos matemáticos.

---

[10] Rasmussen, C. (1998). Reform in Differential Equations: A Case Study of Student´s Understandings and Difficulties, San Diego: ERIC.

Un resultado sorprendente fue la manera en que los estudiantes aprendieron una técnica gráfica para el análisis de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden como una habilidad aislada, desconectada del análisis del comportamiento a largo plazo de las soluciones cercanas. La obtención de una respuesta se valoró más que los procesos involucrados en la obtención de la misma. También se resolvieron problemas donde examinaron la gráfica de ecuaciones diferenciales con el fin de clasificar los puntos de equilibrio.

Es bastante típico de la enseñanza tradicional valorar más las respuestas que los procedimientos y estrategias empleadas para obtenerlas. Este modo tradicional de enseñanza, sin embargo, es visto como un factor que contribuye a las dificultades y las formas inconexas de pensamiento de los estudiantes.

En el artículo se hace énfasis en la manera como se emplean métodos gráficos para estudiar las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales, pero es evidente que los estudiantes no poseen los elementos suficientes para establecer conexiones y comprender que los métodos gráficos son una alternativa para visualizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales y complementar los métodos analíticos, o simplemente tener una buena aproximación a la solución de una ecuación diferencial.

1.3.2 Understanding the Use of Two Integration Methods on Separable First Order Differential Equations[11]

Este artículo presenta evidencia de tres interacciones de los estudiantes en la que se utilizan dos métodos comunes de solución para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Se describen estas situaciones utilizando un lenguaje particular; por ejemplo, se hace alusión a "los juegos epistémicos" que son el conjunto de los procedimientos utilizados para resolver un problema. Tales procedimientos se conciben como vías particulares de soluciones, especialmente a través de gráficos que contienen conceptos y determinados procedimientos que conducen a cierta solución.

Usando la transcripción de datos, se definen varios recursos procesales, se muestra cómo se pueden organizar en dos facetas de un juego epistémico descrito previamente, y producir gráficos que permiten la visualización de los juegos epistémicos. Al representar dos procedimientos matemáticos correctos, se ayuda a aclarar los tipos de pensamiento que los estudiantes emplean cuando aprenden a aplicar el razonamiento matemático a la física e ilustrar cómo un "fracaso" al tratar de conectar dos ideas a menudo dificulta la resolución de problemas exitosamente por parte de los estudiantes.

El anterior estudio se enfoca básicamente en establecer como dos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de variables separables generan cierto tipo de pensamiento y como este tipo de pensamiento no es suficiente para que los

[11] Katrina, E. Black, M. y Wittmann, C. (2012). Understanding the use of two integration methods on separable first order differential equations. Maine: University of Maine.

estudiantes puedan resolver problemas con éxito. Como se aprecia en esta investigación se restringe a cierto tipo de ecuaciones diferenciales y no trata los sistemas dinámicos ni tampoco es muy detallado en el trato de las ecuaciones diferenciales desde un punto de vista cualitativo.

1.3.3 Evolution of the Modern ODE Course[12]

Este articulo muestra a grandes rasgos, cual ha sido la evolución de los cursos de ecuaciones diferenciales en algunas universidades de los Estados Unidos y las más representativas de otros países.

Empieza por relatar cómo antes de 1980, las ecuaciones diferenciales ordinarias ocasionalmente se enseñaban como un curso independiente de las matemáticas básicas, dentro las que se cuentan al cálculo y álgebra lineal, y normalmente requieren dos años completos para su enseñanza.

Las ecuaciones diferenciales hacían parte de los cursos de matemáticas básicas en ciertas ocasiones, sobre todo en lo que se refiere a las técnicas para encontrar fórmulas de solución, especialmente para sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Las gráficas de las soluciones se hacían con lápiz y papel y algunos modelos simples como el crecimiento de poblaciones y la caída de los cuerpos formaban parte del curso.

Los cursos de ecuaciones diferenciales hacían parte de los cursos de matemáticas básicas, y en ellos se hacía hincapié en la teoría más que en las aplicaciones. Por

[12] West, B., Borrelli, R. y Moore, L. (2012), Evolution of the Modern ODE Course. Recuperable el 15 de marzo de 2014 en la URL: www.codee.org.

ejemplo, los estudiantes de la Universidad de Harvey Mudd (HMC) tomaban de manera obligatoria una base común de matemáticas para los primeros dos años, y no recibían ningún curso de ecuaciones diferenciales independiente de dicha base.

El único libro de texto empleado para el curso entero de matemáticas era el que la universidad editaba, cuyo autor principal fue el presidente fundador del departamento de matemáticas.

Se ofertó un curso de ecuaciones diferenciales que hacía parte de las matemáticas superiores o avanzadas, en el cual se utilizaron algunos libros de texto como el escrito por Edward L. Ince (publicado originalmente en 1926), Teoría de Ecuaciones Diferenciales escrito por Earl Coddington y Norman Levinson (publicado originalmente en 1955 por McGraw-Hill), Ecuaciones Diferenciales Ordinarias escrito por Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota (publicado por primera vez en 1962), Ecuaciones Diferenciales escrito por Lester R. Ford (publicado por McGraw-Hill en 1933).

Pero con la aparición y la disponibilidad inmediata de las computadoras en los 1970, en todos los Estados Unidos, las cosas cambiaron. Se comenzaron a diseñar algoritmos para encontrar aproximaciones a la solución de algunos problemas de valor inicial y codificaciones que corrían en diferentes plataformas. Muchos de estos algoritmos eran de código abierto producidos con la ayuda de la National Science Foundation y fueron archivados en el sitio web Netlib. Un gran número de estos algoritmos fueron cifrados en FORTRAN. Un trabajo clásico sobre la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias fue escrito por Larry Shampine (Southern Methodist University).

Algunos paquetes computacionales empleados para solucionar problemas de ecuaciones diferenciales empezaron a surgir masivamente lo que evitó que los estudiantes tuviesen que hacer gráficas con lápiz y papel. Resolver problemas en computadora contribuyó a experimentar con el comportamiento de las soluciones al modificar algunos parámetros de las ecuaciones diferenciales. Además, los libros de texto comenzaron a incluir experimentos o laboratorios que permitieron a los estudiantes trabajar con ecuaciones diferenciales empleadas en modelos matemáticos. Algunos profesores comenzaron a diseñar laboratorios abiertos denominados proyectos los cuales permitieron a los estudiantes trabajar en equipo para crear y validar ciertos modelos matemáticos de situaciones físicas.

Del mismo modo se hace una semblanza de universidades del Líbano, Australia y Alemania, para finalmente comentar algunos de los libros de texto más representativos y empleados en los cursos de ecuaciones diferenciales, así como otros recursos tecnológicos empleados, y el articulo concluye con una proyección de lo que se espera en adelante tenga que ver con la evolución del estudio de las ecuaciones diferenciales.

Este artículo es interesante porque cubre casi completamente lo que ha sido el devenir de los cursos de ecuaciones diferenciales desde 1970, así como los recursos bibliográficos y tecnológicos empleados, pero no entra en detalles acerca del proceso de aprendizaje ni particulariza en experiencias de aula respecto al enfoque cualitativo y sus posibles beneficios para la comprensión de los temas del curso.

1.3.4 Exploring the Phase Space of a System of Differential Equations: Different Mathematical Registers[13]

El autor trata sobre la necesidad de comprender concretamente un modelo, de manera que la interacción entre visualización y conceptualización sea un tema relevante. Sin embargo, al carecer de un marco teórico adecuado, las técnicas de aprendizaje no son tan fructíferas. Después de todo, al salir de la universidad, el nuevo profesional seguramente debe resolver situaciones en las que no aplicará inmediatamente lo que aprendió durante los "años de formación". En la vida profesional, debe enfrentar el problema y no puede evitarlo. Por lo tanto, debe resolverlo con una buena base teórica junto con la intuición y técnicas aprendidas.

El equilibrio entre el uso de representaciones simbólica y gráfica puede ser muy diferente de un estudiante a otro. Diferentes usuarios hacen diferentes usos de la herramienta tecnológica. Se hace énfasis especialmente en el balance entre el uso de representaciones simbólicas y la representación gráfica hacia la construcción del conocimiento. Se investiga el papel complementario de lo visual y los registros simbólicos. También existe un especial interés en las funciones cognitivas del pensamiento matemático en relación con registros de representación.

Este artículo describe y analiza la representación simbólica y visualización gráfica de la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales, utilizando un sistema de álgebra computacional. Evidencia como la solución simbólica y la

[13] Dana-Picard, T. y Kidron, I. (2007). Exploring The Phase Space Of A System Of Differential Equations: Different Mathematical Registers. Jerusalem: College of Technology.

representación gráfica se complementan entre sí. De modo que la representación gráfica ayuda a entender el comportamiento de la solución simbólica. Sin embargo, es necesaria la solución simbólica y su análisis para entender la representación gráfica y superar las restricciones que limitan el software.

Como se aprecia este artículo se dedica exclusivamente a estudiar las limitaciones de los paquetes computacionales para resolver y entender ciertas soluciones a algunos sistemas de ecuaciones diferenciales y las dificultades que esto conlleva para la comprensión de las matemáticas.

1.3.5 Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting[14]

El autor examina si los estudiantes consideran los campos de pendientes (o direcciones) como medio para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y estudia el éxito de los estudiantes en la lectura de la información de estos campos. También investiga las capacidades de los estudiantes en la conversión de información simbólica a las gráficas y viceversa. El escenario es un curso de cálculo en tercer semestre donde el enfoque visual fue altamente enfatizado; también se consideran los computadores como una parte integral del proceso de instrucción.

A la hora de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias separables y lineales, todos los estudiantes primero intentaron el enfoque cuantitativo. Por lo tanto, a pesar de que el instructor orientó el curso en una dirección cualitativa, la idea de la solución es

[14] Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. New York: Lebanese American University.

puramente analítica para todos los estudiantes. Con respecto al enfoque geométrico, sólo dos estudiantes mostraron aprobación, pero todos los demás tenían algunas reservas. En cuanto a la elaboración de las soluciones en los campos de pendientes, la lectura de la información gráfica de las soluciones, y su clasificación, también dos estudiantes tuvieron éxito en esta tarea.

En conclusión, los estudiantes necesitan más tiempo para asimilar la idea de pensar visualmente. A pesar de que se supone que los estudiantes han aprendido esta habilidad, no han demostrado que en realidad la han adquirido. Queda por ver si experimentarán en el futuro un cambio de actitud a favor de la visualización cuando se resuelve un problema que se puede hacer con más de un método. Esto no quiere decir que el enfoque analítico es obsoleto. Por el contrario, en muchos casos, ambos enfoques deben ir de la mano. Idealmente, los estudiantes deben llegar a darse cuenta de que el desarrollo de sus habilidades de visualización es necesaria para obtener un panorama más amplio de algunos problemas matemáticos.

Este artículo se asemeja bastante a la idea del proyecto de investigación propuesto y da bastantes luces acerca del enfoque cualitativo para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, pero sin embargo carece del enfoque epistemológico cuasi empírico que se propone para el desarrollo del proyecto en cuestión.

1.3.6 Students' Participation in a Differential Equations Class: Parametric Reasoning to Understand Systems[15]

Esta tesis evidencia que los sistemas dinámicos como un área de las matemáticas están creciendo en importancia. Además, las nuevas tecnologías permiten a los matemáticos y científicos modelar el mundo real con sistemas de ecuaciones que se interrelacionan mediante cambios en el tiempo. Uno de los objetivos de esta tesis es revelar los resultados de una investigación sobre cómo los estudiantes desarrollan el uso del razonamiento paramétrico como base para la comprensión de los sistemas dinámicos en cierta clase de ecuaciones diferenciales orientada a la indagación.

La necesidad de entender cómo razonan los estudiantes en forma paramétrica y como con el tiempo entienden este nuevo aspecto de las matemáticas es de gran importancia para este estudio. Se evidencia además que los estudiantes ya tienen ciertos conocimientos de tiempo y tasa de cambio de experiencias anteriores y ellos usan esto para construir sus concepciones e interpretaciones de soluciones a los sistemas de ecuaciones diferenciales. El estudio también ofrece estudios de caso de dos estudiantes quienes llevan a cabo actividad matemática a medida que aprenden los sistemas de ecuaciones diferenciales. Por último, el estudio utiliza un nuevo concepto de "actividad matemática avanzada" y las prácticas de simbolización matemática, algoritmación y experimentación que documentan cómo los estudiantes se enculturan en una comunidad matemática más grande.

[15] Allen, K. (2006). Student´s Participation In A Differential Equations Class: Parametric Reasoning To Understand Systems. Indiana: Purdue University.

La tesis se fundamenta en el estudio de las ecuaciones diferenciales a partir del razonamiento paramétrico, que no es otra cosa que observar cómo cambia el comportamiento de un sistema conforme varía un parámetro y como los estudiantes emplean sus conocimientos previos para dar soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales llevando a cabo "actividad matemática avanzada".

1.3.7 Students' Retention of Mathematical Knowledge and Skills in Differential Equations[16]

Este artículo investiga la retención de los conocimientos y las habilidades matemáticas de los estudiantes en dos diferentes cursos de ecuaciones diferenciales. Se aplicaron test y post test después de un año a los alumnos en investigación orientada y en las clases tradicionales. Los resultados muestran que los estudiantes de la clase de investigación orientada conservaron el conocimiento conceptual, como se ve por su desempeño en los problemas de modelado, y mantuvieron igual competencia en problemas procedimentales, en comparación con los estudiantes del curso de enseñanza tradicional. Los resultados de este estudio apoyan la afirmación de que la enseñanza por comprensión conceptual puede conducir a una retención de más largo plazo del conocimiento matemático.

[16] Kwon, O., Rasmussen, C. y Allen, K. (2005). Student's Retention of Mathematical Knowledge and Skills in Differential Equations. San Diego: San Diego State University.

1.3.8 Conceptualizing the Realistic Mathematics Education Approach in the Teaching and Learning of Ordinary Differential Equations[17]

Este artículo relata cómo varias iniciativas de reforma curricular recientes en ecuaciones diferenciales han disminuido el énfasis tradicional en técnicas para encontrar soluciones exactas a las ecuaciones diferenciales y el aumento de la utilización de la tecnología informática para incorporar métodos cualitativos y numéricos de análisis.

Sin embargo, resultados de la investigación sobre el pensamiento y la comprensión de las ecuaciones diferenciales de los estudiantes siguen siendo mínimos. A través de la perspectiva de las matemáticas realistas para el aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, esta investigación muestra que cuando los estudiantes se dedican a la instrucción que apoya la reinvención de las representaciones convencionales fuera de las experiencias de matematización, surgen campos de pendiente y gráficos de las funciones de soluciones de sus actividades matemáticas.

En concreto, los estudiantes de Corea podrían adaptarse más fácilmente por sus habilidades manipulativas bien desarrolladas experimentalmente a situaciones reales con la incorporación del diseño instruccional de las matemáticas realistas. Además, esta investigación demuestra cómo el símbolo y su uso pueden ser provechosos para promover formas sofisticadas de razonar de los estudiantes con conceptos matemáticos en ecuaciones diferenciales. Esta investigación también implica que se

[17] Kwon, O. (2002). Conceptualizing the Realistic Mathematics Education Approach in the Teaching and Learning of Ordinary Differential Equations. Seoul: Ewha Womans University

debe investigar y adaptar enfoques de principios que han sido útiles para la reforma en las matemáticas de K-12 al conceptualizar la reforma de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario.

La investigación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias es un fenómeno relativamente reciente, pero la investigación de las ecuaciones diferenciales es aún más reciente. Los problemas en la educación matemática de pregrado no se resuelven con sólo escribir o adoptar nuevos libros de texto. Los problemas están relacionados con las formas de trabajo de los estudiantes, los modos de interacción entre profesores y estudiantes universitarios, así como los métodos y contenidos que se evalúan a los estudiantes. Las perspectivas en este estudio pueden complementar la creciente base de investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en ambos aspectos prácticos y teóricos.

Este artículo se interesa no sólo por las matemáticas del pregrado sino también por las de secundaria, que es donde comienzan las dificultades para muchos estudiantes. Además se hace énfasis en cómo el enfoque de las matemáticas realistas es importante para el análisis cualitativo en la comprensión de las ecuaciones diferenciales.

1.3.9 Students' Solution Strategies to Differential Equations Problems in Mathematical and Non-Mathematical Contexts[18]

Este estudio se centró en la comprensión de los estudiantes de pregrado de dos conceptos empleados en ecuaciones diferenciales, la de los campos de pendientes y soluciones de equilibrio, ya que resuelven problemas complejos en contextos matemáticos y no matemáticos.

El término problema complejo se refiere a un problema que requiere que quien lo vaya a resolver considere los conceptos de campos de pendiente y soluciones de equilibrio juntos y no como hechos aislados. Los problemas en un contexto matemático se expresan en términos puramente matemáticos. Por el contrario, los problemas en un contexto no-matemático se enmarcan en lenguaje corriente y aplicaciones.

También fueron evaluadas las habilidades de los participantes para resolver problemas que implican diferentes tipos de comprensión de los conceptos de campos de pendiente y soluciones de equilibrio por separado. Estos últimos problemas se refieren a problemas muy simples, los cuales fueron presentados únicamente en contextos matemáticos Las preguntas específicas que guían la investigación fueron:

1) ¿Los problemas complejos varían según el contexto (matemático, no matemático)?

2) ¿Cuándo se considera un problema complejo en un contexto matemático y no matemático, están propensos los participantes a resolver el problema correctamente en un contexto más que en el otro?

---

[18] Upton, S. (2006), Student's Solution Strategies To Differential Equations Problems In Mathematical And Non-Mathematical Contexts. Easton: Stonehill College

3) ¿El desempeño en problemas sencillos predice el rendimiento en problemas complejos?

Con el fin de investigar las tres preguntas de investigación, se diseñó una prueba escrita que consiste en cuatro problemas complejos y seis problemas sencillos, tres pertenecientes a campos de pendiente y tres pertenecientes a las soluciones de equilibrio. Dos de los problemas complejos se encontraban en contextos matemáticos y para cada uno de éstos, hubo un problema correspondiente en un contexto no matemático diseñado para ser idéntico en términos de su solución y los requisitos matemáticos.

Este instrumento se administró a noventa y un participantes procedentes de tres cursos de ecuaciones diferenciales. De aquellos participantes, trece fueron entrevistados para proporcionar detalles para interpretar el rendimiento del instrumento y las entrevistas mostraron que los participantes realizan significativamente mejor los problemas complejos en contextos no matemáticos que en contextos matemáticos. No se encontró una relación significativa entre rendimiento en un problema en un contexto matemático y el rendimiento en el problema isomorfo en el contexto de crecimiento de la población, pero no se encontró una relación significativa entre un par diferente de problemas isomorfos, uno en un contexto matemático y el otro en el contexto del aprendizaje.

Sin embargo, para todos los problemas complejos, los participantes ilustran una preferencia por métodos analíticos en lugar de geométricos, incluso cuando el enfoque geométrico era un método más eficiente de solución. Aunque no se encontró que el rendimiento en problemas simples fuese un fuerte predictor de rendimiento en problemas complejos, los problemas simples resultaron suscitar a los participantes dificultades relacionadas con los aspectos de campos de pendientes y soluciones de equilibrio.

Por ejemplo, se encontró que los participantes tienden a generalizar en exceso la noción de solución de equilibrio como cualquier línea recta y que existe en todos los valores donde una ecuación diferencial es igual a cero. Los participantes también identificaron los campos de pendiente como la determinación de una solución de equilibrio.

El artículo se enfoca particularmente en los campos de pendiente y las soluciones de equilibrio para evaluar en qué manera contribuyen a la solución y comprensión de problemas en contexto matemáticos y no matemáticos. Es importante considerar los demás elementos del enfoque cualitativo para que los estudiantes logren una mejor comprensión de las soluciones.

1.3.10 Qualitative Problem Solving Strategies of First Order Differential Equations: The Case of Amy[19]

Este artículo relata como una estudiante de nombre Amy demostró una sólida comprensión y capacidad de analizar cualitativamente ecuaciones diferenciales de primer orden y un concepto fuerte y coherente de estabilidad. Esto se debía a su adecuada comprensión conceptual y gráfica de la derivada como pendiente o tasa de

[19] Rasmussen, C. (2007). Qualitative Problem Solving Strategies of First Order Differential Equations: The Case of Amy. Maryland: University of Maryland.

cambio, su conocimiento previo del modelado de la población, y el manejo de Mathematica. A pesar de su sólida comprensión conceptual de la derivada y del modelado con ecuaciones diferenciales, surgieron varias dificultades como:

Generalización del término autónoma para incluir ecuaciones diferenciales de primer orden que sólo implican la variable independiente.

Generalización excesiva de la estrategia utilizada para dibujar y/o interpretar los campos de dirección de las ecuaciones diferenciales autónomas. Esto la llevó a la "teoría de la asíntota vertical".

Una interpretación incorrecta del comportamiento de las soluciones basadas en el campo de direcciones. Una posible explicación de esta interpretación incorrecta es la idea errónea de que una vez las soluciones parecen ser estables, o aproximarse a una solución de equilibrio de manera asintótica, ésta se mantendrá cercana a la solución de equilibrio.

Además de descubrir algunas de las posibles dificultades, este estudio también planteó más preguntas:

- ¿En qué medida estas dificultades se resisten a la instrucción y otros planes de estudio?
- ¿Qué tan extendida está la idea errónea de que una solución que se acerca a una solución equilibrio de una manera asintótica debe permanecer asintótica a la solución de equilibrio? ¿El uso de líneas de fase fomenta esa idea errónea?

- ¿Qué papel debe desempeñar el tiempo de clase en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para interpretar y utilizar las distintas representaciones gráficas que ahora son tan fácilmente disponibles con tecnología?
- ¿Qué caracteriza a la comprensión y las dificultades de los estudiantes que no tienen inicialmente una sólida comprensión conceptual y gráfica de la derivada?
- ¿Qué caracteriza la comprensión y las dificultades de los estudiantes que no tienen inicialmente conciencia del poder de las ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos del mundo real?

El creciente número de planes de estudios innovadores, nuevas teorías del aprendizaje, y la disponibilidad de la tecnología ofrecen una extraordinaria oportunidad para profundizar en la comprensión de los estudiantes de ecuaciones diferenciales, para proporcionar una visión sobre el comportamiento de soluciones, y para dar a los estudiantes una idea de cómo el tema es relevante para otras disciplinas.

1.3.11 New directions in differential equations a framework for interpreting students' understandings and difficulties[20]

El propósito de este trabajo es ofrecer un marco para la interpretación de la comprensión de los estudiantes, así como las dificultades con respecto a las ideas matemáticas centrales para nuevas direcciones en las ecuaciones diferenciales.

Estas nuevas direcciones buscan guiar a los estudiantes en un modo de pensar más interpretativo para mejorar su capacidad de analizar de forma gráfica y numérica las

[20] Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations A framework for interpreting student's understandings and difficulties. Hammond: Purdue University Calumet.

ecuaciones diferenciales. El marco mostrado aquí es el resultado de la investigación en profundidad acerca de los entendimientos de seis estudiantes a través de una serie de tareas fundamentadas, entrevistas y observaciones de clase.

Los dos temas principales de la estructura, son la función-como-solución dilema, las intuiciones y las imágenes de los estudiantes, se extienden a investigaciones anteriores sobre la cognición de los estudiantes en el nivel secundario para el dominio de ecuaciones diferenciales y reflejan el creciente reconocimiento de los análisis para situar los aprendizajes de los estudiantes dentro de los ambientes de aprendizaje.

Para las nuevas áreas de interés, tales como las ecuaciones diferenciales, bosquejar la comprensión de importantes ideas matemáticas de los estudiantes puede ser una parte importante del currículo y el diseño instruccional que busca perfeccionar y construir formas de pensar en los estudiantes.

1.3.12 Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations[21]

Este documento ofrece una visión general del proyecto sobre investigación orientada en ecuaciones diferenciales, así como los principales resultados de un estudio que comparó las creencias de los estudiantes, las habilidades y la comprensión de las clases con enfoques más convencionales.

[21] Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. Seoul: Asia Pacific Education Review.

El proyecto capitaliza avances dentro de las matemáticas y la educación matemática, incluida la teoría de diseño instruccional de la Educación Matemática Realista y la negociación de significado social. Los principales resultados del estudio comparado no encontraron diferencias significativas entre estudiantes del proyecto y un grupo de estudiantes de control, sin embargo, en una evaluación de rutina respecto a las habilidades se percibió una diferencia significativa a favor de los estudiantes del proyecto en cuanto a la evaluación de la comprensión conceptual. Teniendo en cuenta estos resultados alentadores, las bases teóricas del enfoque innovador pueden ser útiles en términos más generales en la reforma de la educación matemática de pregrado.

1.3.13 Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts[22]

La investigación sugiere que los estudiantes encuentran difícil pensar en diferentes modos (es decir, analítica y gráficamente) al mismo tiempo, también podría ayudar a explicar por qué los estudiantes normalmente no usan múltiples modos de razonamiento frente a los problemas. Por lo general sólo el 20% de los estudiantes de ingeniería usó diagramas como ayuda para la resolución de problemas en los exámenes, y se ha encontrado que incluso los mejores estudiantes utilizan gráficos en solo un cuarto de sus intentos de solución de una prueba con problemas de cálculo no rutinarios.

[22] Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K. y Burtch, M. (2006). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. Seoul: Asia Pacific Education Review.

Un aspecto de la comprensión conceptual es la capacidad de los estudiantes en contextos de modelado para interpretar los términos de una ecuación diferencial ordinaria y traducir una descripción física en una descripción matemática. Estas dos habilidades son el foco de esta investigación. Estas habilidades son importantes ya que son necesarias si los estudiantes han de razonar adecuadamente acerca de las soluciones y en última instancia si se van a desarrollar las habilidades en el modelado de los mismos.

Del mismo modo, las dificultades de los estudiantes para distinguir correctamente entre constantes y variables, y entre variables dependientes e independientes en contextos de tasas de cambio y la comprensión del estudiante de la cinemática en los gráficos con respecto a la velocidad y aceleración, revelan que muchos no distinguen claramente entre distancia, velocidad y aceleración. Además, se ha encontrado que estos errores sistemáticos no cambian fácilmente por la instrucción tradicional, y hay un consenso general de que la enseñanza tiene que ser consciente de estos errores sistemáticos para que puedan ser efectivamente abordados.

Sin embargo, hay una serie de diferentes formas de concebir "errores" de los estudiantes. Una concepción que parece particularmente relevante para el presente estudio, es la de un *cambio de paradigma* o *conocimiento en transición*. Postulado por Rasmussen, parte del contexto de ecuaciones algebraicas donde las soluciones son constantes, a la de ecuaciones diferenciales ordinarias donde las soluciones son funciones, lo cual representa un cambio de paradigma para los estudiantes. En consecuencia, al igual que con los cambios de paradigmas, se puede esperar que algunos estudiantes tengan dificultades.

Según Perkins, la naturaleza de la cognición humana conduce a cuatro modos predeterminados de pensar:

Pensamiento difuso: lo demuestra la incapacidad de discriminar claramente entre términos estrechamente relacionados; y generalizar o tener condiciones de aplicabilidad deficiente.

Pensamiento apresurado: ejemplificado por una decisión demasiado rápida en una estrategia de solución o solución sobre la base de una revisión superficial de las características más evidentes de un problema, en lugar de en un procesamiento profundo. Esto por lo tanto representa una debilidad metacognitiva.

Pensamiento reducido: en relación con el pensamiento apresurado, el pensamiento reducido también representa una debilidad meta-cognitiva que se ejemplifica por una falta de consideración de perspectivas alternativas o estrategias de solución.

Pensamiento expandido: puede ser útil en una lluvia de ideas, pero es un problema cuando se llega a perder la pista de lo que se está haciendo. Esto puede representar un fracaso para desarrollar un control eficaz de resolución de problemas y estrategias de seguimiento.

Este artículo es interesante en la medida en que caracteriza de manera amplia y concreta, algunos de los aspectos más relevantes relacionados con la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales basada en el análisis geométrico, haciendo un énfasis especial en las dificultades que se presentan en el complejo proceso del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

1.3.14 Does writing help students learn about Differential Equations?[23]

El autor señala como en un primer curso de ecuaciones diferenciales empleando el método de preparación / prueba / examen estándar, y en otro que tenía un tercio de las actividades sustituidos por tareas de escritura, los resultados de los exámenes comunes mostraron que la escritura no parecía mejorar el rendimiento en la prueba. Sin embargo, los cuestionarios revelaron que los estudiantes en general sienten que la escritura mejora su comprensión y la prefieren a tareas adicionales.

La investigación dio lugar a las siguientes preguntas:

¿Las tareas de escritura en las clases de matemáticas realmente ayudan a los estudiantes a aprender matemáticas? ¿Los estudiantes creen que escribir les ayuda a aprender? ¿A los estudiantes les gusta escribir? ¿Los estudiantes prefieren escribir que hacer más tareas?

La escritura no parece mejorar el rendimiento en la prueba, aunque el grupo que escribió tenía medias ligeramente superiores en los exámenes. Los estudiantes generalmente sentían que la escritura hace mejorar su comprensión, una idea apoyada por las impresiones del instructor del experimento. También se concluye que los estudiantes prefieren escribir que hacer tareas adicionales, además comentan que prefieren escribir, porque esta actividad ayudó a elevar su promedio. A tres estudiantes les gustaría haber tenido más tarea, aunque, por supuesto nadie les dijo que no podían hacer algo adicional.

---

[23] Schurle, A. (1991). ¿Writing Help Students Learn About Differential Equations? Indiana: Rose-Hulman Institute of Technology.

En este artículo se relata como la escritura puede ser un medio para afianza los aprendizajes, pero dista mucho de lo se pretende llevar a cabo en la presente investigación.

1.3.15 Understandings of Solutions to Differential Equations through Contexts, Web-Based Simulations, and Student Discussion[24]

Este estudio describe un enfoque para la incorporación de simulaciones y debates en clase en un curso de ecuaciones diferenciales y los efectos posteriores sobre las actitudes de aprendizaje del estudiante y los resultados. Los estudiantes lograron beneficios modestos en el ámbito de la conceptualización y aplicación de ideas sobre soluciones a ecuaciones diferenciales en este ambiente de aprendizaje. Implicaciones del estudio incluyen la identificación de logros específicos en relación a los ambientes de aprendizaje mediados por computador y algunas recomendaciones utilizando simulaciones para apoyar el desarrollo conceptual.

Estos elementos sugieren que se lograron avances importantes en cuanto al aprendizaje de los estudiantes para interpretar los significados involucrados en las soluciones de las ecuaciones diferenciales, y no sólo la capacidad de resolver una ecuación. Por lo tanto, estos datos sugieren que los estudiantes desarrollaron o empezaban a desarrollar comprensiones relacionales de ecuaciones diferenciales y sus soluciones en el contexto de la Web, orientado a la aplicación de instrucciones. Además, los elementos de prueba no se basaban en contextos o aplicaciones para

[24] Slavit, D., Faro, T. y Cooper, K. (2002). Understandings of Solutions to Differential Equations Through Contexts, Web-Based Simulations, and Student Discussion. Recuperable el 02 de febrero de 2014 en la URL: http://www.ssma.org.

apoyar un análisis del significado de la solución. Por lo tanto, estos datos ilustran beneficios en comprensiones relacionales que se han descontextualizado de simbolismos y marcos matemáticos.

1.3.16 Classroom mathematical practices in differential equations[25]

Este artículo describe los resultados de un experimento realizado en un aula durante un curso de ecuaciones diferenciales. El objetivo del artículo es presentar un análisis de las prácticas matemáticas en el aula que se llevaron a cabo durante la primera mitad del semestre incluyendo instrucción en ecuaciones diferenciales de primer orden.

Se discute e ilustra el uso del modelo de argumentación de Toulmin en el desarrollo de una técnica analítica para documentar la aparición y estabilidad de las prácticas matemáticas en el aula. Este análisis es importante porque contribuye a un cuerpo emergente de la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes en el contexto social, en particular a nivel de pregrado, donde este tipo de análisis es deficiente.

Este estudio también sirve como un caso para examinar la construcción de prácticas matemáticas en el aula en una nueva dirección y ampliar la investigación previa al documentar dos ideas teóricas: La primera destaca la complementariedad de los aspectos individuales y sociales durante el aprendizaje lo cual es muy valorado, debido a que el aprendizaje es un proceso individual y social, el uno no ocurre sin el otro. Por

[25] Stephan, M. y Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. Hammond: Purdue University Calumet.

lo tanto, se proporcionaría una muy buena descripción de la evolución del aprendizaje colectivo e individual a lo largo de una secuencia de instrucción.

La segunda idea está relacionada con el hecho de que la aparición de las prácticas matemáticas en el aula no necesariamente es secuencial en el tiempo y en su estructura. En conclusión, el análisis presentado aquí detalla el aprendizaje colectivo de un aula de orientación reformista.

