CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN Y EN SERVICIO. UN ESTUDIO DE CASOS PARA PROPONER CAMBIOS EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN

Grace Judith Vesga Bravo

Universidad Antonio Nariño

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá, Colombia

2016

CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN Y EN SERVICIO. UN ESTUDIO DE CASOS PARA PROPONER CAMBIOS EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN

Grace Judith Vesga Bravo

Tesis que se presenta como requisito parcial para obtener

El título de Doctor en Educación Matemática

Dirigida por

Dra Mary Falk de Losada

Grupo de investigación

Educación Matemática

Universidad Antonio Nariño

Doctorado en Educación Matemática

Bogotá, Colombia

2016

Síntesis

Esta investigación tuvo como objetivo analizar y describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, comprender cómo se estructuraron y cómo se transforman, para proponer elementos que se deben considerar en los programas de formación encaminados a lograr creencias más productivas hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se utilizó una metodología con enfoque cualitativo, a través de estudios de casos en dos fases. En la primera, participaron docentes en formación quienes hicieron parte de un curso sobre filosofía y epistemología de la matemática. En la segunda, se trabajó con docentes en servicio, quienes hicieron parte de un curso sobre la historia de las ecuaciones cuadráticas. Ambos cursos estuvieron orientados a desafiar las creencias epistemológicas de los participantes y a promover reflexión al respecto. Se utilizaron como instrumentos cuestionarios cerrados y entrevistas semiestructuradas.

Como parte de los resultados con estos dos grupos se pudo identificar que es la experiencia docente intensiva lo que permite crear y consolidar creencias epistemológicas, que el pregrado constituye una etapa en la que las creencias epistemológicas, formadas con anterioridad en el colegio, se están ajustando permanentemente y que, la formación recibida, tanto implícita como explícita, es de difícil y lenta asimilación en las posturas epistemológicas de los futuros maestros.

También se pudo establecer que las creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio están en permanente confrontación. Esto posibilita que los programas de formación, inicial o continua, incidan de manera más efectiva y explícita en su construcción o transformación, lo cual implica realizar reformas en las propuestas curriculares vigentes. Esta investigación permite plantear algunas recomendaciones para ello.

Abstract

This research aimed at analyzing and describing the epistemological beliefs that pre-service and in-service mathematics teachers have concerning mathematics and mathematics teaching and learning, understanding how these views are structured and changed, in order to propose elements to be considered in pre-service teacher education programs aimed at achieving more productive beliefs towards both the teaching and learning of mathematics.

The research methodology used was a qualitative approach, through case studies in two phases. Related to the first stage, pre-service teachers took part in a course on philosophy and epistemology of mathematics. With regard to the second stage, in-service teachers participated in a course on the history of quadratic equations. Both courses were designed to challenge the epistemological beliefs of participants and to promote discussion on the matter. Questionnaires and semi-structured interviews were used as instruments.

One of the first results identified in these two groups was that intensive educational experience contributes to the creation and consolidation of epistemological beliefs. Second, the undergraduate program is a stage in which epistemological beliefs, formed earlier in school, are being adjusted constantly and that the training received, both implicitly and explicitly, is assimilated slowly and with difficulty into the epistemological positions of pre-service teachers.

Furthermore, it was established that both pre-service and in-service teachers' epistemological beliefs are in constant confrontation. This situation makes it possible for initial or continuing training programs to have an explicit and effective impact on their construction or transformation, which in turn implies generating curricular reforms in existing proposals. This research proposes some recommendations for these circumstances.

Dedicatoria

A Martínez, por enseñarme a tener grandes sueños,
y lo más importante, a luchar por ellos. (Q.E.P.D)

A mi madre, por su apoyo y compañía invaluable

A mi esposo, compañero inseparable.
A Oriana y David, motores de mi vida.

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento a mi asesora de tesis, la Dra. Mary Falk de Losada, por su generosidad al compartir su conocimiento, y por inspirarme para la realización de este trabajo. El seminario sobre Epistemología de las matemáticas, que tuve el privilegio de tomar bajo su tutoría, marcó un antes y un después en mis estudios doctorales, pero especialmente, en mi trabajo y punto de vista sobre la educación matemática. Un especial agradecimiento a la Universidad Antonio Nariño, por haberme otorgado la beca para realizar mis estudios doctorales a través del Programa de Formación de Alto Nivel.

Gracias al cuerpo docente del doctorado por sus aportes durante el desarrollo de este trabajo, especialmente al Dr. Mauro García, y al Dr. Gerardo Chacón. Mi gratitud a los estudiantes y egresados de la Licenciatura en Matemáticas Universidad Antonio Nariño, quienes también han sido mi inspiración, especialmente a quienes hicieron parte de este estudio. Gracias a los docentes que participaron de manera desinteresada pero muy generosa.

Un profundo agradecimiento a mi familia, a mis hermanos Javier, Osiris y Angélica, a mi tía Esperanza y mi prima Sandra Milena, por brindarme su cariño, comprensión y confianza; y a mi padre por su fe inquebrantable. A mis suegros y cuñados, quienes siempre me han reclamado más tiempo para compartir en familia. A mis compañeros de trabajo, quienes siempre estuvieron atentos al desarrollo y avance de este proyecto y me expresaron su voz de confianza y aliento.

Y en este camino, sin duda, los amigos son un gran apoyo, a Erika y Milena, a pesar de que no hemos podido estar cerca, nos unen lazos muy fuertes. Y a Adriana, con quien he compartido este viaje, a veces por tramos difíciles, pero sin duda una experiencia enriquecedora y gratificante.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe gran preocupación por los bajos resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en pruebas internacionales de matemáticas como la del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), o el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés). En PISA 2012, todos los países latinoamericanos que participaron tuvieron un puntaje promedio significativamente inferior al obtenido por los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), siendo Colombia uno de los tres países con más bajo desempeño (ICFES, 2013). En TIMSS 2007, tanto en cuarto como en octavo grado, Colombia se ubicó dentro de los diez países con más bajo desempeño (ICFES, 2010).

Son varios los factores que pueden explicar los bajos resultados de los estudiantes y las diferencias entre ellos, como el nivel socioeconómico, la ubicación de las escuelas, la duración de la jornada escolar, los recursos, entre otras. Sin embargo, como lo afirma Yang (2014) diferentes estudios han demostrado que la calidad de los docentes influye significativamente en el rendimiento de sus estudiantes. En el informe de resultados TIMSS 2007 se indica que a mayor y mejor formación de los docentes más altos son los puntajes obtenidos por sus estudiantes (ICFES, 2010), y una de las recomendaciones que hace la OCDE para Colombia está referida a mejorar la calidad de los docentes (ICFES, 2013).

Por otra parte, la UNESCO establece que:

> Para poner fin a la crisis mundial del aprendizaje, los encargados de la formulación de políticas deben aumentar significativamente el número de docentes y brindarles todas las oportunidades necesarias para que dediquen su motivación, su energía, sus conocimientos y las competencias

> adquiridas durante su formación a conseguir el máximo rendimiento posible del aprendizaje de todos los niños y jóvenes. (UNESCO, 2014, pág. 257)

Y propone como una de las cuatro estrategias para disponer de mejores docentes *Mejorar la formación de los docentes para que todos los niños puedan aprender,* señalando que *"*La buena calidad de la educación depende de que se imparta a los maestros la mejor formación posible*"* (pág. 261).

En este sentido cabe preguntarse, para el caso particular de la formación de docentes de matemáticas, ¿Qué significa formar docentes de calidad? ¿Qué es útil que los futuros docentes aprendan? ¿Qué debería enseñarse?, entre otras. Al respecto Hersh (1997) plantea que la pregunta no es sobre qué matemáticas se debe enseñar sino sobre ¿cuál es la postura epistemológica que se tiene sobre qué son las matemáticas? ya que ésta afecta profundamente la práctica. Señala además que saber matemáticas significa hacer matemáticas, es decir, se requiere una buena formación matemática.

Diferentes investigadores afirman que existe una relación entre las creencias que tienen los docentes acerca de naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Thompson, 1984; Steiner, 1987; Ernest, 1989, Pajares, 1992; Artz y Armour-Thomas, 1999; Cross, 2009, 2015; Penn, 2012), es decir, dichas creencias tienen influencia en la práctica bien sea de manera implícita o explícita. Estas conexiones pueden tener efectos positivos, pero también negativos, específicamente en la capacidad y disposición de los docentes para probar y desarrollar nuevos enfoques, para incorporar transformaciones en sus prácticas y, para lograr que reformas curriculares tengan éxito (Steiner 1987; Pepin, 1999; Handal y Herrington, 2003; Cross, 2009, 2015; Pantziara, Karamanou y Philippou, 2013).

La literatura muestra que las creencias epistemológicas de los docentes de matemáticas acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje han sido formadas, a través de modelos de enseñanza que han recibido incluso antes de realizar estudios formales en educación matemática (Cross, 2009) y que están altamente influenciadas por los conocimientos filosóficos e históricos que tengan los docentes o futuros docentes sobre la matemática (Chassapis, 2007; White-Fredette 2009; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009). Sin embargo, estudios han evidenciado que en los programas de formación falta desarrollar en los futuros docentes un conocimiento robusto y consistente de las filosofías de la matemática y la educación matemática, que los conduzca a adoptar nuevas nociones epistemológicas sobre el conocimiento matemático (Flores, 1995, Roscoe y Sriraman, 2011).

En este sentido, existe una tendencia filosófica que muestra dos paradigmas opuestos: el absolutismo y el falibilismo (Lerman, 1990). En el primero, se considera que las matemáticas son absolutas, infalibles, incuestionables, se utiliza un lenguaje formal, no hay lugar al error y, o bien existen aparte en un mundo de ideas puras (platonismo) o en la mente del creador (neoplatonismo) y se descubren, o se crean a partir de sistemas lógico deductivos (instrumentalistas o formalistas) (Ernest, 1991, 1998). Esta visión de la matemática tiende a estar relacionada con un enfoque para la enseñanza que puede llamarse conductista centrado en el profesor que posee e imparte conocimiento que debe ser asimilado, y en algoritmos que deben ser mecanizados, lo que, en muchos casos, dificulta orientar la enseñanza hacia la resolución de problemas pues para ello se requiere un punto de vista de las matemáticas flexible y abierto (Steiner, 1987), aspectos que no son característicos del formalismo.

En el segundo paradigma, se considera que la matemática es un producto de la invención humana, falible, corregible, que comparte significados dentro de una comunidad (Davis, Hersh y Marchisotto, 2012; Hersh, 1997), que los conceptos matemáticos no están fijados de manera permanente y pueden tener una historia de modificación a lo largo del tiempo (Lakatos, 1976b). Esta postura está relacionada con un enfoque del aprendizaje que puede llamarse constructivista, que se centra en el estudiante, se basa en el uso de solución de problemas, se hace énfasis en el proceso y se incluyen aplicaciones del mundo real (White-Fredette, 2009/2010).

Al respecto Sfard, citada por White-Fredette (2009/2010), señala que, en general, los matemáticos (puros) hacen parte del paradigma absolutista, los investigadores en educación matemática se inclinan más por el falibilista, y, los docentes de matemáticas de educación básica y media están atrapados en el medio, con una mayor tendencia al formalismo. Además, la perspectiva falibilista no es una que impregne las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas de futuros profesores (Cooney, Shealy y Arvold, 1998), posiblemente tampoco las posiciones tomadas en los programas de formación.

De otra parte, varias investigaciones han documentado inconsistencias entre las creencias que tienen los docentes sobre la matemática y sus prácticas (Cooney 1985; Raymond 1997; Skott, 2009; Penn, 2012). En todas ellas se hace énfasis en la importancia de que se realicen más investigaciones sobre esta línea porque los resultados, en general, no se pueden generalizar ya que las creencias están influenciadas por contextos culturales.

En coherencia con lo anterior, en el caso colombiano en los estándares básicos de competencias, se afirma que las matemáticas son consideradas "como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes" (MEN, 2006, p47).

Se declara en los estándares que para lograr que los estudiantes sean matemáticamente competentes es necesaria la adopción de un modelo epistemológicamente coherente para lo cual se requiere:

> Que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas como los siguientes.

- Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas (…). En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas.

- Las matemáticas son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales (p 49).

Avanzar hacia la consolidación de un modelo epistemológicamente coherente por parte de los docentes de matemáticas requiere que durante la formación se haga un trabajo continuo que confronte las creencias epistemológicas sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, que generé reflexión alrededor de las mismas y sobre sus implicaciones en la práctica (Flores, 1995; Cross, 2009; Roscoe y Sriraman, 2011). Sin embargo, como lo señala Cross (2009) el cambio o formación de creencias epistemológicas debe ser un proceso continuo de la conciencia, la confrontación y la reflexión. Es posible que los programas de formación inicial sean capaces de comenzarlo, pero otros factores como el entorno escolar y las comunidades a las que pertenecen los docentes son importantes para el éxito sostenido de cualquier esfuerzo de cambio y, por tanto, deben estar participando de experiencias que desafíen sus creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y que esto redunde en que puedan ayudar a sus estudiantes a desarrollar significado y comprensión (MEN, 2006; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009).

El recorrido anterior, muestra que es necesario lograr mayor comprensión sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje que tienen docentes en formación y en ejercicio, la manera como se transforman y su influencia en la práctica, así como el efecto que pueden tener diferentes escenarios diseñados para desafiar dichas creencias al tiempo que se profundiza en aspectos filosóficos, epistemológicos e históricos de la matemática, lo cual se constituye en el tema de esta investigación.

Con base en la descripción anterior, en este estudio se plantea **como problema de investigación** ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso formativo de docentes de matemáticas en formación y en servicio para la dirección de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la educación básica y media.

La investigación tiene como **objetivo general**

Describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas para proponer cambios en los programas de formación encaminados a aportar en la consolidación de las creencias epistemológicas de futuros docentes.

Con los **objetivos específicos** siguientes:

- Describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y la manera cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas.
- Describir la influencia que tiene en la práctica de docentes de matemáticas en servicio sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje.
- Proponer recomendaciones para programas de formación de docentes de matemáticas encaminadas a que los futuros docentes o docentes en servicio desarrollen creencias y actitudes más productivas y coherentes hacia las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

Estos objetivos hacen que esta investigación tenga como **campo de acción** La formación epistemológica y filosófica sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y de docentes en servicio.

Se concretan como las tareas de investigación las siguientes:

1. Sistematizar el estado del arte y los fundamentos teóricos sobre epistemología de las matemáticas y sobre creencias epistemológicas de docentes en formación o en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, de modo que se constituyan en los soportes teóricos para el desarrollo de la investigación y el análisis de los resultados.
2. Diseñar los instrumentos que se utilizarán para recabar la información.
3. Diseñar e implementar un curso acerca de la filosofía y epistemología de las matemáticas dirigido a desafiar las creencias epistemológicas de futuros docentes de matemáticas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje.
4. Diseñar e implementar un curso sobre aspectos históricos acerca de las ecuaciones cuadráticas dirigido a docentes en servicio para desafiar sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje
5. Analizar y sistematizar la información recogida para dar cuenta del cumplimiento de los objetivos propuestos.

Se consideran como **preguntas de investigación,** las siguientes:

1. ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?

2. ¿Cuál es la influencia que tiene en la práctica de docentes de matemáticas en servicio sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje?
3. ¿Qué elementos deben tenerse en cuenta para realizar cambios significativos en programas de formación de docentes de matemáticas encaminadas a que los docentes desarrollen creencias y actitudes más productivas y coherentes hacia las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y que éstas se fertilicen mutuamente?

Metodología utilizada en la investigación

Para abordar el problema propuesto se utilizó el enfoque cualitativo de investigación a través de una metodología de estudio de casos en dos fases. En la primera se trabajó con docentes en formación, quienes participaron de un curso sobre epistemología y filosofía de la matemática; en la segunda, con docentes en ejercicio, quienes realizaron un curso alrededor de la historia de las ecuaciones cuadráticas. Los dos cursos buscaban desafiar las creencias de los docentes en formación y en servicio y propiciar escenarios de reflexión. Para recolectar la información se diseñaron dos cuestionarios cerrados para indagar sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Con base en esta información se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada participante con el fin de indagar sobre la justificación y origen de las creencias señaladas. Sobre la metodología se amplían aspectos esenciales en el Capítulo 3.

Aportes

Los resultados obtenidos permiten identificar aportes tanto en lo teórico como en lo práctico en el campo de la educación matemática y la investigación en la formación del profesorado. Desde lo teórico, que se constituye en la novedad científica de la investigación, se logró mayor comprensión acerca de las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, específicamente para el caso colombiano del cual existe poca literatura. El estudio permitió tener información sobre la posición que asumen docentes de matemáticas en formación y en servicio frente a las formas de justificación del conocimiento matemático, las fuentes de las cuáles proviene dicho conocimiento, la estructura y los límites del mismo. Se pudo establecer que los docentes en formación están en proceso de construcción y consolidación de sus creencias epistemológicas, y que los docentes en servicio se han esforzado en construir una epistemología coherente entre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, pero persisten dificultades para lograrlo.

Otro aporte teórico está relacionado con el impacto que tienen experiencias de formación, que incorporan de manera explícita aspectos filosóficos, epistemológicos e históricos de las matemáticas, en las creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio. Finalmente se pudieron identificar recomendaciones para los programas de formación, encaminados a aportar en la consolidación de las creencias epistemológicas de docentes acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. En lo práctico los aportes principales son el curso realizado con docentes en formación sobre filosofía y epistemología de la matemática y la educación matemática, que fue adaptado de un curso recibido por la autora de esta investigación en sus estudios doctorales; y el curso sobre un recorrido histórico de la ecuación cuadrática. Argumentos más amplios sobre los aportes podrán ser apreciados en conclusiones.

Estructura de la tesis

El documento está conformado por la introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y las referencias bibliográficas. En el capítulo uno se presenta el estado del arte, investigaciones relacionadas con las creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio, la relación con la filosofía, epistemología e historia de las matemáticas, referentes fundamentales para el desarrollo del trabajo. En el segundo, se presenta el marco teórico y referencial desde el cual se abordó el problema planteado. El tercer capítulo presenta el enfoque y metodología utilizada, los instrumentos de recolección de información y las fases desarrolladas. También se describen de manera detallada los cursos en los que participaron los docentes en formación y en servicio y la manera en que se concibieron y diseñaron para que cumplieran con el objetivo de desafiar las creencias de los participantes y generar espacios de reflexión. En el capítulo cuatro se describen los resultados obtenidos con los docentes en formación y en servicio, se analizan sus creencias a partir de los instrumentos y las entrevistas para identificar la fuente y justificación de las mismas, y se describen los cambios a lo largo de los cursos. En el capítulo de discusión y análisis de resultados, el quinto, se analizan los resultados encontrados, a la luz de las preguntas de investigación propuestos. En las conclusiones se da cuenta del cumplimiento del objetivo general propuesto y se amplían los aportes teóricos y prácticos de la investigación. En las recomendaciones se señalan nuevos caminos para desarrollar investigaciones orientadas a enriquecer la comprensión de las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje de docentes en formación y en ejercicio y que permitan mejorar permanentemente los programas de formación. Al finalizar se presenta la bibliografía citada y se incluyen los anexos más importantes para el desarrollo del estudio.

CAPITULO 1: ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se presenta el análisis de literatura seleccionada y que se constituye en referente para esta investigación a nivel teórico y práctico. Con esta revisión se busca tener un panorama de lo que se ha investigado, a nivel nacional e internacional, sobre el objeto de estudio que se aborda en esta investigación, aspectos metodológicos que se han empleado, resultados obtenidos y recomendaciones. Estos aspectos son importantes a considerar para el diseño mismo de esta investigación, especialmente de los instrumentos y los cursos propuestos, así como para el análisis y contraste de los resultados de este estudio.

A continuación se presenta parte de la literatura revisada relacionada con creencias de los docentes en formación o en servicio acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, su alineación, su influencia en la práctica, la relación con reformas curriculares, la importancia e impacto de la historia y la filosofía en la formación de las creencias.

1.1. Creencias, su alineación y su influencia en la práctica

Diferentes estudios señalan que existe una importante relación entre las creencias epistemológicas de los docentes acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, y su influencia en la práctica (Thompson, 1984,1992; Cross, 2009; Pepin, 1999). En este apartado se describen algunos de ellos.

1.1.1. The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice[1]

Este artículo fue escrito por Alba Thompson en 1984. Ella es la pionera en esta línea, lo que hace que este estudio sea de suma importancia. La investigadora exploró la relación entre los puntos de vista de los profesores de matemáticas y sus prácticas de aula. A través de estudios de casos, Thompson, hizo

[1] Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 15, 105–127.

énfasis en lo que denominó *integratedness* y *reflexividad.* La *integratedness* como la medida en que los puntos de vista de alguien y sus creencias forman un sistema coherente, en lugar de que cada creencia exista de manera aislada; y la reflexividad, referida a la tendencia de las personas a pensar sus acciones en relación con sus creencias. En los resultados señala que existen diversas creencias y una relación compleja de las mismas con las prácticas y por tanto sugiere que se realicen muchas más investigaciones al respecto.

1.1.2. Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza[2]

En su tesis doctoral, Flores (1995) realizó un estudio con 25 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada, con el objetivo de conocer cuál era el contenido de las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y cómo evolucionan tras su primer encuentro con la práctica docente. Flores señala que una de las dificultades de la formación inicial de profesores es que los futuros docentes no se enfrentan, durante su formación, a dilemas prácticos que puedan poner en duda sus creencias y concepciones, las cuales además son difíciles de explicitar; y hace énfasis en la importancia de que los futuros docentes sean conscientes de las mismas.

Propusieron a los estudiantes posturas epistemológicas diferentes frente al conocimiento matemático: realismo y constructivismo. Los participantes debían hacer un resumen del texto y expresar sus opiniones sobre el contenido del mismo, al comienzo y al final del curso, después de haber realizado sus prácticas. En los resultados, el autor señala que, en general, los participantes resumieron el texto respetando su estructura, por lo cual no se pudo apreciar diferencias significativas a nivel del grupo. Luego realizaron estudios de caso con dos estudiantes que sí habían mostrado variaciones

---

[2] Flores, P. (1995) Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza.Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

interesantes, utilizaron entrevistas y el material de clase para recolectar información. Uno de los estudiantes luego de la práctica solamente tuvo cambios en aspectos didácticos (cómo enseñar), pero no sobre el contenido que se debía enseñar, ni su caracterización epistemológica, y consideró que la validación del conocimiento la realiza una autoridad externa. El otro estudiante, manifestó al final, que tenía varios dilemas sin resolver acerca del conocimiento matemático. Reconoció de manera explícita que la forma de concebir el conocimiento matemático tiene influencias en la forma de enseñar; que dicho conocimiento ha surgido para resolver problemas de las matemáticas o de las ciencias y que, una vez ha sido aceptado, debe transmitirse a los alumnos; el profesor facilita el aprendizaje, pero es tarea del estudiante el aprender. Flores (1995) señala que estos resultados sirven para tener conciencia de las diferentes visiones que tienen los futuros docentes, y por tanto es importante, que los formadores reflexionen sobre estos aspectos y procuren que la formación se dirija a la preparación de profesores reflexivos.

1.1.3. Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers[3]

Cooney et al. (1998) realizaron un estudio para comprender mejor las estructuras de creencias de docentes en formación y analizar de qué modo cambian o no. A quince docentes en formación les aplicaron una encuesta y los observaron. Después de analizar la información seleccionaron a cuatro, quienes representaban diferentes posiciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estos estudiantes en formación participaron de un curso integrado (pedagogía y contenido) sobre funciones. En el desarrollo del curso se incluían investigaciones en las cuales los participantes debían hacer trabajo de campo en educación básica y media, las cuales socializaban después entre ellos. A lo largo del curso se incluyeron actividades que permitían a los participantes reflexionar sobre su experiencia y, de manera explícita, sobre sus creencias acerca de la matemática, su enseñanza y

[3] Cooney, T., Shealy, B. & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol 29, Nº 3, 306-333.

aprendizaje. Los investigadores realizaron cuatro entrevistas a lo largo del curso, en las cuales indagaron sobre la motivación para ser docentes de matemáticas, cambios de creencias a lo largo del curso y el impacto del mismo, entre otros aspectos. Los autores proponen, a partir de sus resultados, cuatro tipos de creencias: idealista, ingenuo, aislacionista, y conexionista.

Consideran que elaborar estas descripciones puede ayudar a analizar la forma en que futuros docentes construyen significados a medida que avanzan en su programa de formación docente y pueden orientar cambios significativos a éstos. Señalan que conocer dichas creencias permite crear actividades que animen a los docentes a pensar, a dudar, a considerar lo que podría ser, a reflexionar, y lo más importante, a ser adaptativos. Estos autores hacen énfasis en que los cambios no pueden darse a partir de una intervención o de un curso en particular que haga parte del plan de estudios, y que por el contrario, se requiere un mayor trabajo a lo largo de todo el pregrado, que haga coherente la formación con las creencias que se busca lograr.

Este estudio es un referente importante para la investigación que en el presente escrito se reporta, aporta elementos metodológicos importantes que fueron incorporados, como la implementación de un curso que buscaba la continua reflexión sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, y el uso de la entrevista como una principal fuente de recolección de información.

1.1.4. Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany[4]

En el estudio realizado por Pepin (1999) participaron cuatro docentes de cada uno de los países Inglaterra, Francia y Alemania. Durante dos semanas los investigadores estuvieron con los docentes en sus sitios de trabajo para lograr una comprensión acerca de sus creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Como parte de los resultados señalan que los profesores de Alemania y Francia creen que la lógica es el principal elemento de las matemáticas y lo reflejan en su práctica; por el contrario, los de Inglaterra también consideraban la lógica y el razonamiento como aspectos importantes, pero esto no se reflejaban en el aula de clase, parecían dar por entendido que los estudiantes ya los habían adquirido y desarrollado y se preocupaban más por los resultados que por los procesos.

Otra conclusión importante es que las creencias y concepciones que tienen los profesores están relacionadas con las tradiciones filosóficas de los tres países y con las tendencias en la educación matemática. Finalmente el investigador sugiere que los estilos pedagógicos de los docentes son una respuesta personal a un conjunto de tradiciones filosóficas y educativas, a limitaciones instituciones y sociales, y a supuestos sobre la enseñanza y aprendizaje. Sugiere este autor que es necesario analizar y entender en términos de contextos culturales más amplios las creencias y concepciones de los docentes, porque la falta de comprensión sobre estos aspectos puede inhibir el proceso de cambio en los diferentes niveles educativos.

[4] Pepin, B. (1999). Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany. In B. Hudson, F. Buchberger, P. Kansanen, & H. Seel Publications (Vol. 2, pp. 127–146). Umea: TNTEE.

1.1.5. Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction[5]

En la investigación realizada por Stipek, Givvin, Salmon y MacGyvers (2001), se buscaba tener información sobre la coherencia entre las creencias de los docentes acerca de la matemática y su enseñanza, sus prácticas de aula y sus formas de evaluación. Participaron 24 docentes que trabajaban con estudiantes de sexto grado de diferentes escuelas de Estados Unidos, y 437 de sus alumnos. Los docentes respondieron un cuestionario cerrado llamado "Creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza" al comienzo y al final del año escolar, y un cuestionario sobre sus prácticas evaluativas al final del año escolar, les observaron y grabaron sesiones de clase y sus estudiantes respondieron, también al comienzo y al final el año escolar, un instrumento cerrado sobre sus competencias en matemáticas y su gusto hacia ellas. Dentro de los resultados de este estudio, los investigadores señalan que, en general, hubo una alineación entre las creencias de los docentes acerca de las matemáticas y su enseñanza y su trabajo en aula. Pudieron observar que para quienes consideran que lo importante es que los estudiantes tengan buen desempeño, sin hacer énfasis en la comprensión, en el aula de clase los estudiantes tenían poca autonomía y el error era castigado y señalado como lo que no se debe hacer, y lo que se privilegiaba en la solución de un problema era la respuesta. En este sentido, los autores señalan que parece existir un conflicto entre las creencias tradicionales de los docentes y lo que se propone en los documentos curriculares. Finalmente los autores señalan que, dada la relación entre las creencias y las prácticas, es posible que cualquier estrategia que tenga como centro únicamente el desarrollo profesional será muy probable que falle. Este es un referente importante porque da elementos que pueden considerarse para hacer reformas a los programas de formación.

[5] Stipek, D., Givvin, K., Salmon, J. & MacGyvers, V. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*. 17 (2), 213 – 226.

1.1.6. Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices[6]

Cross (2009) evidenció en su estudio que las creencias de los profesores de matemáticas en ejercicio acerca de la naturaleza de las matemáticas son altamente influyentes en sus prácticas en el aula, si bien no es una relación lineal, y son una fuente de sus creencias sobre la pedagogía y el aprendizaje, de modo que se convierten en facilitadoras u obstaculizadoras para incorporar recursos orientados a la transformación de las prácticas. A través de entrevistas semiestructuradas y observaciones de clase se indagó sobre sus puntos de vista acerca de las matemáticas como una disciplina, sobre pedagogía y sobre el aprendizaje; también se tuvieron en cuenta los planeadores y trabajos de los estudiantes. En los resultados el autor señala que todos los participantes tenían fuertes creencias, aunque diferentes, que surgieron desde sus experiencias en la escuela, con las matemáticas y sus docentes. Para tres de los cinco participantes las matemáticas estaban más directamente relacionadas con fórmulas, procedimientos, reglas, y objetividad. Cross (2009) señala que para que los estudiantes se conviertan en "poderosos pensadores matemáticos" (p. 341) y se pueda disminuir el bajo rendimiento académico de los mismos, es deseable que sus docentes posean creencias que apoyen el trabajo en solución de problemas orientado al alumno, y que es importante que quienes no las tengan puedan participar en programas que tengan como objetivo lograr dichas transformaciones, si bien, no es una tarea fácil. También se afirma que proporcionar a los docentes elementos que contradicen sus creencias actuales es importante, pero por sí solo no es suficiente para mantener los cambios a lo largo del tiempo. Es importante que durante la formación se haga un trabajo continuo que confronte las creencias y generé reflexión alrededor de las mismas y sus implicaciones, y que tengan modelos que puedan seguir, ya

[6] Cross, D. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*, 325–346. DOI 10.1007/s10857-009-9120-5.

que también reportan en los hallazgos que los cinco docentes fueron fuertemente influenciados por sus propios docentes.

1.1.7. The Alignment of Preservice Elementary School Teachers' Beliefs concerning Mathematics and Mathematics Teaching[7]

Penn (2012) investigó las creencias de los futuros profesores de matemáticas acerca de la naturaleza de la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Aplicó un cuestionario de escala tipo Likert a 380 docentes al inicio del programa de formación, y encontró, acerca de la naturaleza de la matemática, que había una distribución entre absolutistas y falibilistas, pero las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje eran principalmente constructivistas. En este sentido Penn (2012) señaló que en aproximadamente la mitad de los participantes había desalineación entre estos tipos de creencias. Luego entrevistó ocho docentes que habían reflejado en los instrumentos puntos de vista contradictorios, específicamente a quienes tenían creencias absolutistas frente a las matemáticas y constructivistas acerca de la enseñanza y aprendizaje de las mismas. A través de esa indagación más cercana pudo observar que en realidad tenían creencias tradicionales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido Penn señala que, aunque los docentes discuten técnicas de corte constructivista, no son capaces de asumirlas como herramientas en el aula.

1.2. Creencias y reformas curriculares

Sobre la importancia e impacto de las creencias que tienen los docentes acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, en las reformas educativas, varias de las investigaciones ya descritas señalan aspectos implícitos, sin embargo, son menos las que indagan de manera explícita sobre este asunto. A

[7] Penn, A. (2012). The Alignment of Preservice Elementary School Teachers' Beliefs concerning Mathematics and Mathematics Teaching (Tesis for the degree of Master of Education). Queen's University. Kingston, Ontario, Canada.

continuación se presentan algunos resultados de un estudio de compilación en esta línea de investigación y un ejemplo concreto reciente.

