EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO A TRAVES DE LA HEURISTICA DE LAKATOS EN LA CONSTRUCCION DE DEMOSTRACIONES Y EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar por el grado de Doctor en Educación Matemática

Jader W. Cortes Amaya

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá

2016

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO A TRAVES DE LA HEURISTICA DE LAKATOS EN LA CONSTRUCCION DE DEMOSTRACIONES Y EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

Programa de Doctorado en Educación Matemática

Tesis presentada como requisito para optar el título de Doctor en Educación Matemática

Jader W. Cortes Amaya

DIRECTOR DE TESIS

Mary Falk De Losada

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Bogotá

2016

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C., diciembre 9 de 2016

Agradecimientos

Mi más grande agradecimiento a la Doctora Mary Falk de Losada por sus oportunas y acertadas sugerencias las cuales fueron determinantes para mi formación profesional y personal. Al cuerpo de docente del programa de Doctorado en Educación matemática por sus valiosos aportes para la culminación de la presente investigación, especialmente al doctor Mauro García Pupo y al doctor Gerardo Chacón. A mi madre Rosalba Amaya por su apoyo incondicional y su amor infinito.

Dedicatoria

A Joseph Cortes Pineda mi hijo, quien ha sido

mi fuente de inspiración.

SINTESIS

El presente estudio tuvo como objetivo analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos en la educación matemática. Concretamente, se obtuvieron resultados importantes al considerar dicha heurística junto con la resolución de problemas retadores como metodología en un curso de matemáticas discretas para estudiantes de ingeniería de sistemas y licenciatura en matemáticas. Se lograron resultados en cuanto a la implicación de la heurística en el desarrollo del pensamiento matemático, en la actitud del estudiante, en la construcción de demostraciones matemáticas y como herramienta eficaz para la resolución de problemas.

Por otra parte, la investigación permitió aportar, en el contexto de la educación matemática, al importante debate acerca de si las matemáticas es resolver problemas o demostrar teoremas que considera tanto la postura filosófica de Celucci acerca de la naturaleza de la matemática y la postura científica de Gowers acerca de las dos culturas inmersas en matemáticas, la que prioriza la resolución de problemas y la que privilegia la construcción de teoría, y con ello aclarar el papel que desempeñan y cómo se interrelacionan el entendimiento de teoría, la construcción de demostraciones matemáticas y la resolución de problemas singulares en el ámbito de la educación matemática.

ABSTRACT

This study has as its objective the analysis of the impact of Lakatos' heuristic method in mathematics education. In particular, it offers important results when considering these heuristics used in conjunction with the resolution of challenging problems as the methodology of a course of discrete mathematics for systems engineering students and students studying to be mathematics teachers at the secondary level. Results were achieved with regard to the implication of the heuristics on the development of mathematical thinking, on the student's attitude, on the construction of mathematical proofs and as an effective tool in solving problems.

On the other hand, the study contributes, in the context of mathematics education, to the important debate on whether math is primarily solving problems or primarily proving theorems taking into account the philosophical posture of Celucci concerning the nature of mathematics and the scientific posture of Gowers concerning two cultures in mathematics, that which prioritizes the resolution of problems and that which favors theory building, and discerning the role that they play and how they relate to the understanding of the theory, the construction of mathematical proofs and the resolution of singular problems in the field of mathematics education.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 1
CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE 11
1.1. La enseñanza de la demostración 11
1.1.1. The Use of Logic in Teaching Proof 11
1.1.2. The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives 15
1.1.3. Challenges to the importance of proof 18
1.1.4. Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof 22
1.2. Enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta. 25
1.2.1. Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and modeling. 25
1.2.2. The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses 32
1.2.3. Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States 34
1.2.4. Problem solving with discrete mathematics 38
1.2.5 Teaching Combinatorics through Guided Discovery 44
1.2.6 Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics 48
1.3. Heurística de Lakatos en el aula de clase 51
1.3.1. Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: local counterexample and modification of proof 51
1.3.2. Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom 53
1.3.3. Examining the Method of Proofs and Refutations in Pre-Service Teachers Education 56
1.3.4. Proofs and Refutations as a Model for Defining Limit 58
Conclusiones parciales Capítulo 1 60
CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO 61
2.1. La demostración matemática en el aula de clase 62
2.2. Pruebas y refutaciones. Lakatos 64
2.3. Matemática discreta 69
2.4. Resolución de problemas 73
2.5. ¿Que son las matemáticas? Una perspectiva desde la filosofía y la matemática 78
Conclusiones parciales capítulo 2 83
CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE INVESTIGACION 84
3.1. Escenario 84
3.2. Participantes 84
3.3. Método de investigación 84
3.3.1. Investigación por estudio de casos 87

3.4. Observación y grabación 87
3.4.1. Encuesta número 1........ 88
3.4.2. Encuesta número 2........ 90
3.4.3. Entrevista........ 91
3.5. Diseño del curso de matemática discreta........ 92
3.5.1. Diseño del curso en tres etapas........ 92
3.5.2. Actividades para el Día 1........ 95
3.5.3. Actividades para el Día 2........ 95
3.5.4. Actividades para el Día 3........ 95
Conclusiones parciales Capítulo 3........ 96
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS........ 97
4.1. Etapas de la heurística de Lakatos........ 97
4.1.1. Naive testing (Parte exploratoria)........ 98
4.1.2. Conjeturar........ 100
4.1.3. Contraejemplos........ 101
4.1.4. Demostraciones........ 102
4.2. Actitud de los estudiantes y compromiso hacia la actividad matemática........ 103
4.2.1 Estudiante 1........ 105
4.2.2. Estudiante 2........ 105
4.2.3. Estudiante 3........ 106
4.2.4. Estudiante 4........ 107
4.2.5. Estudiante 5........ 107
4.2.6. Estudiante 6........ 108
4.2.7. Consideración final........ 108
4.3. Desarrollo del pensamiento matemático........ 108
4.3.1. Estudiante 1........ 108
4.3.2. Estudiante 5........ 111
4.3.3. Estudiante 3........ 111
4.3.4. Estudiante 2........ 112
4.3.5. Estudiante 4........ 114
4.3.6. Estudiante 6........ 115
4.3.7. El punto número 3 de la encuesta........ 115
4.4. Demostraciones matemáticas........ 116
4.4.1. Preguntas 4 y 5 de la encuesta........ 116
4.4.2. Pregunta número 7 de la entrevista........ 117
4.5. Heurística de Lakatos y problemas reto........ 118
4.5.1 Análisis de la Heurística de Lakatos y la resolución de problemas........ 120

4.5.2 Resolución de problemas y el entendimiento teórico 121
4.6. Impacto que genera el método heurístico de Lakatos cuando se utiliza para abordar la demostración. 124
4.6.1 Análisis de la heurística de Lakatos en el entendimiento de la demostración.................................. 125
4.7. ¿Qué son las matemáticas? Una perspectiva desde la educación matemática. 128
Conclusiones parciales Capítulo 4 135
CONCLUSIONES 137
RECOMENDACIONES 142
BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS 143
ANEXOS 147
Anexo1. Consentimiento informado estudiantes 147
Anexo 2. Primera Encuesta 149
Anexo 3. Encuesta 2 151
Anexo 4. Entrevista 152
Anexo 5. Diseño del curso de matemáticas discretas.. 153

INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se consideran centrales las teorías e investigaciones que colocan la resolución de problemas como factor importante dentro del quehacer del matemático, asignando un papel subordinado a aspectos más memorísticos o mecánicos que tradicionalmente han dominado en el salón de clase, considerando que éstos se deben abordar y aprender en el contexto de la resolución de problemas y no como fines en sí mismos. Por ejemplo, el algoritmo de la adición por sí solo puede ser efectuado por una calculadora o computador sin mayor esfuerzo del usuario, pero en el proceso de solución de problemas retadores e interesantes puede suceder que no sólo se ejercita el algoritmo, sino que se buscan y obtienen otros beneficios como analizar, generar estrategias, motivar a pensar, y por ende desarrollar el pensamiento matemático.

Por otra parte, se considera el papel de la demostración en el aprendizaje de la matemática. Se ha evidenciado la gran dificultad que acarrea llevar un proceso de demostración en los estudiantes que aprenden matemáticas; esta dificultad se debe no sólo a la complejidad implícita del proceso sino también a la manera como está constituido el currículo y como el docente aborda la situación de enseñanza. Balacheff afirma al respecto: "¿Cómo se enseña la demostración? Generalmente se hacen demostraciones delante de los estudiantes y luego se les pide hacer lo mismo."[1]

La presente investigación relaciona estos dos aspectos, la resolución de problemas y la demostración, relación que se logra a través de la teoría propuesta por Lakatos, el método heurístico descrito en su obra *Pruebas y refutaciones*. Se resalta la manera en que Lakatos hace notar la forma cómo se construye, se justifica y evoluciona la matemática. Es evidente que su obra tiene implicaciones didácticas; son estas implicaciones las que motivan al autor de esta tesis hacia una investigación que tiene como objetivo analizar la influencia que tiene el método de pruebas y refutaciones sobre el desarrollo del pensamiento

[1] Balacheff, N. (2000). Procesos de demostración en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

matemático, la resolución de problemas y la construcción de demostraciones formales. La investigación se llevará a cabo con estudiantes de licenciatura en matemáticas que se encuentran entre el sexto y octavo semestre y otros estudiantes inscritos en un curso de matemáticas discretas, y para ello se desarrollará un curso completo con un diseño preciso.

Dos aspectos importantes a tener en cuenta en la investigación son el análisis de la relación entre resolución de problemas, el método de pruebas y refutaciones, y el desarrollo del pensamiento matemático, por una parte, y el análisis de la influencia del método de Lakatos en la construcción de una demostración.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: una introducción, un capítulo 1. Estado del arte, un capítulo 2. Marco teórico, un capítulo 3. Modelación y diseño de actividades, un capítulo 4. Análisis y valoración de los resultados, Conclusiones, Recomendaciones, Bibliografía y referencias y Anexos

Justificación

"Existe evidencia en la literatura de educación matemática que el método de pruebas y refutaciones de Lakatos puede ser útil para examinar la producción de conjeturas de los estudiantes y los procesos de construcción de la demostración"[2]. Atkins (1997) por otra parte afirma que el método de pruebas y refutaciones proporciona una estrategia motivadora para involucrar a los estudiantes en la solución de problemas creando un ambiente en el cual los estudiantes razonan matemáticamente, comunican matemáticamente, y hacen conexiones matemáticas[3].

Godino (1997) afirma que "el interés por la enseñanza de la demostración parece justificado por el papel esencial de los procesos de validación en la propia matemática, y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones". Desde la experiencia del autor de la

[2] Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre-service teacher's education. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(45), 215-232.

[3] Atkins, S. L.(1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. School Science and Mathematics, Corvallis, v. 97, n. 3, p. 150-154, Mar. 1997.

presente tesis, tanto en la etapa de estudiante como la de docente de matemáticas, se considera que la construcción de una demostración es una de las tareas más difíciles de llevar a cabo y que esto se debe en buena parte a los procesos cognitivos involucrados, como es el de generalizar y el de abstraer, los cuales considera Tall (1991) pertenecen al pensamiento matemático avanzado.

Varios autores declaran la importancia de vincular la demostración matemática en el currículo, (Balacheff, 1987; Hanna, 2000; Godino, 1997), y el tema sigue siendo de actual importancia en la comunidad de educación matemática. Por ejemplo, se ha abordado en importantes eventos y congresos, tal como en el reciente Estudio ICMI (2009) cuya conferencia tuvo lugar en la ciudad de Taipen (Taiwán) y cuyo título es "Proof and Proving in Mathematics Education". La apreciación del propósito o función de la demostración en el aula de clase difiere entre distintos autores. Gila Hanna es enfática en el rol que desempeña la demostración como un vehículo que promueve la comprensión matemática en los estudiantes. Nicolás Balacheff por otra parte se centra en la demostración como un tema esencial y especifico de la matemática y asegura que la mayoría de estudiantes fracasa en la construcción de una demostración. Por otro lado, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) en su publicación *Principles and Standards for School Mathematics* reconoce el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, allí se afirma que desde muy temprana edad los estudiantes deben entender la importancia de justificar cualquier afirmación matemática además de discernir qué argumentos son adecuados y aceptados desde un punto de vista científico.

Es importante resaltar algunos aspectos claves sobre la enseñanza de la demostración. El primero es que existe una preocupación de la comunidad científica en investigar más profundamente el tema. Hanna (2007) argumenta que el rol de la demostración a nivel secundario está perdiendo su importancia y por consiguiente es necesario encontrar diferentes maneras de ayudar a los estudiantes a mejorar sus habilidades y la comprensión que ellos necesitan. En vía contraria a Hanna, hay un acuerdo entre algunos educadores matemáticos en asegurar que la demostración en la escuela aparece únicamente en el estudio de la geometría euclidiana. Y, por otra parte, en ocasiones las metodologías de enseñanza obstaculizan el avance hacia un adecuado y correcto aprendizaje de la demostración. Por ejemplo, como lo anota Balacheff, son muchos los docentes que se han limitado a presentar una demostración formal en el tablero con el propósito de que sus estudiantes imiten el procedimiento. Esto no permite que el estudiante explore, conjeture y descubra, sino es un modelo que se torna difícil de comprender, que pretende tratar la demostración como si fuera un proceso sistemático, y que se aleja del objetivo de desarrollar el pensamiento matemático del estudiante.

La presente investigación tiene como uno de sus propósitos analizar el proceso de demostrar del estudiante, y una de las hipótesis es que este proceso se mejora ostensiblemente a través de la heurística de Lakatos expuesta en *Pruebas y refutaciones*, la cual contribuye a establecer modelos para la enseñanza de la demostración, el cual a su vez es, como anteriormente se afirmó, un aspecto fundamental de interés para la comunidad de educadores matemáticos.

Ahora bien, otra hipótesis referente a la función de la heurística de *Pruebas y refutaciones* es que se puede ampliarla al campo de la resolución de problemas. La resolución de problemas es una, sino es la más, importante actividad para el desarrollo del pensamiento matemático. El NCTM (2000) afirma que “la resolución de problemas es una parte integral del aprendizaje de las matemáticas”, y agrega que la solución de problemas tiene dos funciones en la educación, el primero es ser un vehículo para el aprendizaje y la construcción de conceptos más robustos y el segundo funciona como una herramienta para motivar y comprometer a los estudiantes en el estudio de la matemática. Halmos (1980) escribió que la solución de problemas es el corazón de las matemáticas.

Wong Khonn Yoong (2009) muestra cómo está organizada y pensada el aprendizaje de la matemática en Singapur, un país con altos estándares de calidad en educación y particularmente con resultados entre los más altos en pruebas internacionales reconocidas como es el Programa Internacional para la

Evaluación de Estudiantes (PISA). La estructura general se muestra a través de un pentágono que organiza y relaciona los aspectos considerados los más importantes en el aprendizaje de las matemáticas como se muestra en la Figura 1. El pentágono tiene en su centro la solución de problemas matemáticos rodeada por cinco factores interrelacionados que contribuyen al éxito en la solución de problemas.

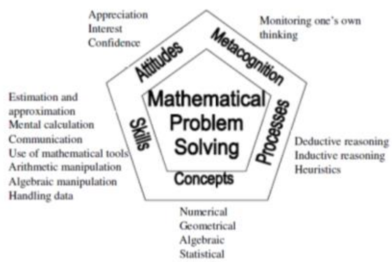


Figura 1. Pentágono actividad matemática Singapur[4]

Polya (1973) asevera que la resolución de problemas es una herramienta para llamar la atención de los estudiantes hacia el estudio de la matemática, y afirma que frente a "cualquier problema por modesto que parezca, si desafía tu intelecto e ingenio y lo logras solucionar, experimentarás la tensión y disfrutarás la victoria del descubrimiento". Shoenfeld (1985) atraído por el libro de Polya *How to solve it*, emprende una investigación que pretende responder a dos cuestiones principales: "¿qué significa pensar matemáticamente? y ¿cómo podemos ayudar a los estudiantes a hacerlo? La investigación fue publicada en el libro *Mathematical problem solving* en el que analiza y describe el comportamiento intelectual en la solución de problemas. Se resalta el hecho de la importancia dada por Shoenfeld a la resolución de problemas, la cual lo dirigió a investigar sobre la actividad intelectual implicada en la resolución de problemas complementando las ideas de Polya.

[4] Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). *Mathematics education*: The Singapore journey (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing

La presente investigación tiene como uno de sus propósitos analizar la incidencia de la heurística de Lakatos en la resolución de problemas para responder a la pregunta ¿cuáles son el aporte, las fortalezas y las debilidades de dicha heurística?

El último punto a tener en cuenta en este aparte es el rol que desempeña la matemática discreta en la presente investigación. En primera instancia, el contenido de la asignatura como tal es de aplicación en diferentes ramas del conocimiento como la biología, química, economía, ingeniería de transporte, sistemas e informática, entre otras muchas. Además diferentes autores indican la importancia de investigar acerca de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta (Hart, 2008; Ian Anderson (2004); Debellis Valerie, Rosentein, (2004); Rivera Marerro, (2007)), la cual cubre una temática que proporciona problemas con dos principales características: por una parte, son retadores, interesantes y motivan al estudiante a comprometerse intelectualmente con la matemática; y por otra parte muchos de estos problemas, aunque conserven la característica retadora, no necesitan conocimientos sofisticados para abordarlos. Ahora bien, los problemas de la matemática discreta son apropiados para que el estudiante explore, analice, conjeture y demuestre, tal como lo muestran Denise Grenier y Charles Payan (1999) a través del planteamiento de cuatro problemas de la matemática discreta. En el Capítulo 2 del presente escrito se muestra el desarrollo de dos de los problemas con el fin de visualizar mejor la cualidad anteriormente nombrada.

Problema de investigación

La mayoría de las veces en las matemáticas el producto final de una construcción social e histórica se resume en una demostración. Lakatos muestra y analiza el proceso que está detrás de una demostración formal, a saber, una construcción que implica en ocasiones décadas o siglos para llegar al producto final, hecho que el estudiante ignora ya que la misma presentación de los textos pretende centrarse en un resultado decantado.

Este proceso heurístico que Lakatos llama “pruebas y refutaciones” en el aula se desconoce casi totalmente, y quizás sea por medio de éste que se propicie situaciones que pueden aportar al pensamiento matemático del estudiante y conducirlo a experimentar procesos de construcción de conocimiento análogos a los de los investigadores matemáticos.

Es importante resaltar que en las demostraciones no se sigue sistemáticamente un camino; al contrario, se trata de una total exploración del estudiante de una determinada conjetura. Con ello es posible, dentro de las hipótesis de la presente investigación, que se conduzca al estudiante al desarrollo del pensamiento matemático y le permita una mejor comprensión de los conceptos inmersos en la conjetura.

No se desea presentar un cuadro formal de demostraciones pues lo que se desea es dejar de lado la enseñanza tradicional. El propósito es crear un ambiente de debate social entre estudiantes con una prudente participación del docente, debate cuyo desenlace será la responsabilidad de los estudiantes: la conjetura, el contraejemplo, la demostración, así como el idear lo que Lakatos denomina contraejemplos globales. Estos son algunos de los ingredientes necesarios en dicho debate.

Por otra parte, las apreciaciones de autores reconocidos acerca de la demostración justifican el porqué del rumbo de la presente investigación. Balacheff (1987) considera que la demostración debe ocupar un lugar importante en los currículos de Francia. Análogamente Juan Godino (1997) asevera que este interés por la enseñanza de la demostración parece justificado por el papel esencial de las situaciones y procesos de validación en la propia matemática y el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de ella. Por otra parte, Gila Hanna (1995) afirma que la demostración merece un lugar importante en el currículo de matemáticas. Todo lo anterior lleva a la formulación del siguiente **problema de investigación**: **¿Cómo aporta el método heurístico de “pruebas y refutaciones” de Lakatos al desarrollo del pensamiento matemático, a la solución de problemas y a la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes en la disciplina matemática discreta?**

Preguntas de investigación

- ¿Cómo aporta el método heurístico de "Pruebas y refutaciones" de Lakatos al desarrollo del pensamiento matemático y a la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes?
- ¿Cuál es la percepción emocional y actitudinal de los estudiantes con respecto a la clase desarrollada a través de los planteamientos de Lakatos?
- ¿Cuál es el aporte del método heurístico de Lakatos en la resolución de problemas?

Objeto de investigación

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.

Objetivo general

Explorar, a través de un curso completo de matemática discreta a nivel superior, la repercusión del método heurístico descrito por Lakatos en *Pruebas y refutaciones* en el desarrollo del pensamiento matemático, en la solución de problemas y en la construcción de demostraciones por parte de los estudiantes, lo cual se condensa en la construcción de un modelo didáctico para la enseñanza de la matemática discreta. Este objetivo direcciona la atención al siguiente:

Campo de acción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta en la universidad en relación con el desarrollo del pensamiento matemático, la solución de problemas y la construcción de demostraciones.

Objetivos específicos

- Analizar el impacto que genera el método heurístico de Lakatos cuando se utiliza para abordar la demostración de una conjetura o la justificación de una solución a un problema significativo.
- Explorar la actitud del estudiante cuando las clases se desarrollan bajo esta perspectiva.
- Analizar profundamente cómo la heurística de Lakatos funciona como una herramienta práctica para la resolución de problemas de matemática discreta.

- Examinar cómo la heurística de Lakatos se convierte en un vehículo eficaz para el entendimiento significativo de una demostración en la matemática discreta.
- Observar de qué manera la heurística de Lakatos fomenta el trabajo autónomo y el compromiso de los estudiantes hacia la actividad matemática

Aporte práctico de la investigación

Diseño de un curso completo de matemática discreta para estudiantes universitarios.

Aporte teórico de la investigación

Análisis de las posiciones de Timothy Gowers y Carlo Cellucci, que enfrentan dos vertientes de la actividad matemática y de la naturaleza de la misma, la de resolver problemas y la de construir teoría (demostrar teoremas) desde la perspectiva de la educación matemática.

Tareas de investigación

Para cumplir los objetivos de la tesis se identificaron y cumplieron las siguientes tareas.

1. Se profundizaron y complementaron los fundamentos teóricos que forman la base de la presente investigación.
2. Se efectuó la búsqueda y análisis de diversas publicaciones e investigaciones que aborden algún aspecto de la presente investigación.
3. Se diseñó e implementó un modelo didáctico; así como, un primer curso de matemáticas discreta dirigido a estudiantes universitarios.
4. Se realizó el diseño de una primera encuesta dirigida a estudiantes de la licenciatura en matemáticas y de ingeniería.
5. Se recogieron datos a través de la grabación en video y un diario de campo del curso de matemática discreta.
6. Se diseñó y realizó una segunda encuesta a estudiantes con el propósito de recolectar datos para analizar la metodología empleada en el curso.

7. Se diseñó, aplicó y analizó los resultados de una segunda entrevista a los estudiantes con el propósito de recolectar datos para analizar la metodología empleada en el curso.
8. Se replanteó, rediseñó e implementó el curso de matemática discreta de acuerdo al modelo didáctico planteado.
9. Se analizó los resultados obtenidos durante toda la investigación.

Resultados esperados

Como en varias ocasiones se ha comentado, existen problemáticas con respecto al aprendizaje y enseñanza de la demostración, a la motivación de los estudiantes y al desconocimiento de las características particulares de los contenidos y los problemas de la matemática discreta. Por lo anterior se espera:

- Obtener información de cómo la heurística de Lakatos mejora el proceso de la construcción de demostraciones matemáticas.
- Contribuir un modelo didáctico que mejore el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta en la educación superior.
- Mejorar el aspecto actitudinal de los estudiantes hacia la matemática por medio de la resolución de problemas retadores.
- Aportar al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante específicamente como un mejor resolutor de problemas.
- Obtener información de la heurística de Lakatos como herramienta eficaz en la resolución de problemas.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

A continuación se analizan diferentes publicaciones que permiten ver puntos de vista e investigaciones acerca de la problemática planteada en el presente estudio y que incluyen:

- La enseñanza de la demostración.
- La heurística de Lakatos como herramienta para la enseñanza de la demostración.
- La resolución de problema como generador del pensamiento matemático.
- La enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.

1.1. La enseñanza de la demostración.

Mejorar en la construcción de la demostración es uno de los objetivos del presente trabajo de investigación. La heurística de Lakatos es la principal herramienta y la hipótesis es que a través de ella el estudiante mejore en dicho proceso. A continuación se presenta el resultado de la búsqueda de diferentes publicaciones acerca de la enseñanza de la demostración que colindan con la presente investigación y permiten delimitarla.

1.1.1. The Use of Logic in Teaching Proof[5]

Este artículo, en términos generales, desarrolla ideas y da sugerencias específicas de cómo llevar al aula de clase la enseñanza de la demostración. El artículo se divide en tres subtemas, a saber: la importancia de los principios lógicos en la enseñanza de la demostración; escribir y re-escribir demostraciones y la importancia de ser cuidadoso al escribirlas; sugerencias para inducir al estudiante a demostrar; es decir, que sienta la necesidad de hacerlo. A continuación, se analizan dichas sugerencias contrastándolas con la propuesta que el autor ha planteado en el presente trabajo de investigación.

---

[5] Epp, S. S. (2009). The use of logic in teaching proof. Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles, (74), 313.

En primer lugar, en el artículo se afirma que los estudiantes no tienen bases fuertes en lógica las cuales se requieren en cursos donde se demandan demostraciones escritas, y por ende es necesario enseñar principios lógicos fundamentales como los tipos de demostración, su estructura y sus diferencias: demostración directa, demostración por contrarrecíproco, por contradicción y por contraejemplo. El artículo sugiere el uso de rompecabezas para fomentar y entender la demostración por contradicción.

Es claro que es importante que el estudiante haya interiorizado y tenga dominio de los principios lógicos a la hora de escribir una demostración, sin embargo, el artículo los describe como algoritmos que el estudiante debe aprender para tal propósito. Por ejemplo, en él se sugiere que en las demostraciones de la forma *para todo x en un cierto conjunto, si [hipótesis] entonces [conclusión],* describe los pasos que se deben seguir, primero elegir un x arbitrario del conjunto y segundo mostrar que ese x hace que la conclusión sea verdadera.

Otra idea que se desarrolla en el artículo es el uso de las definiciones y lo menciona debido a su rol importante en el desarrollo de demostraciones. El autor afirma que, dada una nueva definición, los estudiantes necesitan experimentar con un amplio rango de ejemplos que incluyan objetos que cumplan y que no cumplan con la definición dada. Para la presente tesis se considera mucho más enriquecedora la noción de Tall y Vinner [6] de la imagen del concepto, la cual se define como la estructura mental total que una persona tiene de un determinado concepto. La imagen del concepto es susceptible a ser siempre mejorada, pero generalmente permanece incompleta. Se sostiene en la presente tesis que lo que mejora sustancialmente dicha imagen son problemas retadores que requieran el uso del concepto en la respectiva solución.

[6] Tall, David O. And Shlomo Vinner (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981) 151–169.

En tercer lugar, el artículo desarrolla ideas acerca del proceso de escribir demostraciones asegurando que es un proceso bastante difícil de llevar a cabo por los estudiantes. Se dan algunas sugerencias concretas, como por ejemplo pedir a los estudiantes que completen pedazos en blanco de una demostración, pedir que muestren sus demostraciones con el fin de examinar si se han escrito afirmaciones coherentes, e identificar tipos de errores comunes. Cambell y Baker[7] desarrollan actividades en las cuales se proporcionan diferentes demostraciones de una conjetura determinada y proponen que por grupos los estudiantes analicen dichas demostraciones identificando los errores que contienen o aceptándolas como válidas. Cambell reporta que esta actividad ayuda a los estudiantes no solamente a reconocer errores lógicos en la demostración sino a reconocer que un teorema se puede demostrar de diferentes maneras.

Richard L. Morrow propone otra estrategia con el fin de involucrar a los estudiantes en los procesos de desarrollar una demostración. Ésta se desarrolla en el tablero, pero son los estudiantes quienes construyen cada paso. Afirma que se realiza de esta manera con el fin de que se pueda demostrar el valor de un diagrama antes de escribir la demostración, mostrar el valor de obtener un punto de vista holista de la situación y mostrar que las demostraciones no necesitan ser perfectas y elegantes. Morrow enfatiza situaciones que el autor de esta tesis considera importantes, como por ejemplo construir un diagrama o apreciar el valor de una visión holista antes de realizar una demostración; éstos son puntos esenciales inmersos en del proceso informal de la construcción de la demostración.

Hasta este punto, se observa que la dirección principal en la que el artículo se encamina es hacia la escritura de una demostración y en especial sobre los pasos lógicos que el estudiante escribe en la demostración. Sugerencias como la de escribir una demostración de un estudiante en el tablero para

[7] Baker, Diane and Connie Campbell (2004). Fostering the Development of Mathematical Thinking: Observations from a Proofs Course, PRIMUS 14, 345–353.

analizarla y evitar así errores en el futuro, de considerar maneras alternativas de expresar los pasos de una demostración, y de escribir y re-escribir una demostración hasta que sea correcta son muestras del objetivo que el artículo persigue

Un último aspecto a considerar en el artículo es la necesidad de la demostración. En muchas ocasiones se le pide al estudiante demostrar determinada afirmación, pero sin que él sienta la necesidad de hacerlo más que por la exigencia de su docente. Algunos consejos importantes del documento que se tendrán en cuenta en el presente trabajo de investigación se resumen en que la exploración y la experimentación son herramientas para sentir la necesidad de generar conjeturas y demostrar o refutarlas, y por ende, no trabajar teoremas ya presentados como verdaderos, esto con el fin de que el estudiante se vea forzado a dar justificaciones coherentes o demostraciones completas a sus compañeros con el fin de validar sus afirmaciones.

Ahora bien, el autor del presente trabajo de investigación desea ir más allá de que el estudiante reconozca y tenga conocimiento de los pasos a seguir en una demostración ya sea directa, por el contrarrecíproco, por contradicción, entre otros. Para llegar a escribir una demostración, Lakatos describe toda una heurística, todo un proceso, toda una construcción social de los alcances y límites de una proposición, y se considera que es esta parte informal la esencial en la construcción de la demostración. Cada conjetura es una oportunidad para que se lleve a cabo la heurística de Lakatos y que a su vez esto implique el desarrollo del pensamiento matemático.

El artículo es muy concreto en proporcionar sugerencias para llevar al aula de clase las cuales se considera sean valiosas pero que se quedan cortas con el objetivo que se ha planteado en la presente investigación. Las estrategias a seguir para llegar a una demostración en general no son sistemáticas, sino variadas y definitivamente requieren de esfuerzo, dedicación e ingenio. Ideas novedosas e insight deben surgir en muchas ocasiones para lograr el objetivo de llegar a demostrar y en este punto se considera que es fundamental que el estudiante explore, proponga, ejemplifique, visualice la conjetura, proponga una justificación coherente pero informal, la comparta con sus compañeros, se debata, se busquen contraejemplos globales y locales, se refine y finalmente se escriba y re-escriba formalmente.

El objetivo de la presente tesis no se enfatiza en cómo escribir una demostración o si los reglones están dados de acuerdo a los principios lógicos, que es claro es una parte para tener en cuenta, pero como objetivo posterior, sino en primera instancia se enfatiza en cómo construir una demostración, objetivo que está estrechamente relacionado con la resolución de problemas, con la experimentación y la exploración, y con el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Como conclusión del análisis del artículo, se considera que hay aportes valiosos para la presente tesis; no obstante, los objetivos que el artículo plantea son limitados con respecto al trabajo que se puede y se debe plantear al estudiante a partir de la construcción de la demostración, como son mejorar como resolutor de problemas y desarrollar el pensamiento matemático.

1.1.2. The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives [8]

El 19th ICMI Study se elaboró con base en una conferencia del mismo nombre que tuvo lugar en mayo del 2009 en Taipei, Taiwán, y cuyo principal tema fue "la demostración en la educación matemática". Diferentes autores reconocidos internacionalmente fueron partícipes en este evento.

Dentro de las contribuciones realizadas a este estudio, Orit Zaslavsky y otros enfocan su publicación hacia tres cuestiones: ¿por qué enseñar la demostración?, ¿cuáles son los aspectos que el estudiante considera importantes por los cuales se debe llevar a cabo una demostración? y ¿cómo puede el docente promover que el estudiante sienta la necesidad de llevar a cabo una demostración?

[8] Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & Winicki, G. (in press). *The need for proof and Proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.

En primer lugar, se analiza y examina las funciones y el rol de la demostración en la matemática misma, que es un primer aspecto que influye en el papel que debe desempeñar en el aula de clase.

La demostración dentro de la matemática tiene diferentes funciones, como validar una afirmación matemática o sistematizar resultados, además de una función explicativa. Esta última se puede considerar como un aspecto importante no sólo dentro de la matemática misma sino también dentro de la educación matemática. Una manera muy deficiente en que se ha enseñado la demostración es intentar que los estudiantes la repliquen teniendo como base lo realizada por el profesor en el tablero (Balacheff, 1987). No obstante, Zaslavsky afirma que la demostración tiene un poder explicativo, y en ese orden de ideas un rol de la demostración es el de "explicar el por qué" una afirmación matemática es válida. Por lo tanto, la demostración debe ser una herramienta que propicie el entendimiento matemático (Hanna 1995), y este entendimiento involucra no sólo el significado del teorema sino muchos otros conceptos involucrados en la demostración matemática. El entendimiento es un objetivo importante en la actividad matemática, sin embargo, una meta de la presente investigación es el de analizar de qué manera el demostrar en matemáticas contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, un objetivo que va más allá del entendimiento matemático.

Zaslavsky afirma por otra parte que, si el único rol de la demostración es validar una afirmación, como algunos pueden pensar, entonces no existirían múltiples demostraciones para un mismo teorema. Asevera que los matemáticos generan diferentes tipos de demostración para mostrar el poder de otros métodos o para descubrir nuevas técnicas. Por lo tanto, la demostración tiene una nueva función, la de proporcionarle al estudiante nuevos métodos para la resolución de problemas.

Ahora bien, uno de los puntos que más destaca el autor es que frecuentemente el estudiante no le ve significado a la tarea de realizar demostraciones matemáticas, de realizar una demostración exclusivamente como un ejercicio pedido por el profesor, de modo que no hay un compromiso intelectual o el estudiante no ve la necesidad de llevarla a cabo.

Desde un punto histórico, ¿cuáles fueron las necesidades que sintieron los matemáticos para realizar demostraciones? El autor afirma que, por ejemplo, los griegos observaron en los trabajos de sus antepasados inconsistencias, y con el fin de subsanar tales inconsistencias se empezó a sentir la necesidad de la construcción de una demostración, y por otra parte las paradojas desempeñaron un papel importante en hacer sentir la necesidad de demostrar.

En este punto Zaslavsky muestra una dificultad en la enseñanza de la demostración en el aula de clase, y por consiguiente es fundamental repensar situaciones en las cuales el estudiante tenga la necesidad intelectual de construir una demostración. El autor señala cinco categorías de necesidad intelectual: "for certainty, for causality, for computation, for communication and for structure". Zaslavsky, en resumen, señala que el estudiante debe sentir la necesidad de realizar una demostración no porque el profesor lo haya sugerido, sino por motivaciones más personales; éste es un aspecto a tener en cuenta en la presente investigación. Es importante que el tipo de problemas o conjeturas que surjan en el aula de clase tengan una función motivadora y sean una herramienta que conlleve a la necesidad de construir una demostración, teniendo en cuenta el aspecto social de la demostración, que según la heurística de Lakatos, es una herramienta más que impulsa la necesidad de la misma.

Ahora bien, los autores describen dos perspectivas desde las cuales el docente se puede apoyar con el fin de desarrollar esa necesidad intelectual en los estudiantes, la incertidumbre y el conflicto cognitivo, y así lograr el aprendizaje basado en la investigación. El conflicto cognitivo que Zaslavsky sugiere tiene correspondencia con la teoría de equilibración de Piaget, en la cual el razonamiento cognitivo se ve alterado por contradicciones, por ejemplo, una situación en la cual exista la demostración de una conjetura y al mismo tiempo un contraejemplo. Este conflicto cognitivo tiene la función de crear en el estudiante la necesidad de demostrar, es una perspectiva que en el presente trabajo se considera la heurística de Lakatos debe y puede proporcionar.

Por otra parte, *inquiry-based learning* es una perspectiva en la cual el estudiante explora, refuta, investiga, conjetura, etc., es una idea totalmente coherente con la heurística de Lakatos llevada al aula de clase, aspecto que la presente investigación considera fundamental.

El autor de la presente tesis considera que la demostración como herramienta que proporciona nuevos métodos de resolución de problemas es un punto de vista importante. No obstante, el enfoque que el autor del artículo le da a esta nueva función de la demostración, a saber, que por medio de una demostración ya establecida, como por ejemplo obtener la fórmula cuadrática completando al cuadrado, el estudiante adquiere una nueva técnica para reproducirla de nuevo en la solución de otro nuevo problema, es un enfoque que debe ser enriquecido en el sentido siguiente. Dada una conjetura, el estudiante por medio de la exploración sea quien construya nuevas estrategias eficaces para la resolución de problemas. Es decir, la demostración, al mismo tiempo que proporcione nuevas técnicas para la resolución de problemas, por otra parte, motive y desarrolle el pensamiento.

1.1.3. Challenges to the importance of proof[9]

¿Dónde ubicamos la demostración en el currículo de matemáticas? ¿Qué papel debe desempeñar la demostración en el currículo? ¿Cómo se debe presentar la demostración a los estudiantes?, ¿de manera formal, informal, visual, etc.? ¿Qué rol debe desempeñar el docente en la enseñanza de la demostración? Son algunas cuestiones que se presentan en este artículo de Gila Hanna. En primer lugar, Hanna afirma que es innegable que la demostración debe ser parte del currículo de matemáticas, pero con una función que vaya más allá de simplemente justificar o validar un teorema. Esa es la función que cumple en las

[9] Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), pp. 42-49

matemáticas mismas, pero no debe ser así para la educación matemática. Hanna asegura que la demostración debe constituirse en una herramienta para el objetivo principal que es la comprensión matemática. En la presente investigación se complementaría esta afirmación en el sentido que también debe ser objetivo principal desarrollar el pensamiento matemático del estudiante y que la demostración debe también promover el pensamiento matemático.

La autora argumenta que la importancia del rigor debe ser secundaria en importancia a la comprensión, que si la demostración formal no contribuye a la comprensión de las matemáticas sino únicamente a encadenar definiciones, axiomas y teoremas de manera abstracta, entonces ella no aporta en absoluto a los objetivos de la educación matemática. Es importante aclarar que Hanna no rechaza la demostración formal, sino propone que en ocasiones no va a constituirse en herramienta idónea para el objetivo principal de la educación matemática que la autora plantea: la comprensión matemática.

Respecto al rol que desempeña el docente, Hanna asegura que éste deber tener una intervención activa en la enseñanza de la demostración, el docente se convierte en un moderador de los argumentos matemáticos que presentan los estudiantes, debe enseñar la estructura de la demostración y distinguir entre argumentos válidos y no válidos, "*Se sugiere un rol crucial del profesor, ayudar a los estudiantes a identificar la estructura de una demostración, a presentar argumentos y a distinguir entre argumentos correctos e incorrectos (traducido del inglés)*[10].

La autora señala que el docente no debe tomar un rol tan pasivo como quizás la teoría constructivista de aprendizaje lo propone, y que es importante la interacción entre estudiantes, pero con una participación activa del profesor ya que es demasiado esperar que sólo con la interacción entre estudiantes éstos

[10] Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), pp. 42-49

lleguen a descubrir o redescubrir métodos sofisticados de demostración en matemáticas. Por lo tanto, es necesario enseñarlos.

Hanna escribe acerca de la influencia que la teoría de Lakatos ha tenido sobre la educación matemática y particularmente sobre la demostración matemática, afirmando en primer lugar que quizás la teoría de Lakatos ha influenciado a muchos educadores matemáticos a rechazar totalmente la demostración formal, no porque esa fuese la intensión de Lakatos, sino por diferentes interpretaciones que se la ha dado a la obra *Pruebas y refutaciones.*

Al respecto del método heurístico de Lakatos, Hanna cuestiona algunos aspectos, en particular, si el método de Lakatos es aplicable de forma general. Es decir, Hanna señala que *Pruebas y refutaciones* está dirigido a una única situación que es la conjetura de Euler de los poliedros, pero que quizás en otras conjeturas o situaciones no es aplicable o apropiado el método de Lakatos. Además, afirma que algunas demostraciones se descubren de manera diferente a las ilustradas por Lakatos, y aun asevera que no es posible usar el método de Lakatos en un tema como el álgebra abstracta donde la teoría está totalmente axiomatizada. El mismo Lakatos, citado por Hanna, afirma:

"*No todas las teorías matemáticas están en igual peligro de la heurística e refutaciones en un período dado. Por ejemplo, la teoría de grupo elemental está apenas en peligro, en este caso la teoría informal original ha sido tan radicalmente reemplazada por la teoría axiomática que la heurística de refutaciones parece ser inconcebible "(Traducido del inglés)*[11].