El análisis no trata el aprendizaje del estudiante de manera individual. Como tal, se cuenta buena parte de una historia sobre una situación de aula y los estudiantes para desarrollar argumentos y así apoyar o refutar las ideas, la construcción de una práctica matemática en aula es una manera de documentar y caracterizar el aprendizaje del aula.

La investigación aclara aún más la noción de práctica matemática en el aula y sugiere maneras de documentar analíticamente estas prácticas. Como se aprecia, este análisis puede ser un componente importante para dar a conocer el diseño instruccional y las prácticas en el aula.

1.3.17 The Evolution of Conjecturing in a Differential Equations Course[26]

El artículo describe los cambios que se produjeron en las actividades relacionadas con las conjeturas de los estudiantes y las estrategias que el profesor emplea para facilitar estos cambios.

[26] Burtch's, M. (2004). The Evolution of Conjecturing in a Differential Equations Course. Recuperable el 02 de febrero de 2014 en la URL: https://mcli.maricopa.edu/book/export/html/1024

Durante el desarrollo de una cultura de la investigación en un curso de ecuaciones diferenciales de pregrado, se emplean las conjeturas de los estudiantes para aprender matemáticas evolucionando a lo largo de tres aspectos: la autoridad intelectual asociada a las conjeturas que se comunican, el contexto en el que se comunican y los tipos de conjeturas planteadas.

Para facilitar esta evolución, el maestro se dedica a estrategias sobre cómo iniciar discusiones con toda la clase sobre conjeturas hechas en pequeños grupos de trabajo, resaltando ciertos tipos de conjeturas, y permitiendo a los estudiantes verificar sus conjeturas. El establecimiento y la evolución posterior de conjeturas como una actividad de rutina pueden contribuir a los esfuerzos actuales para reformar la educación matemática.

1.3.18 An Exploration of Students' Conceptual Knowledge Built in a First Ordinary Differential Equations Course[27]

Este estudio tiene como objetivo analizar y documentar los tipos de conocimiento que los estudiantes universitarios evidencian para hacer frente a temas fundamentales que habían estudiado en un primer curso de ecuaciones diferenciales. Las preguntas que permitieron estructurar la investigación son:

¿Cómo interpretan los estudiantes la solución de una ecuación diferencial?

[27] Camacho, M., Perdomo, J. y Díaz, M. (2012). An Exploration Of Student's Conceptual Knowledge Built In A First Ordinary Differential Equations Course. Recuperable el 12 de enero de 2014 de la URL: http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/29/tm1521.pdf

¿Hasta qué punto usan los estudiantes conceptos matemáticos estudiados previamente para responder preguntas básicas relacionadas con ecuaciones diferenciales? Y,

¿En qué medida se privilegiaron las respuestas de los estudiantes que se basaron en cierto tipo de representación para explorar y examinar cuestiones relacionadas con ecuaciones diferenciales?

Los resultados indican que, en general, los estudiantes eligen uno de dos métodos para verificar si una función representa una solución a una ecuación diferencial dada: un método de sustitución o resolviendo directamente la ecuación dada. Se observó que no se basan en conceptos asociados con el significado de la derivada para dar sentido y hacer frente a las situaciones que involucran las ideas básicas de ecuaciones diferenciales; más bien, tienden a reducir su conocimiento a la búsqueda de un algoritmo (enfoque analítico) para resolver determinados grupos de ecuaciones.

Además, se evidencia de que los estudiantes no utilizan representaciones gráficas para explorar significados y relaciones matemáticas y experimentan dificultades para moverse de una representación a otra.

Conclusiones del capítulo 1

A pesar de que se encuentra abundante material acerca del estudio de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque cualitativo, no se ha documentado aun un curso completo de ecuaciones diferenciales desde este enfoque, teniendo como eje transversal la resolución de problemas y basado en el enfoque cuasi-empírico de las matemáticas como postura teórica.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Dentro del marco teórico para la presente investigación, se consideran los elementos que servirán de fundamentos para el modelo didáctico, y sus implicaciones en diversos órdenes. También se aborda la construcción de modelos como el punto de partida para la comprensión y solución de problemas, la modelación de situaciones problema mediante ecuaciones diferenciales, sus propiedades y características, los fundamentos teóricos del modelo epistemológico de *Pruebas y refutaciones* y de resolución de problemas, para finalmente incluir el uso de la tecnología en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Contexto Socio-Cultural

El proceso de enseñanza aprendizaje se desarrolla en un contexto determinado. A continuación, se revisan algunos elementos de ese contexto que resultan particularmente significativos para la elaboración del modelo que se propondrá.

1. Exigencias actuales de la formación matemática de un ingeniero

Después de la carrera de matemáticas y la licenciatura en matemáticas, son los ingenieros los profesionales que requieren una mayor formación y competencia en el campo de las matemáticas, debido precisamente a que su perfil profesional requiere que administren, gestionen, organicen y dirijan los diversos componentes que intervienen en la construcción y montaje de obras de ingeniería. Así mismo, se espera que un ingeniero sea competente para resolver problemas complejos de manera creativa y eficiente.

También es común que un ingeniero participe en proyectos de investigación para lograr nuevos conocimientos y productos, lo cual implica el desarrollo de nuevas técnicas y conocimientos que contribuyen a la mejora de la calidad de vida de las personas. Naturalmente esto no sería posible, si el ingeniero no desarrolla un pensamiento matemático sólido y estructurado.

2. Perfil del estudiante

Los estudiantes de las carreras de ingeniería toman el curso de ecuaciones diferenciales durante el cuarto semestre. Con edades de los 20 años en adelante, muchos de ellos especialmente los alumnos de la jornada nocturna ya trabajan como técnicos o auxiliares de ingenieros.

Este curso habitualmente se lleva a cabo durante un semestre académico que consta de 16 semanas con una intensidad horaria de 4 horas semanales para un total de 64 horas presenciales.

En los anteriores semestres estos estudiantes ya han asistido a cursos de cálculo diferencial e integral, cada uno de los cuales consta de 96 horas, y al curso de álgebra lineal con una duración de 64 horas. Estas asignaturas son prerrequisito para tomar ecuaciones diferenciales.

Como es natural, el profesor que orienta el curso de ecuaciones diferenciales espera que los estudiantes ya sepan derivar e integrar de modo aceptable las funciones más generales con los métodos más conocidos. El investigador ha observado que en la mayoría de los casos los alumnos no tienen la solvencia suficiente en estos temas para entrar con alguna fluidez a estudiar el curso de ecuaciones diferenciales.

Las anteriores consideraciones dificultan significativamente el normal desarrollo del curso en términos de los tiempos y el cubrimiento de los contenidos del mismo, lo cual obliga a que el docente genere estrategias innovadoras con el fin de motivar a los estudiantes para que aprendan bien y en corto tiempo, lo cual es posible en cierta medida.

- **Fundamentos epistemológicos**

La investigación educativa siempre está determinada por las opciones epistemológicas del investigador. En la presente investigación la postura que se asume se inscribe en la concepción de la matemática denominada cuasi empírica. Algunos de los elementos de esta concepción se describen a continuación.

Durante el siglo XX se generó una controversia como consecuencia del gran interés que se suscitó entre los científicos por establecer un fundamento sólido para las matemáticas, considerada como la precursora entre otras tantas ciencias. De esta manera surgieron algunas tendencias las cuales más tarde se convirtieron en importantes corrientes, que se propusieron como tarea la fundamentación de las matemáticas, entre las que se destacan el logicismo, el formalismo y el intuicionismo (de Losada, 2012).

Una vez que Leibniz intentó, con su interés por crear una *ars combinatoria* e idear una lengua filosófica, reemplazar el pensamiento por un cálculo similar al numérico, se abrió la puerta para que muchos otros, desde Boole hasta Frege, pusieran todo su empeño en fundamentar las matemáticas a partir de la lógica. En el mismo sentido los formalistas, teniendo como máximo representante a Hilbert, consideraron que su axiomática formal era el camino indicado para establecer los fundamentos de las matemáticas; y por otro lado, los intuicionistas encabezados por Brouwer, afirmaban que las matemáticas no son doctrina sino una actividad la cual es creada por la mente humana (de Losada, 2012).

Como consecuencia natural de tal controversia surgió a la par el interrogante de si las matemáticas se construyen o se descubren (Hersh, 1999), situación que tampoco arroja una respuesta definitiva en la comunidad matemática, por lo que parece necesario aceptar que para que las matemáticas llegaran a su proceso de maduración, ha quedado en evidencia que tienen lugar los dos hechos: por una parte, los logros alcanzados por los grandes matemáticos que en muchos casos parecen estar ahí esperando para concurrir con la sensibilidad y capacidad de algún hábil matemático para su descubrimiento; y en otros tantos casos emerge la genialidad que se hace evidente en la creación de nuevas definiciones, postulados, axiomas y paradigmas que más tarde serán complementados por nuevos hallazgos (Rosenthal & Rosenthal, 2014). En este mismo sentido Lakatos establece una dura crítica desde la epistemología de las matemáticas, en cuanto a que todos los teoremas, axiomas y leyes con los que a diario interactuamos en el quehacer matemático, no surgieron tal y como se conocen actualmente y los damos a conocer a nuestros estudiantes. Por supuesto que ellos tuvieron una génesis con una idea o conjetura que fue revisada luego por la comunidad matemática, para más tarde ser probada o refutada según fuera el caso; en el evento de ser probada esta podría pasar a formar de alguna teoría existente o fundar una nueva (Lakatos, 1978).

Por supuesto lo antes mencionado no hace alusión a otra cosa diferente que al proceso creador y de descubrimiento que tiene lugar en las matemáticas. Una vez estacionados en este lugar a partir de la tesis de Lakatos y otros, no se puede dar la espalda al proceso que se da al interior de la creación misma de las matemáticas, de modo que para todos debe quedar absolutamente claro que toda creación o descubrimiento en matemáticas inició con una atrevida conjetura, la cual en su momento pudo sonar como algo insulso e irreverente, pero que para otros se constituyó en un interesante reto.

Motivados por el germen de novedosas conjeturas muchos matemáticos se dedicaron a experimentar para tratar de ofrecer, bien sea una prueba que concluyera en la certidumbre de tal conjetura o por el contrario con la refutación de la misma (Lakatos, 1978).

Sin embargo, al mejor estilo de Lakatos, si la conjetura mostraba ciertas deficiencias o vacíos, cosa que ocurría con frecuencia, no siempre aniquilaba totalmente la conjetura, sino que por el contrario, su autor u otro matemático interesado en el tema se encargaba de dotar a tal conjetura de elementos nuevos o adicionales que la fortalecieran para hacer frente a una nueva prueba. De tal suerte que si la conjetura había visto la luz en condiciones adecuadas podría llegar a convertirse en un teorema o axioma. Sin lugar a dudas es ésta la manera en que se hacen las matemáticas (Lakatos, 1978).

Lakatos hace especial énfasis en la *heurística*, definida como un conjunto de reglas metodológicas no necesariamente forzosas, positivas y negativas, que sugieren o establecen cómo proceder y qué problemas evitar a la hora de generar soluciones y elaborar hipótesis. Por otro lado, el estilo deductivista presenta la prueba de manera aislada, artificial y autoritaria ocultando los contraejemplos que han llevado al descubrimiento, de manera totalmente opuesta al estilo heurístico que hace énfasis en la situación problema y en la lógica que articuló el nuevo concepto. En este sentido Lakatos presenta varios ejemplos en los cuales se aplica el estilo heurístico y se destacan la tesis o conjetura primitiva, la antítesis o refutación a partir de contraejemplos locales o globales, y la síntesis como elementos estructurales en su formulación (Lakatos, 1978).

Según Lakatos las matemáticas a partir de sus procesos de elaboración llegan a tener vida propia, por tanto, son autónomas y se rigen de acuerdo con sus propias leyes y su dialéctica. Bajo esta perspectiva, el matemático en su proceso creativo, durante la generación de conocimiento matemático, encarna las matemáticas, pero dicha encarnación no es perfecta. Es sabido que en cualquier proceso de innovación hay intentos fallidos, ensayos que no necesariamente conducen a donde el creativo pensó dirigirse; no obstante, éstos pueden dirigirse a rutas enriquecidas por la luz de nuevas perspectivas, bien sea a ese o a otro horizonte de conocimientos.

También Lakatos afirma que la heurística se ocupa de la dialéctica de las matemáticas más no de la historia de las matemáticas, a pesar de que su estudio del objeto sea mediante la historia y la reconstrucción de la misma. Es fácil dar ejemplos donde se enuncia la conjetura, después se exhibe la prueba frente a la cual pueden surgir los respectivos contraejemplos, la conjetura mejorada, siguiendo la heurística hasta el teorema y luego la aceptación definitiva generada por la demostración validada por la comunidad, proceso que desvirtúa el autoritarismo de las matemáticas formales.

Lakatos afirma que un par de ejemplos de textos y artículos que evidencien algún tipo de falla o error, beneficiarían a las matemáticas; desafortunadamente el deductivismo que conduce al formalismo y la atomización del conocimiento matemático no permite que este favorecimiento sea posible.

Hersh afirma que las matemáticas deben ser entendidas como una actividad humana, un fenómeno social, que forma parte de la cultura humana, evolucionando históricamente, e interpretable sólo en un contexto social (Hersh, 1999).

Además, revela como son vistas las matemáticas por los profesionales, desacreditando muchos mitos en torno a las matemáticas, y muestra cómo la idea "humanista" de la naturaleza de las matemáticas se asemeja más a la manera cómo los matemáticos trabajan realmente. Así, para llegar a una demostración se parte de la conjetura que se contrasta con el modelo y se refina por diferentes medios, semejante a como se hace en las ciencias naturales, para consolidarla y llegar a un teorema que en muchos casos se fundamenta en la autoridad de quien lo postula o en una rigurosa demostración.

No obstante frente a los esfuerzos dedicados a la construcción de una demostración o teorema que garantice que lo que se está haciendo es matemáticas, en muchos casos los estudiantes o no se interesan por la demostración, o no la entienden porque lo que a ellos les interesa es la aplicación del concepto (Hersh, 1999).

En su libro *El constructivismo social como filosofía de las matemáticas*, Paul Ernest argumenta no sólo que la matemática es falible, sino que es creada por grupos de personas que formulan y critican los nuevos conocimientos en una "conversación" formal antes de dar las matemáticas por aceptadas. Estas conversaciones encarnan el proceso que Lakatos describe en la evolución de la relación. La creación de conocimiento hace parte de un ciclo global más amplio en el que los alumnos experimentan mediante ejemplos y sostienen "conversaciones" tanto en escuelas como en universidades, antes de que ellos mismos puedan convertirse en matemáticos y participen en la creación de nuevo conocimiento.

De acuerdo con el constructivismo social, la matemática es más que un conjunto de creencias subjetivas, pero menos que un cuerpo de conocimiento objetivo absoluto flotando por encima de toda actividad humana. Las matemáticas son un conocimiento cultural, como el resto de los conocimientos humanos, en el que trasciende cualquier individuo particular, pero no toda la humanidad, como el arte, la música, la literatura, la religión, la filosofía y la ciencia ((Ernest, 2004).

Por supuesto que lo antes mencionado no puede dejar absolutamente de lado el aspecto psicológico, pues, son los seres humanos quienes descubren o construyen las matemáticas, por lo que no se pueden separar la creación del creador, así como el descubrimiento del descubridor, y dentro de lo psicológico, tiene lugar la forma como el ser humano llega a tales creaciones o invenciones, las cuales vienen determinadas por su autor, pero a su vez de algún modo también determinan a su autor generando así una relación dialéctica (Ernest, 2004).

Otro elemento que está presente en la construcción o el descubrimiento de las matemáticas tiene que ver con el aprendizaje, pues no es posible descubrir o crear algo si no se parte de algún presupuesto que ha sido elaborado otrora y aceptado como cierto, de modo que, en muchos casos el que alguien arribe antes que otros a cierto nuevo conocimiento, tiene que ver con la manera eficiente en que lleva a cabo sus procesos de aprendizaje. De tal suerte que podemos afirmar sin temor a equivocarnos que el aprendizaje se encuentra íntimamente relacionado con la creación y el descubrimiento en matemáticas (Ernest, 2004).

Philip Kitcher ofrece un refinamiento adicional del falibilismo en su libro *La naturaleza del conocimiento matemático*. Sostiene que mucho del conocimiento matemático es aceptado con base en la autoridad del matemático, y no se fundamenta en una demostración racional. Además, incluso cuando se han demostrado resultados matemáticos, gran parte del argumento es tácito y se basa en el conocimiento matemático tácito aprendido a través de la práctica, en lugar de ser completamente escrito de forma explícita. Dado que el conocimiento informal y tácito de las matemáticas de cada generación varía, la demostración matemática no puede ser descrita como absoluta.

El otro lado del análisis se origina en el hecho de que la realidad que se vive en las aulas de la mayoría de las universidades opta por unos sistemas de práctica de carácter normativo, donde el profesor considera que el estudiante aprende por imitación, aceptando de manera pasiva el discurso del docente, sin que se consideren siquiera clases donde asistan estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje, susceptibles de ser motivados si la enseñanza se orientara a sus cualidades específicas de aprendizaje; esto nos conduce a pensar en la necesidad de que el profesor de matemáticas reflexione acerca de la problemática actual de la docencia universitaria (Moreno & Azcárate, 2003).

Como las ecuaciones diferenciales forman parte importante del robusto cuerpo de conocimientos que constituyen hoy las matemáticas, naturalmente no es un área ajena al proceso de elaboración y descubrimiento que caracteriza a las matemáticas. Por tal razón, el referente teórico que fundamenta esta propuesta se basa en el modelo de pruebas y refutaciones propuesto por Lakatos, considerado como un aporte significativo para la generación de nuevos y útiles conocimientos, útil a todos aquellos que se interesen en aprender acerca de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, como herramientas que proveen un mayor acercamiento a la comprensión de nuestra realidad a través del estudio y la formulación de soluciones a ciertos problemas.

La actividad matemática, al igual que muchas otras, es actividad humana en esencia y por tanto debe ser estudiada tomando en cuenta factores como la psicología y la historia; de otra manera, se desconocería la forma en la que el ser humano construye conocimiento matemático y la evolución que el mismo ha tenido con el transcurrir de los años. A pesar de que por mucho tiempo se restó importancia al modo en que las matemáticas se construían y reconstruían mediante procesos mentales altamente elaborados y complejos, no cabe duda que la epistemología de la educación matemática, debe dar cuenta acerca de cómo el sujeto llega a conocer, aspecto que tiene que ver con la psicología, y por otro lado, en aras de una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, se requiere saber acerca de los procesos que fueron necesarios para dar a luz nuevos y robustos conocimientos.

3. Fundamentos éticos

Toda investigación se confronta con posturas éticas que deben ser asumidas y explicitadas. En el campo de la educación matemática surge el dilema inclusión – calidad. Se hacen a continuación, algunas consideraciones al respecto.

De acuerdo a *Altablero* una publicación del Ministerio de Educación de Colombia: "*La educación inclusiva da la posibilidad de acoger en la institución educativa a todos los estudiantes, independientemente de sus características personales o culturales. Parte de la premisa según la cual todos pueden aprender, siempre y cuando su entorno educativo ofrezca condiciones y provea experiencias de aprendizaje significativas; en otras palabras, que todos los niños y niñas de una comunidad determinada puedan estudiar juntos*" (Ministerio de Educación, 2007).

Desde luego que la inclusión en los diferentes niveles educativos ofrece grandes retos para el sistema educativo, entre ellos surge de manera inmediata el tema de la calidad educativa. Es bien sabido que la inclusión de estudiantes con diferentes necesidades educativas así como la masificación de la educación, implican no solamente flexibilidad en los niveles de exigencia, sino además, generar estrategias y ambientes de aprendizaje caracterizados por favorecer la inclusión sin desvirtuar los niveles de competencia esperados en los estudiantes, lo cual es muy difícil de alcanzar.

De otro lado es bien sabido que la educación se constituye en el medio ideal para reducir la brecha entre ricos y pobres, así como, la única manera que lograr ciudadanos competentes que puedan incorporarse efectivamente al campo laboral en un mundo globalizado y altamente complejo.

El modelo didáctico que se propondrá debe tomar en cuenta estas consideraciones que se desarrollarán a lo largo del trabajo.

2.1. Fundamentos epistemológicos

La postura teórica que se asume en este trabajo es la concepción cuasi-empírica de las matemáticas propuesta por Lakatos donde se afirma que los teoremas, axiomas y leyes que conforman las matemáticas, no surgieron espontáneamente ni mucho menos adornados con el conjunto de cuidadosos detalles que se presentan en las aulas a los estudiantes. La génesis de los postulados fue una idea o conjetura propuesta como solución a algún problema en particular (Lakatos, 1978).

Para Lakatos las matemáticas son producto de una cuidadosa y en ciertos casos prolongada evolución como si tuviese vida propia, por tanto, son autónomas y se rigen de acuerdo con sus propias leyes y su dialéctica. Bajo esta perspectiva, el matemático en su proceso creativo, durante la generación de conocimiento matemático, encarna las matemáticas, pero dicha encarnación no es perfecta.

El aprendizaje de las ecuaciones diferenciales como actividad matemática, parte de una conjetura como iniciativa para la solución de un problema, pero esta conjetura se somete a la prueba mediante experimentación, dando lugar a ideas cada vez más elaboradas, hasta que ascienden al rango de la formalidad matemática mediante un lema, corolario o teorema. Es de esta manera como se aprenden realmente las matemáticas y se lleva a cabo la actividad matemática (Sriraman & English, 2010).

2.2. Fundamentos disciplinares

Un sistema dinámico es un objeto matemático empleado para modelar fenómenos físicos que cambian con el tiempo (Lacomba, 2000). Los sistemas dinámicos están por doquier y tienen que ver con diversas disciplinas del conocimiento; por tanto, su estudio se hace ineludible.

Las ecuaciones diferenciales permiten modelar fenómenos en diferentes campos, por tanto constituyen un capítulo de la teoría de los sistemas dinámicos. De modo que, las soluciones y el análisis del comportamiento de dichas soluciones en el tiempo, constituyen un hilo conductor de este trabajo

2.1.1 Sistemas dinámicos

Según Hirsch *"un sistema dinámico es una forma de describir el paso del tiempo para todos los puntos de un espacio dado S. El espacio S podría pensarse, por ejemplo, como el espacio de estados de algún sistema físico. Matemáticamente, S podría ser un espacio euclidiano o un subconjunto abierto del espacio euclidiano o algún otro espacio tal como una superficie en* R^3*"* (Hirsch, Smale, & Devaney, 2004).

Un problema clásico que originó el estudio de los sistemas dinámicos está relacionado con la mecánica celeste, a saber, el problema de los tres cuerpos. El primero en tratar de resolverlo sin tener éxito fue Isaac Newton, aunque de por sí ya había logrado hacer un aporte fundamental con sus tres leyes de la mecánica.

Después de Newton, Euler, Lagrange y Laplace atacaron el problema, logrando algunos avances importantes, pero sin llegar a una solución definitiva que satisficiera la gran cantidad de variables que se advertían en la formulación del mismo. Al trabajar en él, se lograron importantes avances en el campo de las matemáticas, especialmente en los métodos para resolver ecuaciones diferenciales, sin olvidar, claro está, el (descubrimiento) estudio de la probabilidad y sus reglas, postuladas por Laplace en el intento por alcanzar una solución alternativa a la descripción matemática del movimiento planetario.

Para el año de 1889 el rey de Suecia y Noruega organizó un concurso, lo cual era común para la época; uno de los problemas tenía que ver con la estabilidad del sistema solar o el problema de los tres cuerpos. Henri Poincaré, uno de los matemáticos más importantes del momento, participó en el concurso para dar solución al mismo, desplegando su capacidad, al punto de no solamente ganar el primer premio en el concurso, sino además, de abrir el camino para que las generaciones venideras tuvieran un nuevo método para abordar, comprender y resolver problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos. Poincaré empleó en su trabajo métodos geométricos y topológicos desarrollados por él mismo, de modo que fue pionero en dar una solución cualitativa a un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales. A lo largo de su trabajo logró descubrir puntos y órbitas doblemente asintóticas (homoclínicas), así como trayectorias inestables tipo silla, todos estos elementos característicos de un fenómeno caótico (Delshams A. , 2010).

No fue sino hasta el año de 1963 que, valiéndose de un computador, el meteorólogo Edward Lorenz, al simplificar la ecuación de Navier Stokes, se encontró con un fenómeno caótico sensible a condiciones iniciales. Sus planteamientos abrieron la puerta a un naciente paradigma que ha llevado a la humanidad a comprender en alguna medida fenómenos de muy difícil modelación, así como a establecer las bases matemáticas para la nueva ciencia: la teoría del caos.

Stephen Smale en 1961 logró dar término al trabajo de Poincaré demostrando que la escisión de separatrices origina la existencia de herraduras de Smale, que trae como consecuencia un comportamiento caótico. De este modo, podemos entender que pese a que Poincaré no escribió respecto de la sensibilidad a condiciones iniciales, mostró claramente que la escisión de separatrices está asociada a un movimiento caótico (Delshams A. , 2010).

2.1.2 Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Para el estudio de algunos problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales, no es tan importante conocer soluciones de carácter cuantitativo, o la solución explicita de las ecuaciones diferenciales asociadas al problema, más bien lo que interesa es el comportamiento cualitativo de las soluciones en términos de las condiciones iniciales o de valores de los parámetros (Murphy, 1960).

Saber qué, cuándo y por qué una solución es creciente o si tiene un límite en el infinito puede ser de ayuda en el entendimiento de un modelo. En muchos de estos problemas y bajo ciertas circunstancias, se puede obtener esta información sin resolver explícitamente la o las ecuaciones diferenciales asociadas a la situación.

En los últimos años, los avances tecnológicos, especialmente en las computadoras han ocasionado que la enseñanza de la matemática en cursos de ecuaciones diferenciales pueda contar con una metodología propia de las ciencias experimentales, en el sentido de poder experimentar y comprobar.

Cuando se observan las dificultades existentes en cursos de ecuaciones diferenciales porque no cumplen con las expectativas, ni se adaptan a las necesidades concretas de los estudiantes, se apela a la incorporación de la tecnología para promover la conexión entre las distintas partes de la matemática, resolver problemas con aplicaciones al mundo real, dominar métodos numéricos, e interpretar líneas de fase y campos de pendientes.

Los estudiantes normalmente no se han habituado a la elaboración e interpretación de las gráficas por lo que se espera que mediante la inclusión de recursos tecnológicos en los cursos de ecuaciones diferenciales puedan establecer conjeturas a partir de la visualización de los campos de pendientes y las líneas de fase de modo que interpreten alguna solución o su explicación.

Otro método empleado en el enfoque cualitativo para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales tiene que ver con los métodos numéricos. Aunque parezca interesante para los estudiantes, porque no presenta mayor dificultad en cuanto a su tratamiento, si puede tornarse tedioso por la cantidad de cálculos que deben realizarse. El uso de un computador facilita dicha labor porque lo hace de manera automática y en muy corto tiempo, además de adjuntar la gráfica correspondiente con la de la solución analítica si ésta existe.

2.1.2.1 Ecuación diferencial autónoma

Es una ecuación diferencial que se puede expresar de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$; para una ecuación autónoma las condiciones del teorema fundamental de existencia y unicidad de soluciones se reducen a exigir que la función *f* tenga derivada continua en un intervalo abierto.

2.1.2.2 Soluciones de equilibrio

Las soluciones constantes $x(t) = c, con\ t \in \mathbb{R}$, de una ecuación diferencial se llaman soluciones de equilibrio o simplemente equilibrios

2.1.2.3 Estabilidad

Un equilibrio c de una ecuación diferencial es estable si toda solución $x = x(t)$ que en el instante inicial t_0 toma un valor x_0 suficientemente cercano a c, permanece próxima a c para todo $t > t_0$. Es decir, $|x_0 - c|$ pequeño implica $|x(t) - c|$ pequeño para todo $t > t_0$, equivalentemente, para todo $\mathcal{E} > 0$ existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\mathcal{E})$, tal que $|x_0 - c| < \delta$ implica $|x(t) - c| < \mathcal{E}$ para todo $t > t_0$. Si además se tiene $\lim_{t \to \infty} x(t) = c$, se dice que el equilibrio es asintóticamente estable. Los equilibrios que no son estables se llaman equilibrios inestables.

2.1.2.4 Retratos de fase

Si se piensa en un fluido imaginario que corre a lo largo de las trayectorias de la ecuación y dadas ciertas condiciones iniciales para la ecuación, entonces las coordenadas de su movimiento subsiguiente son las soluciones de la ecuación diferencial para dicha condición inicial. La imagen de cómo se ajustan estas líneas de flujo se denomina retrato de fases de la ecuación (Napoles, 2004).

Las formas onduladas oscilantes tienen una amplitud, que indica lo grandes que son, y una fase, que muestra el lugar del ciclo en que se encuentran. Si se representan ambas, se obtiene un dibujo en el plano. El flujo se indica por líneas curvas, que corresponden a la evolución temporal de las coordenadas de varios puntos iniciales. Las flechas indican la dirección (Ver Figura 1) del movimiento a medida que transcurre el tiempo (Napoles, 2004).

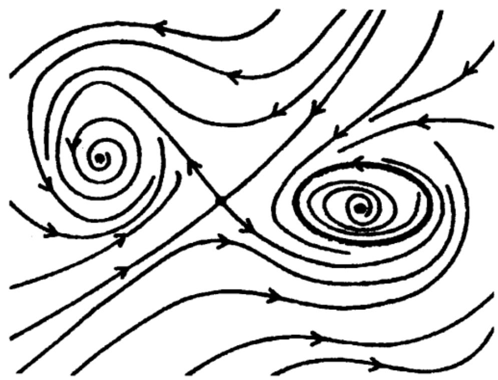


***Figura 1*: Retrato de fase.**[28]

Existen cuatro características de este flujo particular que se pueden destacar. Primero, en la parte izquierda hay un punto hacia el cual confluyen en espiral todas las líneas de flujo próximas. Se le conoce como sumidero. Es bastante similar a un tubo de desagüe. Enfrente, en la parte derecha, hay un tubo de desagüe al revés, un punto a partir del cual el fluido corre en espiral. Es una fuente (Napoles, 2004).

En la parte central existe un lugar donde las líneas de flujo parecen cruzarse. Se le conoce como silla de montar (o punto de silla). De hecho, las líneas no se cruzan; sucede algo más interesante, si dos líneas de un fluido real chocan entre sí, se ven estas sillas de montar.

[28] **Retrato de Fase, tomado de: Un siglo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.**

Finalmente, rodeando la fuente, a la derecha, hay un bucle que se cierra una sola vez. Este es un ciclo límite. Se parece a un remolino, donde el fluido gira y gira. Los flujos en el plano poseen estas características. Puede que haya más de una de estas características, pero no se encontrará nada más complicado (Napoles, 2004).

2.1.2.5 Sumideros

Es un lugar donde una línea de flujo degenera para convertirse en un único punto hacia el cual confluyen todos los puntos vecinos (Ver Figura 2). Si el sistema inicia su movimiento en el punto central de un sumidero, no sucede nada. Simplemente se queda ahí. Entonces, el sumidero representa un estado estacionario del sistema (Napoles, 2004).

Esto significa que el estado estacionario en un sumidero es estable. Si tomamos el punto que representa el estado de un sistema y lo alejamos un poco del sumidero, entonces dicho punto gira en espiral dirigiéndose de nuevo hacia el punto de donde partió. Si se empuja la masa hacia arriba por la pared del recipiente, rodará hacia abajo. Los sumideros son estados estacionarios estables (Napoles, 2004).

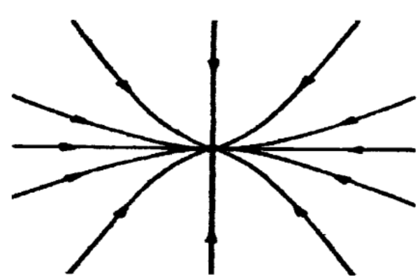


***Figura 2*: Sumidero.**[29]

[29] **Sumidero, tomado de: Un siglo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales**

2.1.2.6 Fuentes

Son también estados estacionarios (Ver Figura 3). Pero, ahora, los puntos vecinos se alejan. Es como un trozo de masa colocado sobre un recipiente volcado. Si se tiene mucho cuidado, puede conseguirse que esté quieto en la parte superior, pero si se le da un leve empujón, resbala por las paredes y cae. Es decir, el estado estacionario es inestable (Napoles, 2004).

