AVANCES EN LA CARACTERIZACION DEL PENSAMIENTO COMBINATORIO

Tesis presentada como opción al Grado científico de
Doctor en Educación Matemática

Mg. José Ciro Anzola Caldas

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
Doctorado en Educación Matemática
Bogotá, Colombia
2017

AVANCES EN LA CARACTERIZACION DEL PENSAMIENTO COMBINATORIO

Tesis presentada como opción al Grado científico de
Doctor en Educación Matemática

Mg. José Ciro Anzola Caldas

Directora:
Dra. Mary Falk de Losada

Grupo de investigación
Educación Matemática

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
Doctorado en Educación Matemática
Bogotá, Colombia
2017

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá, Enero 30 de 2017

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero y profundo agradecimiento a mi asesora de tesis, la Dra. Mary Falk de Losada, en primer lugar haber aceptado y dirigido esta investigación. En segundo lugar por su dedicación y apoyo constante, por su conocimiento compartido, por su exigencia y disciplina. Gracias por sus enseñanzas y valores que ha formado a mí, como persona, como estudiante y como investigador.

Altamente agradecido con el equipo docente del programa de doctorado por sus aportes y sugerencias dadas en los talleres de tesis, en especial al Dr. Mauro García, y al Dr. Gerardo Chacón.

Mi reconocimiento a los estudiantes del grupo 7, del curso de Solución de Problemas, del segundo semestre del 2016, por su compromiso y honestidad en la realización de las actividades que permitieron alcanzar el objetivo de esta investigación.

A mis padres José Lorenzo y María Cecilia por haberme enseñado que con esfuerzo, humildad y compromiso se logran los objetivos y se alcanzan las metas. Gracias por su constante apoyo y motivación.

A Janneth Isabel, mi esposa, mi compañera, mi amiga, quien siempre ha estado a mi lado para apoyarme, alentarme y motivarme en alcanzar este logro. Inmensamente agradecido por todo tu tiempo y tus esfuerzos dedicados a este proyecto.

Un especial agradecimiento a la Universidad Antonio Nariño por sus estímulos a la formación de los profesores que hacemos parte de ella y a la secretaría de Educación de Bogotá por su apoyo financiero.

DEDICATORIA

A mis padres José Lorenzo y María Cecilia
Por sus amor y dedicación

A la memoria de mi hermano German
Por su ejemplo (Q.E.P.D)

A mis hermanos Olga Janeth, María Eugenia y Jhon Jairo
Por su humildad y sacrificio

A mis sobrinos
Como ejemplo para la realización
de sus proyectos de vida

A mi Janneth Isabel
Por su amor, su respeto, su incondicional
apoyo en el camino de la vida

SÍNTESIS

Esta investigación se basa en el análisis de las manifestaciones del pensamiento matemático que surgen durante la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto, en el marco del análisis combinatorio, y la correspondiente construcción de significados de los conceptos implícitos en las mismas con el objetivo de caracterizar y consolidar un modo de pensar que se denominó pensamiento combinatorio.

El estudio se realizó con un diseño experimental en dos fases, una bajo la investigación-acción y la usando elementos de la teoría fundamentada, lo cual implicó el diseño de una unidad didáctica constituida por ocho actividades sustentadas en los principios básicos de conteo, instrumento que se implementó y se desarrolló con los estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería, en el curso de Solución de Problemas.

Por su parte esta investigación dejó la propuesta metodológica y de investigación consolidada en el "Modelo Metodológico « I.C.O.R.»". De esta forma, sobre la estructura del modelo se hizo la investigación didáctica, con la cual se concluye que los hallazgos proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática, evidenciándose que en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento matemático durante la solución de problemas del análisis combinatorio, existen unas estructuras que se implementan con el apoyo de operaciones fundamentales de la actividad cognitiva. Estas estructuras reconocidas corresponden a la estructura de representación, de relación y conexión, conceptual, combinatoria y de generalización combinatoria. Sobre este esquema de estructuras se caracterizó el tipo de pensamiento matemático implícito en ellas, logrando la descripción de la generación y estructuración de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias y la interrelación entre ellas, la cual origina las nuevas formas de entender combinatorias. Todo esto proporciona elementos nuevos y valiosos para la caracterización del pensamiento combinatorio.

ABSTRACT

This research is based on the analysis of the manifestations of mathematical thinking that emerge from the solution of significant, mathematical and context problems in the framework of combinatorial analysis, and the corresponding construction of meaning of the concepts implicit in them with the aim of characterizing and consolidating a way of thinking that has been called combinatorial thinking.

The study was carried out with an experimental design in two phases, one under action research and the other using elements of grounded theory, involving the design of a didactic unit, consisting of eight activities based on the basic principles of counting; this instrument was implemented and developed with first-year students of engineering programs in the course of Problem Solving.

As a result, this research produced the methodological and research proposal consolidated in the "Methodological Model" « I.C.O.R. ». Thus, based on the structure of the model didactic research was carried out, which concludes that the findings provided enough evidence that was consolidated in a systematic way, showing that in the process of construction and development of mathematical thinking during problem solving in combinatorial analysis, there are certain structures that are implemented with the support of fundamental operations of cognitive activity. The structures recognized are the structure of representation, the structure of relation and connection, the conceptual structure, the combinatorial structure and the combinatorial generalization structure. The type of mathematical thinking implicit in them was characterized following this scheme of structures, thus obtaining the description of the generation and structuring of the forms of understanding and the ways of thinking combinatorially and the interrelation between them which originates the new ways of combinatorial understanding. All of this provides new and valuable elements for the characterization of combinatorial thinking.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION

La Educación Matemática «EM», ubicada como una ciencia cognitiva y social, tiene entre sus objetivos y fines investigativos la caracterización del pensamiento matemático, la construcción y validación de modelos didácticos y la propuesta de estrategias metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se abordarán éstas, vistas desde la interacción de elementos de la «EM» (*las matemáticas, los estudiantes, los profesores, las instituciones, las sociedades y las culturas*) y fundamentadas desde su aspecto epistemológico, ontológico, filosófico, psicológico y cognitivo.

Esto es propuesto y expuesto por varios autores. Schoenfeld (2000) ve en la educación matemática dos objetivos. El primero es el objetivo puro propuesto para la ciencia básica, el cual tiene como finalidad comprender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje. El segundo objetivo, es el objetivo propio formulado para las ciencias aplicadas, cuyo fin es mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática sobre la base de la comprensión de la finalidad del objetivo anterior. Desde su quehacer el autor de la presente investigación ve que hay un tercer objetivo, el objetivo futuro en el cual la educación matemática debe seguir construyendo teorías y modelos que la consoliden como ciencia, para lo cual espera y propone a los investigadores en «EM» trabajar en la construcción de teorías que permitan comprender y caracterizar el pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. A la par deben emerger y afianzarse los modelos, siendo éstos los mediadores entre lo teórico y lo práctico.

De otra parte Font (2002) dice que la investigación en educación matemática se focaliza de manera explícita o implícita en aspectos como: 1) la ontología general, 2) la epistemología general, 3) las teorías sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) la teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) la definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) una metodología de investigación.

En Godino (1991) se hace una introducción de la evolución de la educación matemática «EM» como una ciencia tendiente a formalizar y construir teorías que explican la existencia e interacción de los elementos mencionados anteriormente.

Así mismo Miguel de Guzmán (2007) plantea algunos puntos de vista con respecto a las tendencias innovadoras en los trabajos y tareas de la educación matemática como ciencia naciente. En cuanto a la filosofía de la matemática actual, dice que ésta ha dejado de preocuparse por los problemas de fundamentación de la matemática como en el siglo XIX, especialmente después los resultados de Gödel a principios del siglo pasado, indicando que desde entonces la filosofía de la matemática ha enfocado su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática propuesta por Lakatos. En cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, considera la matemática como un subsistema cultural, viendo así la «EM» como un proceso de "interculturación"- "proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático"[1]-, consideración sobre la cual se centran algunas las investigaciones en la actualidad. Y por otro lado revisa las investigaciones sobre los procesos de pensamiento propios de la matemática, viendo en ellas, más que una transferencia de contenidos, la matemática como un saber hacer y como una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido.

Estos puntos de vista han provocado en los matemáticos consideraciones importantes en el entender y sentir las matemáticas, y en el significado de la enseñanza y aprendizaje de las mismas, influenciando el futuro investigativo de la «EM», para que éste se dé en procesos de pensamiento matemático, en trabajos sobre la intuición directa en lo concreto, el formalismo, la importancia de la motivación desde lo histórico-cultural, y el impacto de las nuevas tecnologías sobre la matemática.

[1] Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Iberoamericana de Educación. No. 043, Enero-Abril, 19-58. Madrid, España.

De esta forma estos cambios visiónales sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su objetivo por desarrollar el pensamiento matemático con permeabilidad y aplicabilidad sobre todas las ciencias también se han visto reflejados en el contexto social colombiano, primero desde los Lineamientos Curriculares (1998), y luego por los Estándares Básicos de competencias (2006), documentos emitidos por el MEN. En ellos se reconoce y establece la importancia de un cambio frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática motivado por una nueva concepción que es el aprendizaje por competencias, pensado desde la utilización del pensamiento lógico y matemático y sus herramientas como un medio para comprensión e interacción con un contexto. Además, en ello se deja explícito que las competencias matemáticas requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por la solución de problemas significativos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia cada vez más complejos, es decir que construyan nuevos y más robustos significados de los conceptos matemáticos. Para ello se propone ver la matemática como un conjunto de cinco tipos de pensamiento. El pensamiento numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Así estos fines de tipo personal, cultural, social y político de la educación matemática, abren nuevos horizontes y refuerzan las razones para justificar la contribución de la formación matemática con respecto a los fines de la educación.

Lo anterior deja a la luz que una de las responsabilidades de la comunidad de educadores matemáticos es lograr la caracterización del pensamiento matemático desde sus diferentes líneas de trabajo como lo son la lógica, la aritmética, la geometría, el álgebra, la estadística, y la probabilidad, entre otras.

En este punto se puede percibir una falencia al omitir la importancia y necesidad de considerar el estudio de la combinatoria como otro de los tipos de pensamiento matemático, ya que el tratamiento que se le da en esta postura no lo asume como tal, sino como una temática implícita dentro de los demás tipos de pensamiento.