Luego cabe formular algunos interrogantes. ¿Cuándo es apropiado o viable el método de Lakatos para demostrar una conjetura? ¿Qué características debe tener la conjetura para que se pueda aplicar el

[11] Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), pp. 42-49

método y cuáles para que no sea concebible? ¿O quizás sea posible generalizar el método para cualquier conjetura? ¿Qué otras reglas heurísticas se podrían agregar al método para que sea más general?

Hanna plantea importantes cuestiones sobre la teoría de Lakatos, pues reclama de nuevo que lo formal es importante en la educación matemática. En este aspecto el autor de la presente investigación se encuentra en acuerdo, lo formal no se puede dejar a un lado. De hecho, se deben seguir reglas de la lógica establecidas para estructurar correctamente una demostración, y se debe enseñar métodos de demostración ya establecidos. La cuestión pertinente es ¿cómo se debe hacerlo?

Igualmente, el autor de la presente investigación considera que debe existir una relación entre el método no formal planteado por Lakatos y la posición de la escuela formalista, no son ideas opuestas como quizás algunos educadores matemáticos las ha considerado. Considera además que lo formal hace parte del método heurístico de Lakatos en el sentido de ser el objetivo final llegar a una demostración formalmente sólida, pero enseñar la demostración únicamente de manera formal es donde se pierden aspectos de gran valor y riqueza para la educación que se recuperan con la teoría de Lakatos, y una de estas riquezas es precisamente el objetivo principal que Hanna plantea, la comprensión matemática, es decir, reconocer no sólo que la demostración establezca la veracidad de un teorema sino que la demostración deja ver por qué el teorema es veraz.

Es la opinión del autor de la presente investigación que el formalismo es la práctica dominante de la matemática actual y por lo tanto es de mucha importancia dentro de la comunidad científica. Dejar a un lado este aspecto es estar en contra de una característica fundamental de la matemática misma. Lakatos no rechaza la demostración formal, sino insiste que ésta es el producto final en el desarrollo de un proceso de hacer matemáticas, y que antes existen otros aspectos informales que se deben considerar.

Resumiendo, se quiere resaltar aquí el aspecto más relevante en el cual Gila Hanna enfatiza frecuentemente y es que la demostración debe ser una herramienta que mejore la comprensión matemática; se complementa este punto de vista asegurando que además debe ser una herramienta que potencie los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático.

1.1.4. Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof[12]

El artículo de Lara Alcock reporta los puntos de vista de cinco matemáticos que han tenido a cargo el curso "Introduction to mathematical reasoning" que se ofrece en diferentes universidades en los Estados Unidos y que es prerrequisito para que los estudiantes puedan acceder a cursos de alto nivel como análisis matemático y álgebra abstracta. El curso es enseñado en períodos de 80 minutos durante 14 semanas con una población entre 20 y 25 estudiantes. El objetivo de éste es familiarizar al estudiante con los mecanismos para demostrar.

Alcock, a través de las perspectivas de los profesores, construye una visión teórica sobre a enseñanza y aprendizaje de la demostración. La recolección de datos se realizó a través de entrevistas que fueron cuidadosamente transcritas y analizadas.

El artículo presenta en primer lugar diversas opiniones de investigadores quienes han realizado un trabajo previo acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en la cuales han señalado las dificultades que tienen los estudiantes en construir una demostración, entre las cuales se encuentra el que las justificaciones que los estudiantes ofrecen son argumentos empíricos en el lugar donde un argumento deductivo es requerido. (Harel y Sowder; Recio y Godino, 2011).

El uso de las definiciones es un aspecto en el cual los estudiantes encuentran dificultad al demostrar. En primer lugar, porque no son conscientes de su uso y por otra parte porque no se tiene una comprensión clara de ellas, en especial en cursos avanzados de matemáticas (Dubinsky y Gong, 1988). El dominio

[12] Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

de la estructura lógica es otro inconveniente más en la construcción de una demostración, particularmente con respecto al uso de cuantificadores y conectores lógicos (Dubinsky y Yiparaki 2000).

Algunos pocos investigadores se han dirigido a analizar cómo los estudiantes pueden llegar a comprender y a construir demostraciones. Simpson (1995) y Tall (2002) coinciden en que hay al menos dos rutas para lograr comprender la demostración. La primera es una ruta "formal" en el cual se privilegia los mecanismos y la estructura lógica para luego aplicarlos. La segunda es una ruta "natural" en el cual las ideas informales son refinadas y relacionadas con las definiciones formales.

El método de Lakatos de *Pruebas y refutaciones* muestra que las dos rutas están relacionadas con la construcción de la demostración. La parte informal, el explorar, el conjeturar, el buscar contraejemplos y, de manera alterna, la construcción de una demostración son la ruta natural y formal, respectivamente.

Alcock asegura que muchas investigaciones están encaminadas a observar las dificultades de los estudiantes al abordar una demostración. Otras pocas se enfocan sobre cómo mejorar las habilidades para demostrar. Algunos estudios empíricos muestran cómo son enseñados los cursos de transición de la matemática de calcular a la matemática de demostrar. No obstante, el sintetizar puntos de vista y métodos empleados por profesores matemáticos quienes enseñan dichos cursos es un tema muy poco abordado, el cual es el principal objetivo de la investigación de Alcock como ella lo asevera.

Es importante señalar en este punto, que la investigación de la presente tesis tiene como uno de sus propósitos, analizar la repercusión del método de pruebas y refutaciones en ese proceso de construir demostraciones. Pocas investigaciones, como lo asegura Alcock, han perseguido este objetivo.

Después de la recolección y análisis de datos Alcock identificó cuatro modos de pensar que deben ser usados para ser exitoso en las demostraciones. Estos modos son:

- Ejemplificación

- Pensamiento estructural
- Pensamiento crítico
- Pensamiento creativo

La autora los clasifica en modos semánticos y sintácticos. A continuación se da un breve detalle de cada uno de ellos.

Ejemplificación. Su objetivo es comprender significativamente la declaración matemática. Es la manera de hacer el material menos abstracto.

Pensamiento estructural. Su meta es usar adecuadamente la estructura formal en una demostración.

Pensamiento creativo. El objetivo es identificar el conjunto de propiedades que pueden ser el punto crucial en una demostración. Básicamente se refiere a reconocer la justificación de la afirmación matemática a través de ideas informales.

Pensamiento crítico. El objetivo es revisar la estructura y las ideas formuladas en la demostración.

La autora afirma que cada uno de los cuatro modos de pensamiento son importantes para la construcción de la demostración y deben ser potencializados en los cursos de introducción a la demostración.

Una cuestión surge: ¿Cómo deben ser alcanzados estos cuatro modos? Alcock argumenta que la enseñanza no se debe basar sobre un solo modo (aunque en la práctica de muchos docentes y en los textos el pensamiento estructural es el primero en enseñarse), sino que deber ser de manera flexible y circular.

Ahora bien, si se piensa en la teoría de Lakatos como método para la enseñanza de la demostración se observa una relación directa con cada uno de los cuatro modos. Por ejemplo, la etapa exploratoria de las definiciones inmersas en una conjetura y de la conjetura como tal de la teoría de Lakatos es análoga al modo ejemplificación. El pensamiento creativo se presenta también en la etapa informal, pero la conjetura se justifica coherente y convincentemente a través de ideas informales como diagramas, dibujos etc. El pensamiento estructural se aplica cuando una demostración con su estructura formal es propuesta, y el pensamiento crítico se refiere a aquella etapa en el cual surgen contraejemplos locales y por ende se modifica y refina la conjetura y la demostración respectivamente.

1.2. Enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.

El curso en el cual se llevará a cabo la presente investigación es de matemáticas discretas para licenciados en matemáticas e ingenieros. La matemática discreta se considera como un tópico propicio para desarrollar la heurística de Lakatos, sus problemas son de fácil entendimiento, motivadores, interesantes y retadores. A continuación se analizan diversas publicaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la matemática discreta.

1.2.1. Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and modeling. [13]

El primer Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME 1) realizado en Alemania en 1998, dio lugar a varias publicaciones, entre ellas la de Denise Grenier y Charles Payan.

Estos autores afirman que la matemática discreta no es contemplada en los currículos de Francia, y que en algunos textos de matemáticas para secundaria aparecen unos pocos temas de esta área, en ocasiones algo sobre técnicas de conteo y esporádicamente algunos problemas concernientes a la matemática discreta. Es más, afirman los autores que algunos profesores de matemáticas de secundaria desconocen esta rama de la matemática. Aseveran que el curso de matemática discreta no es frecuentemente ofertado sino en carreras como matemáticas para la economía o después del quinto

[13] Grenier, D., & Payan, C. (1999). Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and *modelling*. In I. Schwank (Ed.), Proceedings of CERME 1, vol. 1 (pp. 143–155). Osnabruck

semestre de la carrera en matemáticas. En la actualidad en Colombia es prudente señalar que en los estándares básicos de competencias en matemáticas está casi ausente la matemática discreta excepto por un estándar del pensamiento numérico para el grado sexto que dice: "Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo". Además, la asignatura no se contempla en planes de estudio, por ejemplo, de la carrera en matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, ni en la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Los autores también informan que las investigaciones realizadas en este campo se limitan a investigaciones sobre combinatoria, dando como ejemplo autores como Batanero y Godino quienes se han focalizado en este punto.

Ahora bien, como se mencionó anteriormente, los autores afirman que en textos escolares y en la práctica docente los temas de la matemática discreta están casi completamente ausentes, y los pocos problemas que se sugieren en los textos escolares no son significativos. Para sustentar esta afirmación los autores presentan los siguientes dos ejemplos.

"Sin mover el cuadrado pequeño dividir el cuadrado más grande en cinco figuras de igual forma y con la misma área." Los cuadrados son dibujados con cerrillas de madera como se muestra en la figura, los autores del libro donde es presentada esta situación aseguran que la reflexión es muy útil para desarrollar el problema.

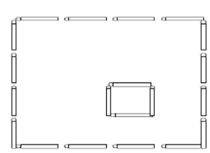


Figura 2. Problema de combinatoria[14]

[14] Grenier, D., & Payan, C. (1999). Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and *modelling*. In I. Schwank (Ed.), Proceedings of CERME 1, vol. 1 (pp. 143–155). Osnabruck.

Algunas cuestiones sobre el problema son: ¿cuál es el papel que desempeña el contexto de las cerillas en el problema?, ¿es la reflexión una estrategia realmente adecuada? y ¿qué se desea que los estudiantes aprendan a raíz de este problema? En resumen, los autores señalan que, aunque el problema sea de matemática discreta no es interesante, no es retador y es muy poco lo que puede generar en el pensamiento y en el entendimiento de los estudiantes.

El segundo problema es:

"Dibuje un rectángulo ABCD de modo que AB = 8 cm y BC = 5 cm. Tome un punto E sobre AC de modo que AE = 3 cm. Dibuje la recta paralela a (AD) que pasa a través de E; ésta intersecta a AB en un punto N, y a DC en un punto L. Dibuje la recta paralela a AB pasando a través de E; ésta intersecta a AD en un punto M y a BC en un punto K. ¿Cuál de los dos rectángulos EMDL y ENBK tiene la mayor área?

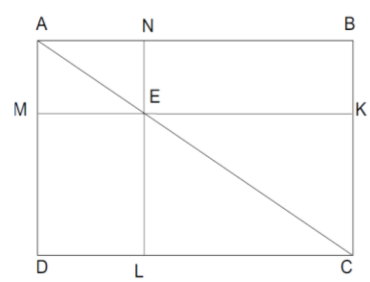


Figura 3. Rectángulo de Euclides[15]

El problema se puede resolver usando el teorema de Pitágoras o el de Thales, no obstante el método de descomposición y recomposición es una muy buena estrategia para solucionarlo, pero esta segunda estrategia es muy poco tenida en cuenta por los profesores de matemáticas.

Los autores muestran en primer lugar que la matemática discreta está ausente en el currículo, en la práctica del docente y en los textos escolares de Francia, y por otra parte aseveran que los problemas de

[15] Grenier, D., & Payan, C. (1999). Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and *modelling*. In I. Schwank (Ed.), Proceedings of CERME 1, vol. 1 (pp. 143–155). Osnabruck.

la matemática discreta son bien importantes ya que se consideran como una herramienta significativa para la enseñanza de la modelación y de la demostración, a través de validar y explorar afirmaciones matemáticas. Para ilustrar lo anterior, los autores muestran tres problemas interesantes que no sólo motivan a los estudiantes, sino que los guían por un camino de exploración, validación, modelación y demostración. Los describen como problemas que no necesitan un conocimiento profundo en matemáticas para interpretarlos y entenderlos, pero sí conllevan a una verdadera actividad matemática. De los tres problemas planteados se mostrará a continuación la solución de uno de ellos.

Problema 1. ¿Es posible teselar con trióminos en forma de L, un poliómino cuadrado de lado 2^n borrando un cuadrado (monómino)?

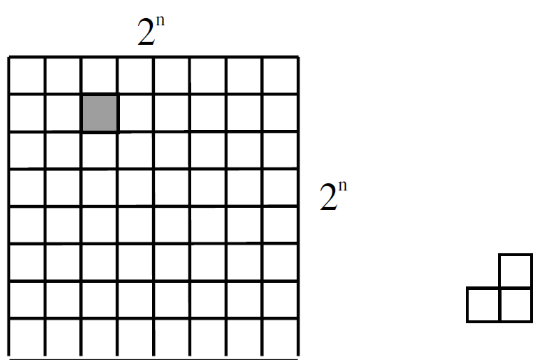


Figura 4. Teselación con trióminos.[16]

Se muestra la solución para ilustrar el pensamiento matemático involucrado, estratégico, creativo y formalmente sólido.

Considérense cuadrados cuya longitud de arista es de la forma 2^n, con n = 1, 2, 3,…, donde L_n representará el número de “trióminos” que tesela el cuadrado quitando un cuadrado de longitud 1.

- Cuando n = 1 se tienen cuatro opciones:

---

[16] Grenier, D., & Payan, C. (1999). Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and *modelling*. In I. Schwank (Ed.), Proceedings of CERME 1, vol. 1 (pp. 143–155). Osnabruck

Opción 1. (L_1 = 1)

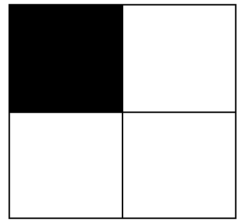


Figura 5. Opción 1

Es claro que para las otras opciones siempre que *n* = 1 se tiene L_1 = 1.

- Cuando *n* = 2, se tiene

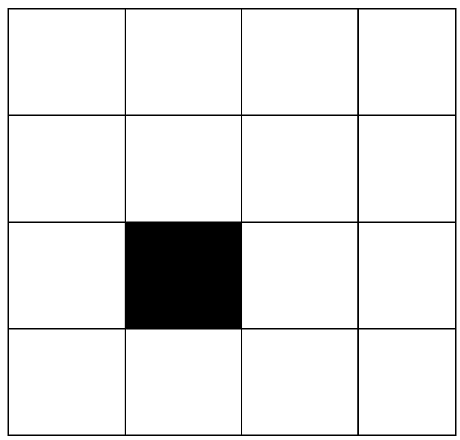


Figura 6. Cuando n=2

Cualquiera que sea el "monómino" que se elimine del "poliómino", la figura que queda se puede dividir en cuatro regiones de la siguiente manera:

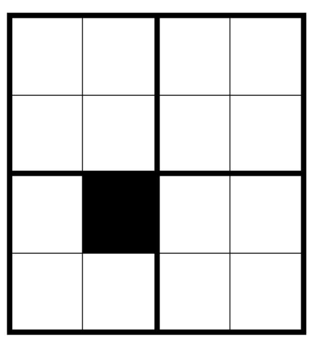


Figura 7. Poliómino restante

Se colorea un primer triómino, como se muestra en la figura a continuación:

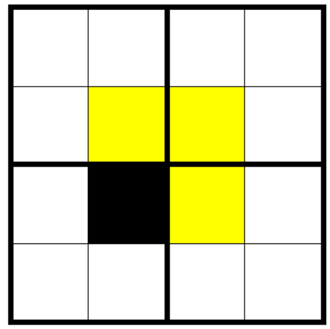


Figura 8. Triómino coloreado

Ahora bien, cada cuadrado de longitud 2^1 corresponde al caso anterior. En conclusión, $L_2 = 4\ L_1 + 1$. De esta forma se puede conjeturar que:

- $L_1 = 1$
- $L_2 = 4\ L_1 + 1$
- $L_n = 4\ L_{n-1} + 1$ y se llega a la formula $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} 4^k$.

Demostración por inducción.

i. Para $n = 1$, es claro que se cumple

ii. Supongamos que para $n + 1$ se cumple que $L_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} 4^k$, luego para un "poliómino" cuyo lado tiene 2^{n+2} "monóminos" se tiene

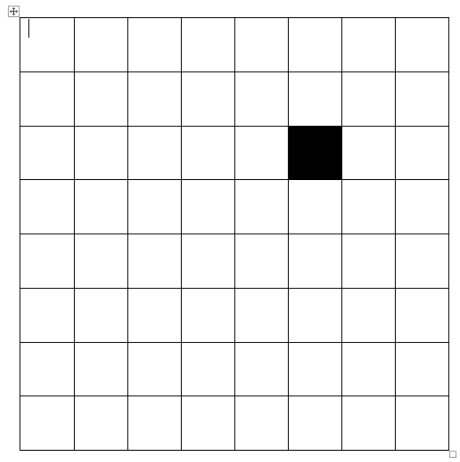


Figura 9. Poliómino de lado 2^{n+2}

Dividendo la figura en cuatros partes iguales se tiene:

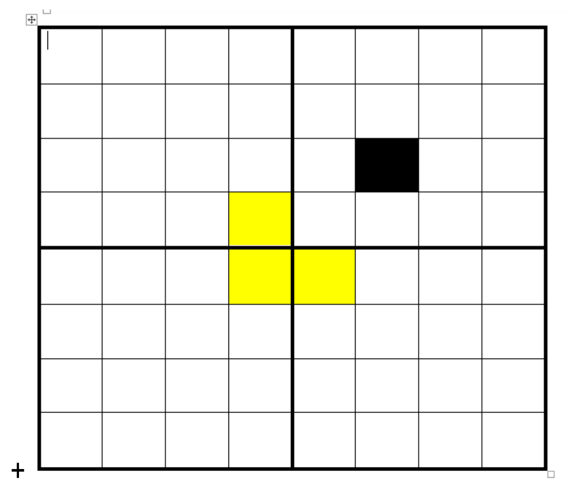


Figura 10. Poliómino dividido en cuatro partes

- $L_{n+2} = 4\,L_{n+1} + 1 = \sum_{k=0}^{n+1} 4^k$ como se quería.

Problema 2. ¿Cuál es el número de todas las posibles configuraciones de pintar *n* balones con a lo más *k* colores?

Problema 3. ¿Cuál es el triángulo equilátero más pequeño en el cual se pueden colocar k discos de diámetro 1 sin que se traslapen?

1.2.2. The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses [17]

El documento que se referencia fue una investigación llevada a cabo como requisito parcial para optar el título de Ph.D. en matemáticas, su autora es Olgamary Rivera-Marrero. Se presentó en el año 2007 en la Facultad de Matemáticas del Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, "Virginia Tech".

La investigación analiza la percepción de los profesores de matemáticas en formación acerca de dos importantes cuestiones:

- ¿Cómo perciben los profesores en formación la matemática discreta?
- ¿Cómo los profesores en formación reaccionan ante la integración de la matemática discreta en el currículo escolar?

La investigación tuvo lugar con múltiples profesores-estudiantes matriculados en el curso *Mathematics for Secondary Teachers* , y en ella se analizan profundamente de una manera cualitativa las percepciones de cuatro profesores en formación. A continuación se dará un análisis resumido acerca de algunas consideraciones importantes de la autora, de los resultados obtenidos y de los aciertos y diferencias con el actual trabajo de investigación.

La autora afirma que se debe considerar incluir la matemática discreta dentro del currículo de matemáticas de la educación secundaria, pues es un área que motiva el aprendizaje de los estudiantes y desarrolla el pensamiento matemático. Cita a Rosenstein (1997) quien asevera que la matemática discreta es atractiva, interesante, accesible, y apropiada, y a algunos otros autores quienes afirman que la introducción de la matemática discreta es considerada como una estrategia efectiva en la cual se

[17] Marrero, O. R. (2007). The place of discrete mathematics in the school curriculum: An analysis of preservice teachers' perceptions of the integration of discrete mathematics into secondary level courses (Doctoral dissertation, Doctoral dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University).

promueven los cinco procesos estándares que propone el NTCM: Solución de problemas, comunicación, razonamiento y demostración, representación y conexión. No obstante, la autora asegura que la matemática discreta poco se enseña en las escuelas de Norteamérica, afirmación que se apoya en investigaciones como la de Bayle en la cual 8 de 34 escuelas sondeadas reportaban llevar a cabo la enseñanza de la matemática discreta, y la de Likje Dologos (1990) quien afirma que el problema no es que la matemática discreta no sea contemplada en el currículo sino que los profesores no son conscientes de su existencia. Denise Grenier y Charles Payan aseveran en un artículo denominado "Discrete mathematics in relation to learning and teaching proof and modelling", publicado por European Research in Mathematics Education en el CERME 1 en el año de 1999, que en países como Hungría o Estados Unidos por lo menos la matemática discreta es considerada en los currículos, mientras que en Francia no sucede así, sino que está casi ausente en ellos. Añadido a ello, la experiencia del autor de la presente propuesta como profesor de matemáticas en educación secundaria en colegios de Colombia es que la asignatura no es tomada en cuenta.

El NTCM (1989) incluyó el tópico de la matemática discreta en los estándares curriculares de matemática, y a raíz de esta situación surgieron algunos textos y publicaciones que no fueron basados en investigaciones acerca de la importancia de la matemática discreta en educación matemática. De hecho, la autora afirma que es sorprendente que la comunidad que investiga en educación matemática no se ha focalizado sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática discreta. Adicionalmente, en la publicación sobre estándares curriculares del NTCM (2000) la matemática discreta está ausente como un tópico de los estándares básicos, y en ellos es poca la importancia que recibe esta asignatura, tan solo se encuentra en unos pocos párrafos la afirmación de que "la matemática discreta debe ser una parte integral del currículo de matemáticas".

La investigación llevada a cabo por Olgamary Rivera-Marrero concluye que los cuatro profesores en formación perciben que las matemáticas discretas son significativas para los estudiantes, la matemática discreta enfatiza en procesos y ésta proporciona una oportunidad para una instrucción innovadora. Los profesores argumentan que la matemática discreta es significativa para los estudiantes debido a su aplicación en problemas del mundo real, a que sus problemas son desafiantes e interesantes a la vez que accesibles a todo estudiante, pues muchos problemas en otras áreas requieren de un conocimiento básico de la matemática para entenderlos y abordarlos. Las matemáticas discretas, según opinan los docentes en formación, ayudan a los estudiantes a ser mejores resolutores de problemas, fortaleciendo las habilidades de pensamiento, y en su tratamiento se involucran los cinco procesos estándares propuestos por el NTCM (2000): resolución de problemas, razonamiento y estrategia de demostración, comunicación, conexión y representación. Respecto a la innovación en la instrucción, los profesores consideran que la matemática discreta conduce a una actividad de discusión, a una actividad matemática no rutinaria, promueve el aprendizaje por descubrimiento y fomenta la exploración.

El trabajo realizado por Olgamary Rivera-Marrero describe la importancia de la matemática discreta como herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático y contiene problemas interesantes y desafiantes que se prestan para ser desarrollados por medio de la construcción social y la exploración. Además, como afirma la autora, es poca la investigación existente en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática discreta.

1.2.3. Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States[18]

Los autores del artículo presentan una visión de la situación de la enseñanza-aprendizaje de la matemática discreta en Estados Unidos; aspectos como qué porcentaje de escuelas tienen en su currículo

[18] Debellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. ZDM, 36(2), 46-55.

tópicos de la matemática discreta, cuántos profesores en la práctica real la enseñan, qué dicen los lineamientos de el NCTM al respecto, cuál es el valor, misión y objetivo de enseñarla, son abordados y tratados a lo largo del artículo.

La matemática discreta ha tenido poca presencia en las escuelas en general. El NCTM en 1989 publica "*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*" en la cual se sitúa la matemática discreta como área independiente dentro del currículo. A partir de esta publicación diversos autores escriben acerca de su importancia y del por qué y del cómo enseñarla en el aula de clase. No obstante, el que el NCTM las haya implementado en los estándares como área independiente no implicó que cada escuela las contemplara dentro de su currículo. Muy pocos profesores, matemáticos y educadores matemáticos conocían lo que significa el término "matemáticas discretas" y las oportunidades que ésta ofrece a sus estudiantes. Por tal motivo el NCTM desarrolló cursos ofrecidos a profesores, matemáticos y educadores matemáticos que tenían como objetivo mostrar los beneficios que las matemáticas discretas tienen y como enseñarlas en el aula de clase. Varios de esos programas fueron financiados por the National Science Foundation (NSF); en particular los autores de este artículo desarrollaron el programa titulado Leadership Program in Discrete Mathematics (LP-DM). Parafraseando a los autores, éstos señalan que una primera lección que aprendieron rápidamente a través de estos cursos fue que la importancia de la matemática discreta no radicaba únicamente en sus contenidos sino en la oportunidad que ésta ofrecía para incentivar, motivar e involucrar a los estudiantes hacia el estudio de la matemática.

Ahora bien, resumiendo la situación que los autores presentan de la matemática discreta en los Estados Unidos, es que pocos currículos y aún menos profesores abordan tópicos de esta área en la enseñanza de la matemática. En 1989 se inicia una preocupación por implementarla en las escuelas de primaria y secundaria (K-12), en seguida se desarrollan programas para capacitar a los profesores, y comienzan diversos autores a publicar acerca de la importancia y del cómo abordarla en el proceso de enseñanza aprendizaje. Joseph G. Rosenstein, autor del artículo, ha contribuido con diferentes publicaciones a fomentar la inclusión de los tópicos de la matemática discreta en la enseñanza de la matemática en el colegio. En el artículo "*Discrete Mathematics in the Schools: An Opportunity to Revitalize School Mathematics*" señala que la matemática discreta ofrece nuevas oportunidades a los estudiantes, para aquellos que no han tenido éxito con las matemáticas lo comenzarán a lograr, y para aquellos estudiantes que han sido talentosos pero han perdido interés, ella ofrece la oportunidad de enfrentar reto y desafío. Además, proporciona al docente nuevas maneras de responder a la pregunta ¿cómo enseñar matemáticas?, convirtiéndola así en una herramienta para reformar la educación matemática. Es de resaltar la consideración que hace Rosenstein sobre la matemática discreta como herramienta para reformar la educación, es decir, el autor plantea que esta área de la matemática contiene dentro sí mismo tópicos, ejercicios, problemas, teoremas y demostraciones que permiten y facilitan nuevas maneras de enseñar. Por supuesto que el proponer un problema de la matemática discreta no significa que hay un cambio en la enseñanza de la matemática, pero bajo un modelo apropiado de enseñanza-aprendizaje los problemas se convierten en una herramienta poderosa para tal fin. La obra de Lakatos *Pruebas y refutaciones* se considera como un fuerte complemento para desarrollar los tópicos de la matemática discreta potenciando en su totalidad la riqueza que éstos ofrecen.

Otro aspecto relevante que consideran los autores es ver la matemática discreta como una herramienta que posibilita involucrar y comprometer al estudiante hacia el estudio de la matemática. Rosenstein y DeBellis (2004) señalan que:

"Nuestra visión de las matemáticas discretas es que es un vehículo para darle a los profesores nuevas maneras para pensar acerca de los tópicos tradicionales de matemáticas y nuevas estrategias para involucrar a sus estudiantes en el estudio de las matemáticas. Las matemáticas discretas ofrecen un nuevo comienzo para los profesores y un nuevo comienzo para los estudiantes". (Traducido del inglés)[19]

El artículo permite establecer una relación entre la riqueza de los problemas de la matemática discreta, el método heurístico de Lakatos ejemplificado en *Pruebas y refutaciones*, y la resolución de problemas. Para ello, en primer lugar, Rosenstein y DeBellis aseguran que los estudiantes necesitan crear estrategias para la resolución de problemas, la cual es considerada como una de las principales actividades en el aprendizaje de la matemática. Aseguran que los profesores deben ir más allá de las técnicas, algoritmos y ejercicios, proponiendo problemas desafiantes que involucren a los estudiantes hacia al estudio de la matemática. Afirman que los problemas de la matemática discreta son fáciles de comprender, permiten la exploración y la experimentación, además de que conducen a conjeturar. Estas son características principales que Lakatos identifica en la epistemología de la matemática, y por consiguiente se considera que los problemas desafiantes de la matemática discreta se pueden abordar de una manera adecuada y consistente a través de la heurística de Lakatos, potenciando tanto la riqueza de los problemas como el método para abordarlos y promoviendo de esta manera el pensamiento matemático y el interés hacia una verdadera actividad matemática.

A los profesores en el LP-DM se les enseña por medio de una actividad matemática que se aborda a través de la resolución de problemas desafiantes, en la cual se incremente en el estudiante las habilidades para resolver problemas y además éste experimente y sienta la emoción de resolverlos, sienta la tensión en el camino cuando se resuelve un problema no rutinario pero también el éxito cuando surge el ¡AHA! Para llegar a la solución, es claro que la experimentación, la exploración, el conjeturar, probar, discutir, ejemplificar, refutar y construir el conocimiento a través del debate social son aspectos relevantes que

[19] Debellis, V. A., & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete mathematics in primary and secondary schools in the United States. *ZDM,* 36(2), 46-55.

mejoran al estudiante como resolutor de problemas y que desarrollan el pensamiento matemático, aspectos que Lakatos asegura surgen en la construcción del conocimiento matemático.

1.2.4. Problem solving with discrete mathematics[20]

El National Council of Teachers of mathematics (NCTM) ha publicado una serie de artículos bajo el nombre de Teaching Children Mathematics, entre muchos de éstos, Luis M. Friedler escribe acerca de la enseñanza de la matemática discreta en un nivel elemental.

El Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989) del NCTM hace un llamado hacia el énfasis en la resolución de problemas y recomienda incluir tópicos de la matemática discreta.

Friedler explora la resolución de problemas a través de los tópicos de la matemática discreta a nivel elemental, concretamente en estudiantes de grado 5 del sistema educativo de Estados Unidos, niños cuyas edades oscilan entre los 10 y 11 años. El trabajo se desarrolló con sesiones de 45 minutos por semana. Entre los objetivos del curso están involucrar a los estudiantes en una matemática interesante e estimulante y proporcionarles problemas retadores en los cuales el niño se pueda sentir exitoso.

La metodología que aplica el autor en las sesiones de trabajo está respaldada por la teoría de Polya, particularmente hace un énfasis en la heurística que Polya denomina "Analogy"[21], y que consiste en buscar problemas análogos más simples que puedan dar pistas de cómo solucionar el problema original. El método que el autor propone concretamente consiste en proponer un problema que él llama desafiante o retador y en seguida sugerir solucionar algunos problemas análogos más simples para finalmente darle solución al primero.

---

[20] Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics*. National Council of teachers of mathematics

[21] Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton university press. Pag 36.

El artículo muestra algunos puntos importantes que están en concordancia con la propuesta didáctica del presente trabajo de investigación, por ejemplo, el autor recalca acerca de la resolución de problemas como una herramienta que se debe aplicar en la enseñanza de la matemática en todos los niveles. También el autor señala la importancia que el estudiante explore y sea independiente en su razonamiento y estrategia a utilizar para la solución de un determinado problema. No está centrado en métodos sistemáticos ni en presentar directamente las respuestas a los estudiantes, y asegura que cuando un estudiante le hace una pregunta es muy probable que la respuesta sea de nuevo una pregunta que se le hace al estudiante. También es de resaltar el lugar que Friedler concede al trabajo en grupo dado que divide a los estudiantes en grupos de cuatro o cinco para empezar a abordar los problemas.

Por otra parte, el autor del artículo tenía como objetivo principal explorar la resolución de problemas en los estudiantes a través de los tópicos de la matemática discreta. En concordancia con muchos autores, Friedler asegura que los problemas son interesantes, estimulantes, de fácil comprehensión, pero retadores en sus soluciones, y agrega que se trata de tópicos de la matemática actual o moderna pues es aplicada ampliamente en procesos de información, la ciencia computacional, la economía, entre otras. En este aspecto los problemas de la matemática discreta son apropiados para abordarlos a través de la heurística de Lakatos, pues en primer lugar involucran al estudiante y lo motivan hacia la búsqueda de la solución, y además diferentes caminos y estrategias pueden surgir para la resolución del mismo.

A continuación se analizará una de las clases que se presenta en el artículo. La clase se desarrolla en aproximadamente 50 minutos, y el primer problema a abordar es:

- La escuela elemental S-R necesita programar algunos entrenamientos deportivos como futbol, banda y softbol de modo que ningún niño tenga dos entrenamientos al mismo tiempo. Vanesa se inscribe a softbol y banda, Daniel se inscribe a futbol y banda, ningún otro estudiante se inscribe a más de una actividad. ¿Cuál es el menor número de períodos de clase que se necesitan para programar todas las actividades sin que haya conflictos?

La respuesta es dos, banda en un período, futbol y softbol en otro período. El problema se puede abordar a través de un modelo gráfico como se muestra a continuación:

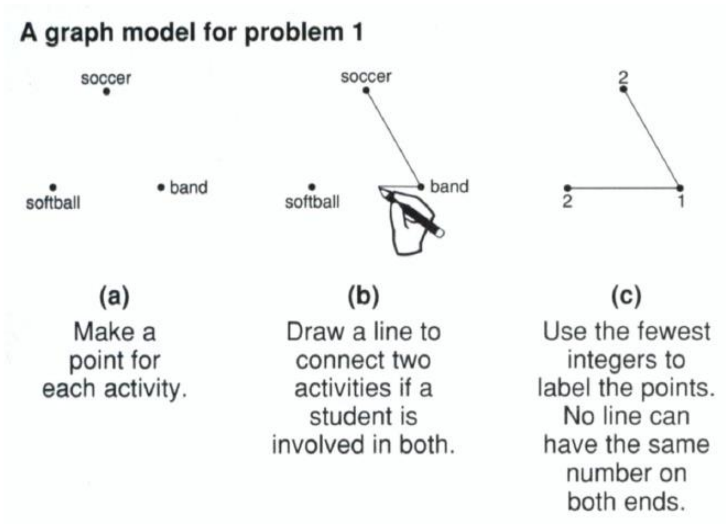


Figura 11. Grafo modelando el problema[22]

Cada vértice representa una actividad deportiva y cada línea se dibuja entre dos puntos si algún estudiante se inscribe a las dos actividades representadas por los dos puntos, el objetivo es etiquetar los puntos con números enteros de tal manera que si dos puntos tienen una misma arista entonces se etiquetan diferentes.

El propósito de presentar el problema de esta manera según el autor es brindarle al estudiante una estrategia para abordar en el futuro problemas análogos más complejos. El segundo problema que se aborda en la clase es precisamente un problema de más complejidad.

- Se tiene la misma situación que en el problema uno excepto que las actividades son niña exploradora, banda, lecciones de clarinete, futbol, gimnasia y softball. Zack se inscribe a banda

[22] Friedler, L. (1996). *Problem Solving With Discrete Mathematics*. National Council of teachers of mathematics.

y futbol; Lilian a futbol y gimnasia; Pat se inscribe a futbol, banda y lecciones de clarinete; Kathy a gimnasia y futbol; Zoe toma softball y gimnasia; y Sorelle se inscribió a niñas exploradoras, banda, y lecciones de clarinete. Si ningún otro niño se inscribe en más de una actividad, ¿cuál es el número más pequeño de períodos de clase necesarios para evitar conflictos?

Usando las mismas ideas que en el problema uno, resulta el siguiente modelo gráfico, concluyendo que la respuesta es tres.

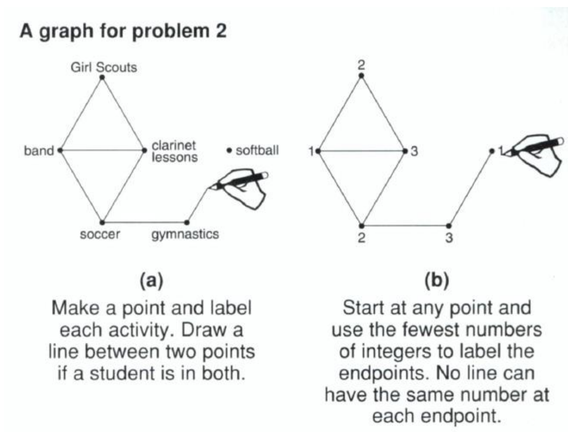


Figura 12. Grafo para el problema 2[23]

Ahora bien, el autor del artículo plantea que si el estudiante tiene dificultades con este segundo problema entonces se plantean otros cuatro problemas con el propósito de brindarle pistas para solucionarlo.

- Problema 3. ¿Ves algún patrón en los siguientes grafos? ¿Cuál es el siguiente grafo en la sucesión? ¿Observas algún patrón para el número más pequeño de períodos? ¿Cuál es el patrón? ¿Cuántos períodos serían necesarios para el grafo de la sucesión con 10 vértices?

[23] Friedler, L. (1996). Problem Solving With Discrete Mathematics. National Council of teachers of mathematics.

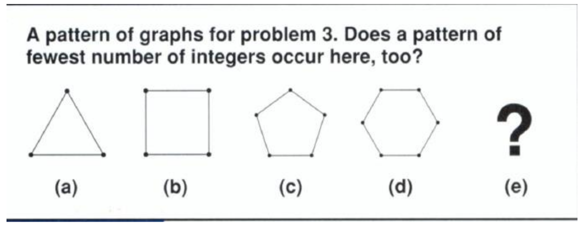


Figura 13. Patrón de grafos para el problema 3[24]

- Problema 4. ¿Ves algún patrón en los siguientes grafos? ¿Cuál es el siguiente grafo en la sucesión? ¿Observas algún patrón para el número más pequeño de períodos? ¿Cuál es el patrón? ¿Cuántos períodos serían necesarios para que el grafo de la sucesión con 10 vértices?

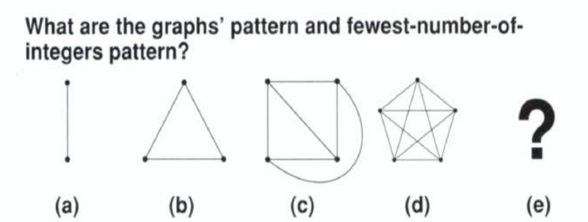


Figura 14. Patrón en los grafos[25]

- Problema 5. ¿Ves algún patrón en los siguientes grafos? ¿Cuál es el siguiente grafo en la sucesión? ¿Observas algún patrón para el número más pequeño de períodos? ¿Cuál es el patrón? ¿Cuántos períodos serían necesarios para el grafo de la sucesión con 10 vértices?

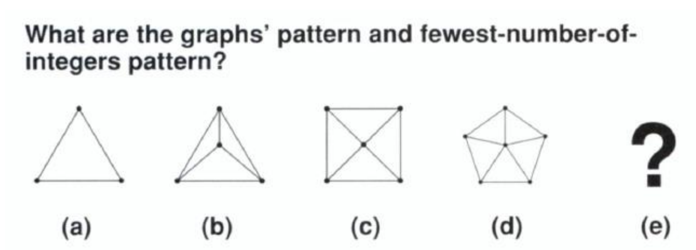


Figura 15. Regularidad en Grafos[26]

[24] Friedler, L. (1996). Problem Solving With Discrete Mathematics. National Council of teachers of mathematics.
[25] Ibidem.
[26] Ibidem.

- Problema 6. Encuentre el número más pequeño de enteros que se requieren para etiquetar los siguientes grafos.