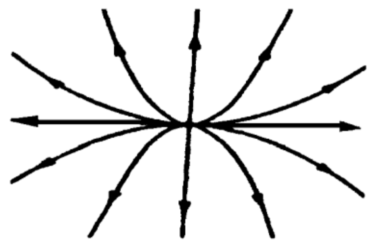


***Figura 3*: Fuente.**[30]

2.1.2.7 Sillas de montar

Son más interesantes (Ver Figura 4). En cierto sentido, son estados estacionarios estables en algunas direcciones e inestables en otras. Imaginemos un jinete en un caballo, sobre una silla resbalosa. Si el jinete se mueve hacia adelante o hacia atrás en la silla, simplemente se deslizará retrocediendo a la posición central. Pero si empieza a resbalar hacia los lados, volcará. Su posición es estable con respecto a los desplazamientos hacia adelante y hacia atrás; inestable con respecto a los desplazamientos laterales (Napoles, 2004).

---

[30] **Fuente, tomado de: Un siglo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales**

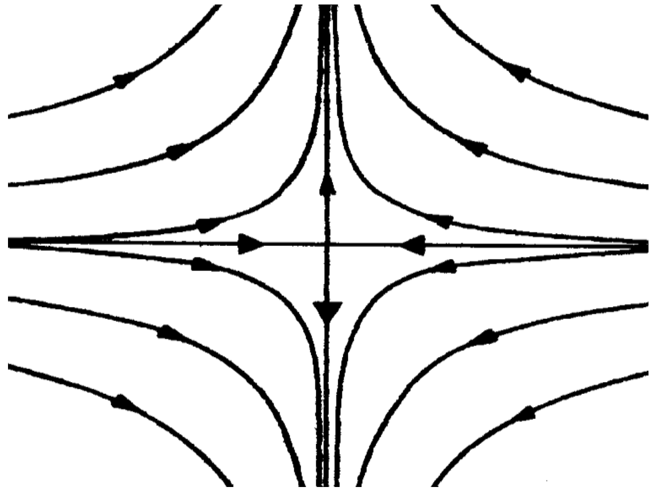


Figura 4: **Silla de montar.**[31]

Debido a la anterior analogía, a estos puntos se les conoce como "sillas de montar". Las separatrices reciben este nombre porque separan el modo en que fluyen puntos próximos. Al recorrer una separatriz desde la izquierda de la Figura 4, comenzando justo por encima de ella, se da un giro brusco hacia la izquierda a medida que hay proximidad al punto de silla; si se empieza por abajo, se da un giro brusco hacia la derecha (Napoles, 2004).

2.3. Fundamentos metodológicos

Esta investigación se enfoca en el aprendizaje más que en la enseñanza, y se desarrolla a partir de los siguientes elementos, que se trataran en detalle en el siguiente capítulo (Ver figura 5).

[31] Silla de Montar, tomado de: Un siglo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

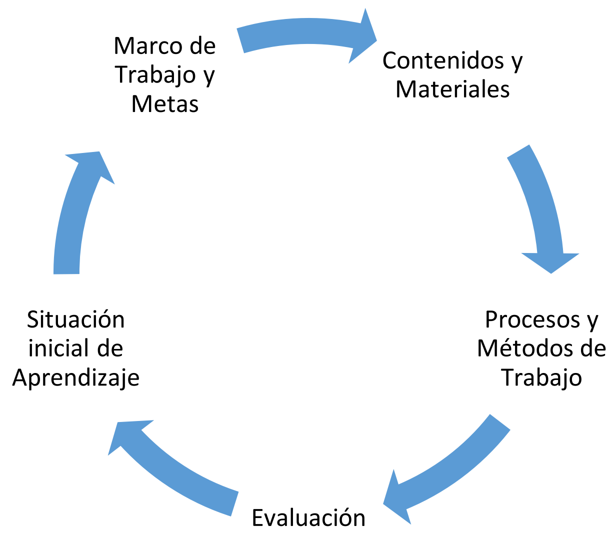


***Figura 5*: Proceso de aprendizaje.**

Cabe resaltar que este proceso no es lineal por consiguiente se pueden hacer saltos hacia adelante o hacia atrás en el proceso o estando en un momento cualquiera puede tener lugar otro de los momentos del proceso.

Conclusiones del capítulo 2

Se enuncian los fundamentos epistemológicos, disciplinares y metodológicos sobre los que se fundamenta la investigación y a partir de los cuales se hace el diseño de los materiales del curso, que sirve como medio para recolectar la información necesaria para consolidar el modelo didáctico.

CAPÍTULO 3. MODELO DIDÁCTICO

Un modelo didáctico es una representación del proceso enseñanza aprendizaje en un contexto científico y socio-cultural determinado basado en opciones epistemológicas y éticas específicas.

Partiendo de esta definición, se consideran en primer lugar los aspectos que fundamentarán el modelo didáctico que se pretende elaborar, el contexto científico y socio-cultural en el que se inscribe. Luego se hará referencia a los fundamentos epistemológicos y éticos que lo sustentarán, los elementos básicos que lo constituirán y algunas consideraciones sobre la valoración del modelo.

Un modelo didáctico se concibe como una forma de producir conocimiento y generar acciones basadas en:

- Un sistema de principios básicos, que tiene que ver con aspectos implícitos, explícitos y enunciados que demarcan los límites de lo que será el universo de discurso y la perspectiva de la investigación.

El modelo didáctico que se propone se basa en los fundamentos epistemológicos y disciplinares descritos en el marco teórico, los cuales se concretan en los siguientes principios:

3.1. Principios Básicos

1. El proceso de enseñanza aprendizaje como sistema complejo

El aprendizaje humano es un proceso altamente complejo debido a que cada individuo se apropia de conocimientos, experiencias, habilidades y hábitos a través de la interacción con los docentes, sus pares y el objeto propio de conocimiento, lo cual una vez consolidado influye directamente no solo en la cognición de cada estudiante sino también en el contexto donde tiene lugar el aprendizaje.

Aprender por tanto representa uno de los fenómenos más complejos en los seres humanos, ya que es un proceso dialectico, mediante el cual cada individuo se apropia de la cultura que posee una naturaleza compleja. A continuación, se enuncian algunos elementos que caracterizan el aprendizaje.

La naturaleza de lo estudiado: Cada persona es un ser único con aspectos biológicos, psicológicos y sociales. Así, tanto el objeto de estudio como quien aprende están sujetos a diversas condiciones y circunstancias particulares. Así, el aprendizaje no puede ser cuantificado o controlado de forma absoluta.

La coexistencia de elementos contradictorios: tiene que ver con las particularidades de cada quien y del objeto de conocimiento, lo cual se nutre de su antagónico y a su vez genera nuevos elementos que, aunque surjan como producto de la interacción entre el sujeto y el objeto, no necesariamente se adaptan plenamente a éstos.

La impredecibilidad: El proceso de aprendizaje, por su carácter complejo y las diversas interacciones de sus elementos, ofrece permanentemente sorpresas y por tanto resultados inesperados.

Relaciones abiertas: Por ser un sistema complejo nunca es cerrado, dando lugar a nuevas relaciones que se nutren de las ya existentes para crear nuevos nodos lo cual se presenta reiteradamente y hace más complejo el sistema.

Así pues un modelo didáctico incluye muy diversos elementos que deben ser integrados. En esta fase de la investigación haremos énfasis en un aspecto: la metodología centrada en la resolución de problemas.

2. La resolución de problemas como opción metodológica que enmarca la relación docente – alumno - conocimiento matemático

Existe una gran variedad de estudios sobre la resolución de problemas como opción metodológica en educación matemática. Se destacan a continuación, algunos aspectos.

En cuanto al trabajo en aula y la planeación de los problemas, se deben tener presentes ciertas consideraciones. En primer lugar, el estudiante se debe sentir motivado para asumirlo como propio, en segunda instancia requiere contar con las herramientas matemáticas adecuadas para hacer frente al problema, y por último el problema debe representar un reto para quien lo resuelve.

Un aspecto relevante al momento de plantear un problema tiene que ver con las heurísticas, que para Polya son el estudio de medios y métodos empleados en la resolución de problemas (Polya, 1981). Las heurísticas se ponen de manifiesto cuando el sujeto está resolviendo el problema y se pueden presentar en diferentes momentos sin que su aplicación asegure el éxito. Algunas de ellas pueden ser: simplificar el problema, subdividirlo, iniciar de adelante hacia atrás, hacer gráficos o bosquejos, y considerar casos particulares, entre otros.

Polya establece claramente cuatro etapas o fases para la solución de problemas:

- Comprender el problema,

- Concebir el plan,
- Ejecutar el plan y
- Verificar la solución obtenida.

Estas etapas no necesariamente deben presentarse todas siempre, o en algún orden preestablecido, puede darse el caso en que se presenten sólo algunas, en distinto orden, o de manera reiterada durante todo el proceso de resolución de algún problema en particular.

Otro aspecto que debe estar presente durante la resolución de problemas es la meta-cognición. Según Schoenfeld, el pensamiento meta-cognitivo sirve para monitorear, controlar y dirigir el propio proceso cognitivo (Schoenfeld, 1992). Lo que se espera respecto a la metacognición, es que el estudiante durante todo el proceso de resolución de determinado problema, esté en capacidad de diseñar una estrategia de trabajo, de modo que controle sus acciones, las modifique, las refuerce o las ajuste según sea el caso y además se den las condiciones para replicarlas o rediseñarlas en diversos contextos.

3. La resolución de problemas como generadora de la actividad matemática en el aula: Experimentación - conjetura – prueba – refutación - aplicación

Como se ha considerado a lo largo del presente trabajo, las matemáticas son una herramienta fundamental para descubrir el mundo o adaptarlo; por supuesto que esto es posible mediante la solución de problemas que se han presentado desde que el ser humano tuvo conciencia de sí mismo. Polya afirma que tener un problema es buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1981). Posamentier y Krulik establecen que un problema es una situación que confronta una persona, que requiere una respuesta y para el cual los caminos de salida no son conocidos inmediatamente (Posamentier, 1998).

Más allá de una u otra definición, un problema tiene una serie de características inherentes como son: existe una persona que debe abordar la situación para resolverla, éste reúne elementos que son el punto de partida, la meta es dar solución a dicha situación, y finalmente se presenta cierto bloqueo o resistencia que no permite alcanzar la solución de manera inmediata. Cabe resaltar el hecho de que un problema se define para un sujeto, es decir, lo que para alguien es un problema para otra persona puede no serlo, de modo pues que la esencia del problema consiste en generar actividad matemática durante todo el proceso.

En efecto las ecuaciones diferenciales ofrecen diferentes retos, desde la concepción de una hipótesis para plantear un modelo, pasando por las estrategias de resolución del sistema o la ecuación diferencial que derive del modelo, en el mismo análisis cualitativo, hasta la recopilación de todos los resultados obtenidos del proceso. En este punto, se hace necesario tener una estrategia, a partir de la comprensión de una determinada situación, valerse de las heurísticas para proponer o refinar un modelo, validarlo y confrontar las posibles soluciones con datos reales con el fin de probar la eficiencia del método empleado en la resolución del problema.

Como se aprecia claramente para resolver un problema se requiere proponer una o varias conjeturas, las cuales deben ponerse a prueba mediante algunos ejemplos y contraejemplos con el ánimo de verificarlas, refutarlas o reformularlas según sea el caso. En este proceso se presentan las heurísticas, así como las fases planteadas por Polya, de manera indistinta.

4. Recursos

- **Uso de tecnología**

En los últimos años, los avances tecnológicos, especialmente en las computadoras han ocasionado que la enseñanza de la matemática en cursos de ecuaciones diferenciales pueda contar con una metodología propia de las ciencias experimentales, en el sentido de poder experimentar y comprobar.

Cuando se observan las dificultades existentes en cursos de ecuaciones diferenciales porque no cumplen con las expectativas, ni se adaptan a las necesidades concretas de los estudiantes, se apela a la incorporación de la tecnología para promover la conexión entre las distintas partes de la matemática, resolver problemas con aplicaciones al mundo real, dominar métodos numéricos, e interpretar líneas de fase y campos de pendientes.

Los estudiantes normalmente no se han habituado a la elaboración e interpretación de las gráficas, por lo que se espera que, mediante la inclusión de recursos tecnológicos en los cursos de ecuaciones diferenciales, puedan establecer conjeturas a partir de la visualización de los campos de pendientes y las líneas de fase para interpretar alguna solución y su comportamiento.

Otro método empleado en el enfoque cualitativo para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales tiene que ver con los métodos numéricos. **Experimentación**

Un elemento importante de los temas de la matemática aplicada, como lo son las ecuaciones diferenciales, tiene que ver con la experimentación, ya que ésta permite de algún modo hacer concretas para los estudiantes ciertas situaciones problematizadoras, que de otra manera dificultarían la comprensión y tratamiento por parte de los mismos y a su vez la exposición de los temas para el profesor.

Ciertos problemas típicos de las ecuaciones diferenciales, como el vaciado de un tanque, la caída de los cuerpos y el crecimiento de ciertas poblaciones, pueden fácilmente ser representadas en aula con recursos económicos y de fácil acceso.

A continuación, se enuncian brevemente los referentes metodológicos, sobre los que se establece la propuesta de modelo didáctico para la presente investigación.

3.2. Metodología

3.2.1. Circunstancia inicial del alumno

Una revisión de las circunstancias iniciales de los alumnos puede demostrar que los estudiantes están en diferentes situaciones lo cual significa que los alumnos tienen que trabajar con una gama de diferentes enfoques con el ánimo de identificar aquellos que se adaptan a sus propias formas de aprendizaje para obtener los mejores resultados (Guldbrandt, 2005).

Por sus particularidades ellos tienen sus propias necesidades, demandas y objetivos en relación con la enseñanza y cada alumno puede aprender mejor si identifica el enfoque de aprendizaje que le favorece

Algunas preguntas orientadoras sobre las circunstancias iniciales del estudiante podrían ser:

- ¿Qué habilidades posee el alumno para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo?

Los alumnos vienen de tomar un curso de cálculo diferencial, uno de cálculo integral y otro de cálculo multivariado y algebra lineal combinadas, cada uno con una duración de un semestre. Se considera que el haber cursado y aprobado cada uno de estos cursos faculta al estudiante para recibir el curso de ecuaciones diferenciales y tener un desempeño adecuado.

- ¿Qué tan motivado se siente el alumno para estudiar las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

Este aspecto es difícil de establecer dado que en muchos casos los estudiantes no tienen claro el aporte del curso de ecuaciones diferenciales para su formación profesional. Además, tampoco se interesan por conocer los contenidos de la asignatura previamente de modo que comprendan la importancia de articular los conocimientos de los cursos de matemáticas que tomaron semestres atrás con las ecuaciones diferenciales.

Para la mayoría de los estudiantes las ecuaciones diferenciales son otro "difícil" curso de matemáticas, que obligatoriamente deben tomar y aprobar para poder obtener su grado de ingenieros o licenciados.

- ¿Cuáles son las necesidades del alumno en relación con la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

Los estudiantes de ingeniería y licenciatura deben aprender ecuaciones diferenciales, porque éstas permiten modelar problemas de diversa índole, que se encuentran en las diferentes disciplinas del saber. Se sabe de antemano que los ingenieros se forman para resolver problemas y los licenciados para enseñar a resolver problemas.

Por lo anterior se deduce que las ecuaciones diferenciales y sus soluciones son de carácter fundamental para los estudiantes de ingeniería y licenciatura.

- ¿Cómo aprende el alumno las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

La anterior pregunta es la que se pretende resolver a lo largo de esta investigación, pero desde ya se espera que los estudiantes mejoren su nivel de comprensión y su motivación hacia las matemáticas y la actividad matemática en general.

La idea de las anteriores preguntas es que permitan caracterizar a los estudiantes tanto de manera individual como a nivel grupal, y de este modo diseñar un adecuado plan de trabajo para la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, así como la retroalimentación con el grupo.

Para dar respuesta a este interrogante se aplicó un instrumento que permita dar una descripción de las condiciones con que los estudiantes llegan al curso de ecuaciones diferenciales, al promediar el semestre y al final del mismo, con el fin de establecer la eficacia del modelo y la funcionalidad de la propuesta de investigación.

3.2.2. Marcos

Los marcos tienen que ver con las condiciones que rigen la enseñanza las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, y surgen en diferentes niveles tales como el salón de clase, la universidad, o la comunidad. Dichos marcos influyen en la planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza (Guldbrandt, 2005).

Al considerar los marcos, surgen los siguientes interrogantes:

- ¿Se debe utilizar una plataforma tecnológica especial o la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, o es posible hacerlo sin ella?

Un aspecto fundamental para esta propuesta consiste en llevar a cabo el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, para lo cual se hace necesario el uso de un paquete computacional (Maple®), afortunadamente en el mercado existen diversos paquetes que son funcionales para tal fin como Matlab y Mathematica.

- ¿La enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas está vinculada a un plan de estudios? En muchas universidades desde hace un buen tiempo se han implementado cursos de ecuaciones diferenciales con enfoque cualitativo, pero desafortunadamente esta iniciativa no ha terminado de imponerse, quizás porque se presenta resistencia de parte profesores, estudiante y directivos.

Por otro lado, muchas universidades y estudiantes no cuentan con recursos tecnológicos adecuados y en ciertos "ambientes académicos" no se considera dar el giro a este enfoque ya que se conceptúa que es preferible seguir haciendo las cosas como se han venido haciendo tradicionalmente.

- ¿Existen marcos nacionales pertinentes para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

No hay una política a nivel nacional u oficial que determine la manera en que se debe llevar a cabo un curso de ecuaciones diferenciales, en general lo que se hace es seguir un libro de texto que sea aceptado por la mayoría o, se considere cubra los tópicos tratados habitualmente en los cursos.

Por otro lado, cada universidad cuenta con su proyecto educativo institucional y dentro de esa autonomía, determina de qué manera impartir los cursos de las asignaturas que hacen parte de los diferentes planes de estudio.

• ¿Hay limitaciones de tiempo para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

Quizás la excusa que se expone para no aceptar el cambio de énfasis en los cursos de ecuaciones diferenciales hacia el enfoque cualitativo tiene que ver con que los contenidos planteados para el curso no se alcanzan a cubrir totalmente durante el semestre académico. De modo que no queda tiempo para "divagar" en otras direcciones lo cual evitaría que los estudiantes dedicaran ese tiempo a cubrir los contenidos más "relevantes" del curso.

• ¿Que tan relevantes son las habilidades del maestro para la enseñanza en contexto de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

Este aspecto es fundamental, pero en ciertos casos los maestros no se han interesado en dominar el enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales, porque esto implica aprender a manejar alguna plataforma tecnológica, así como estudiar los métodos numéricos y salirse un poco del esquema de los libros de texto tradicionales de ecuaciones diferenciales. Normalmente resulta más sencillo y menos dispendioso hacer las cosas como siempre se han hecho.

• ¿Todos los alumnos tienen acceso a los recursos necesarios para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

En ciertos casos los estudiantes no cuentan aún con los recursos tecnológicos y bibliográficos que les permitan aprender el enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales, lo cual genera desmotivación y escaso interés para incursionar en este enfoque no tradicional para el estudio de las ecuaciones diferenciales.

La presente investigación se llevó a cabo desde el segundo semestre académico de 2015 y en el curso inter-semestral a inicio del año 2016 en una fase inicial, pero el estudio definitivo se llevó a cabo en un curso regular de ecuaciones diferenciales durante el primer semestre de 2016, con estudiantes de ingeniería ambiental y civil, los cuales están cursando el cuarto de su carrera, en la universidad Antonio Nariño con las siguientes particularidades:

- El software empleado para la investigación es Maple® 18, debido a su fácil manejo y utilidad.
- Se pretende que los alumnos participantes del curso de ecuaciones diferenciales, se sientan motivados hacia el enfoque cualitativo y el marco metodológico de las matemáticas cuasi empíricas.
- Los docentes encargados de los cursos de ecuaciones diferenciales, deben estar cualificados con respecto al manejo de los recursos bibliográficos, tecnológicos y la metodología de las matemáticas cuasi empíricas.

3.2.3. Objetivos

Es el propósito del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas. Este objetivo macro se fundamenta sobre los siguientes subproductos (Guldbrandt, 2005):

• Metas cognitivas: Evaluación, comprensión, uso y reproducción del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas

•Objetivos actitudinales: Una actitud basada en valores; apreciar, aceptar y reaccionar adecuadamente en torno al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas.

•Objetivos basados en el conocimiento, tales como: el desarrollo de habilidades, el comportamiento y la comprensión de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas

Al pensar en metas, surgen las preguntas:

• ¿Qué conocimientos, habilidades y actitudes debe alcanzar el alumno al finalizar el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

Una de las tareas consistió en que los alumnos desarrollaran habilidades en el manejo de Maple®, que les permita comprender el comportamiento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y las puedan aplicar en la solución de problemas cotidianos y retadores.

• ¿Qué esperan obtener la sociedad, la escuela, el maestro y el alumno a través de la enseñanza continua las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

La sociedad espera profesionales competentes en la solución de problemas. La escuela apunta a una diversificación de los procesos académicos de manera que los estudiantes comprendan en profundidad la utilidad de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos.

El maestro espera que los estudiantes estén dispuestos y enteramente motivados para adquirir destrezas y habilidades, en la elaboración e interpretación de campos de pendientes, líneas de fase, soluciones de equilibrio y diagramas de bifurcación. El alumno espera comprender los contenidos del curso sin que ello le genere mayores traumatismos y los resultados en su evaluación sean positivos.

El conocimiento se puede dividir en dos categorías:

• Lo que debe saber acerca de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas.

• Cómo conocer acerca de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas.

3.2.4. Contenido / materiales

Se refiere al contenido de la enseñanza, tanto el material como al plan de estudios.

Al decidir sobre el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas se deben encontrar materiales (objetos de aprendizaje) que se supone conducirán al alumno a alcanzar los objetivos (Guldbrandt, 2005).

Al pensar en el contenido y material, las preguntas que surgen son:

• ¿Qué material tiene que contener el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

• ¿Qué parte se basa en la práctica?

Los cursos de ecuaciones diferenciales en general tienen que ver con la solución de problemas, por lo que se considera que está totalmente enfocado a la práctica. Especialmente en lo que tiene que ver con encontrar y estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales y algunos sistemas de ecuaciones diferenciales.

• ¿Qué parte del curso de ecuaciones diferenciales se basa en la teoría?

Obviamente para la práctica se requiere que los estudiantes manejan la teoría de las ecuaciones diferenciales y los conceptos propios de los sistemas dinámicos y el enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

• ¿Cómo pueden algunos errores conducir al desarrollo personal?

Las tareas tienen como objetivo que el estudiante evidencie su aprendizaje así como sus debilidades, de manera que el estudiante con ayuda del profesor mejore su proceso: La realización de tareas promueve el desarrollo de destrezas, habilidades y la disciplina necesaria para la consecución de logros.

• ¿Qué puede hacer el alumno solo?

El alumno por cuenta propia puede realizar lecturas, alcanzar alguna destreza en el manejo de la plataforma tecnológica y proponer algunas conjeturas e hipótesis en torno a la solución de ciertos problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales.

• ¿Qué puede hacer el alumno en grupo?

Socializar los logros individuales para generar acuerdos y trabajar con el grupo en aquellos aspectos que son de difícil comprensión para algunos de los estudiantes de manera que se generen ambientes propicios para llevar a cabo la actividad matemática.

• ¿Que material necesita la instrucción del maestro?

Algunos aspectos para el acceso a la plataforma tecnológica, así como los conceptos básicos y el lenguaje propio de los sistemas dinámicos y el enfoque cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

• ¿Que contenidos requieren encuentros interacciones directas entre el docente y los alumnos o entre los alumnos?

La interacción directa se requiere en buena parte del curso, explícitamente en las situaciones donde se pueden y deben establecer conjeturas para la construcción de soluciones creativas de problemas retadores.

Los contenidos son el "qué" de la enseñanza. Puede haber planes de estudios oficiales, donde los contenidos de la educación se describen explícitamente, hay un currículo oculto en lo social; el lado emocional y personal del aprendizaje también debe formar parte de la enseñanza. Esto también se debe considerar al planificar el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas.

Los temas que se van a estudiar desde el enfoque cualitativo y la concepción de la matemática cuasi empírica son:

- Campos de pendientes
- Líneas de fase y de equilibrio
- Bifurcaciones
- Geometría de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden
- Geometría de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales.

3.2.5. Procesos y métodos de trabajo

Los procesos de trabajo tienen que ver con lo que el profesor y el alumno eligen hacer durante la enseñanza y los métodos son los antecedentes y argumentos para las diferentes elecciones. Incluye tanto consideraciones generales como individuales relacionadas con el carácter didáctico. Este concepto tiene que ver con la relación entre la enseñanza y el aprendizaje (Guldbrandt, 2005).

En relación con este concepto se debe pensar en las siguientes cuestiones:

• ¿Están los métodos orientados a desarrollar habilidades del alumno en relación con el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

La metodología empleada en el curso efectivamente pretende que los alumnos desarrollen habilidades en la solución de problemas modelados con ecuaciones diferenciales, de las cuales algunas requieren un análisis cualitativo para la comprensión de sus soluciones.

• ¿Los métodos están basados en la comprensión y en la utilidad práctica que los estudiantes pueden tener del curso de ecuaciones diferenciales, desde un enfoque cualitativo y con una concepción cuasi empírica de las matemáticas?

Los métodos empleados en el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo se orientan intencionalmente a que los alumnos lleven a cabo actividad matemática, y que de esta manera comprendan el comportamiento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y algunos sistemas.

• ¿Es la meta del alumno reproducir ciertas habilidades que demanda el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

• ¿Es la meta del alumno tomar una actitud independiente para el curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas?

Como se pretende estudiar las ecuaciones diferenciales desde la concepción cuasi empírica de las matemáticas, el alumno continuamente tendrá que:

- Experimentar.
- Elaborar conjeturas.
- Diseñar y contrastar modelos.
- Formular y comprobar generalizaciones.

3.2.6. Evaluación

Es esencial tener en cuenta (Guldbrandt, 2005):

• ¿Qué se debe evaluar?

• ¿Por qué?

• ¿Cómo?

• Y ¿por quién?

• Para empezar, se debe hacer una evaluación diagnóstica de lo que el alumno ya puede hacer o sabe sobre ecuaciones diferenciales, desde un enfoque cualitativo y con el enfoque cuasi empírico de las matemáticas.

• A lo largo del proceso de enseñanza hacer un juicio formativo para evaluar como el profesor puede guiar al alumno en su proceso de aprendizaje.

• Después de terminar la enseñanza hacer un juicio sumativo, evaluar los logros del proceso de aprendizaje, del alumno y el trabajo del profesor.

La evaluación de los procedimientos se llevó a cabo en tres diferentes aspectos así:

- Comportamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Comportamiento cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Comportamiento cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden.

Los instrumentos empleados para llevar a cabo la evaluación de los aprendizajes de los tópicos anteriores son:

- Planes de clase o actividades de trabajo de manera individual y grupal.
- Entrevistas semi-estructuradas.

Se elaborarán tres grupos de actividades basadas en los siguientes tópicos:

- Ecuaciones autónomas de primer orden
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones no lineales

El conjunto de actividades se encuentra en proceso de elaboración, sin embargo, este documento contiene a modo de anexo una primera aproximación a las actividades correspondientes al primer tópico del anterior listado.

3.2.7. Valoración del modelo

Una vez establecido el modelo didáctico empleado para esta investigación, se puso en práctica en el aula de clase con el fin de verificar su validez.

Por ser ésta una investigación de tipo cualitativo se emplearán métodos acordes con este tipo de trabajo, para lo cual se tomará como referente a Sampieri, quien sugiere los siguientes métodos:

- En un primer momento se define una muestra inicial, en este caso en particular se tomó a todos los estudiantes del curso quienes fueron en total cinco.
- Se recolectaron los datos mediante observación directa, entrevistas y análisis de registros y planes de clase.
- Una vez recolectada la información se analizó para extraer su significado, y establecer algunas categorías mediante una continua comparación.
- A partir de las categorías se establecieron unos códigos o categorías que permitieron generar una teoría o modelo didáctico en este caso particular. (Sampieri, Fernandez, & Baptista, 1991)

Dada la naturaleza del proceso enseñanza aprendizaje como un sistema complejo y la naturaleza del objeto de la investigación, los procedimientos usuales de validación de hipótesis, aunque no se descartan en principio, deben ser revisados y adecuados.

Durante el primer segundo semestre del año 2015 se actualizo el estado del arte y el marco teórico, del mismo modo se terminaron de afinar las guías del alumno, del docente y el syllabus del curso.

En el primer semestre de 2016 se aplicaron de manera definitiva las actividades, se cuenta con el respaldo fílmico de las clases, así como de la aplicación de las actividades. Por último, se diseñaron y aplicaron encuestas a estudiantes y docentes.

3.3. Modelo preliminar

En atención a las anteriores consideraciones se elaboró el siguiente esquema, (ver Figura Número 6) que recoge de modo simplificado los elementos de un modelo didáctico, que sirve como guía inicial para el diseño del curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y es confrontado posteriormente con la experiencia de la aplicación del syllabus y los planes de clase.

***Figura 6*: Modelo didáctico preliminar.**

El modelo didáctico parte de una situación inicial del estudiante, dicha situación se traduce en la necesidad de tomar el curso de ecuaciones diferenciales, pero además, es ideal que los estudiantes realmente se apropien de los contenidos del curso con una alta motivación y en el contexto de la resolución de problemas.

Otros aspectos implícitos en las necesidades van más allá del estudiante y tienen que ver con unos planes de estudio y practicas docentes muchas veces desactualizados, así mismo, el trabajo en aula continúa evidenciando un rol protagónico por parte del docente y en muchos casos se desconoce el potencial de los estudiantes.

Como consecuencia de lo mencionado hasta aquí, es natural que los estudiantes se abstraigan de su proceso de aprendizaje desmotivados, y como sujetos pasivos pongan en manos de la suerte y el docente a cargo de la asignatura los resultados del curso de ecuaciones diferenciales.

Una vez enunciados aquellos aspectos considerados como deficiencias el proceso enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, se establecieron los fundamentos para nuestro modelo didáctico. La propuesta cuenta básicamente con tres elementos articuladores: Solución de problemas (Polya, 1981), enfoque cuasi empírico de las matemáticas (Lakatos, 1978) y la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales (Delshams A. , 2005) que se implementa apoyada en el uso del software.

Por ser las ecuaciones diferenciales una herramienta versátil y funcional en la modelación de diversas situaciones problema propias de las ciencias en general, brindan un ambiente ideal para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque cuasi empírico de las matemáticas; iniciando con la formulación del modelo hasta la exploración de las posibles soluciones de un problema, las cuales no surgen automáticamente, más bien son producto de arduas discusiones e interpretaciones.

Desde luego la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales se nutre del cuasi empirismo, debido a que durante el proceso necesario para encontrar las posibles soluciones de un problema se parte de una conjetura (Lakatos, 1978), sin tener total certidumbre acerca de su validez, sino que dicha conjetura debe ser evaluada y validada o en otros casos reformulada o refutada.

Conclusiones del capítulo 3

No obstante, la utilidad de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales para el estudio y solución de problemas, así como el cuasi empirismo como teoría de la educación matemática, en nuestro modelo se incluyen los métodos analíticos y numéricos, que deben hacer parte del acervo conceptual de todo ingeniero y complementan el estudio de un problema, de manera que contribuyen a generar un completo panorama acerca de las soluciones y los comportamientos de dichas soluciones en el tiempo.

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN DE LOS PLANES DE CLASE

A continuación, se presentan los hallazgos más relevantes durante la elaboración e implementación de la propuesta "Aprendizaje De Las Ecuaciones Diferenciales Desde Un Enfoque Cualitativo".

4.1. Consideraciones iniciales

Durante el segundo semestre del año 2015 y en el curso inter-semestral de comienzo del año 2016, se aplicaron de manera preliminar los planes de clase para el respectivo ajuste. Todo el estudio se llevó a cabo en la universidad Antonio Nariño sede sur en la ciudad de Bogotá. La aplicación definitiva se llevó a cabo durante el primer semestre de 2016 en un curso regular de ecuaciones diferenciales, con un grupo de cinco estudiantes en jornada diurna y una intensidad de cuatro horas semanales para un total de 64 horas presenciales durante el semestre.

Los estudiantes que participan del estudio están cursando cuarto semestre de sus respectivas carreras, y en los tres semestres previos han tomado los cursos de cálculo diferencial y solución de problemas durante el primer semestre, en segundo semestre cálculo diferencial con geometría analítica y en tercer semestre cálculo multivariado con álgebra lineal.

A continuación, para posterior referencia, se mencionan los participantes del curso por su primer nombre y sus promedios en los cursos previos de matemáticas:

- Maytte, ocupación estudiante de ingeniería ambiental, 19 años de edad, promedio de los cursos previos de matemáticas: 3.2.