1.2.1. Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform[8]

Handal y Herrington (2003) señalan que el cambio educativo es un proceso complejo en el que los profesores tienen creencias fuertes sobre la calidad y el proceso de innovación, por lo cual no es raro que cuando se proponen cambios en los planes de estudio, los docentes confíen más en sus formas tradicionales de hacerlo que en las tendencias que se promuevan en éstos, y afirman que ésta es una de las razones por las cuales es difícil incorporar cambios y muchas veces las reformas propuestas fracasen. Estos investigadores hacen una recopilación de diferentes estudios que muestran esto.

En sus conclusiones señalan que es más probable que una reforma curricular tenga éxito si tiene en cuenta las creencias de los profesores, y que quienes hacen la política no deben suponer que en el aula se traduce de manera real lo que se propone en los documentos curriculares. Y hacen énfasis en que como es el docente quien puede o no garantizar que se haga efectiva cualquier reforma o modificación curricular, es necesario, que antes de cualquier implementación se puedan identificar aspectos relacionados con las actitudes, percepciones, creencias, y sentimientos de los docentes y posibles discrepancias entre éstas y lo que se propone, de modo que se puedan analizar y trabajar alrededor de ellas.

Para Handal y Herrington (2003) las tendencias actuales de la educación matemática orientadas hacia el aprendizaje constructivista sólo pueden tener éxito si se consideran y confrontan las creencias de los profesores sobre estas reformas.

[8] Handal, B. & Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 59-69.

1.2.2. Teachers' beliefs and knowledge related to the Cyprus mathematics curriculum reform[9]

Pantziara, Karamanou y Philippou (2013) señalan que en Chipre se lanzó una reforma curricular en 2004, que empezó su implementación en 2011 y se espera que esté funcionando completamente en 2017. Con la reforma se busca pasar de una enseñanza tradicional a una más progresista que tiene cuatro puntos principales. El primero, los estudiantes deben participar en investigaciones matemáticas que motiven su interés, a través de situaciones de la vida real y preguntas multidisciplinarias; segundo, el énfasis es la solución de problemas; tercero, las TIC's forman parte integral de la educación matemática, y cuarto, las experiencias de los estudiantes se enriquecen a través de experiencias pedagógicas ricas. Naturalmente esto hace que el rol del docente cambie de manera importante, pues en este escenario, mientras los estudiantes investigan, se debe crear los escenarios para que éstos intercambien ideas y puedan justificar sus puntos de vista. De otra parte, el docente debe tener los conocimientos básicos para que pueda utilizar el material y tener confianza en su capacidad de dar sentido a las matemáticas. En este escenario, con el objetivo de examinar las creencias, el disfrute/confianza de los docentes y su conocimiento del currículo reformado al comienzo de su aplicación, Pantziara et al. (2013) aplicaron instrumentos a 100 docentes en ejercicio. Los resultados señalan que prevalecen creencias tradicionales sobre la naturaleza de las matemáticas, considerando que las matemáticas son un conjunto de operaciones que se utilizan para obtener la solución correcta a los problemas en lugar de herramientas de pensamiento, que el profesor es quien tiene el control en el aula y la motivación de los estudiantes es extrínseca. De otro lado encontraron que existía un alto conocimiento de la reforma, pero poca conciencia de los componentes importantes y el uso de

[9] Pantziara, M., Karamanou, M., & Philippou, G. (2013). Teachers 'beliefs and knowledge related to the Cyprus mathematics curriculum reform. En F. Arzarello (Presidencia), Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8). En Manavgat-Side, Antalya – Turkey.
.

actividades de investigación. Sin embargo, los autores señalan que, como en otras investigaciones, se confía en que los docentes tengan éxito en la implementación de la reforma.

1.3. Importancia de la filosofía y la historia en la formación docente

Las creencias de los docentes acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje están altamente influenciadas por sus conocimientos y posturas filosóficas sobre la matemática y con su historia. En este apartado se muestran algunas investigaciones en esta línea.

1.3.1. Integrating the Philosophy of Mathematics in Teacher Training Courses[10]

Chassapis (2007) afirma que la filosofía de las matemáticas debe ser un componente esencial en la formación profesional de un docente por tres razones esenciales que respalda en diferentes estudios. Primero, existe una asociación directa entre la filosofía de las matemáticas y las características fundamentales de su enseñanza. Segundo, los puntos de vista, ideas o creencias que tiene un docente sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje están relacionadas o reflejan implícitamente una filosofía de las matemáticas, que se constituye en una especie de práctica filosófica y muchas veces prevalece sobre los conocimientos matemáticos. La filosofía de la matemática debe servir a los docentes a ser más reflexivos sobre su práctica, debe jugar un rol importante en la definición de propósitos y objetivos de su trabajo, así como en la definición de estrategias para alcanzarlos; es decir, le debe permitir al docente participar en la producción de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. Tercero, la filosofía de la matemática se asocia directamente con una comprensión más profunda de las matemáticas como su objeto de conocimiento.

Chassapis (2007) presenta una descripción de la implementación de un curso sobre filosofía de la matemática con docentes en formación para ser profesores de primaria. En los resultados de la

[10] Chassapis, D. (2007). Integrating the Philosophy of Mathematics in Teacher Training Courses. In: François & Van Bendegem (eds.), 61–80.

evaluación de dicho curso por parte de los participantes se señala que, en general, hubo un cambio de postura frente a la matemática, en relación con su postura tradicional, que se caracteriza por adoptar enfoques críticos frente a los estándares o prácticas establecidas, pues es posible cuestionarlas; y que los temas más preciados fueron aquellos que les ofrecían posibilidades explícitas de cuestionar sus creencias sobre la enseñanza de conceptos particulares en la escuela (los números) o modelos de enseñanza. Por otra parte, señala que la parte más difícil del curso estuvo relacionada con la falta de conocimiento matemático específico de los estudiantes (profesores en formación), lo cual obstaculiza comprender preguntas esenciales de la filosofía de la matemática y delimita por tanto la calidad de las discusiones.

1.3.2. What is Mathematics? An Exploration of Teachers' Philosophies of Mathematics during a Time of Curriculum Reform[11]

Este estudio se realizó con el propósito de examinar el proceso que atraviesan docentes en ejercicio cuando formulan una filosofía personal de matemáticas al tiempo que la ponen en práctica. Se hizo un estudio de caso con cuatro docentes que realizaban estudios de posgrado y que cursaron la asignatura de filosofía, en la cual se buscaba desafiar las creencias epistemológicas que tenían los docentes acerca de las matemáticas a través de la exploración de posiblemente nuevas filosofías de la matemática y la educación matemática, orientado a través de las preguntas ¿Qué es la matemática?, ¿Qué significa enseñar y aprender matemáticas? Durante 18 meses los investigadores realizaron a los participantes entrevistas centradas en discusiones, utilizando el método socrático, sobre la filosofía de las matemáticas, conocimientos y prácticas de instrucción.

En los resultados, White-Fredette (2009) señala que los participantes indicaron que antes de tomar el curso no habían pensado mucho en aspectos filosóficos de las matemáticas, la posición que tenían

[11] White - Fredette, K. (2009). What is Mathematics? An Exploration of Teachers' Philosophies of Mathematics during a Time of Curriculum Reform. Middle-Secondary Education and Instructional Technology Dissertations. Paper 46.

sobre las matemáticas estaba relacionado con el absolutismo y consideraban que sus puntos de vista sobre las matemáticas no se podía separar de sus puntos de vista acerca de la educación matemática. A medida que fueron leyendo y discutiendo, se dieron cuenta que sus filosofías acerca de la matemática no estaban directamente relacionadas con su trabajo de aula, pues éstos en general eran de corte constructivista, considerando la importancia del trabajo en solución de problemas y la construcción por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos, lo que los condujo a redefinir su filosofía. La matemática perdió su perfección, abstracción y naturaleza etérea, pero además se dieron cuenta de la naturaleza cambiante de la filosofía. Otro resultado importante es que las opiniones sobre las matemáticas de los docentes participantes obedecían a su propia historia personal y su relación con las matemáticas como estudiante, docente o incluso como hijo de educador. White-Fredette plantea que la filosofía de las matemáticas debe ser incluida en la formación docente, de manera que conocer nuevas tendencias orientadas hacia una epistemología de las matemáticas falibilista ayudará a integrar la enseñanza desde el enfoque constructivista más fácilmente. Sugiere además que se realicen más investigaciones en este sentido que ayuden a hacer de la filosofía un puente con la práctica.

1.3.3. Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program[12]

Charalambous, Panaoura y Philippou (2009) realizaron un estudio longitudinal con 94 docentes en formación para explorar la efectividad de un programa basado en la historia de las matemáticas, en el cual se conciben las matemáticas como una creación de la actividad humana en lugar que como un cuerpo fijo de conocimientos. El programa consistió de dos cursos de historia, desarrollados cada uno

[12] Charalambous, C., Panaoura,A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 161–180. DOI: 10.1007/s10649-008-9170-0

durante un semestre y con cinco unidades cada uno. Aplicaron cuatro veces una encuesta antes y después de cada curso y realizaron entrevistas semiestructuradas, diseñadas tomando como referente las categorías establecidas por Ernest (1991), quien señala que existen esencialmente tres categorías que agrupan las creencias epistemológicas de los docentes: el platónico (la matemática es un cuerpo a priori estático y unificado de conocimientos que existe ahí afuera y espera ser descubierto); el instrumentalista (la matemática es un cuerpo organizado de instrumentos, puede ser también un punto de vista formalista); y el experimental (la matemática es un cuerpo dinámico en continua evolución producto de la creación humana cuyos resultados están abiertos a revisión).

En los hallazgos reportan que la posición formalista se intensificó a través del programa, la platonista disminuyó notablemente y la experimental también se redujo pero no de manera significativa. Como limitaciones del estudio mencionan el no hacer explícito el objetivo del estudio a los participantes, quienes además señalaron que tuvieron pocas oportunidades para sumergirse ellos mismos en el desarrollo de las matemáticas. En este sentido los investigadores señalan que los tutores hicieron un papel parecido a un guía turístico hablando de grandes momentos de la historia y sugieren para futuras investigaciones diseñar exploraciones guiadas sobre ideas importantes en el desarrollo de la historia.

1.3.4. Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas[13]

Específicamente en el caso colombiano existe muy poca literatura que dé cuenta de avances en la temática de investigación abordada. Bohorquez[14] (2013) realizó una investigación con estudiantes para

[13] Bohorquez, L. (2013). Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Santo Domingo, 6 al 8 de noviembre (paper).

[14] Investigación realizada en el marco de la tesis doctoral con estudiantes de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad Distrital - Colombia

profesor de matemáticas con el objetivo de identificar y caracterizar cambios en sus concepciones sobre su gestión del proceso de enseñanza aprendizaje al participar en un ambiente de resolución de problemas, así como caracterizar y explicar factores del ambiente que pueden apoyar o limitar el cambio de concepciones.

Para recoger la información utilizó entrevistas semiestructuradas, grabaciones de audio y video, y un instrumento denominado "invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula" aplicado al inicio y final del curso. En los resultados señala que la concepción inicial, en general, estaba orientada a que el profesor es quien debe orientar pero no se señala cómo hacerlo; al finalizar consideran que es importante que el profesor "conozca en profundidad los conceptos que se espera se aprendan a partir de la resolución del problema" y que una manera en que se puede ayudar a los estudiantes está relacionado con que el docente haga preguntas apropiadas para generar aprendizaje.

Conclusiones del capítulo 1

Las investigaciones anteriores muestran que existe una relación compleja entre las creencias epistemológicas que sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje tienen los docentes, y la práctica que desarrollan. Las creencias que tienen pueden afectar de diferentes formas su práctica y la disposición que tienen para probar y llevar a cabo nuevos enfoques propuestos, incluso a través de reformas curriculares. Las creencias que han formado los docentes parecen no estar altamente influenciadas por los programas de formación, lograr cambios es difícil y más aún mantenerlos en el tiempo. Por lo anterior es importante que los docentes participen continuamente de experiencias de aprendizaje que les permita reflexionar sobre sus creencias y en la cuales el uso de la filosofía, la epistemología y la historia son fundamentales.

Esto sugiere que estudiar las creencias epistemológicas de los docentes acerca de las matemáticas y su enseñanza es un área fértil de investigación, en la cual se requieren muchas nuevas propuestas.

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO Y REFERENCIAL

Este capítulo tiene como finalidad presentar las posturas teóricas tenidas en cuenta para el desarrollo de la investigación, las cuales hacen referencia a la epistemología, creencias, creencias epistemológicas y epistemología de las matemáticas.

2.1. Epistemología, creencias y creencias epistemológicas

La epistemología es una rama de la filosofía que se ocupa de la teoría del conocimiento. En el diccionario de filosofía de la Universidad de Stanford se señala que:

> La epistemología es el estudio del conocimiento y de la creencia justificada. Como el estudio del conocimiento, la epistemología se ocupa de las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las condiciones suficientes y necesarias para el conocimiento? ¿Cuáles son sus fuentes? ¿Cuál es su estructura, y cuáles son sus límites? Como estudio de la creencia justificada, la epistemología tiene por objetivo responder preguntas tales como: ¿Cómo debemos entender el concepto de justificación? ¿Qué justifica las creencias justificadas? ¿Es la justificación interior o exterior a la mente del sujeto? (Steup, 2014)

El conocimiento como creencia justificada está referido a determinar las condiciones necesarias y suficientes para que la creencia exista, la justificación tiene como papel central garantizar que la creencia no se debe al azar. Para que una creencia verdadera se considere conocimiento es necesario que provenga de fuentes confiables como la percepción, la introspección, la memoria, la razón y el testimonio (Steup, 2014).

De otra parte, el término creencia ha sido utilizado en muchos estudios; en 1992, Thompson señala que los investigadores suelen dar por entendido lo que significa, pero que es necesario distinguir creencia de conocimiento. Para Thompson las creencias hacen parte de las concepciones y éstas, señala, son una estructura mental más general, la cual abarca conceptos, imágenes mentales, preferencias, creencias y significados, entre otros. A partir del trabajo de Thompson (1992), Phillipp (2007) define y distingue entre actitudes, creencias, sistemas de creencias y concepciones, entre otras. Se refiere a una **actitud** como una manera de actuar, sentir o pensar que muestra la disposición u opinión de la persona; pueden mostrar sentimientos positivos o negativos. Las **creencias**, son premisas o proposiciones sobre el mundo que se piensa son verdaderas, son como lentes que afectan la forma de ver el mundo. El autor señala que son más cognitivas y difíciles de cambiar que las actitudes, y que, a diferencia de los conocimientos, no son consensuadas. Un **sistema de creencias** hace referencia a una manera de describir las creencias de una persona de manera organizada, generalmente alrededor de una idea o un objeto particular. A un sistema de creencias, Phillipp (2007) señala que se asocian tres aspectos: i) las creencias dentro de un sistema de creencias pueden ser primarias o derivadas; ii) las creencias dentro de un sistema de creencias pueden ser centrales o periféricas; y, iii) las creencias nunca se tienen de manera aislada, pueden considerarse que existen en clusters. La noción de concepción de Phillipp (2007) es la misma que la de Thompson (1992).

Por otra parte, en investigaciones más recientes, las creencias epistemológicas han sido conceptualizadas de manera multidisciplinaria, ya que las personas tienen creencias diferentes sobre los distintos aspectos del conocimiento: de dónde proviene (fuente u origen); si es certero e inmutable o evoluciona (estabilidad); y, si es simple y aislado o complejo e integrado (estructura) (Buehl y Fives, 2009). Estos tres aspectos son considerados para el desarrollo de este estudio.

2.2. Epistemología de la matemática

En esta sección se describen posturas epistemológicas acerca de las matemáticas en las que se señala que la matemática es un producto de la invención humana, falible, que comparte significados dentro de una comunidad, cuya área principal de trabajo es resolver problemas, y se modelan los elementos y argumentos de su desarrollo.

2.2.1. Cuasi empirismo de Lakatos

Lakatos (1976a) señala que la multiplicidad de filosofías de la matemática puede ser asociada con dos grupos que llamó euclidiano y cuasi empírico. En el primero, las matemáticas son verdades universales y absolutas, mientras que en el segundo, se ve el crecimiento matemático como un proceso de conjeturas, pruebas y refutaciones.

Lakatos señala que la epistemología clásica modeló su ideal de teoría en la geometría euclidiana, es decir, una teoría ideal es un sistema deductivo que a partir de un conjunto de axiomas indubitables genera nuevas verdades mediante reglas de inferencia válidas; y que fue un gran choque para los racionalistas que la ciencia no pudiera organizarse de ese modo. Afirma que un sistema que no es deductivo es cuasi-empírico y señala como una diferencia fundamental entre estos sistemas referencia a la noción de verdad, en el euclidiano la verdad se reclama, mientras que en el cuasi-empírico lo mejor que se puede hacer es corroborar, pero siempre es conjetural. La metodología euclidiana es puritana y antiespeculativa, en contraste el patrón principal del cuasi-empirismo es la proliferación de teorías y la refutación.

Lakatos señala que el desarrollo de la teoría euclidiana tiene tres etapas. La primera etapa precientífica la llama ingenua y en ésta se procede por ensayo y error; sigue el denominado período fundamental que reorganiza la disciplina y establece la estructura de tipo deductivo; y la tercera, es la solución de problemas en el sistema, principalmente la construcción de pruebas o refutaciones de conjeturas interesantes (esta etapa podría abolirse con un método de decisión). Mientras que el desarrollo de una teoría de tipo cuasi-empírica es muy diferente, pues inicia con problemas, seguido de audaces conjeturas y soluciones a través de pruebas o refutaciones; se progresa gracias a especulaciones, a la crítica y a la controversia entre teorías y argumentos rivales, la atención está puesta en las fronteras, lo más importante es el crecimiento y la evolución continua, no la fundamentación ni la acumulación de verdades eternas.

Para Lakatos la matemática es cuasi-empírica. Señala que a raíz de la crisis generada por el descubrimiento de las geometrías no euclidianas, la idea fue establecer los fundamentos pero las diferentes escuelas de manera inesperada llegaron a la conclusión de que la reorganización estrictamente euclidiana de las matemáticas era imposible, lo cual implica que las teorías matemáticas, así como otras teorías científicas son cuasi-empíricas.

Por otra parte, Lakatos señala que, como consecuencia del desarrollo de la metamatemática, hubo una tendencia a dejar de lado los problemas que no podían ser tratados o resueltos fácilmente con esta metodología, generando de algún modo, el desprecio por su estudio (Lakatos, 1976b). Para Lakatos "el formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas de la historia de las matemáticas, puesto que, de acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas, éstas no tienen propiamente historia" (p 17). Para Lakatos esto es un error, considera que la historia y la filosofía de las matemáticas no pueden y no deben ser tratadas de manera aislada. Retomando a Kant ,dice

> La historia de las matemáticas que carezca de la guía de la filosofía se ha vuelto ciega, mientras que la filosofía de las matemáticas que vuelva la espalda a los más intrigantes fenómenos de la historia de las matemáticas, se ha hecho vacía. (Lakatos, 1976b, p 18)

En su obra *Pruebas y Refutaciones,* Lakatos (1976b) busca poner en duda el formalismo como caracterización válida del conocimiento matemático y mostrar que las matemáticas informales y cuasi-empíricas se desarrollan mediante una incesante mejora de conjeturas, a través de la especulación y la crítica, y no, como resultado de un monótono aumento de teoremas indubitablemente establecidos. Señala que, a través del diálogo mostrado a lo largo del libro, "La historia real resonará en las notas, la mayoría de las cuales han de ser tenidas, por tanto, como parte orgánica del ensayo" (Lakatos, 1976b, p 21).

El método de conjeturas y refutaciones es, descrito por su autor, como un patrón heurístico para el descubrimiento matemático que consta de cuatro estadios:

1. Conjetura primitiva
2. Prueba. Es un experimento mental que descompone la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas.
3. Surgimiento de contraejemplo globales, de la conjetura primitiva.
4. Reexamen de la prueba. Como consecuencia se mejora la conjetura primitiva. (Lakatos, 1976b, p 150)

2.2.2. El cuasi-empirismo de Putnam

Para Putnam (1975) las matemáticas no son ciencias experimentales pero comparten el contenido empírico con las teorías físicas de las que forman parte y se modifican junto con ellas. Señala que no son puramente lógicas, sino cuasi-empíricas, pero sin embargo, ha existido el paradigma de que son *a priori*.

Putnam supone la existencia de una brecha entre cómo el ser humano concibe el mundo y la forma en que el mundo es en realidad, y sostiene que las matemáticas deben ser interpretadas de manera realista, es decir, que las matemáticas hacen afirmaciones que son objetivamente verdaderas o falsas, independientemente de la mente humana.

Putnam argumenta que el conocimiento matemático se asemeja a un conocimiento empírico, es decir, que el criterio de la verdad tanto en las matemáticas como en la física es el éxito de nuestras ideas en la práctica, y que el conocimiento matemático es corregible y no absoluto.

Y señala que lo primero que se debe enfrentar, para rebatir el carácter *a priori*, es el método de la prueba en matemáticas; se pregunta si acaso el único método es obtener conclusiones a partir de axiomas que han sido previamente establecidos, y responde que no, que también puede existir métodos cuasi-empíricos.

Para Putnam usar este tipo de métodos las matemáticas son fuente de nuevos axiomas, objetos y teoremas, los cuales a menudo se sabe que son verdad antes de que se tenga éxito en la búsqueda de una demostración. Inferencias empíricas y cuasiempíricas apoyan la afirmación de que las matemáticas son verdaderas. La demostración y la inferencia cuasiempírica deben ser vistas como complementarias, además que la demostración tiene la gran ventaja de no aumentar el riesgo de contradicción y continuará siendo el principal método de verificación matemática.

2.2.3. El falibilismo de Hersh

Para Hersh (1997) la pregunta central no es qué matemáticas enseñar sino ¿cuál es la postura epistemológica que se tiene sobre qué son las matemáticas? ya que ésta afecta la práctica. Señala además que saber matemáticas significa hacer matemáticas, es decir, se requiere una buena formación matemática.

Hersh (1997) afirma que prevalecen dos tendencias acerca de la naturaleza de las matemáticas: el platonismo y el formalismo, y se manifiesta en contra de las dos y propone crear una nueva, entre otras razones, por las siguientes:

- la matemática es humana, es parte de y se adapta a la cultura humana
- el conocimiento matemático es falible. Las matemáticas pueden avanzar por cometer errores, al corregir sobre ellos.

- dependiendo de la hora, el lugar y las situaciones, el rigor y la demostración tienen diferentes interpretaciones. La forma aristotélica no es la única manera de decidir, la demostración por computador es un rigor no tradicional.
- los objetos matemáticos son una variedad distinta de los objetos social-históricos; son parte de la cultura. (p 22)

A pesar de esta posición que se puede llamar de vanguardia, todavía es cierto que al observar un libro de matemáticas, cualquier persona podría pensar que en matemáticas lo primero son los axiomas. Sin embargo, Hersh (1997) señala que lo primero es plantear un problema cuya solución probablemente lleve en el futuro a los axiomas. Advierte además que cuando el matemático ha logrado resolver un problema, luego de muchas batallas y dificultades, su tarea no ha terminado, pues no basta resolverlo, es necesario que la comunidad matemática lo valide. Y señala que el punto de vista que la matemática es esencialmente derivaciones de un conjunto de axiomas está mal enfocado, pues no es así que la matemática se hace.

Adicionalmente Hersh (1997) afirma que no es necesario buscar una definición de las matemáticas más allá de su significado socio-histórico-cultural, pues esto es todo lo que tiene que ser y por tanto, hay que olvidarse de los fundamentos, de lo inmaterial y de la realidad inhumana (p 23). Hersh (1997) desafía el supuesto de que las matemáticas son absolutas y veraces, considera por el contrario una perspectiva falibilista, es decir, una visión de que el conocimiento matemático no es absoluto, es susceptible de mejoramiento y corrección, es un producto de la invención humana y comparte significados dentro de las comunidades matemáticas y científicas.

A la pregunta ¿qué son las matemáticas?, Hersh citado por Pepin (1999) responde que las matemáticas tratan de ideas, no de conjuntos físicos sino de ideas. Y responde a su pregunta ¿cuáles son las principales propiedades de la actividad matemática como es conocido por nuestra experiencia diaria?

indicando que son tres: (1) los objetos matemáticos son inventados o creados por los seres humanos; (2) se crean, no arbitrariamente, sino que surgen de la actividad con objetos matemáticos ya existentes, y de las necesidades de la ciencia y la vida cotidiana; (3) una vez creados, los objetos matemáticos tienen propiedades que están bien determinadas, aunque podemos tener grandes dificultades para descubrirlas, pero existen de forma independiente de nuestro conocimiento de ellos.

Esto muestra, como señala Pepin (1999) que Hersh adopta la idea del matemático en ejercicio, para saber matemáticas hay que hacer matemáticas, y señala que esta postura implica para la enseñanza que el centro está en los estudiantes, en proponerles situaciones en las que se requiere razonamiento y pensamiento creativo para descubrir, inventar y comunicar ideas y demostrarlas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión está en contraposición de posturas en las que el dominio de los significados ya establecidos para los conceptos y de los procedimientos es el objetivo central de la instrucción, que enfatiza desarrollar el entendimiento matemático más que el pensamiento matemático del estudiante.

2.3.4. Solución de problemas de Pólya

Pólya, es sin lugar a dudas un referente importante en la educación matemática por su aporte en el trabajo en solución de problemas, de hecho, Lakatos estudió de las obras de Pólya y señaló que “fue un importante reformador de la educación matemática y campeón en el uso de estilos informales para la resolución de problemas matemáticos” (Glas, 2014).

Además fue Pólya quien le sugirió a Lakatos la temática de su tesis doctoral, que fue publicada póstumamente como *Pruebas y Refutaciones.* Pólya (1965) señala que los docentes tienen una gran oportunidad para poner a prueba la curiosidad de los estudiantes y despertarles el gusto por el pensamiento independiente colocando el énfasis del trabajo en el aula en la solución de problemas, y que la desperdiciarán si se centran en ejercitar a los estudiantes en operaciones rutinarias.

Pólya hace alusión a su propia experiencia e interés por profundizar en el estudio de las matemáticas, pero cuando leía libros y asistía a conferencias, entre otras actividades, siempre terminaba con el mismo interrogante “Sí, la solución dada al problema parece ser correcta, pero ¿cómo es posible descubrir tal relación? Sí este experimento al parecer es correcto, tal parece que es un hecho, ¿pero cómo pueden descubrirse tales hechos?, ¿y cómo puedo yo por mí mismo inventar o descubrir tales cosas?” (p 6).

Esto muestra que no estaba simplemente interesado en la solución del problema sino en la forma en que se puede llegar a la misma, en comprender los motivos y procesos tenidos en cuenta. Dice que, al estudiar los métodos de solución utilizados en matemáticas, se pueden percibir dos facetas de las matemáticas, una como ciencia deductiva al estilo de Euclides y otra, como inductiva, de corte experimental.

Esas inquietudes lo llevaron a formular su propuesta para la solución de problemas que ha sido y sigue siendo ampliamente usada tanto por investigadores como por docentes, la cual consiste en cuatro pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Por tanto Pólya presenta una postura de tipo empirista con respecto a la generación del conocimiento matemático, y señala que en las fases del nacimiento de una teoría se incluyen el razonamiento inductivo, la generalización, la especialización y la analogía, aspectos informales de razonamiento que pueden ser reproducidos en el aula (Glas, 2014). Estas posturas hacen el trabajo de Pólya un referente fundamental para el desarrollo de esta propuesta y para establecer puentes entre la epistemología de la matemática y la de la educación matemática.

Conclusiones del capítulo 2

Desde la tendencia filosófica de las matemáticas tomada para este estudio se consideran dos miradas epistemológicas sobre las matemáticas: el absolutismo o formalismo y el falibilismo. Desde el absolutismo se considera que las matemáticas son absolutas, infalibles, incuestionables, no se permite el error, y es importante el uso riguroso de un lenguaje formal y de sistemas lógico deductivos. Por otra parte, desde el falibilismo se considera que la matemática es una creación humana y por tanto es falible, corregible, el error es parte natural de ella que puede generar nuevo conocimiento, y comparte significados dentro de una comunidad.

Desde estas posturas se diseñaron los instrumentos para el desarrollo del estudio y posterior análisis de la información.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Este capítulo tiene como objetivo describir la metodología utilizada en el desarrollo de esta investigación. Para ello se presenta el enfoque que se asume, la población que participó, los instrumentos diseñados para recabar la información, así como la manera en que fue analizada.

3.1. Tipo de enfoque

Este estudio utiliza un enfoque cualitativo pues como señalan Sampieri, Fernández y Baptista (2014) "*se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto*" (p 358). Y tiene, entre otras, las siguientes características: se basa en explorar y describir para luego señalar perspectivas teóricas; la recolección de datos se hace a través de métodos no estandarizados; se busca obtener perspectivas y puntos de vista de los participantes; se recaba información a través de lenguaje escrito, verbal y visual, los cuales se analizan y describen para reconocer tendencias; el proceso de indagación es holista y flexible, y tiene como propósito reconstruir la realidad tal y como es observada; se observan los procesos sin imponer puntos de vista; y se analizan tanto aspectos implícitos como explícitos.

Se utiliza como metodología de investigación el estudio de caso la cual es adecuada para investigar fenómenos desde múltiples perspectivas y no sólo desde la influencia de una variable. La característica principal del estudio de caso es que permite explorar de manera profunda y así obtener conocimiento más amplio sobre el fenómeno investigado. Esta metodología permite además utilizar diferentes fuentes de información. En esta investigación se busca tener conocimiento más amplio sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje de docentes de matemáticas en formación y en servicio, por lo cual esta metodología es apropiada.

3.2. Participantes

El estudio se realizó en dos fases, la primera con docentes en formación y la segunda, con docentes en ejercicio. En la primera participaron seis docentes en formación, tres hombres y tres mujeres, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño, quienes durante el primer semestre de 2015 estaban cursando séptimo u octavo semestre. Ellos participaron del curso “Epistemología y Filosofía de las matemáticas y la Educación Matemática”, que se constituyó en una de las electivas disciplinares que debían cursar.

En la segunda fase participaron tres docentes en ejercicio, dos hombres y una mujer. Para seleccionar este grupo, se invitó a los docentes del área de matemáticas de 25 instituciones a participar de un curso denominado “Recorrido histórico sobre la solución de ecuaciones cuadráticas”. Las 25 instituciones fueron seleccionadas por su trayectoria en las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas y todas eran de carácter privado. A través de correo electrónico y certificado, se hizo la convocatoria y se realizó primero un proceso de preinscripción para determinar el interés de participación y el mejor horario para realizar los encuentros. Se preinscribieron trece docentes y una vez fijado el día de encuentro, las fechas de realización y horario, seis docentes se presentaron al primer encuentro, de los cuales cinco accedieron a participar en el estudio. Para efectos de la investigación realizada solamente se tuvieron en cuenta tres docentes, pertenecientes a tres instituciones diferentes, porque fueron quienes cumplieron con por lo menos el 80% de asistencia y entrega de actividades.

A todos los participantes se les informó el objetivo del estudio, se les invitó a participar de manera voluntaria. Todos los participantes firmaron el consentimiento informado. (Ver anexos 1 y 2.)