Esta situación se sigue reflejando después de haber realizado una revisión del estado del arte concerniente a la caracterización del pensamiento matemático; se evidencia que estos trabajos e investigaciones tienen como eje la aritmética, el álgebra, la geometría, el análisis de datos (estadística) y cálculo de probabilidades, desarrollados en diferentes poblaciones que van desde los inicios de la actividad escolar hasta la universitaria, dejando ver que el trabajo en *combinatoria* ha sido poco explorado como lo afirma Lockwood, E. (2013).

Es ahí donde se ve la necesidad de direccionar investigación de la «EM» sobre esta área del conocimiento matemático. Área que, como dice De Guzmán (2007), es el área hacia la cual se está desplazando la matemática actual, después del apogeo del análisis del continuo. Este fenómeno se debe al avance tecnológico y su estrecho ligamento con las ciencias de la computación e informática, que ahora permiten hacer el análisis de grandes cantidades de información, análisis que tiene una tendencia a lo cualitativo y descriptivo. Por este motivo se hace importante la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria, al permitir que se consolide como una nueva forma de pensar cuya caracterización y desarrollo debe tenerse en consideración entre los fines de la «EM», el pensamiento combinatorio.

En la actualidad este tipo de pensamiento está siendo desaprovechado ya que, por un lado, se puede implementar como instrumento para lograr que los estudiantes desarrollen procesos de generalización, como por ejemplo, al utilizarlo en la transición del pensamiento aritmético, geométrico y probabilístico hacia el algebraico, mediante la generalización en modelos combinatorios. Y por otro lado, en la mayoría de los casos, al pensamiento combinatorio se le está limitando a un procedimiento intermedio para hacer cálculo de probabilidades. En cierto sentido se está subutilizando al ser un factor que permite evidenciar la estructuración del pensamiento formal en el adolescente, porque permite trabajar desde lo concreto para luego pasar a la generalización en una misma situación. En efecto, el estudiante transita progresivamente de lo particular a lo general mediante la construcción de modelos basados en la teoría de la combinatoria. Como lo afirma Restrepo P. (2010) "*la combinatoria enumerativa busca* *contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual consiste en encontrar su cardinal y lograr contar sin contar; es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno*" [2]. Es decir, a partir del análisis sobre algunos casos particulares de los elementos de un conjunto, se puede construir un modelo que permitirá construir y conocer todos los elementos del conjunto.

En concordancia con la descripción realizada anteriormente, en cuanto a los objetivos de la «EM», la responsabilidad de los educadores matemáticos, las exigencias modernas ante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la necesidad de evidenciar y consolidar el pensamiento combinatorio como otro tipo de pensamiento matemático, surge esta investigación, para la cual se plantea como pregunta orientadora de la misma **¿Cuáles son las características propias del pensamiento combinatorio?,** ya que conociendo estas características, se puede evidenciar su existencia, fortaleciendo y aportando herramientas para su consolidación como un tipo pensamiento matemático a tener en cuenta, reconocido e implementado por la comunidad de educadores matemáticos.

Además, estas características se utilizarán como insumo para crear e implementar nuevas metodologías y didácticas, que serán replicadas en los procesos y experiencias de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en general, permitiendo una mejor orientación y aplicabilidad de las mismas. Al mismo tiempo permitirán mostrar las ventajas de la combinatoria como herramienta interdisciplinar dentro de la misma matemática, dejando ver la necesidad de su aprendizaje y enseñanza, e inclusión en los currículos.

Este proyecto de investigación se desarrolla en el marco de las líneas de investigación del programa de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en particular en la línea de la

---

[2] Restrepo Mesa Pascual. Un Recorrido por la Combinatoria I. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. 2010

enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la solución de problemas (especialmente problemas no rutinarios) y en las estrategias del desarrollo, enriquecimiento y consolidación del pensamiento matemático (incluye la enseñanza y aprendizaje de la matemática para estudiantes talentosos), lo cual dio el aval de orden académico y científico para su ejecución.

En este orden de ideas, se da la importancia y reconocimiento a esta investigación, la cual se centra en describir las características del pensamiento que los estudiantes evidencian durante la solución de problemas significativos de combinatoria, a partir de las cuales se logra avances en la caracterización del pensamiento combinatorio. Se implementa en el marco de la solución de problemas matemáticos y de contexto abarcando la elaboración de significado de conceptos de conteo y la generalización en modelos.

Se organiza y propone la presente investigación, de carácter cualitativo, teniendo en cuenta las insuficiencias mencionadas anteriormente, siendo las que marcaron la elección del tipo de metodología de investigación científica necesaria para desarrollar la idea de investigación. En el Capítulo 3 se describe el modelo de investigación cualitativo y sus fases de desarrollo, a partir de las cuales se presenta la construcción y desarrollo de la investigación.

Problema de investigación

¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado robusto de los conceptos propios del análisis combinatorio?

Interiorizado el problema de esta investigación, es claro que el resultado de la investigación es de orden conceptual descriptivo requiriendo de una indagación profunda para apropiarse de mayores evidencias o soportes que permitan conocerlo y comprenderlo, logrando definirlo y describirlo para avanzar en la caracterización, para así construir el resultado final y dar respuesta al interrogante planteado.

Lo anterior permite delimitar el problema dentro del **objeto de estudio** denominado proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis combinatorio que será manifestado en el transcurso de la solución de problemas significativos y no rutinarios del análisis combinatorio. La población participante se conformó por estudiantes (hombres y mujeres) del ciclo de fundamentación en carreras de ingeniería (primer año de carrera) de la Universidad Antonio Nariño, sede Bogotá con edades entre los 15 y 25 años.

Para hacer realidad esta investigación y tomar un horizonte que permitiera dar solución parcial o total al problema planteado se fija el siguiente objetivo general.

Objetivo general

Lograr avances en la caracterización del pensamiento combinatorio implícito en la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto, y en la correspondiente elaboración de significado de los conceptos del análisis combinatorio en estudiantes que están en la transición del pensamiento concreto al abstracto.

Se entiende la caracterización como la descripción de las formas de entender y las formas de pensar combinatoriamente de los estudiantes, su interacción y su consolidación en la construcción del significado de los conceptos de conteo, proceso que se llevará a cabo durante el desarrollo de las clases de matemáticas en el contexto de solución de problemas. De esta manera queda direccionado como **campo de acción** el proceso de enseñanza y aprendizaje del conteo.

El proceso se desarrolla en el curso de Solución de Problemas para las carreras de ingeniería, en la Universidad Antonio Nariño, Sede Sur, de Bogotá, siendo éste la **unidad de análisis**.

Para tal fin, se formulan cinco preguntas científicas que permitieron direccionar la investigación. Sobre las preguntas se generaron las tareas de investigación, la planificación de éstas, y el cronograma, que se construyó sobre la base de las fases de la metodología de investigación científica, definida para este caso. Ésta a su vez es el medio organizador que permite ejecutar las tareas propuestas y entrelazar los resultados obtenidos en cada una de ellas, alcanzándose el objetivo propuesto en la investigación.

Preguntas científicas

P1. ¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?

P2 ¿Cuáles son los conceptos y significados empíricos que traen los estudiantes en conteo?

P3 ¿Cuáles estrategias emplean los estudiantes en la solución de problemas de análisis combinatorio y cómo se puede caracterizar el pensamiento involucrado en ellas?

P4 ¿Cómo procede la consolidación de un modo de pensar que puede llamarse combinatorio y qué características tiene?

P5 ¿Cómo ayuda el pensamiento combinatorio a la comprensión y aprendizaje de otras ramas de la matemática?

La estructura del documento memoria de esta tesis está constituido por la introducción, cinco capítulos, las conclusiones, las recomendaciones, las referencias bibliográficas y los anexos.

Los resultados de las primeras fases se reflejaron en una primera revisión del estado del arte contenido en el Capítulo 1 de este documento. A su vez esta revisión permite construir la respuesta a **P1,** pues con la búsqueda de respuestas a este interrogante se proyectó la revisión de los antecedentes al problema de investigación. Con la realización de este estudio se consolida el estado del arte, se fundamenta el marco teórico y referencial, y se construye el marco metodológico con el cual se realiza la investigación.

El Capítulo 2 dedicado al marco teórico, fue construido en sí para fundamentar los cuatro componentes del modelo metodológico propuesto, siendo éstos el componente de educación matemática –

pensamiento matemático-, el componente disciplinar –la combinatoria-, el componente metodológico –solución de problemas- y el componente cognitivo –teorías del desarrollo cognitivo-.

En el Capítulo 3 se consolida la revisión del estado del arte, del marco teórico y referencial, dando como resultado la creación y construcción del modelo metodológico «I.C.O.R.». Esta propuesta en adelante se asume como el eje director de la metodología, recolección de la información y análisis de los resultados.

En el Capítulo 4 se reportan el análisis de los resultados de la revisión de la información recolectada en los diferentes instrumentos, sobre la base de la solución de las actividades diseñada para tal fin. Este análisis en primera instancia se consigna en las relatorías de clase y a partir de éste se definen y consolidan las categorías y variables de análisis. Estos resultados se emplean para construir las respuestas a las preguntas de investigación.

En el Capítulo 5, Discusión de los resultados, sobre la base del análisis de los resultados obtenidos en la fase anterior y las bases teóricas definidas para tal fin, se da respuesta a las preguntas de investigación **P2, P3, P4** y **P5.,** proporcionando un significado propio al entendimiento del problema planteado que repercute directamente sobre las conclusiones, las recomendaciones e implicaciones que surgieron de la investigación. Se describen los resultados y aportes que son de orden teórico, práctico y científico logrados al culminar esta investigación.

De este modo se da una respuesta clara, objetiva y contundente sobre el objetivo y preguntas de investigación, al igual que se logra consolidar una solución al problema de investigación. De igual manera, se dejaron abiertas nuevas preguntas de investigación para desarrollar en próximos trabajos.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

1.1. Introducción

En este primer capítulo se presenta un resumen de las investigaciones más relevantes en relación con el problema de investigación, clasificadas de acuerdo a sus enfoques y líneas de investigación, ya que a partir de ellas se construye el estado del arte que soporta el trabajo. Estas categorías de análisis están dadas en caracterización de pensamiento matemático, caracterización de pensamiento combinatorio, modelos de pensamiento combinatorio, desarrollo cognitivo, solución de problemas (especialmente problemas combinatorios) e investigaciones orientadas al estudio del conteo. De éstas destacamos sus apartes referidos a la definición de combinatoria, los antecedentes referentes a la investigación en esta línea, la metodología de investigación (su población y muestra), sus conclusiones y/o aportes a la educación matemática.