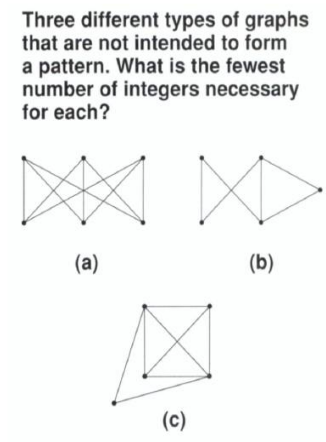


Figura 16. Tres tipos diferentes de Grafos[27]

Es claro cómo el autor utiliza el método heurístico de Polya en la clase número 1, partiendo de problemas análogos más sencillos para dar finalmente con la solución del problema retador número 2. La estrategia heurística de Polya es una herramienta importante y útil en la resolución de problemas. No obstante, como se observa en la clase 1, el autor la desarrolla de manera que podría llamarse sistemática. Se observa que tiene como objetivo enseñar la heurística en sí misma. En este punto es relevante señalar que sin duda la heurística de Polya es de gran importancia en la resolución de problemas, pero como se desarrolla en el artículo no le permite al estudiante ser totalmente independiente en su razonamiento puesto que los problemas análogos son propuestos por el profesor y por lo tanto el problema retador se convierte en un problema de rutina. El objetivo en el modelo didáctico de la presente investigación busca que sea el estudiante quien proponga el problema análogo. En muchas ocasiones el buscar un problema análogo más simple es precisamente el insight requerido para darle solución al problema.

[27] Friedler, L. (1996). Problem Solving With Discrete Mathematics. National Council of teachers of mathematics.

Ahora bien, haciendo el paralelo con la propuesta didáctica de la presente investigación se puede afirmar que la metodología de permitir al estudiante razonar y buscar estrategias por sí mismo planteada en el artículo, es una de las principales características de la heurística de Lakatos en la cual el docente debe con mucha prudencia responder las inquietudes de sus estudiantes.

Por otra parte, el trabajo en grupo como se mostró anteriormente es una estrategia importante que el artículo desarrolla; en la teoría de Lakatos es claro que la construcción del conocimiento matemático surge a través de la interacción social por medio de mejoras en las conjeturas, teoremas y demostraciones.

1.2.5 Teaching Combinatorics through Guided Discovery[28]

El presente documento es la evaluación de un proyecto financiado por la National Science Foundation (NSF) en Estados Unidos. El proyecto es denominado: Teaching Combinatorics through Guided Discovery, el investigador es Kenneth P. Bogart y la evaluadora es Jane Korey.

Bogart propone una nueva manera de enseñar la combinatoria teniendo en cuenta el guided discovery model. En esta publicación Jane Korey describe la experiencia que se tuvo en dos instituciones en las cuales se enseñó combinatoria a través del método nombrado anteriormente y el método tradicional.

En primer lugar, se señalarán las características del método particular utilizado en la enseñanza de la combinatoria y se hará simultáneamente un paralelo con lo que el autor del presente trabajo de investigación propone.

Señala el autor de la evaluación que la diferencia entre guided discovery combinatorics y cualquier otra clase de matemáticas es el aprendizaje activo; los estudiantes exploran ideas y construyen ellos mismos

[28] Korey, J. (2004). Teaching Combinatorics Through Guided Discovery: a summary evaluation Report. National Science Foundation.

los conceptos a través de problemas propuestos. El profesor da muy pocas instrucciones; son los estudiantes quienes buscan estrategias diversas para solucionar los problemas. Al respecto Kenneth P. Bogart afirma en su libro *Combinatorics Through Guided Discovery* que:

"El punto de aprender de este libro es que usted está aprendiendo como descubrir ideas y métodos por usted mismo, no que este aprendiendo a aplicar métodos de alguien mas. Los problemas en este libro son diseñados para guiarlo al descubrimiento y a demostrar por usted mismo las ideas principales de la combinatoria. Hay evidencia que esto le permite aprender con mayor profundidad y más comprensión (traducido del inglés)".[29]

Es trascendental la afirmación que hace Bogart con respecto a la metodología propuesta por él, en particular el aseverar que existe evidencia que los estudiantes logran un aprendizaje más profundo y una mejor comprensión de los conceptos y, además, complementando a Bogart, un mejor desarrollo del pensamiento matemático.

Otro aspecto fundamental que el autor del artículo señala en cuanto a la metodología de las clases es el trabajo en grupo; los problemas eran desarrollados por los estudiantes para finalmente realizar una retroalimentación entre todo el grupo, mostrando diferentes heurísticas en la resolución de los problemas. Es importante señalar que el rol del profesor era algo "pasivo", permitiendo siempre que los estudiantes llegaran a sus propias conclusiones. Un estudiante que fue entrevistado afirmó que más que utilizar una fórmula dada por el profesor era él quien debería llegar a dicha fórmula, esto hacía que tuviera una comprensión más profunda de los conceptos.

Otro punto a resaltar del método *Teaching Combinatorics Through Guided Discovery* que Jane Korey reporta es la parte emocional y actitudinal de los estudiantes, pues éstos se mostraron más motivados y

[29] Bogart, K. (2004). *Combinatorics through Guided Discovery*. National Science Foundation Grant Number DUE-0087466

comprometidos con la clase, ellos mismos afirmaron que la clase era divertida y además el encontrar y descubrir cosas por ellos mismo era emocionante. Los problemas de la combinatoria y de la matemática discreta en general tienen la característica de ser fáciles de comprender y abordar con conocimientos no muy sofisticados pero que requieren de creatividad e ingenio para solucionarlos. Esto hace que los estudiantes se sientan retados y por ende motivados y por lo tanto son propicios para ser desarrollados a través de la heurística de Lakatos.

Resumiendo, el método descrito en *Combinatorics Through Guided Discovery* es uno que se lleva a cabo a través de la solución de problemas y los conceptos se introducen a través de problemas propuestos. En clase los estudiantes forman grupos pequeños y resuelven problemas, exploran, analizan y deducen fórmulas. Los estudiantes proponen estrategias y el profesor orienta prudentemente las preguntas de sus alumnos. Los problemas que se proponen no son triviale,s pero tampoco tan difíciles que los estudiantes no tengan oportunidad de resolverlos.

El artículo de Jane Korey señala puntos valiosos en la enseñanza de la combinatoria y que están en concordancia con la presente investigación. Por ejemplo, es de recalcar que en la heurística de Lakatos uno de los puntos importantes es que el estudiante explore, analice y por medio de contraejemplos y pruebas se refinan conjeturas, de manera análoga a como lo plantea Bogart.

Otro punto a tener en cuenta dentro de la propuesta didáctica del autor de la presente tesis es el trabajo en grupo, considerado como una estrategia en la construcción del conocimiento matemático tal como lo muestra Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones,* pues es bastante claro que para Lakatos el conocimiento matemático es una construcción social. La metodología de Bogart muestra y señala enfáticamente que el trabajo en grupo es parte fundamental en la construcción del conocimiento matemático.

Como se mencionó y se mostró anteriormente, la presente tesis concuerda en puntos esenciales con el método de *Combinatorics Through Guided Discovery* el cual como lo señala Jane Korey ha tenido resultados pedagógicos positivos. No obstante, es importante determinar puntos diferentes entre la propuesta didáctica del presente trabajo de investigación y el método que describe el artículo. El punto esencial de la presente tesis de investigación es analizar, más que la comprensión de conceptos, el desarrollo del pensamiento matemático a través de la heurística de Lakatos; estudiar como la heurística de Lakatos junto con sus estrategias particulares, como el contraejemplo local y global, es en sí misma una estrategia para la resolución de problemas. Por otro lado, la propuesta del presente trabajo de investigación no se limita a la combinatoria sino que se amplía a otros tópicos de la matemática discreta y aun a problemas transversales a otras áreas del conocimiento como la geometría y la teoría de números.

La propuesta didáctica de la tesis propone una conjetura principal la cual es una estrategia totalmente original e innovadora y la cual tiene como propósito involucrar, motivar e incentivar al estudiante a la actividad matemática de proponer, investigar y construir conocimiento a largo plazo, con sucesivas etapas de avance, como lo hacen los matemáticos profesionales. Dicha conjetura permitirá al estudiante pensar en un problema no durante diez minutos o quizás una hora, sino que posiblemente durante todo el semestre académico se esté trabajando en él, mostrando al estudiante el aspecto epistemológico de la matemática a la manera propuesta por Lakatos.

Ahora bien, una sugerencia final de los estudiantes que estuvieron trabajando con el método de la *Combinatorics Through Guided Discovery* fue desafiar a todos los estudiantes, incluyendo a estudiantes más talentosos, pero sin frustrar a aquellos que no están tan bien preparados. En este punto es importante destacar que la propuesta didáctica de la tesis está diseñada y pensada con mucho cuidado para abarcar precisamente esta demanda. Aunque los ejercicios no son la prioridad en el modelo didáctico, se propondrán algunos pocos ejercicios para que el estudiante se familiarice con los conceptos. Otro grupo de problemas son aquellos que se denominan problemas motivadores los cuales tienen un nivel intermedio y que permite una mejor comprensión de los conceptos. Finalmente se abordará un grupo denominado problemas reto los cuales se consideran como los esenciales para la profunda comprensión de conceptos y el desarrollo del pensamiento matemático.

Como conclusión se puede afirmar que la investigación que describe el artículo es un aporte teórico positivo que califica la heurística de Lakatos como una herramienta eficaz para la enseñanza de la matemática discreta, pues como se mostró anteriormente hay puntos esenciales del método del artículo que son característicos de la heurística de Lakatos. Sin embargo, la propuesta didáctica de la tesis abarca más tópicos y aspectos pedagógicos que lo que se hace en el *Combinatorics Through Guided Discovery*.

1.2.6 Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics[30]

En 1989 el NCTM consideró en los estándares para matemáticas de los Estados Unidos incluir las matemáticas discretas como un tópico independiente tal como lo era la geometría o el álgebra. ¿Por qué esta preocupación, que ha venido en aumento, de incluir la matemática discreta como primordial en el currículo, no sólo de los Estados Unidos sino en otros muchas más países? Gerald Goldin discute en este artículo acerca de las posibilidades que ofrece las matemáticas discretas en el desarrollo del pensamiento matemático y en la parte emocional del estudiante.

Goldin en particular enfatiza sobre los procesos heurísticos que ocurren durante la resolución de problemas en este ámbito de la matemática, en especial se centra en el "modelar lo general sobre lo particular".

El autor señala que este campo de la matemática es un medio que permite revivir el aprendizaje de ésta en aquellos estudiantes quienes por alguna razón se han desmotivado. El redescubrimiento matemático

[30] Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM*, *36*(2), 56-60.

y la resolución de problemas no rutinarios e interesantes son dos aspectos que motivan hacia dicho objetivo.

Gardiner (1999)[31] señala que, a cambio de introducir la matemática discreta como un conjunto de algoritmos y hechos que deben ser memorizados, se trate como un campo para la resolución de problemas, razonamiento y experimentación.

En este orden de ideas, en el cual las situaciones de la matemática discreta fortalecen los procesos heurísticos y direccionan las emociones de los estudiantes, el autor ejemplariza esta teoría a través del siguiente problema.

"Usted se encuentra a la orilla de un rio con dos baldes. Un primer balde se puede llenar con exactamente 3 litros de agua y el otro con exactamente 5 litros. Los baldes no tienen marcadas medidas de ningún tipo. ¿Cómo puede usted transportar exactamente cuatro litros de agua?".

El problema cumple con dos de las características que muchos autores afirman que tienen los problemas de las matemáticas discretas, una es la facilidad para entender el enunciado y la otra es la estructura matemática escondida que permitiría solucionarlo de una manera más fácil. Esta segunda característica es fundamental en los problemas retadores en los cuales el "insight" permite descubrir o construir tal estructura.

Como se mencionó anteriormente, Goldin se enfoca en los procesos heurísticos, en particular sobre la "modelación de lo general sobre lo particular". En el problema enunciado se observa de una manera clara el significado de dicho proceso. No obstante, antes de aclarar esta idea, se muestra el análisis que el

[31] Gardiner, A. D. (1991). A cautionary note. In M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.*), Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12.* Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

autor realiza del problema en términos de lo que éste ofrece a la parte cognitiva y emocional del estudiante.

En primera instancia, el enunciado del problema es sencillo de comprender, lo que permite que el estudiante de entrada se sienta cómodo y se empiece a involucrar en la actividad matemática. No obstante, Goldin advierte que el resolutor se puede encontrar con algunas dificultades y junto con ellas diferentes emociones. Un primer impase es considerar solucionar el problema llenando cada balde hasta la mitad (pues esto nos da cuatro litros), pero claro son dificultades fáciles de superar. Un segundo impase es que después de dos o tres pasos el estudiante no considere que haya logrado un progreso. En este punto, la perseverancia, el deseo de ser exitoso, el sentirse retado son emociones deseables, sin embargo, la frustración y el deseo de rendirse son emociones que también pueden acompañar al resolutor.

Goldin señala que la meta no es que emociones como el rendirse o el frustrarse desaparezcan, sino que estos sentimientos se canalicen apropiadamente; por otra parte el sentimiento de éxito es una de las metas que debe promoverse a través de los problemas de las matemáticas discreta.

Ahora bien, el problema permite que el estudiante explore, proponga, construya estrategias y en general que sea autónomo en sus procesos heurísticos. Cuando el estudiante logra representar la situación de tal manera que le permita solucionar el problema, se evidencia creatividad, ingenio y por ende el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otra parte, cuando el problema se haya solucionado surgen diversas conjeturas con el fin de generalizar más el problema. Algunas de las cuestiones que pueden surgir es si el problema tiene más de un camino para solucionarlo, qué pasa si se quieren llevar siete litros con cinco baldes de diferentes medidas o, aún más general, si se tienen *n* baldes con capacidades k_1 , k_2 ,…,k_n, ¿cuántos litros se pueden transportar? Este tipo de heurística es lo que el autor ha denominado “modelando lo general de lo particular", es un proceso totalmente deseable que fomentan las situaciones en matemática discreta y que aún se puede fortalecer a través de la heurística de Lakatos tal como el autor del presente trabajo de investigación se ha propuesto.

1.3. Heurística de Lakatos en el aula de clase

1.3.1. Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: local counterexample and modification of proof [32]

En la presente publicación el autor analiza la enseñanza de la demostración a través de las reglas heurísticas de Lakatos; concretamente, estudiantes japoneses entre las edades de 14 y 15 años intentan demostrar el teorema del ángulo inscrito en un arco.

Es relevante resaltar la importancia que el autor le da a la demostración, considerándola como el centro de la actividad matemática en todos los niveles. El autor asegura que dentro de los procesos heurísticos involucrados en la demostración es fundamental que los estudiantes conjeturen, prueben, refinen la demostración y refuten; conceptúa que dichos procesos guiarán al aprendizaje auténtico de las matemáticas, además de estimular el pensamiento crítico y la buena actitud en los estudiantes.

Quizás un aspecto que se deja a un lado cuando se cita a Lakatos es la parte formal, el desarrollo del método de Lakatos debe concluir con una parte formal, pues de ninguna manera se desea dejar a un lado tal práctica de la matemática actual, y es un aspecto que en la investigación presente se desea resaltar.

Lakatos (1976) presenta las cinco reglas heurísticas siguientes.

[32] Komatsu, K. (2012) Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in Mathematical learning: local-counterexample and modification of proof. En 12th International Congress on Mathematical Education Topic Study Group 14.

1. Regla 1. Si usted tiene una conjetura, se dispone para probarla o refutarla. Inspeccione la demostraciones cuidadosamente, prepare una lista de lemas no triviales; encuentre contraejemplos tanto globales como locales.
2. Regla 2. Si usted tiene un contraejemplo global descarte su conjetura, agregue a su proof-analysis un adecuado lema que será refutado por el contraejemplo, y remplace la conjetura descartada por una mejorada incorporando ese lema como condición. No permita que una refutación sea descartada como un monstruo. Trate de que todos los lemas escondidos sean explícitos.
3. Regla 3. Si usted tiene un contraejemplo local, mire si no es también un contraejemplo global, si es, usted puede aplicar fácilmente la regla 2.
4. Regla 4. Si usted tiene un contraejemplo que es local pero no global, trate de mejorar su proof-analysis remplazando el lema refutado por uno adecuado.
5. Regla 5. Si usted tiene un contraejemplo de cualquier tipo, trate de encontrar, un teorema más profundo en el cual estos contraejemplos ya no lo sean.

La situación que se describe en el artículo muestra las acciones de los estudiantes cuando se enfrentan a un contraejemplo local, es una de las cuestiones principales que allí se plantea. Los estudiantes demostraron el teorema del ángulo inscrito para el caso en el cual el centro del circulo está en el interior del ángulo inscrito. Después, cuando se miró otro caso, apareció el contraejemplo local, así que los estudiantes optaron por hacer una pequeña modificación en la demostración anterior. El autor resalta hechos como el que los estudiantes al enfrentarse al contraejemplo local no sólo se percataron de que su demostración no era adecuada, sino del porqué de la falsedad de la demostración, y sugiere que precisamente el docente debe fomentar la discusión en el aula de clase teniendo como objetivo obtener dicho resultado. Afirma, además, que el estudio le permitió ver métodos empleados en la actividad matemática avanzada.

Al respecto y de acuerdo con el autor, el método heurístico de Lakatos desarrolla la comprensión matemática y aun la actitud positiva de los estudiantes hacia ésta, pues por medio de la heurística el estudiante se involucra en situaciones que le cuestionan y le retan, situaciones que dejarán ver esa parte interesante y emocionante de la actividad matemática la cual se desea rescatar. Igualmente, el autor del presente proyecto piensa que otro valor agregado de la heurística de Lakatos es que desarrolla el pensamiento matemático e involucra al estudiante en situaciones similares a las que enfrentan los profesionales e investigadores matemáticos.

Como conclusión, en el artículo se afirman cuestiones interesantes e importantes con respecto al método heurístico de Lakatos, no obstante se aprecia una insuficiencia en dos aspectos relevantes a dicho método, que son:

- ¿Cuál es el papel que desempeña el método en el desarrollo del pensamiento matemático?
- ¿Cuál es el aporte del método de Lakatos a la construcción de demostraciones formales?

Son dos preguntas que tienen un valor importante para la presente investigación.

1.3.2. Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom[33]

Sean Larsen y Michelle Zandieh presentan un episodio de una clase de teoría de grupos para estudiantes universitarios ilustrando el método de la invención guiada con procesos análogos a los que describe Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones*. Los autores están convencidos que la heurística de Lakatos llevada al aula de clase da más sentido a la actividad matemática.

[33] Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 205-216.

Dentro de los objetivos de los autores del artículo está el explorar la utilidad del método de Lakatos de *Pruebas y refutaciones* en la reinvención de la matemática. Esta reinvención se puede pensar como re-descubrir el conocimiento matemático en el aula de clase de manera análoga a cómo surgió históricamente. Este concepto de reinvención guiada se atribuye al trabajo de Freudenthal, quien creó la teoría de educación matemática denominada educación matemática realista (EMR) en la cual la matemática es pensada como fruto de una actividad humana que puede ser recreada por el estudiante en el aula.

Los autores afirman que el episodio de clase se pensó en primer lugar desde la teoría de la matemática realista, no fue sino después de la experiencia que observaron procesos análogos a los que Lakatos describe en su obra. Concretamente los autores sugieren que los procesos que Lakatos llama *monster-barring*, *exception-barring* y *proof analysis* pueden servir de apoyo para generar situaciones en las que se revienten las matemáticas.

Freudenthal afirma que la matemática usualmente es enseñada como un producto ya acabado, en palabras de Lakatos, en un estilo deductivista. Dicha metodología esconde los procesos del descubrimiento matemático. Freudenthal asegura que los estudiantes deben reinventar las matemáticas por ellos mismos y los autores aseveran que el método de Lakatos es útil para tal re-descubrimiento.

El episodio de clase, como se mencionó anteriormente, se desarrolla en un curso de teoría de grupo, en donde se reinventa un teorema del álgebra abstracta. Los estudiantes buscan las condiciones suficientes para garantizar que un subconjunto de un grupo es de nuevo un grupo. Los autores ilustran cómo los procesos que describe Lakatos en las dos situaciones históricas mostradas en su obra *Pruebas y refutaciones* surgen en el aula de clase en la reinvención del teorema.

En las situaciones históricas del descubrimiento matemático que relata Lakatos surgen diversas etapas, la primera de las cuales es la aparición de la conjetura primitiva. Por ejemplo, en el siglo XVIII se cuestionó si el límite de una sucesión convergente de funciones continuas era también continua. Después apareció la demostración, en este caso atribuida a Cauchy. En la tercera etapa aparecen los contraejemplos globales que fueron trabajo de Fourier. Luego, se dieron tres posibles respuestas al contraejemplo, *monster-barring*, *exception-barring* y *proof analysis*, y por último se llegó a la restructuración de la conjetura y de la demostración.

Estas mismas etapas son las que los autores analizan en el aula de clase, afirmando que la matemática puede ser redescubierta en el salón de clases a través de una actividad análoga a la realizada históricamente por los grandes matemáticos en el descubrimiento del conocimiento.

Algunas conclusiones y consideraciones importantes de los autores son que la heurística de Lakatos proporciona un ambiente en el cual la actividad matemática cobra sentido. En el salón de clase cuando los estudiantes se ven responsables del desarrollo de las ideas matemáticas, la actividad se vuelve fuertemente similar a la realizada por los grandes matemáticos. Las matemáticas pueden ser reinventadas en el salón de clase a través de procesos análogos a los descritos por Lakatos en *Pruebas y refutaciones*. El método de Lakatos puede ser beneficioso y adaptado a la educación matemática, y dicho método le da sentido a la actividad matemática en la cual los estudiantes son activamente involucrados en el desarrollo de las ideas matemáticas.

Se pretende que en el modelo didáctico que el autor plantea en la presente tesis los estudiantes empleen la heurística de Lakatos en la demostración de teoremas y en la resolución de problemas en general de la matemática discreta. También se desea explorar la incidencia de la heurística en un curso de matemáticas discreta. Se piensa que el curso resultará motivador si en él los estudiantes se comprometen e involucran en la actividad matemática, los conceptos se construyen de manera más robusta, y se recrean situaciones similares a aquellas de los matemáticos profesionales, desarrollando así el pensamiento matemático.

La heurística de Lakatos llevada al aula de clase se considera como una herramienta que permite que el estudiante siempre esté pensando. Si los estudiantes se involucran en la actividad matemática los resultados que se obtienen de dicho compromiso son prometedores y es precisamente el método de *Pruebas y refutaciones* un puente hacia dicho compromiso.

1.3.3. Examining the Method of Proofs and Refutations in Pre-Service Teachers Education[34]

Fatih Karakus y Mesut Butun inician su artículo exponiendo opiniones de diferentes investigadores que han llevado la teoría epistemológica de Lakatos al aula de clase.

Reichel (2002) asevera que las matemáticas no deben enseñarse como un conjunto de verdades absolutas estructuradas a través de un conjunto de axiomas, sino que se debe comenzar con problemas, conjeturas y estrategias. Atkins (1997) asegura que el método de Lakatos proporciona estrategias para involucrar a los estudiantes en la solución de problemas, y en crear un ambiente en el cual los estudiantes razonan matemáticamente, se comunican matemáticamente y hacen conexiones matemáticas.

Sriraman 2006 afirma que uno de los objetivos globales del profesor de matemáticas es mostrar a los estudiantes las conexiones entre los diferentes tópicos de la matemática, y que, al respecto, el ambiente basado sobre conjeturar, demostrar y refutar ayuda al profesor a cumplir este objetivo. Por otra parte, el método proporciona una oportunidad a los estudiantes para mejorar su conocimiento usando un método inductivo en lugar de uno deductivo.

Larsen y Zandieh 2008 concluyeron que el método es una herramienta útil para el ambiente en el aula en el cual los estudiantes participan activamente y mejoran su pensamiento.

[34] Karakuş, F., & Bütün, M. (2013). Examining the method of proofs and refutations in pre service teachers education. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 27(45), 215-232.

En este estudio Fatih Karakus y Mesut Butun tienen como propósito principal analizar la discusión que tienen profesores en formación entorno a una conjetura, en un ambiente que es estructurado sobre la base del método de Lakatos. Dos cuestiones de investigación se formulan.

- ¿Cómo funciona el método de Lakatos?
- ¿Qué ocurre durante las etapas del método?

La investigación se llevó a cabo con 24 profesores en formación en educación en matemática elemental. La relación entre el perímetro y el área de un rectángulo fue la conjetura a considerar. Para su análisis los autores tuvieron en cuenta la categorización que hacen Larsen y Zandieh 2008 en términos de las respuestas de los estudiantes durante la actividad matemática.

- Monster-barring. Se rechaza el contraejemplo, el cual no se constituye un ejemplo verdadero del concepto relevante. Se evidencia cuando se aclara o modifica un concepto fundamental
- Exception-barring. La conjetura se modifica cuando surge un contraejemplo sin hacer referencia a la demostración.
- Proof-analysis. La conjetura se modifica con el fin de que la demostración funcione más que simplemente excluirlo del dominio de la conjetura.

Las categorizaciones anteriores surgieron durante el episodio de clase descrito por Fatih Karakus y Mesut Butun, clase que fue llevado a cabo por medio del método de Lakatos. Aseguraron que los estudiantes demostraron, probaron sus demostraciones, crearon contraejemplos, modificaron la conjetura, y pronto ellos completaron los pasos en la formación del conocimiento matemático de acuerdo a la filosofía falibilista de Lakatos.

Los autores concluyeron que el método puede ser usado como estrategia de enseñanza. Los estudiantes experimentaron la producción del conocimiento matemático sin usar un texto o un experto.

Es importante señalar que el proyecto de investigación desarrollado por el autor de esta tesis pretende analizar otros aspectos además de los que en este estudio se mencionan sobre el método de Lakatos llevado al aula de clase. Cuestiones como ¿de qué manera repercute el método en el desarrollo del pensamiento matemático?, ¿en la actitud del estudiante?, ¿en las creencias acerca de la matemática? y ¿en el aprendizaje de conceptos robustos de la matemática discreta? son analizadas en detalle.

1.3.4. Proofs and Refutations as a Model for Defining Limit [35]

Swinyard y Larsen describen la manera como estudiantes universitarios razonan acerca de la definición formal de límite. Los autores aseveran que pocas investigaciones se dirigen hacia cómo se formalizan los conceptos intuitivos. Se diseñaron dos experimentos de enseñanza con cuatros estudiantes quienes tenían una comprensión robusta informal de límite, mostraban interés por la construcción de las ideas matemáticas y ninguno de los cuales había visto antes la definición épsilon-delta de límite.

En ambos experimentos los estudiantes tenían que generar una definición precisa de límite. Los estudiantes intentaron matematizar su comprensión informal de límite siguiendo muy de cerca las etapas descritas por Lakatos. En otras palabras, en esta ocasión no se pretendía que los estudiantes demostraran una conjetura, que es cómo la heurística de Lakatos se aplica en *Pruebas y refutaciones*, sino que generaran definiciones precisas siguiendo esa heurística.

Aunque el problema inicial consistía en definir puntualmente el significado del límite de una función en un punto $x = a$, debido a su complejidad y siguiendo a los métodos de Polya, se sugirió primero definir el límite de una función cuando x tiende a infinito, esto es, definir $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

[35] Swinyard, C.; Larsen, S (2010). Proofs and refutations as a model for defining limit. In: annual conference on research in undergraduate mathematics education, 13th, 2010, Raleigh, NC. Proceedings… Raleigh, North Carolina: RUME, 2010. p. 1-12. Available at: <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/>. Accessed at: Nov. 2015.

En primer lugar los estudiantes realizaron dibujos de ejemplos y no ejemplos de límite y apareció la primera definición conjeturada de los estudiantes: "sobre el intervalo (b, ∞) la función necesita acercarse a algún valor finito *L*".

De acuerdo a Zaslavsky los estudiantes desarrollaron definiciones de conceptos a través del proceso de monster-barring, no obstante Swinyard y Larsen aseguran que los estudiantes se involucran también en el proceso que Lakatos denomina proof analysis.

Básicamente el proceso inicia con una definición conjeturada, surgen contraejemplos y los estudiantes aplican monster-barring donde un resultado del proceso es la clarificación o modificación de una definición subyacente, por ejemplo, a través de diversos ejemplos y no-ejemplos los estudiantes sintieron la necesidad de clarificar el significado de acercarse a un valor *L*.

Después de refinar la definición surgían nuevos contraejemplos y los estudiantes se involucraban también en el proceso de proof-analysis. Por ejemplo, en algún punto los estudiantes construyeron la siguiente definición: "cuando x toma valores más grandes entonces la distancia $|L - y|$ decrece". Aparece el contraejemplo y en lugar de excluir el contraejemplo se revisa la definición conjeturada y se analiza por qué el contraejemplo es problemático. Este proceso Swinyard y Larsen lo asimilan con el de proof-analysis.

Todo el proceso se puede resumir en:

- Se presenta la definición
- Se pone la definición a prueba
- Surgen contraejemplos
- Se aplican los procesos de monster-barring y proof-analysis

- Se modifica la definición
- Se repite el proceso.

Es importante resaltar algunas de las consideraciones de los autores respecto a los experimentos realizados. Afirman que se proporcionó un contexto donde los estudiantes fueron creativos además de ser una situación consistente con el método de *Pruebas y refutaciones*. Los estudiantes agradecieron lo original de este tipo de método de enseñanza aprendizaje. El método de *Pruebas y refutaciones* simula las actividades que desarrollaron los grandes matemáticos y finalmente, una idea muy valiosa de Larsen y Zandieh, cuando los estudiantes se ven responsables del desarrollo de las ideas, la actividad matemática puede ser fuertemente similar a la de los matemáticos creativos.

Conclusiones parciales Capítulo 1

Este capítulo muestra diferentes publicaciones e investigaciones acerca de la matemática discreta, de la heurística de Lakatos en el aula de clase y de la enseñanza de la demostración. Con respecto a la matemática discreta se puede resaltar los siguientes aspectos: el primero es la característica motivadora de los problemas inmersos en esta rama de la matemática y el segundo son los esfuerzos realizados en países como Estados Unidos, para que esta asignatura sea parte integral del currículo de matemáticas, sin embargo en Colombia se requieren mayores investigaciones.

Por otra parte, los anteriores artículos sobre la heurística de Lakatos en el aula muestran como este es usado en la construcción de definiciones y en la exploración de conjeturas, en ramas como el cálculo, geometría y algebra abstracta. En esta oportunidad se pretende llevar el método de la heurística de Lakatos en un curso de matemáticas discretas y analizar la relación existente entre el método la resolución de problemas y la demostración matemática.

CAPÍTULO 2. MARCO TEORICO

Dos conceptos importantes que se deben tener en cuenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son, por un lado, el entendimiento matemático y por otro el desarrollo del pensamiento matemático. Harel, G (2005) hace una distinción entre maneras de entender y maneras de pensar, distinción que se considera importante retomar en la presente investigación. En primera instancia Harel distingue tres actividades matemáticas:

1. Comprensión del contenido matemático
2. Resolución de problemas
3. Justificación o refutación de una afirmación matemática

Dentro de estas actividades matemáticas, las maneras de entender se refieren a:

- El particular significado que una persona le da a un concepto
- La particular solución que una persona le da a un problema
- La particular justificación o refutación que una persona le da a una afirmación matemática.

Por otra parte, la manera de pensar de una persona involucra estas tres categorías interrelacionadas:

- Creencias que la persona tiene de las matemáticas
- Estrategias para resolver problemas
- Estrategias de demostración.

Entre las maneras de pensar de una persona pueden encontrarse creencias como: "la solución de un problema no debe tomar más de 10 minutos"; "la forma correcta de aprender matemáticas es mirar una demostración formal y replicarla entendiendo los pasos lógicos deductivos"; "resolver problemas me hace mejor matemático", etc. Por otra parte, algunas estrategias de resolución de problemas que una persona aplica para una gran cantidad de problemas pueden ser: “los cuatro pasos de Polya”; “buscar palabras claves dentro del problema”; “buscar ejemplos particulares”, “encontrar la solución por tanteo”, entre muchas otras más. Por consiguiente, una idea importante de lo que significa desarrollar pensamiento matemático es lograr un cambio positivo en la manera de pensar; por ejemplo, si una persona siempre tiene como estrategia de resolución de problemas el tanteo, el brindarle a través de la misma resolución de problemas, estrategias más eficaces, aporta un cambio en la manera de pensar y por ende en el desarrollo del pensamiento matemático. Una de las hipótesis de la presente investigación es que el método de Lakatos proporciona no sólo una nueva estrategia de resolución de problemas que es la heurística en sí misma, sino que además implica nuevas y mejoradas estrategias para la resolución de problemas, lo que significa que hay un avance en el desarrollo del pensamiento matemático. Es decir, una característica del desarrollo del pensamiento matemático es concebir toda una gama de estrategias útiles, prácticas, lógicas, creativas e innovadoras a la hora de enfrentarse a un problema significativo. Por otra parte, las estrategias utilizadas en varios problemas cuyas soluciones deben ser demostradas son consideradas por Harel como maneras de pensar. No obstante, es necesario aclarar que Harel entiende por demostración aquel argumento que se utiliza para convencerse a sí mismo y para convencer a otros. El mejorar estas estrategias de justificación hace parte del desarrollo del pensamiento matemático.

2.1. La demostración matemática en el aula de clase

En segundo lugar, nos centramos en discutir acerca de la noción de *demostración en matemáticas*. A partir de la preocupación por fundamentar la matemática que surgió en el siglo XIX, aparecieron las escuelas logicista, formalista e intuicionista, que tenían puntos divergentes, pero también puntos en común, como por ejemplo ser rigurosos a la hora de establecer una demostración, y se crea la idea que una demostración en matemáticas es aquella que se presenta de manera rigurosa, restringiendo el papel de la intuición. Dieudonné (1971) matemático francés de la escuela Bourbakí afirmó:

“aquí la necesidad absoluta desde ahora sobre cada matemático preocupado con la decencia intelectual a presentar sus razonamientos en forma axiomática, en una forma donde las proposiciones son limitadas por virtud solamente de las reglas de la lógica, toda evidencia intuitiva que pueden sugerir expresiones a la mente sean deliberadamente ignoradas (traducido del inglés).”[36]

No obstante, otros puntos de vista más recientes acerca de la demostración no consideran que el aspecto más significativo de la matemática sea el razonamiento deductivo llegando a la demostración formal. En este punto se resalta el hecho de que, frente a una demostración enseñada exclusivamente a partir del razonamiento deductivo, puede suceder que alguien entienda los pasos lógicos sin poder juzgar el significado de la misma. Entonces surgen preguntas como las siguientes. ¿Cómo se le ocurrió al autor esa demostración? ¿Será que tenía una mente sobrenatural? E irónicamente la persona no quedará con total convicción de la veracidad de la demostración. Por lo tanto, es relevante considerar puntos de vista como el de Davis, (1986): una demostración es un argumento necesario para validar una declaración, un argumento que puede asumir diferentes formas siempre y cuando sea convincente. Demostración ha sido descrita como un foro de debate. Por otra parte, parafraseando a Lakatos, 1976, las matemáticas, de hecho, crecen a través de una incesante mejora de suposiciones por especulación criticismo, por la lógica de pruebas y refutaciones.

Estos dos puntos de vista de las matemáticas y por ende de la demostración matemática sugieren que ésta es una actividad social, en la cual surgen hipótesis, conjeturas, preguntas, supuestos, ejemplos, contraejemplos y toda una gama de herramientas e interacciones sociales que la demostración formal no tiene en cuenta y es incapaz de reflejar.

[36] Dieudonne, J. A., (1971), ‘Modem axiomatic methods and the foundations of mathematics’, in F. Le Lionnais (Ed.), *Great currents of mathematical thought* (Vol. l), Dover, New York.

A partir de estos puntos de vista de la demostración surgen preguntas como: ¿Debe ser descartada la demostración formal en la enseñanza de la matemática?; Y si es así, ¿acaso no es ésta una práctica de mucha relevancia dentro de la comunidad científica?; y ¿Qué aspectos formales se deben, y cuáles no, enseñar en el aula?

La presente investigación tiene en cuenta ambos puntos de vista, pero con un énfasis predominante a la matemática informal, a la demostración desde el punto de vista de construcción a través del proceso heurístico de pruebas y refutaciones. En este proceso se plantea una importante relación con la resolución de problemas y con el desarrollo del pensamiento matemático, y finalmente después de toda una construcción social de debate, preguntas, ejemplos, contraejemplos, refutaciones, demostraciones, etc., se dará paso a una demostración que debe ser puesta a la crítica del estudiante mismo, de sus compañeros y del profesor, procurando evitar cualquier ambigüedad y siempre con la opción de mejorarla. Dentro de las hipótesis planteadas se considera que la demostración que se construye a través de un proceso de debate social, de pruebas, ejemplos y contraejemplos proporciona al estudiante una visión clara de la conjetura y de la demostración además de potenciar el pensamiento matemático.

2.2. Pruebas y refutaciones. Lakatos

Imre Lakatos presenta una nueva visión epistemológica de la matemática. En los años sesenta del siglo pasado Lakatos escribe su tesis doctoral en la Universidad de Cambridge centrada en un diálogo heurístico acerca de la fórmula de Euler y elabora dos artículos adicionales acerca de la lógica de la creación del conocimiento matemático, recopilados póstumamente en la obra titulada *Pruebas y refutaciones*.

Pruebas y refutaciones es una obra que ataca el formalismo de Hilbert en el cual el conocimiento matemático se construye a través de la axiomatización, definiciones rigurosas, teoremas y demostraciones formales; éstos últimos se reducen a derivaciones aplicando reglas de transformación específicas a fórmulas sin significado, a partir de fórmulas primitivas. Aun en la metamatemática, Hilbert exige que las demostraciones se presenten a través de un razonamiento lógico deductivo partiendo de los axiomas y definiciones, apoyándose en teoremas ya demostrados. Lakatos en cambio toma una posición epistemológica en la cual se muestra la construcción del conocimiento matemático de una manera informal y empírica, de hecho, la matemática es concebida por Lakatos como una ciencia cuasi empírica. "*las matemáticas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino mediante la incesante mejora de las conjeturas gracias a las especulaciones y la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones*"[37].

En su obra *Pruebas y refutaciones* Lakatos crítica la manera como algunos textos presentan el conocimiento matemático, particularmente en el área del análisis real. Señala que una de las metodologías de estos textos es dar una definición, mirar algunos ejemplos y seguidamente dar un teorema demostrándolo haciendo uso de la definición dada y de otros teoremas ya establecidos, y muestra cómo esto dista de la manera en que la comunidad matemática hace matemáticas. Un ejemplo de esta situación que se ve frecuentemente en el aula de clase sería la siguiente. El profesor da una definición: "Decimos *que una sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *con* $n= 1,2,3,\ldots$, *converge uniformemente en E hacia una función f si para cada* $\varepsilon > 0$ *hay un entero N tal que* $n \geq N$ *implica que* $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ *para todo* $x \in E$."[38]

Es importante señalar que la definición no es muy fácil de asimilar y además el estudiante no tendrá claridad sobre la razón de ser de la definición. ¿Por qué surge? ¿De dónde surge? ¿Quién la planteó? Es probable que empiece a pensar que las definiciones surgen de la nada, o que algún matemático con capacidades inimaginables e inteligencia incomprensible e incuestionable las haya propuesto. Más de 30

[37] Recuperado el día 2 de marzo del 2015 del link: "http://revistasuma.es/IMG/pdf/30/125-130.pdf"
[38] Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3). New York: McGraw-Hill.

años de debate, propuestas, contraejemplos, preguntas y conjeturas entre diferentes matemáticos están detrás de esta definición final aceptada por la comunidad científica. No es sólo cuestión de considerar la historia de la matemática, sino que en esta construcción de conocimiento, Lakatos se da cuenta, y permite que sus lectores se den cuenta, de la heurística empleada.

Volviendo a la situación de clase, después de dar la definición el profesor muestra algunos ejemplos de sucesiones de funciones que convergen uniformemente y otras que no, y seguidamente se establecen algunos teoremas junto con sus demostraciones. Por ejemplo,

"La sucesión de funciones $\{ fn \}$, definida en E, converge uniformemente en E si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que *m ≥ N; n ≥ N;* $x \in E$ *implica que* $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$*."*[39]

Ahora bien, se efectúa el procedimiento con otros tres teoremas para finalmente obtener el siguiente:

"Si $\{ fn \}$ es una sucesión de funciones continuas en E, y si $f_n \to f$ uniformemente en E, entonces f es continua en E."