3.3. Descripción de los cursos

Para el desarrollo de la investigación se realizaron dos cursos, uno dirigido a docentes en formación y otro a docentes en ejercicio. Los cursos fueron diseñados con énfasis en la epistemología, la filosofía y la historia de las matemáticas, y tuvieron un componente de trabajo en solución de problemas a través de conjeturas. El propósito principal era, a través de los temas propuestos en cada uno, las lecturas seleccionadas, el material elaborado y los trabajos propuestos, desafiar a los participantes sobre sus creencias epistemológicas acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de modo que hicieran un proceso permanente de reflexión.

3.3.1. Curso para docentes en formación

Los seis docentes en formación participaron de un curso sobre epistemología y filosofía de la matemática, que se desarrolló durante dieciséis semanas, durante primer semestre de 2015. La duración total fue de 32 horas presenciales y la docente titular del mismo fue quien llevó a cabo este estudio. El objetivo del curso fue estudiar y conocer diferentes corrientes filosóficas y posturas epistemológicas sobre la matemática y su enseñanza, de manera que los participantes pudieran construir, reconstruir o modificar completamente la propia.

El curso se dividió en tres partes. En la primera, se estudió la epistemología de las matemáticas en la escuela griega y medieval, con exposición principalmente por parte de la docente titular del curso con base en las obras y aportes de Platón, Aristóteles, Descartes, Locke, Hume y Kant. En la segunda, se estudiaron obras de Lakatos, Davis y Hersh, las cuales fueron analizadas y presentadas por los estudiantes.

La tercera parte, estuvo a su vez conformada por dos momentos; en el primero se propuso a los estudiantes trabajar, de manera grupal, un taller al estilo de Lakatos tomando algunas temáticas relacionadas con la matemática escolar. En el segundo momento, la docente titular presentó a los estudiantes un recorrido histórico sobre la ecuación cuadrática, en el cual se hizo énfasis en mostrar los problemas epistemológicos y científicos que tuvieron que enfrentar los matemáticos de las diferentes épocas y la forma en que los resolvieron. Se buscaba con ello mostrar la importancia de conocer y usar la historia de las matemáticas, como lo señala Lakatos, y del anverso y reverso de la misma como menciona Hersh, para el surgimiento y avance de la matemática.

Con base en este recorrido, del cual se elaboraron notas de clase, los estudiantes debían hacer, como trabajo final del curso, una propuesta sobre la manera de incorporar los diferentes aspectos históricos en la enseñanza de la ecuación cuadrática en la educación media.

Las primeras dos partes del curso implementado se propusieron y desarrollaron con base en un curso también sobre epistemología de la matemática y la educación matemática cursado por la autora de este estudio como parte de su formación doctoral. La tercera parte fue completamente diferente y es parte del aporte práctico de la presente investigación el diseño y material de la misma.

3.3.2. Curso para docentes en ejercicio

Los docentes en ejercicio que participaron en este estudio tomaron un curso de corta duración denominado *Un recorrido histórico a través del estudio de la solución de ecuaciones cuadráticas en una variable* el cual se desarrolló en modalidad b-learning entre los meses de septiembre y noviembre de 2015, con cinco encuentros presenciales en total, cada uno de tres horas. El curso fue orientado por la autora de este estudio y se buscaba, a través del recorrido histórico propuesto en el tema concreto de las ecuaciones cuadráticas, analizar con los docentes en ejercicio los problemas epistemológicos y científicos que tuvieron que enfrentar los matemáticos en las diferentes épocas en la búsqueda de soluciones de ecuaciones cuadráticas, y analizar la importancia de la historia de las matemáticas para el desarrollo de la matemática y para el proceso de enseñanza aprendizaje. Mediante este recorrido, se buscaba además que los docentes en ejercicio reflexionaran acerca de las creencias que tienen sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Este curso se hizo con base en la tercera parte del curso con docentes en formación; el material se amplió y mejoró para el mismo.

Las primeras cuatro sesiones se desarrollaron principalmente con exposición por parte de la investigadora y aportes y participación de los docentes en ejercicio quienes debían leer con anticipación el material elaborado. En la primera, se hizo un recorrido sobre la aparición de ecuaciones cuadráticas y soluciones propuestas en diferentes épocas por los babilónicos, griegos y árabes. En la segunda, se analizó el trabajo de Leonardo de Pisa y otros matemáticos, y la dificultad que tenían para aceptar números que no cumplieran con la tradición griega[15]. Durante la tercera sesión, se estudió la manera como avanzó y se logró la institucionalización de la simbolización algebraica, se estudió cómo esto permitió romper con esa tradición, así como los significativos avances de la matemática que siguieron. Al finalizar la tercera sesión, se propuso a los participantes un taller para trabajar alrededor de una conjetura relacionada con la matemática escolar. En la cuarta sesión, se estudió el surgimiento y crecimiento de la geometría analítica, gracias al desarrollo del álgebra. Y cómo estos avances y otros, como el descubrimiento de las geometrías no euclidianas llevaron a la necesidad de fundamentar la matemática. Se presentaron aspectos relevantes de las escuelas formalista, logicista e intuicionista. Al finalizar esta sesión los participantes socializaron su trabajo alrededor de la conjetura propuesta, lo que algunos habían realizado con sus propios alumnos, se hizo un debate sobre la lectura de Hersh acerca del anverso y el reverso de las matemáticas, la cual debían leer previamente los docentes, y se hizo una breve descripción de la propuesta de Lakatos en su libro *Pruebas y refutaciones*.

En la última sesión, los docentes debían socializar una propuesta, elaborada por ellos, sobre la manera de incorporar aspectos históricos en la enseñanza de la ecuación cuadrática en la educación media con énfasis en proponer a los estudiantes trabajar alrededor de conjeturas y/o solución de problemas.

[15] En la tradición griega todo número real se tenía que poder representar como la magnitud de un segmento que además podía construirse con regla y compás. En este sentido, en esa época, no se aceptaban números negativos, ni números irracionales positivos que no se pudieran construir con regla y compás. Leonardo había encontrado este tipo de números como solución de ecuaciones.

3.4. Recolección de información

Para la recolección de información en las dos fases se utilizaron como instrumentos principales cuestionarios cerrados y entrevistas semiestructuradas. Todas las sesiones del curso realizado con docentes en formación fueron grabadas en audio y video. Todas las sesiones realizadas con docentes en ejercicio fueron grabadas en audio y se grabaron en video algunos momentos. Las entrevistas a docentes en formación y en servicio fueron grabadas en audio. También se utilizó un formato de recolección de información de experiencia docente y formación para el caso de los docentes en servicio, e información académica de cada docente en formación sobre su nivel de avance en el programa y asignaturas cursadas.

3.4.1. Cuestionarios cerrados. Se diseñaron dos cuestionarios cerrados con el fin de obtener información sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Los cuestionarios fueron diseñados para este estudio, se tomaron como referentes otros instrumentos utilizados en diferentes investigaciones relacionadas con las creencias acerca de la naturaleza de la matemática y su enseñanza (Walker, 2007; Penn, 2012). Además de contar con la revisión y aprobación del director de este estudio, los instrumentos fueron revisados por dos docentes de programas de doctorado y maestría en educación matemática, con estudios doctorales en matemática y en pedagogía de la educación respectivamente. Sobre la base de las observaciones realizadas algunas de las afirmaciones fueron modificadas y otras eliminadas, también se hicieron ajustes en la redacción y extensión de los instrumentos en general.

El primer cuestionario fue denominado “Creencias epistemológicas acerca de la matemática”, tiene un total de 29 afirmaciones, de las cuales 10 están relacionadas con la fuente del conocimiento matemático, 13 con la estabilidad o certeza y 6 con la estructura como se muestra en Tabla 1:

Tabla 1. Cuestionario creencias epistemológicas acerca de la matemática

Categoría	Afirmaciones
Fuente del conocimiento matemático	F1. La matemática es una creación de la mente humana F2. La matemática está por ahí, en el universo, esperando a ser descubierta F3. La matemática se construye a partir de la experiencia humana F4. La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o ser aceptados como verdaderos F5. Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta F6. Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática F7. En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento F8. Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad F9. Los problemas son menos importantes que los teoremas F10. La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura
Estabilidad (certeza) del conocimiento matemático	C1. Cada día se inventa nueva y mucha matemática C2. El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana C3. El conocimiento matemático es cierto, objetivo e incuestionable C4. En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas C5. Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian C6. Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles C7. Es posible inventar problemas matemáticos que no tienen solución C8. La matemática está en continua evolución C9. La matemática ha evolucionado a través de la historia C10. La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce C11. Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza C12. En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información C13. Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático
Estructura del conocimiento matemático	E1. Hacer matemáticas es una actividad solitaria E2. La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la contradicción E3. Las matemáticas son un conjunto de reglas, fórmulas, hechos y procedimientos E4. El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo E5. Hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento E6. Para entender las matemáticas es importante relacionarlas con la vida real

El segundo instrumento llamado “Creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” tiene un total de 20 afirmaciones asociadas a posturas de tipo tradicional o constructivista frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Cuestionario creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

No	Afirmación
1	Cualquier persona puede aprender matemáticas
2	Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática
3	Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta
4	El docente de matemáticas es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes
5	Los estudiantes pueden resolver problemas de manera creativa aun cuando no tengan muchos conocimientos matemáticos
6	El éxito del aprendizaje de las matemáticas está en la repetición de procedimientos
7	En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental la memorización de conceptos
8	Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase
9	Los errores de los estudiantes se deben discutir en la clase como ejemplo de lo que no se debe hacer
10	Los temas de la matemática escolar están claramente establecidos y son estables en el tiempo
11	Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla
12	En la clase de matemáticas es importante que se muestre a los estudiantes problemas sin solución así como diferentes formas de ver y resolver un mismo problema
13	Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente
14	La clase es una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento matemático
15	Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta
16	Es importante proponer a los estudiantes situaciones o problemas que les permita generar y probar nuevas teorías
17	El trabajo en solución de problemas retadores es una buena fuente para mostrar que cualquier persona puede hacer matemáticas
18	Cuando un estudiante resuelve problemas lo importante es que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar
19	Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema
20	En la clase de matemáticas, el profesor debe saber la respuesta a cualquier pregunta de los estudiantes

En cada uno de los cuestionarios se buscó un equilibrio en el número de afirmaciones referidas a posturas de tipo absolutista y de tipo falibilista sobre las creencias epistemológicas acerca de las matemáticas, y por otra parte, posturas conductistas o tradicionales y constructivistas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Para cada una de las afirmaciones los participantes debían marcar en una escala Likert qué tanto se identificaban o estaban de acuerdo. Se utilizó una graduación de 1 a 5, dónde 1 significaba completamente en desacuerdo, 2 en desacuerdo, 3 ni en desacuerdo ni de acuerdo, 4 de acuerdo y 5 completamente de acuerdo. Se aclaró y escribió en cada instrumento que no había afirmaciones correctas o incorrectas. En cada aplicación las afirmaciones se colocaron en diferente orden.

Los docentes en formación respondieron tres veces los cuestionarios y presentaron el mismo número de entrevistas, al comienzo, en la mitad del curso y al final. Los docentes en ejercicio respondieron al inicio y al final del curso los instrumentos y presentaron igual número de entrevistas.

3.4.2. Entrevistas semiestructuradas.

Después de haber respondido los instrumentos cerrados, a cada uno de los participantes se le realizaba durante la semana siguiente y de manera individual, una entrevista semiestructurada. La duración promedio fue de 15 minutos cada una.

Entrevista inicial

Esta entrevista se realizó para cada fase al inició de los cursos y tenía tres partes. En la primera, con base en las respuestas dadas en el instrumento de creencias epistemológicas acerca de la matemática, se invitó a los participantes a señalar por qué se sentían identificados con diferentes afirmaciones sobre la fuente, la estabilidad y la estructura del conocimiento matemático. En algunos casos también se indagó por las afirmaciones con las cuales estaban en desacuerdo. En la segunda, se les pedía justificar sus acuerdos o desacuerdos, sobre afirmaciones referidas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La tercera parte fue un poco diferente para cada grupo. A los docentes en formación se les preguntó por su motivación por ser docentes de matemáticas, lo que esperan que sus estudiantes aprendan y por la relación entre las matemáticas y la enseñanza de las mismas. A los docentes en ejercicio se les realizaron preguntas relacionadas con su formación profesional, su experiencia docente, y la manera en que cada una de estas etapas ha contribuido en su quehacer docente. También se indagaba por las razones por las cuales decidieron ser docentes de matemáticas, lo que esperan que sus estudiantes aprendan y la manera en que realizan sus clases.

Entrevista intermedia

Esta entrevista fue presentada solamente por los docentes en formación. Dado que el curso para esta fase fue de dieciséis semanas se consideró conveniente realizar una entrevista a la mitad del curso. En el caso de la segunda fase, no se realizó de ese modo porque el curso fue de corta duración.

A través de esta entrevista se buscaba indagar por los cambios identificados en los instrumentos cerrados acerca de las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, así como el posible impacto del curso en desarrollo.

La entrevista tenía dos partes. En la primera, se pidió a cada participante dar las razones que lo llevaron a cambiar de creencias. Esto se hizo para cada afirmación en la cual hubo una diferencia de al menos dos puntos con respecto a la primera aplicación de los instrumentos. La segunda, estuvo orientada a indagar si consideraban que las posturas y documentos analizados durante el curso habían hecho que, de manera consciente, modificaran algunas de sus creencias, o les hubiera generado dudas frente a las creencias que tenían al inicio del curso.

Entrevista final

Al finalizar cada uno de los cursos, cada participante respondió nuevamente los instrumentos cerrados y se realizó posteriormente una entrevista semiestructurada que tenía a su vez tres partes. En la primera, se indagaba a cada participante por las razones de los cambios identificados a través de los instrumentos cerrados, esto se hizo siguiendo la metodología descrita en la entrevista intermedia, es decir, se consideró que hubo un cambio significativo, si entre la primera y la última aplicación se presentó una diferencia de al menos dos puntos.

En la segunda parte se preguntó a los participantes por los aspectos del curso que consideraban les habían aportado de manera más significativa a su formación profesional y por el posible impacto del curso en su práctica docente. En el caso de los docentes en ejercicio, se incluyeron preguntas orientadas a identificar diferencias y semejanzas del curso realizado frente a lo hecho durante la formación de pregrado y en otros cursos de formación continua. También se les preguntó sobre el impacto que consideraban podía tener ese tipo de cursos en la formación de futuros docentes de matemáticas. En los anexos 4 y 5 se describen los momentos de cada una de las entrevistas realizadas.

3.4.3. Propuestas de aula

Las propuestas de aula hechas por los docentes en servicio al finalizar el curso también hicieron parte de los instrumentos considerados para la recolección y análisis de datos. Cada presentación se grabó en audio y video.

3.5. Análisis de datos

A partir de la información recogida en los instrumentos cerrados y las entrevistas, se hace para cada participante una descripción completa de sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, los cambios señalados entre el comienzo y al final del curso, el impacto que éste pudo tener y algunos datos generales. Adicionalmente para los docentes en servicio se hace una descripción de la propuesta de aula presentada y se contrasta con las creencias señaladas en los otros instrumentos.

Con los instrumentos cerrados se determina en cada aplicación la postura epistemológica reportada por cada participante, si está claramente definida o la tendencia que puede observarse. Para esto se hace un análisis del número de afirmaciones de cada tendencia falibilista/absolutista o constructivista/tradicional con las que cada participante se identificó. La descripción realizada se hace con énfasis en mostrar si hay una postura estable o en señalar los cambios presentados entre el comienzo y el final de cada curso.

Teniendo en cuenta que los instrumentos cerrados tenían una escala de graduación de 1 a 5, dónde 1 significaba completamente en desacuerdo, 2 en desacuerdo, 3 ni en desacuerdo ni de acuerdo, 4 de acuerdo y 5 completamente de acuerdo, se considera que hubo un cambio significativo de creencia entre una y otra aplicación si el valor absoluto de la diferencia entre los valores marcados es igual o mayor a dos.

En el caso de las creencias epistemológicas acerca de la matemática, para cada participante la descripción se discrimina en fuente del conocimiento matemático, estabilidad y certeza. Se señalan las afirmaciones de cada categoría con las que está más fuertemente identificado el participante o se detallan los cambios presentados.

Las entrevistas fueron transcritas y se utilizan en la descripción del perfil de cada participante para señalar los argumentos dados acerca de sus creencias epistemológicas o de los cambios señalados entre una y otra aplicación. También se utilizan para describir el impacto del curso y aspectos del perfil general de cada participante. Este perfil está relacionado con su motivación hacia la docencia de las matemáticas, lo que espera que sus estudiantes aprendan y los aspectos que consideran más relevantes en la formación recibida en el pregrado.

Los docentes en formación respondieron tres veces los instrumentos cerrados y presentaron igual número de entrevistas, sin embargo, el análisis y el perfil presentado se hacen con base en la primera y la tercera, y se usa la información de la segunda aplicación de instrumentos de manera complementaria, especialmente cuando los participantes señalaron desde la segunda aplicación cambios importantes.

Conclusiones del capítulo 3

Se propuso un enfoque cualitativo a través de estudios de casos para el desarrollo de la investigación y así dar respuesta a las preguntas y al problema de investigación. El estudio tuvo dos fases, la primera con docentes en formación y la segunda con docentes en servicio, quienes participaron en cursos sobre epistemología, historia y filosofía diseñados para desafiar sus creencias. Para recolectar información se diseñaron cuestionarios cerrados y entrevistas semiestructuradas. Uno de los cuestionarios fue sobre creencias epistemológicas acerca de las matemáticas, y el otro sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; las entrevistas tenían como objetivo profundizar en las justificaciones que daban los participantes sobre sus creencias.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS: UNA MIRADA A LAS CREENCIAS EPISTEMOLÓGICAS DE DOCENTES EN FORMACIÓN Y EN SERVICIO

Este capítulo tiene como objetivo presentar los resultados obtenidos acorde con los instrumentos utilizados y el análisis de información propuesto para el desarrollo de este estudio, los cuales fueron descritos en el capítulo anterior.

Se presenta una descripción acerca de las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje identificadas para cada uno de los futuros docentes de matemáticas que participaron en el curso "Epistemología y Filosofía de las Matemáticas y la Educación Matemática", y para cada uno de los docentes en servicio del curso "Recorrido histórico de las ecuaciones cuadráticas".

A partir de los instrumentos utilizados para recoger la información, se hace un perfil de cada participante que incluye los siguientes aspectos.

- **Aspectos generales**. Para los docentes en formación una descripción de aspectos generales sobre su avance y desempeño en el programa de formación, las razones o motivaciones que lo llevaron a estudiar la licenciatura y el aporte que ha percibido del programa para su profesión. Para los docentes en servicio se describen aspectos generales sobre por qué decidieron ser docentes de matemáticas, el pregrado realizado y el impacto que ha tenido en su ejercicio docente, la experiencia docente, la manera en que desarrollan sus clases y lo que consideran que en general, les ha aportado en la construcción de sus creencias epistemológicas.
- **Creencias epistemológicas acerca de la matemática.** A partir del instrumento cerrado sobre creencias epistemológicas acerca de la matemática se hace un perfil general, se señalan los cambios evidenciados a lo largo de cada curso, y se hace una descripción por cada aspecto

epistemológico considerado, a saber, la fuente, la estabilidad y la certeza del conocimiento matemático, como fueron descritos en el Capítulo 3.

- **Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:** A partir del segundo cuestionario, se establece para cada participante la postura identificada frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y se analizan y describen los cambios a lo largo de los cursos.
- **Propuesta para enseñanza de las ecuaciones cuadráticas**: En el caso de los docentes en formación se describe la propuesta presentada para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas.
- **Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto:** se describe el impacto señalado por cada docente en formación y en servicio, del haber participado en el curso correspondiente, los aspectos que destacan y algunas apreciaciones finales.

En lo que sigue los participantes están identificados por nombres ficticios que no necesariamente coinciden con el género del sujeto. Los docentes en formación se denominan Enrique, Yeny, Edwin, Jairo, Lucía y Yadira. Y los docentes en servicio se identifican con los nombres John, Myriam y Francisco.

4.1. El caso de Enrique

4.1.1. Aspectos generales

Enrique ha cursado el 78% del plan de estudios, ya terminó de hacer sus prácticas docentes, no ha reprobado ni cancelado ninguna asignatura a lo largo de su formación, es considerado un buen estudiante y su promedio general es 4.0. Le falta hacer su trabajo de grado y no ha cursado historia de las matemáticas.

Enrique quería estudiar educación física, pero no tuvo apoyo de su padre, por lo cual hizo una carrera técnica de electrónica, y mientras lo hacía le tomó gusto a las matemáticas, así, cuando termino tomó la decisión de ser docente de matemáticas. Enrique también quiere ser docente de matemáticas para enseñar de una manera distinta a la que le enseñaron a él, señaló que su profesor se caracterizaba por trabajar solamente un tema "… se dedicaba sólo a una cosa, y de ahí no salía. (…), no se le podía refutar, (…) el álgebra de nosotros fue muy básica, si alcanzamos a ver uno o dos casos de factorización fue mucho, entonces yo dije no! Hay que buscar la forma, me gustaría buscar la forma de enseñar álgebra pero más acorde a lo actual". Enrique espera que sus estudiantes aprendan a resolver problemas de la vida cotidiana.

Sobre la formación que ha recibido a lo largo de la licenciatura Enrique dice que le ha gustado el trabajo en cálculo y probabilidad, pero que durante mucho tiempo tuvo muchas dudas y dificultades relacionadas con la lógica matemática, y señaló que en algunos cursos como fundamentos de matemáticas, había aprendido muy poco, y los aprobó con dificultad. También señaló que algunos cursos de formación pedagógica le permiten afrontar los problemas que presentan los jóvenes, como la drogadicción.

4.1.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

Enrique al comienzo del curso no tenía claramente definida una postura epistemológica sobre la matemática, pero a lo largo del mismo fue mostrando cambios hacia una de tipo falibilista. Sin embargo, sus creencias epistemológicas están en proceso de construcción y consolidación, y en ellos se evidencian algunas contradicciones.

Fuente del conocimiento matemático

Enrique, estuvo de acuerdo o completamente de acuerdo con afirmaciones como

La matemática es una creación de la mente humana.

La matemática está por ahí, en el universo, esperando a ser descubierta.

Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.

En coherencia con estas posturas estuvo en desacuerdo con las afirmaciones

Los problemas son menos importantes que los teoremas.

Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática

De otra parte, en la Tabla 3 se muestran los cambios significativos entre la primera y tercera aplicación de los instrumentos, que permiten identificar un cambio hacia una postura falibilista.

Tabla 3. Cambios significativos en las calificaciones que dio Enrique sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura	3	1	2	
En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento	4	4	0	Durante la entrevista aclaró estas posturas y se pudo identificar que está en desacuerdo con estas afirmaciones
La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o ser aceptados como verdaderos	4	4	0	

* Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Durante las entrevistas señaló que considera que la matemática es una creación de la mente humana tomando como ejemplo la necesidad del hombre de comunicar aspectos relacionados con el conteo, para lo cual tuvo que crear nueva matemática, no estaba por ahí.

En la primera aplicación señaló que en la matemática existen procedimientos que se tienen que aprender y aceptar como verdaderos, sin embargo, en la entrevista dudó haber estado de acuerdo con dicha afirmación, indicó que tal vez pensó eso porque sus docentes transmitían la matemática como una ciencia formal y exacta pero que no piensa lo mismo, considera que la matemática es falible, que es posible refutar algunas afirmaciones, incluso señaló que algunas demostraciones pueden estar erróneas.

En la tercera aplicación Enrique señaló estar de acuerdo con la afirmación "Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad", contrario a lo que había expresado la primera vez, sin embargo, durante la entrevista tuvo dudas y se retractó "…pues directamente la creatividad, creatividad no… más bien un proceso que trabaja por prueba y error".

Estabilidad del conocimiento matemático

Enrique se identificó con afirmaciones como

> Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza.
>
> El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana.
>
> La matemática está en continua evolución.
>
> Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.
>
> En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información.
>
> Es posible inventar problemas matemáticos que no tienen solución.

En coherencia con estas creencias epistemológicas, Enrique estuvo en desacuerdo con afirmaciones como

> En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas
>
> Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

Finalmente en esta categoría presentó cambios importantes entre el comienzo y el final del curso que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Cambios significativos en las calificaciones que dio Enrique sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
Cada día se inventa nueva y mucha matemática	3	5	2	
La matemática ha evolucionado a través de la historia	2	4	2	
El conocimiento matemático es cierto, objetivo e incuestionable	2	4	2	Durante la entrevista aclaró estas posturas y se pudo identificar que está en desacuerdo con estas afirmaciones
La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce	4	4	0	
Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian	4	2	2	

* Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Enrique en la primera aplicación señaló al mismo tiempo que, la mayor parte de lo que es verdad en matemáticas ya se conoce en contraste con que la matemática está en continua evolución. Al pedirle que argumentara esta creencia señaló que lo que se está enseñando en la escuela no ha cambiado desde hace muchos años y que incluso persisten los errores en la enseñanza. Al insistir en si hay avances en la matemática (pensada como disciplina) afirmó que no los ha visto de manera significativa como en otras ciencias, aunque reconoce que la matemática está inmersa en muchas ciencias, que tal vez los hubo hace 200 años pero ya ha pasado mucho tiempo para que no haya nuevos avances.

Al finalizar el curso, señaló tener claridad sobre la evolución continua de la matemática, que el no haber cursado aún historia de las matemáticas no le permitían tener conocimiento al respecto, sin embargo, aclaró que los nuevos avances de la matemática se deben buscar, que no es algo que se sepa de manera inmediata, también hizo referencia a que la evolución se evidencia por ejemplo, en la simbología del álgebra, la cual se trabajaba inicialmente de manera retórica.

Enrique considera que cualquier persona puede crear o descubrir matemáticas por su propia cuenta, porque está convencido que la matemática es muy fácil "´sólo es cuestión de intentarlo a través de prueba y error", a partir de conocimiento básico. Inicialmente no se identificó con la afirmación que señalaba que en la matemática es posible inventar problemas que no tengan solución. Durante la entrevista cambió de opinión "pensándolo bien si se pueden inventar", lo cual ratificó en la tercera entrevista señalando que es posible buscar diferentes maneras de abordar un problema y encontrar la solución, por ejemplo al estilo de Lakatos, "se puede partir de una conjetura, que luego puede ser modificada, de manera que sí tenga solución el problema planteado".

Estructura del conocimiento matemático

Enrique no presentó ningún cambio significativo entre la primera y la tercera aplicación de los instrumentos cerrados, pero sí se identificaron contradicciones durante la entrevista.

Enrique estuvo inicialmente en desacuerdo con la afirmación hacer matemáticas es una actividad solitaria, en la tercera entrevista cambió su creencia y dijo estar de acuerdo, sin embargo, sus argumentos estuvieron relacionados con la manera en que piensa debe estudiarlas "así puedo trabajar más en mis errores, … lo cual no ocurriría al hacerlo en grupo y ser criticado por otros".

Enrique señaló estar en desacuerdo con las afirmaciones

> La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la contradicción.
>
> El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo.

Pero durante la entrevista final, al indagar por la justificación de estas creencias, Enrique tuvo muchas dudas y cambió su postura dijo "… si me acuerdo, memorizando … la matemática es exacta", y que por tanto no se pueden cuestionar algunas verdades. Con respecto a que en la matemática no hay lugar para la contradicción, también dudó de su respuesta, y luego señaló que está de acuerdo con esa afirmación porque varios teoremas se demuestran utilizando el método de contradicción. En este caso, Enrique confunde un método de demostración, con el hecho de poder encontrar en la matemática contradicciones.

4.1.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Enrique se identifica con algunos aspectos del constructivismo, sin embargo, sus creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están más relacionadas con una postura tradicional, que privilegia el trabajo alrededor de problemas rutinarios con énfasis en el desarrollo de destrezas para repetir procedimientos y algoritmos. Sobre este aspecto no tuvo cambios a lo largo del curso.

Enrique señaló estar completamente de acuerdo con afirmaciones como

> Cualquier persona puede aprender matemáticas.
>
> Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase.
>
> En la clase de matemáticas docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento matemático.
>
> Los estudiantes pueden resolver problemas de manera creativa aun cuando no tengan muchos conocimientos matemáticos.

En coherencia con lo anterior, estuvo en desacuerdo con

> Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática.

Sin embargo, también señaló estar de acuerdo con otras afirmaciones que son contrarias a las anteriores, y que muestran que no hay una postura completamente definida, pero si mayor tendencia hacia la enseñanza y aprendizaje de manera tradicional, con énfasis en los procedimientos y donde es el docente el dueño del conocimiento. Enrique estuvo completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

> El docente de matemáticas es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes.
>
> En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental la memorización de conceptos.
>
> En la clase de matemáticas, el profesor debe saber la respuesta a cualquier pregunta de los estudiantes.
>
> Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta.
>
> Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente.

Durante las entrevistas Enrique afirmó que con pocos conocimientos los estudiantes pueden resolver problemas de manera creativa porque los estudiantes pueden buscar otras maneras de afrontar los problemas y no solamente quedarse con lo que el docente les muestra. Por otra parte, piensa que los estudiantes se pueden confundir si se les presenta más de una forma de resolver un problema.

Enrique dice que su experiencia le ha permitido comprobar esta situación y considera que la razón se debe a fallas que traen los estudiantes desde años atrás, si se cambia la terminología se confunden fácilmente. Enrique considera de manera simultánea que el error permite el aprendizaje y que sirve para mostrar a los estudiantes lo que no se debe hacer, explicó que gracias al error podía darse cuenta en qué tema los estudiantes tienen falencias y así puede dedicarse a reforzar ese aspecto de manera más específica.

Para Enrique, si bien el docente no tiene todo el conocimiento, es importante que en el aula responda todas las preguntas que hacen los estudiantes, y dice que en caso contrario deja a los estudiantes sin herramientas. Para Enrique el aprendizaje de la matemática se logra mediante la repetición de procedimientos, lo que conduce a su memorización, por lo cual considera que es bueno reforzar eso en el aula.

4.1.4. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Para Enrique el análisis realizado, en la primera parte del curso, sobre la epistemología de la matemática en diferentes épocas le aportó de manera importante en su formación disciplinar, consideraba que antes tenía “muy malas bases” al respecto.

Lo estudiado sobre Lakatos, dice Enrique, le aporta en su trabajo docente, y le gustaría trabajar con sus propios estudiantes como lo hizo Lakatos, sin embargo, Enrique parece no haber comprendido la esencia de la propuesta alrededor de pruebas y refutaciones, ya que afirma

> Me gustaría mirar posibles ejercicios, de buscar con los mismos estudiantes varias posibilidades de poderlo desarrollar, (…) entonces digamos mirar planteamientos, no de ejercicios erróneos, poner un ejemplo y mirar si está bien planteado, pero ya trabajarlo directamente con los estudiantes, entonces si está mal planteado mirar con los estudiantes cuál es la posibilidad, digamos como lo trabaja Lakatos, Ah esta conjetura está mal entonces ésta es la nueva.

Enrique dice que así no lo hace actualmente en el aula, a veces porque las instituciones no dan libertad para proponer cosas y están interesadas en que los docentes sigan al pie de la letra el currículo establecido, Enrique dice que sí le gustaría hacer cosas nuevas, pero que no ha podido aún. Sin embargo, también señala que algunas veces los estudiantes son inquietos y hacen aportes, pero él los ignora si tiene dudas y no se siente seguro de la respuesta que debe dar. Piensa que en adelante debe permitir que los estudiantes sean más protagonistas de su aprendizaje, que participen y trabajen por cuenta propia.

Enrique, durante la segunda entrevista, señaló que a partir del curso, le habían surgido algunas dudas sobre qué temas se deben enseñar, y cree que se está haciendo más grande la brecha en el aprendizaje de las matemáticas al seguir enseñando de manera muy tradicional, por ejemplo, en el álgebra. En la entrevista final, dijo que haber participado del curso le sirve para el desarrollo de su trabajo de grado "… yo voy a trabajar los cuatro casos de factorización por noción de área utilizando las regletas", esto teniendo como referente la parte final del curso alrededor del recorrido histórico de las ecuaciones cuadráticas.