1.2. Caracterización pensamiento combinatorio

1.2.1. The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students[3]

Este estudio se focaliza en investigar el desarrollo del razonamiento combinatorio y examinar las dificultades presentadas en la solución de diferentes problemas combinatorios en estudiantes de artes y ciencias sociales. La autora señala que en el NCTM 2000 se evidencia un gran interés por la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria, lo cual se contrapone con la falta de investigación en este campo de la educación matemática. En su estudio toma como referencia la definición de combinatoria dada por Cameron (1994), quien dice que "*la combinatoria es el estudio de las formas de enumerar y organizar*

[3] Kavousian, S. (2005) *The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students*. Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hosted by Virginia Tech University Hotel Roanoke & Conference Center, Roanoke. Disponible en URL: http://citation.allacademic.com/meta/p_mla_apa_research_citation/0/2/4/6/8/p24689_index.html?phpsessid=nvg7rcbu5gla2kgoogjp2l05i2 [Consulta 28 de agosto de 2014]

los elementos en un conjunto discreto, según unas reglas dadas"; a partir de ello construyó problemas de enumeración elemental que le permitieron ver las dificultades de los estudiantes en su solución. Estos además los clasificó en problemas de tipo 1, llamados *problemas de arreglo*, en los que se trabaja el orden de los elementos dentro de las cuestiones de configuración, y los de tipo 2 llamados *problemas de selección*, en los que se trabaja la selección de elementos de un conjunto de tal manera que el orden de los elementos dentro de la configuración no importa y se permite repetición. Su metodología de investigación la basó en los datos obtenidos al aplicar pruebas escritas y la realización de entrevistas al grupo de estudiantes. Como conclusiones da sugerencias de cómo ayudar a los estudiantes en la obtención del conocimiento mediante la descripción de sus dificultades y la proposición de clasificar sistemáticamente los problemas de enumeración como parte de una estrategia para su enseñanza. De acuerdo al objetivo, este trabajo pone de manifiesto que se deben clasificar los problemas combinatorios propuestos a los estudiantes porque cada uno de ellos evoca una forma particular de proceder en su solución, permitiendo encontrar patrones que ayudan en la construcción de la caracterización del pensamiento combinatorio.

1.2.2. What do I mean by combinatorial thinking?[4]

Los autores en este trabajo confirman una especulación existente en el ámbito de la «EM» acerca de la forma especial de razonamiento que se requiere para el aprendizaje de los conceptos combinatorios. De igual manera consideran que el interés de los estudiantes por este tipo de problemas se ha convertido en una situación fértil para los investigadores que estudian los diferentes tipos de pensamiento matemático.

[4] Rezaie M, Gooya Z. (2011). *What do I mean by combinatorial thinking*? Procedia Social and Behavioral Sciences 11 (2011) 122–126. Disponible en URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811000486 [Consulta 2 de octubre de 2014]

La unidad de trabajo utilizada por los investigadores fue el curso de “Combinatoria y sus Aplicaciones”, en la Universidad Shahid Beheshti de Teherán, Irán, diseñado por las investigadoras para poder realizar la investigación sobre el “pensamiento combinatorio” de los estudiantes. En su metodología, el instructor proponía un nuevo problema para iniciar cada clase; éste lo abordaban los estudiantes de forma individual y en corto tiempo. Ellos escribieron su solución y realizaron comentarios al respecto como primera parte de la recolección de la información, para luego hacer socialización de las mismas y con ayuda del instructor ver si tenía, o no, viabilidad de solución. El paso siguiente era continuar con la generalización de esta solución. Durante este proceso el instructor observaba las características de los conceptos y estrategias utilizadas por los estudiantes en los dos casos (particular y general), como segunda parte de la recolección de la información.

El análisis de estos datos condujo a las autoras a observar cuatro niveles de comprensión del pensamiento combinatorio. En un primer nivel está la *“investigación de algunos casos”,* básicamente es la exploración de casos particulares de la configuración dada para contar. En el segundo nivel *¿Cómo estar seguro que se han contado todos los casos?”*, es la búsqueda de una forma sistemática de obtener todos los arreglos posibles en el conteo. El tercer nivel es la *“generalización”*, la cual consiste en hacer nuevas preguntas sobre la idea principal del problema inicial en nuevas situaciones que impliquen usar la misma forma sistemática de conteo hallada en el nivel anterior y utilizar casos de *“n elementos”* en lugar de un número finito determinado de elementos. Y el cuarto nivel es *“convertir el problema en otro problema de combinatoria”*; aquí se espera que los estudiantes con un alto bagaje en dominio matemático y experiencia en solución de problemas combinatorios tengan la posibilidad de llevar o asociar el problema inicial con un teorema o problema resuelto conocido y luego volver al problema original y resolverlo.

De esta investigación se resalta una posible configuración sistemática del pensamiento combinatorio, de la cual se conceptúa que el nivel dos no se puede ver como una forma general de dar la solución a problemas combinatorios, ya que en los casos en que el número de elementos del dominio de conteo sea muy grande, es casi imposible ver o listar sistemáticamente todas las configuraciones o arreglos posibles de la solución al problema de conteo.

1.2.3. Combinatorial Reasoning and its Assessment[5]

En este documento los autores exploran, entre otros, los siguientes interrogantes pertinentes a la investigación en curso: ¿Qué componentes del razonamiento combinatorio se deben desarrollar y evaluar en nuestros alumnos? ¿Existen variables en las tareas que influyen en el razonamiento de los estudiantes y provocan errores en la resolución de problemas combinatorios?

Cabe señalar que la combinatoria es de suma importancia para el desarrollo y estudio de las probabilidades. Inhelder y Piaget (1955) indican que la *capacidad combinatoria* es un componente fundamental del estadio del pensamiento formal, ya que ésta constituye el esquema del razonamiento combinatorio dentro de este estadio, siendo parte esencial para alcanzar el razonamiento hipotético-deductivo o razonamiento científico usado para evaluar y combinar las diferentes posibilidades que se presentan en una situación dada. En consecuencia los autores proponen que la enseñanza y evaluación de la combinatoria debe fundamentarse en la solución de problemas combinatorios en los que los estudiantes usen procedimientos de enumeración sistemática, recurrencia, clasificación, tablas y diagramas de árbol, con el objeto de incrementar su capacidad para resolver problemas no rutinarios, para comunicar y aplicar las ideas matemáticas en la solución de diversos problemas.

---

[5] Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1997a). *Combinatorial reasoning and its assessment*. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), The Assessment Challenge in Statistics Education (pp. 239-252): IOS Press. Disponible en URL: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbk/chapter18.pdf [Consulta 20 de Abril de 2015]

Además, autores como Dubois, (1984) resaltan la existencia de una variable combinatoria implícita, (CI)-clasificación, dada por el autor a los diferentes problemas de conteo según la forma de seleccionar, agrupar o configurar los elementos que se quiere contar-, presente en los problemas; permitiendo dar una clasificación a los mismos en tres categorías. En la primera categoría están los *problemas de selección*, los cuales se caracterizan por tomar una muestra de *n* elementos, de un conjunto de *m* elementos (generalmente distintos). En la segunda categoría están los *problemas de distribución* que consisten en distribuir un conjunto de *n* elementos, en *m* casillas, y en la tercera categoría se encuentran los *problemas de partición*, que son aquellos en los cuales se requiere hacer una partición del conjunto, es decir dividir un conjunto de *n* elementos, en *m* subconjuntos. Las variables combinatorias implícitas en los problemas son las características que permiten diferenciar y afrontar cada situación combinatoria, es decir las condiciones que permiten tipificar los problemas, y en consecuencia cada una de éstas determina una forma especial de abordar cada problema. Para comprender y explicitar esta categorización se atiende al análisis de la propuesta original de Dubois (1984), y del análisis realizado en Batanero, C., et al. (1997b).

1.2.4. Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying, and Building Isomorphisms[6]

El eje central de la investigación toma como referente el aprendizaje individual que se desarrolla en comunidad, generando la oportunidad para compartir y comparar con otros miembros de la comunidad las representaciones de las ideas para la revisión de los sistemas existentes y la construcción de otros nuevos. Desarrolla el trabajo del estudiante en torno al recuento y combinatoria, analizando cómo el razonamiento de los estudiantes ha evolucionado desde los años escolares de primaria y secundaria a la universidad.

[6] Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Eds.). (2011). Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying, and Building Isomorphisms. New York: Springer

La investigación implicó 12 años de estudio para determinar a largo plazo cómo las ideas y formas de razonamiento matemático son construidas por los estudiantes a través del tiempo, presentando cómo los estudiantes construyen conexiones relevantes a través del razonamiento matemático avanzado. Las descripciones se hacen sobre los resultados de las pruebas aplicadas a los estudiantes. En éstas se focalizaron en revisar específicamente el uso de representaciones, adquisición de notación estándar y la formación de conexiones conceptuales entre problemas isomorfos.

El estudio planteado permitió evidenciar que los estudiantes participantes logran un excelente desarrollo de competencias matemáticas, ganando confianza y empoderamiento frente a sus propias habilidades matemáticas. De igual manera se destaca la comprensión matemática sobre la memorización y la posibilidad de ser una actividad de descubrimiento, en la cual se sienten verdaderos participantes activos en la construcción y justificación de su conocimiento matemático, a diferencia de los estudiantes receptores del conocimiento.

Los estudiantes suministran diferentes formas de entender los conceptos matemáticos; el entendimiento se describe como la capacidad de reconstruir las ideas previamente aprendidas y los momentos de discusión se relacionan con la adquisición de conocimientos, así como la justificación o prueba para las afirmaciones matemáticas. Se evidencia a través de las experiencias vividas a lo largo de toda la investigación en las que los estudiantes viven condiciones especiales en su proceso de aprendizaje por descubrimiento, donde destacan en su trabajo colaborativo: actividades prácticas, exploraciones, resolución de problemas, tareas desafiantes y discusión de ideas. Se subraya como componente clave para dar solución a los problemas el intercambio de ideas entre los estudiantes que se hacía durante la revisión y reflexión de sus propias soluciones y respuestas.

En general este trabajo es de carácter descriptivo y anecdótico en cuanto a las experiencias vividas durante el estudio, dedicado más al seguimiento y evolución de los estudiantes en cuanto a la construcción de sus formas de pensar matemáticamente, sin hacer una conclusión contundente especifica acerca de la caracterización del pensamiento combinatorio.

1.2.5. Students' Ways of Thinking about Combinatorics Solution Sets[7]

Halani presenta una investigación sobre la combinatoria motivada por la escasez de literatura que referencia el razonamiento de los estudiantes de combinatoria enumerativa y cómo los estudiantes conceptualizan el conjunto de patrones constitutivos del razonamiento o formas de pensar.