- Fabio, ocupación estudiante de ingeniería ambiental, 21 años de edad, promedio de los cursos previos de matemáticas: 3.4.
- Juan, ocupación promotor de ventas y estudiante de ingeniería ambiental, 20 años de edad, promedio de los cursos previos de matemáticas: 4.
- Edwin, ocupación asesora comercial y estudiante de ingeniería civil, 21 años de edad, promedio de los cursos previos de matemáticas: 3.2.
- Yesika, ocupación estudiante de ingeniería ambiental, 19 años de edad, promedio de los cursos previos de matemáticas 3.3. En adelante se relatan algunas experiencias derivadas de la aplicación del modelo en el curso de ecuaciones diferenciales, cuyos participantes serán mencionados por su primer nombre.

4.2. Prueba de entrada

El curso de ecuaciones diferenciales inicia con una prueba de entrada, donde se evalúa el dominio que los estudiantes participantes del curso tienen con respecto a la derivada y sus aplicaciones, muy pronto se observa que la mayoría de ellos tienen cierta dificultad en lo relacionado con el concepto como razón de cambio y la pendiente de la recta tangente a una curva, como se observa en el análisis de la prueba de entrada donde se pide resolver el problema:

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación: $s = 3t^2 - t^3, t \geq 0$.

Donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo la aceleración instantánea a los t segundos, encuentre v y a en términos de

t. Describa la posición y movimiento de la partícula en una tabla que incluya los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve a la izquierda o a la derecha, los intervalos en los que la velocidad es creciente o decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Complete la siguiente tabla ubicando los respectivos signos y dando una conclusión. Explicar las dificultades.

Una vez que con ayuda del docente se recuerda como intervienen los conceptos de derivada y anti derivada en las situaciones propuestas, los estudiantes interactúan con mayor confianza y empiezan a tratar de hacer un análisis detallado de una partícula que se desplaza en línea recta, pero tienen dificultad en comprender adecuadamente como es el desplazamiento de la partícula (Ver Tabla 1).

Tabla 1: Resumen de la prueba de entrada

Intervalos	Conclusión
t=0	**David**: a los 0 segundos tiene una aceleración de 6. **Juan**: La partícula se encuentra en reposo, pero a partir de este instante empieza a acelerar. **Fabio**: El cuerpo está en reposo, pero empieza a acelerar. **Maytte**: la partícula tiene un movimiento constante haciendo una forma semiparabólica. **Yesika**: el cuerpo está en reposo no hay movimiento
0<t<1	**David**: En una distancia de 0,625 m. con una v=2,25 m/s tiene una aceleración de 3 a los 0,5 s. **Juan:** La partícula se encuentra en movimiento con una aceleración que va disminuyendo. **Fabio:** El cuerpo se dirige hacia la derecha y va acelerado. **Maytte:** En este intervalo la partícula es creciente hacia la derecha. **Yesika:** hacia la derecha acelerando y aumentando la velocidad
t=1	**David:** Su aceleración es cero. **Juan:** En este punto la velocidad es máxima. **Fabio:** El cuerpo va dirigido hacia la derecha, pero sin velocidad ni aceleración. **Maytte:** la partícula se mueve de una posición creciente hasta cuando t=1 es el punto máximo. **Yesika:** Se mueve hacia la derecha constantemente
1<t<2	**David:** La distancia aumenta y su velocidad igual y su aceleración es hacia la izquierda. **Juan:** En este la velocidad empieza a disminuir. **Fabio:** El cuerpo va dirigido hacia la derecha, pero al mismo tiempo pierde aceleración. **Maytte:** la partícula se encuentra en una posición continua hacia la derecha, pero se va desplazando decrecientemente. **Yesika:** Se mueve hacia la derecha pero desacelerando.
t=2	**David:** Su aceleración indica que va hacia la izquierda. **Juan:** En este punto la posición alcanza un punto y a partir de él empieza a disminuir. **Fabio:** El cuerpo está en el punto más alto posible, disminuyendo de forma considerable su aceleración y con una velocidad de 0. **Maytte:** En esta posición ocurre lo mismo

	siendo que se encuentra a la derecha con signo positivo y decrece hasta -6 formando un tiro vertical. **Yesika:** Retrocede ya que no hay velocidad
$2<t<3$	**David:** Su aceleración indica dirección izquierda. **Juan:** Su posición y velocidad disminuyen con una aceleración constante. **Fabio:** El cuerpo comienza a bajar de su posición, en dirección contraria a la que se dirigía por lo cual su velocidad y aceleración ahora son negativas. **Maytte:** En este intervalo inicio su recorrido a la derecha positivo, pero al transcurrir el tiempo decrece continuamente. **Yesika:** hacia la derecha aumentando su velocidad.
t=3	**David:** Su distancia recorrida es cero. **Juan:** En este punto la partícula pasa por su origen y su posición sigue disminuyendo. **Fabio:** El cuerpo está en reposo perdiendo velocidad y aceleración. **Maytte:** Al inicio del recorrido empieza con una distancia positiva al moverse este va decreciendo y llega hasta -12. **Yesika:** Se mueve hacia la derecha pero desacelerando.
$3<t$	**David:** Su aceleración indica dirección izquierda. **Juan:** A partir de aquí su desplazamiento va en el sentido contrario. **Fabio:** El cuerpo está en el extremo negativo perdiendo más velocidad y aceleración (se deduce que va en caída). **Maytte:** desde que inició su movimiento fue de forma decreciente con un desplazamiento infinito. **Yesika:**

La prueba de entrada evidencia que los estudiantes no comprenden el concepto de derivada como pendiente de la recta tangente y razón de cambio, por lo tanto se les dificulta resolver problemas de aplicación donde deben analizar un fenómeno que cambia con el tiempo y del mismo modo analizar en detalle las soluciones de problemas de aplicación.

4.3. Crecimiento de una población

En el segundo plan de clases se tratan aquellos conceptos propios de la teoría de ecuaciones diferenciales, así como su aplicabilidad e importancia en la modelación de ciertas situaciones problema.

Durante este tiempo se propone trabajar con el crecimiento de una población, lo que se espera es que los estudiantes con base en sus conocimientos previos logren construir un modelo que se adapte al crecimiento de la población de Estados Unidos. Para iniciar se les suministra a los estudiantes una tabla de cómo ha crecido dicha población desde 1790 hasta el año 2000 cada 10 años.

Previamente los estudiantes saben que se debe partir de un modelo lo más sencillo posible pero que se adapte a las condiciones reales. Inicialmente todos los estudiantes tienen dificultad para proponer un modelo posiblemente porque nunca se han aventurado a hacerlo. Tímidamente David afirma que se debe partir de la población inicial y luego cada vez se suma algo, por su parte Juan cree que es mejor multiplicar la población inicial por alguna cantidad, después de discutir por varios minutos Fabio propone que la población inicial se multiplique por alguna variable y que el tiempo debe verse en el modelo.

Luego de alguna discusión, se concluye que es posible modelar el crecimiento de la población de los Estados Unidos mediante la ecuación diferencial,

$$\frac{dP}{dt} = 3.9P$$

Donde P es la población, t es el tiempo y 3.9 es la población inicial de los Estados Unidos.

De manera que cuando la población es cero se tiene que:

$$\frac{dP}{dt} = 3.9 * 0 = 0$$

El profesor aclara que es una solución de equilibrio, ya que si la población es cero siempre va a ser cero, del mismo modo sugiere que si se quiere que el modelo sea más general es conveniente reemplazar la población inicial por una constante, así:

$$\frac{dP}{dt} = KP$$

El paso siguiente es tratar de encontrar una solución para la ecuación diferencial, al preguntar sobre cómo se resuelve dicha ecuación diferencial, Yesika cree que el término dt se puede pasar a multiplicar a la derecha y la P debe pasar a dividir a la izquierda así: $\frac{dP}{P} = Kdt$

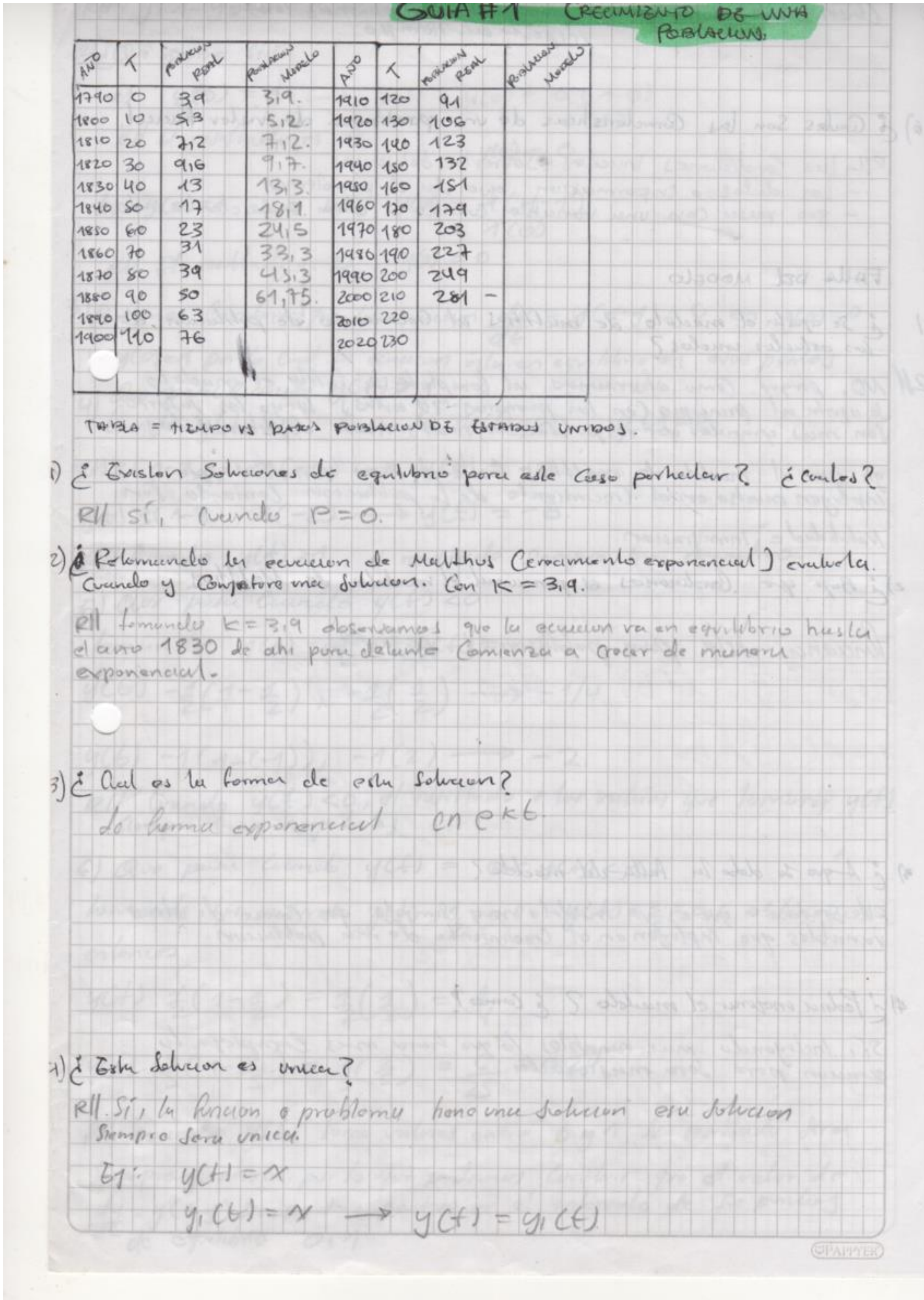
El profesor aclara que este método se conoce como separación de variables y es la estrategia para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales. Luego de algunos minutos los estudiantes logran resolver la ecuación diferencial, de donde resulta:

$$P(t) = ce^{kt}$$

En este punto se aclara que el anterior resultado se conoce como el modelo de Malthus o de crecimiento exponencial.

Los estudiantes quedan algo preocupados debido a que tienen muchas variables en el modelo, de donde surge el interrogante ¿Cómo encontrar los valores de C y k? Fabio recuerda que en la prueba de entrada cuando se estudió el movimiento de una pelota lanzada hacia arriba resulto una constante de integración cuyo valor se encontró reemplazando la velocidad inicial, entonces el concluyo que se podía emplear la población inicial y así obtuvieron:

$$P(t) = 3.9e^{kt}$$



GUIA #1 CRECIMIENTO DE UNA POBLACION.

AÑO	T	POBLACION REAL	POBLACION MODELO	AÑO	T	POBLACION REAL	POBLACION MODELO
1790	0	3,9	3,9.	1910	120	91	
1800	10	5,3	5,12	1920	130	106	
1810	20	7,2	7,2.	1930	140	123	
1820	30	9,6	9,7.	1940	150	132	
1830	40	13	13,3.	1950	160	151	
1840	50	17	18,1.	1960	170	179	
1850	60	23	24,5	1970	180	203	
1860	70	31	33,3	1980	190	227	
1870	80	39	45,3	1990	200	249	
1880	90	50	61,75.	2000	210	281	-
1890	100	63		2010	220		
1900	110	76		2020	230		

TABLA = TIEMPO VS DATOS POBLACION DE ESTADOS UNIDOS.

1) ¿ Existen Soluciones de equilibrio para este Caso particular ? ¿ Cuales ?

R// sí, cuando P = 0.

2) ¿ Retomando la ecuacion de Malthus (Crecimiento exponencial) evalua. Cuando y Compare una solucion. Con K = 3,9.

R// tomando K = 3,9 observamos que la ecuacion va en equilibrio hasta el año 1830 de ahi para delante Comienza a crecer de manera exponencial.

3) ¿ Cual es la forma de esta Solucion?

La forma exponencial en e^{kt}.

4) ¿ Esta Solucion es unica?

R//. Sí, la funcion o problema tiene una solucion esa solucion Siempre sera unica.

Ej: $y(t) = x$

$y_1(t) = x \longrightarrow y(t) = y_1(t)$

Figura 7: **Crecimiento de una población.**

Ahora David cree que para hallar el valor de k se puede emplear otra condición de las que se encuentran en la tabla, se sabe que 10 años después, es decir, en 1800 la población era de 5.3 millones de personas, de esta manera la función $P(t)$ seria:

$$P(t) = 3.9e^{0.3067t}$$

(Ver Figura 7) Los cinco estudiantes realizan los cálculos, pero observan que desde la década de 1870 en adelante la diferencia entre la población real y la calculada según el modelo se hace cada vez mayor, entonces surge la pregunta de ¿Por qué falló nuestro modelo?

Juan afirma que efectivamente el modelo es de crecimiento exponencial y en poco tiempo la población crece muy rápidamente, Yesika resalta que el modelo es muy sencillo y no tiene en cuenta la mortalidad y los recursos.

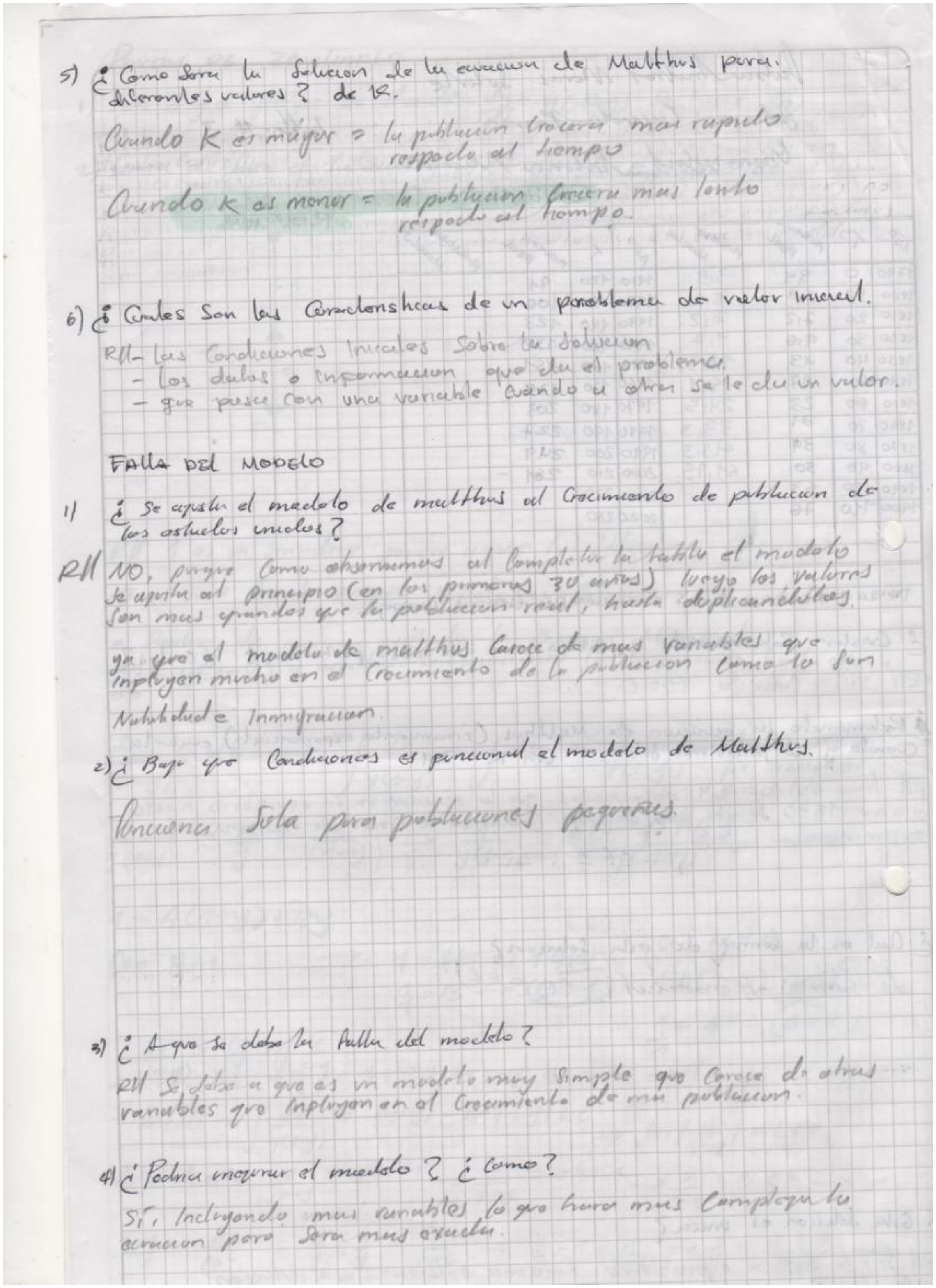
Antes de conjeturar otro modelo o alguna modificación para el actual, se hacen dos preguntas:

1. ¿Qué sucede si k aumenta o disminuye incluso hasta hacerse negativa?

A esta pregunta Maytte responde que si k aumenta la población crecerá más rápido y si disminuye su crecimiento es más lento y si k es negativa la población decrece.

2. ¿Bajo qué condiciones funciona el modelo de Malthus?

David cree que este modelo funciona para poblaciones pequeñas y tiempos cortos. (Ver figura 8)


5) ¿Como sera la solucion de la ecuacion de Malthus para diferentes valores? de K.

Cuando K es mayor = la poblacion crecera mas rapido respecto al tiempo

Cuando k es menor = la poblacion crecera mas lento respecto al tiempo.

6) ¿Cuales son las caracteristicas de un problema de valor inicial.

R//- las condiciones iniciales sobre la solucion
- los datos o informacion que da el problema.
- que pase con una variable cuando a otra se le da un valor.

FALLA DEL MODELO

1) ¿Se ajusta el modelo de malthus al crecimiento de poblacion de los estudios iniciales?

R// NO, porque como observamos al completar la tabla el modelo se ajusta al principio (en los primeros 30 años) luego los valores son mas grandes que la poblacion real, hasta duplicandola.

ya que el modelo de malthus carece de mas variables que influyen mucho en el crecimiento de la poblacion como lo son Natalidad e Inmigracion.

2) ¿Bajo que condiciones es funcional el modelo de Malthus.

Funciona solo para poblaciones pequeñas.

3) ¿A que se debe la falla del modelo?

R// Se debe a que es un modelo muy simple que carece de otras variables que influyen en el crecimiento de una poblacion.

4) ¿Podria mejorar el modelo? ¿Como?

Si, incluyendo mas variables lo que haria mas completa la ecuacion para ser mas exacta.

***Figura 8*: Práctica crecimiento de poblaciones.**

4.4. Ecuación de Verhulst o Logística

Como se notó el modelo de Malthus no predice adecuadamente la población de los Estados Unidos por lo tanto se debe mejorar si es posible o conjeturar otro que se ajuste a la situación.

Los estudiantes entienden que el crecimiento de una población depende de los recursos y que estos no son ilimitados, pero igual el modelo de Malthus funciona con poblaciones pequeñas; por lo tanto, coinciden en que este modelo debe considerar los recursos y se parte de la siguiente premisa:

$$\frac{dP}{dt} = kPx$$

x debe estar cerca de 1 si la población es pequeña y si la población crece más que los recursos x debe ser negativo. En este punto los estudiantes sufren un bloqueo, de manera que con intervención del profesor se logra concluir que x debe ser:

$$x = 1 - \frac{P}{N}$$

Donde N representa los recursos y P la población, de manera que si $P > N$ x se hace negativo, por tanto la población decrece, pero sí $P < N$ x es positivo de modo que la población crece, así las cosas el modelo quedo así:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Una vez afinado el modelo los estudiantes deben hacer el análisis cualitativo de la ecuación diferencial, es decir, encontrar los puntos o soluciones de equilibrio; Juan rápidamente dice que sí $P = 0$, se tiene una solución de equilibrio, la pregunta que sigue es si hay más soluciones de equilibrio, la respuesta a esta pregunta no surge tan rápidamente como la anterior.

Después de pensarlo algún tiempo Fabio cree que $P = N$ es otra solución de equilibrio, lo cual efectivamente es cierto, ahora cada estudiante debe bosquejar las soluciones junto con las soluciones de equilibrio en el plano $P - t$, a los cinco estudiantes les resulta relativamente fácil bosquejar las soluciones de equilibrio, pero se preguntan ¿cómo bosquejar otras soluciones?

Juan afirma que si la población aumenta haciéndose mayor que N, lo que está en el paréntesis tiene signo negativo, por lo tanto la ecuación diferencial es negativa también, obvio siendo P y K positivos, de manera que la población decrece. Por otro lado si $N > P$, lo que está en paréntesis tiende a 1, lo cual significa que se obtendría nuevamente la ecuación de crecimiento exponencial, que como se vio solo funciona para poblaciones muy pequeñas. David dice que si $0 < P < N$, la población va creciendo hasta acercarse a N. (ver Figuras 9 y 10)

> $dfieldplot\left(diff(p(t), t) = p(t) - p(t)^2, p(t), \mathrm{t} = 0\,..5, \mathrm{p} = -2\,..3\right)$

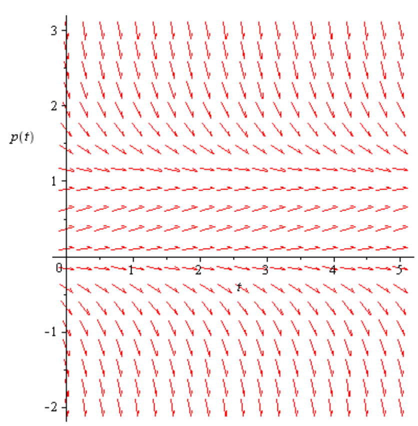
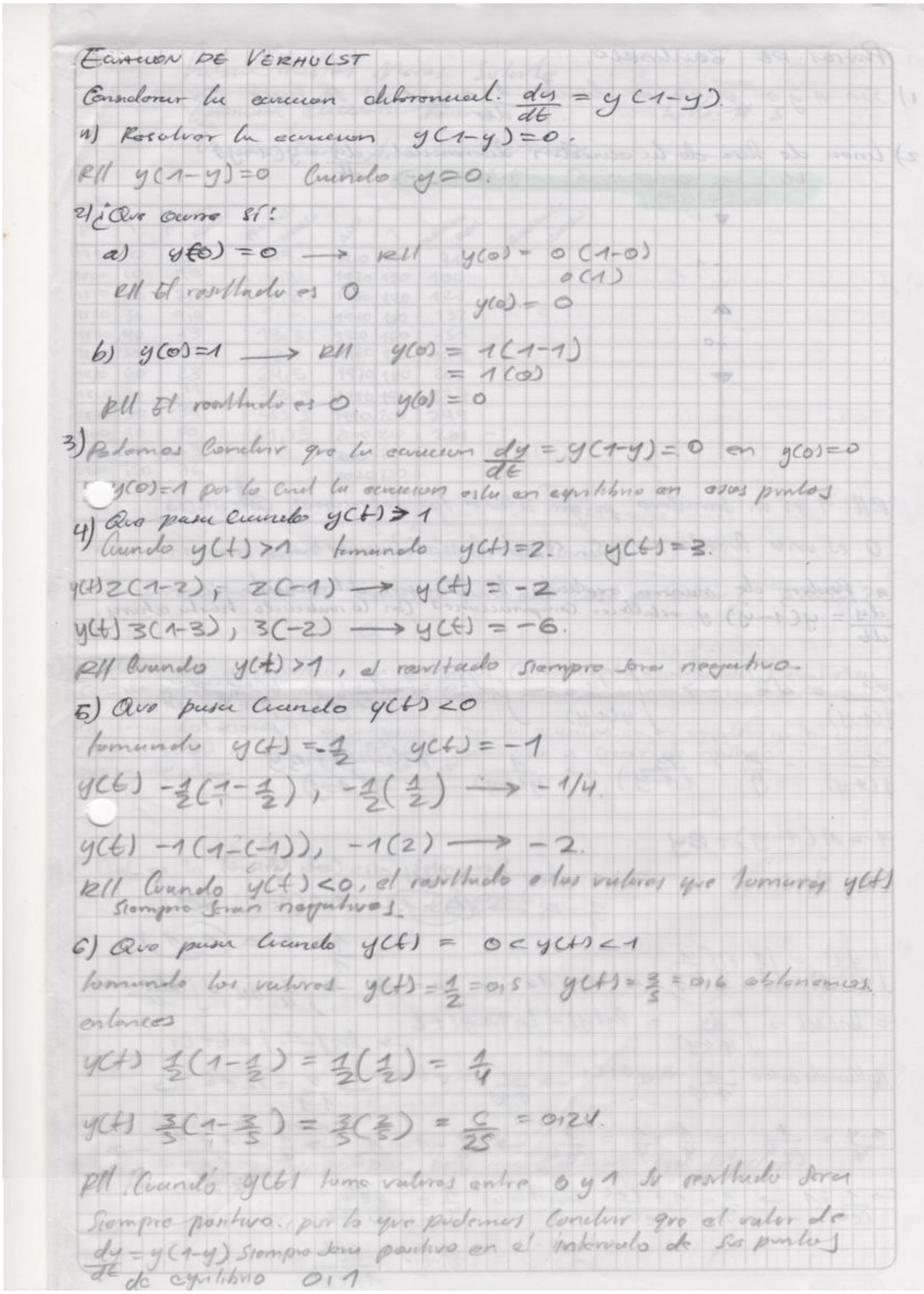


***Figura 9*: Campo de pendientes de la ecuación de Verhulst.**


ECUACION DE VERHULST

Considerar la ecuacion diferencial. $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$.

1) Resolver la ecuacion $y(1-y)=0$.

R// $y(1-y)=0$ Cuando $y=0$.

2) ¿Que ocurre si?

a) $y(0)=0 \longrightarrow$ R// $y(0) = 0(1-0)$
$0(1)$
$y(0) = 0$

R// El resultado es 0

b) $y(0)=1 \longrightarrow$ R// $y(0) = 1(1-1)$
$= 1(0)$

R// El resultado es 0 $y(0) = 0$

3) Podemos Concluir que la ecuacion $\frac{dy}{dt} = y(1-y) = 0$ en $y(0)=0$ y $y(0)=1$ por lo Cual la ecuacion esta en equilibrio en esos puntos

4) Que pasa Cuando $y(t) \geqslant 1$

Cuando $y(t)>1$ tomando $y(t)=2$. $y(t)=3$.

$y(t)\ 2(1-2)$; $2(-1) \longrightarrow y(t) = -2$

$y(t)\ 3(1-3)$, $3(-2) \longrightarrow y(t) = -6$.

R// Cuando $y(t)>1$, el resultado siempre sera negativo.

5) Que pasa Cuando $y(t)<0$

tomando $y(t) = -\frac{1}{2}$ $y(t) = -1$

$y(t)\ -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})$, $-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) \longrightarrow -1/4$.

$y(t)\ -1(1-(-1))$, $-1(2) \longrightarrow -2$.

R// Cuando $y(t)<0$, el resultado o los valores que tomaras $y(t)$ siempre seran negativos.

6) Que pasa Cuando $y(t) = 0 < y(t) < 1$

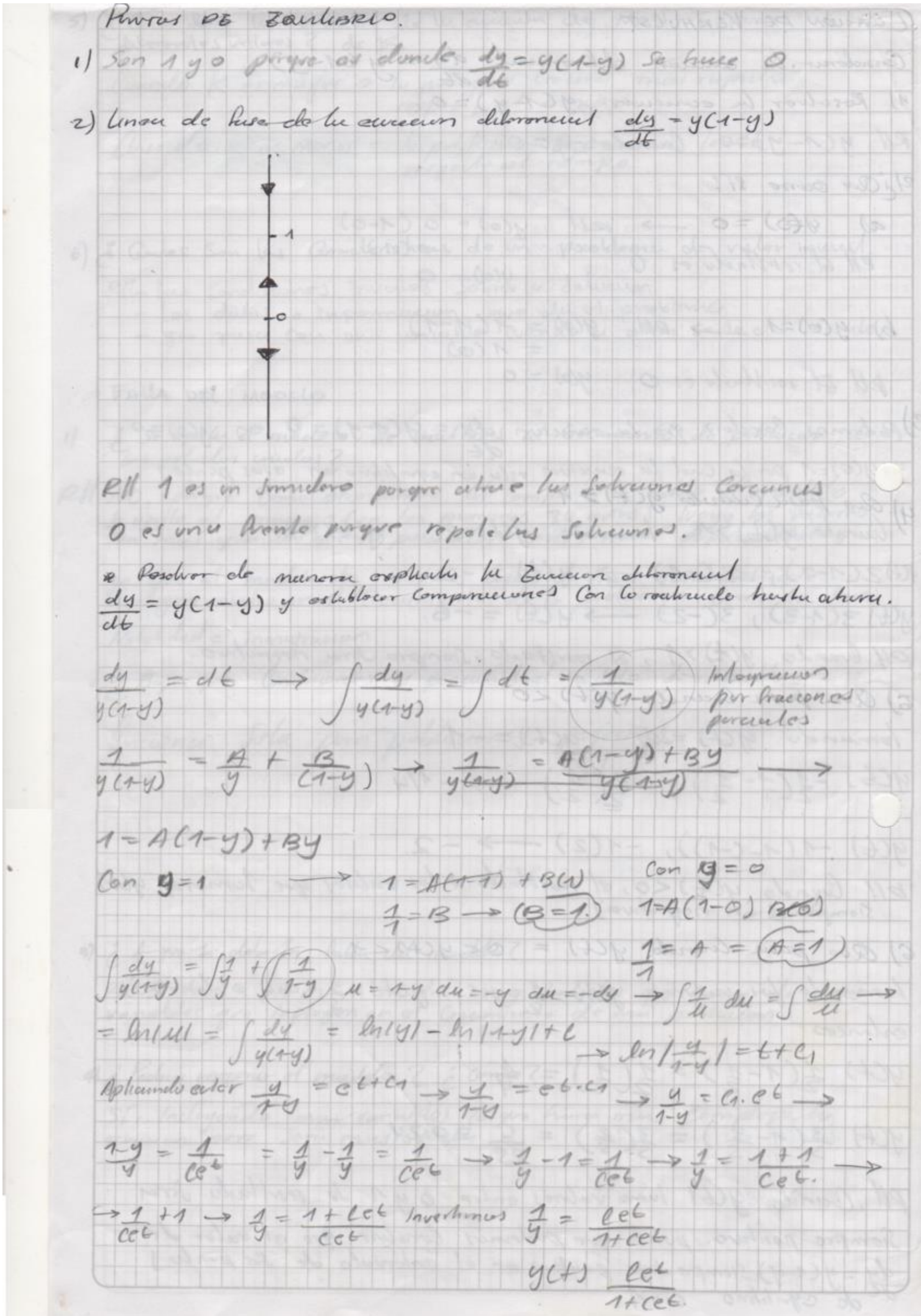
tomando los valores $y(t) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $y(t) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ obtenemos entonces

$y(t)\ \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$y(t)\ \frac{3}{5}(1-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}(\frac{2}{5}) = \frac{6}{25} = 0{,}24$.

R// Cuando $y(t)$ tome valores entre 0 y 1 su resultado sera siempre positivo. por lo que podemos Concluir que el valor de $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ siempre sera positivo en el intervalo de sus puntos de equilibrio 0 y 1

Figura 10: **Análisis de la ecuación de Verhulst.**



Puntos DE EQUILIBRIO.