Es una clase con un estilo deductivista la cual, como lo expresa Lakatos (1976), esconde la lucha y oculta la aventura; la historia muestra que el problema se originó con la conjetura: "¿Es la función límite de una sucesión convergente de funciones continuas, continua?". Por otra parte, una clase que tiene en cuenta la heurística de Lakatos se desarrollaría de la siguiente manera. Se inicia con la conjetura que originó el debate, se hace una exploración de la conjetura, se analizan los contraejemplos que expuso Fourier teniendo en cuenta la definición de Cauchy de continuidad, se analiza la demostración que dio Cauchy de la conjetura, y se expone el lema culpable respecto del cual los contraejemplos globales son también locales. Luego se mejora la demostración así como la conjetura lo que da paso a la formulación de un nuevo concepto, la de convergencia uniforme.

[39] Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3). New York: McGraw-Hill

La epistemología de la matemática desde el punto de vista de Lakatos muestra el crecimiento de esta ciencia como proceso de la actividad humana y no se limita a mirar la matemática como un producto finalizado que se da por arte de magia. Lakatos describe el estilo deductivista y el heurístico de la siguiente manera: "El estilo deductivista desgaja las definiciones generadas por la demostración de sus "pruebas-antepasadas" y las presenta aisladamente de un modo artificial y autoritario. Oculta los contraejemplos globales que han llevado a su descubrimiento. Por el contrario el estilo heurístico pone en el candelero esos factores y hace hincapié en la situación problemática: hace hincapié en la lógica que ha dado a luz el nuevo concepto."[40]

Las etapas explícitas que son consideradas en el método heurístico de Lakatos, son[41]:

1. Se formula una conjetura primitiva.
2. Se pone la conjetura a prueba (un experimento mental o argumento aproximado, que descompone la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas).
3. Surgen contraejemplos globales (contraejemplos de la conjetura primitiva).
4. Se reexamina la demostración. El "lema culpable", respecto al que el contraejemplo global es un contraejemplo local, queda identificado.

Estos cuatro estadios constituyen la parte esencial del análisis de la demostración. Otros estadios a considerar son los siguientes.

5. Se examinan las demostraciones de otros teoremas por si el lema recientemente descubierto o el nuevo generado por la demostración apareciese en ellos.

---

[40] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press. Pag 168.
[41] Ibidem Pag 149-150.

6. Se comprueban las consecuencias aceptadas hasta el momento de la conjetura original ya refutada.
7. Los contraejemplos se convierten en ejemplos nuevos; se abren nuevos campos de investigación.

La siguiente gráfica es una buena explicación del proceso de la heurística de pruebas y refutaciones:

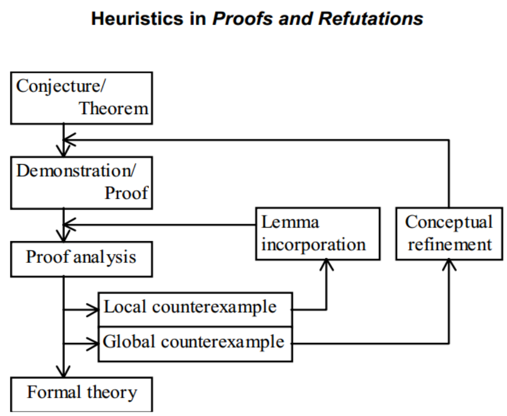


Figura 17. La heurística en pruebas y refutaciones[42]

Lakatos describe algunos métodos importantes a los que el estudiante puede recurrir para responder cuando se enfrenta a un contraejemplo en el proceso de considerar una conjetura. El primero es el <u>monster-barring</u>, el cual es una manera de excluir un contraejemplo no considerándolo como verdadero dentro del dominio de ésta, lo cual implica la aclaración de un concepto inmerso en la conjetura. El segundo es <u>exception-barrring</u> en el cual no se desecha el contraejemplo, pero tampoco la conjetura; este método permite modificar la conjetura dentro de un dominio de validez. Y por último, se tiene el método de pruebas y refutaciones en el cual se distingue entre contraejemplos globales y locales con la finalidad de incorporar un lema en la conjetura.

[42] Recuperado el 7 de Marzo del link: http://hps.elte.hu/~kutrovatz/LakatosEng.pdf

El trabajo de Lakatos es la base para el presente trabajo de investigación. Cada problema presentado a los estudiantes se desarrollará teniendo en cuenta las etapas de la heurística junto con el énfasis en la justificación coherente. En este orden de ideas, propuesto un problema, se abre un espacio para que los estudiantes lo exploran, lo entienden y lo analizan; después de esta fase exploratoria el propósito es que se socialicen las diversas estrategias. Muchas variables pueden surgir en este punto, no obstante, una primera etapa de la heurística se hace observable: la etapa exploratoria. Ahora bien, de las diferentes estrategias pueden surgir conjeturas construidas por los propios estudiantes; éstas son fundamentales para seguir adelante en las etapas de pruebas y refutaciones. Se socializa la conjetura y se inicia una tercera etapa, buscar contraejemplos a la conjetura o una demostración o una justificación lógica y convincente. En este punto pueden surgir los métodos de monster-barring y exception-barrring. Si en algún momento algún estudiante propone una demostración de la conjetura quizás el método de pruebas y refutaciones se evidencie. Por lo tanto, la demostración y la conjetura se mejoran y se escriben formalmente. Quizás no se puedan desarrollar todas las etapas de la heurística en un problema, pero siempre se buscará la oportunidad para llegar lo más lejos posible.

2.3. Matemática discreta

La matemática discreta es una rama de la matemática que en términos generales trata fenómenos discretos y procesos finitos en oposición a las funciones continuas y límites infinitos que son el soporte principal del cálculo y análisis clásico (Hart, Eric 1990). La definición de Monaghan y Orton (1994) la "describe como la matemática que trata conjuntos contables como los números naturales y los racionales, mientras que la matemática continua se preocupa por los conjuntos no-contables como los números reales". Rosen (2004) señala que es la parte que se dedica al estudio de los objetos discretos y que los tipos de preguntas que se resuelven haciendo uso de la matemática discreta incluyen:

- ¿De cuántas formas se puede elegir una clave de acceso a un equipo informático?

- ¿Cuál es el camino más corto entre dos ciudades usando un sistema de transporte?
- ¿Cuántas direcciones válidas de internet existen?

Retomando las anteriores definiciones, podemos resumir diciendo que la matemática discreta se focaliza en procesos y conjuntos numerables.

Dentro de los tópicos que diferentes autores incluyen en un curso de matemática discreta se encuentran las siguientes descripciones. Maffioli (1987) "incluye en un curso de matemática discreta la lógica matemática, teoría de conjuntos, estructuras algebraicas, álgebra booleana, teoría de grafos, combinatoria y teoría de computación". (Hart, 1985) incluye la lógica matemática, teoría de grafos, teoría de números, álgebra lineal y abstracta, algoritmos y probabilidad". Los *Principios y Estándares de la Matemática Escolar* del *NCTM* integran tres importantes tópicos de la matemática discreta: combinatoria, iteración y recursión, y teoría de grafos. Como se observa son varios los tópicos que un curso de matemática discreta puede abordar, y basado en ello se han seleccionado los temas que se van a considerar en el curso de la presente investigación, a saber, combinatoria, teoría de grafos, inducción matemática, teoría de juegos, y problemas transversales a otras áreas como a la geometría, teoría de números, teoría de conjuntos, y álgebra, entre otras.

Ahora bien, la matemática discreta es ampliamente aplicada en áreas como los negocios y la industria además en otras áreas como "la geología, química, gestión empresarial, informática e ingeniería", (Roa 2001). Rosenstein, Fransblau y Roberts (1997) enumeran una variedad de aplicaciones, asegurando que los tópicos de matemática discreta "*son usados en tomar decisiones en negocios y administración, por trabajadores en campos como telecomunicaciones y cómputo cuyo propósito es la transmisión de información, en biología, química y transporte. Cada vez más, la matemática discreta es el lenguaje de* *un amplio cuerpo de la ciencia y constituye la base para la toma de decisiones que los individuos hacen en su propia vida, en su profesión y como ciudadanos*"[43].

Como se acaba de mencionar, la matemática discreta es una rama bastante aplicada en otras áreas de conocimiento, pero su importancia no se acaba allí. En los Estándares del NCTM (2000) se afirma que "la matemática discreta debe ser una parte integral del currículo de matemáticas", es decir, que debe ser un área transversal a todas las demás ramas de la matemática. Sin embargo, para la escuela secundaria puntualmente en los Estándares se hace alusión a la enseñanza y comprensión profunda de las técnicas de conteo. El NCTM asevera que la matemática discreta posee características particulares muy importantes. Por ejemplo, Hart (2008) señala que "*esta rama no sólo incluye contenido matemático relevante sino que es un poderosos vehículo para la enseñanza y aprendizaje de los procesos matemáticos, y además sus contenidos son interesantes lo cual logra motivar a los estudiantes hacia el quehacer matemático*". Hart agrega que el "*trabajo con matemática discreta fortalece en el estudiante habilidades de razonamiento, demostración, resolución de problemas, comunicación, conexión y representación de distintas maneras".*[44] Algunos otros autores están de acuerdo en este punto afirmando que la "*matemática discreta es una excelente herramienta para mejorar las habilidades del pensamiento y de resolución de problemas*"[45]. Ian Anderson, Glasgow (2004) señala que quizás el campo de la matemática discreta puede ofrecer más problemas desafiantes pero accesibles para lograr que los estudiantes se interesen por la matemática. La perspectiva de Debellis, V. y Rosenstein, J. (2004) es que la matemática discreta deber ser vista no solamente como una colección de nuevos e interesantes tópicos

---

[43] Rosenstein, J.G., Franzblau, D., & Roberts, F. (Eds.). (1997). DIMACS *Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: Discrete mathematics in the schools*. (Vol. 36). American Mathematical Society and National Council of Teachers of Mathematics. (cita traducida al español por el autor de esta tesis)

[44] Hart, E. W. (2008*).* Navigating through discrete mathematics in grades 6-12. *Principles and Standards for School Mathematics navigations series*. Reston, VA: Author.

[45] RIvera-Marrero, O. (2007). The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses, tesis de doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.

de matemáticas, sino como un vehículo para que los profesores fomenten una nueva manera de pensar acerca de los tópicos de la matemática tradicional y nuevas estrategias para comprometer a sus estudiantes con el estudio de la matemática. Existe un acuerdo entre los diferentes autores en afirmar que los problemas de la matemática discreta son accesibles, motivadores y retadores, y por lo tanto se constituyen en herramienta para lograr que el estudiante se interese por la matemática.

Ahora bien, aunque diversos educadores matemáticos consideran importante la enseñanza de la matemática discreta en la escuela, aun no es desarrollada dentro de la práctica del profesor de matemáticas. Debellis y Rosenstein (2004) publican un artículo en el cual dan cuenta del status de la matemática discreta en las escuelas estadounidenses y aseguran que los profesores no están familiarizados con esta área. Por otra parte, son pocas las investigaciones que hasta el momento se tienen acerca del aprendizaje y enseñanza de esta rama de la matemática, y aún menos se han llevado a cabo en el nivel superior. Los diferentes artículos, como se puede observar en el estado del arte, discuten acerca de la importancia de la matemática discreta a nivel de la educación primaria, secundaria y media.

Hasta este punto es claro que la matemática discreta desempeña un rol importante en otras ciencias así como en la matemática misma. Además, existe una estrecha relación con la resolución de problemas que, puede argumentarse, es la principal actividad matemática, y esta relación se da en cuanto la matemática discreta proporciona problemas que envuelve al estudiante en una significativa actividad. El rol que desempeñará la matemática discreta de acuerdo a todo lo anteriormente mencionado, está en permitir buscar, analizar y preparar problemas que puedan motivar al estudiante debido a su simplicidad para entenderlos pero al reto que constituye resolverlos.

2.4. Resolución de problemas

"La resolución de problemas siempre ha sido el corazón de la actividad matemática"[46]. Diversos autores han considerado la actividad de la resolución de problemas fundamental en el proceso del aprendizaje de la matemática. Entre ellos se pueden destacar Kilpatick (1967); Schoenfeld (1985,1992); Krulik y Rudnik (1987), Lesh y Harel (2003), Borasi (1986); Rico (1988) Carrillo (1995); Puig (1996); Campistruos y Rizo (1996); González (1998); Cobo y Fortuny (2000); Socas (2001); Koichu, Berman y Moore (2003); Pochulu y Rodríguez (2012), entre muchos otros.

Algunas cuestiones que se consideran alrededor y a partir de la resolución de problemas son: ¿qué es un problema?, ¿cuál es su importancia en la educación matemática?, ¿cuál es el rol del docente bajo esta perspectiva?, ¿qué características debe tener un buen resolutor de problemas? Para intentar responder a estas preguntas, se remitirá a dos autores que han contribuido de manera trascendental a la teoría: George Polya y Miguel de Guzmán. En particular se centrará la atención en tres referencias teóricas: *How to solve it*[47] y *Mathematics and plausible reasoning*[48] de Polya y *Para pensar mejor*[49] de Miguel de Guzmán.

Polya (1973) asegura que tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata. Ahora bien, quien se sumerge en la resolución de problemas obtiene diversos beneficios intelectuales y emocionales.

Polya (1973) menciona que la solución a un gran problema es un gran descubrimiento, pero hay pequeños descubrimientos en cualquier problema resuelto. Cualquier problema por modesto que sea, si es

---

[46] J. M. Sigarreta, J. M. Rodríguez & P. Ruesga (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica

[47] Pólya, G. (I973). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Stanford University, second edition, Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

[48] Pólya, G. (1990). Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (Vol. 1). Princeton University Press.

[49] De Guzmán Ozámiz, M. (2006). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.

desafiante para el resolutor, lo sumerge en una verdadera actividad matemática en la cual se experimenta la tensión, en ocasiones la frustración, el desafío y finalmente el sabor de triunfo del descubrimiento.

La resolución de problemas entonces se convierte en una herramienta que tiene el profesor para involucrar y motivar al estudiante a comprometerse con la actividad matemática. Polya (1973) asegura que, si se desafía la curiosidad de los estudiantes a través de problemas proporcionales a su conocimiento, orientándolos con cuestiones estimulantes, entonces, se puede generar gusto por este quehacer e independencia de pensamiento. Es más, el afirma que las matemáticas se vuelven deseables como cualquier *hobby* estimulante. Aunado a esto, quien se interesa en ser un mejor resolutor de problemas mejora su pensamiento y razonamiento matemático.

Polya (1990) distingue entre dos tipos de razonamiento: el demostrativo y el plausible. El primero se refiere a los procesos deductivos por los cuales se establece un enunciado matemático como verdadero. El producto final de una conjetura matemática se resume en un teorema con su respectiva demostración lo que conlleva todo un trabajo a priori denominado como razonamiento plausible. "…ciertamente aprendemos a demostrar pero también aprendemos a conjeturar"[50]

El pensamiento plausible está directamente relacionado con la creatividad matemática, en el cual se experimenta, se conjetura, se explora, se analiza, se formulan y reformulan ideas matemáticas, esto con el fin de darle solución a una afirmación matemática. La relación entre la resolución de problemas y el razonamiento plausible es evidente. Se pretende que el estudiante mejore su creatividad matemática a través del trabajo autónomo; esto se fomenta a través de la propuesta de problemas interesantes, motivadores y retadores. Polya (1990) refuerza lo anterior diciendo que el uso efectivo del razonamiento

[50] Polya, G. (1990). Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (Vol. 1). Princeton University Press.

plausible juega un rol esencial en la resolución de problemas. Algunos tipos de razonamiento, como el inductivo y el analógico, son clasificados por Polya (1990) dentro del razonamiento plausible.

La inducción comienza con la observación de algunos casos sencillos los cuales generan una conjetura, luego se intenta descubrir la veracidad de ésta. Para este propósito se exploran casos más complejos para observar cómo se comporta la conjetura. Los casos particulares precedentes a la formulación de la conjetura y los posteriores son denominados como *suggestive* y *supporting* respectivamente. Polya (1990) asegura que se debe tener una actitud inductiva, esto quiere decir que se debe estar listo para revisar cualquiera de las creencias y tener la capacidad de cambiar una creencia cuando hay una razón convincente para hacerlo, pero no se debe cambiarla, aunque sea sin sentido, sin una buena razón.

La analogía es un tipo de similitud, por ejemplo, el triángulo y la pirámide se pueden mirar como figuras análogas en el sentido que, en un plano dado un segmento y un punto que no está en el segmento, luego todos los segmentos unen el punto con un punto del segmento forman un triángulo. Ahora, considere un polígono en el espacio y un punto fuera del plano del polígono, los segmentos que unen el punto con el polígono forman una pirámide. El rol que desempeña la analogía es observar la conjetura en casos análogos. Siendo categorizada la analogía como razonamiento plausible, desempeña un rol importante dentro de la resolución de problemas y específicamente en el proceso de conjeturar.

El libro de Miguel de Guzmán (2006) “Para pensar mejor” abarca un tópico denominado la actividad subconsciente en la resolución de problemas; en él se describen algunas anécdotas en el cual grandes matemáticos resuelven u obtienen una idea brillante en un momento ajeno a la actividad matemática. Estas iluminaciones surgen después de un largo período pensando en determinado problema. Se puede aseverar que, al atrapar al estudiante con un problema estimulante, estas iluminaciones pueden surgir evidenciando así el desarrollo de la creatividad matemática.

Ahora bien, con respecto al rol que desempeña el docente en el aula de clase, Polya (1976) dice que la tarea más importante que tiene es ayudar al estudiante, la cual es bastante ardua. Principalmente sugiere que el docente fomente el trabajo independiente, pero sin llegar a dejar al estudiante completamente solo; para lograr esto es necesario comprender cómo está pensando el estudiante con el fin de guiarlo a través de preguntas cuidadosamente construidas. Para un buen desempeño del rol del profesor es fundamental también conocer dos aspectos, el primero es qué características debe tener un buen resolutor de problemas y qué sugerencias pueden ayudar al estudiante a solucionar un problema dado.

Miguel de Guzmán (2004) enuncia algunas características que un experto tiene en la resolución de problemas, entre las cuales se tienen: Una actitud inicial sana, una preparación adecuada para afrontar el problema, la disponibilidad de estrategias variadas, una constante atención a la iluminación, inspiración o intuición, y una perseverancia tenaz.

De Guzmán (2004) describe también las reglas de Descartes, las cuales son los procedimientos a realizar de un buen resolutor de problemas, y que incluyen las siguientes.

- Conviene estimar la magnitud de los problemas que nos enfrentamos.
- Ante un problema conviene ensayar herramientas propias originales.
- Conviene reducir lo complejo a lo simple.
- Para adquirir una buena destreza en el arte de la resolución de problemas conviene ejercitarse en recorrer con método los caminos que ya han sido descubiertos por otros.
- El experto en la resolución de problema permanece abierto a la utilización de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria.

Ahora bien, tanto Polya como de Guzmán describen algunas fases o estrategias que el resolutor debe tener en cuenta. Por un lado, Polya enuncia cuatro etapas: comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan y mirar hacia atrás.

De Guzmán por otra parte enuncia estas etapas: familiarizarse con el problema, buscar estrategias diversas, empezar por lo fácil, experimentar, realizar un esquema, figura o diagrama; buscar un problema semejante, suponer el problema resuelto, llevar adelante la estrategia, revisar el proceso y sacar conclusiones.

Las características, estrategias y sugerencias descritas anteriormente son de suma importancia en el desarrollo de la presente investigación, pues la resolución de problemas es un aspecto clave dentro de los objetivos de la tesis. Las etapas tanto de Polya como de de Guzmán serán tenidas en cuenta por el docente y por los estudiantes en el aula de clase; esto quiere decir que el investigador prudentemente, clase a clase fomentará dichas fases.

Por otra parte, el método de Lakatos y la teoría de resolución de problemas se relacionan claramente. Al proponer un problema a los estudiantes, se inicia con una fase exploratoria y en este punto todas las recomendaciones, sugerencias, fases, consejos que Polya y de Guzmán enuncian se ponen en práctica, desde las sugerencias del rol del docente hasta las que se formulan para ser un buen resolutor.

El razonamiento plausible de Polya se evidencia en el aspecto informal de la heurística de Lakatos, tal es el caso por ejemplo de la inducción. Este aspecto informal, tal como lo muestra tanto Lakatos como Polya, es de suma importancia en la resolución de problemas y en la construcción del conocimiento matemático. Para la presente investigación es un aspecto totalmente crucial. La teoría formal de Lakatos, la última etapa que se identifica en el proceso, es análogo al razonamiento deductivo de Polya y es también tenido en cuenta, pues sería trascendental llegar hasta este punto en el aula de clase.

2.5. ¿Que son las matemáticas? Una perspectiva desde la filosofía y la matemática

En esta sección se analizan las posturas del matemático Timothy Gowers y del filósofo Carlo Celucci relacionadas con la cuestión de si el hacer matemáticas y el método fundamental de las matemáticas es resolver problemas o construir teoría (demostrar teoremas). Como se apreciará la posición de Gowers es relativa mientras que la posición de Celucci es absoluta. Gowers en su artículo "The Two Cultures of Mathematics"[51] realiza una distinción entre aquellos matemáticos cuyo principal objetivo es resolver problemas y aquellos cuya preocupación primordial es la comprensión y la construcción de teorías, dejando en claro Gowers que todo matemático se dedica a las dos facetas de la actividad matemática. Gowers utiliza dos afirmaciones para seleccionar una de ellas y así indicar a cuál grupo pertenece el matemático que elige. Si el propósito de solucionar problemas es para comprender mejor las matemáticas, el matemático está situado dentro del grupo de los que privilegian la construcción de teoría, pero si el propósito es comprender las matemáticas para capacitarse y ser un mejor resolutor de problemas, él está situado entre los que enfatizan la solución de problemas. Celucci por otra parte en su artículo "Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?"[52] discute desde un punto filosófico la naturaleza de las matemáticas. En su concepto, decir que la esencia de la matemática es solucionar problemas está fuertemente ligado con (o quizás equivalente a) decir que el método de las matemáticas es el analítico, mientras que asegurar que la matemática es esencialmente demostrar teoremas expresa el punto de vista que el método de las matemáticas es el método axiomático.

Tanto Celucci como Gowers coinciden que es innegable que desde la praxis del matemático las matemáticas involucran ambas actividades. Al respecto Celucci asevera:

[51] Gowers, W. T. (2000). The two cultures of mathematics. *Mathematics: frontiers and perspectives*, *65*.
[52] Cellucci, C. (2015). Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?. *Foundations of Science*, 1-17.

"*desde el punto de vista de los matemáticos esta respuesta debería ser perfectamente justificada porque, en su práctica los matemáticos solucionan problemas y demuestran teoremas* (traducido del inglés)."[53] y Gowers escribe: " así que cuando yo digo que los matemáticos pueden ser clasificados dentro de os que construyen teoría y resuelven problemas, yo estoy hablando acerca de su prioridad, más que decir que ellos están exclusivamente a solo un tipo de actividad matemática (traducido del inglés)."[54]

Aunque hay una estrecha relación entre el contenido de los dos artículos, también existen diferencias. Gowers, siendo matemático, muestra la diferencia entre las dos culturas y concluye que ambas son de igual importancia para el desarrollo de la matemática, aunque se preocupa porque una parte preponderante de la comunidad matemática enfatiza la construcción de teorías. En cambio, Celucci, quien es filósofo, argumenta que desde una perspectiva filosófica los dos puntos de vista del método matemático son opuestos. Celucci finalmente concluye que solamente el punto de vista que la matemática es solucionar problemas es sostenible.

La postura de Gowers se analiza desde la matemática pura. Una primera apreciación que hace Gowers es que los que construyen teorías aseguran que esta actividad es el núcleo de la matemática y temas como la combinatoria no son altamente relevantes para los objetivos principales a los que apuntan las matemáticas. También Gowers afirma que los temas de moda son aquellos en los que se enfocan los constructores de teoría. Gowers, por medio de su artículo, rechaza las críticas que se hacen a los temas que son menos reconocidas y enfoca sus argumentos en defensa de la combinatoria. Sin embargo, afirma que estas mismas ideas se aplican a otras áreas.

---

[53] Cellucci, C. (2015). Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?. *Foundations of Science*, 1-17.
[54] Gowers, W. T. (2000). The two cultures of mathematics. *Mathematics: frontiers and perspectives*.

Ahora bien, algunas de las críticas que Gowers menciona son que la combinatoria es un conjunto de problemas aislados que carece de dirección, que le falta profundidad, que las ideas no tienen nexos interesantes con otras áreas de las matemáticas y que varios de los resultados no tienen aplicaciones.

Ante la crítica que la combinatoria no tiene una estructura en el sentido de establecer definiciones y axiomas para luego empezar a desarrollar teoremas y proposiciones, Gowers asegura que la prioridad en la combinatoria es resolver problemas así que el combinatorista estará enfocado en entender los resultados en este campo con el fin de mejorar sus habilidades como resolutor de problemas. Las ideas importantes en combinatoria no aparecen como teoremas sino como principios generales de amplia aplicabilidad, principios que incrementan el poder matemático del resolutor de problemas; y además muchos problemas que han parecido imposibles de resolver se tornan casi triviales a través de estos nuevos principios.

Por otra parte, ante la crítica de que la combinatoria es una asignatura superficial, esto en el sentido del poco conocimiento de fondo que se necesita para lograr resultados significativos, a diferencia de otras ramas como la teoría de números algebraicos, en la cual un teorema se juzga profundo porque requiere establecer una cadena de muchos otros resultados, Gowers afirma que aunque no hay una formal dependencia entre dos resultados, existe una dependencia en el sentido que la demostración de un resultado no hubiese tenido éxito sin ser consciente del principio general aplicado en otro resultado, y por lo tanto el área de la combinatoria como un todo progresa.

Por otra parte, Gowers escribe que esta rama de la matemática es altamente aplicada en la computación además de campos de la misma matemática como la probabilidad, el análisis armónico, la geometría de espacios de Banach, entre otros.

Como conclusión, los aspectos claves de la postura de Gowers son: (1) existe esas dos culturas en el quehacer de los matemáticos profesionales; (2) él considera que tanto el quehacer de los teóricos como el de los resolutores es importante; y (3) que es importante que esa asimetría se supere de modo que los resolutores de problemas aprendan un poco más de teoría y los teóricos sean más tolerantes con aquellos que no saben sobre lo que es la cohomologia. Tales esfuerzos enriquecen ambas culturas.

Celucci, por otro lado, analiza la cuestión de si la matemática es esencialmente solucionar problemas o demostrar teoremas. Para esto discute si el método de las matemáticas es el método analítico o el método axiomático.

El método analítico es el método en el cual, para enfrentar un problema, se buscan algunas hipótesis que sean condiciones suficientes para solucionar el problema. Las hipótesis se convierten en un nuevo problema que debe ser solucionado de esta misma manera; por lo tanto, la solución al problema se convierte en un proceso potencialmente infinito. El método analítico involucra tanto reglas deductivas como no deductivas.

Por otra parte, el método axiomático tiene como objetivo la justificación a través de conexiones lógicas. El método axiomático es la presentación final y el fundamento completo y lógico del conocimiento, según Hilbert, y es por ello que el método axiomático merece el primer lugar.

En el siglo XX, Hilbert, por medio de una serie de artículos, buscó formalizar la matemática a través de un sistema que estuviese libre de paradojas y que fuese completo. La preocupación de Hilbert se focalizó totalmente sobre la justificación de resultados ya encontrados. En el contexto de este trabajo, el método matemático sostenible fue el método axiomático, luego para Hilbert las matemáticas era demostrar teoremas.

El trabajo de Gödel en el mismo siglo fue fundamental para descartar el método axiomático como el método de las matemáticas, esto debido a:

1. El punto de vista que el método de las matemáticas es el axiomático requiere que toda la matemática consista de la deducción de enunciados a partir de axiomas dados. El primer teorema de incompletitud de Gödel asegura que existen enunciados que son ciertos pero no podrán ser deducidos de los axiomas.
2. El método axiomático requiere que el conocimiento matemático resulte de la deducción con base en enunciados que se haya probado son consistentes. El segundo teorema de incompletitud de Gödel implica que la consistencia que cualquier formalización suficientemente amplia en matemáticas no puede ser demostrada por medios absolutamente fiables.

Los teoremas de incompletitud de Gödel no sólo refutan el punto de vista que el método de matemáticas es el método axiomático sino que proporcionan evidencia para el punto de vista que el método de matemáticas es el método analítico. Esto debido a:

1. En el método analítico la solución a un problema es obtenida por medio de hipótesis no necesariamente pertenecientes al mismo campo. Dado que primer teorema de incompletitud de Gödel implica que la solución a un problema de un campo dado puede requerir hipótesis de otro campo, este resultado proporciona evidencia para el punto de vista que el método de las matemáticas es el método analítico.
2. El segundo teorema de incompletitud de Gödel no asume que la solución a un problema es definitiva, cierta y segura. En el método analítico las hipótesis para la solución de un problema son solamente provisionales, plausibles e inciertas, por consiguiente, ninguna solución a un problema puede ser absolutamente cierta. De nuevo se proporciona evidencia que el método de las matemáticas es el método analítico.

Celucci concluye, por lo tanto, que matemáticas es resolver problemas, específicamente solución de problemas a través del método analítico.

Gowers proporciona un punto de vista desde la matemática pura acerca de las dos culturas inmersas en este campo y concluye que ambas deben tener la misma importancia. Celucci desde un punto de vista filosófico concluye que las matemáticas es solucionar problemas. Ahora bien, ¿cuál es la perspectiva que sobrevive en la educación matemática? Ésta es una pregunta que el autor del presente trabajo de investigación desea comenzar a responder.

Conclusiones parciales capítulo 2

Se presentaron las fuentes teóricas centrales para el desarrollo de la presente investigación. En primer lugar presenta como la demostración matemática s ha llevado al aula de clase como un producto acabado siguiendo reglas deductiva. Una metodología alterna se desea aplicar en esta investigación y analizar su impacto. La sección 2.2 describe y resume la visión epistemológica de la matemática de Lakatos. La resolución de problemas es otro punto central para el desarrollo de la presente investigación. Se referencia el trabajo de Polya y Miguel De Guzmán en el cual proporcionan una visión del importante papel que esta desempeña en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y describen las características que debe tener un buen resolutor. En la última sección, se muestra dos posturas acerca de lo que son las matemáticas, Celucci por un lado asegura que la matemática desde un punto filosófico es en su esencia solucionar problemas y Gowers por otra parte concluye que tanto los resolutores de problemas como los constructores de teorías en la matemática desempeñan un rol importante. Con el presente trabajo de investigación se pretende dar un aporte en cuanto a estas posturas desde la perspectiva de la educación matemática.

CAPÍTULO 3. METODOLOGIA DE INVESTIGACION

3.1. Escenario

Para el desarrollo de esta investigación se tomó como grupo de estudio estudiantes de la licenciatura en matemáticas y de ingeniería de sistemas de la Universidad Antonio Nariño en la ciudad de Bogotá, Colombia, matriculados en el curso de Matemática Discreta ofertado por la Facultad de Ciencias y el programa de Licenciatura en Matemáticas. El curso tiene una duración de un semestre académico con seis horas semanales de clase.

3.2. Participantes

Los participantes en el estudio correspondiente fueron en total seis, de los cuales cinco pertenecían al programa de licenciatura en matemáticas y uno al de ingeniería de sistemas. Las edades de los integrantes del grupo oscilaban entre los 22 a los 32 años. Todos los seis estudiantes estudiaban y trabajaban simultáneamente. Al grupo se propuso investigar la conjetura número 1 (que más adelante se describe) y se desarrollaron tópicos de combinatoria, teoría de grafos y por último algunos pocos de teoría de juegos.

3.3. Método de investigación

En relación con el enfoque metodológico, la investigación se ajusta a un enfoque cualitativo, el cual desde un punto de vista muy general describe detalladamente todos los datos obtenidos a través de observaciones, entrevistas, encuestas, entre otros, que se han aplicado en una rama determinada del conocimiento, como son las ciencias humanas, naturales y físicas. En el presente trabajo de investigación las observaciones se realizaron en el aula, se registraron en video y se elaboraron diversas relatorías de clase. Adicionalmente, se diseñaron dos diferentes encuestas y una entrevista, todo esto con el fin, tal como lo describe el enfoque cualitativo, de recolectar datos para posteriormente analizarlos.

Otra característica del enfoque cualitativo es su carácter inductivo (de lo particular a lo general); el investigador se sumerge dentro de una comunidad para observar ciertos patrones que surgen por los medios mencionados, de la observación, encuestas, entrevistas o cualquier otro instrumento de recolección de datos para a partir de ellos hacer un análisis profundo que contribuye a generar elementos teóricos. Esterberg [2002] denomina ésta última una teoría fundamentada teniendo en cuenta que el investigador plantea un problema de investigación, y aunque el procedimiento no sea sistemático, el problema puede refinarse durante las etapas de recolección, implementación y análisis de resultados. Los métodos de recolección de datos no son estandarizados, aunque existen métodos comunes como la observación, la entrevista, la encuesta y el diario de campo. Las hipótesis en el enfoque cualitativo están sujetas a cambios durante el proceso de investigación. *"Los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos"*[55] (Sampieri, 2010).

El enfoque cualitativo permitirá retomar y analizar datos a través de los mecanismos que anteriormente se mencionaron, con el fin de obtener información detallada acerca de cómo la heurística de Lakatos funciona en el aula de clase, específicamente en el escenario y con los participantes que inicialmente se describieron. La encuesta número 2 y la entrevista permitirán describir observaciones hechas frente a asuntos puntuales, como por ejemplo la actitud del estudiante hacia la metodología basada en la heurística de Lakatos, el contraste con otras metodologías desarrolladas en clase y su (nueva) percepción de la matemática. Por otra parte, las tareas de los estudiantes, las clases registradas en video y las relatorías de clase contribuyen para describir el alcance en objetivos como la repercusión de la heurística en el entendimiento y la construcción de demostraciones, como herramienta eficaz para la resolución de problemas en general y el desarrollo del pensamiento matemático. A través de esta información

[55] Hernandéz Sampieri, R. (2009) Metodología de la Investigación (México, Mc Graw Hill).

recolectada y analizada, finalmente el enfoque cualitativo permitirá generar una nueva teoría, en este caso concreto, la generación y valoración de un modelo didáctico para la enseñanza de la matemática discreta en el nivel superior.

El investigador realiza una búsqueda de literatura de diversos autores que han publicado sobre problemáticas similares a la planteada en la presente investigación; no obstante, la revisión de literatura se puede complementar en cualquier etapa de la investigación. Esta etapa del método cualitativo se ha hecho efectiva en el Capítulo 1 del trabajo de investigación (Estado del arte). A continuación, se presenta un gráfico explicativo de las etapas del enfoque cualitativo tal y como éste se desarrolló; es importante señalar que las etapas no van en una dirección, sino que es posible, y a veces necesario, devolverse a etapas anteriores (ver Gráfico 2).

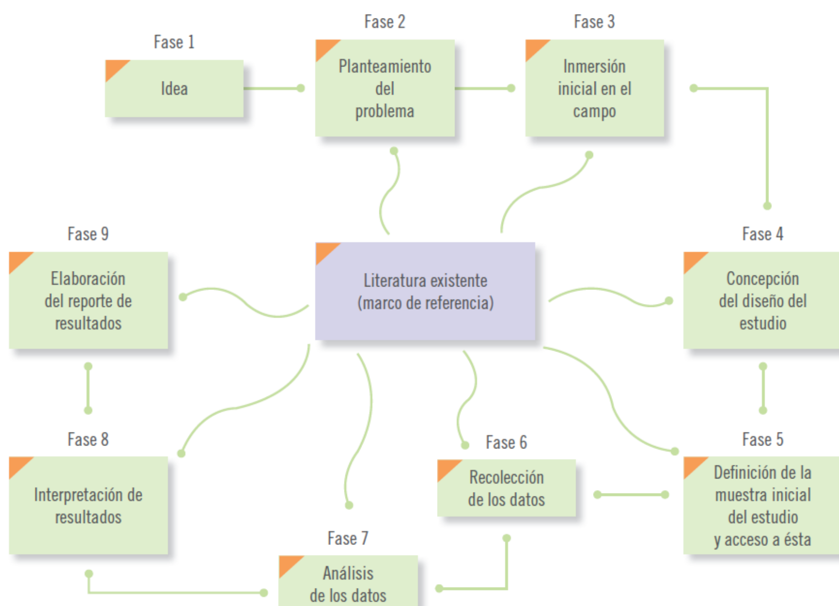


Figura 18. Investigación Cualitativa[56]

[56] Hernandéz Sampieri, R. (2009). *Metodología de la Investigación*. México, Mc Graw Hill.

3.3.1. Investigación por estudio de casos

El estudio de casos es un método de investigación importante para el desarrollo de las ciencias humanas y sociales. Constituye un campo para entender los fenómenos educativos. Para Yin (1989) "*el estudio de caso consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas*"[57] Para Stake (1998) "*es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad es circunstancias concretas*"[58].

Latorre señala las siguientes ventajas del uso socioeducativo del estudio de casos: [59]

- *Puede ser una manera de profundizar en un proceso de investigación a partir de unos primeros datos analizados.*
- *Es apropiada para investigaciones a pequeña escala, en un marco limitado de tiempo, espacio y recursos.*
- *Es un método abierto a retomar otras condiciones personales o instituciones diferentes.*
- *Es de gran utilidad para el profesorado que participa en la investigación. Favorece el trabajo cooperativo y la incorporación de distintas ópticas profesionales a través del trabajo interdisciplinar; además, contribuye al desarrollo profesional.*
- *Lleva a la toma de decisiones, a implicarse, a desenmascarar prejuicios o preconcepciones, etc.*

3.4. Observación y grabación

La observación fue un primer instrumento para la recolección de información, éste tuvo lugar en el aula de clase durante el desarrollo del curso de Matemática Discreta en la Universidad Antonio Nariño con

---

[57] Yin, R. (1989). Case Study Research. Design and Methods. London, SAGE.
[58] Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de caso*s. Madrid, Morata
[59] Latorre, A. Del Rincon, D. Arnal, J. (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa.

estudiantes que se encuentran entre el quinto, sexto y séptimo semestre de la licenciatura en matemáticas y de la ingeniería de sistemas. Se complementó la observación por medio de un diario de campo (relatorías de observación), clases registradas en video, dos encuestas y una entrevista.

3.4.1. Encuesta número 1.

Con el fin, no sólo de recolectar datos sino de justificar el problema, se realizó una encuesta de entrada a estudiantes de la licenciatura de matemáticas y de carreras de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, con preguntas abiertas adicionales. Los resultados se procesaron por medio del método Delphi.

Preguntas abiertas

1. ¿Cómo puede mejorar en ese proceso de demostración matemática? (Analice si alguna metodología, estrategia, situación o técnica fue adecuada para entender cómo hacer una demostración.)
2. Escriba el problema matemático que ha llamado totalmente su atención. Cuando lo intentó resolver o lo resolvió describa cómo fue su experiencia.
3. ¿Cuál sería su consejo para que el aprender matemáticas sea por interés personal?
4. Piense en la mejor metodología que usted ha vivenciado de un curso de matemáticas. Describa dicha metodología.

Tabla 1. Primer encuesta realizada a estudiantes de ingeniería y licenciatura en matemáticas.

Encuesta 1

A continuación encontrará una serie de preguntas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por favor, conteste desde la perspectiva de su experiencia como estudiante.

Carrera:
Semestre:

Marque con una X, en el cuadro de acuerdo a los siguiente criterios:

FA: Fuertemente de acuerdo A: de acuerdo

AD: Ni de acuerdo ni en Desacuerdo D: En desacuerdo

FD: Fuertemente en desacuerdo

Descripción o identificación de cada elemento del cuestionario	**FA**	**A**	**AD**	**D**	**FD**
Si la Universidad propone que en los cursos de matemáticas se debe enseñar a demostrar, cuál es su postura al respecto.					
Se le facilita construir demostraciones matemáticas					
Alguna metodología en particular lo ha motivado o lo ha ayudado a construir demostraciones					
Ha realizado demostraciones en matemáticas					
En alguna ocasión se ha propuesto resolver algún problema matemático lográndolo después de un largo período de tiempo.					
Piense en el problema matemático que más le ha llamado la atención. Lo intento resolver porque su profesor se lo exigió.					
Se siente fuertemente motivado a encontrar la solución de un problema que lo rete intelectualmente.					
Piensa que puede llegar a sentirse motivado por el estudio de la matemática.					
Se ha sentido cómodo con la metodología de los cursos de matemática del colegio					
Se ha sentido cómodo con la metodología de los cursos de matemática de la Universidad					
Alguna metodología lo ha cautivado e involucrado en el estudio de la matemática.					