4.2. El caso de Yeny

4.2.1. Aspectos generales

Yeny ha cursado el 73% del plan de estudios, ya realizó sus prácticas pedagógicas, cursó historia de las matemáticas dos años antes de participar en el presente curso y socializó su trabajo de grado un año antes. Ha tenido muchas dificultades para adelantar sus estudios, aplazó dos veces el semestre y durante varios períodos ha cursado solamente la mitad de los créditos sugeridos. Ha reprobado varias asignaturas, casi siempre por abandono, y su promedio académico es 3.5.

Yeny dice que quiere ser docente de matemáticas porque "son bonitas, son un proceso y un reto" y aunque lo que se piensa en general es que son difíciles, ella no cree que sea así. Ella afirma que muchas personas saben matemática pero no todos saben enseñarla y esa es la razón por la cual parece difícil. A veces quien enseña considera que lo que presenta es obvio, pero para quien está aprendiendo no lo es. En ese sentido, considera importante saber qué tipo de estudiantes se tiene, cuál es su nivel, y que es mejor que aprendan poco pero de manera profunda y no simplemente que el docente se dedique a cumplir con un listado de temas que tiene que abarcar.

Yeny espera que sus estudiantes se convenzan que pueden aprender matemáticas diciendo “si yo puedo ellos pueden” y de esa manera, “… si ellos se interesan o quieren aprender, van a poder lograr muchas más cosas de lo que ellos creen que pueden aprender”.

4.2.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

Yeny se identificó desde el comienzo y a lo largo del curso con una postura falibilista, y aunque al inicio estuvo de acuerdo con afirmaciones que eran contrarias, al finalizar, señaló cambios significativos que permiten evidenciar que consolidó su postura falibilista.

Fuente del conocimiento matemático

Yeny estuvo de acuerdo o completamente de acuerdo con afirmaciones como que *la matemática es una creación de la mente humana* y que, *cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta*; y en desacuerdo o completamente en desacuerdo con afirmaciones como

Los problemas son menos importantes que los teoremas

Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática

La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura

En coherencia con lo anterior, entre la primera y tercera aplicación de los instrumentos, señaló cambios significativos que se presentan en la Tabla 5. Para Yeny la matemática es una creación de la mente humana porque la matemática es intangible y en soporte de ello argumenta que “todo está en la mente, todo en matemáticas se hace de forma mental”, y si no se hace de esta manera “…simplemente no existe”.

Tabla 5. Cambios significativos en las calificaciones que dio Yeny sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o ser aceptados como verdaderos	4	2	2	
En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento	4	2	2	
Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad	4	2	2	Argumentó en la entrevista este cambio

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

También considera que hay creación a partir de la experiencia humana, por la necesidad que ha tenido el ser humano de comprender el mundo. Por ejemplo, cuando tuvo que hacer cuentas, afirmó que incluso personas que dicen odiar la matemática la usan en su cotidianidad.

Yeny está convencida que cualquier persona puede crear matemática, porque basta usar procesos mentales, pero lo fundamental es que la persona tenga el interés, aunque a veces es posible que lo hagan de manera inconsciente. Por otra parte, Yeny piensa que para llegar a un teorema se debe partir de un problema. Un cambio de creencia estuvo relacionado con la afirmación *la matemática consiste de hechos y procedimientos que se deben aprender y aceptar como verdaderos*, y al respecto señaló que lo importante, más que partir de verdades ya aceptadas, es hacerlo desde el reverso de las matemáticas y desde allí analizar y determinar la veracidad o no de las cosas, entender cómo se generan y se van desarrollando.

Para Yeny, las teorías matemáticas no son solamente el resultado de la creatividad, insistió que la historia de las matemáticas muestra que se producen a lo largo del tiempo y por tanto se requiere trabajo, es decir, Yeny no niega la importancia de la creatividad y hace énfasis en que la matemática es el resultado del trabajo de una comunidad.

Estabilidad del conocimiento matemático

Yeny está de acuerdo o completamente de acuerdo en afirmaciones como

Cada día se inventa nueva y mucha matemática.

Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza.

El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana.

En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información.

Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.

De otra parte, Yeny está en desacuerdo con o completamente en desacuerdo con

Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce.

En coherencia con lo anterior, Yeny señaló cambios a lo largo del curso, los cuales se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Cambios significativos en las calificaciones que dio Yeny sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce	4	2	2
Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian	4	2	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Yeny considera que el conocimiento matemático es falible y corregible, ya que a través de la historia se conoce que muchas proposiciones o teorías han sido modificadas o cambiadas, que el trabajo matemático requiere mucha dedicación, y que una persona puede creer tener la verdad absoluta y otra demuestra lo contrario. Esto hace que los problemas no siempre tengan resultados predecibles, entre más se estudia, más se aprende y más cosas pueden salir, y esto también hace que los procedimientos matemáticos puedan cambiar. Hizo referencia a la creación de geometrías no euclidianas para ratificar que se puede creer durante mucho tiempo que se tiene la razón en algunos resultados matemáticos y después darse cuenta que no eran de ese modo. Sin embargo, Yeny señaló que tampoco se trata de cuestionar toda la matemática porque la creación de nueva matemática se basa en el uso de conclusiones válidas.

A pesar de que en la primera entrevista Yeny señaló que los procedimientos y reglas matemáticas no cambian, evidenció en sus argumentos claridad acerca del avance y evolución de la matemática, de modo que en la tercera entrevista, señaló estar en desacuerdo con esa afirmación indicando que cada día surgen nuevas cosas y que, si no se limita a los estudiantes y por el contrario se les dan herramientas, es posible que ellos también puedan crear cosas que no se conocían, y en especial que ellos mismos no sabían de antemano.

Estructura del conocimiento matemático

Yeny está de acuerdo con que *hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento* y que *es importante relacionar las matemáticas con la vida real*. Y en desacuerdo con que *la matemática es una actividad solitaria* y con *el conocimiento matemático es objetivo e incuestionable*. En coherencia con esto, señaló desde la segunda entrevista no estar de acuerdo con que *la matemática es una ciencia formal y exacta*, aunque inicialmente estaba de acuerdo con esta afirmación. Argumentó este cambio indicando que en el curso pudo evidenciar permanentemente que en la matemática surgen muchas cosas, incluso nuevas, a partir del error, y por lo tanto, considera que es necesario permitir el trabajo matemático informal y la posibilidad de cometer un error, para luego poder formalizar. Sin embargo, señaló que generalmente a las personas se les enseña que en la matemática todo tiene que ser formal y exacto.

En las entrevistas Yeny argumentó que no se puede ser completamente categórico sobre si hacer matemáticas es o no una actividad solitaria, dijo que eso depende de la situación o de las necesidades argumentando que a veces se necesita trabajar a solas para comprender y razonar, otras veces es necesario escuchar a los demás. Sobre su cambio de creencia con respecto a la afirmación "en matemáticas algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente…" argumentó que en el curso se pudo evidenciar que a lo largo de la historia varios matemáticos perdieron oportunidades de desarrollar nueva matemática por intentar ser rigurosos, y por tanto es necesario dar cabida a ideas que, en principio, pueden ser consideras descabelladas.

4.2.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Yeny tiene una postura claramente definida de tipo constructivista sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, aunque al comienzo del curso estuvo de acuerdo con algunas afirmaciones contradictorias, al final del curso evidenció cambios importantes que permiten ubicarla claramente en esa postura.

Yeny está completamente de acuerdo con afirmaciones como

> Cualquier persona puede aprender matemáticas.
>
> En la clase de matemáticas es importante que se muestre a los estudiantes problemas sin solución así como diferentes formas de ver y resolver un mismo problema.
>
> Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> Es importante proponer a los estudiantes situaciones o problemas que les permita generar y probar nuevas teorías.

En coherencia con una postura constructivista está en desacuerdo o completamente en desacuerdo con

Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática.

Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla.

Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema.

Y en la Tabla 7 se muestran los cambios más importantes entre la primera y la tercera aplicación, lo cual permite evidenciar con claridad que al finalizar el curso su postura estaba enmarcada en el constructivismo.

Tabla 7. Cambios significativos en las calificaciones que dio Yeny sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
Los errores de los estudiantes se deben discutir en la clase como ejemplo de lo que no se debe hacer	5	2	3
Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente	4	2	2
Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta	4	2	2
Cuando un estudiante resuelve problemas lo importante es que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar	4	2	2
En la clase de matemáticas, el profesor debe saber la respuesta a cualquier pregunta de los estudiantes	4	2	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Para Yeny es importante proponer a los estudiantes situaciones que les permitan generar sus propias teorías porque así se les enseña a desarrollar sus habilidades, a conocer, experimentar, para que sientan capaces de hacer algo. Considera que en la matemática y en cualquier área se aprende más de los errores que de los aciertos, y eso los hace importantes; al tiempo los errores muestran que hay caminos para hacer las cosas. Sobre esto, señaló en la primera entrevista que también el error se podía usar como ejemplo de lo que no se debe hacer. Sin embargo, al finalizar cambió su creencia e indicó que se debe utilizar pero no para señalar lo que no se debe hacer, sino por el contrario, aprovechar las diferentes formas de razonamiento que tienen los estudiantes para analizar por qué surgen, sin emitir juicios negativos.

También considera importante mostrar a los estudiantes problemas que, aparentemente, no tienen solución porque "… no se sabe qué mentes están ahí y puedan darle solución… es abrirles la posibilidad de que ellos puedan mirar si pueden o no, son diferentes mentes, diferentes posibilidades de conocimiento…". La historia muestra que algunas personas no encontraron la solución y después otros sí lo hicieron.

Sobre si los problemas deben tener respuesta exacta para que el estudiante sepa si está trabajando bien, aunque al comienzo estuvo de acuerdo, señaló después que en realidad eso depende del uso de heurísticas, que si el estudiante no llega a la respuesta exacta no significa que esté haciendo mal el procedimiento ni implica que no esté aprendiendo.

Para Yeny, cuando un estudiante resuelve problemas lo importante, más que indicarle los conceptos y procedimientos que debe utilizar, es darle libertad para buscar la solución, ya que de esa manera se propicia un aprendizaje más significativo. En ese sentido, señaló que su cambio de creencia, entre la primera y la tercera aplicación, con respecto a que los problemas deben tener una respuesta exacta para que los estudiantes sepan si están trabajando bien, se debe a que el trabajo en el aula no se puede limitar a buscar respuestas exactas, sino que se debe ir al trasfondo de los procesos, lo cual no significa que se deje a los estudiantes al libre albedrío o que no importe si hace o no bien los procedimientos, sino que se orienta más desde un escenario de la matemática informal.

En coherencia con lo anterior, señaló que no es tan importante que el docente tenga las respuestas a todas las posibles preguntas que los estudiantes puedan hacer, ya que a ellos se les pueden generar ideas y eso hace posible que obtengan resultados inesperados y frente a los cuales no se tiene de manera inmediata la respuesta. Lo que sí es importante es que no se improvise y se digan cosas erróneas por mostrar a los estudiantes que el docente tiene el dominio de todo el conocimiento.

De otra parte, durante la tercera entrevista señaló que ya no considera importante que los estudiantes aprendan que la matemática es una ciencia formal y exacta porque ya no lo cree, argumentó que, a partir de lo hecho en el curso, tiene claridad sobre que la matemática se va produciendo y desarrollando desde el propio conocimiento acorde con el interés que se tenga.

4.2.4. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

A Yeny, todo lo abordado y trabajado en el curso le pareció importante para su formación disciplinar y profesional. Señaló que el recorrido realizado por las escuelas medieval y griega le permitió conocer las problemáticas que enfrentaron los matemáticos de la época alrededor del conocimiento matemático y su interés de hacer de la matemática algo universal. Lo estudiado sobre Lakatos y Hersh, le mostró una manera de interpretar y trabajar la matemática, más desde su esencia que desde lo formal y ya terminado y, la tercera parte del curso, fue un ejercicio para darse ideas de cómo hacerlo. Sin embargo, señaló que eso no es un proceso fácil porque ya se tienen marcas, pero es importante conocer la historia, saber sobre los errores que pudieron surgir y luego como se fueron corrigiendo. Yeny considera que eso es significativo para el trabajo en el aula.

Yeny destacó que fue importante conocer la postura de Hersh, sobre el llamado que hace a conocer lo que él denomina el anverso y reverso de las matemáticas, y señaló que, en general, se piensa que la matemática es difícil, y lo visto en el curso muestra que en efecto, para llegar a varios de los resultados actuales transcurrieron muchos años, de modo que no se puede pretender que en el aula el aprendizaje se dé de manera inmediata. Que el docente tenga ese conocimiento histórico le puede ayudar a orientar más adecuadamente a sus propios estudiantes.

De otra parte, Yeny afirmó que haber tomado el curso incidirá de manera importante en su práctica docente, que no le parecería ético presentar la matemática como algo terminado y formal, sin dar la oportunidad a los estudiantes de explorar y razonar y ver qué impacto puede generar a largo plazo, pero que hacerlo de esa manera implica mayor dedicación y esfuerzo.

Sobre todo el proceso de formación que ha recibido en la universidad, destacó que la han marcado algunos docentes que se caracterizaron por presentar los temas desde lo más sencillo, sin asumir que ya el estudiante tiene todo el conocimiento, que esto le ha permitido establecer de manera más sencilla relaciones de unos temas con otros. Finalmente señaló que las dificultades que ha tenido durante su vida para el aprendizaje de las matemáticas son en sí misma una fuente de análisis para reflexionar permanentemente sobre su rol de docente.

4.3. El caso de Edwin

4.3.1. Aspectos generales

Edwin ha cursado el 88% del plan de estudios, ya realizó sus prácticas pedagógicas, cursó historia de las matemáticas dos años antes de participar en el curso, socializó su trabajo de grado el semestre anterior el cual recibió distinción como trabajo meritorio. Debido a su vinculación laboral, ha tenido dificultades a lo largo de la carrera para poder asistir a todas las clases, esto ha hecho que incluso repruebe algunas asignaturas y otras las haya cancelado; su promedio general es 3.9.

Para Edwin la matemática es importante en su campo laboral, investigación en accidentes de tránsito[16], porque le proporciona los fundamentos para enseñar geometría, topografía, física mecánica y estadística, y señaló que estas áreas las ha fortalecido a lo largo de su formación en la licenciatura. De otra parte, considera que la relación entre la matemática y su enseñanza es la solución de problemas.

4.3.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

A partir de los cuestionarios cerrados, se identifica a Edwin con una postura de tipo falibilista, aunque estuvo de acuerdo con algunas afirmaciones de corte absolutista. Sin embargo, en las primeras entrevistas dudaba de las respuestas a las afirmaciones marcadas en los cuestionarios y cambió algunas. Al finalizar el curso, Edwin mostró mayor claridad al justificar sus creencias, por lo cual se evidencia que sus creencias epistemológicas están en proceso de construcción y consolidación, y orientadas a una postura de tipo falibilista.

Fuente del conocimiento matemático

Edwin estuvo de acuerdo o completamente de acuerdo con afirmaciones como

> La matemática es una creación de la mente humana.
>
> Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad.

Y en desacuerdo o completamente en desacuerdo con afirmaciones como

> La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura.
>
> La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o ser aceptados como verdaderos.

---

[16] Edwin es policía, ya cumplió sus 20 años de servicio, acaba de pedir la baja y tiene una empresa de investigación de accidentes de tránsito.

Los problemas son menos importantes que los teoremas.

Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática.

Y en la Tabla 8 se muestran los cambios más significativos en esta categoría.

Tabla 8. Cambios significativos en las calificaciones que dio Edwin sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
La matemática está por ahí, en el universo, esperando a ser descubierta	1	4	3	
La matemática se construye a partir de la experiencia humana	5	3	2	Durante la tercera entrevista cambió su respuesta y señaló estar completamente de acuerdo con la afirmación
En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento	4	2	2	

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Edwin cree que la matemática es una creación de la mente humana y a lo largo del curso, como se muestra en la tabla anterior, cambió su creencia sobre si se construye a partir de la experiencia humana o si está por ahí en el universo esperando a ser descubierta.

En la primera entrevista argumentó sus creencias señalando que “… por ejemplo pensando en cosas como la geometría, se van observando algunos elementos y se van diagramando (…) se parte de experiencia y se van construyendo ciertos conceptos”. Durante la segunda entrevista, señaló que la experiencia es importante, pero que también lo es el conocimiento *a priori* señalando que “…para poder dar un concepto a las formas que observa, tiene que haber otro conocimiento (…) es el conocimiento *a priori* de esas ideas, que son las que nos van formalizando poco a poco lo sensible”.

Al finalizar el curso, durante la tercera entrevista Edwin señaló estar convencido de que se construye matemática a partir de la observación, insistió que la geometría es un ejemplo de ello, pero también considera importante lo que señalaba en el curso sobre el conocimiento *a priori*.

De otra parte, Edwin señaló que la matemática es una ciencia formal y exacta en la que hay lugar para la conjetura pero no para la contradicción, porque, de una parte existen problemas sin resolver, y por tanto se puede conjeturar y, de otra, la matemática tiene soportes y procedimientos que permiten llegar a resultados ciertos, y en ese sentido considera que no puede haber contradicción.

Sin embargo, durante la última entrevista cambió su creencia sobre que algo es verdadero solamente si se demuestra de manera rigurosa, dijo "… ahora también tenemos la contradicción ¿no?, se puede llegar a una contradicción y volvemos a caer en que si de pronto en ese problema existe un error". Se observa en los argumentos dados por Edwin que todavía tiene dudas sobre estos aspectos.

Estabilidad del conocimiento matemático

Edwin estuvo de acuerdo o completamente de acuerdo con afirmaciones como

> Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.
>
> El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana.
>
> Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza.
>
> En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información.
>
> La matemática está en continua evolución.

Las creencias anteriores están asociadas a una postura epistemológica de tipo falibilista sobre las matemáticas. Sin embargo, Edwin se contradice en algunos aspectos ya que al mismo tiempo señaló estar completamente de acuerdo con la afirmación *En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas*, y en desacuerdo con *Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian.* De otra parte señaló cambios significativos, que se muestran en la Tabla 9 y que permiten evidenciar que está en proceso de consolidación de su postura y su tendencia sí es de tipo falibilista.

Tabla 9. Cambios significativos en las calificaciones que dio Edwin sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
Cada día se inventa nueva y mucha matemática	2	4	2
Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles	4	2	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

En la entrevista inicial Edwin señaló que en las evaluaciones se evidencia que en matemáticas las respuestas son correctas o incorrectas, dijo que sin importar el procedimiento que se utilice se debe llegar a la misma respuesta, y si se hizo un mal cálculo no se tendrá una respuesta correcta.

Para Edwin esto también le permite afirmar que los resultados de los problemas en matemáticas son siempre predecibles. Al finalizar el curso, Edwin cambió esta creencia y señaló que no cree que los resultados sean siempre predecibles, ya que es posible llegar a errores cuando se intenta buscar la solución a un problema o demostrar algún resultado, pero a partir de ellos es posible buscar la solución. Señaló que incluso todavía hay enunciados para los cuales no se tiene ninguna solución.

También cambió su creencia sobre que cada día se inventa nueva matemática, señaló que al comienzo del curso tenía una perspectiva diferente sobre la historia de las matemáticas que expresó en los siguientes términos "… tenemos siempre un concepto de que la matemática es exacta, de que en la matemática ya está escrito cómo llegar a resolver ciertos problemas, quizás esos eran los conceptos cerrados que teníamos".

Estructura del conocimiento matemático

Edwin estuvo de acuerdo con

> El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo.
>
> Hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento.
>
> Las matemáticas son un conjunto de reglas, fórmulas, hechos y procedimientos.
>
> Hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento.
>
> Para entender las matemáticas es importante relacionarlas con la vida real

Y en desacuerdo con afirmaciones como

> Hacer matemáticas es una actividad solitaria.
>
> La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la contradicción.

Y entre la primera y la tercera aplicación cambió de creencia con respecto a la afirmación *El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo,* con la cual estuvo de acuerdo al comienzo y en desacuerdo al finalizar el curso.

En la primera aplicación de los instrumentos Edwin se identificó de manera simultánea con las afirmaciones "el conocimiento matemático es cierto, incuestionable y objetivo" y "el conocimiento matemático es falible y corregible". Al preguntar por la justificación tuvo muchas dudas, finalmente señaló que el conocimiento matemático no es falible, sino lo es el procedimiento que se usa para llegar a los resultados. Al finalizar, aparentemente cambió su creencia y señaló estar en desacuerdo con la afirmación "el conocimiento matemático es cierto, incuestionable y objetivo", pero durante la entrevista tuvo muchas dudas para responder y finalmente argumentó que existen enunciados o teoremas que todavía no tienen solución.

Edwin está convencido que para entender las matemáticas es importante relacionarlas con la vida real, señaló que algunas cosas pueden no ser aplicables en la matemática pero que todo se rige por ciertos principios que los estudiantes deben conocer y luego intentar utilizarlos en otros contextos, incluso para generar nuevos conceptos.

4.3.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Edwin tiene una postura de tipo constructivista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, la misma está todavía en proceso de consolidación, de modo que persisten algunas creencias contradictorias.

Edwin está completamente de completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

Cualquier persona puede aprender matemáticas.

Es importante proponer a los estudiantes situaciones o problemas que les permita generar y probar nuevas teorías.

Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase.

Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.

Y de manera coherente con una postura constructivista está en desacuerdo con

Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática.

El éxito del aprendizaje de las matemáticas está en la repetición de procedimientos.

En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental la memorización de conceptos.

Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta.

Entre la primera y la tercera aplicación de los instrumentos Edwin tuvo cambios significativos, orientados a consolidar su postura falibilista, los cuales se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. Cambios significativos en las calificaciones que dio Edwin sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
En la clase de matemáticas es importante que se muestre a los estudiantes problemas sin solución así como diferentes formas de ver y resolver un mismo problema	2	4	2
Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema	1	3	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Sin embargo, de manera contradictoria con posturas anteriores Edwin también estuvo completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como las siguientes, y por eso se evidencia que sus creencias están aún en proceso de construcción y consolidación.

> Cuando un estudiante resuelve problemas lo importante es que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar.
>
> En la clase de matemáticas, el profesor debe saber la respuesta a cualquier pregunta de los estudiantes.
>
> Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente.
>
> El docente de matemáticas es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes.

Para Edwin del error se aprende, y señaló además que es una estrategia pedagógica para que el estudiante vaya construyendo la solución y pueda encontrar la correcta. En ese sentido considera que es importante que los problemas tengan una respuesta exacta, considera fundamental que el docente prepare su clase, que sepa cuál es la respuesta a la que debe llegar el estudiante, y de ese modo, también éste sepa hacia donde debe ir.

De otra parte, al comienzo estuvo de acuerdo con que los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un problema. Al finalizar señaló que ha tenido la oportunidad de trabajar con personas adultas y por el contrario, para esta población sí es importante mostrar que los problemas se pueden resolver de diferentes formas, de lo contrario se confunden, pero al mostrarles alternativas ellos pueden identificarse con su forma propia de trabajar.

En el caso de problemas sin solución, Edwin considera que se deben mencionar y motivar a los estudiantes para que busquen la solución por su propia cuenta. Para Edwin los temas de la matemática escolar ya están establecidos, ya que es el Ministerio de Educación quien lo hace a través de los estándares, los cuales deben ser incluidos en los currículos de las diferentes instituciones educativas.

4.3.4. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Para Edwin lo más significativo del curso fue el estudio de los trabajos y posturas de Lakatos, Davis y Hersh. Señaló que esto permite cuestionarse sobre qué es realmente la matemática y cómo se quiere abordar en el aula. También le pareció importante conocer las ideas de Kant sobre el conocimiento, con quien se siente completamente identificado.

Sobre el curso en general, señaló que es importante cuestionarse acerca de dónde proviene el conocimiento y la importancia que tiene esa reflexión para el ejercicio docente, Edwin dice que esto puede ayudar a motivar más a los estudiantes, encantarlos por las matemáticas y dejar de lado las creencias asociadas a que son difíciles. Señaló que es importante incluir en el plan de estudios del programa asignaturas como la desarrollada pero con mayores créditos para poder dedicar más tiempo y lograr todos los objetivos propuestos en el curso.

Finalmente Edwin señaló que el haber participado en el curso incidirá en su práctica docente porque es importante dar más espacio a los estudiantes para abordar situaciones diferentes y orientarlos más que indicarles el procedimiento a seguir o mostrarles la respuesta. De otra parte muestra la importancia de conocer la historia de la matemática para ser un buen docente.

4.4. El caso de Jairo

4.4.1. Aspectos generales

Jairo ha cursado el 85% del plan de estudios, ya terminó de hacer sus prácticas docentes, no ha reprobado ni cancelado ninguna asignatura a lo largo de su formación y se ha destacado por ser el mejor estudiante del programa varios semestres. Cursó historia de las matemáticas dos años antes, está realizando su trabajo de grado y su promedio general es 4.0.

Jairo dijo que quiere ser profesor de matemáticas simplemente porque le gustan. Al indagar sobre lo que espera que sus estudiantes aprendan en sus clases, señaló que siempre aborda tres aspectos, lo histórico, lo teórico y lo práctico, y espera que con esas herramientas puedan integrar sus aprendizajes con el mundo que los rodea y resolver diferentes problemas. Para Jairo la educación matemática tiende a la resolución de problemas, lo cual permite buscarle aplicaciones a la matemática en el diario vivir, a través por ejemplo de la modelación. Señaló que a él le gusta hacer énfasis en que la matemática está presente en todo lo que se observa.

Sobre la formación que ha recibido durante la carrera, Jairo señaló que lo que más lo ha influenciado es la nueva matemática que ha podido conocer y que quiere seguir explorando. "…siento que sé un poquito más de matemática y que puedo abordar problemas diferentes". Lo que lo marcó para su trabajo docente son los modelos de enseñanza desde sus propios maestros a lo largo de su formación y ver qué modelos podría seguir. "… uno forma afinidad con formas de dar clases; (…) implícitamente los profesores además de dar una clase, lo marcan a uno en cuanto a cómo dar una clase, uno se hace un ideal, me gustaría dar una clase así, me gustaría dominar un grupo así".

4.4.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

Jairo al comienzo del curso no evidenciaba una postura epistemológica claramente definida; aunque en el instrumento se identificaba una tendencia más falibilista, durante la entrevista se observaron creencias más relacionadas con el absolutismo. A lo largo del curso, Jairo señaló cambios significativos que permiten identificar que tiene mayor claridad de su postura, de corte falibilista, aunque persisten algunas contradicciones.

Fuente del conocimiento matemático

Jairo está de acuerdo o completamente de acuerdo con afirmaciones como

La matemática es una creación de la mente humana.

Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.

Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad.

La matemática está por ahí, en el universo, esperando a ser descubierta.

Y está en desacuerdo con que *la matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura*. En esta categoría, presentó cambios importantes, hacia una postura falibilista, como se muestra en la Tabla 11.

Tabla 11. Cambios significativos en las calificaciones que dio Jairo sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia *
Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática	5	2	3
En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento	4	1	3
Los problemas son menos importantes que los teoremas	4	1	3

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.
Fuente: elaboración propia

Jairo cree que la matemática es una creación de la mente humana porque la matemática no está presente en la naturaleza de manera explícita, el ser humano debe buscar la manera de crear y representar lo que pasa en la naturaleza, y lo hace a través de la matemática, para darle respuesta a los fenómenos que ocurren. Jairo también señaló estar de acuerdo con la afirmación "la matemática está por ahí esperando a ser descubierta", argumentando que tiene esta creencia porque la naturaleza siempre continúa su curso, y "somos nosotros los que buscamos averiguar cómo es ese comportamiento para describirlo utilizando matemáticas". Es decir, Jairo ratifica que la matemática es creada por el hombre, algunas veces para modelar lo que se observa.

Al comienzo del curso Jairo creía que solamente los matemáticos pueden hacer nueva matemática "… contrario a lo que muchos pensarían la matemática está bastante solidificada, ya está bien estructurada, y casi todos los problemas que uno se pudiese plantear ya tienen una posible solución, entonces lo que hace falta o donde hay que indagar es mucho más profundo". En ese sentido, Jairo señaló que una persona que no tenga conocimiento matemático sólido no puede crear nueva matemática. Al preguntarle sobre a qué se refería cuando decía "… contrario a lo que otros piensan…", señaló que algunas personas creen que todavía falta mucho por descubrir, pero él considera que no, que la matemática es una ciencia que ya está muy sólida, y ya está creado prácticamente todo lo que busca dar respuesta a los fenómenos de la naturaleza.

Jairo cree que la matemática sí está en evolución pero al interior de la matemática misma, que los nuevos problemas no son para dar respuesta a la naturaleza, o al menos no de manera inmediata. Al finalizar el curso Jairo señaló que "cacharreando", cualquier persona puede hacerlo, siempre van a surgir dudas y por tanto no es necesario ser matemático para alcanzar conocimiento."

Un aspecto en el que se evidenció un cambio fue al indicar que los problemas son más importantes que los teoremas. Jairo señaló que los primeros son los generadores de matemática, los que permiten llegar a los teoremas y los problemas permiten desarrollar las habilidades matemáticas. Jairo también cambió su creencia sobre cuándo en matemáticas algo es verdadero, al finalizar indicó que no siempre se requiere el uso riguroso de la lógica y el razonamiento, pueden aceptarse hechos matemáticos a través de otras justificaciones o mediante demostraciones por computador.

Estabilidad del conocimiento matemático

Jairo está completamente de acuerdo con afirmaciones como

> Cada día se inventa nueva y mucha matemática.
>
> El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana.
>
> En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información.
>
> Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.

En coherencia con estas creencias, de tipo falibilista, está en desacuerdo con

> Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian.
>
> Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

Y al finalizar el curso estuvo completamente de acuerdo con que *Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza*, contrario a lo que había señalado al comienzo. Sin embargo, Jairo, de manera contradictoria, señaló estar de acuerdo con que *la mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce*.

En la primera entrevista, Jairo argumentó que el conocimiento matemático es falible y corregible utilizando ejemplos como que no en todos los contextos 1 + 2 = 3. Y al finalizar el curso señaló que no se puede tener total certeza sobre la matemática actual porque existe mucha y son pocos los que la están examinando.

Estructura del conocimiento matemático

Jairo está completamente de acuerdo con que *hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento,* y en desacuerdo con que *hacer matemáticas es una actividad solitaria* y con que *La matemática es una ciencia formal y exacta.* En la Tabla 12 se muestran los cambios significativos en esta categoría.

Tabla 12. Cambios significativos en las calificaciones que dio Jairo sobre la estructura del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
Las matemáticas son un conjunto de reglas, fórmulas, hechos y procedimientos	4	2	2
Para entender las matemáticas es importante relacionarlas con la vida real	5	1	4

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Jairo cree que no es cierto que la matemática sea una ciencia formal y exacta en la cual no hay lugar para la contradicción. Al respecto argumentó que la matemática nace de las contradicciones y al intentar resolverlas se obtiene nueva matemática. Jairo dijo que a lo largo del curso pudo darse cuenta que la matemática va mucho más allá de simples fórmulas y procedimientos, que influyen otros factores como la historia y el contexto, y que no es necesario relacionar las matemáticas con la vida real para poder entenderlas.

4.4.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Jairo tiene una postura de tipo constructivista frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aunque está de acuerdo con algunas afirmaciones que son contrarias. Él mismo señaló que pensaba que era más formalista pero que a lo largo del curso ha reconsiderado varias de sus creencias y se identificó al final más con una postura de corte falibilista. Desde la segunda aplicación de los instrumentos señaló cambios importantes, encaminados, en general, a consolidar su postura constructivista, la cual está en proceso de construcción.