El planteamiento del problema implica una categoría nueva de combinatoria, relacionada con los problemas en los que se buscaron las relaciones y el conjunto de soluciones de dichos problemas.

Referencia el poco éxito de los estudiantes en la variedad en la solución de los problemas combinatorios a los que se debe enfrentar, antes y después de la las orientaciones dadas por el maestro. Es así que orienta su investigación para lograr comprender la manera cómo razonan los estudiantes en el nivel universitario acerca de problemas de combinatoria y la manera cómo se alcanza una conceptualización de los elementos empleados. El estudio buscó clasificar las formas de pensar y la evolución de las mismas a medida que se avanza de acuerdo a una secuencia de instrucciones con relación a arreglos con y sin repetición, permutaciones de los elementos por separado, combinaciones y permutaciones con elementos repetidos, todo con la redacción típica de los libros de texto, es decir, con problemas que se denominan rutinarios.

El estudio indaga sobre las formas de pensar usadas en el conjunto de soluciones formado por todas las soluciones dadas por los estudiantes, las relaciones entre esas formas de pensar, la medida en que evolucionan las formas de pensar combinatoriamente en el trascurso del proceso en que los estudiantes

---

[7] Halani A. (2013). Students' Ways of Thinking about Combinatorics Solution Sets. A Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy ARIZONA STATE UNIVERSITY. Disponible en URL: https://repository.asu.edu/attachments/110671/content/Halani_asu_0010E_13085.pdf [Consulta 10 de noviembre de 2016]

resuelven los problemas, y cómo un estudiante ingenuo logra inspirarse para desarrollar y ampliar sus formas de pensar vigentes.

Este estudio específicamente se focalizó en las formas de pensar de los estudiantes y sus avances en las mismas, dejando de lado el análisis de las formas de entender previas que se deben dar antes de poner en marcha las formas de pensar.

1.3. Modelos pensamiento combinatorio

1.3.1. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils[8]

Esta investigación corresponde a un caso particular de lo tratado en Batanero, C., et al. (1997a), ya que se trabajó con estudiantes de secundaria para determinar el efecto del *modelo combinatorio implícito* (ICM) antes y después de la enseñanza de la combinatoria, la cual arroja como resultado la existencia de variables en el ICM, tales como: la dificultad en diferenciar la tipología del problema y la operación combinatoria. En su análisis teórico retoman las conclusiones de Piaget y Fischbein al respecto. De Piaget retoman que la edad del niño refleja una forma de proceder ante los problemas combinatorios. En la primera etapa considera que los niños utilizan los procedimientos aleatoriamente, sin hacer relaciones entre los mismos, en la segunda etapa se basan en el proceder empírico soportado en el tanteo y el error, y en la tercera etapa descubren procedimientos sistemáticos mediante las operaciones formales, para problemas que requieren dominio de los esquemas de seriación y correspondencia. De Fischbein retoman un resultado de su investigación, en la cual afirma que no siempre se alcanza la capacidad de resolución de problemas combinatorios, aun en la etapa de operaciones formales, sin enseñanza u orientación previa.

[8] Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997b). *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*. Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

Lo anterior lo ratifican en sus resultados, al comparar el desempeño de los estudiantes antes y después de la enseñanza. Para hacer este comparativo se identificaron las variables en el ICM ante la enseñanza que dio como resultado la dificultad en identificar las operaciones combinatorias necesarias para abordar el problema de permutaciones y combinaciones en sus diferentes presentaciones.

Se rescata de esta investigación el trabajo estadístico realizado para el análisis de los datos en forma cualitativa, el cual se llevó a cabo bajo un modelo de *diseño factorial*. En éste se consideraron como factores intra-sujetos, tres niveles de modelos combinatorios, cinco niveles de operaciones combinatorias, y tres niveles de elementos implícitos, y como factores inter-sujetos, dos niveles de sexo, dos niveles en el grupo de estudiantes (antes y después de enseñanza). El análisis del comportamiento de las varianzas permite dar las conclusiones en las diferentes relaciones factoriales, reconociéndose catorce tipos de errores durante el proceso de solución de los problemas propuestos a los estudiantes, lo cual repercutió en la formulación de una propuesta curricular para la enseñanza de la combinatoria en estudiantes entre los 10 y 18 años, propuesta que se encuentra en el documento Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1994).

En lo que refiere a la presente investigación, los resultados se retomarán al momento de la construcción de los instrumentos que se utilizarán en el trabajo de campo. Es importante, de todas maneras, dejar en claro que no se centrará en los errores cometidos por los estudiantes, sino en sus avances en la solución de problemas retadores de combinatoria que permiten caracterizar el pensamiento combinatorio en sí.

1.3.2. A model of student's combinatorial thinking[9]

En este artículo la autora propone un modelo de pensamiento combinatorio basado en el análisis conceptual. Este se da como un aporte a la comunidad de educadores e investigadores en «EM», para ayudar a ver y entender cómo los estudiantes conceptualizan los problemas de conteo.

Lockwood, E. (2013) en el modelo que construyó a partir del análisis conceptual de las actividades realizadas por los estudiantes en combinatoria enumerativa, se propuso como objetivo describir y explicar los aspectos comunes y relevantes en el proceso de conteo realizado por los estudiantes, y así elaborar formas en que ellos puedan pensar en ideas combinatorias. El modelo se usó en su etapa inicial con estudiantes de secundaria, y luego se redefinió con estudiantes de postsecundaria.

Con el término *modelo* la autora aquí se refiere a un sistema en particular para identificar, describir y explicar algunos fenómenos relacionados con un tema matemático en particular, en este caso el pensamiento combinatorio, e indica que Lesh y Doerr (2000) dicen que no cualquier sistema funciona como un modelo. Para ser un modelo, un sistema debe ser utilizado para describir algún otro sistema, o para hacer predicciones al respecto; en este sentido, el "otro sistema" que el modelo explicará, es el pensamiento combinatorio de los estudiantes.

El modelo presenta las relaciones entre los procesos de conteo, las fórmulas y/o expresiones y el conjunto de resultados subyacentes a la solución de problemas de combinatoria enumerativa. Esta relación se presenta en la Figura 1.

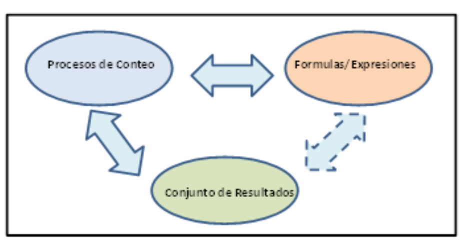


Figura 1. Un modelo de pensamiento combinatorio en estudiantes[10]

---

[9] Lockwood, E. (2013). *A model of students' combinatorial thinking: The Role of set out comes*, The Journal of Mathematical Behavior, 32, 251-265. Disponible en URL: file:///C:/Users/pc/Downloads/Lockwood2013JMBModel.pdf [Consulta 26 de Agosto de 2014]

Estos procesos consisten en los pasos o procedimientos para mostrar qué se hace o se imagina haciendo a fin de completar una tarea combinatoria. Por una parte los procesos de conteo se refieren al proceso o serie de procesos de enumeración. Las fórmulas y/o expresiones se refieren a expresiones matemáticas que producen algún valor numérico y los conjuntos de resultados se refieren a la colección de objetos que se están contando o al número de arreglos posibles dados como solución al problema.

El estudio se fundamenta en el análisis conceptual que incluye tres premisas: en primer lugar, los análisis conceptuales se pueden utilizar «para generar modelos de saber» que pueden arrojar luz sobre la forma en que otras personas podrían pensar ciertas ideas. En segundo lugar, los análisis conceptuales pueden utilizarse para considerar esas formas de entender que pueden fomentar el aprendizaje efectivo en los estudiantes, realizando estudios en experimentos de enseñanza. En tercer lugar, los análisis conceptuales pueden permitir a los investigadores hacer conjeturas acerca de por qué los estudiantes defienden ideas particulares y si hay ciertas formas de conocimiento que podrían ser perjudiciales para los estudiantes en la comprensión de las ideas importantes (Thompson, 2008).

Con lo anterior la autora concluye que el modelo aplica para la primera premisa, al dar orientaciones que permiten ver, describir y analizar el trabajo realizado por los estudiantes en problemas de conteo. En efecto, la principal referencia es la relación entre los procesos de conteo y el conjunto de resultados como correspondencia esencial en el pensamiento combinatorio. Para la tercera premisa, se propone que se debe conocer la naturaleza de los errores de los estudiantes, para identificar las "defensas" propuestas por los estudiantes ante una situación particular de combinatoria.

Esta investigación propone, en particular, que la caracterización del pensamiento combinatorio se puede convertir en un "modelo" basado en sistemas, lo que representaría para la presente investigación el cuerpo de la metodología e implementación del mismo en el proceso de enseñanza aprendizaje dado

---

[10] Ibíd

en la interacción del docente y el estudiante. Además, se tendrá en cuenta como parte de la evidencia que ratifica la escasa existencia de modelos que permitan ver las características de las *formas de pensar y formas de entender*; las que seguramente serán materializadas en la construcción de significado en el momento de enfrentar la solución de un problema, o de comprender alguna solución ya existente del mismo.

1.3.3. Un estudio sistemático de configuraciones combinatorias simples[11]

En este artículo el autor hace una reflexión previa sobre el estudio del análisis combinatorio, de la cual resalta que la combinatoria posee su propio campo de estudio, dado sobre las configuraciones finitas y los métodos específicos para recontarlas y enumerarlas, sugiriendo que debe ser incluido en los programas escolares e indicando su potencial como instrumento didáctico para desarrollar la "matematización". Además, considera el lenguaje de los conjuntos como el lenguaje unificador, que permite establecer intuitivamente las configuraciones combinatorias en nivel concreto, para recontarlas en un nivel abstracto. Con respecto a las fórmulas de enumeración, establece que éstas favorecen la exploración de diversos caminos para inducir o demostrar.

Sobre estas reflexiones propone una investigación para dar una clasificación a las configuraciones simples en combinatoria realizada en casos de distribución y ordenamiento de los objetos. De esta forma Dubois se plantea como meta integrar diferentes conceptos de la combinatoria enumerativa básica para la enseñanza de esta asignatura a través de relaciones de configuración en general.

De este planteamiento obtiene como resultado que un ordenamiento se entenderá y es posible clasificarlo dentro de una u otra de las seis clases disyuntivas siguientes:

(i) La de los conjuntos ordenados de m objetos distintos en n casillas distintas

[11] Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. Educational Studies in Mathematics, 15 (1), 37-57.