3.4.2. Encuesta número 2

El propósito de la encuesta número 2 es recoger datos acerca de la metodología llevada a cabo en el curso de matemáticas discretas. Para este fin, la encuesta se aplicó a los estudiantes al finalizar el semestre. La encuesta se analizó bajo la teoría del método Delphi.

Tabla 2. Encuesta 2 realizada a los estudiantes del curso

Encuesta 2

A continuación encontrará una serie de preguntas relacionadas con la metodología que se llevó a cabo en el curso de matemáticas discretas. Conteste por favor desde su perspectiva como estudiante.

Nombre:	
Carrera:	Semestre:

Marque con una X, en el cuadro de acuerdo a los siguiente criterios: FA: Fuertemente de acuerdo A: de acuerdo AD: Ni de acuerdo ni en Desacuerdo D: En desacuerdo FD: Fuertemente en desacuerdo

Descripción o identificación de cada elemento del cuestionario	**FA**	**A**	**AD**	**D**	**FD**
La manera como se llevó el curso de matemáticas discretas implicó una mejor comprensión de los conceptos.					
Los problemas trabajados durante el curso despertaron su curiosidad matemática					
El curso de matemáticas discretas le ha aportado a su formación personal como resolutor de problemas					
El curso le ha aportado para mejorar en la construcción de demostraciones.					
La demostración es algo que se debe enseñar y aprender en los cursos de matemáticas					
La metodología llevada a cabo en el curso de matemáticas discretas tuvo aspectos diferentes a otras metodologías.					
La metodología del curso le comprometió y le motivó hacia el estudio de las matemáticas.					
Los problemas que implican un reto para el estudiante son fundamentales en un curso de matemáticas.					

3.4.3. Entrevista

La entrevista se define como "*una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)"*[60]. El tipo de entrevista que se realizó fue semi estructurada, por lo cual se quiere decir que en ella se tuvo una lista de preguntas guía, pero el entrevistador también tuvo la libertad de introducir preguntas según lo requería la situación con el fin de aclarar alguna idea o concepto.

Entrevista

1. ¿Puede describir algún problema del curso junto con la forma de abordarlo frente al cual se haya sentido fuertemente motivado por hallar la solución?
2. Respecto a las demostraciones matemáticas:
    a. ¿las considera importantes?
    b. ¿se le facilita realizarlas? y
    c. ¿cómo considera que se puede mejorar en este proceso?
3. ¿Cuál es su apreciación de la experiencia de proponer una conjetura para ser desarrollada durante el semestre?
4. ¿Puede encontrar diferencias entre la metodología utilizada en el curso de matemáticas discretas y los otros cursos de matemáticas que ha cursado en la universidad?
5. ¿Puede resaltar algún aspecto metodológico del curso que más le haya llamado la atención?
6. Identifique, si en su criterio las hay, dos debilidades y dos fortalezas de la metodología del curso.

[60] Hernandéz Sampieri, R. (2009) Metodología de la Investigación (México, Mc Graw Hill).

7. Describa qué le aportó el curso en la construcción de demostraciones matemáticas.

8. ¿Qué le aportó como estudiante y como persona el curso de matemáticas discretas?

3.5. Diseño del curso de matemática discreta

El curso de Matemática Discreta se llevó a cabo con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Antonio Nariño, modalidad presencial, y tuvo los siguientes tópicos generales:

- Combinatoria
- Teoría de grafos
- Teoría de juegos
- Problemas transversales a otras ramas de la matemática.

El curso tuvo una intensidad de seis horas semanales y duración de un semestre académico; las seis horas se distribuyeron en tres días (que se designaron Día 1, Día 2, Día 3) cada uno con un diseño específico y con una duración por día de dos horas.

3.5.1. Diseño del curso en tres etapas

Cada uno de las temáticas anteriores se estructuró en tres etapas, cada una de las cuales se correspondía a una sesión de clases en un día específico. Cada una de ellas se denominó Día 1, Día 2 y Día 3.

En los Día 1 se expusieron los conceptos propios de las teorías que componen la matemática discreta, desarrollando algunos ejercicios y problemas con el fin de que los estudiantes se familiarizaran con ellos. Dentro de los tópicos a tratar se incluyeron la combinatoria, la teoría de grafos y la teoría de juegos.

En los Día 2 la manera de llevar la clase fue a través de la formulación de dos o tres conjeturas, problemas que los estudiantes organizados en grupos exploraron, analizaron, propusieron, conjeturaron y demostraron. Esto se llevó a cabo teniendo en cuenta la heurística de Lakatos. El trabajo frente a cada conjetura se socializó, y cada grupo de estudiantes mostró sus soluciones con el propósito de que los grupos restantes las analizaran e intentaran buscar contraejemplos globales y/o contraejemplos locales o aceptar la demostración como válida dentro del grupo. A continuación, se da un ejemplo del tipo de problema que se les propuso a los estudiantes.

- ¿Cuál es el número de todas las posibles configuraciones cuando *n* balones idénticos son pintados con a lo más *k* colores?

El problema, además que permite explorar y conjeturar, muestra la modelación como herramienta útil en la resolución de problemas.

Teniendo en cuenta la heurística de *Pruebas y refutaciones* de Lakatos, un aspecto importante a considerar es el planteamiento de una primera conjetura la cual la llamamos "la conjetura principal". Se formuló un problema diseñado específicamente para el curso y se planteó el problema a los estudiantes buscando trabajar en esta conjetura desde el primer día de clase. En efecto, los estudiantes trabajaron en su solución a lo largo del semestre académico, los avances hacia el planteamiento de una conjetura y el análisis y revisión de ella se discutió en un espacio de 30 minutos todas las semanas en el Día 3. El propósito de mostrar los avances es retroalimentar la propuesta de cada estudiante a través de las opiniones del grupo de compañeros y del docente, retroalimentación que constituye en uno de los pilares de la heurística de Lakatos quien plantea que el conocimiento matemático es una construcción social en la cual la indagación, la exploración, los contraejemplos (globales y locales) y la validación son otros ingredientes presentes en las diferentes oportunidades de intercambio social.

En otras palabras, la conjetura principal giró en torno a la solución de un problema interesante, motivador y bastante retador, en el estudio del cual el estudiante exploró, conjeturó y demostró, y en cuyo contexto tuvo un acercamiento a la actividad que los matemáticos profesionales ejercen en su profesión, es decir, a lo que realmente es la actividad matemática. Se ha llevado a cabo el curso, no planteando el aprendizaje de contenidos y productos finalizados, sino de tal modo que el estudiante ha trabajado como un investigador que descubre, experimenta y demuestra a través, no sólo del razonamiento deductivo, sino de la dedicación y el compromiso. En este orden de ideas, la heurística de Lakatos se convierte en una herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático. Tres problemas diferentes se pensaron y se diseñaron con el propósito de servir como conjetura principal.

Es importante tener en cuenta que los problemas fueron diseñados por el autor de la presente tesis, se exploraron y se analizaron cuidadosamente con el fin de evidenciar la pertinencia de éstos para ser desarrollados durante un semestre.

Así las cosas, los Días 3 tuvieron dos propósitos, uno, como se mencionó anteriormente, socializar los avances en torno a la conjetura principal y, otro, dedicar tiempo a solucionar problemas interesantes de la matemática discreta transversales a otras áreas del conocimiento.

La distribución del curso se realizó de acuerdo a los objetivos de la investigación. Los Días 1 son claves para el desarrollo de la temática del curso, aspecto importante para cumplir con los objetivos, no obstante, es de considerar que algunos de los resultados de la teoría no se expusieron en una clase magistral, sino que fueron los estudiantes quienes los exploraron y propusieron demostraciones, esto con el fin de llevar una metodología de acuerdo a la heurística de Lakatos. En los Días 2 se propusieron problemas cuyos objetivos fueron observar cómo éstos motivaron a los estudiantes hacia la actividad matemática, observar cómo, al permitir que el estudiante explorara y fuese autónomo en su pensamiento y estrategias, contribuían a fomentar el razonamiento plausible y a la aparición de las etapas de la heurística de Lakatos, y a su vez cómo éstas contribuían al desarrollo del pensamiento matemático. El propósito de los Días 3 es análogo a los Días 2, sin embargo, los problemas no necesariamente estaban de acuerdo a la teoría vista en el Día 1 inmediatamente anterior, sino que se trataron de problemas en los cuales el estudiante tenía que recurrir a conocimientos en otras áreas. Los estudiantes exploraban y socializaban las estrategias a utilizar, lo que permitió que diversas conjeturas surgieran y, por lo tanto, se tenía un nuevo problema a solucionar. En cada problema se buscó que las etapas de la heurística de Lakatos surgieran, desde la parte inductiva hasta llegar a tener una demostración formal refinada por los mismos estudiantes y el docente.

3.5.2. Actividades para el Día 1

En el Día 1, se espera que los estudiantes manejen definiciones, principios, propiedades y teoremas de las temáticas que se estén impartiendo durante todo el curso. Por otra parte también, se pretende que los estudiantes exploren algunos teoremas de la teoría a través de la heurística de Lakatos. En el anexo 5 se detallan los temas que en el curso se ven junto con los problemas y teoremas que se proponen en el Día 1.

3.5.3. Actividades para el Día 2

Para el Día 2, se espera que las definiciones, propiedades teoremas y en general la teoría se refuerce a través de problemas retadores que involucren al estudiante en la actividad matemática. Se espera que a través de los problemas que se proponen los cuales se detallan en el anexo 5 se evidencie las etapas y procesos del método heurístico de Lakatos. Esto permitirá observar la manera como la heurística se convierte un vehículo para la resolución problemas y para el desarrollo del pensamiento matemático.

3.5.4. Actividades para el Día 3

En el Día 3 el presentan problemas de la matemática discreta transversales a otras áreas del conocimiento matemático. Los problemas están organizados según el criterio del autor del presente estudio por niveles de dificultad, esto con el propósito de involucrar a todos los estudiantes en la actividad matemática y llevar a cada estudiante a su mejor nivel posible. Los problemas fueron cuidadosamente escogidos con el objetivo que motiven al estudiante a la exploración y a buscar sus propias estrategias para darles solución, además que se evidencien las etapas del método heurístico en la resolución de estos. En el anexo 5 se enuncian todos los problemas que se proponen para desarrollarlos en este Día.

Conclusiones parciales Capítulo 3

En este capítulo se concluye que el método de investigación es de tipo cualitativo bajo un enfoque de estudio de casos. La encuesta número 1 fue de pregunta cerrada combinada con la pregunta abierta y la numero dos de pregunta cerrada. La primera tenía como objetivo recoger información sobre la visión de los estudiantes de ingeniería y licenciatura en matemáticas acerca de la demostración matemática y la resolución d problemas. En La encuesta dos se recogieron información importante sobre los aspectos metodológicos del curso de matemáticas discretas. La entrevista fue semi-estructurada y se aplicó para detallar y puntualizar aspectos de la manera como se llevó el curso. Por otra parte se dan los pormenores del curso en cuanto tiempo, espacio y metodología los cuales muestran la estructura en la cual se utilizará la heurística de Lakatos.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En el presente capítulo se exponen los resultados de la investigación, teniendo en cuenta los diferentes aspectos de la metodología empleada, así como los objetivos planteados en la misma.

La presentación y análisis de los resultados incluyen tres partes principales: la primera está relacionada con las etapas de la heurística de Lakatos, la segunda es el análisis de la encuesta número 2 (ver Capítulo 3) aplicada al grupo, y la tercera versa sobre los objetivos general y específicos propuestos en el trabajo de investigación.

4.1. Etapas de la heurística de Lakatos

De acuerdo con el diseño del curso de matemática discreta, se abordaron los aspectos teóricos en los Días 1, de modo que cualquier desarrollo de las etapas heurísticas de Lakatos observado frente a la demostración de teoremas de la teoría sería observable en los Días 1. A pesar de las acciones del docente para abrir espacios para que tal desarrollo pudiera darse, no se observó avances en las etapas de Lakatos en las clases correspondientes a los Días 1. Es más, a pesar de notar avances de los estudiantes en el proceso de demostración, aun en el escenario de demostrar la corrección de sus soluciones a los problemas propuestos en los Días 2 y 3, estos avances demostrativos no revelan el desarrollo pleno que deben tener en el despliegue de las etapas de la heurística de Lakatos. En cambio, tanto en los problemas (retadores) resueltos en los Días 2, como en los problemas que involucraron extensión a otras áreas de la matemática resueltos en los Días 3, como en los avances continuos en el estudio y solución de la conjetura principal, fueron abundantes los avances observados en el desarrollo de las etapas de la heurística de Lakatos en los estudiantes como se mostrará a continuación.

Así las cosas, se puso en claro que las etapas y procesos del método heurístico descrito por Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones* pueden surgir en el aula de clase cuando los estudiantes se involucran en un trabajo independiente y motivador. A continuación se describe detalladamente cada etapa y proceso que surgió en el curso llevado a cabo.

4.1.1. Naive testing (Parte exploratoria)

Esta primera etapa aparece cuando el estudiante empieza a explorar un problema propuesto; aquí, de acuerdo también a las etapas de Polya, es donde se empieza a comprender el problema. El permitir, el promover, que el estudiante explore es parte clave de la teoría de la resolución de problemas de acuerdo a Miguel de Guzmán y a Polya. Algunas estrategias, como mirar ejemplos particulares, experimentar, realizar diagramas, entre otras, surgieron naturalmente en el estudiante. Esta etapa inicial se evidenció en el cien por ciento de los problemas que se propusieron. Un ejemplo claro de ello se examina a continuación con el propósito de apreciar el avance en la sofisticación de la etapa exploratoria a lo largo del curso.

Ejemplo 1. Estudiante 3.

El Estudiante 3 muestra en la Figura 19 la manera en que trabaja la inducción en la parte exploratoria.

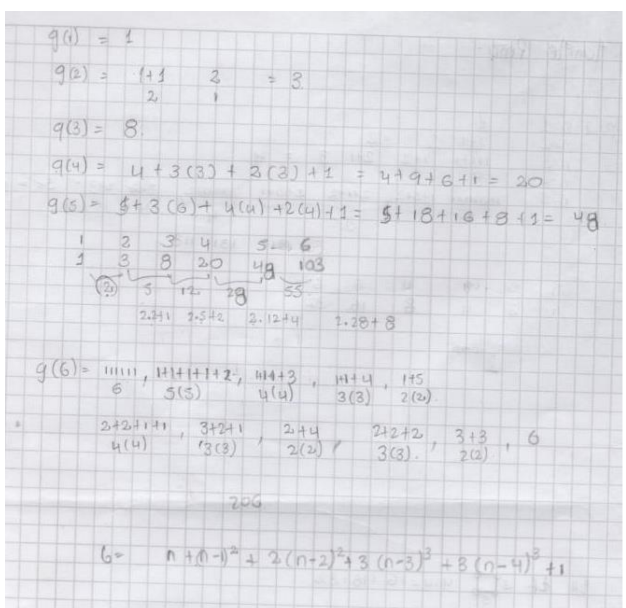


Figura 19. Trabajo del estudiante 3.

El problema que el Estudiante 3 desarrolló fue el siguiente: Una composición de un número entero $n \geq 1$ es una manera de escribir n como suma ordenada de enteros positivos. Por ejemplo, hay 8 composiciones de 4 que son:

1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+3, 3+1, 2+2, 4.

Sea $C(n)$ el número de composiciones de n. Hallar una fórmula para $C(n)$. Ahora consideremos $g(n)$ como el número total de partes que hay en todas las composiciones de n. Por ejemplo, $g(4) = 20$. Hallar $g(n)$.

La fórmula de $C(n)$ la deduce el Estudiante 3 rápidamente explorando con los primeros cinco enteros positivos. La segunda parte la explora de manera similar, mirando algunos ejemplos particulares. No obstante al no observarse un patrón inmediato, el estudiante empieza a detallar y descomponer los ejemplos para analizar la regularidad existente. En la Tabla 1 se observa como el estudiante halla $g(n)$ con los primeros 5 números e intenta descomponer los números de tal forma que se pueda evidenciar el patrón. Organiza los números de la siguiente manera:

Tabla 3.Exploración de un problema

n	1	2	3	4	5
g(n)	1	3	8	20	48
g(n) - g(n-1)		2	5	12	28
Exploración			2*2 +1	2*5 +2	2* 12 + 2^2

Esta es la forma cómo el estudiante explora el problema y cómo intenta hallar una fórmula a partir de los anteriores resultados, específicamente lo que el estudiante escribe se puede generalizar como $g(n) = g(n - 1) + 2(g(n - 1)-g(n - 2)) + 2^{n-3} = 3g(n - 1) – 2g (n - 2) + 2^{n-3}$. En la entrevista el estudiante se refirió al problema como uno de los que más le había motivado y aseguró que empleó bastante tiempo para solucionarlo.

4.1.2. Conjeturar

Con frecuencia cuando los estudiantes se enfrentaban a un problema matemático, surgían inquietudes y cuestiones en el camino a la solución de éste; estas preguntas se convertían en conjeturas y el problema se re direccionaba. Veamos unas instancias de la formulación de conjeturas.

Cuando los estudiantes abordaron el problema: “Hallar cuántos números de tres cifras tienen la siguiente propiedad: Si al número le restamos 297, se obtiene otro número de tres cifras, con las mismas cifras, pero en orden inverso”[61], se formuló la conjetura que el número cumple con las condiciones dadas si y sólo si la resta de las centenas menos las unidades es 3.

En otra oportunidad, después de explorar ampliamente el problema siguiente: “Un grafo tiene 30 vértices y cada vértice tiene 6 aristas. Encuentre el número total de triplas de puntos tales que cada par de puntos está unido o cada par de puntos no está unido”, uno de los estudiantes conjeturó que, dados dos grafos con 30 vértices, cada vértice de grado 6 y conexos, entonces los grafos son isomorfos.

El total de problemas abordados en los Días 2 y 3 fueron 31, en 17 de los cuales los estudiantes conjeturaron en alguna manera. Algunas de las conjeturas se resolvían inmediatamente mientras que otras trascendían en el sentido que requerían más exploración y análisis. Para relacionar las etapas de la heurística de Lakatos con las etapas de solución de problemas de Polya y de Guzmán, la conjetura puede verse como el primer paso en el diseño de una estrategia de solución al problema. Recordemos que, una vez hecha la conjetura, ésta es examinada en búsqueda de posibles contraejemplos.

[61] Lo denotaremos Problema 1

4.1.3. Contraejemplos

En cuanto a los contraejemplos que se presentaron durante el curso, de forma análoga a las conjeturas formuladas, algunos trascendían más que otros. Larsen y Zandieh describen tres posibles tipos de respuesta que pueden darse cuando surge un contraejemplo.

a. Monster-barring
b. Exception-barring
c. Proof-analysis

El monster-barring no fue una etapa observada cuando un contraejemplo era expuesto; los estudiantes no rechazaban el contraejemplo, sino que tendían a analizar lo que ocurre directamente en la conjetura. En cambio, el exception-barring sí fue característica de la respuesta dada por los estudiantes al exhibir un contraejemplo.

Para ilustrar esta afirmación, veamos qué sucedió cuando uno de los estudiantes intentó resolver la siguiente pregunta. Un estudiante del curso de matemática discreta afirma que si $G = (V, E)$ es plano entonces existe siempre un vértice v tal que $grad(v) < 6$. ¿Qué piensa al respecto? A través de la demostración por contradicción, asevera que si el grado de todos los vértices es mayor o igual a 6 entonces el grafo debe tener al menos 7 vértices. Sin embargo, se construye el siguiente contraejemplo.

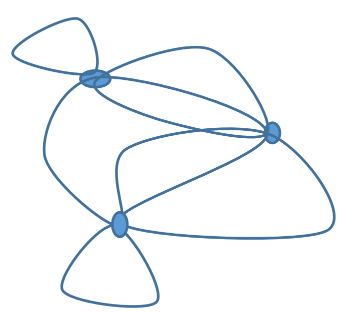


Figura 20. Contraejemplo propuesto por un estudiante

Este grafo es plano y el grado de cada uno de sus vértices es mayor o igual a 6, pero tiene tan solo tres vértices. La respuesta del estudiante ante este contraejemplo fue modificar la conjetura (exception-barring) agregando dos condiciones más, a saber:

a. El grafo no es un multigrafo

b. El grafo no tiene lazos.

La respuesta de proof-analysis tampoco se evidenció durante la resolución de los problemas.

4.1.4. Demostraciones

La creatividad y la coherencia eran dos características que manifestaban los estudiantes cuando justificaban sus procedimientos o resultados, y sin embargo se les notaba dificultad al momento de escribir las ideas formalmente. Dada esta dificultad, es claro que se disminuyó en gran manera la posibilidad de que la respuesta de proof-analysis se evidenciara. A continuación se ilustra la forma en la cual, en general, los estudiantes presentaban sus justificaciones. Nuevamente, el problema a considerar es: Hallar cuántos números de 3 cifras tienen la siguiente propiedad: Si al número le restamos 297, se obtiene otro número de 3 cifras, con las mismas cifras, pero en orden inverso.

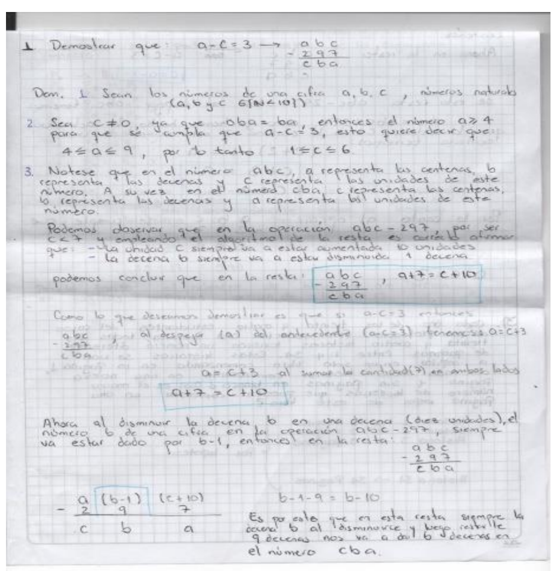


Figura 21. Imagen del trabajo del estudiante 2

En el primer párrafo, trabajando en grupo, los estudiantes caracterizan los números a, b, c, con el fin de obtener las hipótesis detalladas del problema. Afirman que $a \geq 4$ y $1 \leq c \leq 6$, sin embargo, la justificación es en efecto circular. Por otra parte, en el enunciado se quiere demostrar que, si $a - c = 3$ y si se cumplen las condiciones dadas para a, b y c, entonces $abc - 297 = cba$. En el ítem 3, como se observa en la anterior figura, escriben que en la resta $abc - 297 = cba$, entonces $a + 7 = c + 10$. La notación no es clara, pues parece que utilizaran la premisa en la demostración. Las ideas de los estudiantes no se reflejan en su escritura, pues cuando el estudiante expone su solución en el tablero se aclara el ítem 3 colocando $abc - 297 = xyz$, y con las condiciones que se tienen para c, se concluye que $z - 3 = c$. Ahora con la hipótesis se concluye que $z = a$. En el resto de la demostración pasan situaciones análogas, lo cual ilustra que formalizar las ideas, como se detalla en este problema, constituyó una dificultad.

4.2. Actitud de los estudiantes y compromiso hacia la actividad matemática

La metodología llevada a cabo en el curso de matemáticas discretas repercutió de manera positiva en la actitud del estudiante hacia la matemática. Por ejemplo, de acuerdo a la encuesta realizada a los estudiantes al finalizar el curso, se resaltan dos afirmaciones, a saber:

a. Los problemas trabajados durante el curso despertaron su curiosidad matemática.

b. La metodología del curso le comprometió y le motivó hacia el estudio de las matemáticas.

La siguiente gráfica muestra los resultados obtenidos en estas dos preguntas.

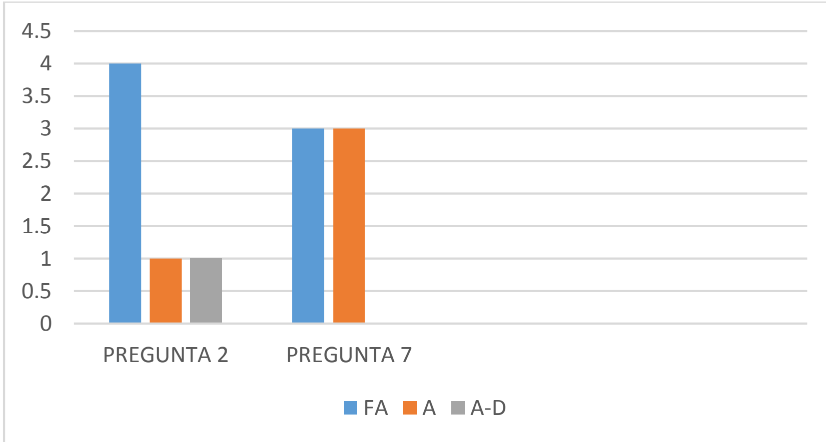


Grafico 1. Respuestas a las preguntas 2 y 7 de la encuesta 2. Fuente: elaboración propia

La información muestra que la metodología llevada a cabo despertó la curiosidad y los motivó hacia el estudio de la matemática.

Por otra parte, de los cinco estudiantes entrevistados, se obtuvieron los siguientes resultados. En respuesta a la primera pregunta: “¿Puede describir algún problema del curso junto con la forma de abordarlo frente al cual se haya sentido fuertemente motivado por hallar la solución?”, el 100% describió algún problema por el cual se sintieron fuertemente motivados. Dos de los cinco estudiantes afirmaron que todos los problemas fueron motivadores y dos aseguraron que en particular se interesaron por aquellos que constituían más reto. Dos de ellos, por otra parte, afirmaron que la conjetura principal fue un problema con un alto grado de motivación.

De la pregunta número 3 de la entrevista: “¿Cuál es su apreciación de la experiencia de proponer una conjetura para ser desarrollada durante el semestre?”, se obtuvieron los siguientes resultados. El 100% de los estudiantes entrevistados estuvieron de acuerdo que ésta constituye una estrategia interesante y motivadora para proponer como estrategia pedagógica. Como ilustración de sus comentarios al respecto, uno de los estudiantes respondió: “me fue muy bien, fue en la que más me enfocaba, el reto lo asumí personal y eso hace que se motive más a los estudiantes”.

4.2.1 Estudiante 1

El Estudiante 1 estudia licenciatura en matemáticas y trabaja como docente en un colegio privado. Durante el curso el estudiante se mostró interesado a pesar de la dificultad que evidenció en la resolución de problemas. En la entrevista manifestó que los problemas que constituían un reto le demandaban bastante tiempo para solucionarlos, además afirmó pensar en ellos cuando tenía espacios cortos de tiempo en el lugar donde labora. En base a estos comentarios y a lo que se observó durante las clases, se puede aseverar que la metodología implementada la percibió positivamente.

Otra de las actitudes observadas fue de participación activa durante las clases, esto gracias a la libertad que tuvieron los estudiantes para proponer sus propias estrategias y socializarlas. El salón se constituyó en un espacio de debate entre todo el grupo, estudiantes y docente.

En tercer lugar, a pesar de las dificultades mencionadas en la construcción de demostraciones, siempre se buscó llevar la clase de acuerdo al método de Lakatos y esto implicaba llegar a escribir formalmente las ideas matemáticas, la cual es una etapa importante en la heurística. La actitud del estudiante frente a la construcción de las demostraciones no fue de rechazo, pero sí se considera la actividad más difícil y de más alto nivel en matemáticas, y no obstante esto no implicó frustrarse ante tal tarea.

4.2.2. Estudiante 2

El estudiante está inscrito en el programa de licenciatura en matemáticas y trabaja como docente en un colegio privado. El estudiante se vio muy activo durante las sesiones de clase exponiendo sus ideas y estrategias al grupo, además expresó en la entrevista que una de las cosas interesantes de la metodología había sido permitir que ellos mismos buscaran los medios para solucionar los problemas. A partir de las observaciones de clase y de los comentarios realizados por el estudiante se evidencia una actitud de participación y socialización de las ideas.

El estudiante no sólo participaba activamente, sino que sus ideas eran valiosas para la solución de los problemas. A partir de esto, se puede deducir que la actitud fue de compromiso hacia la actividad matemática. Ahora bien, en lo que respecta a la actitud frente a las demostraciones, el estudiante expresó que este proceso no era fácil de llevar a cabo. No obstante, consideró importante enseñarla en los cursos de matemática y, de manera similar al Estudiante 1, se esforzó por mejorar en este aspecto.

En lo que respecta a la metodología del curso, el Estudiante 2 expresó que fue diferente a la de otros cursos vistos en la universidad en el sentido de permitirle explorar problemas de alta complejidad por su cuenta, pues no se trataba de aplicar un algoritmo o una regla sino que la creatividad matemática y la autonomía eran requisitos para llegar a la solución.

4.2.3. Estudiante 3

El Estudiante 3 es también estudiante de la licenciatura en matemáticas y docente de colegio privado. Se caracterizó por su participación activa y compromiso hacia la actividad matemática. Durante la entrevista afirmó que se sintió motivado por todos los problemas y, además, que era bastante el tiempo que le demandaban para llegar a solucionarlos. Su actitud frente a las demostraciones fue de respuesta positiva al desafío y esfuerzo; aseveró que cuando tenía los conocimientos adecuados al problema no se le dificultaba realizar la demostración. El proponer un problema para ser desarrollado durante todo el tiempo del curso fue una estrategia bien acogida por el estudiante, la cual, según él, fomentaba el trabajo autónomo y la investigación. Con lo que respecta a la metodología manifestó que existían diferencias con los demás cursos que ha tomado en la universidad pues éstos eran muy teóricos y algorítmicos, y se limitaban a aplicar fórmulas, a diferencia de este curso en el cual se propusieron problemas que requerían más flexibilidad en el pensamiento y diversas estrategias para llegar a la solución.

4.2.4. Estudiante 4

El Estudiante 4, perteneciente a la licenciatura en matemáticas, tomó una posición menos activa, esto sin llegar a afectar su compromiso hacia la actividad matemática. Su atención se dirigió hacia el trabajo en la conjetura principal en el cual se evidenciaba tal compromiso, ya que lo consideró como una actividad motivante. No obstante, el estudiante por motivos personales no accedió a ser entrevistado, lo cual no permitió escudriñar a fondo la percepción del estudiante hacia la metodología aplicada durante el curso.

4.2.5. Estudiante 5

Estudiante de la licenciatura en matemática y docente de matemáticas a nivel secundario, el Estudiante 5 durante el curso se mostró bastante participativo y de un compromiso total hacia la actividad matemática. Expuso ideas claras y muy acertadas para resolver los problemas, y en la conjetura principal fue el estudiante que decidió modelar la situación de manera diferente a como lo habían trabajado sus compañeros, trabajándolo a partir de una interpretación como permutaciones. Esto lo llevó a trabajar arduamente con la ayuda de Excel (software) para llegar a resolverlo. Durante la construcción de un grafo conexo con 30 vértices y cada vértice de grado 6, el estudiante propuso un algoritmo muy útil para hacer la respectiva construcción. Durante la entrevista aseguró que los retos los asumía personales, lo cual es una apreciación muy diciente en cuanto se deja a un lado los prejuicios de las notas y se involucra al estudiante hacia una verdadera actividad matemática. Su actitud frente a la metodología fue positiva. Según el estudiante, fue interesante el proponer problemas y dar algunas bases para permitirles explorar y solucionar el problema por sí mismos. Durante la entrevista afirmó que el proponer un problema para desarrollarlo durante el semestre es una excelente estrategia didáctica y que la tendría en cuenta para aplicarla en su labor docente.

4.2.6. Estudiante 6

El Estudiante 6 está vinculado al programa de ingeniería de sistemas. Es un estudiante que no socializaba mucho, pero sí evidenciaba su compromiso hacia las tareas matemáticas. Un aporte a reconocer del esfuerzo del estudiante se dio en el trabajo con la conjetura principal, y fue el primero que dibujó un grafo con 30 vértices y cada vértice de grado 6. Con respecto a la actitud frente a las demostraciones, el estudiante afirmó que era importante que se enseñaran durante los cursos de matemáticas puesto que validaban una afirmación matemática. En cuanto los problemas, fue un estudiante que desde el inicio de clase se sentaba y se concentraba en la tarea sin socializar mucho con el grupo lo cual evidenció un compromiso y motivación en la resolución de los problemas.

4.2.7. Consideración final

En base al análisis anteriormente realizado por cada estudiante es pertinente concretar que la metodología repercutió en aspectos motivacionales y de compromiso hacia la actividad matemática, de modo que se puede afirmar que el objetivo se cumplió plenamente.

4.3. Desarrollo del pensamiento matemático

Con el fin de analizar la repercusión de la metodología en el desarrollo del pensamiento matemático, se describirá aspectos importantes en el avance de cada uno de los estudiantes.

4.3.1. Estudiante 1

Las estrategias que empleó el Estudiante 1 en la resolución de problemas fueron diversas, algunas más sofisticadas que otras. A medida que transcurrió el curso se observó un progreso en el tipo de pensamiento utilizado por el estudiante para resolver los problemas propuestos. La siguiente figura muestra la estrategia utilizada por el Estudiante1 para resolver la conjetura principal en cuanto al número de patrones de longitud 3.

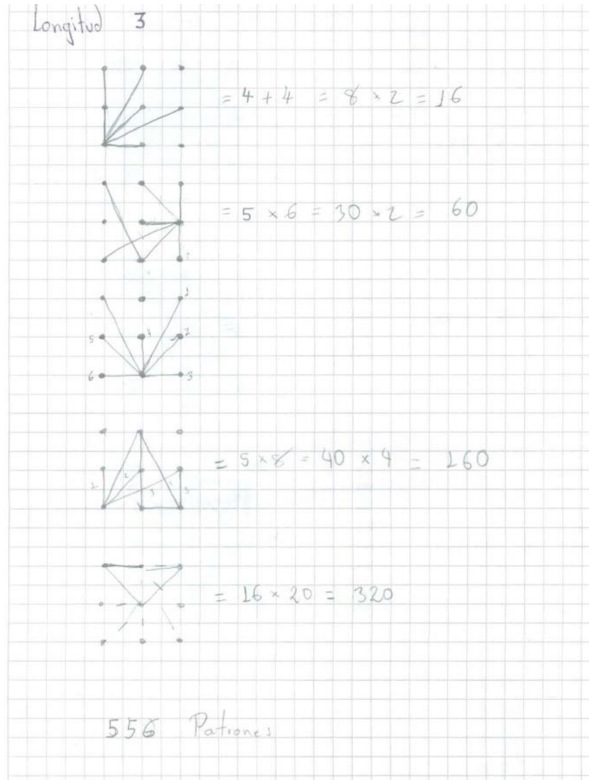


Figura 21. Imagen del trabajo del estudiante 1

Se observa que el estudiante recurre a contar los patrones de longitud 3 llevando un orden con el propósito de realizar el conteo de una forma sencilla. Sin embargo la estrategia no fue óptima en cuanto su solución no fue correcta, esto, debido a lo complicado de realizar el conteo a través de dicho procedimiento.

Ahora, veamos su estrategia en la solución del problema: “Algunos pisos cuadrados se han embaldosado con baldosas blancas y grises. Los que usan 4 y 9 baldosas grises se muestran en la figura. Cada piso tiene una baldosa gris en las esquinas, y cada baldosa gris está rodeada por baldosas blancas. ¿Cuántas de estas últimas harán falta para un piso que lleva 25 baldosas grises? Generalizar.”

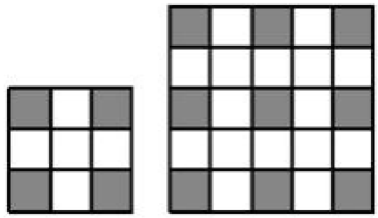


Figura 22. Baldosas Blancas y grises

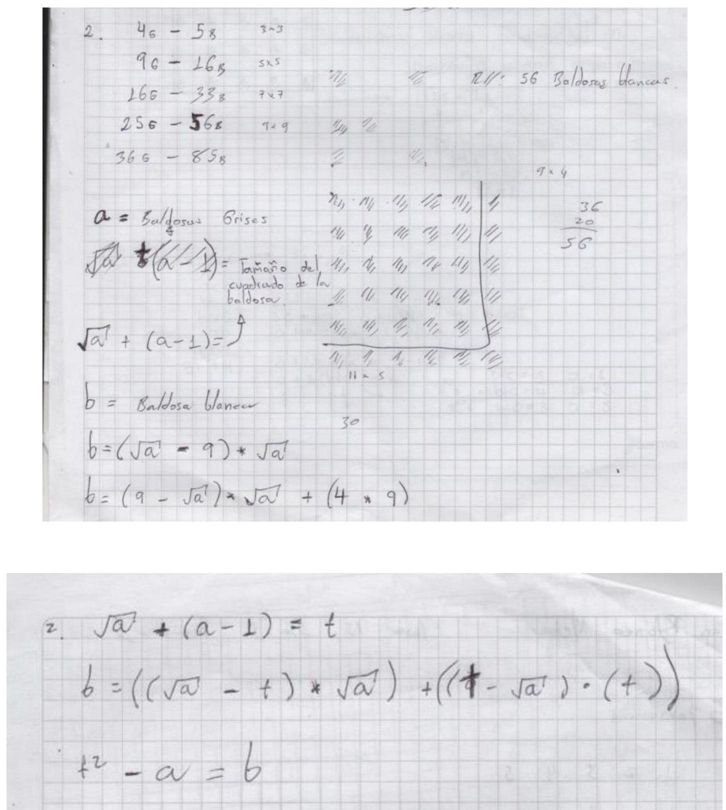


Figura 23. Solución del Estudiante 1.

El pensamiento de generalización es evidente. El estudiante encuentra la fórmula $t^2 - a = b$. Con este resultado el estudiante concluye el problema exponiéndolo en el tablero. Allí expresa b en términos sólo de a, con lo cual revela una estrategia mucho más sofisticada que la mostrada en la situación anterior en el conteo de los patrones.

4.3.2. Estudiante 5

El estudiante expresó en la entrevista que se vio fuertemente motivado y retado por la conjetura principal. El trabajado adelantado en la solución de la conjetura permitió que el estudiante mostrara flexibilidad y creatividad de pensamiento. En el momento en que se había trabajado la conjetura durante un tiempo correspondiente a más de la mitad del tiempo total de curso, la estrategia para realizar el conteo de los patrones se había limitado a hacer una lista con cierto orden. El Estudiante 5 construye (crea) una forma diferente de abordar el problema, la cual consistió en realizar la siguiente matriz:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 24. Matriz realizada por el estudiante 5

y observar que el problema era análogo a determinar las permutaciones de los números del 1 al 9 que se generan, con algunas restricciones. Con esta nueva idea consigue no sólo realizar el conteo para los patrones de longitud 3, sino también para los de longitud 8. El estudiante se apoya en Excel para realizar el conteo, trabajo que se muestra en el Anexo **. Este último conteo requiere de un pensamiento bien estructurado sobre elementos de la matemática discreta que se habían estudiado.

4.3.3. Estudiante 3

Se puede hacer un contraste entre las estrategias usadas en las primeras clases con clases posteriores y evidenciar la manera como, utilizando la teoría desarrollada en las clases, este estudiante resuelve el problema: "Para cada sub-conjunto no vacío del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} disponga los números en orden decreciente, alterne los signos + y - entre ellos comenzado por +, y realice la suma. Por ejemplo, para el subconjunto {5} obtenemos 5. Para {6, 3,1} obtenemos 6 - 3 +1 = 4. Encuentre la suma de todos los resultados". El estudiante halla la suma a través de una lista como se observa en la siguiente figura.