1) Son 1 y 0 porque es donde $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ se hace 0.

2) Linea de fase de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$

R// 1 es un sumidero porque atrae las soluciones cercanas

0 es una fuente porque repele las soluciones.

* Resolver de manera explícita la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ y establecer comparaciones con lo realizado hasta ahora.

$\frac{dy}{y(1-y)} = dt \rightarrow \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dt = \frac{1}{y(1-y)}$ Integración por fracciones parciales

$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(1-y)} \rightarrow \frac{1}{\cancel{y(1-y)}} = \frac{A(1-y)+By}{\cancel{y(1-y)}} \longrightarrow$

$1 = A(1-y) + By$

Con $y = 1 \longrightarrow 1 = \cancel{A(1-1)} + B(1)$ $\quad$ Con $y = 0$

$\frac{1}{1} = B \longrightarrow (B = 1)$ $\quad$ $1 = A(1-0)\ \cancel{B(0)}$

$\frac{1}{1} = A = (A = 1)$

$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{1}{y} + \int \frac{1}{1-y}$ $\quad u = 1-y \quad du = -y \quad du = -dy \rightarrow \int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{du}{u} \longrightarrow$

$= \ln|u| = \int \frac{dy}{y(1-y)} = \ln|y| - \ln|1-y| + C$

$\rightarrow \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = t + C_1$

Aplicando euler $\frac{y}{1-y} = e^{t+C_1} \rightarrow \frac{y}{1-y} = e^{t} \cdot e^{C_1} \rightarrow \frac{y}{1-y} = C_1 \cdot e^{t} \longrightarrow$

$\frac{1-y}{y} = \frac{1}{Ce^{t}} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = \frac{1}{Ce^{t}} \rightarrow \frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{Ce^{t}} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+1}{Ce^{t}} \longrightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{Ce^{t}} + 1 \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1+Ce^{t}}{Ce^{t}}$ Invertimos $\frac{1}{y} = \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}$

$y(t) = \frac{Ce^{t}}{1+Ce^{t}}$

***Figura 11*: Solución analítica de la ecuación de Verhulst.**

Ahora los estudiantes deben analizar la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)$$

Rápidamente Yesika dice que las soluciones de equilibrio son $y = 0$ y $y = 1$ ahora los estudiantes construyen la línea de fase (ver Figura 11), y el campo de pendientes (Ver Figura 12) para clasificar las soluciones de equilibrio.

El paso a seguir consiste en clasificar las soluciones, el profesor uso la analogía de la lluvia que cae en un patio, para que el agua no se estanque, debe tener un desagüe o un sumidero de manera que el agua cerca de él vaya directo al sumidero, que es lo que ocurre cuando $y = 1$, por lo tanto se puede afirmar que la solución de equilibrio $y = 1$ es un sumidero.

Por otro lado, se observa que en el caso de la solución de equilibrio $y = 0$ las soluciones cercanas, tanto por arriba del cero como por debajo se alejaran de manera que se tendría una fuente. Juan pregunta cómo se llaman las soluciones de equilibrio donde aquellas soluciones cercanas a ella, por un lado, se acercan y por el otro se alejan, se acuerda con los estudiantes que se denominara un nodo.

Como cierre del plan de clase, se sugiere a los estudiantes resolver algunos problemas similares a los trabajados en clase con algunas variaciones con el ánimo de que afiancen lo visto en clase.

```
> dfieldplot(diff(y(t), t) = y(t) - y(t)^2, y(t), t = 0..5, y =
      -2..3, color = y(t) - y(t)^2)
```

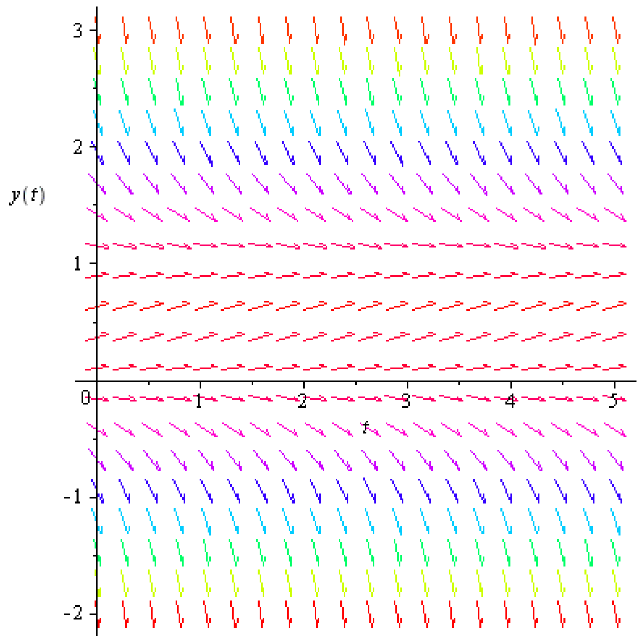
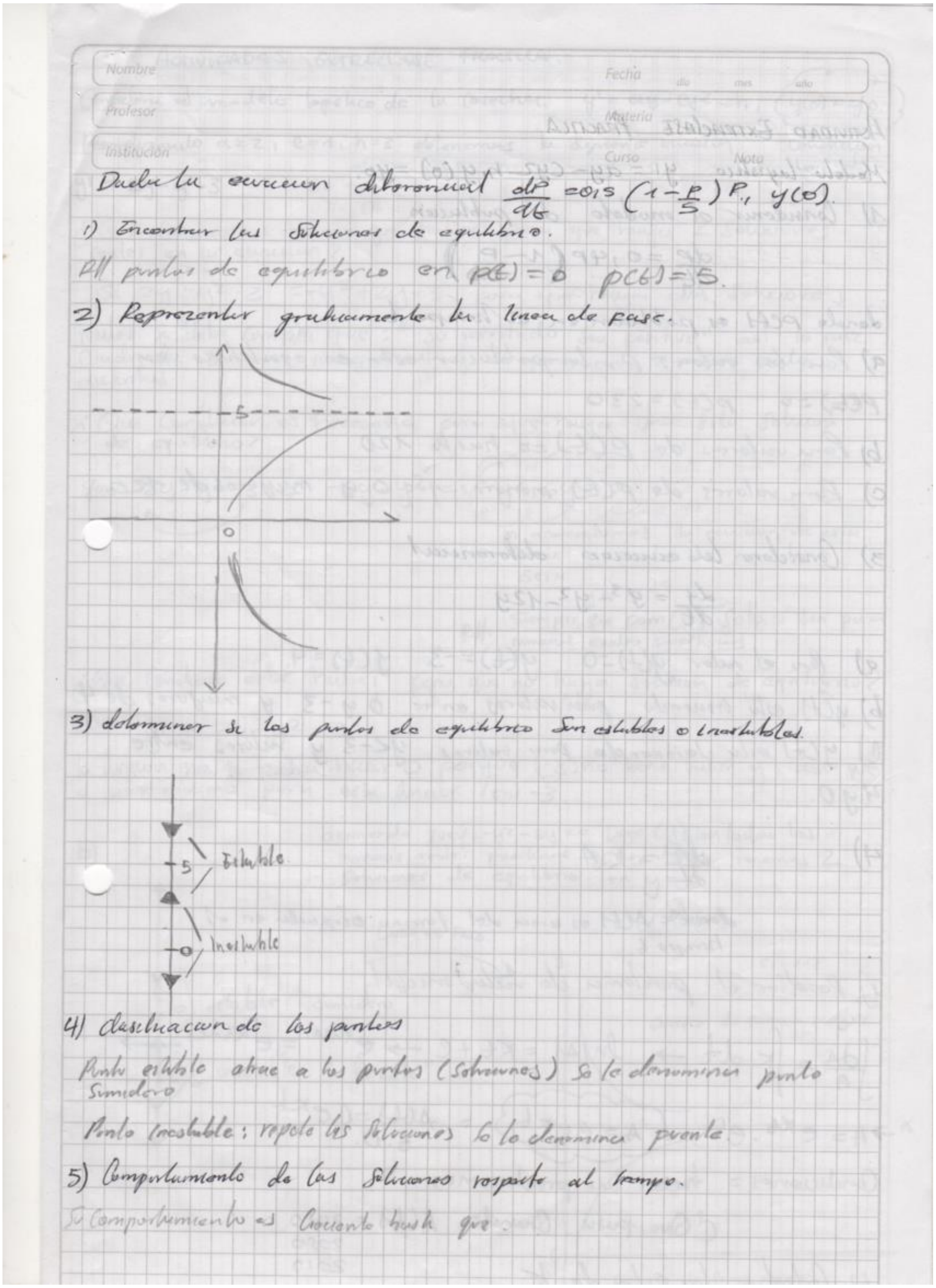


***Figura 12*: Campo de pendientes de la ecuación $y(t) = y(1 - Y)$.**



Nombre Fecha día mes año

Profesor Materia

Institución Curso Nota

Dada la ecuacion diferencial $\frac{dP}{dt} = 0{,}5\left(1-\frac{P}{5}\right)P$, $y(0)$.

1) Encontrar las soluciones de equilibrio.

All puntos de equilibrio en $P(t) = 0$ $P(t) = 5$.

2) Representar graficamente la linea de fase.

3) determinar si los puntos de equilibrio son estables o inestables.

4) clasificacion de los puntos

Punto estable atrae a los puntos (soluciones) se le denomina punto sumidero

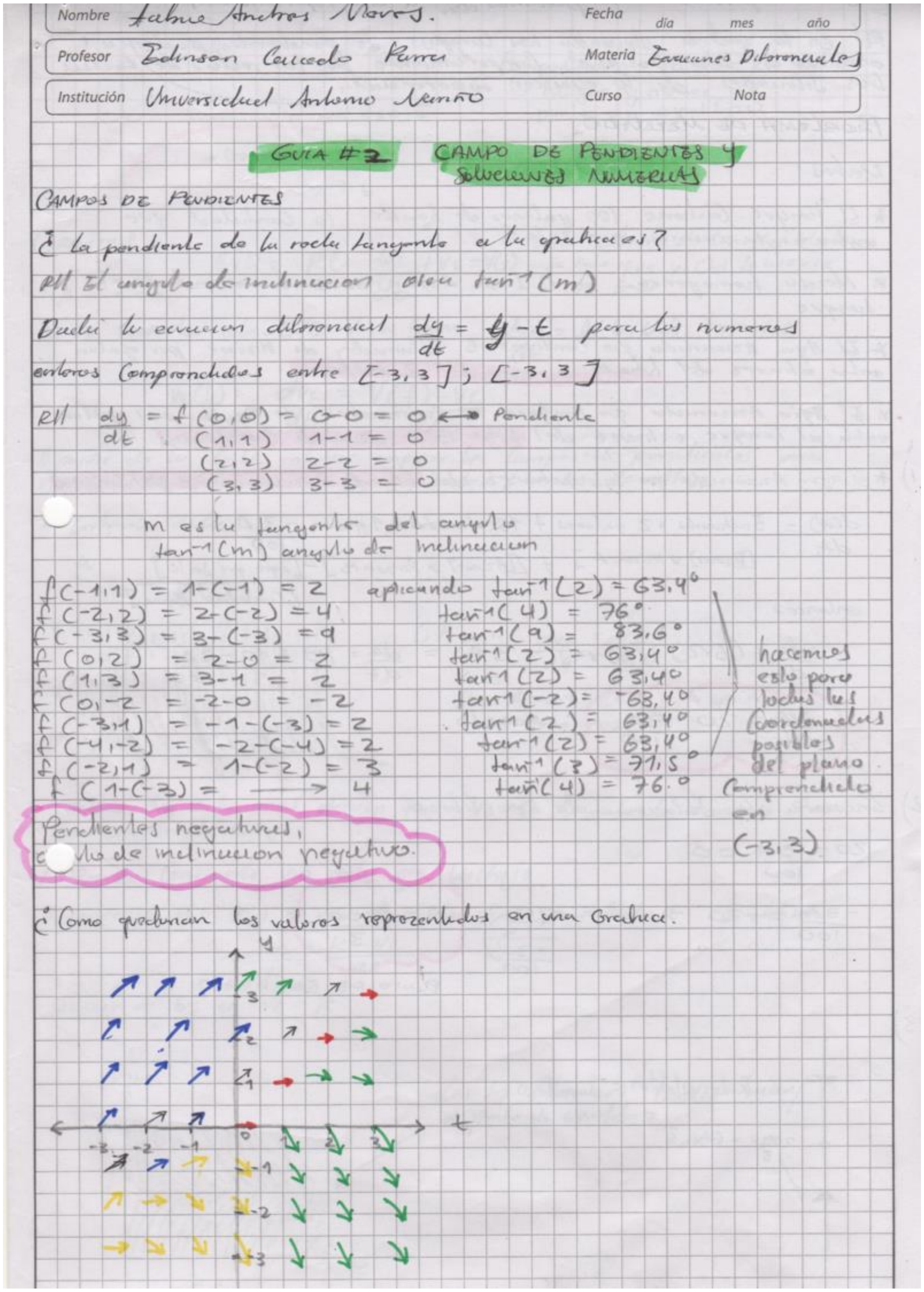
Punto inestable: repele las soluciones se le denomina fuente.

5) Comportamiento de las soluciones respecto al tiempo.

Su comportamiento es creciente hasta que.

***Figura 13*: Práctica sobre la ecuación de Verhulst.**

4.5. Campos de Pendientes



Nombre Fabio Andres Moreno. Fecha día mes año

Profesor Edinson Caicedo Parra Materia Ecuaciones Diferenciales

Institución Universidad Antonio Nariño Curso Nota

GUIA #2 CAMPO DE PENDIENTES Y SOLUCIONES NUMERICAS

CAMPOS DE PENDIENTES

¿ La pendiente de la recta tangente a la grafica es?

R// El angulo de inclinacion sería $\tan^{-1}(m)$

Dada la ecuacion diferencial $\frac{dy}{dt} = y - t$ para los numeros enteros comprendidos entre $[-3, 3]$; $[-3, 3]$

R// $\frac{dy}{dt} = f(0,0) = 0-0 = 0$ ⟷ Pendiente

$(1,1)$ $1-1 = 0$

$(2,2)$ $2-2 = 0$

$(3,3)$ $3-3 = 0$

m es la tangente del angulo

$\tan^{-1}(m)$ angulo de inclinacion

$f(-1,1) = 1-(-1) = 2$ aplicando $\tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

$f(-2,2) = 2-(-2) = 4$ $\tan^{-1}(4) = 76°$

$f(-3,3) = 3-(-3) = 9$ $\tan^{-1}(9) = 83{,}6°$

$f(0,2) = 2-0 = 2$ $\tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

$f(1,3) = 3-1 = 2$ $\tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

$f(0,-2 = -2-0 = -2$ $\tan^{-1}(-2) = -63{,}4°$

$f(-3,-1) = -1-(-3) = 2$ $\tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

$f(-4,-2) = -2-(-4) = 2$ $\tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

$f(-2,1) = 1-(-2) = 3$ $\tan^{-1}(3) = 71{,}5°$

$f(1-(-3) =$ ⟶ 4 $\tan^{-1}(4) = 76°$

hacemos esto para todas las coordenadas posibles del plano comprendido en $(-3,3)$

Pendientes negativas, angulo de inclinacion negativo.

¿ Como quedarían los valores representados en una Grafica.

***Figura 14*: Método numérico de Euler.**

Inicialmente se hace énfasis en el concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente, luego se propone la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y - t$ y en vista de que los estudiantes no saben cómo resolverla analíticamente, se pide encontrar y bosquejar las pendientes para los puntos con valores enteros comprendidos entre $-3 \leq t \leq 3$ y $-3 \leq y \leq 3$ en el plano $t - y$ (Ver Figura 14).

Se pregunta a los estudiantes ¿Qué interpretación le podemos dar a esta representación?, después de pensarlo por algunos minutos Juan dice que los vectores que se construyen deben asemejarse a la función primitiva $F(t, y)$, los demás estudiantes no quedan muy convencidos, por lo cual se pide que trabajen con una función más sencilla de la cual conozcan la primitiva para verificar la conjetura de Juan.

Ahora se propone la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = t$, la cual ellos ya saben resolver analíticamente y efectivamente los estudiantes verifican que el bosquejo construido realmente es consistente con la función primitiva.

$$Y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

En este momento se hace caer en cuenta a los estudiantes acerca del uso de Maple® para graficar los campos de pendientes, así como las soluciones particulares, lo cual es bastante gratificante, pues significa que se ahorrara gran cantidad de trabajo y tiempo además de la precisión a la hora de bosquejar los campos de pendientes (Ver Figura 15).

```
> dfieldplot(diff(y(t), t) = y(t) − t, y(t), t = −3 ..3, y = −3
    ..2, title = `Campo de Pendientes`, color = y − t);
```

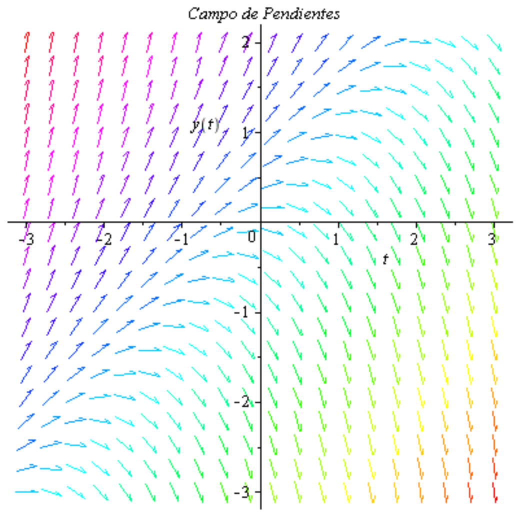


***Figura 15*: Campo de pendientes para la función $\frac{dy}{dt} = y - t$.**

4.6. Problema de Mezclas

La actividad siguiente es conjeturar un modelo para determinar la cantidad de azúcar en un tanque donde existen las siguientes condiciones:

- El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que sale, pero siempre hay 100 galones en el tanque
- La mezcla es homogénea, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque.
- El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo A a razón de 2 galones por minuto.
- El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo B a razón de 1 galón por minuto.
- El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.

Pasados varios minutos los estudiantes caen en cuenta de que la estructura del problema debe ser sumar lo que entra y restar lo que sale así:

$$\frac{dS}{dt} = 2 * 5 + 1 * 10 - 3 * \frac{S}{100}; \ \frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100}$$

Se procede a llevar a cabo el análisis cualitativo y Juan entra la única solución de equilibrio que es $S = \frac{2000}{3} \approx 666{,}67$ (Ver Figura 16),

> $ec2 := \frac{d}{dt} S(t) = 20 - \frac{3\,S(t)}{100}$

> $DEplot\left(ec2, [\mathrm{S(t)}], t=-1..100, S=0..800, \left[\left[S(0) = \frac{2000}{3}\right], [S(0)=200], [S(0)=750]\right], arrows = small, linecolor = blue\right)$

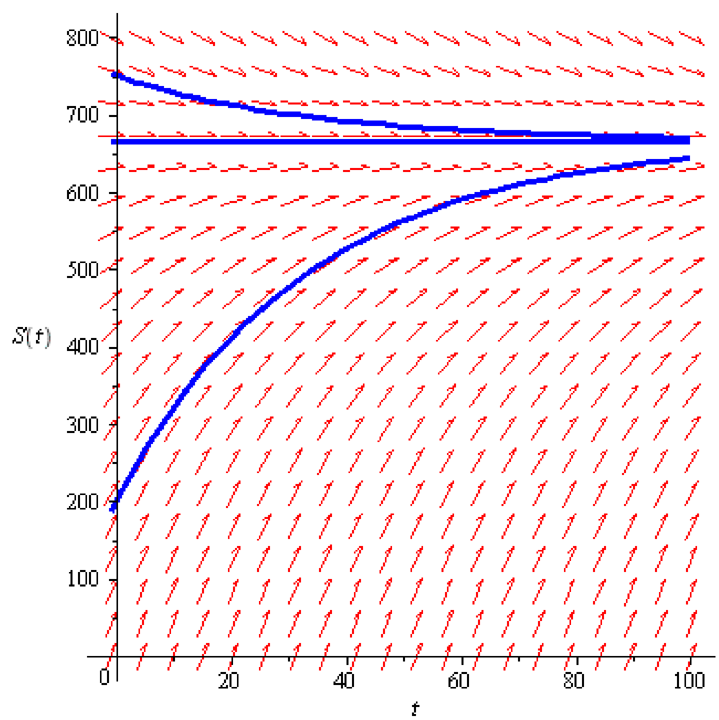
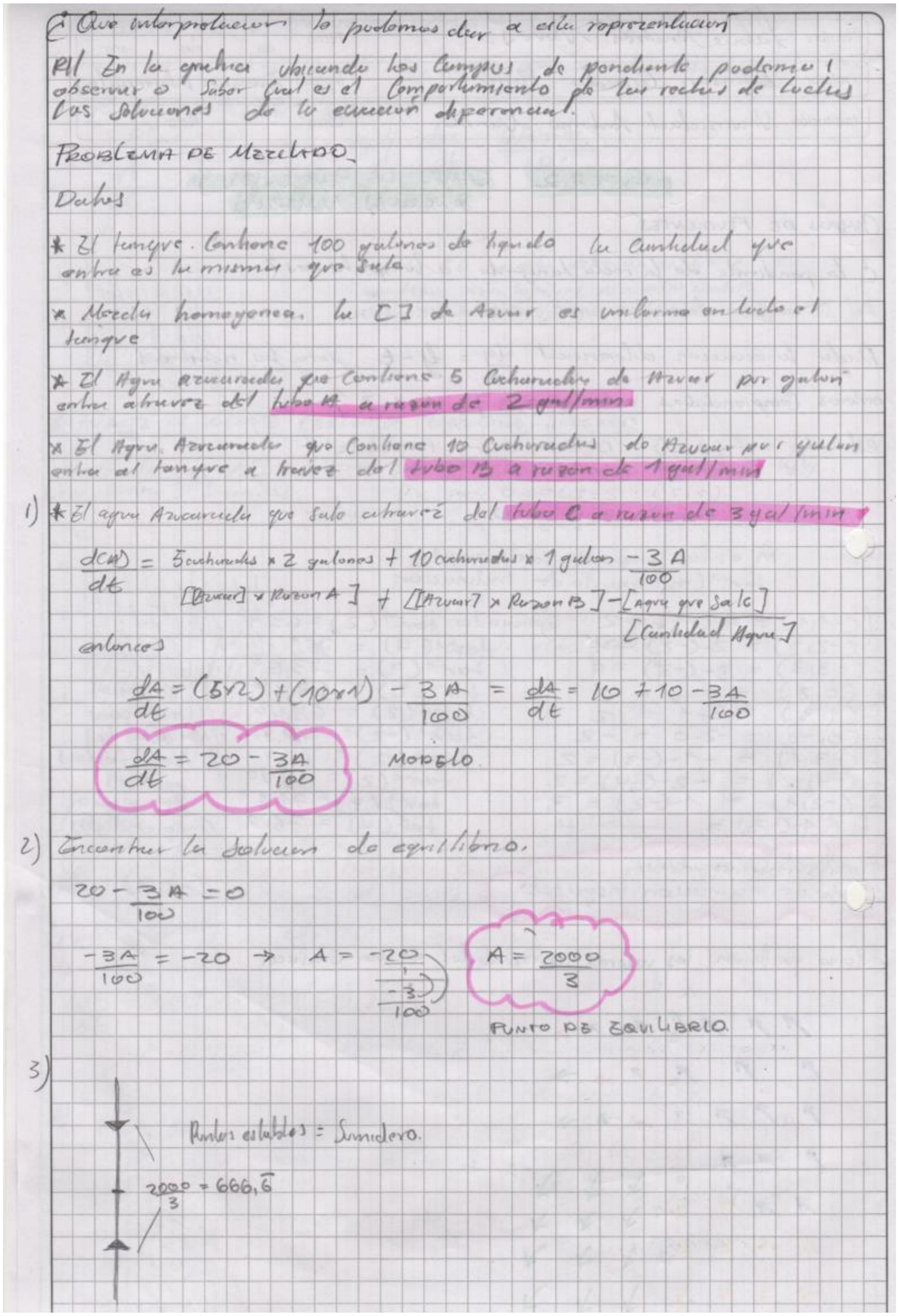


***Figura 16*: Campo de Pendientes para la función $\frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100}$.**



¿Que interpretacion le podemos dar a esta representacion?

R// En la grafica ubicando los campos de pendiente podemos observar o saber cual es el comportamiento de las rectas de todas las soluciones de la ecuacion diferencial.

PROBLEMA DE MEZCLADO

Datos

* El tanque contiene 100 galones de liquido la cantidad que entra es la misma que sale

* Mezcla homogenea. la [ ] de Azucar es uniforme en todo el tanque

* El Agua azucarada que contiene 5 cucharadas de Azucar por galon entra a traves del tubo A a razon de 2 gal/min.

* El Agua Azucarada que contiene 10 cucharadas de Azucar por galon entra al tanque a traves del tubo B a razon de 1 gal/min

1) * El agua Azucarada que sale a traves del tubo C a razon de 3 gal/min

$$\frac{d(A)}{dt} = 5\,\text{cucharadas} \times 2\,\text{galones} + 10\,\text{cucharadas} \times 1\,\text{galon} - \frac{3A}{100}$$

$$[\text{Azucar}] \times \text{Razon A} + [\text{Azucar}] \times \text{Razon B} - \frac{[\text{Agua que Sale}]}{[\text{Cantidad Agua}]}$$

entonces

$$\frac{dA}{dt} = (5 \times 2) + (10 \times 1) - \frac{3A}{100} = \frac{dA}{dt} = 10 + 10 - \frac{3A}{100}$$

$$\frac{dA}{dt} = 20 - \frac{3A}{100}$$ MODELO.

2) Encontrar la solucion de equilibrio.

$$20 - \frac{3A}{100} = 0$$

$$-\frac{3A}{100} = -20 \rightarrow A = \frac{-20}{\frac{-3}{100}} \qquad A = \frac{2000}{3}$$

PUNTO DE EQUILIBRIO.

3)

Puntos estables = Sumidero.

$\frac{2000}{3} = 666,\overline{6}$

Figura 17: **Análisis del problema de mezclas.**

Los estudiantes quedan bastante sorprendidos al notar que esta ecuación diferencial no tiene como solución de equilibrio $S = 0$.

Pero David conjetura que efectivamente dadas las condiciones no es posible que la concentración de azúcar sea cero en ningún momento, cuando menos debe ser igual a 20, y desde ese punto empieza a subir hasta llegar a la solución de equilibrio $S = \frac{2000}{3} \approx 666{,}67$ (Ver Figura 17).

La siguiente pregunta es ¿Qué ocurre cuando $S > \frac{2000}{3}$? Juan responde que si esto sucede el termino $\frac{3S}{100}$, se hace mayor que 20, por consiguiente la ecuación diferencial $\frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100}$ se hace negativa, lo que indica que la concentración de azúcar disminuye y tiende hacia la solución de equilibrio $S = \frac{2000}{3}$?, basados en las consideraciones hechas, todos los estudiantes logran bosquejar la solución de equilibrio junto con el comportamiento de las diferentes soluciones.

4.7. Circuitos RC

Ahora se propone un circuito RC, el cual está constituido por un capacitor, un resistor y una fuente de voltaje. El comportamiento del resistor es especificado por un parámetro positivo R (resistencia), y el del capacitor es especificado por un parámetro positivo C (capacitancia). La entrada de voltaje a través de la fuente de voltaje en el tiempo t es denotada por V(t) y es parte del diseño del circuito.

Los estudiantes a partir de la teoría de los circuitos eléctricos, deben establecer un modelo mediante una ecuación diferencial que corresponda a las condiciones enunciadas anteriormente.

Se recuerda a los estudiantes que se deben tener en cuenta las leyes de Kirchhoff y saber que lo que se quiere es encontrar un valor para la carga $v_c(t)$ en un circuito cerrado, por tanto se definen las caídas de voltaje para el resistor, capacitor e inductor así (Ver Tabla 2):

Tabla 2: Elementos de un circuito

Elementos del circuito	Caídas de voltaje en función de $i(t)$	Caídas de voltaje en función de v_c
Inductor	$c\frac{di}{dt}$	$L\frac{d^2i}{dt^2}$
Resistor	iR	$RC\frac{dv_c}{dt}$
Capacitor	$\frac{1}{c}v_c$	

Entonces, aplicando la ley de mallas de Kirchhoff al circuito, para las caídas de voltaje en función de la carga $v_c(t)$, tenemos:

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V(t)$$

A partir de la ecuación anterior se hacen los siguientes cuestionamientos:

1. ¿Qué pasa si la entrada de voltaje $v(t)$ es igual a cero?

Fabio despeja la ecuación diferencial y queda de la forma

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{RC}$$

Maytte cree que el signo menos indica que las soluciones decrecen, David pregunta si esta ecuación tiene soluciones de equilibrio, a lo cual Juan responde que la única solución de equilibrio $v_c = 0$, añade además que lo que Maytte dice es cierto por consiguiente las soluciones decrecen hacia cero.

David tiene sus reservas por lo que decide hacer el campo de pendientes en Maple® (Ver Figura 18), una vez lo hace logra verificar que efectivamente la hipótesis de Maytte es cierta.

> $with(DEtools)$:

> $DEplot\left(\frac{d}{dt}v(t)=-\frac{v(t)}{0.2}, v(t), t=-1..3, v=-1..3, title = \text{`Restricted domain`}, color=-\frac{v(t)}{0.2}\right)$

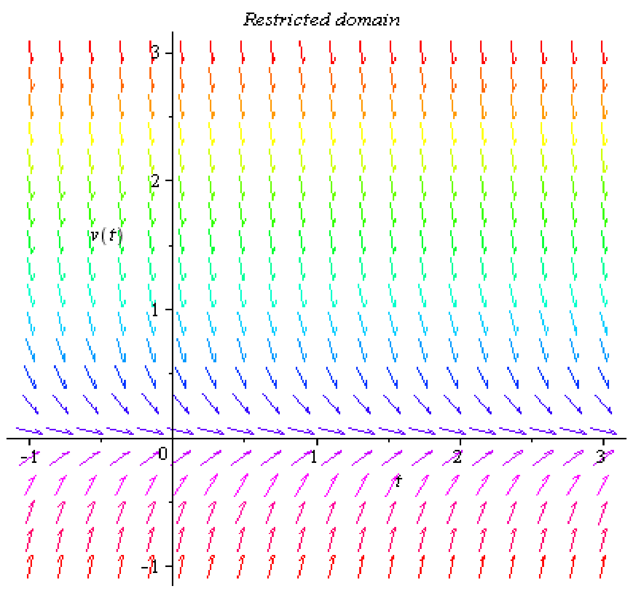


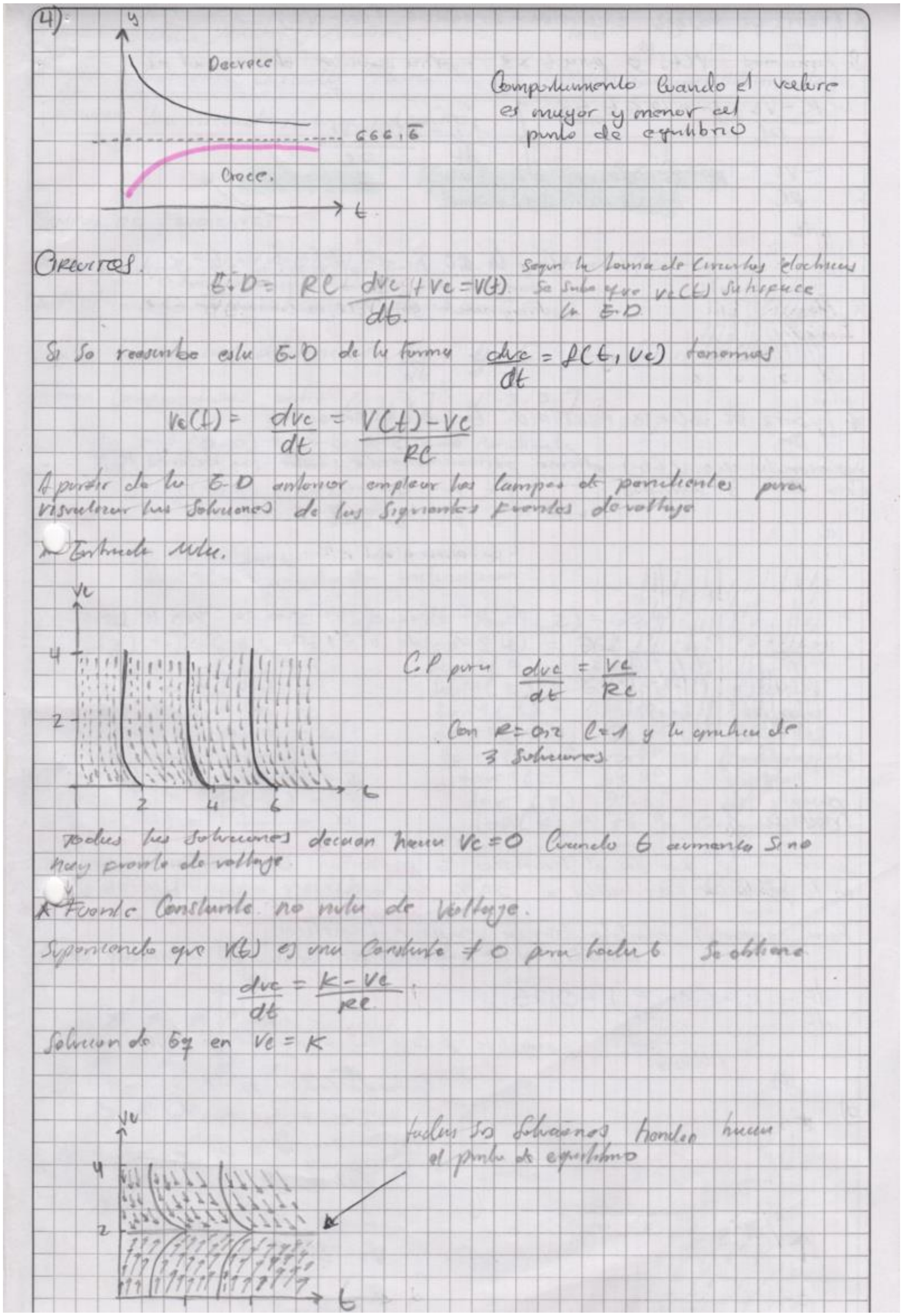
***Figura 18*: Campo de pendientes de la Función $\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{RC}$.**

2. ¿Qué pasa si la entrada de voltaje $v(t)$ es constante?