Jairo está completamente de acuerdo con afirmaciones como

> Cualquier persona puede aprender matemáticas.
>
> Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> Es importante proponer a los estudiantes situaciones o problemas que les permita generar y probar nuevas teorías.

En coherencia con una postura constructivista está en desacuerdo o completamente en desacuerdo con

> Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta.
>
> Los errores de los estudiantes se deben discutir en la clase como ejemplo de lo que no se debe hacer.
>
> Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla.

Los cambios significativos entre la primera y la tercera aplicación, la mayoría de los cuales se evidenciaron desde la segunda, se presentan en la Tabla 13.

Tabla 13. Cambios significativos en las calificaciones que dio Jairo sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática	4	1	3	Durante las entrevistas mostró que está convencido que cualquier persona puede aprender matemáticas
El éxito del aprendizaje de las matemáticas está en la repetición de procedimientos	5	1	4	
Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente	5	2	3	
En la clase de matemáticas docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento matemático	2	5	3	Durante la entrevista final se mostró sorprendido de su primera respuesta
Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema	2	4	2	Este cambio parece contradictorio con una postura constructivista, durante la entrevista lo explicó

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Para Jairo cualquier persona puede aprender matemáticas porque es un constructo del ser humano. "…todos tenemos la capacidad de aprender, aprender, no importa qué". Para el caso específico de las matemáticas señaló que lo único que se necesita es gusto y dedicación, ya que aprender matemáticas "…no tiene nada de extraño".

Por otra parte, Jairo cree que no es necesario que los estudiantes piensen que la matemática es una ciencia formal, al contrario, considera que esto es una falencia, pues si se les hace creer que lo es, tendrán temor de equivocarse, y el error es una oportunidad de aprender, es una herramienta para evidenciar fortalezas y debilidades. En ese sentido, Jairo dice no debe usarse de manera punitiva "…lo más importante es ver cómo los estudiantes razonan".

Sobre su cambio de creencia acerca de que el éxito de las matemáticas está en la repetición de procedimientos, Jairo señaló que es importante pero no es lo único ni lo esencial para el aprendizaje de las matemáticas. Lo importante no es que los estudiantes repitan sino que puedan descubrir y usarlas en diferentes contextos; sin embargo, destacó que sí se requiere orientación por parte del docente para que los estudiantes tengan seguridad.

Jairo inicialmente estuvo completamente de acuerdo con que los problemas deben tener una respuesta exacta y al finalizar el curso no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo, y argumentó que depende de lo que se esté buscando al proponer el problema. Si se espera desarrollar habilidades entonces la respuesta no es importante, pero si se quiere que apliquen un algoritmo en particular, sí lo es.

En ese sentido, señaló que al comienzo los estudiantes buscan un ejemplo a seguir, tienen la tendencia a repetir, y luego de hacerlo varias veces ya pueden hacer deducciones y nuevas interpretaciones. Por eso considera que mientras se formaliza un concepto el tener una respuesta exacta les ayuda.

Al preguntarle por su cambio de creencia sobre la afirmación *En la clase de matemáticas docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento matemático*, con la cual inicialmente señaló no estar de acuerdo, se sorprendió y dijo "¿no estuve de acuerdo?", y que eso le parecía raro porque de hecho en sus clases lo que hace es justamente eso, intercambiar ideas con sus estudiantes, no busca convencerles, pero sí comparte sus conocimientos.

De otra parte, Jairo señaló que, a partir de su experiencia, ha podido evidenciar que los estudiantes se confunden si se les muestra, al mismo tiempo, más de una forma de resolver un mismo problema, y cuando deben resolver otros problemas primero los estudiantes preguntan cuál forma o método usar.

Considera que es bueno mostrar de manera detallada una forma y luego, cuando se afiance, presentar otra.

Finalmente, Jairo cree que el docente de matemáticas debe tener la respuesta a cualquier pregunta que le hagan los estudiantes porque de esa manera se fomenta seguridad y el profesor transmite mejor los conceptos, los estudiantes no lo podrán "corchar". Si por el contrario, no sabe o se muestra inseguro los estudiantes no le tendrán confianza y perderán más fácilmente el interés. Esta es una postura más asociada al conductismo, y que se contradice con algunas de las otras posturas de Jairo, por lo que se observa que Jairo aún está en proceso de construcción de sus creencias.

4.4.4. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Jairo señaló, desde la segunda entrevista, que el curso había impactado de manera importante sus creencias epistemológicas sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Para Jairo todo lo abordado en el curso fue importante y destacó como un aporte nuevo a su formación las posturas y contribuciones de Lakatos. "… me impactó como persona, profesor y estudiante". Al tiempo señaló que hizo falta más tiempo para poder analizarlas de manera más profunda.

En primer lugar, dijo que cuando se discutió la crisis de la matemática generada por la aparición de geometrías no euclidianas, entró en una crisis propia ya que consideraba que las matemáticas eran irrefutables y que daban una versión clara de la realidad. Señaló que estaba más acostumbrado al trabajo de tipo formalista (esto no fue completamente reflejado en los instrumentos), y durante toda la carrera se había preocupado por trabajar de manera cuidadosa las demostraciones.

Por otra parte, Jairo señaló haber implementado ya algunos cambios en su práctica docente, pues aunque pensaba que la historia era importante, privilegiaba más el trabajo procedimental. Eso lo modificó y pasó a hacer más énfasis en la historia y en el uso de la matemática en contexto. El curso lo ha hecho cuestionarse. "…pensarse como maestro, hace que se modifiquen ciertas acciones… hace que se piense cómo hacer ciertas cosas…". Sin embargo, afirmó hacer cambios implica más responsabilidad y preparación para el docente, que un camino más fácil es simplemente repetir algoritmos.

Para Jairo el curso fue interesante e innovador, y considera que se logró articular lo teórico con lo práctico, lo disciplinar con lo pedagógico. Señaló que generalmente la matemática va por una parte y la pedagogía por otra. Finalmente destacó que el curso generó espacios para reflexionar como ser y como docente.

4.5. El caso de Lucía

4.5.1. Aspectos generales

Lucía ha cursado el 79% del plan de estudios, ya terminó de hacer su práctica docente, no ha reprobado ni cancelado ninguna asignatura a lo largo de su formación, es considerada una buena estudiante, está realizando el trabajo de grado, no ha cursado historia de las matemáticas y su promedio general es 3.8.

Lucía quiere ser docente de matemáticas porque fue inspirada por su profesor de matemáticas del colegio, a quien señaló, le entendía con mucha facilidad y eso hizo que le tuviera cariño primero a las matemáticas y luego a la educación. También tiene un familiar docente de matemáticas que influenció en su decisión. Espera que sus estudiantes puedan resolver problemas fácilmente y que usen la matemática en la cotidianidad.

Lucía señala que a lo largo de su formación en el pregrado ha logrado tener una formación matemática más sólida y que los conocimientos teóricos adquiridos en los cursos de pedagogía y didáctica le permiten tener herramientas en el momento de preparar una clase.

4.5.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

A partir de los instrumentos cerrados se observa que Lucía tiene una postura claramente definida de tipo falibilista. Sin embargo, durante las entrevistas dudaba de algunas de sus respuestas. Esto muestra, que aún está en proceso de consolidación de sus creencias.

Fuente del conocimiento matemático

Lucía está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

> La matemática es una creación de la mente humana.
>
> Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> La matemática se construye a partir de la experiencia humana.

En coherencia con una postura falibilista está en desacuerdo con afirmaciones como

> Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática.
>
> En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento.
>
> La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura.
>
> Los problemas son menos importantes que los teoremas.

En la Tabla 14 se muestran los cambios significativos que se observaron al finalizar el curso.

Tabla 14. Cambios significativos en las calificaciones que dio Lucía sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o ser aceptados como verdaderos	4	2	2
Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad	2	4	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Lucía considera que la matemática es una creación de la mente humana porque no fue dada previamente "… el hombre como tal tuvo que empezar a usarla, por la necesidad…". También cree que la matemática se construye a partir de la experiencia, por el uso que se da a la matemática en la vida cotidiana.

Para Lucía cualquier persona puede crear o descubrir matemáticas. Señaló que cualquier persona tiene la habilidad para aprender y desarrollar matemáticas, pero que a veces la gente piensa que no puede o no entiende pero tal vez porque no se toman el tiempo para hacerlo. En la primera aplicación de los instrumentos Lucía estuvo de acuerdo con que en la matemática algunos hechos se deben aprender o aceptar como verdaderos. Al respecto señaló que "… hay cosas que ya se establecieron ¿no?, cosas de las que de pronto uno no puede llegar a salir, o sea ya uno las toma como hechas".

Desde la segunda entrevista mostró un cambio con respecto a esta creencia y argumentó que no se puede tener certeza total en la matemática actual porque se sigue trabajando cada día en más matemática y nuevas teorías que pueden incluso refutar hechos que se consideraban verdaderos, Lucía señaló además que lo primordial es entender.

Al finalizar el curso estuvo de acuerdo con que las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad, aunque inicialmente no estaba completamente de acuerdo con eso porque consideraba que era más producto de habilidades.

Estabilidad del conocimiento matemático

Lucía está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

Cada día se inventa nueva y mucha matemática.

La matemática ha evolucionado a través de la historia.

En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información.

Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.

Y está en desacuerdo con afirmaciones como

La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce.

Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian.

El conocimiento matemático es cierto, objetivo e incuestionable.

Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

En esta categoría Lucía tuvo cambios significativos en dos de las afirmaciones, uno de corte absolutista y otro falibilista como se muestra en la Tabla 15.

Tabla 15. Cambios significativos en las calificaciones que dio Lucía sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas	2	4	2	En la entrevista señaló que está de acuerdo con la afirmación y que tal vez leyó mal en la primera aplicación.
Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza	2	4	2	En la entrevista se evidenció que está de acuerdo con la afirmación

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Lucía considera que la matemática ha evolucionado a través de la historia y señaló como ejemplo la geometría, argumentando que la euclidiana y luego se amplió a otro tipo de geometrías. Dijo que porque dependiendo de lo que van proponiendo las personas la matemática va también evolucionando.

Para Lucía no se puede tener total certeza de toda la matemática actual "… actualmente tenemos unas definiciones y unos conceptos, pero así mismo mañana pueden evolucionar" y al finalizar ratificó esta creencia señalando que existe mucha matemática y por tanto es imposible llegar a la certeza total. De otra parte, ella considera que los resultados a un problema no son siempre predecibles porque pueden depender de las circunstancias. Para Lucía, en matemáticas, las respuestas siempre son correctas o incorrectas, señaló que siempre existirá una única respuesta independientemente del camino que se utilice para obtenerlo.

Lucía señaló al comienzo estar en desacuerdo con que en matemáticas la mayor parte de lo que es verdad ya se conoce. Sin embargo, en la entrevista dio argumentos contrarios, es decir, que muestran que está de acuerdo. "Yo considero que del barrido que se ha hecho a la matemática, la mayoría ya quedó como cimentado". Sobre esto se tiene certeza y ahora lo que surgen son ramificaciones.

Estructura del conocimiento matemático

Lucía está de acuerdo que hacer matemáticas genera nuevo conocimiento y que es importante relacionar la matemática con la vida real para poder entenderlas, y está en desacuerdo con afirmaciones como

> Hacer matemáticas es una actividad solitaria.
>
> La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la contradicción.
>
> El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo.

En esta categoría Lucía tuvo un cambio al final del curso orientado a una postura absolutista al estar de acuerdo con que *las matemáticas son un conjunto de reglas, fórmulas, hechos y procedimientos*. Sobre esto Lucía manifestó que lo que se busca en las matemáticas es que a través del uso de procedimientos, reglas y algoritmos se llegue a determinados resultados. Señaló que eso hace que en matemáticas las respuestas sean correctas o incorrectas.

4.5.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Lucía tiene una postura de tipo constructivista frente al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Al finalizar el curso tuvo pequeños cambios que, en general, la ratifican, sin embargo, durante las entrevistas dio algunos argumentos contrarios a las creencias reveladas en el instrumento y persisten algunas creencias contrarias.

Lucía está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

> Cualquier persona puede aprender matemáticas.
>
> Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase.
>
> Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.

Y coherentemente con esto, está en desacuerdo con afirmaciones como

> Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática.
>
> En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental la memorización de conceptos.
>
> Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla.
>
> Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema.

Y en la Tabla 16 se muestran los cambios significativos entre la primera y tercera aplicación de instrumentos; la mayoría se presentaron desde la segunda entrevista.

Tabla 16. Cambios significativos en las calificaciones que dio Lucía sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia *
Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta	4	2	2
En la clase de matemáticas es importante que se muestre a los estudiantes problemas sin solución así como diferentes formas de ver y resolver un mismo problema	4	2	2
El éxito del aprendizaje de las matemáticas está en la repetición de procedimientos	4	2	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Para Lucía los errores son importantes y una fuente de aprendizaje ya que por ensayo y error el estudiante puede construir y darse cuenta de lo que está bien. Señaló estar en desacuerdo con que en las matemáticas lo importante es memorizar conceptos, porque eso implicaría recaer en la enseñanza tradicional, como si lo importante fuera aprender todo como un robot para no caer en errores. Al contrario Lucía piensa que lo importante no es memorizar sino entender.

De manera contraria a varias de sus posturas, Lucía cree que los estudiantes se pueden confundir si se les muestran varias formas de resolver problemas. Al respecto argumentó que ellos se cuestionarían sobre para qué hacer procedimientos diferentes si con uno basta para llegar a la respuesta.

De otra parte, Lucía cambió su creencia sobre la importancia o no de que los estudiantes aprendan que la matemática es formal y exacta, frente a lo cual inicialmente estuvo de acuerdo. Durante la segunda entrevista señaló que aunque la matemática sí es una ciencia formal y exacta, no es necesario que los estudiantes lo sepan de ese modo, sino que la identifiquen como un proceso que les permite llegar a verdades y resultados. Durante la tercera entrevista Lucía dudo un poco de su desacuerdo y luego señaló "…la matemática es un poco más abstracta que real, o sea se tiene que llegar a un punto de abstracción y análisis". Así los estudiantes pueden ver que es una ciencia formal y exacta pero también deben observar que la matemática ha tenido contradicciones y evoluciones.

Lucía señaló que su cambio sobre si el éxito del aprendizaje está en la repetición de procedimientos, se debe a que lo importante es comprender, pues de lo contrario sería volver a la enseñanza tradicional. Piensa que es mejor que los estudiantes puedan entender y aplicar lo que aprenden.

4.5.4. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Lucía considera que todo lo realizado en el curso le aportó, pero que se involucró más con la primera parte, cuando se estudiaron los aportes de Platón, Aristóteles y Locke, porque en general, poco se conoce de su contribución sobre el conocimiento matemático, sino que sabe más de ellos desde lo filosófico en general. Para el trabajo docente, Lucía señaló que fue más importante lo trabajado en la tercera parte del curso, alrededor de Lakatos, porque muestra la importancia de conocer, lo que Hersh señala como el anverso y el reverso de las matemáticas, y tenerlo en cuenta al momento de presentarlas a los estudiantes, no limitarse a mostrarlas como algo ya acabado y organizado.

Sobre el impacto que puede tener el curso en la práctica señaló que le permitió tener claridad sobre la importancia de mostrar a los estudiantes más acerca de la matemática que simplemente aspectos numéricos, que se debe considerar además lo filosófico y lo histórico.

Finalmente señaló que el curso le permitió darse cuenta que hay muchos aspectos de la matemática que se pueden y deben profundizar para el trabajo en el aula pero que, por el afán de cumplir con lo establecido en los estándares o con los temas estipulados en los planes de estudio, no se hace.

4.6. El caso de Yadira

4.6.1. Aspectos generales

Yadira ha cursado el 79% del plan de estudios, ya terminó de hacer sus prácticas docentes, no ha reprobado ni cancelado ninguna asignatura a lo largo de su formación, es considerada una buena estudiante y su promedio general es 3.9. Está realizando el trabajo de grado y no ha cursado historia de las matemáticas.

Quiere ser docente de matemáticas porque le gusta la matemática y le gusta enseñar. Espera que sus estudiantes aprendan a razonar, no solamente a realizar ejercicios. Sobre el aporte del programa de formación señaló que en lo disciplinar está relacionado con la parte formal, le ha permitido comprender que toda afirmación debe tener una demostración; y para la práctica docente ha recibido orientación acerca de la transposición didáctica de los objetos matemáticos.

4.6.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

Yadira tenía una postura de tipo absolutista al comienzo del curso, pero al finalizar evidenció cambios importantes en sus creencias hacia una de tipo falibilista, sin embargo, persisten algunas contradicciones, con lo cual se puede afirmar que Yadira está en proceso de construcción y consolidación de sus creencias epistemológicas acerca de la matemática.

Fuente del conocimiento matemático

Yadira está completamente de acuerdo o de acuerdo con las siguientes afirmaciones

La matemática es una creación de la mente humana.

La matemática se construye a partir de la experiencia humana.

Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad.

Y está completamente en desacuerdo o en desacuerdo con

Los problemas son menos importantes que los teoremas.

La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la conjetura.

En esta categoría Yadira tuvo cambios significativos que se muestran en la Tabla 17.

Tabla 17. Cambios significativos en las calificaciones que dio Yadira sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*
La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o ser aceptados como verdaderos	4	1	3
Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta	2	5	3
Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática	5	1	4
En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento	2	5	3

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Para Yadira la matemática es una creación de la mente humana, porque como lo señaló Platón, referente a su mundo de ideas puras, las matemáticas están por ahí y cada persona les da el orden. También señaló que se siente completamente identificada con Descartes.

Sin embargo, al mismo tiempo, cree que la matemática se construye a partir de la experiencia humana y señaló que a partir de su experiencia docente ha observado que los estudiantes aprenden mejor a partir de ejemplos y de situaciones problema. Durante la segunda entrevista se retractó de esto afirmando que no está de acuerdo que sea necesario relacionar las matemáticas con la vida real, pues basta con usar la razón.

Al comienzo Yadira pensaba que solamente los matemáticos pueden hacer nueva matemática porque tienen un nivel de desarrollo muy avanzado. Dijo que sería “super guau” que otra persona que “uno”, pudiera descubrir o demostrar teoremas por primera vez. Sin embargo, al finalizar el curso argumentó que a partir de lo estudiado sobre Lakatos se evidencia que cualquier persona puede hacerlo, ya que muestra que se puede orientar a los estudiantes para que ellos mismos descubran la matemática y que, en general, lo que se requiere es interés y dedicación.

Señaló estar en desacuerdo sobre que la matemática consiste de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y aceptar, porque en su práctica docente ha evidenciado que los estudiantes pueden resolver problemas usando su intuición o su experiencia, y que está de acuerdo con que en la matemática algo es verdadero solamente si se demuestra de manera rigurosa, argumentando que para que un teorema o afirmación sea válido debe tener una demostración.

Estabilidad del conocimiento matemático

En esta categoría, se identifican varias posturas contradictorias, las cuales se mantuvieron a lo largo del curso, a pesar de señalar también en esta categoría cambios importantes hacia una postura de tipo falibilista, que se muestran en la Tabla 18.

Yadira está de acuerdo con

El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana.

El conocimiento matemático es cierto, objetivo e incuestionable.

Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

Es posible inventar problemas matemáticos que no tienen solución.

La matemática está en continua evolución.

Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza.

Tabla 18. Cambios significativos en las calificaciones que dio Yadira sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia*	Observaciones
Cada día se inventa nueva y mucha matemática	2	4	2	Durante la entrevista ratificó que está completamente de acuerdo con esta afirmación
En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas	5	1	4	
Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian	5	3	2	
La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce	4	1	3	
En matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información	1	5	4	
Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático	5	1	4	Durante la entrevista ratificó que está completamente de acuerdo con esta afirmación

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Al comienzo del curso Yadira estaba convencida que en matemáticas las respuestas son correctas o incorrectas, señaló que como las matemáticas son exactas, de ese modo la respuesta está bien o no, es correcta o es falsa y que por eso también pensaba que el conocimiento matemático era incuestionable. Al finalizar señaló que no se puede tener total certeza sobre el conocimiento matemático porque hay muchas conjeturas que aún no han sido demostradas ni refutadas, y en ese sentido las respuestas son correctas o incorrectas cuando se tiene respaldo de un teorema, pero no ocurre lo mismo si se tiene solamente una conjetura.

Sobre si los procedimientos y reglas matemáticas cambian, al comienzo Yadira afirmó que no porque considera que se crearon para ser un apoyo del estudiante o los matemáticos. "…están dadas desde la naturaleza, han estado y siempre estarán ahí". Al finalizar señaló no estar de acuerdo ni en desacuerdo, argumentó que la impactó la lectura en el cual se señala que generalmente los matemáticos son formalistas de lunes a viernes y platónicos los fines de semana. "… eso hizo que me cambiara que no es exacta sino que puede haber cambios". También indicó que como en esa lectura se propone no irse hacia ninguno de los extremos, esa es la razón por la cual señaló estar en desacuerdo sobre que la matemática es una ciencia formal y exacta.

Con respecto a su cambio de creencia relacionada con la afirmación "en las matemáticas las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información", con la cual estuvo de acuerdo en la tercera aplicación, señaló que su debe a Lakatos ya que le ayudó a comprender que la matemática está en continua evolución.

Por otra parte, Yadira estuvo al comienzo en desacuerdo con que cada día se inventa nueva y mucha matemática, y en desacuerdo con que la mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce. Durante las entrevistas se evidenció que Yadira tiene claro que la matemática está en continua evolución, dijo que falta mucho por descubrir y es muy poco lo que se conoce frente a lo que se desconoce.

Al finalizar señaló además que en la historia de las matemáticas "…como lo hecho en el recorrido sobre la solución de ecuaciones cuadráticas", se muestra que a veces es difícil aceptar lo nuevo que la matemática muestra, como cuando se descubrieron los números negativos. Yadira dice que a veces la sociedad no acepta el cambio y eso hace que no se avance en la creación de nueva matemática.

Estructura del conocimiento matemático

Yadira está completamente de acuerdo con

El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo.

Hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento.

Para entender las matemáticas es importante relacionarlas con la vida real.

Y en desacuerdo con que hacer matemáticas es una actividad solitaria. Y cambió su creencia sobre la afirmación *La matemática es una ciencia formal y exacta, no hay lugar para la contradicción,* ya que al finalizar el curso estuvo completamente en desacuerdo.

Como se señaló anteriormente, Yadira dijo que la impactó mucho el curso, y que lo estudiado de Lakatos, Davis y Hersh le permitió comprender que la matemática es mucho más que una ciencia formal y exacta.

4.6.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Yadira no tiene una postura claramente definida sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Al finalizar el curso tuvo algunos cambios más de corte tradicional.

Acorde con una postura constructivista Yadira está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.

Los estudiantes pueden resolver problemas de manera creativa aun cuando no tengan muchos conocimientos matemáticos.

En la clase de matemáticas docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento matemático

Y al mismo tiempo está de acuerdo con las siguientes afirmaciones de corte tradicional o conductista

El éxito del aprendizaje de las matemáticas está en la repetición de procedimientos.

En la clase de matemáticas, el profesor debe saber la respuesta a cualquier pregunta de los estudiantes.

Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente.

Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema.

Yadira estuvo en desacuerdo con las siguientes afirmaciones, que mostrarían una postura falibilista.

El docente de matemáticas es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes.

En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental la memorización de conceptos.

Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla.

Cuando un estudiante resuelve problemas lo importante es que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar.

Y al finalizar el curso tuvo algunos cambios hacia una postura tradicional o conductista los cuales se muestran en la Tabla 19.

Tabla 19. Cambios significativos en las calificaciones que dio Yadira sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Afirmación	Primera	Tercera	Diferencia *
Cualquier persona puede aprender matemáticas	5	1	4
Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática	2	5	3

Los temas de la matemática escolar están claramente establecidos y son estables en el tiempo	1	5	4
Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta	5	3	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la tercera aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Para Yadira el docente debe tener la respuesta a todo lo que pregunte el estudiante porque, el profesor es la base del conocimiento, es la guía. Además clara que eso no inhabilita al estudiante a crear conocimiento por cuenta propia. También para ella es importante que los alumnos repitan procedimientos para que aprendan, diciendo que eso le ha mostrado su experiencia "…se aprende haciendo ejercicios", y considera que el error sirve para mostrar la verdad, que permite identificar lo que no se debe hacer.

También señaló que, a partir de su experiencia, ha notado que los estudiantes se confunden si ven más de una forma para resolver un mismo problema, aunque es importante mostrarles que la matemática ofrece varias alternativas, considera definitivamente que es mejor mostrar solamente una manera.

Al comienzo ella estuvo de acuerdo con que cualquier persona puede aprender matemáticas porque tiene la capacidad de hacerlo, y que la dificultad puede estar en el docente que no enseñó bien o no motivó lo suficiente. Sin embargo, es claro que se aprende a diferentes ritmos. Al finalizar cambió su creencia, aunque tuvo dudas durante la entrevista, señaló que no a todas las personas se les facilita las matemáticas diciendo "…se requiere un don", es un talento y como todos no lo tienen entonces muchas personas no pueden aprender matemática, aunque insistió que puede depender del profesor.

Yadira dice que cuando un estudiante resuelve problemas puede ser o no importante que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar porque en algunos momentos es necesario tener claros los conceptos y procedimientos, pero otras veces no, "… a veces la respuesta la puede tener el estudiante en su mente".

Al comienzo Yadira creía importante que los estudiantes aprendieran que la matemática es una ciencia formal y exacta, al finalizar señaló no estar de acuerdo ni en desacuerdo, argumentando que la lectura relacionada con que los matemáticos no deben tener una postura en uno de los extremos formalista o platonista la marcó durante el curso y por eso cambió su creencia.

Sobre su cambio de creencia sobre si los temas de la matemática escolar ya están establecidos, argumentó que están dados por los estándares y lineamientos, y que a veces se cae en el error de hacer lo que se propone por ejemplo en libros de texto, pero es posible cambiar e innovar.

4.6.4. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Sobre el curso señaló que el segundo momento, cuando se estudiaron los aportes de Lakatos, Davis y Hersh, le aportó de manera más significativa a la formación matemática; y que el tercero, al trabajar en conjeturas y hacer el recorrido histórico sobre la ecuación cuadrática, aportó más significativamente a la formación como docente de matemática.

Sobre el segundo momento señaló que le permitió romper el esquema que tenía sobre la matemática, comprender que la matemática no siempre es formal, que a veces está en contexto para la solución de problemas y a veces no, y que por lo tanto no es necesario relacionarla con la vida cotidiana.

El tercer momento le permitió ver la manera en que se puede llevar al estudiante a plantear conjeturas, a que descubra, pruebe e incluso a que pueda llegar a enunciar teoremas. También Yadira dijo que a lo largo del curso y a partir de lo estudiado, tuvo dudas sobre si la matemática está en el universo esperando a ser descubierta o es creada por la mente humana, pero que a partir del estudio de los diferentes matemáticos abordados en el curso se identifica mucho con quienes son racionalistas.

También señaló que el haber participado en el curso le permitió reflexionar sobre cómo se hace la práctica, cómo se está enseñando, si lo que hace en el aula es más de tipo formal o si, por el contrario, se hace de manera más cuidadosa y se tiene en cuenta el anverso y reverso de las matemáticas, y la historia de las matemáticas.

4.7. El caso de John

4.7.1. Aspectos generales

John es licenciado en matemáticas de una universidad pública, hizo un diplomado sobre enseñanza para la comprensión y le gusta participar de manera continua en diferentes eventos de matemáticas y educación matemática.

Decidió ser docente de matemáticas porque desde que era niño conoció a un profesor que le insistía en que las matemáticas estaban en todo, y dijo cuando estuvo en la secundaria lo pudo comprobar. “Yo era un estudiante normal hasta que vi álgebra, desde ese momento quedé encantado con las matemáticas”.

John ha trabajado como docente de matemáticas desde que obtuvo su grado de licenciado, ha estado en tres instituciones de educación básica y media de carácter privado, con un promedio de vinculación de tres años en las dos primeras y en la actual está completando el primer año.

Sobre el impacto que ha tenido su formación de pregrado en su ejercicio docente destacó la rigurosidad de sus docentes, indicó que todos eran muy exigentes y que en las clases de matemáticas se trabajaba de manera formal, todo enunciado era demostrado a través del uso de la lógica y el razonamiento. Sin embargo, John señala que ese mismo rigor le generó dificultades al iniciar su proceso de práctica, ya que quiso utilizar también una formación de tipo formalista para el trabajo con sus estudiantes y se dio cuenta que, en ese escenario, no era pertinente.

John dice que fueron los tutores de práctica, docentes en ejercicio en educación básica y media, quienes lo orientaron para su ejercicio docente, y que la experiencia también ha sido fundamental.

Sobre la manera en que generalmente hace sus clases, John dice que son de tipo magistral, y que a través de preguntas intenta conectar los nuevos conceptos con la experiencia que tienen sus estudiantes, la cual no puede desconocer. Señaló que cuando logra la conexión entre las ideas y lo que quiere presentar se centra en el concepto "… me desprendo un poco y trabajo en la parte teórica". Luego hace la parte práctica y al final retoma los problemas o preguntas iniciales, y sigue trabajando en aplicaciones.

John espera que sus estudiantes aprendan sobre procesos, procedimientos y aplicaciones. Le interesa que puedan usar lo aprendido y aplicarlo en diversas situaciones, aunque señaló que los problemas que trabajan son estrictamente los que presentan los textos utilizados para cada grado, y es necesario cumplir con lo estipulado en el currículo del área.

4.7.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

John al comienzo del curso señaló creencias sobre la matemática enmarcadas en una postura de tipo falibilista pero con varias contradicciones, al finalizar evidenció cambios importantes hacia la consolidación de una postura de tipo falibilista.

Fuente del conocimiento matemático

John está de acuerdo con afirmaciones como

> La matemática es una creación de la mente humana.
>
> Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> La matemática se construye a partir de la experiencia humana.
>
> En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento.

En coherencia con una postura falibilista, está en desacuerdo con

> La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o aceptar como verdaderos.
>
> Los problemas son menos importantes que los teoremas.

Y en la Tabla 20 se muestran los cambios significativos entre la primera y segunda aplicación que permiten ver que está en proceso de consolidar una postura de tipo falibilista.

Tabla 20. Cambios significativos en las calificaciones que dio John sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Segunda	Diferencia*
La matemática está por ahí, en el universo, esperando a ser descubierta	1	3	2
Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática	2	4	2
La matemática es una ciencia formal y exacta	5	2	3

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la segunda aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Para John la matemática es creación y descubrimiento, que a medida que la humanidad avanza el ser humano va descubriendo lo que necesita, "…son sus necesidades las que le permiten buscar y encontrar resultados", pero no cree que la matemática esté en el universo esperando a ser descubierta. Al finalizar el curso, señaló que los astrofísicos sí buscan describir el universo a través de una ecuación diferencial.

Para John en matemáticas algo es verdadero solamente si se demuestra de manera rigurosa por medio del uso de la lógica, el razonamiento, y argumentó que ha recibido formación en lógica, especialmente en temas geométricos, y eso le ha permitido comprender que toda afirmación matemática que se enuncia proviene de una secuencia lógica a través del uso de propiedades y axiomas. Sin embargo, también cree que cualquier persona puede descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta porque a través de situaciones cotidianas es posible hacer conjeturas, analizar y de ese modo se hace matemáticas.