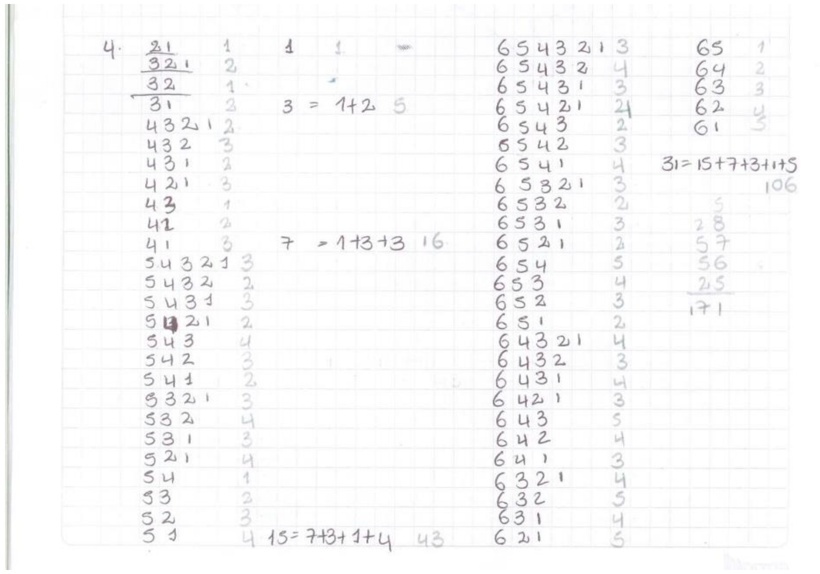


Figura 25. Lista del estudiante 3

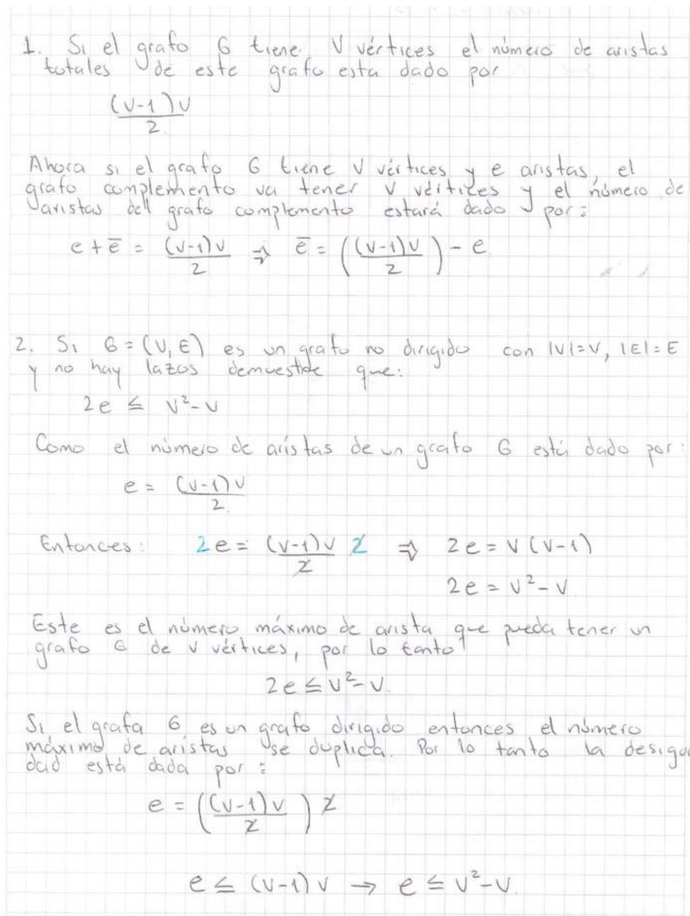
Veamos el cambio del tipo de razonamiento que emplea en clases posteriores en la solución del problema: “Sea $n \in \mathbb{Z}^{+}, n \geq 4$. ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos al grafo bipartito completo $K_{1,3}$?” El estudiante no realiza una lista completa, sino que por medio de la inducción se da cuenta que se trata de sacar un vértice y formar grupos de a 3 con los restantes n - 1 vértices, lo cual lo conduce a la ecuación $\binom{n-1}{3}$(n). Este ejemplo permite observar un buen manejo del concepto de combinación.

4.3.4. Estudiante 2

Como se ha dicho, al iniciar el curso en general los estudiantes tuvieron dificultad a la hora de expresar las ideas formalmente. La siguiente situación evidencia un pensamiento deductivo más estructurado, además del empleo del pensamiento combinatoria para llegar a una solución. Los dos problemas a considerar fueron:

1. “Si un grafo G tiene v vértices y e aristas, ¿cuántas aristas tiene $\overline{G}$?”

2. "Si *G*= *(V, E)* es un grafo no dirigido con $|V|$ = *v*, $|E|$= *e* y no hay lazos, demuestre que $2e \leq v^2 - v$. Establezca la desigualdad correspondiente en caso de que *G* sea dirigido".



1. Si el grafo G tiene v vértices el número de aristas totales de este grafo esta dado por

$$\frac{(v-1)v}{2}$$

Ahora si el grafo G tiene v vértices y e aristas, el grafo complemento va tener v vértices y el número de aristas del grafo complemento estará dado por:

$$e + \bar{e} = \frac{(v-1)v}{2} \Rightarrow \bar{e} = \left(\frac{(v-1)v}{2}\right) - e$$

2. Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido con $|V| = v$, $|E| = E$ y no hay lazos demuestre que:

$$2e \leq v^2 - v$$

Como el número de aristas de un grafo G está dado por:

$$e = \frac{(v-1)v}{2}$$

Entonces: $2e = \frac{(v-1)v}{2} 2 \Rightarrow 2e = v(v-1)$

$$2e = v^2 - v$$

Este es el número máximo de arista que pueda tener un grafo G de v vértices, por lo tanto

$$2e \leq v^2 - v$$

Si el grafo G es un grafo dirigido entonces el número máximo de aristas se duplica. Por lo tanto la desigualdad está dada por:

$$e = \left(\frac{(v-1)v}{2}\right) 2$$

$$e \leq (v-1)v \rightarrow e \leq v^2 - v$$

Figura 26. Solución del Estudiante 2

En el problema 1 (ver figura), el estudiante utiliza que en un grafo *G* = *(V, E)* la suma de los grados de los vértices es igual al número de aristas multiplicado por dos. Utilizando este resultado, determina que en un grafo completo (K_n) el número de aristas viene dado por: $|e| = \frac{(v-1)v}{2}$. Cuando el estudiante establece esta fórmula, muestra un adecuado uso de la combinatoria. Además, el procedimiento muestra una simbología clara para finalmente determinar el número de aristas del grafo complementario en términos de los vértices y las aristas de *G*. El pensamiento deductivo se evidencia en el resultado. En la solución del problema 2, argumenta que en un grafo sin lazos el número de aristas mayor lo tiene el grafo completo, y utiliza este hecho y la fórmula del grafo completo para llegar a que $2|e| \leq v^2 - v$. De nuevo el estudiante plasma las ideas de manera correcta y clara, permitiendo ver un pensamiento deductivo más estructurado.

4.3.5. Estudiante 4

Con respecto al desarrollo del pensamiento del Estudiante 4, como lo muestra la figura, se evidenció creatividad en la solución de los problemas.

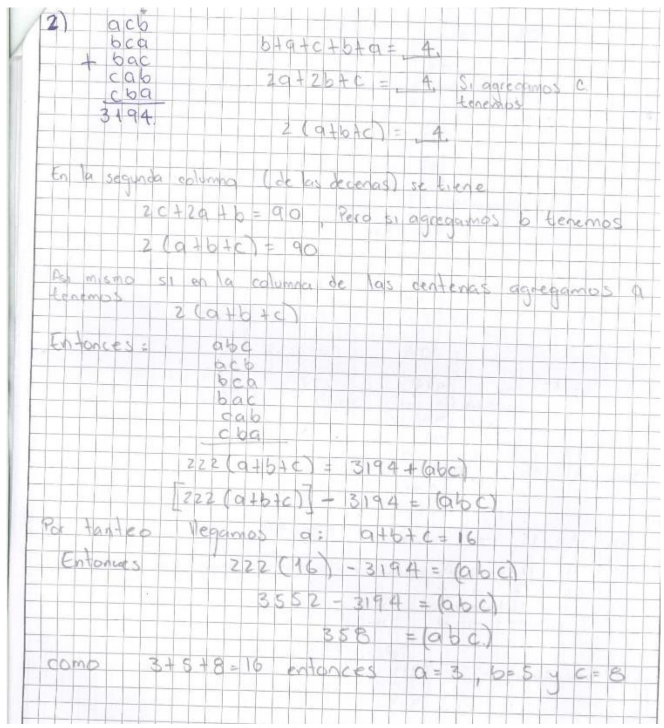


Figura 27. Solución del estudiante 4

El problema a solucionar es: si *abc* es un número de tres dígitos. Si *acb* + *bca* + *bac* + *cab* + *cba* = 3194. Encontrar *abc.* El problema es difícil de solucionar, requiere de compromiso y en algún momento de alguna idea creativa para llegar al resultado. El primer resultado clave que el estudiante obtiene para solucionar el problema es la igualdad 222(a + b + c) = 3194 + (*abc)*. Ahora bien, para llegar a esta igualdad la idea creativa del estudiante es sumar (*abc*) en ambos lados de una ecuación establecida. Después de esto, surge otra idea brillante y es mirar los casos y acotar. Según la igualdad, $a + b + c$ sólo puede tomar los valores entre 15 y 18 lo que facilita el proceso. Realmente son muy creativas las ideas que se ponen de manifiesto para finalmente obtener la solución buscada.

4.3.6. Estudiante 6

Es el único estudiante del programa de ingeniería de sistemas en el curso, y al principio del curso presentaba más dificultad para solucionar los problemas propuestos; sin embargo, el compromiso y la disciplina permitieron avances en su pensamiento matemático. En el siguiente problema de grafos: “Un grafo tiene 30 vértices y cada vértice tiene 6 aristas. Encuentre el número total de triplas tal que cada par de puntos está unido o cada par de puntos no están unidos.” que se presentó a todo el grupo, los estudiantes aseguraron que no había forma de resolverlo, pues construir tal grafo era muy complicado. La construcción que logró el Estudiante 6 con papel y lápiz permitió abrir puertas para abordar el problema.

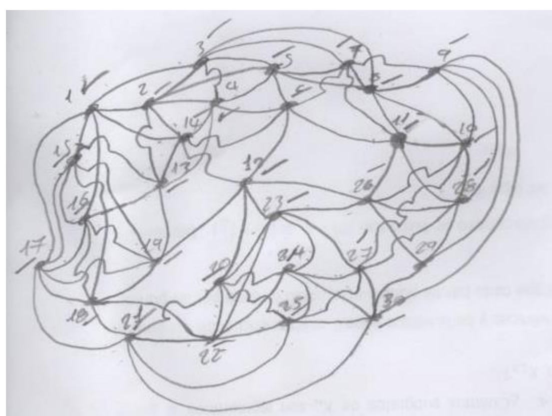


Figura 28. Grafo construido por el estudiante 6

4.3.7. El punto número 3 de la encuesta

A continuación se presentan las respuestas de los estudiantes al punto número tres de la encuesta: “El curso de matemáticas discretas le ha aportado a su formación personal como resolutor de problemas”.

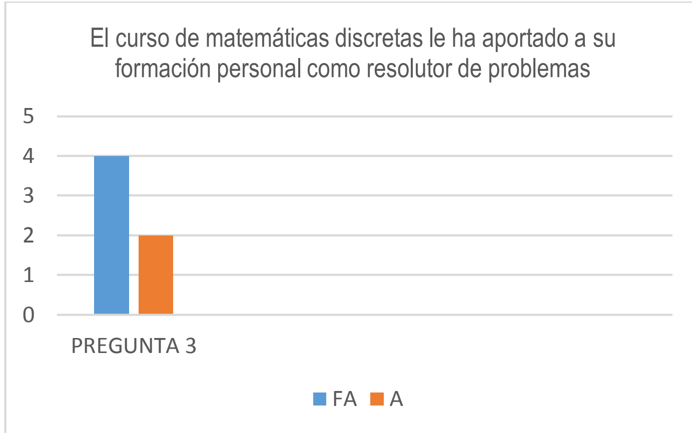


Grafico 2. Respuestas de los estudiantes a la pregunta 3 de la encuesta 2. Fuente: Elaboración propia

La gráfica muestra que la percepción de los estudiantes fue que tuvieron un avance como resolutores de problemas y, por ende, un desarrollo en su pensamiento matemático.

4.4. Demostraciones matemáticas

La heurística de Lakatos se ha considerado una herramienta útil para ayudar al estudiante a progresar en la construcción de demostraciones. A continuación se presenta el respectivo análisis de la percepción de los estudiantes sobre la metodología usada en relación con la construcción de demostraciones.

4.4.1. Preguntas 4 y 5 de la encuesta

Las siguientes dos preguntas de la encuesta son analizadas.

i. El curso le ha aportado para mejorar en la construcción de demostraciones
ii. La demostración es algo que se debe enseñar y aprender en los cursos de matemáticas

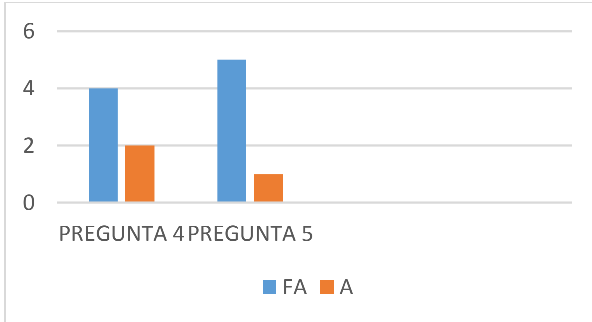


Grafico 3. Respuestas a las preguntas 4 y 5 de la encuesta 2. Fuente: Elaboración propia

Los resultados muestran que hay consenso entre los estudiantes acerca del aporte del curso para mejorar en el proceso de demostrar. Además, los estudiantes aseguran que en los cursos de matemáticas es importante que se mejore en este proceso.

4.4.2. Pregunta número 7 de la entrevista

Pregunta 7: Describa qué le aportó el curso en la construcción de demostraciones matemáticas.

La pregunta tiene el propósito de verificar con más detalle la percepción de los estudiantes sobre la metodología llevada a cabo en el curso de matemáticas discretas en relación al proceso de demostrar.

El Estudiante 2 aseguró que aprendió en especial sobre demostraciones por inducción y a proceder de forma más rigurosa en una demostración. El Estudiante 1 afirmó que cuando uno empieza a demostrar se le hace más fácil la otra matemática; con la expresión "otras matemáticas", el estudiante dejó en claro que se refería a los algoritmos y ejercicios que generalmente se proponen en los cursos de matemáticas. Luego, él quiso decir que la demostración es un proceso bastante difícil y que, si se logra, es debido a un pensamiento bien estructurado. El Estudiante 5 señaló que en el curso aprendió a mirar las características básicas y a partir de eso dar una demostración. Interpretando lo que dice el estudiante, se refiere a la parte informal de una demostración, es decir, en términos de Polya, al razonamiento plausible, para luego sí plasmar las ideas formalmente. El Estudiante 6 señaló que la demostración lo que busca es ser más analítico y el Estudiante 3 aseguró que el nivel de demostración en el curso fue bastante alto.

4.5. Heurística de Lakatos y problemas reto

Un aspecto importante que se tuvo en cuenta en la metodología llevada a cabo en el curso de matemáticas discretas fue abordar los problemas retadores a través de la heurística de Lakatos. A continuación se mostrarán los resultados obtenidos al abordar problemas motivadores e interesantes por medio de esta metodología.

En primer lugar, los estudiantes estuvieron de acuerdo acerca de la importancia de proponer problemas retadores en los cursos de matemáticas. En la Encuesta 2, en la pregunta: “Los problemas que implican un reto para el estudiante son fundamentales en un curso de matemáticas”, se obtuvieron los siguientes resultados:

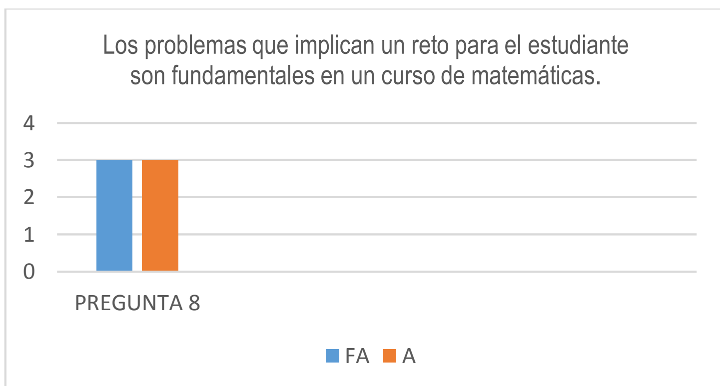


Grafico 4. Pregunta 8 de la encuesta 2. Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, la heurística de Lakatos funcionó en dos puntos respecto a la resolución de problemas. En primer lugar, los estudiantes trabajaron de manera autónoma lo que implicó desarrollar estrategias propias fomentando la creatividad y la investigación. De los 31 problemas trabajados durante los Días 2 y 3, se llegó a la solución correcta en 25 de ellos.

Durante la entrevista, el Estudiante 2, respondiendo a la pregunta: “¿Puede encontrar diferencias entre la metodología utilizada en el curso de matemáticas discretas y los otros cursos de matemáticas que ha cursado en la Universidad?”, afirmó: “lo que me pareció interesante en el curso de matemáticas discretas fue que el profesor nos dejó buscar la respuesta por nuestros propios medios, nos daba ciertas herramientas para llegar a la respuesta pero nos dejó que nos equivocáramos o que lo pudiéramos solucionar. “

El Estudiante 1 señaló que el aspecto metodológico que más le llamó la atención fue el proponer problemas complejos los cuales le demandaban varias horas para solucionarlos y que, aun en espacios ajenos a la academia, pensaba en sus respectivas soluciones.

El Estudiante 5 aseveró que el curso le aportó como persona y futuro docente algunas alternativas pedagógicas para aplicarlas con los estudiantes, alternativas como, por ejemplo, llevarles ciertos retos y darles un plazo más allá de las horas de clase para que los desarrollen, lo cual hace que se incentiven y los mantenga trabajando dentro y fuera del aula de clase.

El Estudiante 6 afirmó que un aspecto metodológico que le llamó la atención en clase fue el proponer un problema y permitir un espacio para desarrollarlo, luego socializarlo permitiendo observar las diversas estrategias e ideas de cada compañero. Esto fue bueno porque se podían ver diferentes perspectivas. El Estudiante 6 también observó que los problemas tenían diferentes grados de dificultad, y afirmó que lo que se buscó fue llevar al estudiante a su mejor nivel posible.

Por otra parte, el Estudiante 3 afirmó que la metodología llevada a cabo en el curso, y en particular la estrategia de proponer un problema para ser desarrollado durante todo el semestre, fomentó la investigación. También expresó que se motivó mucho al trabajo autónomo a partir de problemas de fácil comprensión, que no requerían conocimientos sofisticados, pero frente a los cuales fue un desafío llegar a solucionarlos.

Estos cinco estudiantes muestran dos puntos importantes. El primero es una muy buena aceptación de proponer problemas retadores como estrategia de enseñanza - aprendizaje, hasta tal punto que informaron que se apropiaron de la estrategia para llevarla a cabo en su profesión como docentes. El segundo es que la metodología abordada durante el curso permitió la autonomía, la exploración, el proponer y el construir estrategias propias.

4.5.1 Análisis de la Heurística de Lakatos y la resolución de problemas

El método de Lakatos sienta una posición clara acerca de cómo se construye el conocimiento matemático y está enfocado hacia la demostración matemática (y la construcción de teorías), sin embargo, el enfoque del curso de matemáticas discreta se inclinó hacia la resolución de problemas con una metodología basada en la heurística de Lakatos. A continuación se presenta de manera general lo que se observó del funcionamiento de la heurística para resolver problemas de matemáticas discretas.

Durante el curso se desarrollaron 31 problemas en los Días 2 y 3 sin incluir la conjetura principal. Una primera evidencia fuerte del funcionamiento de la heurística es que de los 31 se concretaron las soluciones de 25, además de dar solución a la conjetura principal. De los problemas propuestos tal como se observó, y también así lo manifestaron los estudiantes, no se trataba de aplicar algún algoritmo o repetir un procedimiento similar al realizado por el docente en el tablero. El método de Lakatos permitió que el estudiante generara sus propias estrategias lo que implicó que desarrollara seguridad y confianza.

En algunas ocasiones se preguntaba al docente por la respuesta, pero al no obtener respuesta u obtener como respuesta del docente que no la sabía, los estudiantes sintieron la necesidad de confiar en sus propios procedimientos y justificaciones lógicas. La clase se convirtió en un espacio de debate entre todo el grupo incluyendo al docente. En cambio, en la experiencia como estudiante y como profesor del autor de la presente tesis, por lo general en los cursos de matemáticas, las respuestas y procedimientos son bien conocidos por el docente de la clase, lo cual quizás implique que no se tengan en cuenta estrategias alternas. Sin embargo, teniendo en cuenta el método de Lakatos, la resolución de problemas se convierte en un espacio de investigación matemática, cada idea y cada estrategia son tenidas en cuenta, lo que implica el surgimiento de nuevos problemas en términos de conjeturas. Las mentes jóvenes tienen ideas innovadoras y la heurística de Lakatos permite que ellas se conozcan y que sigan desarrollándose. En otros términos, la heurística está más relacionada con un pensamiento divergente que con uno convergente.

Dada la fuerte relación del método con la demostración de teoremas, la resolución de problemas bajo este enfoque buscó llegar a escribir formalmente las ideas, aunque, como se ha dicho, en este punto el avance no fue del todo satisfactorio frente a la meta de construir justificaciones que fueran estructuras desde el punto de vista estrictamente lógico. Concretamente la heurística de Lakatos fue una herramienta para la resolución de problemas en cuanto a:

- Se resolvieron una cantidad considerable de problemas no rutinarios y retadores.
- Permitió que los estudiantes socializaran sus estrategias, lo cual implica observar varias perspectivas que pueden aportan a la solución del problema.
- No todos los problemas los resolvió un solo estudiante, lo cual permitió evidenciar las diferentes capacidades de todos los estudiantes del grupo.
- Se dejó en claro que la socialización es fundamental en la resolución de problemas.
- Se mostró que se trabaja por motivación propia.
- Permitió al estudiante entrever que el profesor no tiene ni pretende tener la verdad absoluta.

4.5.2 Resolución de problemas y el entendimiento teórico

De acuerdo a los resultados de la investigación, se establece una relación patente entre la resolución de problemas y el entendimiento de teoría. Si bien es cierto la metodología del curso tuvo en cuenta la matemática como experimental e inductiva basada en la resolución de problemas bajo el método heurístico de Lakatos, la comprensión robusta de conceptos, teoría y principios generales de combinatoria fue una consecuencia del enfoque propuesto en el diseño del mismo. Se puede observar esto contrastando las soluciones de los estudiantes a problemas propuestos al comienzo y al final del curso. En los inicios del curso, el Estudiante 3 solucionó el siguiente problema: "*Una ceja es un arreglo de los números 1, 2, 3, 4 y 5 en el que los números segundo y cuarto son cada uno mayores que sus vecinos inmediatos. Por ejemplo (1, 3, 2, 5, 4) es una ceja y (1, 3, 4, 5, 2) no lo es. ¿Cuál es el número de cejas?*", generando la siguiente lista completa: {13254, 14253, 14352, 15243, 15342, 23154, 24153, 24351, 25143, 25341, 34152, 34251, 35142, 35241, 45231, 45132}. El problema también se puede resolver a través del principio de multiplicación contando algunas permutaciones. Ahora bien, en clases posteriores el siguiente problema de grafos fue propuesto: *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 4.$ *¿Cuántos subgrafos de* K_n *son isomorfos al grafo bipartito completo* $K_{1,3}$*?* En esta oportunidad el mismo estudiante utiliza principios de combinatoria y obtiene el resultado que hay $\binom{n-1}{3}n$, lo cual muestra un avance del estudiante en la comprensión y uso de los principios de la combinatoria.

Una segunda situación surgida en el curso que permite observar cómo la resolución de problemas alimenta el entendimiento de teoría se muestra a continuación. Se propuso al grupo resolver el problema siguiente. *Considere el conjunto X = {1, 2, 3, 4, 5, …, n}. ¿Cuántos subconjuntos de X, con al menos un elemento, no contienen dos enteros consecutivos?* El estudiante lo realiza para los primeros seis números y a partir de un pensamiento inductivo conjetura que si X_n representa la cantidad de subconjuntos del conjunto *X* que satisfacen la hipótesis del problema entonces: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2} + 1$.

El Estudiante 2, por otra parte, escribe la sucesión que se encuentra en la Tabla 1.

Tabla 4. Sucesión

n	X_n
1	1
2	1+1
3	1+1+2
4	1+1+2+3
5	1+1+2+3+5

Luego afirma el estudiante que se trata de la sumatoria de la sucesión de Fibonacci, esto es,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

donde f_k es el término *k*-ésimo de la sucesión de Fibonacci. ($f_1=1,\ f_2=1, \ldots f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$).

Un primer aspecto a resaltar en esta situación es cómo, a través de la resolución de problemas y la exploración propia del estudiante (heurística de Lakatos), se empieza a entender y conocer nueva teoría. En este caso particular, acerca de la sucesión de Fibonacci y continuando con el problema, el Estudiante 2 investiga y averigua que el término *k*-ésimo de la sucesión viene dado por: $\frac{(\varphi^n-(1-\varphi)^n)}{\sqrt{5}}$, donde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De nuevo el Estudiante 3 interviene para proponer que $X_n = \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1 = \frac{(\varphi^{n+2}-(1-\varphi)^{n+2})}{\sqrt{5}} - 1.$

Esta clase en particular en la cual se prioriza la resolución de problemas y los estudiantes descubren por sí mismo las propiedades de la sucesión de Fibonacci se tornó bastante interesante para los estudiantes e implicó el entendimiento de teoría nueva. En concordancia con la anterior, Polya escribe: "¿qué es una buena educación?, es aquella que sistemáticamente le da al estudiante la oportunidad de descubrir por sí mismo."

4.6. Impacto que genera el método heurístico de Lakatos cuando se utiliza para abordar la demostración.

Lakatos muestra que la manera en la cual se construye el conocimiento matemático es a través del método de pruebas y refutaciones, comenzando con una conjetura, ideando una demostración de la conjetura formulada, pasando por unas etapas intermedias en las cuales se examina la conjetura y su demostración, para finalmente concluir con una conjetura y su respectiva demostración aceptadas por un grupo de expertos pero con la perspectiva de que siempre puede ser mejorada.

En este orden de ideas, el método se llevó al aula de clase con el objetivo de replicar dichas etapas en la construcción de demostraciones, con la expectativa que a través de esta estrategia los estudiantes mejoraran en el proceso de demostrar.

Se puede afirmar que la heurística generó un impacto positivo en cuanto en cuanto a la comprensión del significado del enunciado o teorema. Los estudiantes justificaban sus ideas de manera coherente, como se mostró en el capítulo anterior, pero al momento de escribir formalmente las ideas se presentaron dificultades relacionadas directamente con el uso de la lógica y la claridad en la escritura matemática. El argumento presentado en la imagen de la Figura 21 (sección 4.1.4) es una muestra de la manera en la cual se escribían las demostraciones. En primer lugar, la formalidad matemática exige que se comunique las ideas claramente hablando desde la lógica, por el contrario, lo plasmado por el estudiante es ambiguo. Y en segundo lugar la afirmación que se desea demostrar es una doble implicación, sin embargo, el estudiante tiene dificultades pensándola como una implicación simple. Esta fue una dificultad presente durante todo el curso. Algunos avances al respecto se mostraron en la sección 4.3.4, no obstante, no se cumplieron plenamente las expectativas formuladas.

4.6.1 Análisis de la heurística de Lakatos en el entendimiento de la demostración.

Gila Hanna (2000) en su artículo "Proof, explanation and exploration: an overview", [62] escribe acerca del propósito de enseñar la demostración en el aula de clase diciendo que la demostración debe ser ilustrativa, es decir, la demostración debe permitir ver por qué el teorema es cierto. Hanna las denomina "demostraciones explicativas". Esta es una característica, por supuesto, que no la tienen todas las demostraciones, y no es siquiera pretensión de las derivaciones en un sistema formal. A continuación se evidenciará y analizará cómo las demostraciones construidas a través de heurística de Lakatos potencializan este aspecto explicativo. Por otra parte, se analizará la sintaxis y el uso de la lógica en las construcciones propias de las estudiantes.

Para lograr determinar la manera como la heurística de Lakatos contribuye a los dos propósitos anteriores se presentarán demostraciones escritas por los estudiantes y se hará el respectivo análisis.

Problema 1. Para cualquier grafo multígrafo no dirigido, establezca una conjetura sobre el número de vértices que son de grado impar. Demostrar.

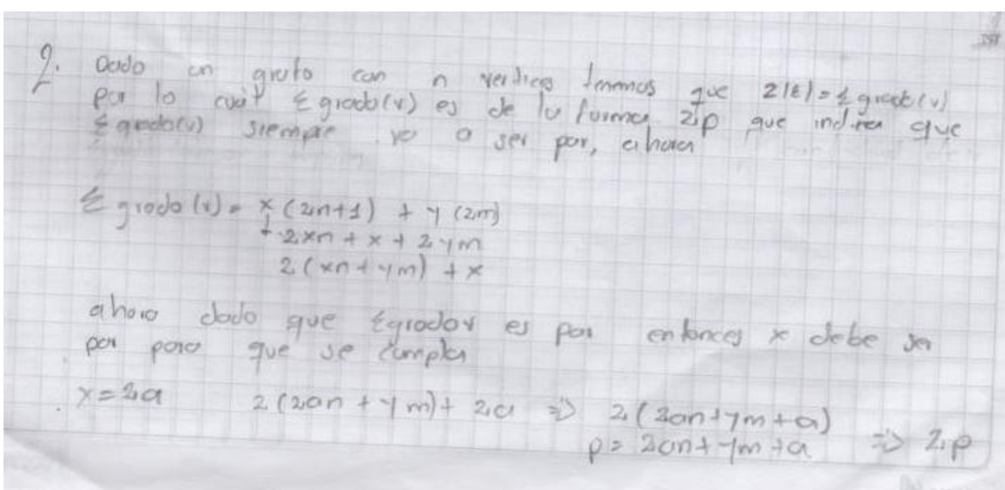


Figura 29. Demostración realizada por un estudiante

[62] Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Se observa de la anterior imagen que la sintaxis es ambigua, el estudiante no plasma las ideas de manera clara. Sin embargo, siguiendo las ideas del estudiante a partir de su exposición se evidencia un razonamiento correcto como se muestra a continuación. El estudiante se apoya en el teorema que enuncia que en cualquier grafo o multigrafo $\sum_{v \in V} grad(v)$ = 2$|E|$.

El estudiante establece la siguiente igualdad: $\sum grad(v)$ = *x (2n+1)* + *y (2m)*.

La notación es ambigua en cuanto no les da significado a las variables *x, n* y *m*. Sin embargo, con la exposición del estudiante se aclara que x e y representan la cantidad de números de vértices de grado impar y par respectivamente, y 2*n* + 1 y 2*m* son los grados de los vértices de grado impar y par. A pesar de asumir que todos los vértices de grado impar tienen el mismo grado y análogamente para los vértices de grado par, la demostración se refina con algunas observaciones. El estudiante muestra entendimiento del por qué se cumple el teorema, y tan solo necesita aclarar algunas ideas y mejorar su escritura.

Problema 2: Muestre que si *G* e un grafo bipartito con *v* vértices y *e* aristas, entonces $e \leq \frac{v^2}{4}$.

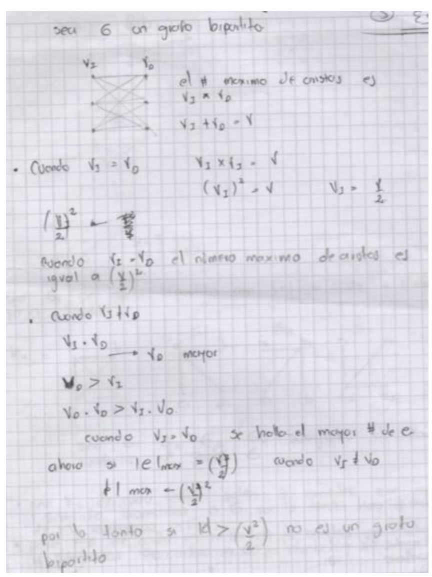


Figura 30. Demostración realizada por el Estudiante 3

El estudiante explora el problema mirando algunos casos particulares. Después de explorar y con el fin de generalizar, divide el grupo de vértices en dos partes que denota como V_I y V_D. De acuerdo a la definición de grafo bipartito, éstas cumplen que su unión es el conjunto de vértices del grafo y su intersección es vacía. El estudiante establece la idea clave para su demostración que es que el número máximo de aristas de un grafo bipartito es $V_I * V_D$, queriendo decir que es el producto de los cardinales de los dos conjuntos.

Analiza los dos siguientes casos:

i. $\# V_I = \# V_D$, donde # denota el cardinal del conjunto. Luego el máximo número de aristas en este caso es $\left(\frac{v}{2}\right)^2$, donde v es el cardinal del conjunto de vértices del grafo.

ii. $\# V_I \neq \# V_D$. El estudiante supone sin pérdida de generalidad que $V_I < V_D$. Al observar la imagen, el estudiante multiplica por V_D en ambos lados de la desigualdad. A partir de esto concluye que cuando $V_I = V_D$ el máximo número de aristas va a ser mayor que el máximo número de aristas cuando $V_I \neq V_D$. Luego llega a que $e \leq \frac{v^2}{4}$.

   En el primer ejemplo, la heurística de Lakatos permitió al estudiante entender por qué el teorema es cierto, no obstante la sintaxis de la demostración construida es ambigua. En el segundo problema, analizando con profundidad la demostración, en la parte ii existe un lema escondido y es:

   a. El estudiante llega a que $(V_D)^2 > V_D * V_I$ esto es cierto con la condición que el estudiante supone $\# V_I < \# V_D$.
   b. $(V_D)^2$ es el máximo de aristas que puede tener el grafo cuando $V_I = V_D$.
   c. $V_D * V_I$ es el número máximo de aristas que puede tomar el grafo cuando $V_I \neq V_D$
   d. Como $(V_D)^2 = \frac{v^2}{4}$, luego por la desigualdad ***a*** se concluye que $e \leq \frac{v^2}{4}$.

El lema escondido en la demostración está que al concluir la desigualdad $e \leq \frac{v^2}{4}$, v corresponde al número de vértices del grafo cuando $V_D = V_I$ y no del grafo inicial en el cual $V_I \neq V_D$.

Los dos ejemplos anteriores dan una muestra de lo que se reflejó durante el curso y por ende permiten concluir que la heurística de Lakatos es una herramienta eficaz para que el estudiante entienda por qué el teorema es cierto.

4.7. ¿Qué son las matemáticas? Una perspectiva desde la educación matemática.

Timothy Gowers en su artículo "The two cultures of mathematics. Mathematics: frontiers and perspectives"[63], desde la matemática misma, muestra dos diferentes culturas inmersas en la matemática, aquellos cuya prioridad está en la resolución de problemas y aquellos que privilegian el entendimiento y la construcción de teorías. Carlo Celucci, por otra parte, desde un punto de vista filosófico, discute la naturaleza de las matemáticas a partir de la distinción entre el solucionar problemas (método analítico) y demostrar teoremas (método axiomático). En esta oportunidad y a través de los resultados de la presente investigación, se pretende discutir, desde una perspectiva de la educación matemática, si en la delimitación de lo que se entiende por "hacer matemáticas" se debe priorizar el resolver problemas o privilegiar el generar teoría y demostrar teoremas, o, si la matemática debe aprenderse desde la resolución de problemas o desde entender teorías y demostraciones hechas por otros. A continuación se analizará la manera cómo el estudiante se desenvolvió en el curso de matemáticas discretas a través de la resolución de problemas y a través de la construcción de demostraciones formales.

El curso de matemáticas discretas desarrollado bajo la heurística de Lakatos, tenía como propósito que cada conjetura o problema propuesto llegara hasta la última fase del método que es la formalización

[63] Gowers, W. T. (2000). The two cultures of mathematics. *Mathematics: frontiers and perspectives*, *65*.

rigurosa de las ideas a través de la demostración. El curso por lo tanto enfatizó tanto en la resolución de problemas como en la demostración matemática.

Las dos situaciones siguientes constituyen una muestra de lo que hacían los estudiantes cuando se enfrentaban a un problema y a una demostración.

Problema 1. Algunos pisos cuadrados se han embaldosado con baldosas blancas y grises. Los que usan 4 y 9 baldosas grises se muestran en la figura. Cada piso tiene una baldosa gris en las esquinas, y cada baldosa gris está rodeada por baldosas blancas. ¿Cuántas de estas últimas harán falta para un piso que lleva 25 baldosas grises? Generalizar.

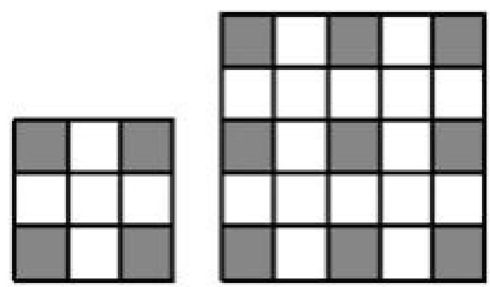


Figura 31. Baldosas

Problema 2. Escriba una fila de números enteros arbitrarios (se permiten repeticiones). Ahora construya una segunda fila de la siguiente manera: Si el entero n está en la columna k en la primera fila, en la columna k en la segunda fila escriba el número de veces que se repite el número n en la fila 1 desde la columna 1 hasta la columna k inclusive. Similarmente construya una tercera fila usando los valores en la fila 2, y por último una cuarta. Por ejemplo:

7	1	2	1	7	1	1
1	1	1	2	2	3	4
1	2	3	1	2	1	1
1	1	1	2	2	3	4

Figura 32. Problema2

Demuestre que la cuarta fila es siempre igual a la segunda.

Nótese que, en lo que sigue, se toma la posición que el primero es un problema que invita a quien lo resuelve a determinar lo que se debe establecer y justificar (representa el resolver problemas), mientras que el segundo, aunque tenga la forma de problema, presenta de antemano un hecho para que sea demostrado (representa el demostrar).

En el primer problema, los estudiantes propusieron diferentes estrategias llegando a fórmulas diferentes pero equivalentes. Por ejemplo el Estudiante 1 obtuvo: $t^2 - a = b$, donde *a* representa el número de baldosas grises y *b* el número de baldosas blancas y *t* la longitud (en baldosas) del lado del cuadrado. Los estudiantes 3 y 5 por otra parte escribieron "baldosas blancas = $(\sqrt{n} + (n-1))^2 - n$", donde *n* es el número de baldosas grises. Este tipo de problemas en el cual el enunciado es de fácil comprensión y además con requerimientos teóricos básicos, pero las soluciones no son inmediatas, motiva al estudiante permitiéndole avanzar en éste de forma natural.

Por otra parte, en el segundo problema, los estudiantes repitieron el ejercicio con diferentes números varias veces observando la regularidad. Sin embargo, al momento de demostrar por qué se cumplía que la cuarta y la segunda fila eran iguales, no hubo propuesta alguna de los estudiantes y por ende no dieron un primer paso para empezar a abordar la demostración.

Esto es una muestra de lo que puede suceder cuando se propone un problema y cuando se propone una demostración. El problema permite que el estudiante trabaje de manera más natural, explorando y observando resultados de la exploración, a diferencia que en la demostración en el cual la exploración sólo lleva al mismo resultado ya contenido en el enunciado en lo que en efecto se pide demostrar, implicando con frecuencia que el estudiante no haya podido generar ideas para comenzar.

Aparte de esto, en la demostración se requiere de un buen manejo de la lógica y de técnicas de demostraciones (inducción, forma directa, por contra recíproco y por reducción al absurdo). Esta falta de dominio implicó que, en el curso de matemáticas discretas para licenciados en matemáticos e ingenieros de sistemas, la construcción de demostraciones formales no tuviera un impacto significativo como sí lo tuvo la resolución de problemas.

El siguiente problema, trabajado en tres sesiones de clases, muestra de nuevo la manera cómo los estudiantes se desenvolvieron en la resolución de problemas y en la demostración de teoremas.

Problema 3: Un grafo tiene 30 vértices y cada vértice tiene 6 aristas. Encuentre el número total de triplas de puntos tales que, cada par de puntos está unido o cada par de puntos no está unido.

Al principio, de forma similar a la demostración del problema 2, los estudiantes no tenían ideas para abordar el problema, pero, a diferencia del problema que pide una demostración, en este problema la dificultad se superó. El estudiante 6 abrió una puesta para avanzar en el problema y fue dibujar un grafo con las condiciones del enunciado.