(ii) La de los conjuntos no ordenados de *m* objetos distintos en *n* casillas distintas

(iii) La de los conjuntos de *m* objetos indistinguibles en *n* casillas distintas

(iv) La de los conjuntos ordenados de *m* objetos distintos en *n* casillas indistinguibles

(v) La de los conjuntos no ordenados de *m* objetos distintos en *n* casillas indistinguibles

(vi) La del ordenamiento de *m* objetos indistinguibles en *n* casillas indistinguibles

Se especifica que se entiende por arreglo ordenado, una distribución donde se tiene en cuenta el orden de los objetos en las casillas; se nota que no se puede ordenar en las casillas de ordenamiento los objetos indistinguibles.

Esta clasificación como modelo, hace referencia a los tipos de problemas, más no a un modelo para desarrollar el pensamiento combinatorio implícito en la solución de este tipo de problemas.

1.4. Otras investigaciones orientadas al estudio del conteo

Aquí se presentan algunas investigaciones realizadas en el marco de los procesos de enseñanza aprendizaje de algunos de los principios de fundamentales de conteo. Estos dan evidencia que los centros de interés están principalmente enfocados en los principios de permutación y combinación, mostrando una falencia en cuanto a la enseñanza de la totalidad de los principios. Por otro lado está el enfoque dado a las investigaciones, el cual circunda alrededor de evidenciar errores en las soluciones dadas por los estudiantes, y a partir de éstas proponer estrategias para suplir esta deficiencia, dejando de lado la importancia de analizar y caracterizar las formas de entender y pensar de los estudiantes durante este proceso, la cual es el centro de interés del presente trabajo.

1.4.1. An Error Analysis of Matriculation Students' Permutations and Combinations[12]

Este estudio es el resultado de un estudio realizado a 83 estudiantes, a los cuales se les aplicó una prueba de diagnóstico en permutaciones y combinaciones. Esta se utilizó como instrumento para recopilar los tipos de errores de los estudiantes. Los errores fueron clasificados de acuerdo a la clasificación de Carmen Batanero donde se percibe que los estudiantes emiten errores entorno a la interpretación, identificación de objetos como letras y números, operaciones aritméticas en la búsqueda de solución, uso de fórmulas y respuestas incorrectas o sin sentido.

En Malasia la combinatoria está incluida en el programa de matemáticas adicionales en secundaria, preparatoria para el ingreso a la universidad; siendo considerada con un espectro amplio y no únicamente problemas de disposición, permutación y combinación. El autor afirma que el análisis de los errores de los alumnos en temas de matemáticas ayuda al maestro a elevar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. Existen varios modelos de análisis de errores a nivel amplio de las matemáticas y estadísticas, como el modelo de Newman, el modelo de clasificación con código de Hadar, entre otros. Para el caso de la combinatoria se identificaron los errores especificados por Batanero et al (1997) y por Hadar y Badass (1981), razón que permitió argumentar los errores de los estudiantes en temas de permutaciones y combinaciones analizados en esta investigación, siendo estos errores de tipo conceptual y de cálculos involucrados en la ordenación de un número *n* de objetos separados, organización de *r* elementos tomados de *n* objetos diferentes y la selección de *r* objetos de *n* objetos diferentes.

[12] Rusydah Usry, Roslinda Rosli and Siti Mistima MaatIndian. (2016). An Error Analysis of Matriculation Students' Permutations and Combinations. Journal of Science and Technology, Vol 9(4), DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i4/81793, January. Disponible en URL: www.indjst.org/index.php/indjst/article/download/81793/66911 [Consulta 6 de febrero 2016]

1.4.2. Otros autores

Otros autores como Hadar y Hadass (1981) al hacer estudios de las dificultades y errores en la resolución de problemas combinatorios, determinaron que se presentaban dificultades en encontrar un método sistemático de enumeración, la identificación del grupo de sucesos u objetos que se pide enumerar o contar, la no distinción entre permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición, la no elección de una notación apropiada y la dificultad para alcanzar la generalización después de hacer la solución para varios casos particulares.

En Godino, Batanero y Navarro-Pelayo (1992) se pone a la luz la dificultad que tiene los alumnos para la traducción de un modelo de partición o colocación a un modelo de selección.

Estas situaciones son una muestra que las investigaciones al respecto de la resolución de problemas combinatorios que se han encaminado a resaltar el tipo de dificultad asociada a la solución, más no hacen una caracterización de la forma como el estudiante interioriza o construye el significado del concepto.

Conclusiones del capítulo 1

Cabe señalar que la revisión del estado del arte se orientó a partir de la primera pregunta de investigación: **P**$_1$ ¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?, interrogante que se tomó como la hoja de ruta para iniciar la búsqueda de los antecedentes al problema de investigación. A partir de ésta se subdividió la revisión en los siguientes aspectos: 1) caracterización del pensamiento combinatorio, 2) modelos de pensamiento combinatorio, y 3) otras investigaciones orientadas al estudio del conteo.

Realizada la búsqueda, la investigación concluye que no se encuentran modelos específicamente enfocados al estudio de la caracterización del pensamiento combinatorio que determinen particularidades al respecto. Precisa advertir, en todo caso, que existen trabajos científicos en los cuales se analiza el razonamiento combinatorio, sin que éstos describan específicamente las características del pensamiento combinatorio que hace parte del objetivo de la presente investigación.

Los siguientes son algunos de los referentes consultados, observándose que estas investigaciones están enfocadas especialmente a revisar aspectos como 1) Los errores más frecuentes y sus causas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las técnicas de conteo, y 2) Las estrategias propuestas a los estudiantes para desarrollar problemas de conteo, más no a estudiar el tipo de estrategias que los estudiantes desarrollan de forma autónoma cuando se enfrentan a la búsqueda de una solución a un problema combinatorio, y 3) El tipo de problemas rutinario que se presentan a los estudiantes, los cuales terminan convirtiéndose en ejercicios de combinatoria repetitivos en cuanto a estrategia de solución y a estructura del mismo problema.

CAPITULO 2. MARCO TEORICO

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que se utilizaron en el análisis de los resultados que permitieron formalizar y establecer el resultado de la investigación, al igual que los fundamentos teóricos del modelo metodológico propuesto desde la postura de cuatro componentes, el componente de educación matemática –pensamiento matemático-, el componente disciplinar –la combinatoria-, el componente metodológico –solución de problemas- y el componente cognitivo –teorías del desarrollo cognitivo-.

2.1. Componente de educación matemática: *Pensamiento Matemático*

Este componente se concibe desde la base teórica de la propuesta realizada por Guershon Harel (2008 a, b) en su trabajo del modelo DNR. En este aparte se resaltan los aspectos más influyentes para esta investigación destacando que esta propuesta es el resultado de un profundo estudio realizado por Harel sobre la demostración matemática. La obra completa se puede consultar en http://www.math.ucsd.edu/~harel/.

En su trabajo Harel (2008 a) plantea que el fin de la educación matemática es desarrollar el razonamiento matemático del estudiante, razonamiento que se compone de formas de entender y formas de pensar. Esta postura pedagógica la desarrolla Harel desde un marco teórico que ha denominado “DNR de las matemáticas” por sus iniciales que corresponden a tres componentes tomados en el marco de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que son la Dualidad (D), la Necesidad (N) y el Razonamiento Repetido (R). Para su comprensión, a continuación se expone esta posición teórica, producto de la revisión realizada a los documentos que ese autor ha presentado para describir y definir el modelo.

2.1.1. DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving[13]

Esta es la primera de dos publicaciones realizadas por G. Harel en las cuales establece los principios y fundamentos de esta postura metodológica y pedagógica utilizada en la enseñanza de las matemáticas que surge en la búsqueda de respuestas a las preguntas ¿*Cuál es la matemática que debemos enseñar en las escuelas*? y ¿*Cómo la debemos enseñar*? En este orden de ideas se plantea los siguientes puntos de análisis.

1. El modelo DNR tiene como ejes de la enseñanza, la integridad de los contenidos y la necesidad intelectual del estudiante, y los dos se consideran igualmente importantes. Por ejemplo, para Harel un currículo de geometría, no es geometría si en su enseñanza las matemáticas que se desarrollan en él no van a su esencia que es desarrollar el razonamiento deductivo (esto constituiría la integridad de los contenidos). De igual manera no se puede desconocer la necesidad intelectual del estudiante, sin confundirse o caer en el error de subestimar las capacidades del estudiante impulsadas por un orden sociocultural. Es decir, no se debe ver la necesidad intelectual del estudiante como una necesidad influenciada por lo social o cultural en el momento histórico por el que se esté pasando, sino como una necesidad obligatoria para desarrollar el pensamiento matemático en todas sus dimensiones y momentos en que se esté dando el proceso de enseñanza y aprendizaje.
2. Al pensar en el "esfuerzo" que se hace en el proceso de enseñanza de las matemáticas, se debe tener y cumplir con un contenido curricular con integridad matemática, siendo ésta la que determinará las formas de entender y las formas de pensar en el tiempo. Las primeras evolucionan a través de la práctica matemática, potenciándose y promoviéndose hasta formalizarse en las segundas, constituyendo así uno de los objetivos de la «EM», que es identificar y analizar estas formas de

[13] Harel, G. (2008 a). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I, ZDM*—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500. Disponible en URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRI.pdf [Consulta 12 de marzo de 2015]

entender, las cuales con la ayuda de un mediador experimentado se transferirán a las formas de pensar. Así se dará el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes como elemento y objeto último del aprendizaje.

3. Los planes de estudio para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben ser elaborados con integridad matemática. Por ejemplo, un plan de estudios pensado en desarrollar el razonamiento deductivo, debe tener en cada una de sus actividades como objetivo central y final el dominio de la “demostración matemática”.

4. En el DNR, las formas de entender y las formas de pensar tienen significados específicos y técnicos, por lo que serán consideradas como dos categorías del razonamiento. La primera procede sobre la capacidad de comprensión de un tema en particular, por ejemplo, la comprensión de una definición, de un teorema, de una demostración, de un problema y sus soluciones. La segunda procede como una herramienta conceptual organizadora entre la heurística y las creencias que intervienen en idear la solución a un problema retador o la demostración de una proposición determinada. Por ello, el conocimiento y el enfoque dado a un tema en particular no son suficientes para lograr un aprendizaje de calidad, sino que debe activarse junto a éstos una herramienta conceptual para que se alcance la construcción del significado de los conceptos.