Al comienzo John señaló estar completamente de acuerdo con que la matemática es una ciencia formal y exacta y al finalizar señaló no estar ni de acuerdo ni en desacuerdo. Explicó que al responder por primera vez estaba muy orientado desde el formalismo y no tuvo en cuenta la parte histórica sobre las otras escuelas, el intuicionismo y el logicismo. Señaló que se debió más a que su formación ha sido más de tipo formalista, pero que claramente no es la única forma de ver las cosas.

De otra parte, cambió su creencia sobre quienes pueden hacer matemática, al comienzo no estuvo de acuerdo con la afirmación que señalaba que solamente los matemáticos podían hacerlo. Sin embargo, al finalizar estuvo de acuerdo, argumentó que para hacer nueva matemática se requiere estar dedicado a ello y eso implica ser matemático.

Estabilidad del conocimiento matemático

John está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

Cada día se inventa nueva y mucha matemática.

La matemática ha evolucionado a través de la historia.

Es posible inventar problemas matemáticos que no tienen solución.

Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.

Y en desacuerdo con

Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce

En esta categoría John evidenció cambios significativos que se presentan en la Tabla 21. Como se señaló anteriormente esto muestra más claramente una postura falibilista al finalizar el curso.

Tabla 21. Cambios significativos en las calificaciones que dio John sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Segunda	Diferencia*	Observaciones
El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana	1	4	3	Durante la primera entrevista se retractó de su respuesta y señaló estar de acuerdo con la afirmación
El conocimiento matemático es cierto, objetivo e incuestionable	4	2	2	
En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas	4	2	2	
Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian	4	2	2	

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la segunda aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

John considera que cada día se inventa nueva y mucha matemática porque ha podido observar, a través de su participación en diferentes eventos académicos, que permanentemente se publican nuevos resultados y señaló que de hecho, existen varias revistas dedicadas a ello.

Por esta misma razón, señaló que acerca de la matemática actual no se puede tener total certeza, ya que al inventar cosas cada día, y teniendo en cuenta que la mayor parte de eso que se publica sólo lo comprenden algunos matemáticos, y es en general de difícil comprensión para cualquier otra persona, se genera incertidumbre sobre ese nuevo conocimiento. John señaló que, por ejemplo, el cálculo que se enseña “es de hace como 300 siglos” y desde entonces ha habido miles y miles de publicaciones e investigaciones de las que no se tiene conocimiento.

John señaló en la primera entrevista estar de acuerdo con que el conocimiento matemático es objetivo e incuestionable porque en matemáticas cuando se llega a un resultado, éste es inalterable, se convierte en una propiedad y no hay ningún experimento que lo refute, por ejemplo que todo número multiplicado por cero es cero. Dijo que eso es diferente en otras áreas como física o química en las cuales constantemente están replanteando los resultados a partir de experimentos, mientras que en la matemática no se requieren.

También en la primera entrevista señaló estar en desacuerdo con la afirmación *El conocimiento matemático es falible y corregible como cualquier ciencia humana.* Al preguntarle la razón por la que cambió su respuesta, señaló estar de acuerdo argumentando que al estar hecha por personas, puede haber errores, que la historia muestra que muchos matemáticos murieron convencidos de algo que realmente no era cierto y que con el tiempo se tuvo que corregir.

Sobre el cambio de creencia acerca de que los procedimientos y reglas matemáticas cambian, John argumentó, durante la segunda entrevista, que existen diferentes maneras de resolver un mismo problema y, en ese sentido, pueden cambiar los procedimientos y las perspectivas de resolverlo. Esto también se relaciona con su cambio sobre que en matemáticas las respuestas son correctas o incorrectas, señaló que eso no es lo importante, lo es el proceso y el razonamiento que se usa para abordarlo.

Estructura del conocimiento matemático

John está de acuerdo con que hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento y que para entenderlas es importante relacionarlas con la vida real. De otra parte, está en desacuerdo con que *hacer matemáticas sea una actividad solitaria*. En esta categoría, de manera coherente con lo señalado en las anteriores, evidenció cambios significativos que se muestran en la Tabla 22.

Tabla 22. Cambios significativos en las calificaciones que dio John sobre la estructura del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Segunda	Diferencia*
En la matemática no hay lugar para la contradicción	2	4	2
El conocimiento matemático es absolutamente cierto, incuestionable y objetivo	5	2	3

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la segunda aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

John señaló, durante la segunda entrevista, que se dio cuenta que la percepción que se tiene de las matemáticas ha cambiado a medida que pasa el tiempo, que lo visto en el curso evidenció que algunos matemáticos, durante mucho tiempo, estuvieron convencidos de hechos que luego se determinó que no eran ciertos, por tanto siempre es posible que haya cosas que se deban corregir o replantear y en ese sentido ratificó que sí cree que el conocimiento matemático sea falible.

4.7.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

John reportó en el instrumento una postura de tipo constructivista frente al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, al finalizar señaló pequeños cambios que la ratifican.

John está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

> Cualquier persona puede aprender matemáticas.
>
> Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase.
>
> En la clase de matemáticas es importante que se muestre a los estudiantes problemas sin solución así como diferentes formas de ver y resolver un mismo problema.

Y en coherencia con una postura constructivista está en desacuerdo con

En la clase de matemáticas, el profesor debe saber la respuesta a cualquier pregunta de los estudiantes.

El éxito del aprendizaje de las matemáticas está en la repetición de procedimientos.

Cuando un estudiante resuelve problemas lo importante es que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar.

Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática.

Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema.

En la Tabla 23 se muestran los dos cambios significativos que evidenció entre la primera y segunda entrevista, orientados a consolidar su postura constructivista.

Tabla 23. Cambios significativos en las calificaciones que dio John sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Afirmación	Primera	Segunda	Diferencia*
El docente de matemáticas es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes	4	2	2
Los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta	4	2	2

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la segunda aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

John cree que cualquier persona puede aprender matemáticas porque para que se pueda relacionar con el mundo que lo rodea siempre tiene que haber algún concepto, por elemental que sea, que tiene que ver con matemática y que le permite a la persona desenvolverse. También cree que cualquier estudiante puede resolver problemas matemáticos de manera creativa a pesar de que no tenga muchos conocimientos matemáticos porque hay varias formas de abordar un problema y lo importante es que tenga actitud y use procesos lógicos para poder resolverlo.

Para John los errores que cometen los estudiantes se deben discutir en clase como ejemplo de lo que no se debe hacer porque si no se les aclara a los estudiantes los errores que cometen lo van a seguir haciendo y si se quedan con un error desde pequeños, por ejemplo un mal concepto, "… cuando estén más grandes va a ser grave por eso desde pequeños toca enseñarles bien".

John cree que el éxito del aprendizaje de las matemáticas no está en la repetición de procedimientos y que, al contrario, ello puede generar que los estudiantes se vuelvan esquemáticos, sino lo importante es que razonen, analicen y comprendan los problemas, que puedan revisar sus avances en contraste con las condiciones dadas más que llegar a una respuesta correcta.

Al finalizar el curso, John cambió su creencia sobre que el docente es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes señalando que se debe buscar que el estudiante construya su propio conocimiento y que si el docente lo presenta ya terminado no habrá verdadero aprendizaje. También cambió su creencia sobre que los estudiantes deben aprender y reconocer que la matemática es una ciencia formal y exacta, argumentando que estaba centrado en que su formación había sido de tipo formalista y le parecía que así debía ser también para sus estudiantes. Sin embargo, eso no es lo que se refleja en el instrumento, sino que el curso le dio una nueva perspectiva y lo importante es que los estudiantes vean que la matemática es el resultado del trabajo, de analizar, equivocarse, de replantear hipótesis.

4.7.4. Sobre la propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas

John informó que siempre empezaba el tema de ecuaciones cuadráticas señalando la forma general que tiene ese tipo de ecuaciones, con énfasis en procesos algorítmicos, y que sólo hacía algunas aplicaciones al finalizar el tema. En contraste, presentó una situación problema abierta para que, con uso de material didáctico, los estudiantes pudieran trabajar y proponer alternativas.

John propone trabajar alrededor de un problema como "*un albañil tiene este tipo de baldosas y va a enchapar una pared y la pared es cuadrada*", el tipo de baldosas se asocia con el material didáctico, piezas de forma rectangular y cuadrada de dimensiones desconocidas. A través de diferentes preguntas John espera que los estudiantes encuentren expresiones algebraicas equivalentes al tiempo que ven aplicaciones a la vida cotidiana.

Adicionalmente, John manifestó presión por cumplir con lo establecido en el currículo y con lo propuesto en el libro de texto que está obligado a llevar, en el cual se presentan los conceptos de manera teórica, luego se plantean ejercicios de rutina y finalmente aplicaciones, indicando que esto dificulta el trabajo en el aula con énfasis en la solución de problemas.

Se observó una dificultad relacionada con el uso del material ya que con cuatro cuadrados pequeños era posible cubrir exactamente una pieza rectangular. Y dado que algunas preguntas propuestas por John, para sus estudiantes, estaban relacionadas con darle valor a uno de los lados las piezas, con esa información se podría obtener el valor numérico de los otros lados desconocidos, por tanto el área se expresaría en un valor numérico y no algebraico. Esto a su vez podría generar confusión y se perdería el uso del material. El profesor dijo que atendería las sugerencias para mejorar el material antes de usarlo con sus estudiantes.

4.7.5. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

John señaló como aportes del curso a su formación la reflexión realizada sobre el anverso y el reverso de las matemáticas y la importancia que tiene permitir a los estudiantes llegar al conocimiento matemático por su propia cuenta en lugar de presentarlo ya terminado como generalmente se hace. John considera que de ese modo para los estudiantes será más satisfactorio el aprendizaje y más significativo, en lugar de memorizar y repetir procedimientos y conceptos.

Señaló que el curso realizado tendrá impacto en su práctica no sólo en el tema particular de las ecuaciones cuadráticas, sino también a nivel general, pues al preguntarse por el origen de los conceptos, indagar y profundizar en ello se tendrán más herramientas para el trabajo en el aula.

Al pedirle que comparara el enfoque del curso realizado con su formación en el pregrado, rescató la importancia de su formación de tipo formalista durante su pregrado, considera que eso le ha ayudado para su práctica docente porque tiene una sólida formación disciplinar aunque tuvo que aprender mucha matemática que piensa que no le ha sido útil porque no se enseña en la educación básica y media. Pero ha visto que eso ha cambiado y ya no hay tanta fortaleza en lo disciplinar.

De otra parte, señaló que tiene debilidades en lo pedagógico y que el curso le ha permitido ampliar su visión sobre la matemática. En este sentido, John considera importante que haya un balance entre lo disciplinar, lo pedagógico y didáctico durante el proceso de formación y que no se presenten de manera disyunta, por el contrario, que cada tema matemático se pueda convertir a la vez en un laboratorio de matemáticas que permita pensar en la práctica. El docente señaló que no se puede ir hacia ningún extremo entre lo disciplinar y pedagógico y didáctico.

4.8. El caso de Myriam

4.8.1. Aspectos generales

Myriam es licenciada en matemáticas de una universidad pública y participa de manera continua en congresos y eventos de matemática y educación matemática. Decidió ser docente de matemáticas porque le iba muy bien en el colegio y recibía reconocimiento por ello, tenía un grupo de estudio, todos buenos para la matemática, con los cuales estudiaba y se ayudaban mucho. Afirmó que eso siempre le gustó; aunque su primera idea fue estudiar ingeniería de sistemas, finalmente se decidió por las matemáticas.

Desde que se graduó como licenciada, Myriam ha trabajado de manera continua en la misma institución educativa, de carácter privado, en la cual se ha desempeñado como docente de matemáticas de secundaria, es jefe de área, ha participado en la estandarización de programas académicos y tiene veinticinco años de experiencia docente. También durante sus primeros años trabajó en una universidad a cargo de cursos de matemáticas en programas de preicfes y preuniversitarios.

Sobre la forma en que generalmente desarrolla sus clases señaló que si es para introducir el tema suele usar un video o hacer una presentación y que luego los estudiantes exploren otras cosas, que es poco expositiva. En otras clases se trabajan talleres de manera individual y solamente se trabaja en grupo cuando el tema ha resultado difícil. Espera que los estudiantes aprendan a razonar, aunque reconoce que es importante que sepan conceptos, pero para utilizarlos como herramientas para resolver diferentes situaciones.

Myriam señaló que para la formación y consolidación de sus creencias ha sido fundamental, por una parte, su sólida formación matemática en el pregrado, y de otra, la experiencia a través del ejercicio docente. Myriam también considera que el participar permanentemente en diferentes actividades y eventos académicos le ha aportado de manera significativa.

4.8.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

Myriam se caracteriza por formación de creencias epistemológicas estables sobre la matemática que se enmarcan en una postura de tipo falibilista. En los instrumentos no presentó ningún cambio significativo entre la primera y la segunda aplicación.

Fuente del conocimiento matemático

Myriam señaló en los instrumentos estar completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

La matemática es una creación de la mente humana

Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta

Las teorías matemáticas son en gran parte producto de la creatividad

Consistente con una postura de tipo falibilista, se mostró en desacuerdo o completamente en desacuerdo con afirmaciones como

Sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática

Los problemas son menos importantes que los teoremas

Durante la entrevista señaló que la matemática ha evolucionado a través de la historia; aprendió sobre ello durante su formación inicial y sabe que la matemática actual no es la misma de hace siglos. Está convencida que cualquier persona puede descubrir o crear hechos matemáticos por su propia cuenta, y dijo que sus estudiantes pueden hacerlo con las herramientas que tienen y por tanto la creación matemática no es exclusiva de un matemático o de alguien que haya estudiado matemáticas.

De otra parte, en el instrumento también señaló estar de acuerdo con que la matemática está por ahí esperando a ser descubierta. Durante la entrevista Myriam dijo tener dudas sobre si la matemática es descubrimiento o creación, pues considera que muchas cosas matemáticas son realmente construcciones humanas a las cuales se ha llegado a través del razonamiento, y en algunos casos se han encontrado aplicaciones; pero de otra parte, señaló que también se ha hecho matemática a partir de las necesidades concretas. Se puede observar que siempre hace énfasis en la creación de la matemática.

Myriam estuvo de acuerdo en la primera aplicación que en matemáticas algo es verdadero solamente si se demuestra a través de la lógica y el razonamiento, citó como ejemplo el teorema de Fermat, que a pesar de ser aparentemente verdadero no se aceptaba como tal porque no se tenía una demostración que así lo confirmara y pasaron más de trescientos años hasta lograr ese resultado. Sin embargo, también señaló ser consciente de que los axiomas son verdades no demostradas y que hacen parte de las ideas sobre las cuales se construyen teorías matemáticas. En la segunda aplicación no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo con esa afirmación.

Estabilidad del conocimiento matemático

Myriam está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

La matemática está en continua evolución

Cada día se inventa nueva y mucha matemática

Las respuestas a las preguntas pueden cambiar a medida que se tiene más información

Es posible inventar problemas que no tengan solución

El conocimiento matemático es falible y corregible como cualquier ciencia humana.

Y en coherencia con una postura de tipo falibilista está en desacuerdo con afirmaciones como

En matemáticas las respuestas son correctas o incorrectas

Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian

Los resultados en matemáticas son siempre predecibles.

Durante las entrevistas señaló que el conocimiento matemático es falible y corregible como cualquier otra ciencia humana porque, por ejemplo, al demostrar un teorema se pueden cometer errores y darse cuenta de eso mucho tiempo después. Myriam dijo que las personas creen que cuando se dice que la matemática es exacta significa que no hay error, pero en efecto en las matemáticas como en otras ciencias se pueden cometer errores y que, de otra parte, también depende del lugar en el que se esté trabajando, algo puede ser cierto en una teoría y falso en otra, un ejemplo de ellos ocurre con el quinto postulado de Euclides.

Myriam también tomó como ejemplo este postulado para ratificar que pueden inventarse problemas sin solución, señalando que en la historia se creyó durante mucho tiempo que cuando se negó el quinto y se llegó a otros resultados, aparentemente se generó un problema que no tenía solución.

Myriam considera que actualmente es más difícil tener certeza sobre nuevos teoremas porque no se tienen segundas opiniones sobre lo que se hace, hay ramas de la matemática muy especializadas que pocos pueden entender. Myriam también cree que la respuesta a un problema matemático no es simplemente correcta o incorrecta, a veces es posible reformularlo y ello puede hacer que la respuesta cambie o incluso no exista.

Estructura del conocimiento matemático

Myriam está de acuerdo con que hacer matemáticas es una actividad que genera nuevo conocimiento, que las matemáticas no son solamente un conjunto de reglas, hechos y procedimientos, y en desacuerdo con que hacer matemáticas es una actividad solitaria. Durante las entrevistas argumentó que para hacer matemáticas se requiere el concurso de muchas personas y nuevamente señaló el teorema de Fermat como prueba de ello, argumentando que la demostración se logró gracias al trabajo de muchas personas.

4.8.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Myriam se identifica claramente con una postura de tipo constructivista y no evidenció cambios significativos en los instrumentos entre el inicio y el final del curso.

Myriam está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

Cualquier persona puede aprender matemáticas.

Es importante proponer a los estudiantes situaciones o problemas que les permita generar y probar conjeturas.

Los estudiantes pueden ser creativos y descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.

Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase.

En la clase de matemáticas docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento matemático.

Y en coherencia con una postura constructivista frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está completamente en desacuerdo o en desacuerdo con

Cuando un estudiante resuelve problemas lo importante es que sepa qué conceptos y procedimientos debe utilizar.

Los estudiantes se confunden si se les muestra más de una forma de resolver un mismo problema.

En el aprendizaje de las matemáticas es fundamental la memorización de conceptos.

Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente.

Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla.

Para Myriam cualquier persona puede aprender matemáticas porque no es genético, y depende de los procesos de enseñanza y aprendizaje desde temprana edad, incluso desde antes de que los niños inicien su etapa escolar, salvo que los niños tengan alguna dificultad cognitiva que pudiera impedir el aprendizaje. Pero señaló que no es experto al respecto y por tanto no puede opinar con propiedad sobre si eso pasa o no. Myriam dijo que permanentemente encuentra padres de familia que están convencidos de que sus hijos no pueden ser buenos en matemáticas porque ellos tampoco lo fueron ni hay nadie en la familia que se haya destacado.

Myriam señaló estar completamente de acuerdo en la importancia que tiene proponer a los estudiantes situaciones que les permitan crear conjeturas porque en la medida que se permita a los estudiantes explorar ideas matemáticas pueden generar otras ideas matemáticas a través de la observación y considera importante que parte de la matemática que se va creando pueda hacer parte del trabajo en el aula ya que el currículo no debe permanecer estático.

De otra parte, está en desacuerdo sobre que sea importante memorizar conceptos y fórmulas, porque lo importante es que puedan utilizar los conceptos en situaciones concretas. Además señaló que en la institución donde trabaja los estudiantes hacen el bachillerato internacional y cuando presentan exámenes les dan un cuadernillo con diferentes fórmulas y lo que se evalúa es su uso y no la memorización de las mismas.

Para Myriam lo que sí es importante es discutir los errores que cometen los estudiantes como ejemplo de lo que no se debe hacer porque de ese modo pueden tomar conciencia y no repetirlo en el futuro. Myriam considera necesario presentar a los estudiantes problemas que se puedan abordar de diferentes maneras y que pueden o no tener solución según el contexto en el que se esté trabajando. Señaló que no se debe condicionar a los estudiantes a resolver los problemas con el método que sea de preferencia del docente, y que a veces es riesgoso que los estudiantes sepan la respuesta del problema que van a resolver porque se concentran en llegar como sea a obtenerla y les cuesta incluso más trabajo.

4.8.4. Sobre la propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas

Myriam, aunque afirmó que espera que los estudiantes aprendan a razonar, que considera importante que sepan conceptos para que los usen como herramientas al resolver diferentes situaciones, y se identificó en los instrumentos con una postura constructivista frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, socializó una propuesta esencialmente tradicional en la cual el docente tiene el papel de ser el dueño del conocimiento y el estudiante el receptor del mismo.

La propuesta tenía tres partes. En la primera, propuso utilizar un video, disponible en internet, para mostrar a sus estudiantes un recorrido breve por la historia de las ecuaciones cuadráticas como introducción al tema. En la segunda, se imagina un diálogo entre profesor y estudiante, intentando utilizar el estilo de Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones,* para resolver un problema propuesto por los babilonios, pero lo que se muestra a través del mismo es un estudiante siguiendo instrucciones de tipo algorítmico para resolver una ecuación, muy diferente a lo propuesto por Lakatos.

En la tercera, el docente propone otros problemas para que los estudiantes los resuelvan aplicando el modelo el ejemplo dado y otros con uso de material didáctico, como el presentado por el profesor John.

En la Figura 1 se muestra una parte del diálogo presentado por Myriam a través del cual buscó ilustrar el método de Lakatos para para resolver el problema "Sumé la longitud y el ancho (de un rectángulo) y obtuve 6½ . Multipliqué la longitud por el ancho y obtuve el área 7½. ¿Cuál es la longitud y cuál es el ancho?" usando el método babilónico.

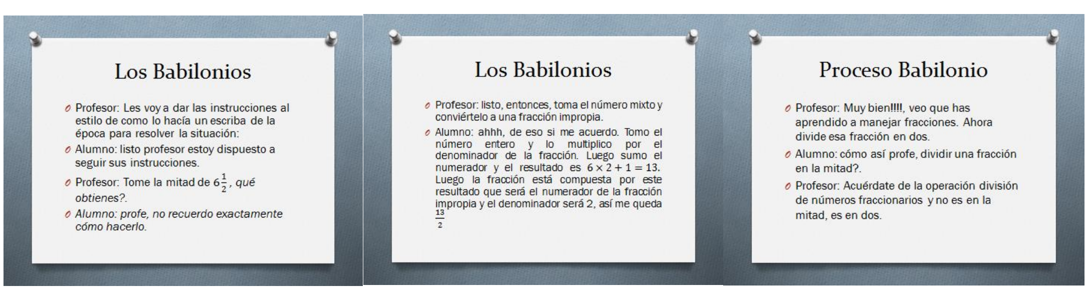

Figura 1. Propuesta de Myriam para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas

Claramente esta propuesta no se corresponde con lo planteado por Lakatos sobre la manera que se va creando matemáticas. El papel del docente sería guiar para que sea el estudiante quien va descubriendo, por el contrario, en lo presentado, el docente da instrucciones y el estudiante simplemente las sigue.

Al finalizar se le pregunta al docente qué diferencia hay la propuesta socializada frente a lo que generalmente hacía. Myriam señaló que generalmente a partir de la factorización informaba a los estudiantes la forma de las ecuaciones cuadráticas y luego el énfasis era resolver. Frente a lo presentado afirmó "… aquí de alguna manera ya siento yo una construcción diferente, de alguna manera para que ellos le den también como un significado a lo que están haciendo, no solamente como algo algorítmico, aunque de alguna manera termina en algo algorítmico. Pero al menos ya como que les puede ayudar a que entiendan (…) de dónde se llegó a ese resultado y que no fue obra de magia de alguien que lo hizo aparecer de la nada".

4.8.5. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Myriam destacó como un aporte del curso el haber abordado la historia de las matemáticas alrededor de un tema específico, lo cual le permite reflexionar sobre la importancia de ir a la historia cuando se van a abordar los diferentes temas.

Señaló que mientras estaba realizando el curso, en su ejercicio docente tuvo que abordar el tema de derivación e integración y, contrario a como lo hacía tradicionalmente, incorporó una lectura de tipo histórico sobre los aportes de Newton y otros matemáticos en el desarrollo de dichos conceptos, buscando que los estudiantes pudieran apreciar la forma en que el conocimiento matemático va surgiendo y no simplemente usar la historia como algo informativo.

Indicó que su motivación provino de su participación en el curso y que esta forma de abordar los conceptos también le permiten trabajar alrededor de teoría del conocimiento la cual en su institución es muy importante, ya que los estudiantes también hacen el bachillerato internacional y en éste es una exigencia el que se incorpore el tema desde cada área y que no sea una asignatura más.

Para Myriam el haber participado en el curso ha incidido de manera importante en su práctica docente, porque no sólo ha incorporado ya algunos cambios en su forma de trabajar en el aula, como se señaló anteriormente, sino que a través de las reuniones de área ha compartido con sus colegas las lecturas del curso y la experiencia, considera así también puede impactarlos a ellos.

Al pedirle a Myriam que comparara el enfoque del curso realizado con su formación en el pregrado y otros cursos, señaló la importancia de haber trabajado alrededor de un tema particular porque permite profundizar. Señaló que es importante que ese tipo de cursos se puedan incorporar en los programas de formación pero de manera articulada con la práctica docente porque generalmente es diferente lo que se planea frente a lo que se puede realizar en el aula.

Para Myriam a veces se tienen imaginarios sobre lo que los estudiantes pueden hacer y es importante contrastar lo que se estudia y planea con lo que ocurre realmente en el aula y así enriquecer la planeación inicial.

4.9. El caso de Francisco

4.9.1. Aspectos generales

Francisco es licenciado en matemáticas de una universidad privada y ha hecho dos especializaciones, una en investigación educativa y otra en docencia universitaria. Además con frecuencia Francisco participa en congresos y eventos de matemática y educación matemática.

Señaló que decidió ser docente de matemáticas haciendo referencia a que “siempre las he amado”, desde quinto de primaria recuerda que empezó a ser docente de sus propios compañeros y en general disfruta de las matemáticas.

Francisco, desde que se graduó como licenciado, ha trabajado de manera continua en la misma institución educativa, de carácter privado. Se ha desempeñado como docente de matemáticas de secundaria, ha sido jefe de área y ha participado en la organización del laboratorio de matemática, en proyectos de incorporación de tecnología en el aula y en la revisión curricular de manera permanente.

En las clases Francisco señaló que generalmente presenta un contexto a partir del cual los conceptos matemáticos se pueden desprender y alrededor del mismo los estudiantes pueden hacer conjeturas y tratar de argumentar sobre su veracidad o no y después presenta la parte teórica apoyado en los textos. Para Francisco es importante propiciar la participación de todo el grupo, y aunque no es fácil que todos puedan hacerlo, señaló que ha encontrado la manera de hacerlo. Cada pregunta que hace debe ser respondida por cada estudiante y luego ser socializada con un compañero, luego se socializan algunas. Francisco espera que sus estudiantes construyan los conceptos matemáticos, que puedan explicarlos y utilizarlos y, en la medida de lo posible, sean capaces de usar diferentes tipos de representación para cada situación.

Sobre el impacto de su formación de pregrado señaló que uno de sus profesores decía "la física es una obra de teatro cuyo libreto está escrito en lenguaje matemático", y se la repite frecuentemente a sus estudiantes. En ese sentido, la universidad le aportó el poder ver cómo lo que ocurre en la física se puede modelar a través de la matemática, considera además que le aportó conocimiento matemático y pedagógico.

Sobre la experiencia docente considera que es fundamental que se puedan contextualizar los temas, que se pueda "enganchar" a los estudiantes, ver el proceso de aprendizaje y cuando hay dificultades analizar cuál es el origen. También señaló que la experiencia le ha permitido descubrir lo importante de trabajar alrededor de preguntas afirmando que, más que ser un dictador de clases, es importante trabajar alrededor del diálogo.

4.9.2. Creencias epistemológicas acerca de la matemática

A través de los instrumentos se identifica que Francisco tiene una postura falibilista, aunque también se identifica de manera importante con algunos aspectos de corte absolutista. Al finalizar señaló algunos cambios que ratifican su postura.

Fuente del conocimiento matemático

En esta categoría es en la cual Francisco muestra algunas posturas contrarias, aunque con tendencia al falibilismo. Señaló estar completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

> La matemática es una creación de la mente humana.
>
> Cualquier persona puede crear o descubrir hechos matemáticos por su propia cuenta.
>
> La matemática se construye a partir de la experiencia humana.
>
> En matemática algo es verdadero solamente si se demuestra rigurosamente por medio del uso de la lógica y el razonamiento.

Francisco está en desacuerdo con que *sólo los matemáticos pueden hacer nueva matemática.* Además en la primera aplicación de los instrumentos señaló estar de acuerdo con que la matemática es una ciencia formal y exacta, y al finalizar no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo. En la Tabla 24 se muestran algunos cambios significativos, uno hacia el absolutismo y otro hacia el falibilismo

Tabla 24. Cambios significativos en las calificaciones que dio Francisco sobre la fuente del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Segunda	Diferencia*	Observaciones
La matemática consiste, en su mayoría, de hechos y procedimientos que se tienen que aprender y/o aceptar como verdaderos	3	1	2	
Los problemas son menos importantes que los teoremas	2	4	2	Durante la entrevista señaló que considera ambos son igualmente importantes

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la segunda aplicación es mayor o igual a dos.
Fuente: elaboración propia

Para Francisco la matemática se construye a partir de la experiencia humana porque la mayoría de conceptos matemáticos nacen de una experiencia, y afirma que es a partir de la necesidad de resolver un problema que se genera la matemática. Señaló que, por ejemplo, los sistemas de numeración fueron una necesidad y también se generó matemática a partir de problemas de dividir terrenos.

Francisco no cree que un matemático simplemente se invente nuevas teorías porque sí, aunque reconoce que existe mucha matemática abstracta, más bien está convencido de que se tiene que aplicar en algún lugar. Señala que mucha matemática es creación de la mente humana, por ejemplo los números complejos, pero esa creación surge de una necesidad del entorno.

Francisco cree que en matemáticas algo es verdadero solamente si se demuestra de manera rigurosa por medio del uso de la lógica y el razonamiento porque, desde la matemática así está definido, una proposición es un teorema si se ha demostrado de manera rigurosa. En ese sentido, señaló que en matemáticas no se puede tener certeza total de lo que no sea demostrable, al tiempo que dijo que algo es cierto mientras no se demuestre lo contrario. Al comienzo Francisco señaló estar de acuerdo con que la matemática es una ciencia formal y exacta, argumentando que a través de su formación matemática lo aprendió de ese modo, la matemática es una ciencia exacta y lo que ha leído de epistemología y filosofía así se lo ratifican.

En la segunda aplicación, contrario a la inicial, señaló estar de acuerdo con que los problemas son menos importantes que los teoremas, sin embargo, argumentó que los dos son igualmente importantes, porque a veces a partir de problemas se llega a la formulación de teoremas, y a su vez éstos permiten resolver nuevos problemas, y en la matemática escolar los problemas son muy importantes.

Estabilidad del conocimiento matemático

Francisco está de acuerdo con afirmaciones como

Cada día se inventa nueva y mucha matemática.

Es posible inventar problemas matemáticos que no tienen solución.

La matemática ha evolucionado a través de la historia.

Acerca de toda la matemática actual no se puede tener total certeza.

Puede haber muchas formas diferentes de resolver un problema matemático.

Y en coherencia con una postura falibilista está en desacuerdo con

Los procedimientos y reglas matemáticas no cambian.

Los resultados de los problemas de matemáticas son siempre predecibles.

La mayor parte de lo que es verdad en las matemáticas ya se conoce

En esta categoría Francisco evidenció cambios que ratifican su postura falibilista y la consolidación de la misma, como se muestra en la Tabla 25.

Tabla 25. Cambios significativos en las calificaciones que dio Francisco sobre la estabilidad del conocimiento matemático

Afirmación	Primera	Segunda	Diferencia*	Observaciones
El conocimiento matemático es falible y corregible, como cualquier ciencia humana	3	5	2	
En matemáticas, las respuestas son correctas o incorrectas	5	1	4	Durante la primera entrevista señaló que está en desacuerdo con esta afirmación
La matemática está en continua evolución	3	5	2	

*Se considera que hubo un cambio significativo de creencia si el valor absoluto de la diferencia en las calificaciones dadas entre la primera y la segunda aplicación es mayor o igual a dos.