Nuevamente Fabio despeja la ecuación diferencial de lo que resulta (Ver Figura 19):

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{K - v_c}{RC}$$

La pregunta a continuación, es ¿Cuál o cuáles son las soluciones de equilibrio?



4)

Decrece

666,$\bar{6}$

Crece.

Comportamiento cuando el valor es mayor y menor del punto de equilibrio

Circuitos.

$$E.D = RC\frac{dv_c}{dt} + V_c = V(t)$$

Según la teoría de circuitos eléctricos se sabe que $V_c(t)$ satisface la E.D

Si se reescribe esta E.D de la forma $\frac{dv_c}{dt} = f(t, V_c)$ tenemos

$$V_c(t) = \frac{dv_c}{dt} = \frac{V(t) - V_c}{RC}$$

A partir de la E.D anterior emplear los campos de pendientes para visualizar las soluciones de las siguientes fuentes de voltaje

Entrada nula.

C.P para $\frac{dv_c}{dt} = \frac{V_c}{RC}$

Con $R = 0{,}2$ $C = 1$ y la gráfica de 3 soluciones

Todas las soluciones decaen hacia $V_c = 0$ cuando t aumenta si no hay fuente de voltaje.

Fuente constante no nula de voltaje.

Suponiendo que $V(t)$ es una constante $\neq 0$ para todo t se obtiene

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{K - V_c}{RC}$$

Solución de Eq en $V_c = K$

todas las soluciones tienden hacia el punto de equilibrio

***Figura 19*: Análisis cualitativo del circuito RC.**

David cree que la única solución de equilibrio es cuando $v_c = K$, lo cual es cierto

¿Qué clase de equilibrio es?, David dice que es un sumidero y lo verifica haciendo uso del Maple® (Ver Figura 20).

$$> \; DEplot\left(\frac{d}{dt}\, v(t) = \frac{5 - v(t)}{0.2},\, v(t),\, t = -1\,..10,\, v = -1\,..8,\; title = \text{`Restricted domain`},\, color = \frac{5 - v(x)}{0.2}\right)$$

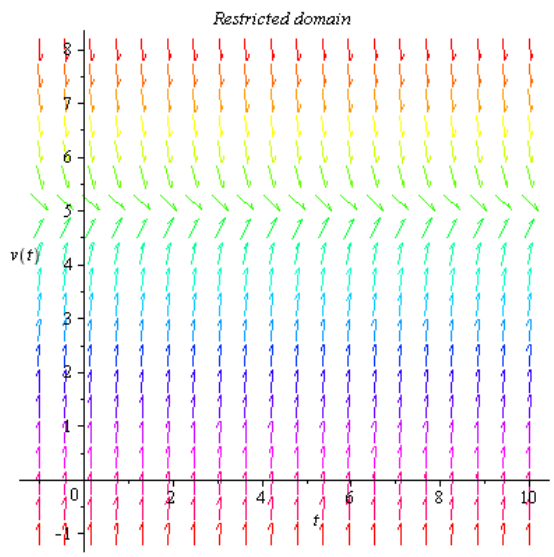


***Figura 20*: Campo de pendientes de la Función $\frac{dv_c}{dt} = \frac{K - v_c}{RC}$.**

3. ¿Qué pasa si la fuente de voltaje se enciende y se apaga?, es decir, para cierto tiempo se tiene $K \neq 0$ y en otro momento $K = 0$.

Fabio conjetura que lo más seguro es que se tienen que unir las soluciones encontradas en los numerales 1 y 2.

4.8. Métodos Numéricos: Euler

En este punto se recuerda a los estudiantes tener en cuenta el concepto de derivada como la pendiente de la recta a una curva dada en un punto.

Se parte de un problema de valor inicial: $\frac{dy}{dt} = f(t, y).\, y(t_0) = y_0$

La idea es empezar por un punto inicial (t_0, y_0) y a partir de este ir dando pequeños pasos entonces se escoge el tamaño del paso Δt, para encontrar (t_1, y_1) y así sucesivamente hasta poder reconstruir la curva solución.

La tarea inicial es resolver el problema de valor inicial: $\frac{dy}{dt} = 2y - 1, y(0) = 1$ con $\Delta t = 0{,}1$, que lo deben hacer manualmente. Una vez que han observado cómo funciona el método se pide pasar a Maple® para representarlo (Ver Figuras 21 y 23).

Yesika es la primera en observar que la curva obtenida y la solución real no son iguales, pero se asemejan mucho.

Se les pide que experimenten con diferentes valores para el paso Δt, Fabio observa que con Δt más pequeño la curva obtenida se parece más a la curva solución, lo cual tiene sentido (Ver Figura 22).

> *Student*[*NumericalAnalysis*][*EulerTutor*]( );

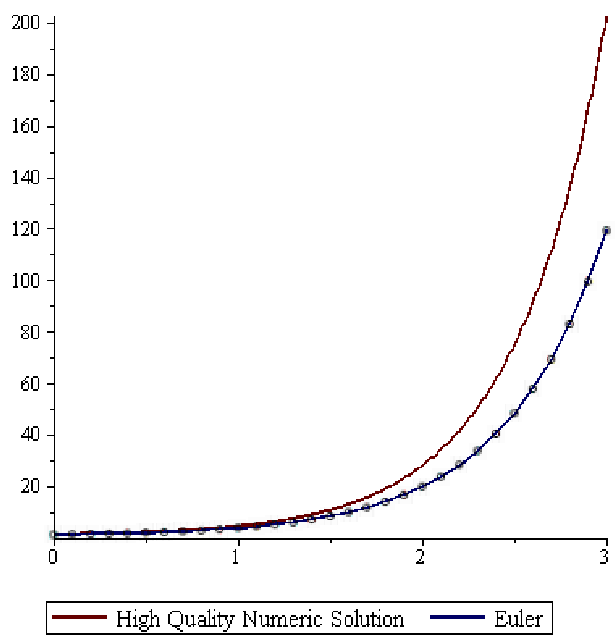


***Figura 21*: Método de Euler para el P.V.I. $\frac{dy}{dt} = 2y - 1, y(0) = 1, \Delta t = 0.1$.**

> $Student[NumericalAnalysis][EulerTutor]( );$

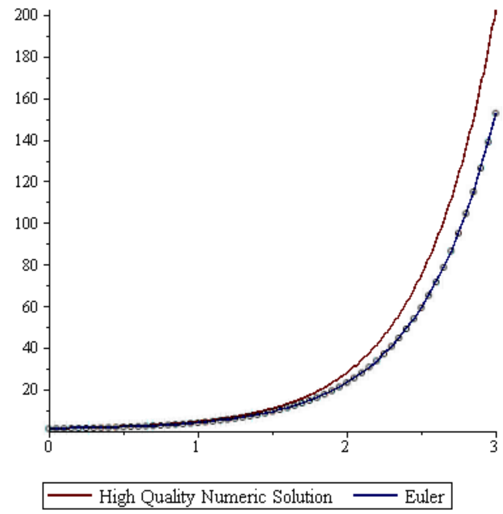
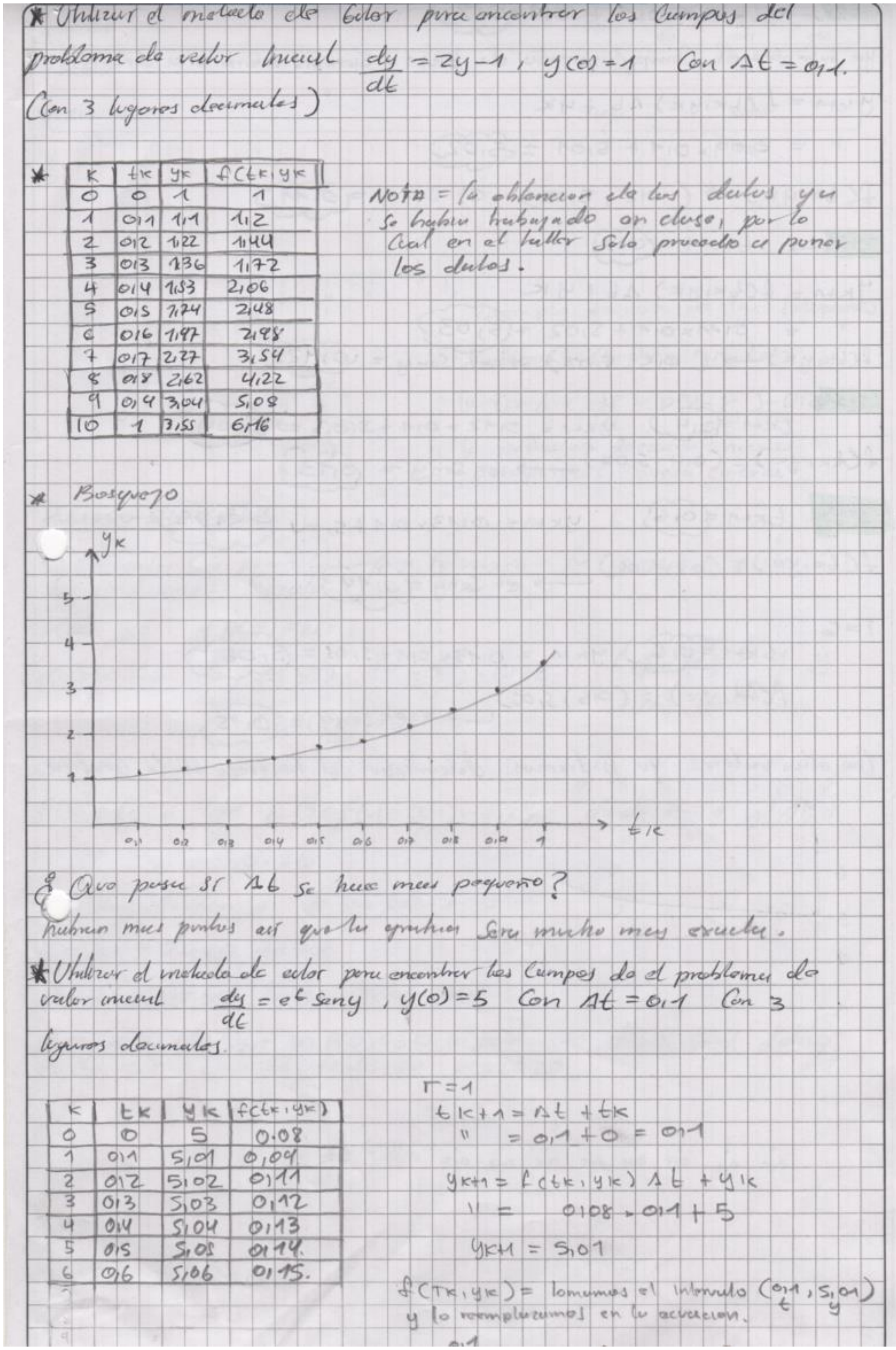


***Figura 22*: Método de Euler para el P.V.I. $\frac{dy}{dt} = 2y - 1, y(0) = 1, \Delta t = 0.05$.**



* Utilizar el método de Euler para encontrar los campos del problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = 2y - 1$, $y(0) = 1$ con $\Delta t = 0,1$. (Con 3 lugares decimales)

K	tk	yk	f(tk, yk)
0	0	1	1
1	0,1	1,1	1,2
2	0,2	1,22	1,44
3	0,3	1,36	1,72
4	0,4	1,53	2,06
5	0,5	1,74	2,48
6	0,6	1,97	2,98
7	0,7	2,27	3,54
8	0,8	2,62	4,22
9	0,9	3,04	5,08
10	1	3,55	6,16

Nota = la obtención de los datos ya se había trabajado en clase, por lo cual en el taller solo procedo a poner los datos.

* Bosquejo

¿Qué pasa si Δt se hace más pequeño?
Habrían más puntos así que la gráfica sería mucho más exacta.

* Utilizar el método de Euler para encontrar los campos de el problema de valor inicial $\frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{sen} y$, $y(0) = 5$ con $\Delta t = 0,1$ con 3 lugares decimales.

K	tk	yk	f(tk, yk)
0	0	5	0,08
1	0,1	5,01	0,09
2	0,2	5,02	0,11
3	0,3	5,03	0,12
4	0,4	5,04	0,13
5	0,5	5,05	0,14
6	0,6	5,06	0,15

$r = 1$

$t_{k+1} = \Delta t + t_k$

$\quad = 0,1 + 0 = 0,1$

$y_{k+1} = f(t_k, y_k)\,\Delta t + y_k$

$\quad = 0,08 \cdot 0,1 + 5$

$y_{k+1} = 5,01$

$f(t_k, y_k)$ = tomamos el intervalo $(\underset{t}{0,1}, \underset{y}{5,01})$ y lo reemplazamos en la ecuación.

Figura 23: **Método de Euler para el P.V.I.** $\frac{dy}{dt} = 2y - 1, y(0) = 1, \Delta t = 1.$

Ahora se pide que estudien el P.V.I. $\frac{dy}{dt} = e^t seny, y(0) = 5$ con $\Delta t = 0{,}1$, de igual modo se pide que experimenten con diferentes tamaños de paso, pero aquí Juan observa que cerca de $t = 5$ la grafica presenta un comportamiento extraño, lo cual inquieta a todos los estudiantes. Pero lo interesante de esto es que los estudiantes observaron que las estrategias empleadas para hacer matemáticas no son infalibles, en este caso se evidencia que el método numérico de Euler no siempre es absolutamente confiable.

A continuación, se aprecian tres gráficos diferentes para la misma función elaborados en Maple® 18 basados en el método numérico de Euler (Ver Figuras 24, 25 y 26).

> $EulerTutor\left(\frac{d}{dt}\ y(t) = e^t \sin(t), y(0) = 5, t = 6\right)$

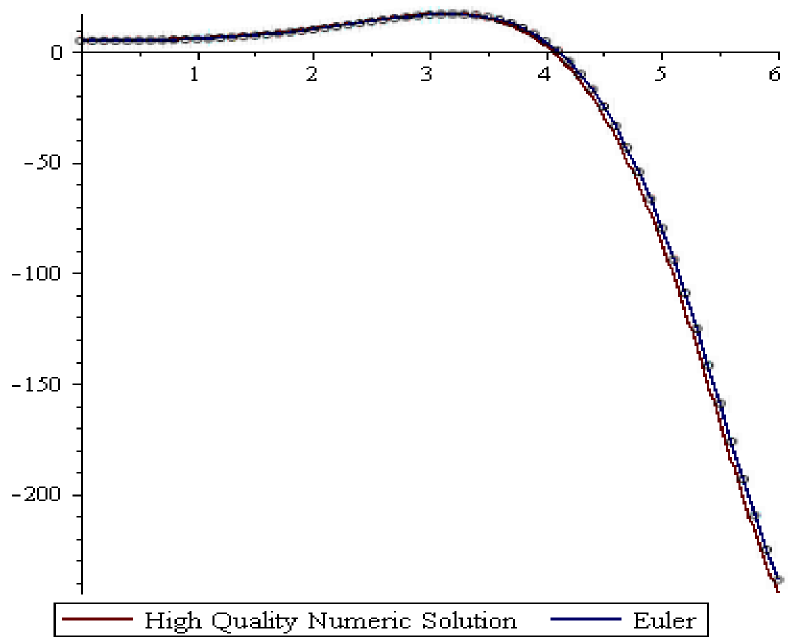


***Figura 24*: Método numérico para $\frac{dy}{dt} = e^t seny, y(0) = 5, t = 6, 50\ pasos$.**

> $EulerTutor\left(\frac{d}{dt}\ y(t) = e^t \sin(t), y(0) = 5, t = 10\right)$

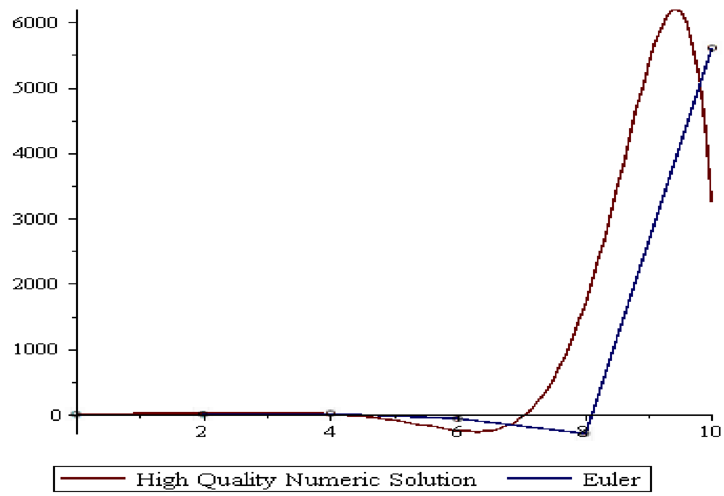


***Figura 25*: Método numérico para $\frac{dy}{dt} = e^t seny, y(0) = 5, t = 10, 10\ pasos.$**

> $EulerTutor\left(\frac{d}{dt}\ y(t) = e^t \sin(t), y(0) = 5, t = 10\right)$

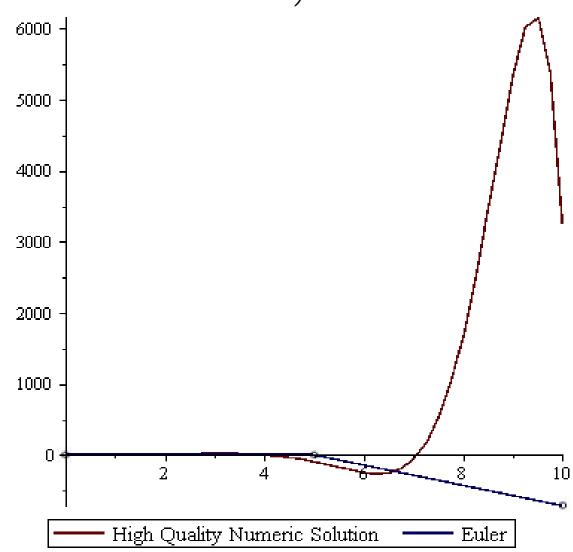


***Figura 26*: Método numérico para $\frac{dy}{dt} = e^t seny, y(0) = 5, t = 10, 2\ pasos.$**

4.9. Sistemas de Primer Orden

Para comenzar esta actividad se pide a los estudiantes que recuerden el problema de la prueba de entrada donde un objeto es lanzado hacia arriba, se pide a los estudiantes que escriban la ecuación diferencial que modela tal fenómeno, Juan conjetura que sería la siguiente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g(t)$$

Aquí el profesor pregunta si ¿este sencillo modelo se puede representar como un sistema de ecuaciones diferenciales?

Los estudiantes quedan un poco sorprendidos y parece que no encuentran una respuesta rápidamente, por lo que se les sugiere pensar en términos de los conceptos de velocidad y aceleración, después de unos minutos Fabio dice que:

$\frac{dy}{dt} = v$ y $\frac{dv}{dt} = a$, o en este caso $\frac{dv}{dt} = -g$

Así las cosas se propone la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y$$

Se pide que la escriban como un sistema lineal basados en las anteriores consideraciones, pasado algún tiempo David conjetura lo siguiente:

$$\frac{dv}{dt} = -y$$

Pero no sabe cómo sería la otra ecuación si se trata de un sistema, entonces Yesika dice que sería:

$$\frac{dy}{dt} = v$$

De esta manera queda completo el sistema, ahora ¿cómo se resuelve?

Por ahora no sabemos cómo resolverlo, pero en Maple® se puede intentar hacer los campos de pendientes, para mirar el comportamiento del sistema en el tiempo. Juan es el primero en realizar el campo de pendientes y observa que se obtienen centros (Ver Figura 27).

> $des3 := \left[\frac{d}{dt}\, y(t) = v(t),\ \frac{d}{dt} v(t) = -y(t) \right]$

$$des3 := \left[\frac{d}{dt}\, y(t) = v(t),\ \frac{d}{dt}\, v(t) = -y(t) \right]$$

> $DEplot(des3, [y(t), v(t)], t = 0..12, v = -5..5, y = -5..5,$
> $[[2, 1, 2], [1, -1, -2], [3, 2, -2], [5, -2, 4]],$
> $linecolor = blue)$

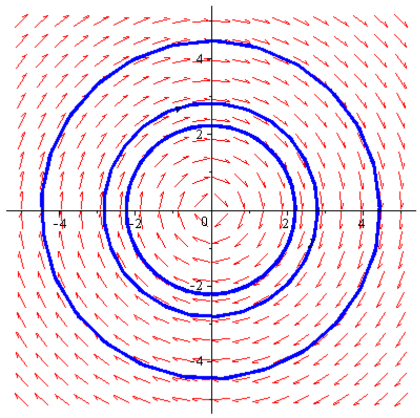


***Figura 27*: Campo de Pendientes para: $\frac{dy}{dt} = v$; $\frac{dv}{dt} = -y$.**

La pregunta siguiente es: ¿Basta con el campo de pendientes?, ¿Cómo se justifica? También se pregunta si ¿Existen soluciones conocidas que generen los campos de pendientes obtenidos? Yesika conjetura que de alguna manera podrían ser las funciones seno y coseno, David después de dudar por algún momento, cree que las soluciones pueden ser de la forma $y(t) = sent$ y $v(t) = cost$, todo indica que estas son las soluciones, pero y ¿cómo se hallan?

Por ahora no se cuenta con las herramientas para resolver estas preguntas por lo tanto la sugerencia es intentar resolver el sistema: $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} - y$, los estudiantes deben resolver cada ecuación de manera separada lo cual ya saben hacer, pero además antes de resolverlo todos notan que $X(t)$ crece exponencialmente mientras que $Y(t)$

decrece exponencialmente (Ver Figura 28), de modo que obtienen: $X(t) = ce^{t}$, $Y(t) = ce^{-t}$, lo anterior se resuelve de manera analítica, pero ¿existe algún método cualitativo que nos permita conocer algo más de este sistema?

> $DEplot(des2, [x(t), y(t)], t = 0..12, x = -5..5, y = -5..5,$
> $[[2, 1, 2], [1, -1, -2], [3, 2, -2], [5, -2, 4]],$
> $linecolor = blue)$

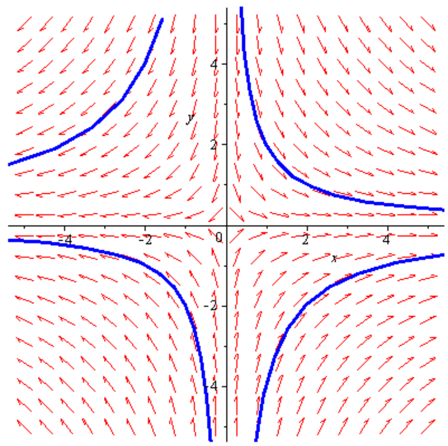


***Figura 28*: Campo de Pendientes para:** $\frac{dy}{dt} = v$; $\frac{dv}{dt} = -y$.

Con el ánimo de que los estudiantes tengan las herramientas necesarias para abordar lo que viene del curso, se hace un breve recordatorio del algebra de matrices. Una vez en contexto se pregunta a los estudiantes si el anterior sistema puede escribirse como una matriz y se pide que lo hagan, Fabio cree que la matriz que representa el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la matriz anterior es 1, el profesor hace caer en cuenta a los estudiantes que la única solución de equilibrio es el origen. Luego de esta observación se pide hallar las soluciones de línea recta, las cuales se obtienen al resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Juan conjetura que en este caso no contamos con soluciones de línea recta, lo cual verifica realizando los campos de pendientes en Maple®

Ahora deben retomar el sistema:

$$\frac{dv}{dt} = -y$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

David escribe la matriz del sistema y la resuelve:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ -x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y concluye que tampoco tiene soluciones de línea recta, lo cual se sabía de antemano por el campo de pendientes.

Todos los estudiantes saben que el determinante es un valor numérico asociado a una matriz y que pueden pasar dos cosas con el:

Que sea igual a cero o que sea diferente de cero, en este caso si es diferente de cero tendrá una solución de equilibrio que es el origen y por tanto permanecerá ahí todo el tiempo, mientras que las demás soluciones pueden cambiar con el paso del tiempo. En los dos sistemas lineales que se estudian hasta ahora los estudiantes reconocen que poseen dicha solución de equilibrio, ya que, su determinante es uno y menos uno respectivamente.

Como tarea los estudiantes deben formular el modelo para un oscilador armónico (resorte) bajo diferentes consideraciones, sin amortiguamiento, con amortiguamiento y forzado con el fin de experimentar con sistemas que originen una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Con diferentes valores para a, b, c y d, de manera que encuentren las soluciones de línea recta si es que las hay junto con las soluciones de equilibrio con ayuda de Maple®.

Para construir el modelo los estudiantes deben recordar la ley de Hooke, la cual constituye el punto de partida para dicho modelo:

$F = -ky = m\frac{d^2y}{dt^2}$, se pide igualar a cero la expresión después del igual, David propone:

$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$, ahora se pide dividir la expresión entre m por tratarse de una constante y queda:

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$, y para simplificar el profesor sugiere que $\frac{k}{m} = c$ y finalmente se tiene:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + cy = 0$$

Yesika recuerda que esta es una ecuación diferencial de segundo orden y es posible reescribirla como un sistema lineal de dos ecuaciones así:

$$\frac{dv}{dt} = -cy$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

Se formula la pregunta ¿qué ocurriría si el oscilador estuviese amortiguado por el aire, por ejemplo?

Fabio cree que el modelo quedaría así:

$\frac{d^2y}{dt^2} + cy = -b\frac{dy}{dt}$, igualando a cero $\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$

Ahora los estudiantes son conscientes que para encontrar exactamente las soluciones de línea recta deben resolver el sistema:

$$AV = \lambda V = A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición para obtener una solución diferente a la trivial, es que el determinante de la matriz resultante sea igual a cero, es decir,$\det(A - \lambda I) = 0$, de donde obtenemos:

$$\det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Cuyo desarrollo es: $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$, que se conoce como el polinomio característico del sistema y sus raíces son los autovalores de la matriz A. El término $a + d$ es la traza y $ad - bc$ es el determinante de la matriz A.

De manera que el polinomio característico se puede reescribir como:

$$\lambda^2 - T\lambda + D$$

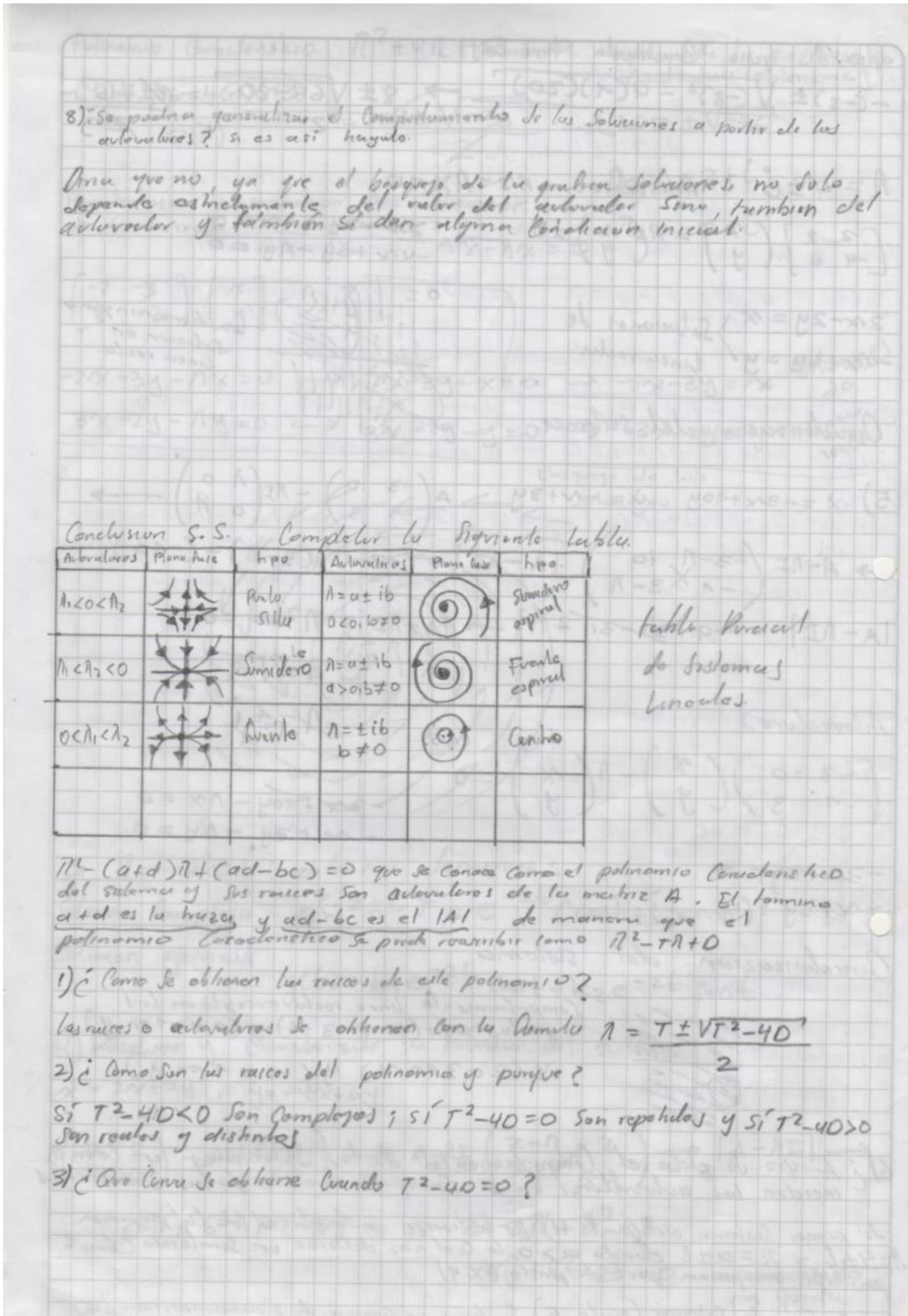
Hallar las raíces del polinomio característico es lo que permite encontrar los autovalores, y ellos saben que pueden tener dos soluciones reales y diferentes, dos reales e iguales y soluciones complejas.

Con base en lo anterior la pregunta obligada es: ¿Qué implicaciones tiene el que se obtenga una u otra clase de soluciones?

Se les da la oportunidad a los estudiantes que experimenten haciendo uso de Maple® con diferentes tipos de soluciones y a partir de la observación saquen conclusiones.

Maytte y David observan que cuando los dos autovalores son reales y positivos las soluciones se alejan de la solución de equilibrio a medida que el tiempo avanza, en este caso el equilibrio es una fuente. Si los dos autovalores son reales y negativos se aproximan a la solución de equilibrio a medida que el tiempo avanza, el equilibrio es un sumidero. Si un auto valor es positivo y otro negativo, quiere decir que unas soluciones se alejan, mientras otras se acercan por lo que se tendría un nodo o punto de silla, los nombres de estas soluciones los enuncia el profesor.

Por otro lado, Fabio conjetura que si los valores son números complejos se obtendrían centros como en el sistema que se planteó inicialmente. Para completar el análisis se pregunta ¿qué pasa si los autovalores son números complejos de la forma $a + ib$? Juan conjetura que si a es positivo las soluciones son espirales que se alejan del equilibrio y si a es negativo se tienen espirales que se acercan al equilibrio (Ver Figura 29).