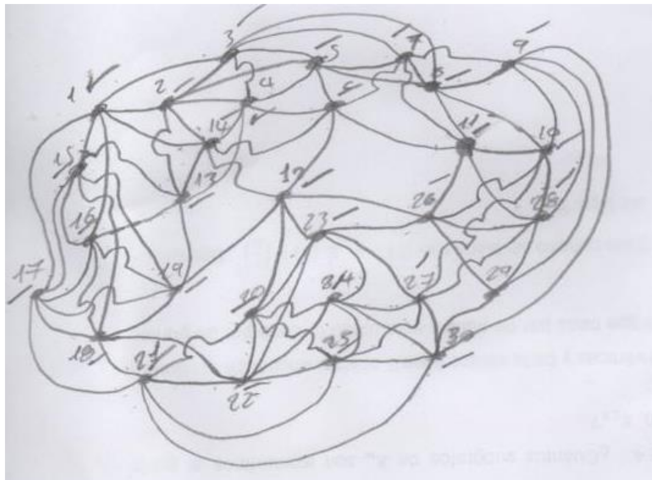


Figura 33. Grafo con las hipótesis requeridas

Ahora bien, a partir de la construcción anterior y del debate por parte de los estudiantes se generaron diversas conjeturas, una de las cuales fue:

Conjetura 1. Cualquier grafo con 30 vértices y cada vértice de grado 6 es isomorfo al dibujado por el estudiante 6.

Siguiendo las etapas de la heurística de Lakatos, se empieza la exploración del problema. En esta clase se empieza a discutir la Conjetura 1. Una primera estrategia es explorar un grafo de 6 vértices en el cual cada vértice es de grado 2. El nuevo problema a considerar fue:

Conjetura 2. Si *G* y *H* son dos grafos que tienen 6 vértices y el grado de cada vértice es de grado 2, entonces *G* y *H* son isomorfos.

El estudiante 5 expone un contraejemplo de la conjetura 2, mostrando los siguientes dos grafos que no son isomorfos.

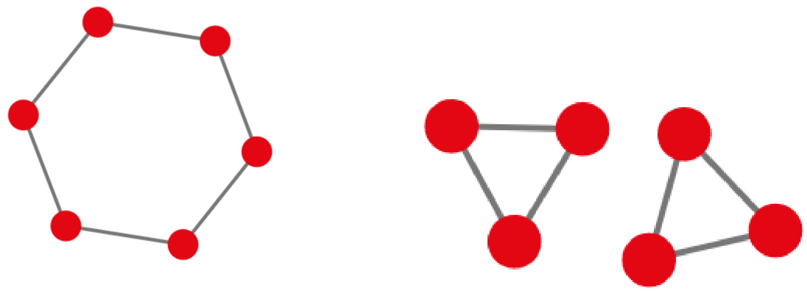


Figura 34. Grafos no isomorfos

En este punto es importante resaltar que a partir de un contraejemplo se rechaza la conjetura. En la teoría de Lakatos aquél es nombrado como contraejemplo global e influye en la modificación de la conjetura. Más precisamente, es el método descrito por Lakatos como exception-barring.

El Estudiante 5 afirmó que se debería incluir la conexidad como un lema adicional a la conjetura. La Conjetura 2 generalizada y modificada queda así:

Conjetura 3. Si *G* y *H* son grafos conexos con el mismo número de vértices y cada vértice de un mismo grado entonces *G* y *H* son isomorfos.

En este punto es importante observar la manera cómo los estudiantes fueron avanzando en el problema. Los estudiantes trabajaron motivados, generando sus propias estrategias y explorando nuevas ideas.

Ahora bien, para la demostración de la Conjetura 3 no hubo propuestas; los estudiantes no eran conscientes que para demostrar que *G* y *H* son isomorfos se debía construir un isomorfismo entre los dos grafos. Si el problema si hubiese limitado a demostrar la Conjetura 3, las nuevas e interesantes ideas que más adelante surgieron para solucionar el problema no habrían surgido. Una de estas nuevas ideas, fue la siguiente conjetura:

Conjetura 4: Si *G* es un grafo conexo con v vértices cada vértice de grado *k* entonces es posible dibujarlo.

Rápidamente se establece que si $n*k$ es impar entonces es imposible dibujar el grafo. Para el caso cuando k y n son pares el Estudiante 5 descubrió un algoritmo que permitió construir el grafo y a partir de esta idea el problema inicial fue resuelto.

Lo que se pretende ilustrar con la situación anterior es que, si la demostración y el rigor matemático fuesen lo fundamental en la enseñanza de la matemática discreta, entonces frente al problema los estudiantes hubiesen quedado tratando de demostrar la Conjetura 3, y las grandes ideas que surgieron después de esta conjetura no habrían aparecido.

Análogamente a la posición de Gowers con respecto a los dos culturas en matemáticas en el cual afirmó que los matemáticos en la praxis resuelven problemas y construyen teoría, pero que todos tienen alguna prioridad, en la educación matemática los estudiantes están inmersos en ambas actividades (resolviendo problemas y demostrando), pero el curso de matemáticas discretas permitió concluir que el énfasis debe estar en la resolución de problemas lo cual potencializa la creatividad y genera la investigación matemática tal como se mostró anteriormente y como así lo afirmaron los estudiantes.

El siguiente gráfico resume las concepciones que se asumen de lo que es “el aprender matemáticas” desde la perspectiva de la educación matemática y de lo que los estudiantes han mostrado durante este estudio.

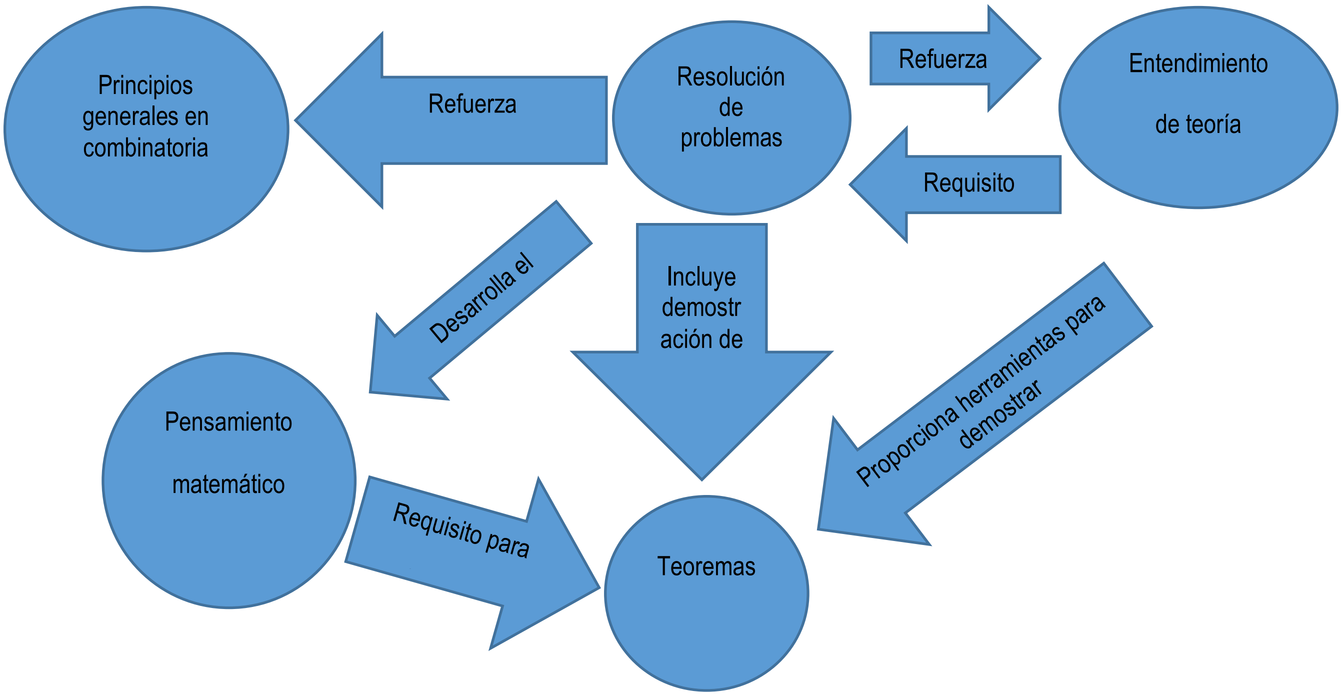


Grafico 5. ***. Resolución de problemas como centro de "el aprender matemáticas". Fuente: Elaboración propia***

Conclusiones parciales Capítulo 4

Se pueden concluir puntualmente de este capítulo que la heurística de Lakatos y la resolución de problemas fue un método adecuado para llevar el curso de matemática discretas. Tuvieron un impacto en los estudiante en cuanto a su actitud, el pensamiento autónomo, la exploración de estrategias y la investigación en matemáticas. Respecto a la demostración, el método de Lakatos fue una herramienta que aportó en cuanto a la función explicativa que ésta debe tener.

Por otra parte, los resultados mostraron que el curso de matemáticas discretas llevado a cabo a través del método heurístico de Lakatos y la resolución de problemas también fortalece el pensamiento matemático, la actitud y el compromiso de los estudiantes hacia la matemática, un trabajo autónomo que lo conduce hacia la investigación matemática.

Además, un punto importante para subrayar es la manera cómo el diseño del curso permitió que cada estudiante diera lo mejor de sí mismo. Ahora bien, en el análisis de resultados se concluye que desde la perspectiva de la educación matemática existe una relación entre resolución de problemas, demostración de teoremas y entendimiento de teoría. La resolución de problemas es el centro de la actividad matemática dado que refuerza el entendimiento de teoría y desarrolla el pensamiento matemático que influye en las habilidades para la demostración de resultados.

CONCLUSIONES

La posición de Gowers concluye, frente a la naturaleza de “el hacer matemáticas”, que en contraposición al dominio de la generación de teorías en el siglo XX, a las dos culturas (priorizar el resolver problemas o el construir teoría) se les debe atribuir la misma importancia. Celucci concluye, desde un punto de vista filosófico frente a la naturaleza de la matemática, que el método de las matemáticas es el analítico y por ende la matemática en esencia es resolución de problemas, aunque tanto el método analítico como el axiomático juegan un papel en ella.

Ahora bien, ¿qué se puede decir desde la perspectiva de la educación matemática? Para responder a ello, es ineludible tener en cuenta la naturaleza de la matemática, de “el aprender matemáticas” y de los objetivos de la educación matemática (la naturaleza de “el conocer matemáticas”). Tanto la primera pregunta como la tercera (ésta última en parte) han sido respondidas a satisfacción del autor de la presente tesis. Celucci ha argumentado convincentemente que el método de la matemática es el analítico. Lakatos ha desarrollado una teoría falibilista y cuasiempírica acerca de la naturaleza del conocimiento matemático que implica que el conocer matemáticas involucra un proceso falibilista y cuasiempírica. De este modo queda por avanzar en la respuesta a la pregunta que concierne la naturaleza de “el aprender matemáticas”.

Se considerarán algunas cuestiones que son importantes para poder dar una respuesta. ¿Qué es lo prioritario (sin la exclusión del otro) en la educación matemática: el aprendizaje de teoría o la resolución de problemas?, y ¿Cómo trabaja el estudiante a partir de la resolución de problemas y cómo a través de la demostración rigurosa de teoremas matemáticos?

Para abordar estas preguntas, en primer lugar, se tendrá en cuenta las posiciones de Polya y Schoenfeld. Como ya se ha señalado, Polya en su obra “How to solve it” [64] asegura que, si el profesor desafía la

[64] Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

curiosidad de sus estudiantes proponiendo problemas proporcionales a su conocimiento, y les proporciona una guía a solucionarlos por medio de preguntas estimulantes, entonces ellos pueden experimentar el pensamiento matemático independiente. Esta postura, y así lo muestra Polya en toda su obra, prioriza la resolución de problemas antes que la presentación de la teoría acabada para de alguna forma ser entendida, se enfatiza en motivar y desafiar al estudiante con problemas que él pueda abordar. Polya también afirma que la matemática tiene dos caras: la matemática presentada de manera sistemática como ciencia deductiva y la matemática experimental, una ciencia inductiva. En su libro, muestra cómo en la educación matemática se puede abordar esa matemática experimental a través de la descripción de una heurística en la resolución de problemas. En concordancia con lo anterior Polya escribe "*permítame expresar lo que pienso cerca de lo que es la enseñanza. Quizás, el primer punto, el cual es ampliamente aceptado, es que la enseñanza debe ser activa, o mejor, el aprendizaje debe ser activo…el principal objetivo en la enseñanza de la matemática es el desarrollo de estrategias para la solución de problemas*"[65] . Ahora bien, ¿por qué el énfasis de Polya en mostrar una heurística para el descubrimiento matemático? Quizás es debido a que para él la dificultad de entender la matemática no estuvo en seguir los pasos deductivos de una demostración, sin en pensar cómo esos resultados fueron descubiertos. Puntualmente Polya, refiriéndose a sí mismo escribe "*yo llegué a las matemáticas muy tarde…cuando me acerqué y comencé a aprender, yo pensé: bien, es cierto, la demostración parece concluyente. ¿Pero cómo es que la gente encuentra esos resultados? Mi dificultad en comprender las matemáticas estuvo en pensar como ella fue descubierta*"[66].

Schoenfeld, siguiendo las ideas de Polya, en su libro "Mathematical Problem Solving" escribe acerca de la comprensión y enseñanza de las habilidades para la solución de problemas. En el texto presenta diferentes problemas desafiantes que requieren un conocimiento básico de la educación secundaria y

[65] Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.
[66] Ibidem

algunos otros que requieren un conocimiento más sofisticado. No obstante, como él mismo afirma, los problemas sí requieren de un substancial aporte de razonamiento y pensamiento matemático.

Tanto Polya como Schoenfeld enfatizan en el desarrollo del pensamiento matemático, logrado a través de resolución de problemas, más que en el entendimiento de teoría, sin desconocer que éste es un resultado natural de aquél y que se alimentan mutuamente. En este orden de ideas y a través de los resultados obtenidos en la presente investigación, se corrobora la postura de estos dos autores concretando que, en la educación matemática, en el aprender matemáticas, la comprensión de teoría debe jugar el papel de antecedente para el objetivo prioritario que es "hacer matemáticas" o sea, ser un mejor resolutor de problemas y por ende desarrollar el pensamiento matemático.

Un aspecto adicional a considerar es la posición de Gila Hanna en su artículo "Challenges to the importance of proof" en cuanto a la resolución de problemas y al entendimiento de teoría. La autora asegura que la resolución de problemas refuerza el entendimiento de conceptos y la teoría matemática. Aunque Hanna escribe puntualmente sobre el papel de la demostración, es claro que no es aquella demostración que el docente presenta como un producto acabado a través de la deducción de reglas básicas, sino aquella que es una construcción propia del estudiante y que tiene la característica de ser explicativa. Así, la demostración de un teorema se puede ver como la resolución a un problema y como tal refuerza el entendimiento.

Los resultados de la presente investigación permitieron corroborar la priorización de la resolución de problemas en términos de varios parámetros. En primer lugar, frente a la actitud del estudiante bajo este enfoque y bajo el enfoque de la matemática como ciencia deductiva, los estudiantes 3, 5 y 1 comentaron con claridad que un aspecto que diferencia la metodología del curso de matemática discreta realizado fue el enfatizar en la resolución de problemas lo cual motiva más que la metodología de muchos otros cursos que se basan en aplicación de reglas, algoritmos, definiciones, teoremas y propiedades.

En segundo lugar se prioriza la resolución de problemas frente al entendimiento de teorías como se mostró en el análisis de resultados, particularmente en la sección 4.5.2

Por otra parte, respecto al aporte práctico de la presente investigación, el aprendizaje centrado en la resolución de problemas que constituyen un reto para el estudiante fue un aspecto de la metodología llevada a cabo durante el curso que aportó para que el estudiante se comprometiera hacia la actividad matemática. En particular, el proponer un problema para ser desarrollado durante todo el semestre académico (conjetura principal), propició un escenario óptimo y de total concordancia con el método heurístico de Lakatos. Los estudiantes exploraron, indagaron, propusieron y socializaron a medida que, de manera independiente, trabajaron motivados en la solución del problema. Esta estrategia innovadora junto con la metodología del curso permitió involucrar al estudiante en una genuina investigación en matemáticas.

El diseño del curso contempló problemas categorizados en diferentes niveles de dificultad, lo cual implicó que, aunque los sujetos de estudio fuesen heterogéneos, en términos de las capacidades y dificultades manifestadas en matemáticas, a cada estudiante se le llevara, y él o ella se esforzara, a lograr su mejor nivel posible, desarrollando de esta forma el pensamiento matemático.

A través de la metodología propuesta para el curso los estudiantes resolvieron 25 de los 31 problemas propuestos y trabajados. De ahí se puede concluir que el método de Lakatos es una muy buena herramienta para abordar problemas de la matemática discreta, los cuales, como se observó, tienen una característica intrínseca de ser motivadores en concordancia con los resultados de diferentes autores que han investigado en este campo de la educación matemática. El método de la heurística de Lakatos es una buena herramienta para que los estudiantes construyan sus propias demostraciones que a su vez permite que el estudiante entienda por qué un teorema se cumple, tal y como lo aconseja Gila Hanna y como siempre buscaba el inigualable matemático Paul Erdős.

La presente investigación también permitió observar cómo el curso de matemáticas discretas para estudiantes universitarios puede llevarse a cabo con resultados favorables a través del método de la heurística de Lakatos. El tópico de matemáticas discretas en los últimos años ha ocupado un lugar importante en el currículo de matemáticas en países como los Estados Unidos, tal como lo expresan autores como Gerald A Goldin, Joseph Rosenstein, Valerie DeBellis entre otros. El NCTM en “Principles and standards for school mathematics (2000)” sostiene la posición que la matemática discreta debe ser parte integral del currículo de matemáticas.

La matemática discreta es una rama de la matemática considerada especialmente apta para desarrollar el pensamiento matemático del estudiante por el tipo de problemas que se pueden proponer para motivar y comprometerlo hacia la actividad matemática. Si bien en los últimos años ha ido cobrando importancia en países como los Estados Unidos, no obstante, en Colombia existen pocas investigaciones sobre la enseñanza de esta rama a nivel primario, secundario o superior. Adicional a esto, los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia (2009) no contemplan estos tópicos para la enseñanza en las escuelas de nivel primario y secundario. Aunado a lo anterior, son pocos los planes de estudio de licenciatura en matemáticas y matemáticas de las universidades colombianas que contemplan esta asignatura, lo cual influye directamente en el poco conocimiento de dichos tópicos al nivel de la educación básica y media.

Ahora bien, los resultados de la presente investigación mostraron que desde la perspectiva de la educación matemática se prioriza la resolución de problemas antes que el entendimiento de teorías y la demostración de teoremas para aprender matemáticas, por lo tanto, es necesario que este enfoque se abarque en los cursos de formación matemática en todos los niveles.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda que los cursos de matemáticas discretas a nivel superior se lleven a cabo bajo una metodología análoga a la que se describe en este estudio.
- Se recomienda que la comunidad de educación matemática en Colombia realice nuevas investigaciones aportando, analizando y obteniendo resultados que evalúan el valor de la matemática discreta en el currículo escolar, además de investigaciones que muestren la importancia de esta rama para el desarrollo del pensamiento matemático y la formación de actitudes positivas de los estudiantes hacia la matemática.
- Se requieren investigaciones que muestren resultados acerca de la manera en que se puede aprender este tópico a nivel primario y secundario.
- Es necesario adelantar investigaciones adicionales que analizan la manera de utilizar la heurística de Lakatos como método para la enseñanza-aprendizaje de otros tópicos de la matemática que suelan considerarse más abstractos y formales, tales como el análisis real o el álgebra abstracta, de manera similar pero más a fondo de lo que reportaron Larsen y Swinyard en los artículos que se revisaron en el Capítulo 1
- Se requieren investigaciones que evalúan o valoran la repercusión de la heurística de Lakatos en la enseñanza de la matemática en la educación primaria, secundaria y media.
- Se requieren estudios que muestren con detalles la relación del método heurístico de Lakatos con el pensamiento matemático divergente y con el convergente.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

1. Anderson, I., Asch, B. V., & Lint, J. V. (2004). Discrete mathematics in the high school curriculum. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik International Reviews on Mathematical Education, 36(3), 105-116.
2. Boats, J. et al. *Geometric conjectures: The importance of counterexamples*. Mathematics Teaching in the Middle School, Reston, v. 9, n. 4, p. 210-215, Dec. 2003.
3. Burghes, D. (1985). *The use of discrete mathematics in the teaching of mathematics*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 16(5), 651-664.
4. Cellucci, C. (2015). Is Mathematics Problem Solving or Theorem Proving?. *Foundations of Science*, 1-17.
5. Gowers, W. T. (2000). The two cultures of mathematics. *Mathematics: frontiers and perspectives*, *65*.
6. Davis, P; Hersh, R. (1980). *The Mathematical Experience*. Harmondsworth: Penguin, 1980.
7. Davis, R. B., (1984). *Learning Mathematics: The Cognitive Science* Approach *to Mathematics,* Ablex, and Norwood NJ.
8. Debellis, V.A. & Rosenstein, J.G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. ZDM. 36 (2), 46-55.
9. De Villiers, M. (2000). A Fibonacci generalization: A Lakatosian example. Mathematics in College, 10–29, March.
10. Dieudonne, J. A., (1971), 'Modern axiomatic methods and the foundations of mathematics', in F. Le Lionnais (Ed.), *Great currents of mathematical thought* (Vol.I), Dover, New York.

11. Grenier, D., Payan, C. Discrete matheamtics in relation to learning and teaching proof and modelling. In: Schwank, I. eds. (1999) Proceedings of the Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-1). Universität, Osnabrück, pp. 143-155

12. Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. The American Mathematical Monthly, 87 (7), 519-524.

13. Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development, *Mathematical Thinking and Learning, 7*, 27-50.

14. Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-50.

15. Hanna, G., Sidoli, N. (2007) Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. ZDM Mathematics Education 39: pp. 73-78

16. Hart, E., Maltas, J., And Rich, B. (1990). *Teaching Discrete Mathematics in* Grades *7-12*, Mathematics Teacher 83 (ed. H.L. Schoen), May 1990.

17. Hart, E. W. (2008*). Navigating through discrete mathematics in grades 6- 12. Principles and standards for school mathematics navigations series*. Reston, VA: Author.

18. Hart, E. (1985). *Mathematics Teacher,* 78, 334.

19. Kline, M. (1980). *El fracaso de la matemática moderna; por qué Juanito no sabe sumar* (No. 510 K55Y).

20. Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge,* Oxford University Press, New York.

21. Komatsu, K. (2012*). Lakatos' heuristic rules as a framework for proofs and refutations in mathematical learning: Local-counterexample and modification of proof*. In Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 2838-2847).

22. Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

23. Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). *Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom.* Educational Studies in Mathematics, 67(3), 205–216..

24. Monaghan, J., & Orton, A. (1994). New topics in the mathematics curriculum: Discrete mathematics. In A. Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in Teaching Mathematics* (pp. 74-83). London; New York: Cassell.

25. Maffioli, F. (1987). *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,* 18, 658.

26. National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

27. Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

28. Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3). New York: McGraw-Hill.

29. Rivera-Marrero, O. (2007). The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses, tesis de doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.

30. Roa, Rafael, Navarro-Pelayo, Virginia (2001). *Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. Jornadas europeas de estadística*.

31. Rosen, K.H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones.* 5. ed. Madrid: McGraw-Hill Interamericana, 2004

32. Rosenstein, J.G., Franzblau, D., & Roberts, F. (Eds.). (1997). DIMACS *Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: Discrete mathematics in the schools*. (Vol. 36). American Mathematical Society and National Council of Teachers of Mathematics.

33. Santos, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Investigación en Educación Matemática*, XII. 157-187.

34. Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

35. Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press

36. Steiner, H. (1987).*Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics, Kingston, v. 7, n. 1, p. 7-13, Feb. 1987.

37. Swinyard, C. (2011). *Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike*. The Journal of Mathematical Behavior, 30(2), 93-114.

38. Wong, K. Y., Lee, P. Y., Kaur, B., Foong, P. Y., & Ng, S. F. (2009). Mathematics education: The Singapore journey (Vol. 2). Singapore: World Scientific Publishing.

39. Xiuguo, W. (2009). *Discrete mathematics teaching reformation: Adding experiments.* In Education Technology and Computer Science, 2009. ETCS'09. First International Workshop on (Vol. 2, pp. 566-569). IEEE

40. Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2007). *A case study of defining: Creating a new mathematical reality*. Mathematical Thinking and Learning.

41. Zaslavsky, O., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I., & *Winicki*, G. (in press). *The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) Proof and proving in mathematics education. New York, NY: Springer.

ANEXOS

Anexo1. Consentimiento informado estudiantes

INFORMACIÓN PARA ESTUDIANTES DEL CURSO DE MATEMATICAS DISCRETA

PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Querido estudiante, el proyecto de investigación "El desarrollo del pensamiento matemático a través de la heurística de Lakatos en la construcción de demostraciones y en la resolución de problemas de la matemática discreta", es conducido por Jader Cortes Amaya, estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en el marco del desarrollo de su tesis doctoral. Uno de los objetivos generales propuestos en dicho estudio es "explorar la repercusión de la heurística de Lakatos llevada al aula de clase en el desarrollo del pensamiento matemático, en la construcción de demostraciones y en la resolución de problemas de la matemática discreta". Teniendo en cuenta que la electiva disciplinar que usted va a cursar es "matemáticas discretas" se solicita su valiosa colaboración.

Si usted accede a participar, se le pedirá a lo largo del semestre, además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las entrevistas semiestructuradas serán grabadas en audio y las clases en audio y video, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que ha expresado.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Sus respuestas a los instrumentos y a las entrevistas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación en él. También, puede retirarse en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parece incómodas, tiene derecho de informarlo al investigador, incluso puede no responderlas.

Agradecemos su sincera participación.

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Yo ____ estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño, identificado con el código _________________ acepto participar voluntariamente en el estudio "El desarrollo del pensamiento matemático a través de la heurística de Lakatos en la construcción de demostraciones y en la resolución de problemas de la matemática discreta", conducido por Jader Cortes Amaya.

Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es "explorar la repercusión de la heurística de Lakatos llevada al aula de clase en el desarrollo del pensamiento matemático, en la construcción de demostraciones y en la resolución de problemas de la matemática discreta". También me han informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, debo responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez; y que las entrevistas serán grabadas en audio y las clases en audio y video.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Jader Cortes Amaya a través del correo jadercortes@uan.edu.co

En constancia firmo a los ____ días del mes de _______________ de 2016.

____

FIRMA

Anexo 2. Primera Encuesta

Encuesta 1

A continuación encontrará un aserie de preguntas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por favor, conteste desde la perspectiva de su experiencia como estudiante.

Carrera:
Semestre:

Marque con una X, en el cuadro de acuerdo a los siguiente criterios: FA: Fuertemente de acuerdo A: de acuerdo AD: Ni de acuerdo ni en Desacuerdo D: En desacuerdo FD: Fuertemente en desacuerdo

Descripción o identificación de cada elemento del cuestionario	FA	A	AD	D	FD
Si la Universidad propone que en los cursos de matemáticas se debe enseñar a demostrar, cuál es su postura al respecto.					
Se le facilita construir demostraciones matemáticas					
Alguna metodología en particular lo ha motivado o lo ha ayudado a construir demostraciones					
Ha realizado demostraciones en matemáticas					
En alguna ocasión se ha propuesto resolver algún problema matemático lográndolo después de un largo período de tiempo.					
Piense en el problema matemático que más le ha llamado la atención. Lo intento resolver porque su profesor se lo exigió.					
Se siente fuertemente motivado a encontrar la solución de un problema que lo rete intelectualmente.					
Piensa que puede llegar a sentirse motivado por el estudio de la matemática.					
Se ha sentido cómodo con la metodología de los cursos de matemática del colegio					
Se ha sentido cómodo con la metodología de los cursos de matemática de la Universidad					
Alguna metodología lo ha cautivado e involucrado en el estudio de la matemática.					

Preguntas abiertas

1. ¿Cómo puede mejorar en ese proceso de demostración matemática? (Analice si alguna metodología, estrategia, situación o técnica fue adecuada para entender cómo hacer una demostración.)

2. Escriba el problema matemático que ha llamado totalmente su atención. Cuando lo intento resolver o lo resolvió, describa como fue su experiencia.

3. Cuál sería su consejo para que el aprender matemáticas sea por interés personal.

4. Piense en la mejor metodología que usted ha vivenciado de un curso de matemáticas. Describa dicha metodología.

Anexo 3. Encuesta 2

A continuación encontrará una serie de preguntas relacionadas con la metodología que se llevó a cabo en el curso de matemáticas discretas. Conteste por favor desde su perspectiva como estudiante.

Nombre:	
Carrera:	**Semestre:**

Marque con una X, en el cuadro de acuerdo a los siguiente criterios: FA: Fuertemente de acuerdo A: de acuerdo AD: Ni de acuerdo ni en Desacuerdo D: En desacuerdoFD: Fuertemente en desacuerdo

Descripción o identificación de cada elemento del cuestionario	FA	A	AD	D	FD
La manera como se llevó el curso de matemáticas discretas implicó una mejor comprensión de los conceptos.					
Los problemas trabajados durante el curso despertaron su curiosidad matemática					
El curso de matemáticas discretas le ha aportado a su formación personal como resolutor de problemas					
El curso le ha aportado para mejorar en la construcción de demostraciones.					
La demostración es algo que se debe enseñar aprender en los cursos de matemáticas					
La metodología llevada a cabo en el curso de matemáticas discretas tuvo aspectos diferentes a otras metodologías.					
La metodología del curso le comprometió y le motivó hacia el estudio de las matemáticas.					
Los problemas que implican un reto para el estudiante son fundamentales en un curso de matemáticas.					

Anexo 4. Entrevista

1. **1.** ¿Puede describir algún problema del curso junto con la forma de abordarlo frente al cual se haya sentido fuertemente motivado por hallar la solución?
2. **2.** Respecto a las demostraciones matemáticas:
    a. ¿las considera importantes?
    b. ¿se le facilita realizarlas? y
    c. ¿cómo considera que se puede mejorar en este proceso?
3. **3.** ¿Cuál es su apreciación de la experiencia de proponer una conjetura para ser desarrollada durante el semestre?
4. **4.** ¿Puede encontrar diferencias entre la metodología utilizada en el curso de matemáticas discretas y los otros cursos de matemáticas que ha cursado en la Universidad?
5. **5.** ¿Puede resaltar algún aspecto metodológico del curso que más le haya llamado la atención?
6. **6.** Identifique, si en su criterio las hay, dos debilidades y dos fortalezas de la metodología del curso.
7. **7.** Describa qué le aportó el curso en la construcción de demostraciones matemáticas.
8. **8.** ¿Qué le aportó como estudiante y como persona el curso de matemáticas discretas?

Anexo 5. Diseño del curso de matemáticas discretas

El curso está diseñado teniendo en cuenta la clasificación de las clases en Días 1, 2 y 3. Para cada uno de estos días se tienen objetivos particulares. Para los Días 2 y 3 se establecerán objetivos estándares y para los Días 1 se presentará los objetivos clase por clase.

Días dos (2) Metodología y objetivos

Tema: De acuerdo a lo que se desarrolle en el Día 1 inmediatamente anterior.

Objetivos

- Reforzar los conceptos vistos en la clase del Día 1 a través de la resolución de problemas retadores.
- Permitir que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique en el contexto de la resolución de problemas retadores desarrollando de esta manera el pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia el estudio de la matemática a través de problemas no rutinarios de la matemática discreta.

Metodología

- Los estudiantes se reúnen por grupos de no más de tres estudiantes, se proponen problemas dando un tiempo determinado para que los exploren y analicen. Luego los estudiantes muestran su desarrollo a los compañeros, se debate y se concluye.

Días tres (3). Metodología y objetivos

Temas: Problemas transversales a otras áreas.

Objetivos

- Permitir que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique por medio de la solución de problemas de la matemática discreta transversales a otras áreas de conocimiento.
- Usar los conocimientos vistos en clase como herramienta para la solución de problemas no rutinarios.
- Motivar al estudiante hacia el estudio de la matemática a través de problemas no rutinarios de la matemática discreta.
- Fomentar el debate académico y la construcción social del conocimiento matemático.

Metodología

- Los estudiantes trabajarán en grupos y se les dará un tiempo prudente para que exploren y analicen cada problema; cada grupo mostrará su solución con el propósito que se muestren ejemplos, contraejemplos y demostraciones, y finalmente se llegue a un consenso de las respectivas soluciones. Se tomará un espacio para presentar la conjetura principal e indicar la respectiva metodología.

ACTIVIDADES COMBINATORIA

Combinatoria Clase 1. Día (1). Semana 1.

Tema general: Combinatoria.

Temas específicos:

- Reglas de la suma y el producto
- Permutaciones

Objetivos

- Determinar las reglas de la suma y el producto a través de la solución de problemas.
- Analizar las propiedades y características de una permutación.
- Construir la fórmula de permutación a través de la resolución de problemas.

Metodología

La clase se desarrollará a través de la solución de problemas para finalmente concluir enunciando apartes de la teoría; los estudiantes explorarán diversos problemas de la combinatoria empleando la heurística propia de cada uno de ellos.

PROBLEMAS A ABORDAR EN LA CLASE 1. DÍA (1). SEMANA 1

1. Cinco escuelas enviarán su equipo de futbol a un torneo en el cual cada equipo jugará con cada uno de los otros exactamente una vez. ¿Cuántos juegos son requeridos? (Kenneth Bogart)
2. Resuelva el problema anterior si el número de escuelas que enviarán equipo es *n*.
3. Un club de teatro realiza ensayos para una obra. Si 6 hombres y 8 mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino), ¿de cuántas formas puede el director elegir a la pareja principal.

Problemas a abordar Combinatoria Clase 2. Día (2). Semana 1

1. ¿Cuántos enteros positivos *n* se pueden formar con los dígitos 3,4,4,5,5,6,7 si queremos que *n* sea mayor que 5 000 000?
2. ¿De cuántas formas puede un estudiante responder un examen de 10 preguntas de verdadero-falso?

- ¿De cuántas formas puede el estudiante responder el examen si es posible dejar una pregunta sin respuesta?

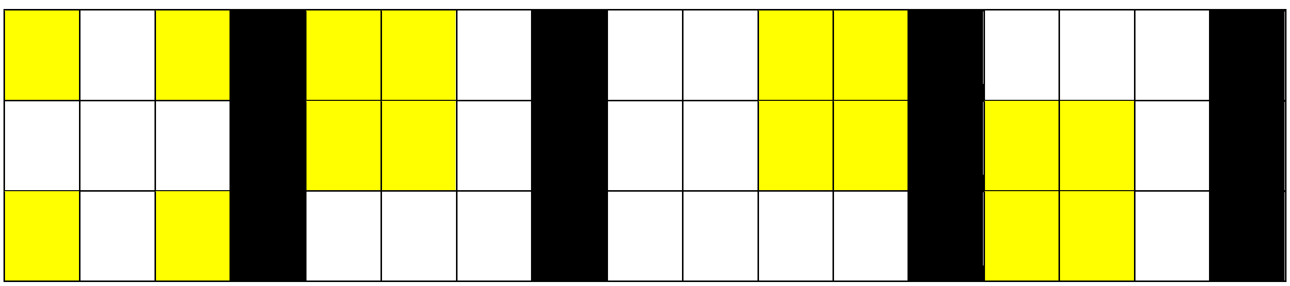
3. ¿Cuántas permutaciones de las letras *a,b,c,d,e,f* se pueden formar si la letra *a* y la letra *b* deben siempre ir juntas?

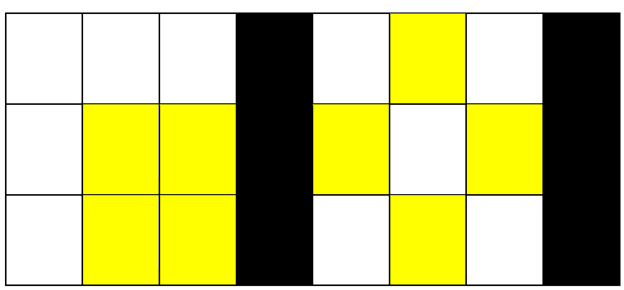
- ¿Cuántas permutaciones de las letras *a,b,c,d,e,f* se pueden formar si la letra *a* y la letra *b* nunca están juntas?
- ¿Cuántas permutaciones de las letras *a,b,c,d,e,f* se puede formar si la letra *a* y la letra *b* siempre están una al lado de la otra pero *a* y *c* nunca están juntas? (Kenneth Ross)

4. Plantear un problema acerca de las permutaciones de las letras *a, b, c, d, e* cuya repuesta sea menor que 15.

Problemas a abordar. Combinatoria, Clase 3. Día (3). Semana 1

1. Una ceja es un arreglo de los números 1, 2, 3, 4 y 5 en el que los números segundo y cuarto son cada uno mayores que sus vecinos inmediatos. Por ejemplo (1, 3, 2, 5, 4) es una ceja y (1, 3, 4, 5, 2) no lo es. ¿Cuál es el número de cejas? (fácil).(Olimpiadas Colombianas 2010. Intermedio).
2. ¿Cuántos números de cuatro dígitos con el primer digito 1 tienen exactamente dos dígitos idénticos? (como 1447, 1005 o 1231). (AIME 1983). (medio).
3. Encuentre una manera de distribuir los números del 1 al 9 en una matriz 3x3 de modo que los 6 cuadrados de tamaño 2x2 que se muestran en el dibujo tengan la misma suma. (medio)





Combinatoria Clase 4. Día (1). Semana 2.

Tema general: Combinatoria.

Temas específicos:

- Combinaciones

Objetivos

- Reconocer las propiedades y características de una combinación.
- Construir la fórmula de combinación a través de la resolución de problemas.

Metodología

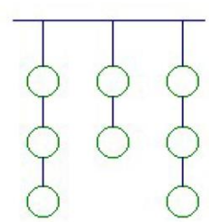
La clase se desarrollará a través de la solución de problemas para finalmente concluir con elementos de la teoría. Los estudiantes explorarán diversos problemas de la combinatoria empleando la heurística propia para finalmente llegar a la construcción de la fórmula de combinación. Se propondrán ejercicios con el propósito que el estudiante se familiarice con los conceptos teóricos.

PROBLEMAS A ABORDAR EN LA CLASE 4. DÍA (1). SEMANA 2

1. ¿Cuántas disposiciones de las letras MISSISSIPPI no tienen dos letras S consecutivas?
2. ¿De cuántas formas es posible distribuir 12 libros diferentes entre cuatro niños de modo que:
    - Cada niño reciba tres libros
    - Los dos niños mayores reciban cuatro libros cada uno y los dos menores reciban dos libros cada uno.

Problemas a abordar. Combinatoria Clase 5. Día (2). Semana 2

1. Ocho monedas de diferentes valores están dispuestas como se muestra en la figura. ¿De cuántas maneras se pueden tomar las monedas (una a la vez) si ninguna moneda puede ser tomada si hay alguna otra debajo de ella?



2. Determine el número *f(n)* de subconjuntos de un conjunto con *n* elementos.
3. Se tienen *n* balones idénticos y *k* diferentes colores. ¿De cuántas maneras diferentes puede pintar los *n* balones?

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 6. Día (3). Semana 2.

1. Un palíndrome es un numero 'simétrico´ que se lee lo mismo de derecha a izquierda, que de izquierda a derecha. Por ejemplo, 55, 101 y 8668 son números palíndromes.
   - ¿Cuántos palíndromes de cuatro dígitos hay?
   - ¿Cuántos de estos números palíndromes son divisibles por 7? (medio-fácil) (Olimpiadas Colombianas 2010. Nivel intermedio).
2. En una recta se marcan dos puntos A y B de tal forma que el segmento AB mide 5 cm. Una pulga se mueve sobre la recta y en cada salto se desplaza 1 cm a la derecha o 1 cm a la izquierda. La pulga quiere ir desde A hasta B en 9 saltos. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? (medio-difícil).
3. Para cada sub-conjunto no vacío del conjunto {1,2,3,4,5,6,7} disponga los números en orden decreciente, alterne los signos + y - entre ellos comenzado por +, y realice la suma. Por ejemplo, para el subconjunto {5} obtenemos 5. Para {6,3,1} obtenemos 6 - 3 +1 = 4. Encuentre la suma de todos los resultados. (AIME 1983). (medio - difícil).

Combinatoria Clase 7. Día (1). Semana 3.

Tema general: Combinatoria.

Temas específicos:

- Inducción matemática

Objetivos

- Comprender los pasos de la demostración por inducción matemática
- Demostrar conjeturas por medio de la inducción matemática.

Metodología

Se mostrará en primer lugar partiendo de la lógica porque la inducción matemática es una herramienta adecuada para demostrar. A continuación se refleja el método a través de diferentes ejemplos. Se propondrán ejercicios con el propósito que el estudiante se familiarice con los conceptos teóricos.