Fuente: elaboración propia

Francisco cree que cada día se inventa nueva matemática, aunque no cree que mucha, explicando que la historia de la matemática así lo muestra "…se ven adelantos, nuevas demostraciones". Él cree que cualquier persona puede inventar matemática porque, a través de su experiencia lo ha visto en sus estudiantes haciendo referencia a que "… llegan a resultados increíbles".

De otra parte, Francisco no cree que las respuestas en matemáticas sean correctas o incorrectas porque las respuestas pueden ser de diferentes tipos, por ejemplo, una conjetura. También está en desacuerdo sobre que los conocimientos matemáticos y reglas matemáticas no cambian porque la matemática no es estática, por el contrario, está en proceso.

De otra parte, Francisco señaló, en la segunda aplicación, estar complemente de acuerdo con que el conocimiento matemático es falible y corregible como cualquier ciencia humana, mientras que al inicio no estaba ni de acuerdo ni en desacuerdo. Justificó su creencia argumentando que eso lo muestra la historia, que la matemática puede fallar y es susceptible de ser corregida.

Estructura del conocimiento matemático

En esta categoría Francisco no evidenció ningún cambio. Está de acuerdo con que hacer matemáticas genera nuevo conocimiento y que es importante relacionarlas con la vida real. Y está en desacuerdo con que hacer matemáticas sea una actividad solitaria, con que las matemáticas sean un conjunto de reglas, fórmulas, hechos y procedimientos, y con que en matemáticas no haya lugar para la contradicción.

Sobre esta última afirmación, Francisco argumentó que a veces, el hecho de que se produzcan contradicciones permite que se cree nueva matemática.

4.9.3. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Francisco se identifica con una postura de tipo constructivista. Entre el inicio y el final del curso solamente hubo un cambio significativo.

Francisco está completamente de acuerdo o de acuerdo con afirmaciones como

> Cualquier persona puede aprender matemáticas.
>
> Es importante proponer a los estudiantes situaciones o problemas que les permita generar y probar conjeturas.
>
> Los errores en la clase de matemáticas son importantes y una fuente de nuevo aprendizaje, por lo cual se deben discutir en clase.
>
> En la clase de matemáticas es importante que se muestre a los estudiantes problemas sin solución así como diferentes formas de ver y resolver un mismo problema.

Y en coherencia con una postura constructivista, está completamente en desacuerdo o en desacuerdo con

> Lo que es más importante en la solución de un problema es la respuesta no las ideas que pueda tener el estudiante sobre cómo encontrarla
>
> Los errores de los estudiantes se deben discutir en la clase como ejemplo de lo que no se debe hacer.
>
> Los problemas matemáticos deben tener una respuesta exacta para que el estudiante pueda saber si está trabajando correctamente.
>
> Para aprender matemáticas se requiere de habilidades especiales hacia la matemática.

Al comienzo del curso Francisco no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo con que el docente de matemáticas es el responsable de transmitir el conocimiento matemático a sus estudiantes, al finalizar señaló que está completamente en desacuerdo con esta afirmación.

Para Francisco es importante proponer a los estudiantes situaciones que les permitan generar y probar conjeturas, porque en el trabajo matemático se requiere analizar patrones para conjeturar y sacar conclusiones. En este sentido, hizo referencia al uso del razonamiento de tipo inductivo y de la importancia de trabajar problemas cuya solución no sea exacta, sino por el contrario, en los cuales los estudiantes deban hacer conclusiones y ver qué resultados se pueden obtener.

De otra parte, para Francisco de los errores es de donde realmente se aprende, no se trata simplemente de decirle a un estudiante que lo hecho está mal, sino preguntarle por qué cree que es correcto, y si es necesario mostrarle un contraejemplo, así puede aprender.

Francisco cree que la matemática escolar es asequible a todas las personas, no se necesitan habilidades especiales para aprenderla, sin embargo, señaló que dichas habilidades sí son necesarias si se quiere estudiar matemática pura. También cree que más que la memorización de conceptos y procedimientos, lo importante es hacer énfasis en la comprensión; el docente tiene la responsabilidad de hacer que el estudiante descubra el conocimiento.

Pero también Francisco reconoce que sí es necesario memorizar algunos conceptos y fórmulas, ya que no es posible reconstruirlos cada vez que se van a utilizar. Finalmente señaló que el currículo es dinámico y va cambiando de acuerdo a enfoques de las instituciones, las características de los estudiantes, entre otros aspectos.

4.9.4. Sobre la propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas

Francisco inicia su presentación diciendo que su propuesta no está hecha tomando la historia de la matemática "… sino de algunas ideas que me quedaron ahí sonando (…) el reconocimiento de la importancia de la construcción. El anverso, lo que hay detrás de lo que mostramos, centrar las actividades en el estudiante y no en el profesor…el papel del docente como facilitador". Francisco propuso cuatro actividades centradas en buscar que el estudiante pueda descubrir y el docente sea solamente un mediador que a través de preguntas va orientando la actividad.

Por ejemplo, para una de las actividades, Francisco dice que tomó como referencia la parte histórica en la cual se establece la conexión entre la ecuación cuadrática y la función cuadrática. La actividad consiste en utilizar un programa graficador con deslizadores para que los estudiantes exploren lo que sucede en la gráfica de una función cuadrática expresada en forma estándar $(y = ax^2 + bx + c)$, de vértice $(y = a(x - h)^2 + k)$ o factorizada $(a(x - m)(x - n))$, al modificar los diferentes valores de las letras que aparecen como números desconocidos.

Lo que se busca es que los alumnos puedan descubrir y conjeturar sobre el efecto que tienen en la gráfica. Antes de que los estudiantes empiecen a explorar con ayuda del programa, deben escribir lo que creen que pasaría en cada caso, de modo que después puedan contrastar y sepan "… qué herramientas matemáticas sirven para justificar el efecto". Francisco siempre hace eso en sus clases. Sobre la actividad, Francisco señala que es importante trabajar las diferentes formas, porque así es posible ver cuál es la potencia de cada una, qué información brinda diferente o igual, y, según eso, cuál sería pertinente usar en diferentes casos, y propone varias preguntas en ese sentido.

En otra de las actividades Francisco busca que los estudiantes comprendan a través del uso de la geometría que las expresiones $(x - a)(x + a)$ y $x^2 - a^2$ son equivalentes y para ello les propone el siguiente problema.

> Supongamos que Juan ofrece a Martín cambiarle un lote cuadrado por un lote rectangular. El largo del lote cuadrado es a metros mayor que la longitud del lado del lote del cuadrado, y el ancho es *a* metros menor. ¿Es justo este cambio? Si no lo es, ¿quién perdería y cuánto?

Para Francisco el éxito para lograr que los estudiantes trabajen y puedan descubrir matemática por cuenta propia está, en sus palabras, “En el arte de hacer preguntas”. Señaló que los docentes tienen la costumbre de dar la respuesta correcta ante una situación en la cual lo dicho por el estudiante es erróneo, en lugar de explorar y preguntar por qué da esa respuesta. Si simplemente le da la correcta, señala “ahí mató la cosa”, es decir, se pierde la oportunidad de hacer del error una fuente de aprendizaje. También señaló que “el valor de la clase son esas discusiones que se pueden dar entre los estudiantes, y uno ahí como moderador”.

4.9.5. Apreciaciones sobre el curso y su posible impacto

Francisco destacó como un aporte del curso lo planteado por Hersh sobre el anverso y el reverso de las matemáticas, señaló que en sus clases siempre trabaja alrededor de preguntas. La lectura realizada le ratifica que vale la pena, que es importante mirar no sólo el producto final sino indagar permanentemente la manera en que se llega al mismo. Considera que el haber participado en el curso ha incidido de manera importante, además de lo ya señalado, en ver la importancia de la historia de la matemática y su uso en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Al pedirle que comparara el enfoque del curso realizado con su formación en el pregrado y otros cursos, rescató el hecho de que hubiera pocos participantes porque permitía mayor participación en un ambiente tranquilo. También señaló que el material entregado fue importante.

Para la formación de futuros docentes considera importante trabajar más la historia de la matemática, argumentó que es muy útil para el trabajo en el aula y permite no sólo construir conocimiento con las estudiantes, sino también formar valores al ver la pasión y empeño de muchos matemáticos por comprender, conocer, descubrir y aprender.

Conclusiones del capítulo 4

Los instrumentos elaborados y utilizados para esta investigación permitieron describir en detalle las creencias epistemológicas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de los seis docentes en formación y los tres docentes en servicio que hicieron parte del estudio, la forma en que se han ido estructurando y los cambios presentados como resultado de su participación de los cursos diseñados y desarrollados.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Este capítulo tiene como objetivo analizar de manera detallada los resultados descritos en el capítulo anterior y, con base en ellos y el marco teórico y referencial establecidos, dar respuesta al problema de investigación propuesto ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?

Para abordar el problema, éste se dividió en tres preguntas. La primera, relacionada con las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y la manera en que se pueden transformar. La segunda, sobre la influencia en la práctica de docentes en servicio de esas creencias. Y la tercera, sobre los elementos que deben considerarse en los programas de formación para que los futuros docentes tengan creencias más productivas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, la respuesta al problema se dará a través de las respuestas a cada uno de las preguntas de investigación planteadas.

5.1. Primera pregunta de investigación

El primer objetivo específico de este estudio se aborda a través de la pregunta ¿Cuáles son las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, cómo se estructuraron y cómo se transforman al incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas?

En este estudio, a partir del trabajo realizado y descrito en los capítulos anteriores, se pudieron evidenciar diferencias y similitudes importantes en cada uno de los dos grupos, los profesores en formación y los que están en servicio. En la Figura 1 se muestra la postura identificada, a partir de los instrumentos, para cada participante al inicio y al final de cada curso. Se ejemplifica con la magnitud y dirección del vector, la posición inicial y final, y los cambios reportados.

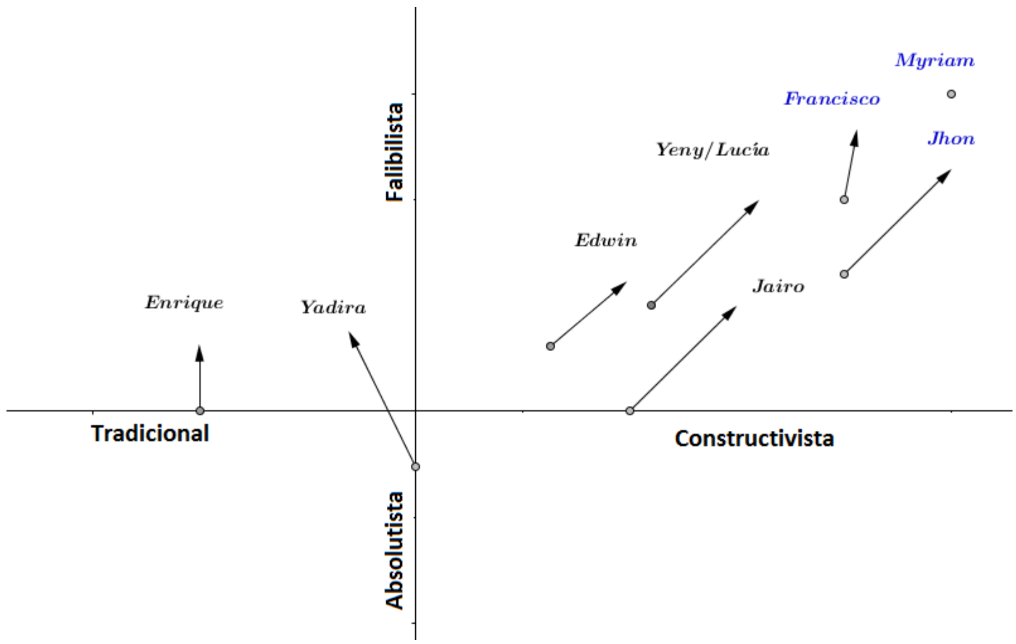

Figura 2. Creencias epistemológicas de docentes en formación y en servicio sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, reportadas al comienzo y al final de cada curso.

En negro docentes en formación; en azul docentes en servicio

Fuente: elaboración propia

En primer lugar, a partir de los instrumentos cerrados, se evidenció que los docentes en servicio reportan posturas definidas y coherentes entre sí. En contraste, las reportadas por los docentes en formación son más tentativas, pues los cambios en las respuestas dadas a los puntos de los instrumentos revelan que se encuentran en proceso de construcción o consolidación.

Los tres docentes en servicio, John, Myriam y Francisco se identificaron, desde el comienzo, con una postura falibilista acerca de las matemáticas y constructivista frente a su enseñanza y aprendizaje, la cual mantuvieron hasta el final, aunque se pudo evidenciar que al mismo tiempo están de acuerdo con algunas afirmaciones totalmente contrarias. A través de algunas de las preguntas hechas durante las entrevistas se pudo observar que los tres docentes muestran una fuerte inclinación a ver la matemática desde el punto de vista formalista, aunque afirmaron que eso no se relaciona con su práctica docente.

Sin embargo, las propuestas presentadas al finalizar el curso, con excepción de la de Francisco, estuvieron asociadas a posturas tradicionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, lo cual evidencia que sí existe una estrecha relación con esta postura. Parece existir una contradicción entre lo reportado en los instrumentos cerrados y lo que realmente permea el trabajo de aula de los docentes en servicio. Al finalizar el curso, los tres docentes señalaron algunos cambios en los instrumentos cerrados, lo que permiten ver que están abiertos a la reflexión y al cambio.

En el caso de los docentes en formación, al inicio no se pudo identificar una postura clara de Enrique ni de Jairo acerca de sus creencias epistemológicas y Yadira cambió de absolutista a falibilista. Y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Yadira no se identificó con ninguna tendencia al comienzo del curso. Los demás estudiantes aunque se identificaron desde el inicio con posturas falibilista y constructivista, que fueron consolidando, también señalaron, especialmente en la primera aplicación de los instrumentos, algunas posturas contrarias. Se observó durante las entrevistas, que los docentes en formación, tenían dificultad para argumentar las creencias señaladas, por lo que las cambiaban aparentemente para no dar explicaciones; esa fue la constante en el caso de Enrique. Los docentes en servicio siempre se mostraron seguros durante las entrevistas, y aunque, algunas creencias podían ser contrarias a la postura identificada argumentaban sobre ella con mucha propiedad.

Sobre la estructuración de las creencias, los docentes en servicio expresan con claridad que su formación formalista en el pregrado y su experiencia docente, han sido los aspectos que les han aportado. Para John, Myriam y Francisco, fue positivo e importante el haber recibido en el pregrado una formación matemática rigurosa, de corte formalista, a través de las asignaturas disciplinares, esto es, las que orientaban los matemáticos puros. Pero, al mismo tiempo, señalan las dificultades que han tenido que superar para su ejercicio docente, pues al comienzo las creencias formadas sobre la matemática en el pregrado, orientadas al formalismo, eran un obstáculo, en lugar de un apoyo, para su trabajo de aula. Esto lo señaló especialmente John, quien afirmó que al iniciar su proceso de práctica, quiso hacerlo al estilo formalista y se dio cuenta que no era pertinente, y fueron los docentes de corte pedagógico y didáctico quienes lo orientaron. Este hallazgo ratifica lo señalado por Sfard, citada por White-Fredette (2009/2010), acerca de que los matemáticos puros hacen parte del paradigma absolutista, los investigadores en educación matemática del falibilista, y, los docentes de matemáticas de educación básica y media están atrapados en el medio, con una mayor tendencia al formalismo.

Se puede inferir de lo expresado en las entrevistas, que por su fuerte formación formalista en el pregrado, los docentes en servicio inicialmente tenían creencias orientadas a esa postura, pero que, especialmente su experiencia docente, y de alguna manera, por participar continuamente en diferentes eventos de matemática y educación matemática, han ido transformándola, pero todavía no se articula de manera coherente con el trabajo de aula. De otra parte, los docentes en servicio que participaron en esta investigación, establecen una diferencia entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar. A pesar de las dificultades señaladas, siguen considerando que es fundamental que se forme a los futuros docentes con algo de rigor matemático, aunque señalan que deben existir otros espacios de formación que ayuden a articular la matemática con su proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta dualidad se ratifica con lo presentado en sus propuestas de aula para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A pesar de identificarse todos con una postura constructivista, solamente Francisco presentó una propuesta orientada a que el docente, en su papel de mediador, ayude a los estudiantes a crear matemáticas, a que puedan descubrir, conjeturar y justificar. Las otras dos propuestas eran instruccionales, especialmente la de Myriam. Por su parte, los docentes en formación, quienes reportan menos consolidadas sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, inicialmente hicieron más referencia a su formación en el colegio, a la forma de enseñar de sus docentes y también a su experiencia docente, hablando muy poco de su formación universitaria. Para Lucía y Yadira, el programa les ha enseñado que es importante la demostración cuidadosa de las afirmaciones y dijeron que han aprendido más matemática.

Se observa que todos los estudiantes en formación tuvieron cambios importantes, el curso les ayudó en la formación de sus creencias, las cuales siguen en proceso de consolidación. Y aunque los docentes en servicio tienen aparentemente más consolidadas sus creencias también están abiertos a ampliarlas y a incorporar nuevos elementos. Todos los docentes en formación y en servicio hicieron referencia al impacto generado por el estudio de la obra de Lakatos y los aportes de Davis y Hersh, especialmente con su reflexión acerca del anverso y el reverso de las matemáticas.

Por ejemplo, Enrique, que se identifica con una postura tradicional frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dijo en la entrevista final, que le gustaría hacer cosas nuevas con sus estudiantes, que ellos sean más protagonistas de su aprendizaje, que participen y trabajen por cuenta propia, pero señala una presión por cumplir con los contenidos establecidos y que eso no se lo permite. El también muestra preocupación por seguir enseñando de manera tradicional, diciendo que debe trabajar al respecto y que en su trabajo de grado, que iniciará el siguiente semestre, lo va a intentar.

Jairo dice que durante el curso tuvo sus propias crisis, considera que fue innovador, que se logró articular lo teórico con lo práctico y lo disciplinar con lo pedagógico. Señaló que generalmente la matemática va por una parte y la pedagogía por otra. Y Yadira, aunque también señaló una postura tradicional frente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dijo que el curso le permitió reflexionar sobre cómo está enseñando, si lo que hace en el aula es más de tipo formal o si, por el contrario, lo hace de manera más cuidadosa y se tiene en cuenta el anverso y reverso de las matemáticas, y la historia de las matemáticas.

Otro aspecto que evidencia el impacto del curso con los docentes en formación, especialmente para aportar en la continua reflexión, es que varios hablaron del dilema ético que debían enfrentar, al ser conscientes de la importancia de permitir a los estudiantes explorar, razonar, crear y descubrir por cuenta propia, pero al mismo tiempo lo que eso implica en dedicación y esfuerzo de su parte en la preparación de sus clases. Sobre esto hablaron Enrique, Yeny, Jairo y Lucía.

De los docentes en servicio, John avanzó de manera más significativa en la consolidación de sus creencias. Señaló, como los estudiantes en formación, la importancia de permitir a los estudiantes llegar al conocimiento matemático por su propia cuenta en lugar de presentarlo ya terminado, para que simplemente sea memorizado y usado de manera mecánica. En su propuesta final se muestra el esfuerzo realizado por John para articular las creencias reportadas en el instrumento cerrado, de tipo constructivista, con su práctica docente, contrario a lo que generalmente hace en clase como él mismo lo señaló. John también señaló que la presión por cumplir con el currículo establecido no le permite trabajar de manera más significativa la matemática, pues debe además ceñirse a lo establecido por el libro de texto. Esta presión también la señaló Enrique.

Se puede evidenciar que el incorporar experiencias de aprendizaje basadas en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas, en las cuales se generan espacios implícitos, pero especialmente explícitos para que los docentes en formación y en servicio reflexionen sobre sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, ayuda a la formación, transformación o consolidación de las mismas (Flores, 1995; Cooney, 1994; Charalambous, Panaoura y Philippou, 2009; White – Fredette, 2009).

Lo descrito anteriormente permite afirmar que, la experiencia docente intensiva, esto es, muchos años de experiencia, es importante para la formación y consolidación de creencias, como se evidenció con los docentes en servicio; mientras que la formación recibida en el pregrado es de difícil y lenta asimilación, como se aprecia con los docentes en formación quienes no señalan un impacto significativo de su programa de formación, en contraste con lo reportado por los docentes en servicio. Sin embargo, se observó que los docentes en servicio, a partir de su formación y experiencia docente, han hecho una distinción entre la matemática en sí y la matemática escolar y parece que se sienten cómodos con esta dualidad, o contradicción, y con la práctica docente que realizan. De otra parte, los hallazgos muestran que algunos docentes en formación y en servicio han construido un sistema de atenuantes, por ejemplo el currículo y los textos que se les han impuesto, para justificar la contradicción entre lo que reportan son sus creencias frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y lo que suelen hacer en el aula, y también parecen estar cómodos frente a esa situación.

5.2. Segunda pregunta de investigación

La segunda pregunta de investigación planteada fue ¿Cuál es la influencia que tiene en la práctica de docentes de matemáticas en servicio sus creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje?, a través del cual se da cumplimiento al segundo objetivo específico.

Los resultados observados con los tres docentes en servicio que participaron en la investigación, muestran que a pesar de haber señalado, a través de los instrumentos cerrados, posturas aparentemente claras y alineadas frente a la matemática y su enseñanza y aprendizaje, persisten algunas contradicciones y dificultades para romper con posturas formadas durante los estudios universitarios, y probablemente desde antes, y avanzar en una verdadera articulación de sus creencias, que se refleje de manera efectiva en su ejercicio docente.

En primer lugar, durante la entrevista inicial al indagar a los docentes por el impacto del programa de formación de pregrado y lo que lo caracteriza actualmente en su ejercicio de aula, en general resaltaron la importancia de la formación de tipo formalista que habían recibido a través de las asignaturas disciplinares de su licenciatura. Sin embargo, al tiempo que señalaron o evidenciaron, que esa formación no les ayudó para el ejercicio en el aula, se dieron cuenta que la manera como les fue presentada la matemática no se puede usar como modelo para el proceso de enseñanza y aprendizaje con estudiantes de educación básica y media. John destacó la rigurosidad de sus docentes "… el estilo que yo vi de matemáticas fue precisamente orientado desde la lógica, el razonamiento, de la matemática formal,…, demostración, teorema, afirmación…". Pero señaló que eso se distancia mucho de su ejercicio docente. "…no le puedo dar a los estudiantes, llegar allá con axioma, definición, teorema, no, eso si no lo puedo hacer. Cada cosa trato de llevarla como partiendo de lo básico, partiendo del mundo real, del entorno, de situaciones como cotidianas, y de ahí arranco, y eso lo debo es a mis prácticas". Señaló que fueron sus tutores de práctica, docentes de matemáticas en ejercicio en instituciones de educación básica y media quienes le ayudaron en su ejercicio docente "… yo llegué todo formalista (…) pero ellos me orientaron desde su experiencia".

Por su parte, Myriam señaló que mientras estudió en la universidad sus clases se caracterizaban por un rigor matemático alto, al estilo de un matemático puro. Sin embargo, dijo que eso no es lo que la caracteriza como docente "… pienso que la experiencia ha sido una herramienta fundamental dentro de todo esto, incluso también en cuanto a formar las creencias…". También destacó su práctica docente cuando se estaba formando como licenciado "… el tener la posibilidad de visitar colegios, de ver diferentes estilos de enseñanza, diferentes cantidades de alumnos por grupo, tener la posibilidad de ver un colegio público, un colegio privado…".

Y Francisco, señaló que su formación le aportó estructura matemática, conocimiento matemático y pedagógico, pero que gran parte de lo que aprendió no lo usa porque trabaja con estudiantes de educación básica y media, y no aplica para ese nivel. También dijo que su ejercicio docente ha estado marcado por una frase que le decía un profesor de física "la física es una obra de teatro cuyo libreto está escrito en lenguaje matemático".

Por otra parte, estas posturas de los docentes en ejercicio evidencian una situación muy similar a lo planteado por Hersh (1997) en relación con el dilema filosófico que enfrenta el matemático, también el docente de matemáticas – quien ha recibido parte importante de su formación de matemáticos puros – sobre si ser formalista o platónico y la forma en que lo resuelven, viviendo como formalista en el trabajo y platónico en sus horas libres. Para Hersh (1997) ésta es una situación impactante que significa que la mayoría de los matemáticos, y licenciados en matemáticas como se refleja en esta investigación, tienen puntos de vista contradictorios sobre la naturaleza de su trabajo y afirma que eso tiene consecuencias prácticas.

En esta investigación, los tres docentes en servicio muestran que durante su formación como licenciados construyeron un tipo de creencia epistemológica frente a la matemática, de tipo formalista que no les fue útil para su ejercicio docente. Señalan como fundamental en la construcción de las creencias que actualmente poseen, su amplia experiencia docente y la participación en diferentes congresos y eventos de matemáticas y educación matemática.

En segundo lugar, aunque a partir de los instrumentos cerrados, y como se señaló en la pregunta anterior, se refleja que aparentemente los docentes en servicio tienen creencias claramente definidas y alineadas de tipo falibilista frente a las matemáticas, y de tipo constructivista acerca de su enseñanza y aprendizaje, se evidencia en otros aspectos señalados durante las entrevistas y en la clase presentada que persisten contradicciones importantes, especialmente en dos de los tres docentes.

Por ejemplo, John dijo en la primera entrevista, al preguntar sobre lo que espera que sus estudiantes aprendan, lo que considera fundamental, señaló que “los procedimientos, procesos y aplicaciones”. En contraste, al pedirle que argumentara una de sus creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas afirmó que el éxito del aprendizaje de las matemáticas no está en la repetición de procedimientos y que, al contrario, ello puede generar que los estudiantes se vuelvan esquemáticos, sino lo importante es que razonen, analicen y comprendan los problemas, que puedan revisar sus avances en contraste con las condiciones dadas más que llegar a una respuesta correcta. En su propuesta final para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, John señaló que siempre ese tema lo empezaba señalando la forma general que tiene ese tipo de ecuaciones, con énfasis en procesos algorítmicos, y que sólo hacía algunas aplicaciones al finalizar el tema. En contraste, presentó una situación problema abierta para que, con uso de material didáctico, los estudiantes pudieran trabajar y proponer alternativas. Hizo hincapié en que siempre empezaba por lo teórico, y que al finalizar el curso consideraba que lo puede hacer a partir de la solución de problemas, pero manifiesta una presión por cumplir con lo establecido en el currículo y con lo propuesto en el libro de texto que está obligado a llevar, en el cual se presentan los conceptos de manera teórica, luego se plantean ejercicios de rutina y finalmente aplicaciones.

Por su parte, Myriam aunque señaló que espera que los estudiantes aprendan a razonar, que considera importante que sepan conceptos para que los usen como herramientas al resolver diferentes situaciones, y argumentó de manera sólida y con claridad su postura constructivista frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, presentó una clase esencialmente tradicional para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas. En su propuesta, se presenta al docente como el dueño del conocimiento y el estudiante como un receptor del mismo. A pesar de intentar realizar un diálogo al estilo de Lakatos, lo que se muestra a través del mismo, es un estudiante siguiendo instrucciones de tipo algorítmico para resolver una ecuación, muy diferente a lo propuesto por Lakatos.

Solamente Francisco evidencia una articulación entre las creencias señaladas en los instrumentos y su práctica docente, tal como él la describe y es reflejada en su propuesta para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas.

Estas situaciones evidencian que a pesar del esfuerzo que han realizado los docentes en servicio por construir una epistemología coherente entre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, persisten serias dificultades para lograrlo, y se infiere que en gran parte se debe a la manera en que en los programas de formación fueron presentadas. También es probable que en algunos casos, esto se presente por la preocupación señalada por los docentes por cumplir con el currículo establecido, como el caso de John, y por la necesidad de responder a diferentes estándares y pruebas nacionales e internacionales, como el caso de Myriam. Esto se correlaciona con hallazgos similares en otras investigaciones en las que además se hace énfasis en el impacto que tiene el contexto en la formación de creencias (Raymond, 1997; Stipek et al 2001, Skott, 2009; Sztajn, 2003).

También evidencia que el éxito en las reformas curriculares, orientados actualmente en la educación matemática hacia el aprendizaje constructivista, no tendrán éxito si no se consideran las creencias de los docentes, entre otros aspectos (Handal y Herrington, 2003; Pantziara, Karamanou y Philippou, 2013). En el caso de Colombia la reforma más reciente fue presentada por el Ministerio de Educación Nacional a través de la formulación de estándares de competencias a comienzos del siglo XXI, sin embargo, los resultados de diferentes pruebas muestran que se ha logrado muy poco en relación con lo propuesto.

5.3. Tercera pregunta de investigación

Finalmente, la tercera pregunta de investigación propuesta para abordar el tercer objetivo específico fue ¿Qué elementos deben tenerse en cuenta para realizar cambios significativos en programas de formación de docentes de matemáticas encaminadas a que los futuros docentes desarrollen creencias y actitudes más productivas hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje?

A partir de los hallazgos encontrados en esta investigación y la revisión de la literatura al respecto se pueden señalar algunos aspectos que deben tenerse en cuenta en los programas de formación inicial, de manera que puedan contribuir a que los futuros docentes construyan o consoliden creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje coherentes con los fines de la educación matemática.

Estas recomendaciones se extienden a programas de formación posgradual o permanente, ya que como señalan Charalambous, Panaoura y Philippou (2009), es posible que los programas de formación inicial sean capaces de aportar en la construcción o consolidación de creencias, pero otros factores como el entorno escolar y las comunidades a las que pertenecen los docentes son importantes para el éxito sostenido de cualquier esfuerzo.

En primer lugar, es importante reiterar que en esta investigación se pudo observar que, en las creencias de los docentes por un lado hay una disciplina formal que se debe aprender de manera rigurosa, donde la demostración cuidadosa es un requisito, esto es, una tendencia de tipo más formalista; y por otro, al momento de ir al aula, se deben utilizar otras herramientas, escenario en el cual la matemática misma parece inútil. En este sentido, el contraste epistemológico entre la perspectiva que se da a la matemática misma, como sistema axiomático formal, y la que se requiere, tanto de la matemática como de la educación matemática, para que se enriquezcan mutuamente, emerge claramente en las creencias de los sujetos participantes en esta investigación.

El enfoque epistemológico formal y axiomático de la matemática que se ofrece en los programas de formación de futuros profesores, como lo expresaron especialmente los docentes en servicio, la divorcia totalmente de la matemática escolar, a pesar de que ésta claramente corresponde a partes seleccionadas de la matemática elemental, haciendo esa formación prácticamente irrelevante e impidiendo que informe la práctica de los futuros profesores y contribuya al éxito de reformas curriculares que buscan transformarla.

En este sentido, una recomendación que emerge es la incorporación durante la formación inicial y continua, de manera explícita y permanente, de experiencias que permitan a los futuros docentes o a docentes en ejercicio confrontar y reflexionar sobre sus creencias y sus implicaciones en su práctica docente (Cooney, Shealy y Arvold, 1998; Cross (2009), Herhs (1997)).

El trabajo de campo realizado mostró que todos los participantes, tanto docentes en formación como en servicio, se sintieron impactados y señalaron cambios en algunas de sus creencias, por aspectos considerados en los cursos, especialmente de orden histórico, epistemológico y filosófico.

Todos los docentes en servicio, y al menos la mitad de los docentes en formación, hicieron referencia de manera explícita, a la importancia de estudiar y profundizar en la historia de las matemáticas, y su aporte para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las mismas. En el caso de los docentes en formación, destacaron el poder profundizar en un tema concreto y ver todo su desarrollo histórico, indicando que durante su formación nunca tuvieron un ejercicio parecido.