5. La necesidad intelectual está de manera implícita en la forma cómo el estudiante entiende el ¿por qué? se busca lograr la apropiación de cierto conocimiento, el cómo se accede a ese conocimiento, y el cómo se le motiva a abordarlo. Así ésta se convierte en un punto estratégico para el profesor, ya que es en esta interacción en la cual se pueden evidenciar las formas de entender, y como tal emerge la necesidad de hacer su descripción, que a su vez estará ligada a una justificación epistemológica que dará su validación para avanzar a las formas de pensar en primera instancia y a las nuevas formas de entender en segunda instancia. Visto lo anterior de otra forma, esto implica que el estudiante perciba o sienta una causa, que traerá como consecuencia la construcción de un nuevo conocimiento en él, es

decir la elaboración de un significado tentativo o parcial del concepto en primera instancia y en la elaboración de un significado más robusto del concepto en segunda instancia. Esta causa es una situación matematizable presentada como un problema matemático, teórico, singular o de contexto, cuya solución traerá como consecuencia para el estudiante la generación de un nuevo conocimiento. Tomada en su conjunto, esta "situación" es la que se denomina necesidad intelectual.

6. Lo anterior da inicialmente la justificación de la existencia del DNR como estructura para el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Como primer aspecto vemos que la DUALIDAD (D) hace referencia a la dupla conformada por las formas de entender (FE) y formas de pensar (FP), que constituirán los objetivos del aprendizaje, y a su vez los principios de la enseñanza que estarán implícitos en el currículo. Por lo tanto para alcanzar estos objetivos, los principios de enseñanza deben basarse durante su desarrollo en la dependencia de estas dos categorías del razonamiento matemático. Como segunda medida vemos la existencia de una NECESIDAD (N), reseñada como la necesidad intelectual, que es la que orienta y motiva a los estudiantes durante el proceso de aprendizaje como punto de partida para la construcción de nuevos conocimientos y el desarrollo de sus formas de entender y de pensar matemáticamente. La tercera medida son los factores que facilitan o permiten la interiorización y organización del conocimiento en cada estudiante, constituyendo el RAZONAMIENTO REPETIDO (R).

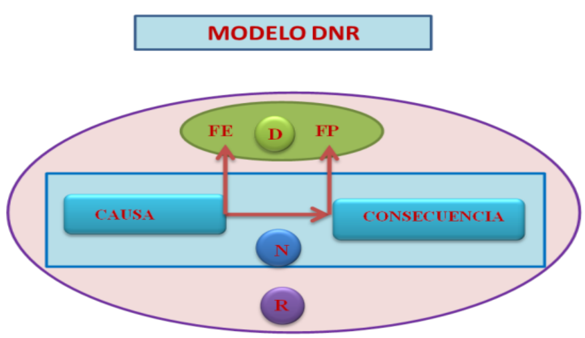


Figura 2. Modelo DNR[14]

[14] Fuente: Elaboración propia

En la Figura 2 se hace la representación del modelo DNR, mostrando su proceder durante el proceso de aprendizaje, teniendo como objetivo principal generar en el estudiante el razonamiento matemático. Para desarrollar este modelo se requiere presentar al estudiante una *situación*, la cual a su vez generará en él, una necesidad (N), en el modelo denominado *necesidad intelectual*. Esta necesidad debe responder a un comportamiento causa-consecuencia, siendo las *"causas"* el origen de las *formas de entender* (FE). Estas evolucionarán en el tiempo, generando como *"consecuencias"* las *formas de pensar* (FP), las cuales el estudiante manifestará al mundo exterior mediante la comprensión y la solución de la situación presentada, dándose así el aval de la existencia de la Dualidad (D). Luego de que se pueda garantizar que se haya superado la necesidad intelectual en el estudiante, las formas de pensar pasarán a ser un proceso de razonamiento, el cual a su vez se replicará en el entendimiento de nuevas situaciones, produciéndose así en el estudiante el Razonamiento Repetido (R).

Durante este proceso de Razonamiento (R), se da la triada constituida por las *acciones mentales, las formas de entender y las formas de pensar.* Las primeras Harel y Sowder (2005, 2007) las definen como los actos de determinar y persuadir. Siendo el primero el actuar del estudiante para remover sus propias dudas sobre la verdad de una afirmación, y el segundo el actuar del estudiante para convencer a los demás sobre la veracidad de una afirmación. Así mismo cada acto mental generará un *producto* en forma de declaraciones o acciones, las cuales son las *formas de entender* (FE), y éstas a su vez están compuestas por una serie de *características cognitivas,* las cuales constituyen las *formas de pensar* (FP). Algunos de estos actos pueden ser interpretar, simbolizar, relacionar, modelar, generalizar, entre otros.

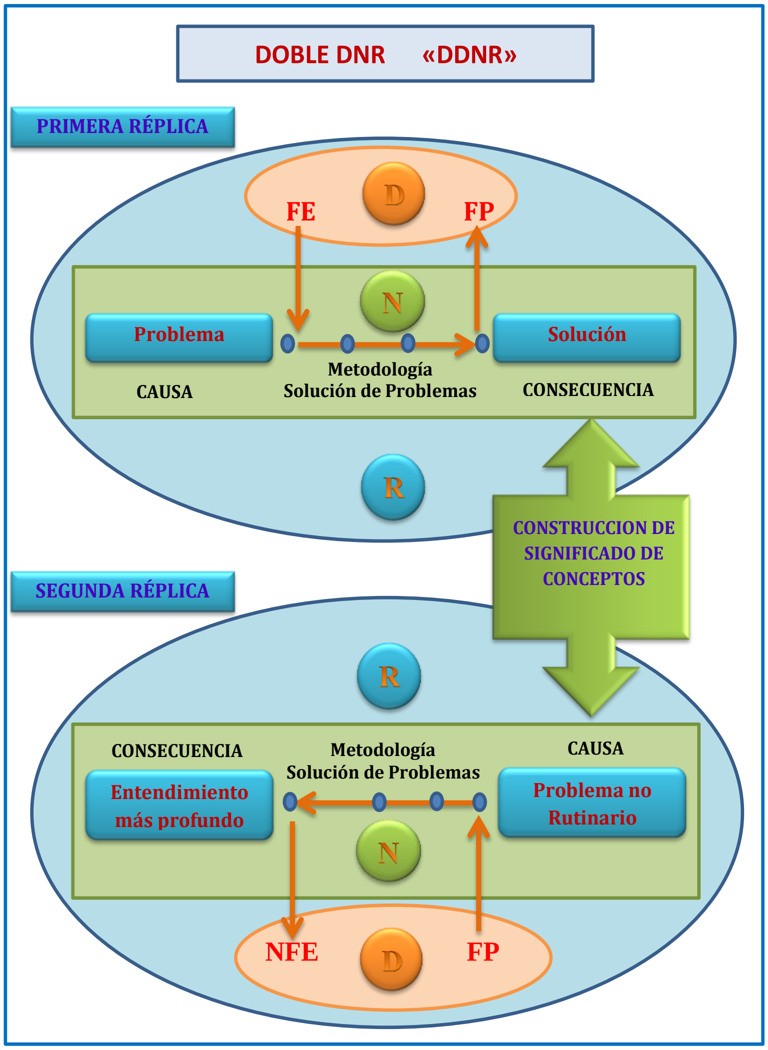


Figura 3. Modelo Doble DNR (DDNR) [15]

En la propuesta DNR, Harel sostiene que a partir de la necesidad intelectual (situación matematizable) y el actuar del estudiante se tienen que dar primero las *formas de entender*, para luego desarrollar las *formas de pensar*. En el trabajo planteado en esta investigación se realizará asimismo, y con una réplica inversa al sentido propuesto por el autor, siendo ésta la doble réplica del DNR. Esta es la base tomada para la creación y construcción de la propuesta metodológica, denominada *modelo metodológico «I.C.O.R.»,* la cual se denomina dentro del modelo metodológico el "DOBLE DNR" (DDNR). La propuesta planteada se representa en la Figura 3 y se desarrolla en el Capítulo 3.

[15] Fuente: Elaboración propia

Lo anterior nos lleva a pensar que en realidad existe un modelo general DNR, del cual subyacen otros submodelos DNR, uno para cada elemento que compone la ciencia llamada educación matemática «EM» como se menciona en la introducción de este documento, si pueden llamarse así.

Lo anterior nos lleva a pensar que en realidad existe un modelo general DNR, del cual subyacen otros submodelos DNR, uno para cada elemento que compone la ciencia llamada educación matemática «EM», como se menciona en la introducción de este documento, si pueden llamarse así.

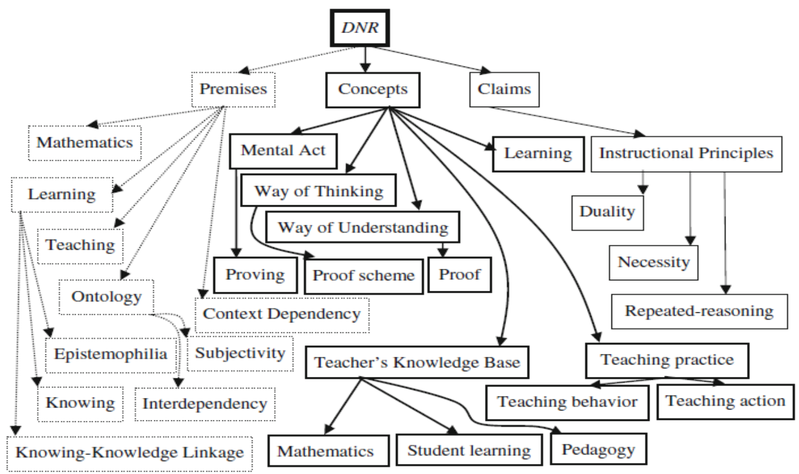


Figura 4. Estructura general del DNR[16]

En la Figura 4 se presenta la esquematización de la estructura general del DNR y a partir de ésta se puede realizar el análisis a este modelo, de manera que se muestra como Harel relaciona y concluye que los fundamentos del DNR actúan en forma de réplica sobre tres categorías que recogen los elementos implícitos en la «EM». El resultado de este análisis no se presenta en este documento ya que no fue necesario, ni en el soporte teórico, ni en la discusión de los resultados.