Problemas a abordar Combinatoria Clase 7. Día (1). Semana 3.

1. Demuestre por inducción matemática:

   a. $\sum_{k=1}^{2n-1} k^2 = \frac{(n)(2n-1)(2n+1)}{3}$

   b. $\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

   c. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

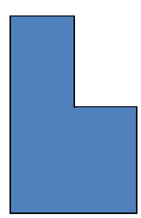
2. ¿Qué opina acerca de las siguientes desigualdades?

   - 2^n < n!
   - $n^3 < 2^n$

   ¿Cómo se podría demostrar que su opinión es verdadera?

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 8. Día (2). Semana 3.

1. Demuestre que para todo número natural *n*, $M_n = n(n^2-1)/3n+2)$ es múltiplo de 24.
2. Sea *n* un entero positivo. Se quita un cuadrado de un tablero $2^n X 2^n$. Pruebe que el tablero restante puede ser cubierto por piezas como las que se muestran en la figura.



3. Defina la sucesión: $x_1, x_2, \ldots$ por $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)\left(x_n + \frac{1}{2}\right)$ para $n \geq 1$. Determine x_{2011}.

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 9. Día (3). Semana 3.

1. Se tienen siete fichas iguales y pintura roja, azul y blanca. Se quiere pintar todas las fichas de modo que haya al menos una de cada color. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer? Tenga en cuenta que 1R, 2A y 4B es lo mismo que 4B, 1R y 2A (fácil).
2. Hallar cuántos números de tres cifras tienen la siguiente propiedad: Si al número le restamos 297, se obtiene otro número de tres cifras, con las mismas cifras, pero en orden inverso. (Canguro matemático) (medio).
3. Cada uno de los treinta y cuatro estudiantes del curso de la profesora Flor redactó una historia. Todas las treinta y cuatro historias tuvieron un número diferente de páginas entre 1 y 34. Estas historias se van a compilar en un solo libro comenzando en la página 1, con cada nueva historia comenzando en una nueva página y sin páginas en blanco. ¿Cuál es el mayor número de historias que pueden comenzar en una página impar de este libro? (Olimpiadas 2011) (nivel medio).

Combinatoria. Clase 10. Día (1). Semana 4

Tema general: Combinatoria

Temas específicos:

- El principio de inclusión y exclusión

Objetivos

- Comprender el principio de inclusión y exclusión
- Demostrar el principio de inclusión y exclusión

Metodología

El estudiante intentará demostrar el principio de inclusión y exclusión a través de su análisis y heurística. También explorará algunos corolarios y problemas en los cuales se aplique el principio. Se propondrán ejercicios con el propósito que el estudiante se familiarice con la teoría.

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 10. Día (1). Semana 4.

1. Determine el número de enteros positivos n, $1 \leq n \leq 2000$ tales que:
    - No son divisibles entre 2, 3 ni 5
    - No son divisibles entre 2, 3, 5 ni 7
    - No son divisibles entre 2, 3 ni 5 pero sí son divisibles por 7.
2. Determine el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$, si:
    - $0 \leq x_i$ para todo $1 \leq i \leq 4$
    - $0 \leq x_i < 8$ para todo $1 \leq i \leq 4$
    - $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $3 \leq x_3 \leq 7$, $3 \leq x_4 \leq 8$.
3. Encuentre el número de enteros positivos x tales que $x \leq 9\,999\,999$ y la suma de los dígitos de x sea igual a 31.

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 11. Día (2). Semana 4.

1. Cada carretera en un determinado estado es de un solo sentido. Cada par de ciudades está conectado exactamente por una carretera. Demuestre que existe una ciudad a la cual se puede llegar desde las otras ciudades de forma directa o pasando a lo más por una ciudad intermedia.
2. ¿De cuántas formas se pueden colocar tres x, tres y y tres z en línea de modo que no aparezca la misma letra tres veces consecutivas?
3. Si Zacarías lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los cinco números que obtiene sea 20?

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 12. Día (3). Semana 4.

1. El señor y la señora López tienen dos niños. Cuando ellos van en su automóvil familiar, dos personas se sientan adelante, y las otras dos atrás. Si o bien el señor López o bien la señora López debe sentarse en el asiento del conductor, ¿cuántas diferentes formas de sentarse son posibles? (fácil). (Olimpiadas 2010).
2. En una cesta una gata tiene 7 gatitos de 7 colores diferentes: blanco; negro; rubio; blanco y negro; rubio y blanco; negro y rubio; y blanco, negro y rubio. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 4 gatitos en la cesta de modo que cada par de gatitos compartan por lo menos un color? (medio-facil).
3. ¿Cuántas triplas ordenadas (*a,b,c*), con *a,b,c* números enteros positivos, cumplen que:
   - *mcm(a,b)* = 1000,
   - *mcm(b,c)* = 2000, y
   - *mcm(c,a)* = 2000?

Combinatoria. Clase 13. Día (1). Semana 5

Tema general: Combinatoria

Temas específicos:

- El principio de inclusión y exclusión

Objetivos

- Generalizar el principio de inclusión y exclusión
- Explorar aplicaciones del principio

Metodología

Se complementará el principio con otros tópicos como, por ejemplo, las generalizaciones del principio, desordenamientos entre otros. Se propondrán ejercicios con el propósito que el estudiante se familiarice con elementos de la teoría.

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 13. Día (1). Semana 5.

1. La señora y el señor Zeta quieren nombrar a su hijo (de apellido Zeta) de modo que las iniciales de sus dos nombres y la inicial de su primer apellido se encuentren en orden alfabético sin letras repetidas. Un conjunto de tres letras en orden alfabético le denominaremos monograma. ¿Cuántos monogramas son posibles en el caso de la pareja Zeta?
2. ¿Cuántos monogramas en los cuales no hay letras repetidas existen?
3. Sea *n* un número entero impar mayor que 1. Demuestre que la sucesión

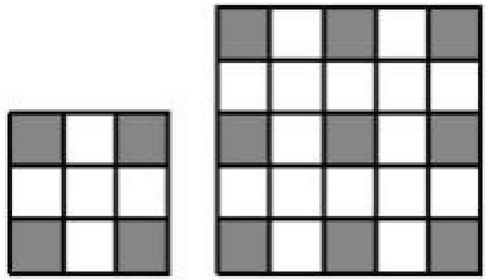
   $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ contiene un número impar de números impares.

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 14. Día (2). Semana 5.

1. ¿De cuántas formas se pueden colocar los enteros 1, 2, 3, …, *n* en una línea de modo que no aparezca ninguno los patrones 12, 23, 34,… *(n-1)n*?
2. Determine el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ donde $-5 \leq x_i \leq 10$ para todo $1 \leq i \leq 4$.

Problemas a abordar. Combinatoria. Clase 15. Día (3). Semana 5.

1. Un grupo de cinco personas se reúnen en una fiesta. ¿De cuántas formas pueden saludarse si se sabe que todos saludaron un número impar de personas? Nota: Si Miguel saluda a Pedro, entonces Pedro saluda a Miguel.
2. Algunos pisos cuadrados se han embaldosado con baldosas blancas y grises. Los que usan 4 y 9 baldosas grises se muestran en la figura. Cada piso tiene una baldosa gris en las esquinas, y cada baldosa gris está rodeada por baldosas blancas. ¿Cuántas de estas últimas harán falta para un piso que lleva 25 baldosas grises? Generalizar. (Canguro).



3. *abc* es un número de tres dígitos. Si *acb* + *bca* + *bac* + *cab* + *cba* = 3194. Encontrar *abc*. (AIME 1986).

TEORIA DE JUEGOS

Teoría de juegos. Clase 1. Día (1). Semana 1.

Tema general: Teoría de juegos

Temas específicos:

- Teoría básica. Definición de juego. Jugador racional.

Objetivos

- Presentar la teoría básica de la teoría de juegos. Representación en forma normal de un juego.
- Solucionar juegos como jugadores racionales
- Comprender cuándo una estrategia está estrictamente dominada por otra.

Metodología

Los estudiantes se organizan en dos grupos y se presenta una versión del juego llamado el dilema de los prisioneros. Los estudiantes solucionan el juego sin previa teoría.

Se exponen los conceptos básicos de la teoría y se solucionan diferentes juegos en el cual cada jugador toma el rol de jugador racional.

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 1. Día (1). Semana 1.

1. La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, se visita a cada uno y se les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, 9 años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor. El juego se puede representar a través de la siguiente matriz**.**

	Prisionero 2 Confiesa	Prisionero 2 calla
Prisionero 1 Confiesa	-1, -1	0,-9
Prisionero 1 Calla	-9,0	-6,-6

2. ¿En los siguientes juegos representados en su forma normal, qué estrategias sobreviven a la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas?

JUEGO A

	L	**C**	**R**
T	**2,0**	**1,1**	**4,2**
M	**3,4**	**1,2**	**2,3**
B	**1,3**	**0,2**	**3,0**

JUEGO B

	C1	**C2**
F1	8, 2	1, 1
F2	0, 2	5, 1
F3	1, 3	0, 100

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 2. Día (2). Semana 1.

1. Dos jugadores se turnan en el siguiente juego. Se sitúa un montón de 20 piedras sobre la mesa. Cada jugador en su turno puede tomar 1, 0 ó 2 piedras. El jugador que gana es aquél que realiza el último movimiento. Determinar quién tiene una estrategia ganadora y decir cuál es esa estrategia.
2. Dada la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, el primer jugador proporciona un valor entero para *a, b o c*, el segundo jugador proporciona un valor entero para alguno de los valores restantes. De nuevo juega el primer jugador. El objetivo del primer jugador es construir un polinomio que tenga tres raíces enteras (no necesariamente distintas), el objetivo del segundo es impedirlo. ¿Quién ganará?
3. Dos jugadores alternamente eligen un número del conjunto $\{1, 2, 3,\ldots, n\}$. Una vez un número *m* haya sido elegido ningún divisor de *m* puede ser elegido. El primer jugador que le sea imposible elegir un número pierde. Realice el juego con $n = 10$ y $n = 1000$.

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 3. Día (3). Semana 1.

1. Se tienen 1990 montones de piedras, los montones tienen 1,2,3,…,1990 piedras. Un movimiento es tomar un número igual de piedras de uno o más montones. ¿Cuántos movimientos son necesarios para tomar todas las piedras? (ASU 1990).
2. ¿Existe un entero positivo *n* tal que, si cada uno de *n* puntos está unido con los restantes por un segmento rojo o azul, entonces no importa cómo se eligen los colores de los segmentos, un triángulo monocromático siempre existe? (Halmos).
3. Usted se encuentra en la orilla de un rio con dos baldes. Uno de los baldes se llena exactamente con 3 litros de agua y el segundo con 5 litros. Los baldes no tienen ningún tipo de marca. ¿Cómo usted puede transportar exactamente 4 litros de agua?

Teoría de juegos. Clase 4. Día (1). Semana 2.

Tema general: Teoría de juegos

Temas específicos:

- Equilibrio de Nash en estrategias puras.
- Aplicaciones a la economía. Modelo de Cournot.

Objetivos

- Presentar el concepto de equilibrio de Nash en estrategias puras.
- Explorar el modelo de Cournot aplicando el equilibrio de Nash.

Metodología

- Se desarrollará la parte teórica. Se darán las diferentes definiciones y teoremas. Tanto las definiciones como los teoremas se ejemplificarán y se realizarán algunos ejercicios para que los estudiantes se familiaricen con la nueva teoría.

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 4. Día (1). Semana 2.

1. Los jugadores 1 y 2 negocian sobre cómo repartir mil millones de pesos. Ambos jugadores simultáneamente nombran la porción que quisieran tener, s_1 y s_2, donde $0 \leq s_1, s_2 \leq$ 1.000'000.000. Si $s_1+s_2 \leq$ 1.000'000.000, los jugadores reciben la porción que cada uno nombró. Si $s_1 + s_2 >$ 1.000'000.000 entonces ninguno recibe dinero. ¿Cuál es el equilibrio de Nash en estrategias puras para este juego?
2. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash en estrategias puras de los siguientes juegos?

JUEGO A

	L	R
U	0,0	2,2

D	10,11	-1,0

JUEGO B

	A	B
D	0,1	5,4
E	3,6	-1,0

3. Considere el modelo de Cournot en un duopolio en donde la demanda inversa es $P(Q) = a - Q$. Las firmas tienen un costo marginal c_1 para la firma 1 y c_2 para la firma 2. ¿Cuál es el equilibrio de Nash si $0 < c_i < a/2$ para cada firma? ¿Qué pasa si $c_1 < c_2 < a$ pero $2c_2 > a + c_1$.

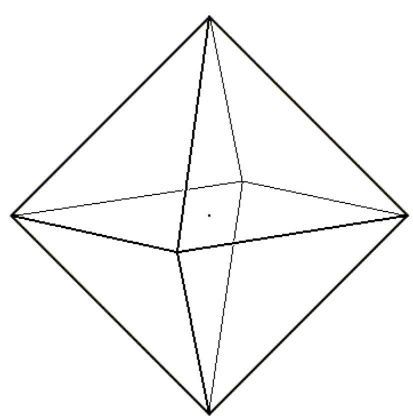
Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 5. Día (2). Semana 2.

1. Dos jugadores eligen alternamente el signo para uno de los números 1, 2,…, 20. Una vez un signo haya sido elegido éste no puede ser cambiado. El primer jugador trata de minimizar el valor absoluto final de la suma total y el segundo jugador de maximizarlo. ¿Cuál es el resultado (asumiendo que ambos jugadores juegan estratégicamente)? Ejemplo: los jugadores pueden jugar: 1, 20,-19,18,-17,16,-15,14,-13,12,-11,10,-9, 8,-7, 6,-5, 4,-3, 2. El resultado es 12. En este ejemplo el jugador dos juega sin mostrar una estrategia ganadora. (ASU 1996).
2. Dos jugadores juegan el siguiente juego. Hay un montón de m fichas y otro montón de n < m fichas. Cada jugador por turnos toma una o más fichas del montón más grande. El número que él toma debe ser múltiplo del número de fichas del montón más pequeño. Por ejemplo si los montones son 15 y 4, el primer jugador puede tomar, 4, 8 o 12 fichas del montón de 15. El primer jugador que logre limpiar un montón es el ganador. ¿Quién tiene una estrategia ganadora en este juego y cuál es esa estrategia? (ASU 1978).

3. Dos jugadores juegan a mover una pieza en un tablero de ajedrez de n x n. La pieza está inicialmente en la casilla de una de las esquinas. La pieza se puede mover a cualquier casilla adyacente (dos casillas se consideran adyacentes si comparten un lado). La pieza nunca puede ocupar una misma casilla dos veces. El primer jugador que le sea imposible mover la ficha pierde. ¿Quién gana el juego? ¿Quién ganará el juego si la pieza inicia en una casilla adyacente a una casilla esquinera?

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 6. Día (3). Semana 2.

1. 2001 monedas con valores 1, 2 o 3 unidades son dispuestas en una fila. Entre dos monedas cualesquiera de valor 1 hay al menos una moneda, entre dos monedas cualesquiera de valor 2 hay al menos dos monedas, y entre dos monedas cualesquiera de valor 3 hay al menos tres monedas. ¿Cuál es la longitud del tramo más largo de monedas de valor 3 que puede haber en la fila? (Olimpiada Rusa 2001).
2. Dados 6 diferentes colores. ¿De cuántas maneras se puede pintar un cubo de tal forma que cada cara tenga un color diferente? Si se tienen 8 colores, ¿de cuántas maneras se puede pintar un octaedro regular (ver figura) de tal forma que cada cara tenga un color diferente? (BMO 1966).



3. Escriba una fila de números enteros arbitrarios (se permiten repeticiones). Ahora construya una segunda fila de la siguiente manera: Si el entero *n* está en la columna *k* en la primera fila, en la columna *k* en la segunda fila escriba el número de veces que se repite el número *n* en la fila 1 desde

la columna 1 hasta la columna k inclusive. Similarmente construya una tercera fila usando los valores en la fila 2, y por último una cuarta. Por ejemplo:

7	**1**	**2**	**1**	**7**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**
1	**2**	**3**	**1**	**2**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**

Demuestre que la cuarta fila es siempre igual a la segunda. (Difícil).

Teoría de juegos. Clase 7. Día (1). Semana 3.

Tema general: Teoría de juegos

Temas específicos:

- Estrategias mixtas
- Estrategias estrictamente dominadas en estrategias mixtas
- Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Objetivos

- Presentar el concepto de estrategia mixta
- Aplicar el concepto de estrategia estrictamente dominada en estrategias mixtas.
- Encontrar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Metodología

- Se desarrollará la parte teórica. Se darán las diferentes definiciones y teoremas. Tanto las definiciones como los teoremas se ejemplificarán y se realizarán algunos ejercicios para que los estudiantes se familiaricen con la nueva teoría.

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 7. Día (1). Semana 3.

1. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas de los siguientes juegos.

JUEGO A

	L	R
T	2,1	0,2
B	1,2	3,0

JUEGO B

	I	C	D
A	1,-1	6,-6	0,0
M	2,-2	0,0	3,-3
B	3,-3	2,-2	4,-4

2. Dos ganaderos llevan a pastar sus vacas a un terreno comunal de área 100. Las vacas se reparten el pasto de la parcela de manera uniforme. Para simplificar, suponemos que cada uno puede llevar 1, 3, o 5 vacas, y que sus decisiones son simultáneas. Los beneficios del ganadero *i* si lleva *ni* vacas son *ni**100/N-*cni*, donde *N* denota el número total de vacas que lleven los ganaderos al terreno y *c* es el coste por vaca. Cada ganadero busca maximizar su beneficio. (a) Represente la matriz de pagos para un coste por vaca *c = 5* y halle el equilibrio o equilibrios de Nash.

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 8. Día (2). Semana 3.

1. Dos jugadores juegan un juego. Por turnos cada jugador pinta 3 aristas que no estén pintadas de un cubo (el cubo inicial no tiene aristas pintadas). El primer jugador usa un color rojo y el segundo jugador uno azul. Cada jugador tiene dos movimientos. El jugador ganador es aquél que logre pintar todas las aristas de una cara del cubo del mismo color. ¿Cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora?

2. Hay 2000 distintos puntos y cada dos puntos están unidos por un segmento. Carlos y Marisol juegan por turnos borrando segmentos. A Carlos le es permitido borrar una sola arista por turno y a Marisol le es permitido borrar una o dos segmentos por turno. La persona quien después de su movimiento deja un punto aislado (no conectado por alguna arista a cualquier otro punto) pierde. ¿Quién ganará el juego? ¿Cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora?
3. A y B juegan un juego. Cada uno tiene 10 fichas etiquetadas de 1 a 10. El tablero consta de dos filas de casillas. La primera fila está numerada de 1 a 1492 y la segunda fila está numerada de 1 a 1989. En el n-ésimo turno, A sitúa su ficha número n en una casilla vacía en una de las dos filas y B sitúa su ficha n en cualquier casilla vacía en la otra fila. B gana si el orden de las fichas es la misma en las dos filas, (esto quiere decir que si en la fila uno aparecen las fichas en el siguiente orden: 5,7,8,2,3,1,4,6,9,10 en la otra de igual manera) en otro caso A gana. ¿Cuál jugador tiene una estrategia ganadora?
    - Suponga que cada jugador tiene k fichas. ¿quién tiene una estrategia ganadora?

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 9. Día (3). Semana 3.

1. Muestre que, dados cualesquiera 52 enteros, se pueden encontrar siempre dos cuya suma o diferencia es un múltiplo de 100.
    - Muestre que, dado cualquier conjunto de 100 enteros, existe un subconjunto no vacío cuya suma es un múltiplo de 100.
2. Encuentre todas las soluciones enteras de la ecuación: $a^2 - 3ab - a + b = 0.$

Teoría de juegos. Clase 10. Día (1). Semana 4.

Tema general: Teoría de juegos

Temas específicos:

- Existencia del equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Objetivos

- Generalizar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas cuando hay dos jugadores y cada uno tiene 2 estrategias.

Metodología

- Se permitirá un espacio para que sean los estudiantes quienes exploren y generalicen el equilibrio de Nash en un juego con dos jugadores y cada jugador con dos estrategias.

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 10. Día 1. Semana 4.

1. Muestre que siempre existe un equilibrio de Nash en un juego con dos jugadores y cada jugador con dos estrategias.

	JUGADOR DOS		
JUGADOR UNO		LEFT	RIGHT
	UP	x,____	y,___
	DOWN	z,____	w,___

2. Encuentre el equilibrio de Nash para el siguiente juego:

	L	R
T	2,1	0,2
B	1,2	3,0

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 11. Día 2. Semana 4.

1. Dos jugadores juegan el siguiente juego. El primer jugador elige dos enteros, A y B, diferentes de cero. El segundo jugador construye una ecuación cuadrática con A, B y 1998 como coeficientes (en

cualquier orden). El primero gana si y sólo si la ecuación tiene dos raíces racionales distintas. ¿Quién gana el juego? ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es esa estrategia?

2. Dos jugadores juegan sobre una matriz 3 x 3. Por turnos, cada jugador sitúa una pieza blanca o negra sobre un espacio desocupado de la matriz. Cada jugador puede jugar cualquiera de los dos colores. Cuando la matriz esté llena, el jugador A obtiene un punto por cada fila, columna o diagonal principal que tenga 0 o 2 piezas negras. El jugador B obtiene un punto por cada fila, columna o diagonal principal que tenga 1 o 3 piezas negras. ¿Cuál jugador tiene una estrategia ganadora y cuál es esa estrategia?
3. Dos jugadores juegan sobre una línea de 2000 casillas. Cada jugador coloca S u O en una casilla vacía. El juego finaliza cuando haya tres casillas adyacentes que contienen S, O, S en ese orden. El jugador quien haga la última jugada gana. Si ninguno lo consigue entonces el juego termina en empate. ¿Cuál jugador tiene una estrategia ganadora y cuál es esa estrategia?

Problemas a abordar. Teoría de juegos. Clase 12. Día 3. Semana 4.

1. ¿Cuántas permutaciones a,b,c,d,e,f,g,h de 1,2,3,4,5,6,7,8 satisfacen a < b, b > c, c < d, d > e, e < f, f > g, g < h?
2. Sea b_n el número de maneras de particionar el conjunto {1, 2, …, n} en subconjuntos no vacíos. Por ejemplo, b_3 = 5 ya que las distintas particiones son: 123; 12, 3; 13, 2; 23, 1; 1,2,3. Sea c_n el número de particiones en las cuales cada parte tiene al menos dos elementos. Por ejemplo, c_4 = 4 ya que: 1234; 12, 34; 13, 24; 14, 23. ¿Existe una relación entre b_n y c_n?
3. Hay 5 parejas de casados en una fiesta. ¿De cuántas maneras pueden las 10 personas arreglarse en 5 parejas si ningún matrimonio puede quedar juntos? Por ejemplo, si fueran 2 parejas: a, A, b, B la respuesta es 2, ab, AB; aB, bA.

TEORIA DE GRAFOS

Matemática Discreta. Teoría de Grafos. Clase 1 (Día 1), semana 1

Tema general: Teoría de grafos

Temas específicos:

- Definiciones y ejemplos
- Subgrafos e isomorfismo de grafos

Objetivos

- Reconocer el concepto de grafo a través de ejemplos, diagramas y la definición.
- Entender definiciones como: vértice, arista, grafo dirigido, lazos, longitud de un grafo, camino cerrado, camino abierto, recorrido, circuito, camino simple, ciclo, y multigrafo.
- Analizar qué es un subgrafo, cuando dos grafos son isomorfos y realizar diversos problemas teniendo en cuenta estas dos definiciones.

Metodología

- La clase se desarrollará en primer lugar a través de dos problemas históricos con el propósito que los conceptos de la teoría de grafos a introducir sean más significativos, además de ser problemas llamativos e interesantes. Los dos problemas a trabajar en clase son: el problema de los siete puentes de Königsberg y el problema de la luz, el agua y el gas. Por otra parte se explicarán las diferentes definiciones ejemplificando y resolviendo ejercicios y problemas.

PROBLEMAS PARA ABORDAR CLASE 1

1. **Problema de los siete puentes de Königsberg.** Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregolya dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones,

pasando por todos los puentes, recorriendo exactamente una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

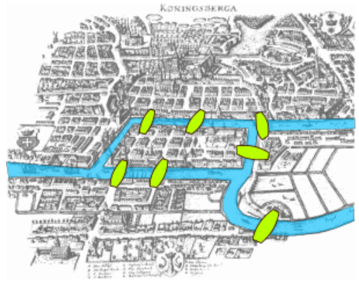


Figura 1

2. El problema consiste en llevar a cada una de tres casas los tres servicios de agua, luz y gas. Para este propósito, cada casa obtiene el servicio a través de una línea que conecta la casa con el servicio (Figura 2), tenga en cuenta que ningún par de líneas se deben cruzar.

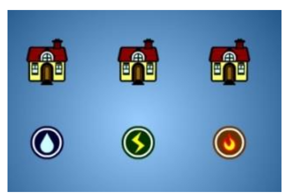
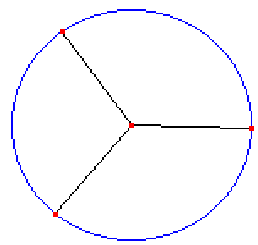


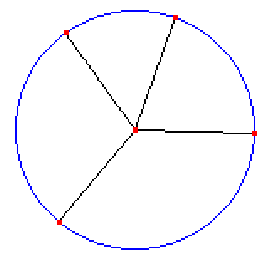
Figura 2

Problemas para ser abordados en la clase 2. Día 2. Teoría de grafos

1. Si G= (V,E) es un grafo no dirigido con $|V|$ = *v*, $|E|$= *e* y no hay lazos, demuestre que $2e \leq v^2 - v$. Establezca la desigualdad correspondiente en caso de que G sea dirigido. **(Grimaldi)** (medio-fácil).
2. Una rueda con ***n*** radios es el grafo formado por un ciclo de longitud ***n*** y un vértice adicional que es adyacente a los ***n*** vértices del ciclo. Este grafo se denota con R_n. **(modificado de Grimaldi)**
   i. Cuantos ciclos de longitud 4 hay en una rueda con n radios. (R_n).(medio-facil)

ii. Cuantos ciclos de longitud ***k*** hay en una rueda con ***n*** radios (R_n).(medio).





3. En un grafo completo de *n* vértices (K_n), ¿cuál es la suma de los grados de los vértices (modificado de Kenneth Ross)?(medio). NOTA: el *grafo completo* es un grafo no dirigido sin lazos tal que para cada par de vértices a,b, con a ≠ b, existe una arista {a,b}.
4. El grafo complemento de un grafo G, denotado por $\bar{G}$, es aquél que tiene los mismos vértices de G y es tal que dos vértices son adyacentes en $\bar{G}$ si y sólo si no son adyacentes en G. Si un grafo G tiene *v* vértices y *e* aristas, ¿cuántas aristas tiene $\bar{G}$? (Rosen)(fácil).

   NOTA: Dos vértices *u* y *v* en un grafo G, son adyacentes en G si existe un arista *e* que pertenece a G tal que e = {u,v}.

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 3. Día (3). Semana 1.

1. Considere el conjunto X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. ¿Cuántos subconjuntos de X, con al menos un elemento, no contienen dos enteros consecutivos? (Olimpiadas colombianas, nivel superior 2009).(medio).
2. Los números 828 y 313 son palíndromes de tres dígitos con la propiedad que su diferencia 828 - 313 = 515 también es un palíndrome. ¿Cuántas parejas *(a,b)* de palíndromes de tres dígitos hay, con *a* < *b*, tales que *a* - *b* también es un palíndrome de tres dígitos? (medio). (Olimpiadas colombianas 2009, nivel superior)
3. Resuelva el problema 1 pero con el conjunto *X* = {1, 2, 3,…, *n*}.

Matemática Discreta: Teoría de Grafos. Clase 4 (Día 1). Semana 1

Tema general: Teoría de grafos

Temas específicos

- Circuitos eulerianos y grado de un vértice.

Objetivos

- Conjeturar, explorar y demostrar algunos teoremas de la teoría de grafos.
- Comprender las definiciones de circuitos eulerianos, grado de un vértice y recorridos eulerianos.
- Utilizar los teoremas y definiciones para resolver el problema de los puentes de Königsberg.

Metodología

- En primer lugar, se exponen las diferentes definiciones y se trabajan algunos teoremas de la teoría de grafos. Los estudiantes explorarán, conjeturarán y demostrarán dichos teoremas mostrando las diferentes soluciones a sus compañeros para finalmente llegar a un consenso.

TEOREMAS A ABORDAR EN LA CLASE 4. Dia 1

1. Teorema 1. Establezca una relación entre $\sum grad(v)$ y $|E|$ (número de aristas), demostrar. **(Grimaldi).**
2. Teorema 2. Para cualquier grafo o multigrafo no dirigido, establezca una conjetura sobre el número de vértices que son de grado impar. Demostrar. **(Grimaldi).**
3. Teorema 3. Si *G* es un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados, entonces podemos construir un recorrido euleriano en *G* si y sólo si *G* es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar. **(Grimaldi).**
4. Problema de los siete puentes de Königsberg**. (Grimaldi).**

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 5. Día (2). Semana 2.

1. Teorema 2. Sea *G*= *(V,E)* un grafo o multigrafo dirigido sin vértices aislados. El grafo *G* tiene un circuito euleriano dirigido si y sólo si *G* es conexo y *ge(v)* = *gs(v).* **(Grimaldi).**

2. Muestre que si G e un grafo bipartito con *v* vértices y *e* aristas, entonces $e \leq \frac{v^2}{4}$. (Rosen)(medio-dificil).

NOTA: Un grafo G = (V, E) es bipartito si V= $V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada arista de G es de la forma {a,b} con $a \in V_1$ y $b \in V_2$.

3. Sea *G* un grafo dirigido con n vértices. Si el grafo no dirigido asociado es K_n, demuestre que $\sum_{v \in V}(ge(v))^2 = \sum_{v \in V}(gs(v))^2$.

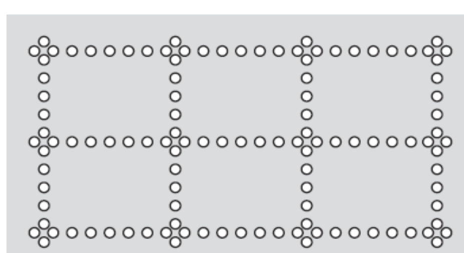
Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 6. Día (3). Semana 2.

1. Composiciones. Una composición de un numero entero n ≥ 1 es una manera de escribir *n* como suma ordenada de enteros positivos. Por ejemplos hay 8 composiciones de 4 que son:

   1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+3, 3+1, 2+2, 4.

Sea *C(n)* el número de composiciones de *n*. Hallar una fórmula para *C(n)*.

2. En los días cuando las hojas de estampillas eran perforadas para quitarlas de una manera más fácil, una hoja de seis estampillas era algo como la figura que se muestra. ¿Cuántas perforaciones habrá en una hoja que tiene *c* columnas y *f* filas de estampillas? (medio) (Thinking Mathematically).



3. Ahora consideremos *g(n)* como el número total de partes que hay en todas las composiciones de *n*. Por ejemplo, g(3) = 8.
    - 1+1+1 (3 partes)
    - 2+1 (2 Partes)
    - 1+2 (2 partes)
    - 3 (1 parte)

Hallar *g(n)*.

Matemática Discreta: Teoría de Grafos. Clase 7 (Día 1). Semana 3.

Tema general: Teoría de grafos

Temas específicos

- Grafos planos

Objetivos

- Comprender las definiciones de grafo plano, grafo bipartito y homeomorfismo entre grafos.
- Explorar y comprender el teorema de Kuratowski y otros resultados derivados de éste.
- Resolver el problema de las casas y los servicios apoyándose de la teoría vista.

Metodología

Se desarrollará la parte teórica de la teoría de grafos que concierne a grafos planos. Se darán las diferentes definiciones y teoremas para que el estudiante explore, conjeture y dé una justificación de ellos. Debido al nivel de algunos teoremas, se trabajarán con los estudiantes las demostraciones respectivas. Tanto las definiciones como los teoremas se ejemplificarán y se realizarán algunos ejercicios para que los estudiantes se familiaricen con la nueva teoría.

Teoremas a abordar en la clase 7 (día 1). Semana 3.

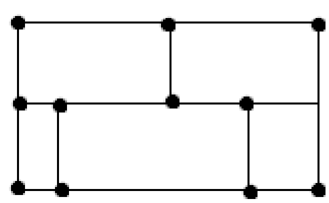
1. Sea *G=(V,E)* un grafo plano conexo sin lazos con $|V| = v,\ |E| = e > 2$ y *r* regiones. Entonces *3r ≤ 2e* y *e ≤ 3v – 6. (Grimaldi)*
2. Justificar porque K_5 y $K_{3,3}$ no son planos.
3. Ejercicios varios.

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 8. Día (2). Semana 3.

1. Sea $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 4.$ ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos al grafo bipartito completo $K_{1,3}$?
2. Un grafo tiene 30 vértices y cada vértice tiene 6 aristas. Encuentre el número total de triplas de puntos tales que cada par de puntos está unido o cada par de puntos no está unido.
3. Sea G=(V,E) un grafo conexo sin lazos con $|V|$ = *v* . si $|E|$ > $\left(\frac{v}{2}\right)^2$. Demuestre que G no puede ser bipartito.

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 8. Día (2). Semana 3.

1. Sea *n* un número natural y sea *C* una colección de la forma $\{\{k,p\},\{p,r\},\{r,k\}\}$, con r,k,p números naturales menores o iguales a *n*. ¿Cuántas *C* diferentes se pueden formar a partir del conjunto *S*? (original del autor).(fácil).
2. Dados 12 vértices y 16 aristas en un arreglo como se muestra a continuación:



Dibuje una curva que no pase a través de ningún vértice, y que corte cada arista exactamente una vez. (Modificada Olimpiadas Rusas) (medio-facil).

3. Para cada sub-conjunto no vacío del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} disponga los números en orden decreciente, alterne los signos + y - comenzado por + y realice la suma. Por ejemplo, para el subconjunto {5} obtenemos 5. Para {6,3,1} obtenemos 6 - 3 +1 = 4. Encuentre la suma de todos los resultados. (AIME 1983).(medio - difícil).
    a. Solucione el anterior problema referente al conjunto {1, 2, 3…, n}.

Matemática Discreta: Teoría de Grafos. Clase 10 (Día 1), semana 4

Tema general: Teoría de grafos

Temas específicos

- Caminos y ciclos hamiltonianos.

Objetivos

- Comprender las definiciones de ciclo y camino hamiltoniano.
- Explorar y comprender algunos teoremas fundamentales de la teoría de ciclos y caminos hamiltonianos.
- Aplicar la teoría de ciclos y caminos hamiltonianos para resolver puzzles.

Metodología

- Se desarrollará la parte teórica de la teoría de grafos que concierne a ciclos y caminos hamiltonianos. Se darán las diferentes definiciones y teoremas para que el estudiante explore, conjeture y dé una justificación de ellos. Debido al nivel de algunos teoremas, se trabajarán con los estudiantes las demostraciones respectivas. Tanto las definiciones como los teoremas se ejemplificarán y se realizarán algunos ejercicios para que los estudiantes se familiaricen con la nueva teoría.

Ejemplos de problemas y teoremas para ser abordados en la clase 10 (Día 1). Semana 4

1. Teorema. Sea K^*_n un grafo dirigido completo; es decir, K^*_n tiene *n* vértices y para cualquier par de vértices *x,y* distintos, exactamente una de las aristas *(x,y)* o *(y,x)* está en K^*_n. Este grafo (llamado torneo) contiene siempre un camino hamiltoniano (dirigido). (Grimaldi)
2. Corolario (propuesto para que los estudiantes lo demuestren). Sea *G=(V,E)* un grafo sin lazos con *n*(≥2) vértices. Si *grad(v)* ≥ *(n - 1)/2* para todo *v*∈ *V*, entonces *G* tiene un camino hamiltoniano.
3. Sea *G=(V,E)* un grafo no dirigido sin lazos, con $|V|$=*n* ≥ *3*. Si *grad(x)* + *grad(y)* ≥ *n* para todos los vértices *x,y* ∈ *V* no adyacentes, entonces *G* tiene un ciclo Hamiltoniano.
4. Diversos ejercicios con el fin que el estudiante se familiarice con la teoría.

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 11. Día (2). Semana 4.

1. Sea *G=(V,E)* un grafo no dirigido, sin lazos, 6-regular. Demuestre que si $|V|$ = 11, entonces *G* tiene un ciclo hamiltoniano.
2. Encuentre todos los grafos bipartitos completos no isomorfos *G= (V,E)* satisfacen $|V|$= n ≥ 2 .
3. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+ con\ m \geq n \geq 2$.(Grimaldi).

a. Determine cuántos ciclos distintos de longitud 4 hay en $K_{m,n}$

b. ¿Cuántos caminos simples diferentes de longitud 2 hay en $K_{m,n}$?

c. ¿Cuántos caminos simples diferentes de longitud 3 hay en $K_{m,n}$?

4. ¿Cuántos caminos simples de longitud máxima hay en el grafo $K_{m,n}$? (considere el camino v_1,v_2,v_3 igual a v_3,v_2, v_1) (Grimaldi)

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 12. Día (3). Semana 4.

1. El cuadrado de abajo es mágico. Cada celda tiene un número y la suma de cada fila y cada columna y las dos diagonales es la misma. Encuentre *x*. (AIME 1996).

x	19	96
1		

2. ¿Cuántos números entre 1, 2, 3, …,1000 se pueden escribir como la diferencia de los cuadrados de dos números enteros no negativos? (AIME 1997)
3. Sean M un número entero de dos dígitos (ab), y N un número de tres dígitos (cde). Si $9 \cdot M \cdot N = abcde$, encuentre M y N. (AIME 1997). (Tenga en cuenta que los dígitos no son necesariamente diferentes.)

Matemática Discreta: Teoría de Grafos. Clase 13 (Día 1), semana 5

Tema general: Teoría de grafos

Temas específicos

- Coloración de grafos y polinomios cromáticos.

Objetivos

- Comprender la definición de coloración propia.
- Explorar el problema de los cuatro colores.
- Explorar algunos teoremas correspondientes a la teoría.

Metodología

- Se desarrollará la parte teórica. Se darán las diferentes definiciones y teoremas. Tanto las definiciones como los teoremas se ejemplificarán y se realizarán algunos ejercicios para que los estudiantes se familiaricen con la nueva teoría.

Ejemplo de problemas a abordar en la Clase 13. (Día 1).

1. Determine $P(G, \lambda)$ de $G = K_{1,3}$. (Grimaldi).
2. Para n perteneciente a los enteros positivos, ¿cuál es el polinomio cromático de $K_{1,n}$? ¿Cuál es su número cromático? (Grimaldi).
3. Un estudiante del curso de matemática discreta afirma que si G = (V, E) es plano entonces existe siempre un vértice v tal que grad(v) < 6. ¿Qué piensa al respecto?

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 14. Día (2). Semana 5.

1. Demuestre que $P_{Ln}(x) = x (x - 1)^{n-1}, n \geq 1$. (Bernard Kolman).
2. Cada arista de un grafo finito conexo es coloreada con uno de N colores de tal manera que hay exactamente una arista de cada color en cada punto vértice. Una arista de cada color excepto de uno de los colores es borrada Muestre que el grafo resultante es conexo. (Olimpiada rusa 1999).
3. Se da un grafo con 17 vértices y cada vértice es de grado 4. ¿Siempre es posible encontrar 2 vértices a y b tales que la arista $\{a,b\}$ no pertenezca al grafo y tampoco están unidos a un mismo vértice.

Sea $G = (V,E)$. Si $|V| \geq 11$ entonces G y $\bar{G}$ deben ser no planos.

Problemas a abordar. Teoría de Grafos. Clase 15. Día (3). Semana 5.

1. ¿Cuántos números de cuatro dígitos con su primer digito igual a 1 tienen exactamente dos dígitos idénticos (como 1447, 1005 o 1231)? (American Invitational Mathematics Examination) (1983-2004)
2. ¿Existen cuatro números enteros positivos *a, b, c, d* todos diferentes, tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$? Si existen mostrarlos, y si no existen demostrar por qué no pueden existir. (original del autor)
3. ¿Para cuáles enteros positivos n existe una matriz simétrica $n \times n$ tal que cada fila es una permutación de 1, 2, …, n (y por lo tanto cada columna también lo es) pero la diagonal principal no lo es? (Halmos)