Yeny por ejemplo, señaló que el recorrido histórico sobre la epistemología de las matemáticas en las escuelas medieval y griega le permitió conocer las problemáticas que enfrentaron los matemáticos de la época alrededor del conocimiento matemático y su interés de hacer de la matemática algo universal, lo cual considera fundamental en su ejercicio docente. Myriam destacó como un aporte del curso el haber abordado la historia de las matemáticas alrededor de un tema específico, lo cual le permite reflexionar sobre la importancia de ir a la historia cuando se van a abordar los diferentes temas. Y Francisco, incluso hizo alusión a la importancia de la historia en la formación de futuros docentes, argumentando que es muy útil para el trabajo en el aula y permite no sólo construir conocimiento con las estudiantes, sino también formar valores, por ejemplo al ver la pasión y empeño de muchos matemáticos por comprender, conocer, descubrir y aprender.

La historia de la matemática aporta, entre otros aspectos y como lo señalan Fauvel y Van Maanen (2000), comprensión profunda tanto de las matemáticas como de otros temas, permite ver su evolución y comprender que la matemática es el resultado de una comunidad, conocimiento sobre dificultades presentadas en diferentes momentos y esto a su vez ayuda a que los estudiantes adquieran confianza. De otra parte, a través del estudio de la historia de la matemática se incorporan además aspectos filosóficos y epistemológicos que también deben hacer parte de la formación docente (Chassapis (2007), White - Fredette (2009/2010)).

De otra parte, todos los docentes participantes hicieron referencia a la importancia e impacto generado por el estudio y reflexión alrededor de aspectos de orden filosófico y epistemológico. Todos los docentes señalaron como novedoso y significativo el estudio de las posturas de Lakatos, Davis y Hersh, afirmando que los hizo reflexionar sobre la manera en que desarrollan su práctica docente, preguntarse qué es la matemática, qué se conoce acerca de la creación matemática, y sobre la distancia que generalmente existe entre la forma como la matemática ha sido creada y lo que se presenta en el aula, llamado por Hersh el anverso y el reverso de las matemáticas.

Por ejemplo Enrique, quien no tenía una postura clara al comienzo sobre la matemática y al finalizar avanzó hacia una de tipo falibilista, manteniendo, sin embargo, una postura tradicional frente a la enseñanza y aprendizaje, señaló al terminar el curso que, a partir de lo estudiado de Lakatos, es consciente que debe permitir que los estudiantes sean más protagonistas de su aprendizaje, que participen y trabajen por cuenta propia.

En articulación con estos hallazgos, en los estándares de competencias de matemáticas en Colombia, se señala que para que los docentes puedan desarrollar competencias matemáticas en sus estudiantes se requiere que adopten un modelo epistemológicamente coherente sobre las propias matemáticas. Para ello, también señalan los estándares, que con base en nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, es necesario que los docentes reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas como que son "una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas (…). En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas, y que son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales" (MEN, 2002, p 49).

Adicionalmente varias investigaciones señalan como componentes esenciales en la formación profesional de docentes de matemáticas la filosofía y la epistemología de las matemáticas. Las creencias que tienen los docentes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje reflejan, generalmente de manera implícita, una filosofía de las matemáticas, que se constituye en una especie de práctica filosófica y muchas veces prevalece sobre los conocimientos matemáticos (Chassapis, 2007; White-Fredette; 2009/2010).

El estudio de la filosofía de la matemática debe servir a los docentes a ser más reflexivos sobre su práctica, debe darles elementos para la definición de propósitos y objetivos de su trabajo, y permitirles una comprensión más profunda de las matemáticas como su objeto de conocimiento. El estudio de la filosofía de las matemáticas como parte de la formación docente, señala White-Fredette (2009/2010), ayuda a los docentes a integrar la enseñanza desde el enfoque constructivista más fácilmente mediante el estudio de nuevas tendencias orientadas hacia una epistemología de las matemáticas de corte falibilista.

Los elementos señalados permiten concluir que lo deseable para los programas de formación es construir una propuesta curricular en la cual se articulen la historia, la filosofía y la epistemología de la matemática como hilos conductores para el estudio de la matemática y, a través de ese conocimiento profundo, se consolide un trabajo intensivo en solución de problemas que sea el puente entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar, como subconjunto que es de la matemática elemental. Sobre este aspecto se requiere más investigación.

Conclusiones del capítulo 5

En este capítulo se dio respuesta a las preguntas de investigación propuestas para abordar el problema de investigación de este estudio. Se muestra que los docentes en servicio tienen creencias definidas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y que son coherentes entre sí, mientras que las creencias de los docentes en formación son más tentativas. Se pudo evidenciar que para los docentes en servicio la formación recibida en su pregrado orientada desde un enfoque formalista ha tenido un impacto a lo largo de su ejercicio docente pero también les ha impedido avanzar en una verdadera articulación de sus creencias que se refleje de manera efectiva en su ejercicio docente.

Los cursos diseñados para esta investigación tuvieron un efecto en todos los participantes quienes mencionaron que les permitieron reflexionar sobre sus creencias y el impacto que puede tener en su quehacer docente, reconocen la importancia de hacer que los estudiantes sean protagonistas de su proceso de aprendizaje y el docente un mediador, pero también señalan que no es fácil porque ello implica tener un conocimiento profundo de los aspectos de la matemática escolar y dedicar mayor tiempo a la preparación de sus clases.

A partir de los hallazgos se presenta una serie de recomendaciones para los programas de formación enfocadas especialmente a que se renueven los diseños curriculares en los cuales la historia, la filosofía y la epistemología de las matemáticas sean los hilos conductores y se consolide un trabajo alrededor de la solución de problemas que permita a los futuros docentes construir creencias más productivas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje.

CONCLUSIONES

Este estudio permitió conocer las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio desde la perspectiva de los seis docentes en formación, y de los tres docentes en servicio que hicieron parte del estudio. Se pudieron identificar aspectos sobre la manera como se han ido estructurando, así como los cambios que pueden tener cuando participan en diferentes cursos de formación, los cuales buscaban de manera explícita desafiar sus creencias. Esto se constituye en un aporte importante de este estudio, especialmente para el caso colombiano, del cual existe poca literatura.

Los hallazgos de esta investigación se correlacionan con otros de este tipo en el ámbito internacional. Se identificó una dualidad en los docentes en servicio, a saber, la diferencia que establecen entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar. Indicaron que sus creencias epistemológicas sobre la matemática, formadas durante sus estudios de pregrado y de corte formalista, no tienen relación con su trabajo de aula, ni con sus creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo, se pudo evidenciar que sí existe un fuerte vínculo. Esta dualidad no se ha identificado de esta manera en otros estudios, a pesar de que sí existen investigaciones que hacen referencia a la desalineación de las creencias de docentes de matemáticas sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje.

Otro resultado del estudio, que a la vez se constituye en un aporte en sí mismo, es la contribución que, a través de los dos cursos que se realizaron, se hizo a la formación, consolidación o construcción de creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje de los docentes en formación y en servicio que participaron en la investigación. Los cursos diseñados y realizados para esta investigación, generaron en los nueve participantes inquietudes que les permitieron reflexionar, de manera explícita, sobre sus creencias y su impacto o posible impacto en sus prácticas. Los cursos incorporaron de manera explícita aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos, así como un componente para el trabajo en solución de problemas. Estos aspectos son señalados por diferentes investigaciones como relevantes para la construcción y consolidación de creencias, pero en general, en la literatura se encuentran investigaciones que han abordado de manera específica solamente uno de esos aspectos.

Los resultados encontrados permitieron hacer algunas recomendaciones para los programas de formación inicial y continua, de modo que puedan incorporar cambios en sus diseños curriculares encaminados a que los docentes en formación o en servicio consoliden creencias más productivas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y de ese modo las reformas curriculares que se vienen proponiendo desde comienzos del siglo XXI enfocadas al desarrollo de competencias en los estudiantes puedan tener mayor éxito del que hasta ahora se ha evidenciado a través de las diferentes pruebas nacionales e internacionales que presentan los estudiantes colombianos.

Se puede concluir, con base en este estudio y los referentes considerados, que:

- Las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje que tienen los docentes de matemáticas tienen influencia en la práctica docente y, por tanto, en el éxito de reformas curriculares, bien sea de manera explícita o implícita.
- La estructuración de dichas creencias proviene de diferentes fuentes, la práctica docente es una de las principales, también lo son modelos observados por los docentes, incluso desde antes de su formación en la universidad, y la formación misma, la cual tiene efectos no del todo positivos para el futuro ejercicio docente.
- La formación y consolidación de las creencias requiere un trabajo intensivo, especialmente, desde los programas de formación, para que ayuden a futuros docentes a construir creencias más productivas hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

- Es necesario que en los programas de formación inicial y continua se incorporen, a lo largo de la formación, experiencias explícitas que hagan a los futuros docentes confrontar y reflexionar permanentemente sobre sus creencias, las cuales deben tener como hilos conductores aspectos epistemológicos, filosóficos e históricos de la matemática, y a través de las cuales el trabajo en solución de problemas pueda ser el puente entre la matemática como disciplina científica y la matemática escolar.

Por todo lo descrito, se puede concluir que los objetivos propuestos se cumplieron y que las preguntas de investigación no solo guiaron adecuadamente la investigación, sino que todas fueron respondidas en total coherencia con los objetivos de la misma.

RECOMENDACIONES

Este trabajo permitió conocer más sobre las creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje; y sobre la forma en que se transforman, especialmente para el caso colombiano, donde la literatura al respecto es escasa. En este sentido, se espera que esta investigación provoque nuevos estudios que permitan tener una mayor y mejor comprensión sobre el sistema de creencias y que se puedan utilizar para introducir mejoras o reformas en programas de formación docente inicial y continua y eso a su vez redunde en el desarrollo de competencias matemáticas en niños y jóvenes. Este trabajo también puede ser un referente para las autoridades educativas del país, especialmente para incorporar estrategias que permitan que las reformas curriculares propuestas tengan mayor impacto.

A continuación se presentan algunas recomendaciones para los programas de formación y para futuros estudios y para las autoridades educativas en Colombia.

En primer lugar, teniendo en cuenta lo complejo que es el sistema de creencias, es necesario desarrollar nuevos diseños metodológicos que permitan informar con mayor precisión las creencias epistemológicas sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje que tienen docentes en formación, en servicio y docentes formadores, y la coherencia entre éstas. Otros estudios pueden estar orientados a definir nuevas y más precisas categorías sobre las creencias de docentes en formación y en servicio, acorde con las tendencias actuales y de vanguardia en educación matemática y el impacto que éstas generan a su vez en el desarrollo de competencias matemáticas de sus estudiantes.

Es recomendable hacer estudios longitudinales que reporten las creencias que tienen docentes en formación cuando empiezan su programa, la forma en que se van transformando o consolidando a medida que avanzan en el mismo, el impacto que puede tener el proceso de práctica docente, y contrastar con las creencias que reportan al finalizar el programa. Este tipo de estudios puede dar información importante para analizar la pertinencia lograda por los programas de formación.

En coherencia con lo anterior, es necesario realizar nuevas investigaciones para conocer sobre las creencias epistemológicas acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje de docentes en servicio, la alineación entre éstas y la coherencia que tienen con los fines de la educación matemática. Especialmente con docentes vinculados a diferentes tipos instituciones, de carácter público y privado, urbano y rural, incluso con docentes que no se formaron para ser docentes de matemáticas pero que sí ejercen esa profesión. En estos estudios se pueden incluir análisis que permitan determinar si existe algún tipo de correlación entre las creencias reportadas por los docentes y sus años de experiencia, o entre las primeras y los resultados de sus estudiantes en pruebas de matemáticas de carácter nacional o internacional. Incluso se hace pertinente estudiar la influencia que pueden tener las creencias de docentes de matemáticas en sus propios estudiantes.

Por otra parte, y teniendo en cuenta, que uno de los hallazgos de este estudio hace referencia a la necesidad de hacer de la historia, la filosofía y la epistemología de las matemáticas hilos conductor en los programas de formación, se requiere investigación sobre maneras de hacerlo, qué tipo de nuevos materiales y metodologías se requieren diseñar e implementar y ver el impacto que pueden tener. El conocimiento profundo y continuo de la historia, la filosofía y la epistemología de las matemáticas, debe permitir a los programas de formación y a sus egresados ir más allá, y en coherencia con la formación de creencias más productivas hacia la matemática y su aprendizaje, debe servir para cuestionar lo que se ha establecido debe ser la educación matemática de niños y jóvenes, sus fines, argumentar si es lo pertinente o no, y en su defecto liderar la construcción de currículos más retadores.

En articulación con esto, se requiere investigación que aborde las preocupaciones señaladas tanto por docentes en formación como en servicio sobre la presión que sienten por cumplir con un listado de temas previamente establecidos, y que señalan como una causa para no incorporar nuevas tendencias en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Es decir, es necesario hacer estudios que muestren, como lo mencionan otras investigaciones, la importancia de trabajar de manera explícita las creencias de los docentes para el éxito en la incorporación de reformas curriculares.

Finalmente se requieren estudios que muestran también cuáles son las creencias que tienen los formadores de formadores y que se indague sobre las creencias que los programas de formación esperan que sus estudiantes construyan o consoliden y las estrategias establecidas en su diseño curricular para lograrlo.

En relación con las autoridades educativas en Colombia, este estudio muestra que es necesario que el Ministerio de Educación Nacional trabaje de manera articulada con los programas de formación inicial y continua de docentes de matemáticas, de modo que se construya un plan a largo plazo, que permita realmente transformar la educación matemática en Colombia, tomando como punto de partida ejemplos a nivel internacional, pero sin desconocer la importancia de los contextos culturales ya que no se trata de replicar lo que se hace en otros países.

Los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias matemáticas, propuestos hace ya más de 15 años, tuvieron mensajes importantes, pero está visto que no han tenido el impacto que se esperaba y que no incorporan suficientes elementos que ayuden a los docentes a construir una epistemología coherente, como lo señalan. Es necesario revisar estos documentos e incorporar cambios que hagan visible que lo importante no es cumplir con un extenso listado de temas sino desarrollar el pensamiento matemático en niños y jóvenes. Para ello se requiere un gran acompañamiento a los docentes en servicio, que les ayude a implementar los cambios que se proponen y debe ser en alianza con los programas de formación, para que también desde allí se articule con las propuestas curriculares.

REFERENCIAS

Artz, A., & Armour-Thomas, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: A guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 211–235.

Bohórquez, L. (2013). Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe. Santo Domingo, 6 al 8 de noviembre (paper).

Buehl, M. & Fives, H. (2009). Exploring Teachers' Beliefs About Teaching Knowledge: Where Does It Come From? Does It Change?. *The Journal of Experimental Education*, 77(4), 367-408, DOI: 10.3200/JEXE.77.4.367-408.

Chassapis, D. (2007). "Integrating the philosophy of mathematics in teacher training courses". *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*, 61-79. Springer US.

Charalambous, C., Panaoura,A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 161–180. DOI: 10.1007/s10649-008-9170-0

Cooney, T. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 324–336.

Cooney, T., Shealy, B. & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(3), 306-333.

Cross, D. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*, 325–346. DOI 10.1007/s10857-009-9120-5.

Cross, D. (2015). Dispelling the notion of inconsistencies in teachers' mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*, 173–201. DOI 10.1007/s10857-014-9276-5.

Davis, P., Hersh, R. & Marchisotto, E. (2012). The Mathematical Experience. Boston: Birkhäuser.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, & P. Gerdes (Eds.), Mathematics, education, and society (pp. 99-101). Paris: UNESCO.

Ernest, P. (1991). *Philosophy of mathematics education*. New York: Falmer.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.): (2000). *History in mathematics education*—The ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Flores, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza* (tesis doctoral). Universidad de Granana, Granada.

Glas, E. (2014). A Role for Quasi-Empiricism in Mathematics Education. En Matthews, M (Editor), International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching (731-753). Nueva York: Springer. DOI 10.1007/978-94-007-7654-8_23.

Handal, B. & Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 59-69.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* New York: Oxford University Press.

ICFES (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen ejecutivo.* Bogotá: ICFES.

ICFES (2013). *Colombia en pisa 2012. Informe nacional de resultados. Resumen ejecutivo.* ICFES. Bogotá: ICFES.

Lakatos, I. (1976a). A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 27(3), 201-223.

Lakatos, I. (1976b). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. New York: Cambridge University Press.

Lerman, S. (1990). Alternative perspective of the nature of mathematics. British Educational Research Journal, 16, 53–61.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-333.

Pantziara, M., Karamanou, M., & Philippou, G. (2013). Teachers'beliefs and knowlege related to the cyprus mathematics curriculum reform. En F. Arzarello (Presidencia), Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8). En Manavgat-Side, Antalya – Turkey.

Penn, A. (2012). *The Alignment of Preservice Elementary School Teachers' Beliefs concerning Mathematics and Mathematics Teaching* (Tesis de Maestría). Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

Pepin, B. (1999). *Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany*. TNTEE Publications, 2(1), 127-146.

Phillipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. En F. Lester (Ed.). Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing y NCTM.

Pólya, G. (1965). *Cómo planter y resolver problemas*. Traducción Julián Zugazoita. México: Trillas.

Putnam, H. (1975). *Mathematics, Matter and Method*. Philosophical Papers, Volume I. Cambridge: University Press.

Raymond, A. (1997). Inconsistencies between a beginning elementary teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550–576.

Roscoe, M., & Sriraman, B. (2011). A quantitative study of the effects of informal mathematics activities on the beliefs of preservice elementary school teachers. Zdm, 43(4), 601. doi:10.1007/s11858-011-0332-7.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México. Mac Graw Hill.

Skott, J. (2009). Contextualising the notion of 'belief enactment'. Journal of Mathematics Teacher Education,12(1), 27–46.

Steiner, H. (1987). Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *Learning of Mathematics* 7(1), 7-13.

Steup, M. (2014). Epistemology, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/epistemology/>. Recuperado el 4 de noviembre de 2014.

Stipek, D., Givvin, K., Salmon, J. & MacGyvers, V. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, 17 (2), 213 – 226.

Sztajn, P. (2003). Adapting reform ideas in different mathematics classrooms: Beliefs beyond mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 53–75.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105–127.

Thompson, A.(1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D.A. Grouws, (Ed.), Handbook on mathematics teaching and learning. (pp. 127-146). New York: Macmillan.

UNESCO. (2014). *Enseñanza y aprendizaje: Lograr la calidad para todos.* París: Ediciones UNESCO.

Walker. (2007). The development and construct validation of epistemological beliefs survey for mathemathics. (Tesis doctoral). Oklahoma State University, E.U.A.

White-Fredette, K. (2009). What is Mathematics? An Exploration of Teachers' Philosophies of Mathematics during a Time of Curriculum Reform. Middle-Secondary Education and Instructional Technology Dissertations. Paper 46.

White-Fredette, K. (2009/2010). Why Not Philosophy? Problematizing the Philosophy of Mathematics in a Time of Curriculum Reform. *The Mathematics Educator*, 19(2), 21-31.

Yang, X. (2014). *Conception and Characteristics of Expert Mathematics Teachers in China.* Berlin: Springer.

Anexo 1. Consentimiento Informado docentes en formación

INFORMACIÓN PARA DOCENTES EN FORMACIÓN
PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Querido estudiante, el estudio "Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio: consideraciones para proponer y efectuar cambios en los programas de formación", es conducido por Grace Judith Vesga Bravo, estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en el marco del desarrollo de su tesis doctoral. Uno de los objetivos generales propuestos en dicho estudio es "Analizar y describir la manera en que docentes de matemáticas en formación transforman sus creencias epistemológicas acerca de la matemática y su enseñanza cuando construyen su propia filosofía y epistemología de las matemáticas". Teniendo en cuenta que la electiva disciplinar que usted va a cursar es "Filosofía y Epistemología de la Matemática y la Educación Matemática" se solicita su valiosa colaboración.

Si usted accede a participar, se le pedirá a lo largo del semestre, además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las entrevistas semiestructuradas serán grabadas en audio y las clases en audio y video, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que ha expresado.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Sus respuestas a los instrumentos y a las entrevistas serán codificadas usando un número de identificación y por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación en él. También, puede retirarse en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parecen incómodas, tiene derecho de informarlo al investigador, incluso puede no responderlas.

Agradecemos su sincera participación.

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE DOCENTES EN FORMACIÓN PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Yo ____ estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño, identificado con el código ________________ acepto participar voluntariamente en el estudio "Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio: consideraciones para proponer y efectuar cambios en los programas de formación", conducido por Grace Judith Vesga Bravo.

Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es "Analizar y describir la manera en que docentes de matemáticas en formación transforman sus creencias epistemológicas acerca de la matemática y su enseñanza cuando construyen su propia filosofía y epistemología de las matemáticas". También me han informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, debo responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez; y que las entrevistas serán grabadas en audio y las clases en audio y video.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Grace Judith Vesga Bravo a través del correo gvesga@uan.edu.co

En constancia firmo a los ____ días del mes de ______________ de 2015.

____

FIRMA

Anexo 2. Consentimiento Informado docentes en servicio

INFORMACIÓN PARA DOCENTES EN SERVICIO
PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Respetado docente, el curso "Recorrido histórico sobre la solución de ecuaciones cuadráticas" está diseñado para enriquecer su experiencia como profesor de matemáticas, y de auto enriquecerse con sus valiosas contribuciones.

Por otra parte, se está adelantando un estudio llamado *"Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio. Consideraciones para proponer y efectuar cambios en los programas de formación"*, es conducido por Grace Judith Vesga Bravo, docente de la Universidad Antonio Nariño y estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la misma Universidad, como parte del desarrollo de su tesis doctoral bajo la dirección de la Dra Mary Falk de Losada.

El objetivo principal del estudio es "Describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática y su enseñanza, y cómo se transforman". Teniendo en cuenta que usted participará del curso "Recorrido histórico sobre la solución de ecuaciones cuadráticas" se solicita su valiosa colaboración en evaluar cómo el curso puede contribuir también a los objetivos del estudio.

Si usted accede a participar, se le pedirá al comienzo y al final del curso responder dos instrumentos y luego presentar una entrevista semiestructurada, los cuales tardarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las entrevistas semiestructuradas serán grabadas en audio y las clases en audio y video, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que ha expresado.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de la investigación descrita. Sus respuestas a los instrumentos y a las entrevistas serán codificadas usando un número de identificación y por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación en él, si lo prefiere puede consultar directamente a la Dra Mary Falk de Losada a través del correo electrónico mariadelosada@gmail.com. También, puede retirarse del estudio en cualquier momento sin que eso perjudique su participación en el curso. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parecen incómodas, tiene derecho de informarlo al investigador, incluso puede optar por no responderlas.

Agradecemos su sincera participación.

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE DOCENTES EN SERVICIO
PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Yo ____ identificado con el cédula de ciudadanía No _________________ acepto participar voluntariamente en el estudio *“Creencias epistemológicas de docentes de matemáticas en formación y en servicio. Consideraciones para proponer y efectuar cambios en los programas de formación”*, conducido por Grace Judith Vesga Bravo, estudiante de doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, bajo la dirección de la Dra Mary Falk de Losada.

Me han informado que el objetivo principal del estudio es “Describir las creencias epistemológicas que tienen docentes de matemáticas en formación y en servicio sobre la matemática y su enseñanza, y cómo se transforman”. También me han informado que al aceptar participar, al inicio y al final del curso “Recorrido histórico sobre la solución de ecuaciones cuadráticas” debo responder dos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez; y que las entrevistas serán grabadas en audio y las clases en audio y video.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas, que puedo preguntar directamente a consultar directamente a la Dra Mary Falk de Losada a través del correo electrónico mariadelosada@gmail.com y, que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Grace Judith Vesga Bravo a través del correo gvesga@uan.edu.co

En constancia firmo a los ____ días del mes de _______________ de 2015.

____
FIRMA

Anexo 3. Entrevistas semiestructuradas docentes en formación

PRIMERA ENTREVISTA

Apreciado estudiante, con base en las respuestas dadas a los instrumentos cerrados, a través de esta entrevista se busca que argumente la manera en que ha formado dichas creencias. Al finalizar se incluyen algunas preguntas generales sobre su motivación hacia la docencia.

I. INDAGACIÓN SOBRE PRIMER INSTRUMENTO (creencias epistemológicas sobre la matemática).

A cerca de la matemática usted considera que (con base en el instrumento cerrado se recuerdan dos de las afirmaciones sobre la fuente con las que más se identificó, ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias)?

Usted también expreso que (con base en el instrumento cerrado se recuerdan tres de las afirmaciones sobre la estabilidad con las que más se identificó), ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias)?

Finalmente sobre las matemáticas usted también señaló que (con base en el instrumento cerrado se recuerdan dos de las afirmaciones sobre la estructura con las que más se identificó), ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias)?

II. INDAGACIÓN SEGUNDO INSTRUMENTO (creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas).

Acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usted se sintió identificado con afirmaciones como (con base en el instrumento cerrado se recuerdan entre tres a cinco de las afirmaciones con las que más se identificó el futuro profesor), ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias.)?

III. PREGUNTAS FINALES

¿Por qué quiere ser profesor de matemáticas?

¿Qué es lo que espera que aprendan sus estudiantes en sus clases de matemáticas?

Finalmente para usted ¿qué relación existe entre la matemática y la enseñanza de la matemática?

SEGUNDA ENTREVISTA

Apreciado estudiante, con base en las respuestas dadas a los instrumentos cerrados en este momento del curso, a través de esta entrevista se busca que explique las razones que lo llevaron a cambiar algunas de sus creencias. Al finalizar se incluyen algunas preguntas generales sobre el posible impacto que ha tenido el curso.

I. INDAGACIÓN SOBRE PRIMER INSTRUMENTO (creencias epistemológicas sobre la matemática).

Se identifican todas las afirmaciones en las que se haya presentado cambio entre la primera y segunda aplicación y se indaga sobre las razones por las cuales considera se produjo

II. INDAGACIÓN SEGUNDO INSTRUMENTO (creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas).

Se identifican todas las afirmaciones en las que se haya presentado cambio entre la primera y segunda aplicación y se indaga sobre las razones por las cuales considera se produjo

III. SOBRE EL CURSO

A partir de su participación en el curso, ¿ha identificado cambios específicos en sus creencias epistemológicas o considera que se han generado dudas sobre las que tenía?

TERCERA ENTREVISTA

Apreciado estudiante, con base en las respuestas dadas a los instrumentos cerrados una vez finalizado el curso, a través de esta entrevista se busca que explique las razones que lo llevaron a cambiar algunas de sus creencias. Al finalizar se incluyen algunas preguntas generales sobre el impacto del curso.

I. INDAGACIÓN SOBRE PRIMER INSTRUMENTO (creencias epistemológicas sobre la matemática).

Se identifican todas las afirmaciones en las que se haya presentado cambio entre la primera y tercera aplicación y se indaga sobre las razones por las cuales considera se produjo

II. INDAGACIÓN SEGUNDO INSTRUMENTO (creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas).

Se identifican todas las afirmaciones en las que se haya presentado cambio entre la primera y tercera aplicación y se indaga sobre las razones por las cuales considera se produjo

III. SOBRE EL CURSO

Considerando que en el curso se pueden identificar tres momentos:

i) Estudio la epistemología de las matemáticas en la escuela griega y medieval (Notas de clase);
ii) Estudio obras de Lakatos, Davis y Hersh;
iii) Desarrollo de talleres con base en conjeturas, y elaboración de propuesta con base en aspectos históricos sobre la ecuación cuadrática

¿Cuál o cuáles le aportaron de manera más significa a su formación matemática? ¿A su formación como futuro docente de matemáticas?

¿El haber participado en el curso indició o cree que incidirá de alguna manera en su práctica docente? Explique

IV. PREGUNTAS COMPLEMENTARIAS

¿Qué es lo más importante que le ha aportado el programa en su formación matemática? ¿En su formación como futuro docente de matemáticas?

¿Quieres compartir algo sobre el impacto del curso en la forma en que concibes tu proyecto de vida profesional?

Anexo 4. Entrevistas semiestructuradas docentes en servicio

Apreciado profesor, con base en las respuestas dadas a los instrumentos cerrados, se busca con esta entrevista que explique las reflexiones personales que lo llevaron a formar sus creencias. Al finalizar se incluyen algunas preguntas sobre su formación, experiencia y motivación hacia la docencia.

I. INDAGACIÓN SOBRE PRIMER INSTRUMENTO (creencias epistemológicas sobre la matemática).

A cerca de la matemática usted considera que (con base en el instrumento cerrado se recuerdan dos de las afirmaciones sobre la fuente con las que más se identificó, ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias)?

Usted también expreso que (con base en el instrumento cerrado se recuerdan tres de las afirmaciones sobre la estabilidad con las que más se identificó), ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias)?

Finalmente sobre las matemáticas usted también señaló que (con base en el instrumento cerrado se recuerdan dos de las afirmaciones sobre la estructura con las que más se identificó), ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias)?

II. INDAGACIÓN SEGUNDO INSTRUMENTO (creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas).

Acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usted se sintió identificado con afirmaciones como (con base en el instrumento cerrado se recuerdan entre tres a cinco de las afirmaciones con las que más se identificó el futuro profesor), ¿por qué cree eso (se busca que informe lo que estaba pensando cuando eligió esas respuestas, de dónde provienen esas creencias.)?

III. INDAGACIÓN POR LA FORMACIÓN, EXPERIENCIA Y MOTIVACIÓN HACIA LA DOCENCIA

1. ¿Por qué decidió ser profesor de matemáticas?
2. ¿En qué universidades ha estudiado, cuál es su formación?
3. ¿Qué es lo que considera fue(es) lo más importante que le aportó (ha aportado) su programa de formación de pregrado y que lo caracteriza actualmente? ¿de posgrado?
4. ¿Qué es lo que considera fue (es) lo más importante que le ha aportado su experiencia docente y que lo caracteriza actualmente?
5. En términos generales, ¿usted cómo desarrolla una clase?
6. ¿Qué es lo que espera que aprendan sus estudiantes en sus clases de matemáticas?
7. La institución en la cual está vinculado actualmente participa tradicionalmente en las olimpiadas matemáticas y ha tenido resultados importantes ¿usted de qué manera ha participado en ese proceso? ¿cuál es la importancia que tiene en su institución y para usted?

SEGUNDA ENTREVISTA

Apreciado profesor, con base en las respuestas dadas a los instrumentos cerrados una vez finalizado el curso, a través de esta entrevista se busca que explique las razones que lo llevaron a cambiar algunas de sus creencias. Al final se incluyen algunas preguntas relacionadas el impacto específico del curso.

I. SOBRE PRIMER INSTRUMENTO (creencias epistemológicas sobre la matemática).

A cerca de la matemática usted cambio su creencia respecto a (Se identifican todas las afirmaciones en las que se haya presentado cambio entre la primera y segunda aplicación) Explique este cambio.

II. INDAGACIÓN SOBRE PRIMER INSTRUMENTO (creencias epistemológicas sobre la matemática).

Acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usted cambio su creencia respecto a (Se identifican todas las afirmaciones en las que se haya presentado cambio entre la primera y segunda aplicación) Explique este cambio.

III. SOBRE EL CURSO

Considerando el recorrido realizado en el curso alrededor de la historia de las ecuaciones cuadráticas, las dificultades que enfrentaron los matemáticos y las posibles consecuencias que ello ha tenido en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas:

1. ¿Cuál o cuáles aspectos del curso le aportaron de manera más significa a su formación matemática? (se busca que señale los aspectos nuevos, desconocidos y la importancia que les da ahora)
2. ¿El haber participado en el curso indició o cree que incidirá de alguna manera en su práctica docente? Explique

Piense en su proceso de formación para ser docente de matemáticas y los cursos de formación complementaria que ha tomado después de su grado

3. ¿En qué se parecen o diferencian del curso realizado?
4. ¿De qué manera cree que incluir en los programas de formación de pregrado un curso con el enfoque del curso realizado puede incidir (ayudar) en el futuro ejercicio profesional?