8) ¿Se podría generalizar el comportamiento de las soluciones a partir de los autovalores? si es así hagalo.

Creo que no, ya que el bosquejo de la grafica soluciones no solo depende estrictamente del valor del autovalor sino, tambien del autovector y también si dan alguna condicion inicial.

Conclusion S. S. Completar la siguiente tabla.

Autovalores	Plano fase	tipo	Autovalores	Plano fase	tipo
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$		Punto silla	$\lambda = a \pm ib$ $a<0, b\neq 0$		Sumidero espiral
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$		Sumidero	$\lambda = a \pm ib$ $a>0, b\neq 0$		Fuente espiral
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$		Fuente	$\lambda = \pm ib$ $b \neq 0$		Centro

tabla Parcial de sistemas Lineales

$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ que se conoce como el polinomio caracteristico del sistema y sus raices son autovalores de la matriz A. El termino $a+d$ es la traza y $ad-bc$ es el $|A|$ de manera que el polinomio caracteristico se puede reescribir como $\lambda^2 - T\lambda + D$

1) ¿Como se obtienen las raices de este polinomio?

Las raices o autovalores se obtienen con la formula $\lambda = \dfrac{T \pm \sqrt{T^2-4D}}{2}$

2) ¿Como son las raices del polinomio y porque?

Si $T^2-4D<0$ son complejos; si $T^2-4D=0$ son repetidos y si $T^2-4D>0$ son reales y distintos

3) ¿Que curva se obtiene cuando $T^2-4D=0$?

***Figura 29*: Generalización de las soluciones de un sistema.**

4.10. Sistemas No Lineales

Este plan de clase inicia con una situación en la que se propone un modelo ecológico conocido como Depredador-Presa. Se dan unas condiciones para establecer el modelo.

Para empezar, se pide a los estudiantes que conjeturen un modelo lo más sencillo posible, se empieza por pensar en que ocurre con cada especie por separado y luego como afecta la interacción de las especies a una y otra.

Juan conjetura el siguiente modelo:

$$\frac{dR}{dt} = R$$

$$\frac{dF}{dt} = -F$$

La justificación es que siendo R las presas van crecer sin la presencia de predadores y si F son los predadores si no hay presas que cazar tienden a disminuir por eso el signo menos, aquí no se han considerado los recursos, exclusivamente las dos especies.

Ahora se pregunta ¿qué efecto tiene la interacción de las especies en cada ecuación?

Fabio dice que si los predadores cazan a las presas esto tendrá un efecto negativo en la población de presas y positivo en la población de predadores, por lo que conjetura el siguiente modelo:

$$\frac{dR}{dt} = R - RF$$

$$\frac{dF}{dt} = -F + RF$$

Lo cual constituye un modelo no lineal, debido precisamente a la interacción de las especies RF. Ahora los estudiantes deben estudiar el modelo, lo primero que deben hacer es encontrar las soluciones de equilibrio si las hay.

De manera inmediata David dice que una solución de equilibrio es $(0, 0)$, la pregunta de rigor es ¿hay más? Juan dice que la otra solución de equilibrio es $(1, 1)$, se pide a los estudiantes que elaboren el campo vectorial o de pendientes para el modelo. Inicialmente lo deben hacer manualmente y luego con ayuda de Maple®, de manera que puedan conjeturar que ocurre con las soluciones de equilibrio y cuál es el comportamiento de las soluciones en general (Ver Figura 30).

```
> DEplot(des4, [R(t), F(t)], t = 0..12, R = 0..5, F = 0..5,
    [[2, 1, 2], [1, 1, 2], [3, 2, 2], [3, 2, 3]], linecolor
    = blue)
```

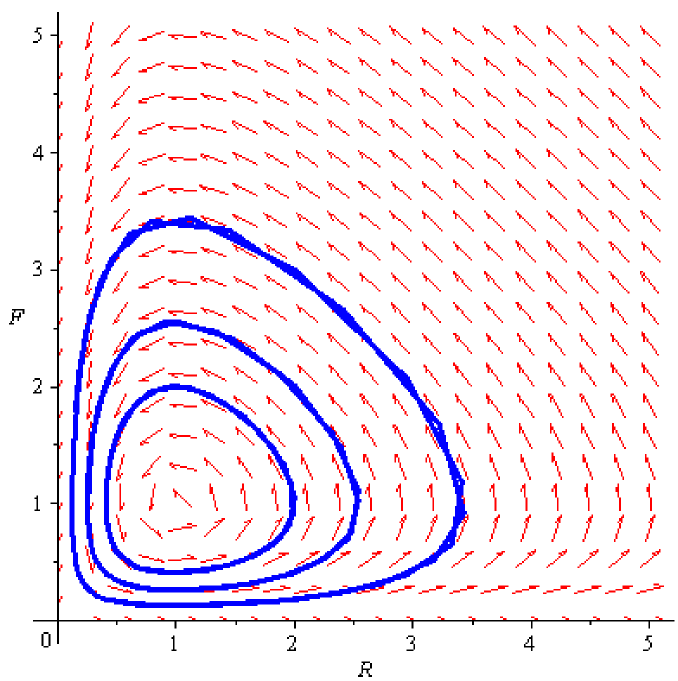


***Figura 30*: Campo Vectorial y soluciones del sistema Depredador-Presa.**

Una vez elaborado el campo vectorial para el sistema se pide a los estudiantes hacer conjeturas acerca del comportamiento de las soluciones conforme el tiempo transcurre.

Fabio conjetura que inicialmente la población de presas comienza a crecer, siempre que esta sea mayor que cero, pero en la medida en que aumenta la interacción con los predadores, esta tiende nuevamente a disminuir, así las cosas la población de predadores va en aumento hasta las presas disminuyen lo suficiente como para que el alimento escasee y los predadores comiencen a disminuir, de manera que haya lugar a que la población de presas aumente y ocurra lo mismo con los predadores hasta cierto punto y de esta manera las dos especies coexistan en un ciclo permanente.

4.11. Sistema no lineal en tres dimensiones

En este punto se propone a los estudiantes el problema de una cadena alimenticia conformada por árboles, alces y lobos, los alces se alimentan de los árboles, los lobos se benefician de la caza de alces, especialmente aquellos viejos y enfermos, dados algunos supuestos como:

- Si cada una de las poblaciones se considera de manera aislada se puede modelar por una ecuación logística.
- El efecto de la interacción entre las poblaciones es proporcional al producto de las poblaciones.
- En aras de simplificar nuestro modelo vamos a considerar que todos los parámetros son iguales a 1.

- La tasa de nacimientos de los depredadores va en proporción al número de presas comidas por los depredadores, que, por la segunda hipótesis, es proporcional a la razón a la que interactúan los depredadores y las presas.

Se pide a los estudiantes que conjeturen un modelo para tal situación. Después de pensarlo por algunos minutos y alguna discusión entre ellos Fabio propone el modelo:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(1 - z)$$

Donde:

$$x(t) = población\ de\ árboles\ en\ el\ tiempo\ t$$

$$y(t) = población\ de\ alces\ en\ el\ tiempo\ t$$

$$z(t) = población\ de\ árboles\ en\ el\ tiempo\ t$$

El cual cumple parcialmente las condiciones dadas, se pregunta que le falta a la conjetura de Fabio, Juan cree que hace falta la interacción entre las especies propone:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y) + xy - yz$$

$$\frac{dz}{dt} = z(1 - z) + yz$$

La justificación para $-xy$ en la primera ecuación es que la interacción entre árboles y alces afecta negativamente la población de árboles, los términos $+xy - yz$ en la segunda ecuación porque la interacción entre árboles y alces beneficia la población de alces, mientras que la interacción entre alces y lobos afecta negativamente la población de alces, y finalmente el termino $+yz$ indica que la interacción entre alces y lobos beneficia la población de lobos.

La tarea ahora es encontrar las soluciones de equilibrio, que son:

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,0,1) \; y \; \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

¿Cuál de ellas tiene interés para nosotros?

David considera que es $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ porque en los otros casos todas o alguna de las poblaciones es cero y se supone que ese no debe ser el caso, entonces se debe hacer el análisis para dicha solución de equilibrio.

¿Cuáles son los autovalores para esta solución de equilibrio?

Yesika los calcula y son: $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_{2,3} = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3} i$ y afirma que como λ_1 es negativo y la parte real de $\lambda_{2,3}$ es negativa, entonces la solución de equilibrio es un sumidero, lo que indica que los valores cercanos a la solución de equilibrio se acercan a ella y se espera que con el tiempo queden allí (Ver Figura 31).

$$DEplot3d\left(\{D(x)(t) = x(t) - x(t)^2 - x(t)y(t), D(y)(t) = y(t) - y(t)^2 + x(t)y(t) - y(t)z(t), D(z)(t) = z(t) - z(t)^2 + y(t)z(t)\}, \{x(t), y(t), z(t)\}, t = 0..10, \left[\left[x(0) = \frac{2}{3}, y(0) = \frac{1}{3}, z(0) = \frac{4}{3}\right], [x(0) = 3, z(0) = 5, y(0) = 5]\right], scene = [x(t), y(t), z(t)], stepsize = 0.1, orientation = [139, -106] \right)$$

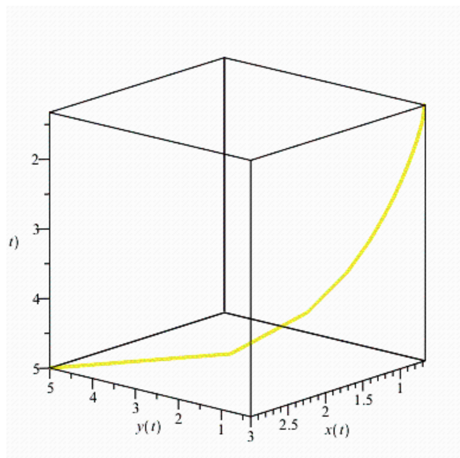


***Figura 31*: Solución de un Sistema en tres dimensiones.**

Para cerrar el curso se hace caer en cuenta a los estudiantes que este tipo de modelos son muy simples, de manera que dejan de lado muchos aspectos que se presentan en la realidad. Por otro lado si se incluyeran más variables, el modelo se haría muy complejo y hasta inmanejable, de manera que esto dificultaría hasta su análisis cualitativo.

Sin embargo, se presenta al curso el modelo de Lorenz. Edward Lorenz (1917-2008) fue un meteorólogo quien en un intento por modelar el comportamiento del clima logro simplificar un complejo modelo hasta llegar al siguiente modelo:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z + xy$$

Si fijamos los valores de $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$ y $\rho = 28$ ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del sistema y como es su comportamiento? (Ver Figura 32).

Lo anterior se presenta a los estudiantes como una introducción a la teoría del caos.

Evaluación

La evaluación del curso de ecuaciones diferenciales se efectuó en cuatro cortes durante el semestre, en cada uno de ellos se realiza una evaluación parcial que tiene una ponderación del 60% de cada corte, los planes de clase equivalen al 30% y la autoevaluación es el 10% restante. Los dos primeros cortes cada uno equivale al 20% del semestre y el tercer y cuarto corte suman el 60% restante, cada uno con una ponderación del 30%.

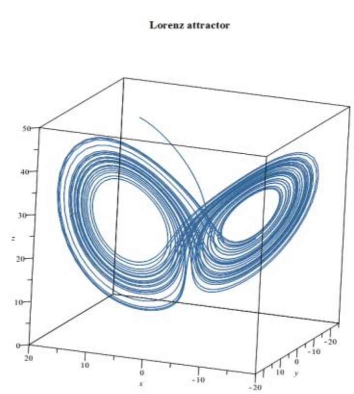


***Figura 32*: Atractor de Lorenz.**

Las anteriores actividades fueron aplicadas a lo largo del curso, además, también se estudiaron los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales y sus respectivos métodos de solución. Los participantes del curso presentaron las evaluaciones conjuntas, alcanzando unos resultados semejantes a los de sus compañeros que toman el mismo curso orientado por otros docentes.

Conclusiones del capítulo 4

En este capítulo se tratan de manera detallada los resultados de la aplicación de los planes de clase para un curso de ecuaciones diferenciales, diseñado desde el enfoque cualitativo y bajo la concepción cuasi-empírica, de las matemáticas tomando como eje transversal la resolución de problemas.

Los planes de clase se aplicaron de manera definitiva a un curso de cinco estudiantes, con el fin de valorar las principales características del proceso de aprendizaje, así como las reacciones de los estudiantes frente a un curso de ecuaciones diferenciales con las características ya mencionadas.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En el presente capítulo se llevará a cabo un análisis en detalle sobre los resultados obtenidos durante la investigación, con el ánimo de dar respuesta al problema de investigación: ¿qué implicaciones tiene la implementación de un modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo, para potenciar la actividad matemática en la resolución de problemas retadores?

Con el ánimo de estudiar el problema de investigación se propusieron tres preguntas:

1. ¿Cuáles son los elementos más relevantes que se deben tener en cuenta para el diseño e implementación de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?
2. ¿Cuáles son las principales características de los procesos de aprendizaje de los estudiantes durante las diferentes fases de la implementación del modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo?
3. ¿Cuáles son los principales aportes y características de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático y su incidencia en la solución de problemas retadores?

De manera que se espera dar respuesta al problema de investigación tratando las preguntas particulares enunciadas antes.

5.1. Primera pregunta de investigación

El objetivo vinculado con esta primera pregunta es: Determinar los elementos más relevantes que se deben considerar para el diseño y valoración de un modelo didáctico basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo.

Esta idea surge al observar las dificultades existentes en cursos de ecuaciones diferenciales debido a que no cumplen con las expectativas, ni se adaptan a las necesidades concretas de los estudiantes. En el diseño se promueve la conexión entre las distintas partes de la matemática, a resolver problemas con aplicaciones al mundo real, dominar métodos numéricos, e interpretar líneas de fase y campos de pendientes haciendo uso de la tecnología.

Un campo fértil para la solución de problemas y el enfoque cuasi empírico de las matemáticas tiene que ver con aquellos fenómenos que cambian con el tiempo y deben ser estudiados a través de las ecuaciones diferenciales. En los planes de clase diseñados para el curso se plantea un problema el cual cumple un doble propósito, por un lado evidenciar como los estudiantes emplearon los cuatro pasos de Polya en la solución de problemas:

- Comprender el problema como se evidencia en el plan de clase “Crecimiento de una población” *Luego de alguna discusión, se concluye que es posible modelar el crecimiento de la población de los Estados Unidos mediante la ecuación diferencial,*

$$\frac{dP}{dt} = 3.9P$$

- Concebir un plan, en este momento surgen varias posibilidades por ejemplo “*Yesika cree que el término* dt *se puede pasar a multiplicar a la derecha y la* P *debe pasar a dividir a la izquierda así:* $\frac{dP}{P} = Kdt$”
- Ejecutar el plan, “*Luego de algunos minutos los estudiantes logran resolver la ecuación diferencial, de donde resulta:* $P(t) = ce^{kt}$*. Los estudiantes quedan algo preocupados debido a que tienen muchas variables en el modelo, de donde surge el interrogante ¿Cómo encontrar los valores de C y k? Fabio recuerda que en la prueba de entrada cuando se estudió el movimiento de una pelota lanzada hacia arriba resulto una constante de integración cuyo valor se encontró reemplazando la velocidad inicial, entonces el concluyo que se podía emplear la población inicial y así obtuvieron:*

$$P(t) = 3.9e^{kt}$$

Ahora David cree que para hallar el valor de k se puede emplear otra condición de las que se encuentran en la tabla, se sabe que 10 años después, es decir, en 1800 la población era de 5.3 millones de personas, de esta manera la función $P(t)$ *seria:”*

$$P(t) = 3.9e^{0.3067t}$$

- Verificar la solución, “*Los cinco estudiantes realizan los cálculos pero observan que desde la década de 1870 en adelante la diferencia entre la población real y la calculada según el modelo se hace cada vez mayor, entonces surge la pregunta de ¿Por qué falló nuestro modelo?*

Juan afirma que efectivamente el modelo es de crecimiento exponencial y en poco tiempo la población crece muy rápidamente, Yesika resalta que el modelo es muy sencillo y no tiene en cuenta la mortalidad y los recursos.

David cree que este modelo funciona para poblaciones pequeñas y tiempos cortos."

Como se puede apreciar no solamente se evidencian los cuatro pasos del método de Polya, sino además desde el planteamiento mismo del modelo se parte de conjeturas que deben ser validadas en la medida en que se resuelve el problema, por otro lado más allá de encontrar una solución analítica, lo que se privilegia es observar el comportamiento de las soluciones conforme el tiempo pasa es decir, el análisis cualitativo.

Una vez que los estudiantes han observado que el modelo exponencial no es funcional para resolver el problema, aceptan la ecuación de Verhulst o logística. Lo que se destaca de ella es que aun siendo algo simple responde a la solución del problema, además de ser más rica para realizar el análisis cualitativo.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Una vez afinado el modelo los estudiantes deben hacer el análisis cualitativo de la ecuación diferencial, es decir, encontrar los puntos o soluciones de equilibrio; "*Juan rápidamente dice que sí $P = 0$, se tiene una solución de equilibrio, la pregunta que sigue es si hay más soluciones de equilibrio, la respuesta a esta pregunta no surge tan rápidamente como la anterior.*

Después de pensarlo algún tiempo Fabio cree que si $P = N$ es otra solución de equilibrio, lo cual efectivamente es cierto, ahora cada estudiante debe bosquejar las soluciones junto con las soluciones de equilibrio en el plano $P - t$, a los cinco estudiantes les resulta relativamente fácil bosquejar las soluciones de equilibrio, pero se preguntan ¿cómo bosquejar otras soluciones?

Juan afirma que si la población aumenta haciéndose mayor que N, lo que está en el paréntesis tiene signo negativo, por lo tanto la ecuación diferencial es negativa también, obvio siendo P y K positivos, de manera que la población decrece. Por otro lado si $N > P$, lo que está en paréntesis tiende a 1, lo cual significa que se obtendría nuevamente la ecuación de crecimiento exponencial, que como se vio solo funciona para poblaciones muy pequeñas. David dice que si $0 < P < N$, la población va creciendo hasta acercarse a N". Todo lo anterior es corroborado una vez que hacen los campos de pendientes en Maple ® (Ver Figura 33).

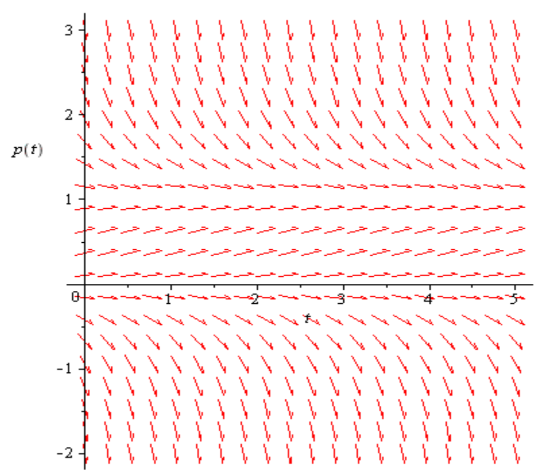


***Figura 33*: Campo de Pendientes de la Ecuación de Verhulst.**

En este punto cabe resaltar que se han evidenciado los principales elementos que hacen parte del modelo para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales

- La resolución de problemas
- El pseudo-empirismo y
- El análisis cualitativo empleando la tecnología.

5.2. Segunda pregunta de investigación

El objetivo propuesto para resolver esta pregunta de investigación es: Caracterizar los procesos de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo, evidenciados en los estudiantes durante las diferentes fases de la implementación del modelo didáctico.

En cuanto a este objetivo cabe resaltar varios aspectos interesantes que se evidenciaron durante la investigación:

- La intuición como ruta al descubrimiento: debido a que el análisis cualitativo no requiere que se obtenga una solución particular mediante algoritmos preestablecidos, el estudiante se siente más cómodo a la hora de aventurarse a predecir el comportamiento de las soluciones de algún problema que involucra ecuaciones diferenciales.

Como se evidencia en el siguiente aparte: *"Apelando al concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente se pide a los estudiantes encontrar y bosquejar las pendientes para los puntos con valores enteros comprendidos entre* $-3 \leq t \leq 3$ *y* $-3 \leq y \leq 3$ *en el plano* $t - y$*.*

Se pregunta a los estudiantes ¿Qué interpretación le podemos dar a esta representación?, después de pensarlo por algunos minutos Juan dice que los vectores que se construyen deben asemejarse a la función primitiva $F(t, y)$."

- El pensamiento geométrico como elemento sintetizador: los campos de pendientes, líneas y retratos de fase favorecen y agilizan en los estudiantes los procesos de pensamiento necesarios para encontrar la solución a una situación particular que cambia con el tiempo. A diferencia de las soluciones analíticas y en algunos casos los elaborados métodos empleados para llegar a ellas, los métodos cualitativos no requieren que los estudiantes se enfoquen en los medios para llegar a una posible solución, sino que rápidamente ellos pueden conocer las soluciones y como cambian en el tiempo con ayuda de la tecnología (Ver Figura 35).

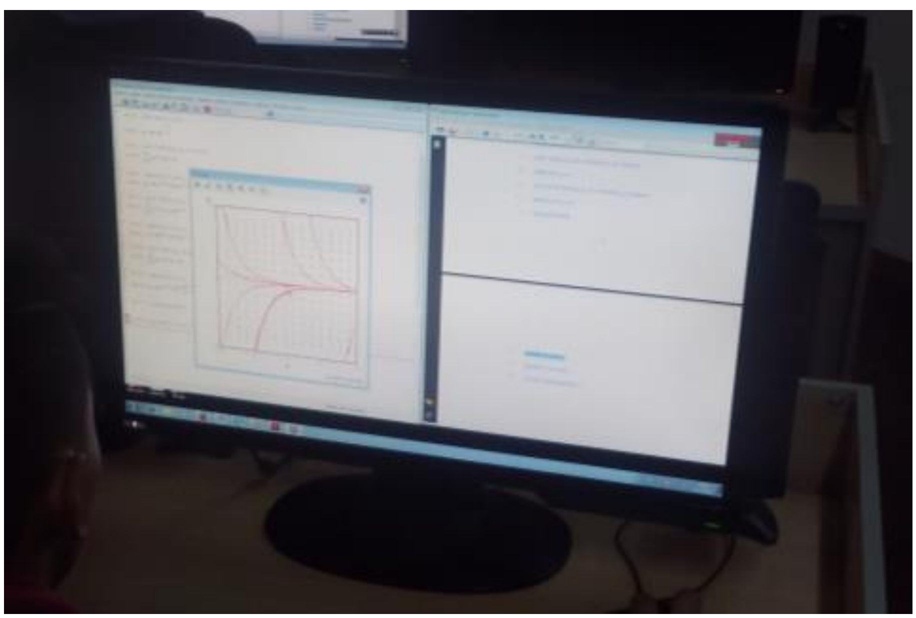


***Figura 34*: Práctica en Maple®.**

- La conjetura como elemento generador: debido a que el modelo promueve la participación de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, resulta cómodo para ellos atreverse a proponer conjeturas y someterlas a la discusión con sus compañeros de clase y el docente, de manera que estas se contrastan con las de sus pares y a la luz de la teoría para verificar su validez, y si es necesario mejorarlas o rechazarlas.

Lo cual se ilustra en: *"La actividad siguiente es conjeturar un modelo para determinar la cantidad de azúcar en un tanque donde existen las siguientes condiciones:*

- *El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que sale, pero siempre hay 100 galones en el tanque*
- *La mezcla es homogénea, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque.*
- *El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo A a razón de 2 galones por minuto.*
- *El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo B a razón de 1 galón por minuto.*
- *El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.*

Pasados varios minutos los estudiantes caen en cuenta de que la estructura del problema debe ser sumar lo que entra y restar lo que sale así:"

$$\frac{dS}{dt} = 2 * 5 + 1 * 10 - 3 * \frac{S}{100}; \ \frac{dS}{dt} = 20 - \frac{3S}{100}$$

- Consolidación del aprendizaje mediante la práctica: un elemento fundamental para el aprendizaje es la práctica, ya que es durante esta fase que el estudiante logra reafirmar los conocimientos adquiridos durante la aplicación del modelo, debido a que se confronta el mismo y con aquellos conceptos o temas que por alguna razón generan dudas o inquietud y que requieren su atención para que hagan parte de su dominio sobre la materia.

A continuación, se relata un episodio de clase donde se evidencian acciones encaminadas hacia la consolidación de la actividad matemática.

“Ahora los estudiantes deben analizar la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y(1-y)$$

Rápidamente Yesika dice que las soluciones de equilibrio son $y = 0$ *y* $y = 1$ *ahora los estudiantes construyen la línea y el plano fase para clasificar las soluciones de equilibrio.*

El paso a seguir consiste en clasificar las soluciones, haciendo uso de la analogía de la lluvia que cae en un patio, para que el agua no se estanque debe tener un desagüe o un sumidero de manera que el agua cerca de él vaya directo al sumidero, que es lo que ocurre cuando $y = 1$, *por lo tanto se puede afirmar que la solución de equilibrio* $y = 1$ *es un sumidero.*

Por otro lado, se observa que en el caso de la solución de equilibrio $y = 0$ *las soluciones cercanas, tanto por arriba del cero como por debajo se alejaran de manera que se tendría una fuente. Juan pregunta cómo se llaman las soluciones de equilibrio donde aquellas soluciones cercanas a ella, por un lado se acercan y por el otro se alejan, se acuerda con los estudiantes que se denominara un nodo.”*

Se puede apreciar como los estudiantes se apropian de los conceptos y el lenguaje propio de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

5.3. Tercera pregunta de investigación

Para dar respuesta a la tercera y última pregunta de investigación el objetivo propuesto fue: Establecer y estudiar los principales aportes que deriven de la implementación del modelo didáctico basado en el enfoque cuasi empírico de las matemáticas para la construcción de conocimiento matemático.

A continuación, se mencionarán los principales aportes que se considera surgen como fruto de la implementación del modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas:

- Empoderamiento de los estudiantes: debido a que los estudiantes no necesariamente deben aprender los algoritmos y métodos empleados habitualmente en la resolución de las ecuaciones diferenciales, sienten mayor confianza para participar en las diferentes actividades de clase.
- Métodos cualitativos a través de la tecnología: como los estudiantes emplean durante el curso el software Maple® 18, pueden contrastar los campos de pendientes, las líneas y retratos de fase con las soluciones numéricas y analíticas rápidamente. Una de las mayores bondades de la tecnología es que favorece que los estudiantes experimenten con los modelos, parámetros y condiciones, de manera que logran un amplio panorama acerca de la solución

de un problema logrando así una mayor comprensión de la situación problema en sus diferentes etapas.

- Uso de conjeturas: los estudiantes logran ser protagonistas de su proceso de aprendizaje, al expresar sus ideas acerca de un problema o sus soluciones mediante conjeturas y basados en la tecnología, pasan de ser sujetos pasivos a generar ideas, supuestos y teorías, que hacen del aula de clase un espacio ideal para construir conocimiento y llevar a cabo discusiones conducentes a llevar a cabo la actividad matemática y a hacer matemáticas.
- Solución de problemas: los estudiantes comprenden claramente como las matemáticas son una herramienta imprescindible para resolver problemas, lo cual es equivalente a hacer matemáticas. Pero para resolver un problema parten de una conjetura, que se discute para ser validada, mejorada o refutada (comprender el problema), lo que conduce a un modelo que puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales. Después se procede a proponer una solución que es otra conjetura, pero para resolver el modelo se hace uso de los métodos cualitativos, numéricos y analíticos con ayuda de la tecnología (configurar y ejecutar el plan). Finalmente a la luz de los resultados se observa con detenimiento el problema en toda su dimensión (mirar hacia atrás) para verificar si el modelo o conjetura inicial es válida, luego se revisan los procedimientos (conjeturas subsecuentes) empleados para llegar a las soluciones. Si todos los procedimientos como las conjeturas son afortunados, se ha llegado a la solución del problema.

A continuación, se presenta una tabla resumen de los logros más relevantes de la elaboración y valoración del modelo didáctico propuesto (Ver Tabla 3):

Tabla 3: Resumen

Elementos del modelo Didáctico	Características de los procesos de aprendizaje	Aportes del modelo Didáctico
1.La resolución de problemas 2.El pseudo-empirismo y 3.El análisis cualitativo empleando la tecnología	1.La intuición como ruta al descubrimiento 2.El pensamiento geométrico como elemento sintetizador 3.La conjetura como elemento generador 4.Consolidación del aprendizaje mediante la práctica	1.Empoderamiento de los estudiantes 2.Métodos cualitativos a través de la tecnología 3.Uso de conjeturas Solución de problemas

CONCLUSIONES

El procesamiento y análisis de la información recolectada durante esta investigación se llevó a cabo con ayuda de ATLAS.ti®, lo cual permitió establecer algunas categorías (códigos) para el análisis de los datos (Ver Figura 36).

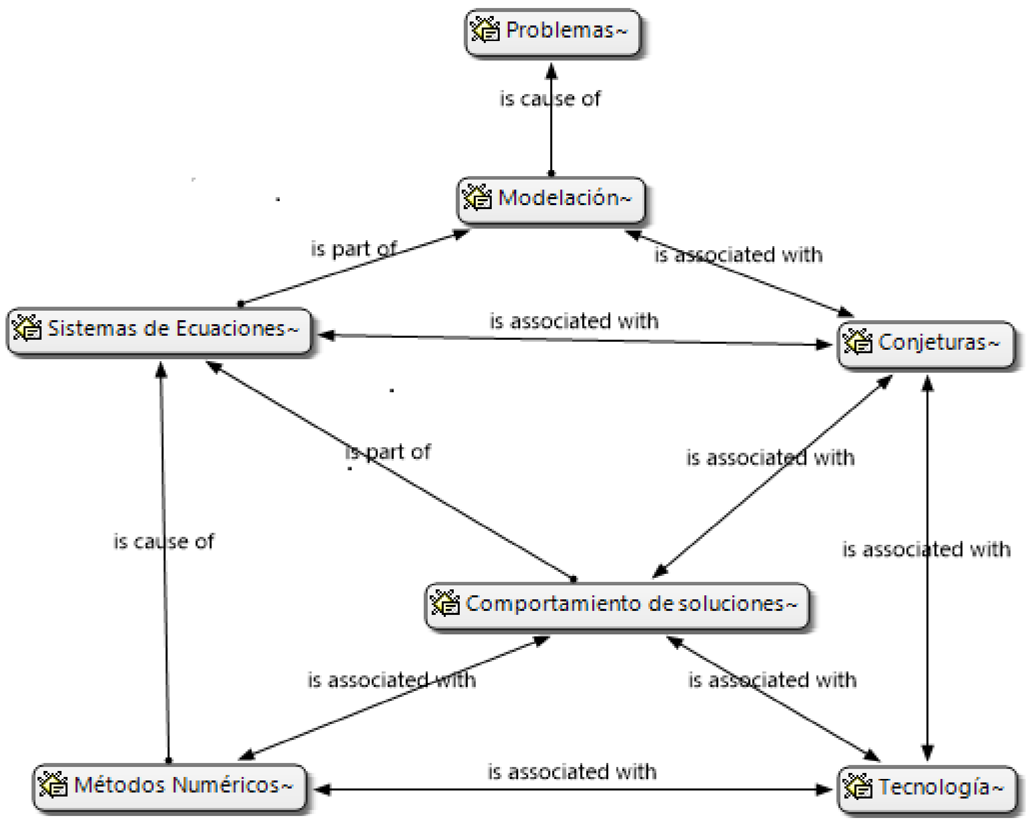


***Figura 35*: Mapa de códigos (categorías).**

A continuación, se explican brevemente las categorías que surgieron como resultado del análisis de los datos.

Solución de Problemas

Este código aparece en el primer nivel básicamente por dos razones, una primera tiene que ver con el hecho de que se estableció como elemento transversal para todo el curso por su pertinencia y de otro lado se interrelaciona permanentemente con la postura teórica el cuasi-empirismo.

Cada plan de clases inicia con una situación problema la cual obliga a que los estudiantes propongan conjeturas y las discutan con sus compañeros y el docente a fin de establecer el modelo que mejor responda al problema. El paso a seguir consiste en resolver la ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales, lo cual se hizo desde el enfoque cualitativo y en algunos casos se emplearon los métodos numéricos e incluso los analíticos si es posible, con el fin de obtener un completo panorama del problema en cuestión.