2.2. Componente disciplinar matemático: *Combinatoria*

2.2.1. Fundamentos preliminares

Para abordar esta investigación se introducen algunos aspectos de la combinatoria, de carácter teórico e histórico. Se inicia presentando diferentes definiciones dadas al término *Combinatoria*. Sin duda para

[16] Tomada de Ibíd

aclarar la reducción absurda a la cual han limitado este gran campo de las matemáticas en ocasiones por parte de los diseñadores de currículos, que siguen parámetros reglamentados por las políticas educativas o por los propios intereses de las mismas instituciones educativas. En ellas se reflejará lo amplio, complejo y necesario que resulta enseñar y aprender combinatoria.

Esta herramienta matemática, al igual que otras, es de tipo interdisciplinar y transversal a los otros campos de la matemática, estableciéndose como una estructura que garantiza la formación de un tipo de pensamiento propio, el pensamiento combinatorio. Además, se puede considerar a la par con la aritmética, el álgebra y la geometría, constituyéndose en un excelente complemento para avanzar en la comprensión y aplicación sobre diversos contextos y fenómenos de la realidad.

Finalmente se presentan los tópicos trabajados en el curso de análisis combinatorio, con el objeto de compararlos con los syllabus de asignaturas en las cuales se imparte alguno de estos tópicos, dejando ver la magnitud de la insuficiencia con que en general se trabaja esta rama de las matemáticas.

2.2.2. Definiciones

En diferentes fuentes de la literatura se encuentran definiciones referentes al término *combinatoria*, desde el punto de vista matemático, las cuales se han reducido a expresiones como: *contar, técnicas de conteo, formas de contar*, entre otras. Se muestran algunas de estas definiciones para tomar una posición al respecto alrededor de la cual se desarrolló el componente disciplinar utilizado en esta investigación.

a. Claude Berge (1926-2002), propone definir la combinatoria como el estudio de las configuraciones formadas con los elementos de un conjunto finito, entendido por tales las aplicaciones del conjunto en otro (posiblemente provisto de cierta estructura) que satisfaga unas restricciones determinadas (*Principles of combinatorics*, 1968). Dentro de esta concepción pueden considerarse varios aspectos, entre ellos: el estudio de configuraciones conocidas, el estudio de la existencia de ciertas configuraciones, el conteo de configuraciones de un tipo dado, la enumeración o descripción de configuraciones, la optimización combinatoria, es decir la determinación de las configuraciones que maximizan o minimizan una función dada, etc.

b. En su "Ars Conjectandi," Bernoulli describe la combinatoria como el arte de enumerar todos los caminos posibles de los cuales un número dado de objetos puede ser mezclado y combinado para estar seguro de no omitir ningún resultado posible. (Batanero, Godino y Navarro-P., 1997)

c. La combinatoria es las matemáticas de conteo. (Permutaciones y combinaciones, cambio de posiciones), (Hart, 1992, citado por Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997).

d. "La combinatoria trata, ante todo, de contar el número de maneras en que unos objetos dados pueden organizarse de una determinada forma." Anderson (1993).

Por lo anterior podemos ver que la definición de combinatoria se ha ido complementando a través de las nuevas aplicaciones encontradas, sin perder su esencia que es *contar*, como lo dice Restrepo (2010) "la *combinatoria enumerativa* que busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual concurre en encontrar su cardinal, teniendo como objetivo el "contar sin contar", es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno", pasando por relaciones de recurrencia, funciones generatrices, ecuaciones diferenciales, teoría de grafos y teoría de juegos entre otras temáticas que se incluyen en el gran campo de la combinatoria. (Ver tópicos.)

Otros autores, como Aigner (1942-), proponen trabajar dentro de la combinatoria varias áreas principales, tales como los problemas de enumeración, el estudio de estructuras de orden en conjuntos finitos, los teoremas de existencia tipo Ramsey, Sperner, etc. y el estudio de configuraciones. En cualquier caso el campo abierto a la combinatoria es amplio y fascinante, repleto de bellos resultados e interesantes problemas abiertos.

Para esta investigación se asume como definición, la propuesta por Pascual Restrepo, esto porque el centro disciplinar combinatorio que se implementa toma su base teórica en la combinatoria enumerativa.

2.2.3. Tópicos

Para determinar los tópicos a incluir se puede ver, por ejemplo, una publicación reciente en combinatoria, "How to Count" de Robert A. Beeler (2015), publicada por Springer, en la cual se puede apreciar la dimensión y aplicabilidad que ha ido ganando la combinatoria a nivel mundial, mientras que en el medio colombiano solamente se desarrollan algunos apartes de unos dos o tres capítulos de este referente, lo cual sugiere la falta de importancia que se le está dando a este campo. A continuación, se presentan los tópicos que se pueden trabajar en un curso dedicado a la combinatoria enumerativa.

<table>
<tr><th>Tópicos usuales</th><th>Otros subtemas de Combinatoria Enumerativa</th></tr>
<tr><td>
1. Combinatoria Enumerativa
a. Principio de la suma
b. Principio de la multiplicación
c. Permutaciones
d. Variaciones
e. Combinaciones
f. Coeficientes Binomiales y Multinomiales
g. Principio de Inclusión y Exclusión
2. Permutaciones y Particiones
3. Relaciones de Recurrencia
4. Funciones Generatrices
5. Teoremas de Existencia
6. Enumeración bajo acción de grupos
7. Teoría de Grafos
8. Teoría de Juegos
</td><td>
• Factorial
• Factorádico
• Función W de Lambert
• Función generadora
• Fórmula de Stirling
• Grupo simétrico
• Identidades de Newton
• Lema fundamental de teoría de cribas
• Matroides
• Números de Catalán
• Números de Delannoy
• Número de Bell
• Número de Dedekind
• Números de Stirling
• Principio del palomar
• Problema de Catalán
• Problema de Flavio Josefo
• Problema de las colegialas de Kirkman
• Regla de Golomb
• Secuencia de Prüfer
• Subfactorial
• Tabla de Young
• Teoría de cribas
• Transformada binomial
</td></tr>
</table>

Por otra parte, estos tópicos deberían haber sido tratados en la formación escolar del estudiante, pero en el contexto colombiano solamente se tratan en la universidad, y de manera muy superficial. Con lo anterior se quiere evidenciar que la combinatoria no solamente incluye las técnicas básicas de conteo, que en ocasiones son restringidas aún más, a solamente las permutaciones y combinaciones y como elementos requeridos para hacer una introducción al estudio de las probabilidades.

De igual forma se aprovechó para resaltar en negrilla los tópicos teóricos que se utilizarán en la caracterización del pensamiento combinatorio, como elementos implícitos en la solución de los problemas propuestos a los estudiantes en las diferentes actividades. En este documento no se exponen estos conceptos formalmente, siendo de fácil consulta en el contexto y de conocimiento por parte de toda la comunidad de educadores matemáticos.

Sumado a la síntesis presentada anteriormente se realizó una revisión de los syllabus de los cursos para ingeniería de la Universidad Antonio Nariño (UAN), donde por lo menos una de sus unidades temáticas hace referencia a alguno de los tópicos de la combinatoria enumerativa, ya que, como se indicó en la introducción, la población objetivo para el estudio será tomada de los estudiantes del ciclo de fundamentación de las carreras de ingeniería de esta universidad.

La revisión arroja como resultado que los cursos que tratan alguno de los tópicos o parte de la combinatoria enumerativa, son el curso de Solución de Problemas, impartido en todos los programas de ingenierías en primer semestre; el curso de Probabilidad y Estadística ofrecido a todas las carreras ingenierías en cuarto semestre, al igual que el curso de Matemáticas Discreta, para ingeniería de sistemas y licenciatura en matemáticas dado en cuarto semestre. (ver Anexo 1, Anexo 2 y Anexo 3). De hecho, se observa que el componente combinatorio trabajado es una parte de la combinatoria enumerativa en lo referente a las técnicas básicas de conteo. Esto se hace con el objeto de comparar qué tanto uso y con qué profundidad se desarrollan los tópicos de la combinatoria.

De este posible paralelo podemos concluir de forma bipolar. Desde lo positivo se rescata que para la necesidad de la presente investigación, parte de la población cumple con el requisito de no haber tomado ningún curso que incluyera tópicos de combinatoria. Estos son los estudiantes del curso de Solución de Problemas, quienes son la muestra tomada, y de quienes se obtuvo la información suficiente que permite acercarnos en los avances de la caracterización del pensamiento combinatorio. Por otro lado, tenemos a los estudiantes de los cursos de Probabilidad y Estadística y Matemáticas Discretas, que hicieron parte del proceso como una muestra piloto utilizada para afinar los instrumentos, hasta obtener la versión final aplicada a la muestra real. Desde lo negativo se puede ver que el contenido de combinatoria en los cursos objetivo es muy básico, ya que solamente se tratan algunos tópicos de combinatoria enumerativa y que el tiempo destinado para su desarrollo no supera dos semanas de clase.

2.3. Componente metodológico: *Solución de Problemas*

Este componente se desarrolla a partir de una triangulación entre las teorías de solución de problemas propuestas por Polya (1965), Schoenfeld (1985, 1992) y Miguel de Guzmán (1985). Esta permitió consolidar parte de la metodología que está implícita en los instrumentos que se elaboraron para recoger la información, la que deja evidenciar el avance en la consolidación de las formas de entender a las formas de pensar y viceversa. Otra parte de la metodología se marca por los resultados metodológicos de la propuesta de Lakatos (1978). Además hicieron parte, como elementos metodológicos e interpretativos de los procesos y resultados obtenidos, algunas consideraciones hechas por Gowers (2000), en su trabajo “Dos Culturas Matemáticas”.

2.3.1. Comentarios generales sobre solución de problemas

Las bases modernas en solución de problemas tiene como exponente a George Polya (1970), quien se inquieta por los procesos que permiten la obtención de resultados matemáticos. El Método de Polya se orienta a solución de problemas matemáticos donde el problema conlleva a la realización de una pausa, seguido de una reflexión y con la posibilidad de realizar pasos novedosos para dar la respuesta, situación diferente a la presentada cuando se trabaja un ejercicio que requiere un procedimiento rutinario. La diferencia no es absoluta, se relaciona con el estadio mental de la persona que busca solución.

El mayor aporte es la presentación de cuatro fases que involucran a los estudiantes en las soluciones de problemas:

1. **Entender el problema:** ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Hay suficiente información? ¿Hay información extraña?

2. **Configurar un plan:** entorno al problema se busca trazar una ruta para abordarlo planteando preguntas como: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Conoce un problema relacionado con éste? , ¿Podría enunciar el problema de otra manera? ¿Ha empleado todos los datos?

De igual manera indica la presentación de una estrategia para hallar un final, entre las que plantea: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, solucionar un problema similar más simple, hacer una figura o un diagrama, trabajar hacia atrás, etc.