Cabe resaltar que una vez propuesto el problema de cada plan de clase los estudiantes de manera natural se sitúan en las cuatro fases propuestas por Polya. Por ejemplo para estudiar el crecimiento de una población es necesario comprender plenamente la situación, es decir, clase de población, datos estadísticos o valores iniciales con que se cuentan, que factores inciden en el crecimiento de una población. A continuación, se debe establecer un plan, es decir, la ecuación diferencial que modela el problema. Después se debe resolver la ecuación diferencial, lo cual se hace de manera cualitativa con ayuda de la tecnología (Maple 18®). Contrastar la solución con los datos reales con el fin de verificar la validez del proceso.

Concepción Cuasi-empírica de las Matemáticas

Una vez propuesto el problema inicial de cada plan de clases a partir de preguntas generadoras los estudiantes enuncian valiosas conjeturas que discuten entre ellos mismos y con el docente de modo que se pueda establecer un modelo inicial. Después de plantear la o las ecuaciones diferenciales que modelan el problema se debe proceder a resolver, privilegiando los métodos cualitativos, lo cual también da lugar a conjeturas o experimentación, donde los estudiantes conjeturan acerca de las soluciones, sus características y comportamiento en el tiempo.

Métodos Cualitativos

El curso de ecuaciones diferenciales es orientado con el enfoque cualitativo, lo cual resultó motivante e interesante para los participantes, básicamente por dos razones.

- No es necesario que memoricen las estructuras de las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver analíticamente ni tampoco los algorítmicos de resolución empleados en los cursos habituales.
- Debido a que los métodos cualitativos se basan en el pensamiento geométrico, resulta mucho más sencillo para ellos diagramar un campo de pendientes, una línea de fase o graficar una solución numérica, lo cual además, es más evidente y enriquecedor para ellos que una función que represente la solución de una ecuación diferencial, claro, siempre que esta se pueda encontrar.

Uso de Tecnología

Para esta investigación es indispensable el uso de la tecnología, en este caso para el curso de ecuaciones diferenciales se empleó Maple 18®, debido al potencial que posee para el estudio de las ecuaciones diferenciales y su fácil manejo.

El uso de Maple 18® produjo grandes beneficios, no solamente por lo motivados que se perciben los estudiantes, sino que además les permite conocer el comportamiento de la solución a un sistema dinámico de forma muy ilustrativa, comprensible y rápida.

Lo que se observó cómo debilidad en la prueba de entrada realizada por los estudiantes, en relación con la escasa comprensión del concepto de derivada, se resolvió a lo largo del curso gracias a que el análisis cualitativo apoyado el software termino por ser un ejercicio rutinario y muy enriquecedor para ellos, ya que, de allí se desprendía todo el análisis posterior de las soluciones del problema y sus posibles variaciones. Finalmente se concluye que esta investigación culmino con los siguientes logros:

1. La elaboración de un modelo didáctico para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo basado en el pseudo-empirismo.
2. Se logró evidenciar de primera mano el proceso de aprendizaje del grupo de cinco estudiantes que participaron del curso, lo cual resulta novedoso, debido a que si bien en otras latitudes existe alguna referencia acerca de algún curso de ecuaciones diferenciales con enfoque cualitativo, no se tienen registros acerca de su implementación completa y desde el pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática.
3. El enfoque de solución de problemas es ideal para el curso de ecuaciones diferenciales basado en el pseudo-empirismo, ya que entre ellos se genera una dialéctica, es decir, ante una situación problema se parte de una conjetura para proponer una vía de solución al problema, dicha conjetura se pone a prueba o se socializa, si no soporta la prueba debe ser revisada con el fin de mejorarla o refutarla. Al proponer una solución al problema también se conjetura, si la solución resulta. De la misma manera se debe conjeturar que ocurre con las

soluciones con el paso del tiempo, o si se cambian las condiciones o los parámetros.

4. La potencia del concepto de la derivada como la pendiente de la recta tangente se hace latente en el análisis cualitativo, cuando los estudiantes elaboran el campo de pendientes se aprecia en toda su magnitud el comportamiento de las soluciones y con algo de álgebra se puede tener un panorama completo acerca de todas las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales.
5. El trabajo exhaustivo y sistemático del método cualitativo complementado con los métodos numéricos y analíticos favorece la comprensión de los estudiantes acerca de cada situación problema y sus soluciones. Además, brinda alternativas frente a un atascamiento, es decir, que cuando ellos se encuentran con una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales que surge como modelo para cierto problema y no es posible encontrar una solución analítica, lo cual es frecuente, pueden apelar a los métodos cualitativos y/o numéricos para encontrar una vía de resolución de dicho problema.
6. Por otro lado, los estudiantes se hacen conscientes de que los métodos de solución de un problema no son infalibles ni absolutos.
7. Un aspecto determinante que además se considera un importante logro del curso de ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y basado en el pseudo-empirismo, consiste en que los cinco estudiantes que terminaron el curso y tenían un promedio en sus cursos previos de matemáticas rondando el

tres, es decir la nota mínima para aprobar, en el curso de ecuaciones diferenciales obtuvieron un promedio de 3.9.

8. Si bien es cierto que los logros alcanzados luego de la aplicación y valoración de la propuesta son muy positivos, cabe aclarar que en muchos casos los estudiantes se muestran muy inseguros y les cuesta participar durante la clase.
9. Pese a la orientación del curso y los recursos empleados en el mismo, se continúa presentando un porcentaje importante de deserción por parte de los estudiantes.
10. Para muchos estudiantes no es fácil el acceso a un computador y el software empleado en el curso.
11. El uso del software, así como los comandos pese a que no son muchos ni difíciles de manejar, logran poner en aprietos a los estudiantes especialmente al comienzo del curso.

Finalmente, a partir del modelo didáctico preliminar, toda la información recolectada en los planes de clase y su respectivo análisis se concluye presentando de modo esquemático el modelo didáctico final (Ver Figura 34).

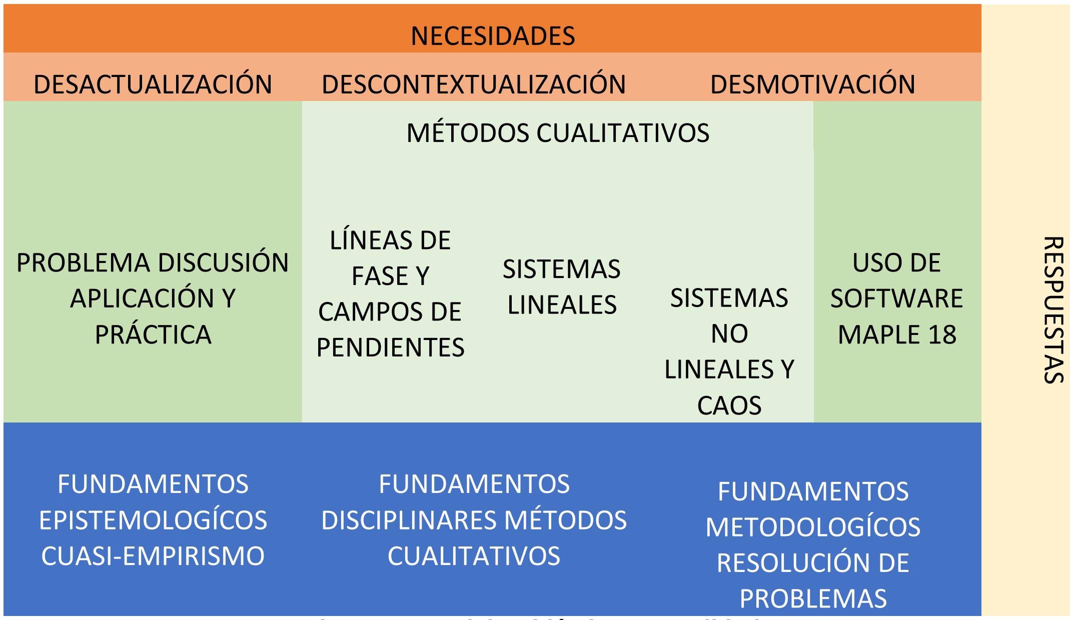


***Figura 36*: Modelo Didáctico Consolidado.**

RECOMENDACIONES

Se espera que este trabajo motive a otros investigadores interesados en el tema a llevar a cabo, estudios que permitan verificar la eficacia de esta propuesta y otras similares para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque cualitativo, y se promuevan las reformas necesarias tendientes a mejorar el desempeño académico y profesional de los futuros ingenieros y licenciados en matemáticas. A continuación, se sugieren algunas recomendaciones para posteriores estudios relacionados con el tema en cuestión.

1. En primer lugar, son necesarios nuevas investigaciones que aborden el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo y basados en el pseudo-empirismo, con el fin de tener otras miradas y así enriquecer, mejorar o proponer modelos didácticos, orientados a suplir las necesidades de aprendizaje de los estudiantes actuales, de manera que estos se sientan motivados y se apropien de los contenidos tratados en los diferentes cursos de ecuaciones diferenciales.
2. Los elementos que sirvieron como medio para la implementación de esta propuesta, es decir el syllabus y los planes de clase, están sujetos a reformas y mejoras, los problemas, las actividades propuestas y las actividades de práctica pueden y deben ser revisadas y mejoradas o adaptadas, de acuerdo con el perfil de los estudiantes que participen en el curso en cuestión. En el mismo sentido, es probable que se trabaje con el mismo syllabus y planes de clase, desde un énfasis diferente al presentado en esta propuesta.

3. Es importante que los estudiantes que participan del curso, dominen al menos de manera básica, algún programa de cómputo que sea útil para el desarrollo del curso. Además, se debe tener acceso a los recursos tecnológicos necesarios para el curso, es decir, que los estudiantes tengan tanto en casa como en la universidad un computador y el software que se emplee en el curso.
4. Como se pudo concluir a través de esta investigación, el enfoque cualitativo permite una mayor comprensión por parte de los estudiantes, acerca de un fenómeno que cambia con el tiempo, para lo cual se utilizó el software Maple® 18, el cual dejo una grata impresión en los estudiantes por su fácil manejo, así como las ayudas y tutoriales de que se dispone, pero sin embargo bien se podría emplear cualquier otro software que cuente con características similares al Maple® 18.
5. El pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática, fue fundamental para abordar los problemas estudiados durante el curso, así como las cuatro fases de solución de problemas propuestas por Polya, por lo que se recomienda se mantenga como invariantes del modelo el enfoque cualitativo, la solución de problemas y el Pseudo-empirismo como teoría de la educación matemática.
6. Finalmente se recomienda trabajar esta propuesta de manera interdisciplinaria y colaborativa con otros docentes que impartan el curso de ecuaciones diferenciales. Finalmente es importante que esta propuesta se complemente con el estudio de los sistemas dinámicos.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

1. Abell, M. (2014). *Introductory Differential Equations.* Londres: Elsevier Inc.
2. Amhad, S., Ambrosetti, A. (2014). A Textbook on Ordinary Differential Equations. Suiza: Springer.
3. Bell, E. (1937). Los grandes matematicos.Buenos Aires: Editorial Losada.(s.f.).
4. Bender, E. (1978). *An Introduction To Mathematical Modeling.* San Diego: A Wiiey-Interscience Publication, John Wiley and Sons.
5. Blanchar, P., Devaney, R., & Hall, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales.* Boston: Springer.
6. Blanchard, P. (2012). *Ecuaciones Diferenciales.* Boston: Cengage Learning.
7. Braun, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Nueva York: Springer.
8. Bravo, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31-46.
9. de Losada, M. (2012). *Corrientes del Pensamiento Matemático del Sigo XX.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
10. Delshams, A. (2005). POINCARÉ, Creador De Los Métodos Todavía Modernos En Las Ecuaciones Diferenciales y La Mecanica Celeste. *Arbor Ciencia Pensamiento y Cultura*, 43-59.

11. Delshams, A. (10 de Junio de 2010). *Matemática Aplicada I*. Recuperado el 15 de mayo de 2009, de Universidad Politecnica de Cataluña: http://www.ma1.upc.edu/recerca/preprints/0405/040501delshams.pdf

12. Ernest, P. (2004). *The Philosophy Of Mathematics Education.* London: Taylor and Francis Group.

13. Godino, J. (2009). Presente y Futuro De La Investigación En Didáctica De Las Matemáticas. *Presente y Futuro De La Investigación En Didáctica De Las Matemáticas* (págs. 1-24). Rio de Janeiro: Educación Matemática, Grupo de Trabajo 19.

14. Guldbrandt, P. M. (28 de 09 de 2005). *IAML3*. Recuperado el 15 de 04 de 2015, de http://www.odlexpert.net/iaml3/getstart/chapter5.pdf

15. Hersh, R. (1999). *What is Mathematics Really?* Oxford: Oxford university Press.

16. Hirsch, M., Smale, S., & Devaney, R. (2004). *Differential Equations, Dynamical System And Introduction To Chaos.* San Diego: Elsevier academic press.

17. Lacomba, E. (2000). Los Sistemas Dinámicos, ¿Qué son y para qué sirven? *Miscelanea Matemática*, 39-50.

18. Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones.* Madrid: Alianza.

19. Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C., & Hurford, A. (2013). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies.* Dordrecht: Springer.

20. Ministerio de Educación. (2007). Educación Para Todos. *Altablero*.

21. Moreno, M., & Azcárate, G. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 265-280.

22. Murphy, G. (1960). *Ordinary Differential Equations and their solutions.* Princeton: D. Van Nostrand Company.

23. Napoles, J. (2004). Un siglo de Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. *Lecturas Matemáticas*, 59-111.

24. Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Jhon Wiley and sons.

25. Posamentier, A. K. (1998). *Problem Solving Estrategies For Efficient and Elegant Solutions.* Thousand Oaks: Corwin press.

26. Radfor, L. (2008). Connecting theories in mathematics education:. *ZDM Mathematics Education*, 317-327.

27. Rosenthal, D., Rosenthal, D., & P., R. (2014). *A Readable Introduction To Real Mathematics.* Basilea: Springer International Publishing.

28. Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (1991). *Metodología De La investigación.* Mexico: McGraw Hill.

29. Schoenfeld, A. (1992). *Learnin to think mathematically.* New York: MacMillan.

30. Solinís, R. (2004). Universidad complutense de Madrid. *Boletin de Estudios Economicos*, 343-354. Recuperado el 15 de Abril de 2014, de http://biblioteca.ucm.es/tesis/fll/ucm-t28429.pdf.

31. Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* Nueva York: Springer.

32. Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 75-87.

33. Unesco. (1996). Nuevas formas de aprender y enseñar. *Seminario Regional "Formas de aprender y nuevas formas de enseñar* (págs. 13-18). Santiago de Chile: Unesco.

ANEXOS

Anexo 1. Syllabus ecuaciones diferenciales Universidad Antonio Nariño

VICERECTORIA ACADEMICA

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTENIDO PROGRAMÁTICO

Datos de identificación	
Programa: INGENIERIAS Y LICENCIATURAS	**Asignatura:** ECUACIONES DIFERENCIALES
Código: **17434006**	**Plan de estudios:** Cada carrera tiene asignado un número que corresponde a su plan de estudios.
Número de Créditos dentro del Plan de Estudios: CUATRO	**Fecha de actualización:** JULIO 2015
Justificación para el curso	
La modelación mediante ecuaciones diferenciales tanto de las ciencias básicas como de las ciencias humanas y sociales, es de suma importancia, ya que desde que Newton logró desarrollar el cálculo, y modelar las leyes de la mecánica clásica valiéndose de las ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales se convirtieron en una fuente inagotable para la modelación y solución de problemas no solamente de la física; sino, además, de la biología, la economía y la ingeniería. Un obstáculo que presenta el trabajo con las ecuaciones diferenciales tiene que ver con la dificultad o imposibilidad para resolver analíticamente muchas de ellas, situación que ha	

representado un gran reto para la comunidad matemática. Incluso al obtener soluciones explicitas, estas frecuentemente no proveen información útil ni fácil de interpretar acerca de las soluciones. Fue Henri Poincaré, quien hacia finales del siglo XIX estableció un nuevo paradigma en la solución de las ecuaciones diferenciales, al tratar el problema de los tres cuerpos (Delshams A. , 2005). Los métodos que Poincaré empleó para el estudio del movimiento planetario marcarían el inicio de lo que hoy se conoce como enfoque cualitativo para la solución de las ecuaciones diferenciales. Hoy por hoy los avances tecnológicos han contribuido a establecer el enfoque cualitativo como una herramienta efectiva para el tratamiento de las ecuaciones diferenciales. Debido a la trascendencia de la moderna teoría de las ecuaciones diferenciales por su aporte en la modelación y solución de problemas de diversa índole, ella ha ganado un lugar privilegiado en lo que se conoce actualmente como los sistemas dinámicos. Estos sistemas están orientados hacia una mayor comprensión de nuestro entorno, aportando de manera importante al desarrollo del pensamiento matemático.
La importancia de esta asignatura estriba en el hecho de que las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de aquéllas leyes fundamentales de la naturaleza que son formuladas en términos de razones de cambio de cantidades variables. Estas leyes surgen en diversos campos de aplicación; por ejemplo, en difusión de calor, elasticidad, estudio de fluidos y muchos otros. Con base en todo lo anterior, se propone estudiar las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde un enfoque cualitativo y basado en la concepción cuasi empírica de las matemáticas, lo cual brinda la posibilidad a los estudiantes de abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales de una manera innovadora, desarrollando el pensamiento matemático y la actividad matemática desde un currículo más retador.
Objetivo General
Establecer una metodología basada en el cuasi empirismo y métodos cualitativos para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.
Objetivos Específicos
• Modelar y resolver problemas reales a través de conjeturas mediante un modelo

- matemático basado en ecuaciones diferenciales.
- Caracterizar las soluciones de equilibrio de una ecuación y de un sistema de ecuaciones diferenciales.
- Reconocer y caracterizar el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden tanto lineales como no lineales.
- Estudiar los métodos numéricos como una aproximación a las soluciones de ecuaciones diferenciales.
- Encontrar la solución analítica de una ecuación diferencial lineal y compararla con la solución cualitativa.
- Establecer y debatir acerca del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, no lineales y de orden superior.
- Emplear los métodos cualitativos para resolver problemas prácticos que involucren la transformada de Laplace.
- Solucionar problemas con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales mediante transformadas de Laplace y los métodos cualitativos.

Competencias que los estudiantes desarrollan

Competencias generales:

a. Competencias humanistas

- Actuar éticamente en su desempeño profesional.
- Respetar y valorar la diversidad cultural y las características individuales como elementos enriquecedores de la sana convivencia.
- Promover la equidad, honestidad, libertad y fraternidad como rasgos esenciales de los ingenieros y licenciados.
- Conocer y aplicar los principios de la democracia y de la convivencia ciudadana.

b. Competencias investigativas

- Analizar información procedente de diversas fuentes para la modelación de fenómenos mediante ecuaciones diferenciales.
- Conocer y aplicar acertadamente métodos cualitativos, numéricos y analíticos que permitan resolver problemas retadores.

c. Competencias transversales

- Comunicar asertivamente en forma oral y escrita ideas y propuestas que conduzcan a la solución de problemas retadores.
- Utilizar un software (Maxima o matlab) como herramienta para la solución de problemas retadores y conocer el comportamiento de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.
- Conocer y utilizar el lenguaje propio de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, con el fin de resolver de manera creativa problemas de la práctica profesional.
- Promover la actividad y el pensamiento matemático desde el enfoque cuasi empírico de las matemáticas, para contribuir a la solución de problemas de trascendencia nacional.
- Trabajar en equipo y asumir roles de liderazgo para promover el trabajo armónico y productivo.

Competencias específicas:

a. Competencias disciplinares

Modelar situaciones, interpretar y analizar el comportamiento y las soluciones de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque cualitativo, numérico y analítico desde una concepción cuasi empírica de las matemáticas, para fomentar experiencias de aprendizaje que permitan la

construcción de significado de los conceptos, la apropiación de los métodos y el desarrollo del pensamiento matemático, con el fin de resolver problemas retadores de manera creativa.
Metodología
La asignatura Ecuaciones Diferenciales se imparte con una intensidad de cuatro horas semanales, en dos clases presenciales cada una de dos horas. En una de las clases se presenta el tema de la semana junto con un problema para ser resuelto por los estudiantes, dando así tiempo y espacio para que interactúen por medio de conjeturas que serán puestas a prueba para verificar su validez o caso contrario ser refutadas o mejoradas de manera que los estudiantes lleven a cabo actividad matemática. También se espera que durante la dinámica propia de la clase se fomente el pensamiento matemático evidenciado en la solución de problemas retadores. Todo lo anterior requiere participación activa de los estudiantes, con resolución de talleres para afianzar los conceptos, estableciendo prioridad en el aspecto comprensivo-lógico de los contenidos, evitándose la mecanización de procedimientos de la asignatura y dando especial importancia al aprendizaje a través de la resolución de problemas no rutinarios. Es fundamental retar permanentemente a los estudiantes con problemas que requieren varias técnicas para su solución que en ocasiones pueden demandar varias semanas de trabajo. Otra parte del trabajo de clase tiene que ver con el aprovechamiento de los recursos tecnológicos que brinda la Universidad tales como: la plataforma Moodle donde se generen foros de discusión sobre el problema de la semana, páginas virtuales de los docentes y laboratorios de Maple® donde se estudiara con el enfoque cualitativo el comportamiento de las soluciones de los problemas, luego, el estudiante accederá cuando lo estime conveniente a los recursos de la asignatura. Se motivarán y trataran los sistemas dinámicos y el enfoque cualitativo ilustrándolos a partir de problemas propios de ciertas disciplinas, se presentarán sus soluciones y se ilustraran algunas de sus particularidades. Igualmente, se resolverán los problemas de la semana. Cabe aclarar que el éxito del curso depende de que los estudiantes colaboren activamente en el desarrollo de estas

sesiones para que la actividad del profesor sea la de orientar, cooperar en identificar errores y captar los aspectos que presentan mayor dificultad para los alumnos, desarrollando estrategias de mejoramiento continuo y a su vez propiciar discusiones en clase que constituyen la columna vertebral del curso. Se incorpora el componente tecnológico, con el claro objetivo de que el estudiante adquiera competencias en cuanto al enfoque cualitativo, para la solución de ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, así como los métodos numéricos, para optimizar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos desde la concepción cuasi empírica de las matemáticas.

Criterios de evaluación
Tipo: Acumulativa Procedimientos: Tres notas parciales y una final. Instrumentos: Pruebas tipo objetiva (pruebas escritas), quices, resolución de talleres, resolución de laboratorios y elaboración del informe. La metodología evaluativa contempla los siguientes aspectos: • Participación en los foros (problema de la semana) • Talleres • Laboratorios • Pruebas escritas • Portafolio (talleres, laboratorios y pruebas escritas)

Las pruebas evaluativas se diseñarán en concordancia con lo establecido por la Universidad, 50% preguntas de procedimiento y el otro 50% tipo SABER, con el objetivo de que los estudiantes se familiaricen con las pruebas de calidad superior propuestas por el Estado.

Pruebas Escritas	**DIA**	**Prueba Escrita**	**Laboratorio Foros**	**Talleres**	**TOTAL**
Primer corte	JUEVES	12%	2%	6%	20%
Segundo corte	JUEVES	12%	2%	6%	20%
Tercer corte	JUEVES	18%	2%	10%	30%
Examen	JUEVES	18%	2%	10%	30%

Evidencias de Aprendizaje

De Conocimiento (Lo que sabe)

- Calcula derivadas e integrales.
- Manejo e interpretación de derivadas ordinarias y parciales.
- Resuelve cualitativa y analíticamente algunas Ecuaciones Diferenciales lineales y no lineales.
- Encuentra las soluciones cualitativas de una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales
- Analiza y soluciona problemas de aplicación a través de conjeturas y el análisis cualitativo.

De desempeño (Lo que sabe hacer)

- Comprende y adquiere soltura en el manejo de los conceptos básicos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, así como dominar e interpretar el comportamiento de las soluciones mediante el análisis cualitativo.

- A partir de conjeturas establece una base científica para profundizar en la solución de problemas sobre Ecuaciones Diferenciales.
- Comprende que las Ecuaciones Diferenciales tienen que ver con la realidad, como una interpretación del mundo.
- Concibe la actividad y el pensamiento matemático, como algo imprescindible en la práctica profesional.

De actitud (Lo que sabe ser)

- Mostrar actitud crítica y responsable.
- Valorar el aprendizaje autónomo.
- Mostrar interés en la ampliación de conocimientos y en la búsqueda de información.
- Valorar la importancia del trabajo en equipo.
- Estar dispuesto a reconocer y corregir errores.
- Respetar las decisiones y opiniones ajenas.

Fuentes de información o referencias (impresas o digitales)

Textos Guía

(s.f.).

Abell Martha, B. J. (2014). *Introductory Differential Equations.* Londres: Elsevier Inc.

Bender, E. (1978). *An Introduction To Mathematical Modeling.* San Diego: A Wiiey- Interscience Publication, John Wiley and Sons.

Blanchar, P., Devaney, R., & Hall, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales.* Boston: Springer.

Blanchard, P. D. (2012). *Ecuaciones Diferenciales.* Boston: Cengage Learning.

Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales.* Boston: Springer.

Braun, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Nueva York: Springer.

Bravo, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 31-46.

de Losada, M. (2012). *Corrientes del Pensamiento Matemático del Sigo XX.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Delshams, A. (2005). POINCARÉ, Creador De Los Métodos Todavía Modernos En Las Ecuaciones Diferenciales y La Mecanica Celeste. *Arbor Ciencia Pensamiento y Cultura*, 43-59.

Delshams, A. (10 de Junio de 2010). *Matemática Aplicada I*. Recuperado el 15 de mayo de 2009, de Universidad Politecnica de Cataluña: http://www.ma1.upc.edu/recerca/preprints/0405/040501delshams.pdf

Ernest, P. (2004). *The Philosophy Of Mathematics Education.* London: Taylor and Francis Group.

Godino, J. (2009). Presente y Futuro De La Investigación En Didáctica De Las Matemáticas. *Presente y Futuro De La Investigación En Didáctica De Las Matemáticas* (págs. 1-24). Rio de Janeiro: Educación Matemática, Grupo de Trabajo 19.

Guldbrandt, P. M. (28 de 09 de 2005). *IAML3*. Recuperado el 15 de 04 de 2015, de http://www.odlexpert.net/iaml3/getstart/chapter5.pdf

Hersh, R. (1999). *What is Mathematics Really?* Oxford: Oxford university Press.

Hirsch, M., Smale, S., & Devaney, R. (2004). *Differential Equations, Dynamical System And Introduction To Chaos.* San Diego: Elsevier academic press.

Lacomba, E. (2000). Los Sistemas Dinámicos, ¿Qué son y para qué sirven? *Miscelanea Matemática*, 39-50.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones.* Madrid: Alianza.

Ministerio de Educación. (2007). Educación Para Todos. *Altablero*.

Moreno, M. A. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 265-280.

Murphy, G. (1960). *Ordinary Differential Equations and their solutions.* Princeton: D. Van Nostrand Company.

Napoles, J. (2004). Un siglo de Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. *Lecturas Matemáticas*, 59-111.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Jhon Wiley and sons.

Posamentier, A. K. (1998). *Problem Solving Estrategies For Efficient and Elegant Solutions.* Thousand Oaks: Corwin press.

R., L., P., G., C., H., & A., H. (2013). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies.* Dordrecht: Springer.

Radfor, L. (2008). Connecting theories in mathematics education:. *ZDM Mathematics Education*, 317-327.

Rosenthal, D., Rosenthal, D., & P., R. (2014). *A Readable Introduction To Real Mathematics.* Basilea: Springer International Publishing.

Sampieri, R., Fernandez, C., & Baptista, M. (1991). *Metodología De La investigación.* Mexico: McGraw Hill.

Schoenfeld, A. (1992). *Learnin to think mathematically.* New York: MacMillan.

Solinís, R. (2004). Universidad complutense de Madrid. *Boletin de Estudios Economicos*, 343-354. Recuperado el 15 de Abril de 2014, de http://biblioteca.ucm.es/tesis/fll/ucm-t28429.pdf

Sriraman, B., & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* Nueva York: Springer.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 75-87.

Unesco. (1996). Nuevas formas de aprender y enseñar. *Seminario Regional "Formas de aprender y nuevas formas de enseñar* (págs. 13-18). Santiago de Chile: Unesco.

Textos Complementarios

- C.H, EDWARDS, PENNEY. Differential Equations And Boundary Value Problems. Prentice Hall.
- DENNIS G ZILL. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Thomson Learning. Séptima edición.
- GROSSSMAN STANLEY. Aplicaciones de Algebra Lineal. McGRAW-HILL. Cuarta edición.
- BUGL PAUL. Exploration in Differential Equations. Using Maple®. Prentice Hall.
- KOSTELICH ERIC J, ARMBRUSTER DIETER. Introductory Differential Equations From Linearity to Chaos.Addison-Wesley.
- BOYCE DIPRIMA. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa.

Direcciones de internet
http://sites.google.com/site/departamentomatematicasuan/biblioteca http://www.wannasol.com/view.php?vid=mdtYB8hiyl http://apoyovirtual.uan.edu.co/moodle/course/view.php?id=29 http://simiode.org

PARCELACIÓN

semana	Descripción	Tema	Actividad	Recursos Principales	Recursos Adicionales
1	Prueba de entrada, nivelación, condiciones para el curso y acuerdos	Razón de cambio, derivación, integración y manejo de software	Prueba de entrada, presentación del curso	Prueba y Software	Libros de texto y Manuales
2	Solución de problemas de crecimiento y decrecimiento de poblaciones	Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden decaimiento exponencial y separación de variables	Establecer un modelo que permita conocer cómo crece la población de un país	Datos históricos acerca del crecimiento de la población de determinado país	Software y datos estadísticos

3	Solución de problemas de mezclas y circuitos RC, análisis cualitativo y soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales	Métodos cualitativos, campos de pendientes. Técnica numérica: método de Euler. Equilibrios, líneas de fase y bifurcaciones	Aproximar la solución de problemas de mezclas y circuitos RC a través de campos de pendientes. Establecer el comportamiento de las soluciones mediante análisis cualitativo	Modelos de mezclas, y circuitos RC	Ayudas en línea, manuales y guías
4	Comparación de los métodos analíticos y cualitativos para la solución de ecuaciones diferenciales	Métodos analíticos para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden	Encontrar la solución analítica a algunas ecuaciones diferenciales de primer orden para compararlas con los métodos cualitativos	Software, computadoras y calculadoras	Ayudas en línea, manuales y guías
5	Evaluación				
6-7	Aproximación general a los	Sistemas lineales homogéneos	Construcción, análisis y solución de	conjeturando auto valores y auto vectores	Ayudas en línea,

	sistemas lineales		sistemas lineales usando auto valores y auto vectores		manuales y guías
8	Modelando un sistema acoplado para la venta de artículos deportivos en dos tiendas	Sistemas lineales, principio de linealidad, auto valores, auto vectores y polinomio característico	Determinar como el comportamiento de las ventas en dos tiendas de artículos deportivos inciden en las ganancias de cada una	Modelo de las ventas de dos tiendas de artículos deportivos	Ayudas en línea, manuales y guías
9	Evaluación				
10	Buscando modelos. Modelando en Ecología. Análisis de equilibrio y estabilidad	Sistemas no lineales, problemas de valor inicial	Intento por encontrar un objeto y desarrollar una estrategia con sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Modelo depredador presa	Modelos en ecología. Equilibrio y estabilidad	Ayudas en línea, manuales y guías

11	Modelando y caracterizando un modelo de especies en competencia	Linealización y análisis cualitativo de sistemas no lineales	Llevar a cabo el análisis cualitativo de un modelo de especies en competencia	Modelo de un sistema de especies en competencia	Ayudas en línea, manuales y guías
12	Evaluación				
13	Modelando y caracterizando un oscilador armónico	oscilador armónico no amortiguado, amortiguado, sub-amortiguado y sobre-amortiguado	Construcción, análisis y solución de un oscilador armónico con diferentes características	Modelo de un oscilador armónico no amortiguado, amortiguado, sub-amortiguado y sobre-amortiguado	Ayudas en línea, manuales y guías
14	Un modelo de la cadena alimenticia: como se relacionan los árboles, alces y lobos	Sistemas no lineales en tres dimensiones y caos	Llevar a cabo el análisis cualitativo de un modelo de la cadena alimenticia	Modelo de un sistema de la cadena alimenticia	Ayudas en línea, manuales y guías
15	Solución de un circuitos RC, análisis	Análisis cualitativo de la	Resolver un circuitos RC, mediante el	Modelo de un circuito RC	Ayudas en línea,

	cualitativo mediante la transformada de Laplace	transformada de Laplace	análisis cualitativo de la transformada de Laplace		manuales y guías
16	Modelando con funciones discontinuas. aplicaciones usando la transformada de Laplace	Sistemas y ecuaciones diferenciales ordinarias	Usando la transformada de Laplace y otras aplicaciones. Transferencia de funciones en ingeniería	Transformada de Laplace de una función de Heaviside y una ecuación diferencial con una discontinuidad	Ayudas en línea, manuales y guías
	Evaluación Final				