3. **Ejecutar el plan**: ¿Son correctos todos los pasos dados?

4. **Mirar hacia atrás:** ¿Puede verificar el resultado? ¿Puede verificar los razonamientos realizados? ¿Puede ver cómo extender su solución a un caso general?

Como complemento en la solución de problemas, A. Schoenfeld (1992) sugiere cinco dimensiones que intervienen directa, dinámica e inter-relacionadamente:

1. Dimensión cognitiva: base de conocimientos
2. Heurísticas: estrategias en la resolución de problemas
3. Dimensión metacognitiva: monitoreo y control (auto-regulación)
4. Dimensión afectiva: creencias y afectos
5. Práctica matemática

Los conocimientos y dominios que el individuo posea frente al ambiente matemático son de incidencia innegable para lograr la solución del problema. Es así que se maneja la auto-regulación en el trabajo como mecanismo de control que permite tomar parte frente a: ¿el qué?, ¿el cuándo? y ¿el cómo? usar una determinada estrategia o resultado matemático y por qué renunciar a un camino elegido.

De otro lado Miguel de Guzmán (1991), en su modelo para la solución de problemas, hace una propuesta con los siguientes componentes.

1. Familiarizarse con el problema: busca entender a fondo la situación, con tranquilidad trabajar al ritmo, perderle el miedo a la situación que se plantea.
2. Buscar estrategias: empezar por lo fácil, experimentar, hacer un esquema, una figura, un diagrama, elegir un lenguaje adecuado, una anotación apropiada, buscar un problema semejante, inducir, y suponer el problema resuelto.
3. Llevar adelante la estrategia: Seleccionar las mejores ideas que se te han ocurrido en la etapa anterior, manejar la flexibilidad, no perder el ánimo, no persistir en ideas que detienen el proceso, ¿Salió?, ¿seguro? Mirar a fondo la solución encontrada.
4. Examinar a fondo el camino seguido. ¿Cómo se ha llegado a la solución? ¿por qué no se ha llegado? Comprender si la solución encontrada funciona o no, y porqué.

Para encontrar una solución al problema, es importante tener claridad acerca del tipo de problema y a partir de éste determinar características precisas para dar solución a la situación. De Guzmán propone como tipos de problemas: de resolución gráfica, de ensayo-error, de razonamiento inverso, de organización de la información, de descomposición del problema, de simplificación y búsqueda de regularidades, de experimentación con la posible solución, de búsqueda de un contraejemplo, de reducción al absurdo, en otros.

Como se puede ver en esta descripción, los tres autores proponen un modelo homogéneo en su base estructural con la diferencia que los dos últimos hacen hincapié en la parte motivacional que debe tener el estudiante o la persona que se está enfrentando al problema.

Como el contexto en el cual se desarrolla esta investigación está dado sobre la base de un curso de solución de problemas, no se toma un autor como referente para este componente. En su defecto se toman los aportes de cada autor necesarios para coadyuvar al estudiante en la consecución de la solución a cada uno de los problemas que se le planteen durante el desarrollo del estudio.

2.3.2. El cuasiempirismo de Lakatos

Según Lakatos (1976) un programa de investigación no es más que un conjunto de reglas metodológicas, llamadas unas heurísticas positivas y otras heurísticas negativas, que definen cuáles son los caminos a seguir y cuáles los problemas a evitar para la elaboración de nuevas teorías, es decir, las rutas de investigación que deben ser evitadas.

De esta forma Lakatos en su programa definió tres esquemas básicos de explicación del conocimiento humano. El primero de ellos lo llamó "programa euclídeo", y lo definió como “un sistema deductivo en el que las proposiciones de la cúspide (axiomas) constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos), y se practican en esta cúspide inyecciones de valores de verdad infalibles, verdaderos, y que fluyan hacia abajo por los canales deductivos de valor de verdad (pruebas) e inunden todo el sistema” (Lakatos, 1978a, p. 17).

El segundo lo llamó “programa empirista”, definido como “un sistema deductivo si las proposiciones de la base (enunciados básicos) constan de términos perfectamente bien conocidos (términos empíricos) y existe una posibilidad de inyección de valores de verdad infalibles en esa base, tal que, si el valor de verdad es falso, fluye hacia arriba por los canales deductivos (explicaciones) e inunda todo el sistema (si el valor de verdad es verdadero, no existe ninguna corriente de valor de verdad en el sistema) (Lakatos, 1978a, p.18).

Y el tercero, el “programa inductivista”, “definido como un canal en el que la verdad fluyera desde los enunciados básicos hacia arriba, estableciendo así un principio lógico adicional, el principio de la retransmisión de la verdad. Con tal principio el inductivista debe estar capacitado para inundar con la verdad todo el sistema desde abajo. Esta teoría es consistente, pues todas las proposiciones que ocurren en ella son verdaderas”. (Lakatos, 1978a, p.21).

Por otro lado Lakatos (1978c) dice “me ha enseñado algo importante: es incorrecto afirmar que el objetivo de un "problema (en matemática) a demostrar" es o bien mostrar concluyentemente que es verdadera determinada afirmación claramente enunciada, o bien mostrar que es falsa. El objetivo real de un "problema a demostrar" debería ser el de mejorar la conjetura ingenua original para hacerla un teorema” (p.58).

Lakatos afirma que los teoremas, axiomas y leyes que conforman las matemáticas no surgieron espontáneamente ni mucho menos adornados con el conjunto de cuidadosos detalles que se presentan en las aulas a los estudiantes. La génesis de los postulados fue una idea o conjetura propuesta como solución a algún problema en particular (Lakatos, 1978c).

En este sentido para Lakatos las matemáticas son producto de una cuidadosa y en ciertos casos prolongada evolución como si tuviese vida propia. El aprendizaje de las matemáticas parte de una conjetura, creada o evidenciada durante el proceso de dar solución a un problema. Esta conjetura se somete a la prueba mediante experimentación, dando lugar a ideas (formas de entender) cada vez más elaboradas, hasta que ascienden al rango de la formalidad matemática (formas de pensar) mediante un lema, corolario o teorema que hará parte del nuevo conocimiento interiorizado. Es de esta manera cómo se aprenden las matemáticas y se lleva a cabo la actividad matemática.

Los anteriores apartes que se han tomado de la obra de Lakatos han sido las directrices teóricas tomadas para elaborar parte de la metodología de trabajo con los estudiantes en el aula de clase. Sobre esta base se formularon los problemas de la parte tres de las actividades (explicación que se dará en el siguiente capítulo) con las cuales se pretendió propiciar contexto para hacer posible la heurística de Lakatos y el espacio para mejorar la conjetura matemática ingenua inicial –como dice Lakatos- en la que podemos incluir la construcción de pruebas para el establecimiento de conjeturas, la presentación de contraejemplos locales o globales (sobre la base de los problemas propuestos a los estudiantes) que falseen las pruebas o la conjetura misma, y el ajuste de las pruebas y conjeturas a los contraejemplos propuestos al mismo tiempo que se desarrolle el segundo programa, el programa empirista.

2.3.3. Two Cultures of Mathematics[17]

Este documento es construido a partir de libro "Las dos culturas", de C. P. Snow, y la experiencia del autor en la enseñanza e investigación en matemáticas, especialmente en combinatoria (tomada en sentido amplia). Se hace referencia a esta publicación ya que el autor considera la existencia de dos culturas en matemáticas, una en la que los matemáticos consideran que su objetivo central es resolver problemas, y en la otra en que su objetivo prioritario es la construcción y comprensión de las teorías, dando eco a las formas de pensar y las formas de entender que señala Harel. Al mismo tiempo propone que si no se sabe de qué lado estar sería bueno tener en cuenta las siguientes declaraciones: *i)* el fin de resolver problemas es entender más y mejor las matemáticas, o *ii)* el fin de entender las matemáticas es llegar a ser más capaces de resolver problemas. Pero para él se debe estar de las dos partes ya que su clasificación de los matemáticos es teórico-constructores y solucionadores de problemas.

En consecuencia se pregunta ¿Por qué los temas de resolución de problemas son menos apreciados que los teóricos?, que generaliza en preguntarse ¿Qué hace que una sola parte de las matemáticas sea

[17] Gowers, W. (2000).*Two Cultures of Mathematics*. Disponible en URL: https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf. [Consulta 24 de septiembre de 2014]

más interesante que otra?, concluye al respecto, aceptando la observación de Sir Michael Attiyah, que los procesos de abstracción y generalización son muy importantes como medio para dar sentido a la gran masa de datos en bruto existentes, por lo tanto los resultados que perdurarán en el tiempo son aquellos que se pueden organizar de forma coherente y compilada, para ser explicados a las siguientes generaciones, teniendo en cuenta que algunos de ellos resolvieron grandes problemas en la historia, pero si sus soportes teóricos no encajan en una organización se dejarán de lado, y es probable que no se estudien.

Este es el caso de la combinatoria, que ofrece un alto número y diversidad de problemas con resultados que no han sido organizados en teorías, por lo que parece estar en desventaja con otras ramas de la matemática, ya que si los procesos de generalización y abstracción son de vital importancia en matemáticas, surge el interrogante de ¿cómo se puede transmitir y ser recordado este conocimiento por generaciones futuras? y es aquí donde se hace importante y prioritario tener la capacidad de solucionar problemas combinatorios, como estrategia que permitirá prevalecer su necesidad y estudio en el tiempo, afirmando que "las ideas importantes en combinatoria no suelen aparecer en teoremas, sino como principios generales con una alta aplicabilidad". Un ejemplo de ello es el Teorema de Ramsey, el cual es presentado por el autor como un modelo en el cual no se necesita dedicar largas horas de estudio a una teoría, para poder comprender lo que afirma este teorema, y que su demostración se hace prácticamente desde los primeros principios en que fue propuesto, por lo que no requiere del dominio de largas cadenas de teoremas de una teoría para comprender su demostración, o para proponer una nueva demostración a este teorema.

En general esta publicación sirve como reflexión acerca de la necesidad e importancia de trabajar en la enseñanza de la combinatoria a través la solución de problemas y ver su implicación en las diferentes ramas de la matemática, que es uno de los propósitos en la esta investigación. Claro está el estudio se aplicará en un nivel básico, para lo que se retoman las consideraciones que propone el autor, sobre las diferentes maneras que una rama de las matemáticas puede ser beneficiosa sobre otra u otras. Al respecto dice: “como una zona A, puede ayudar a la zona B:

(i) Un teorema de A tiene una consecuencia inmediata y útil en B.

(ii) Un teorema de A tiene una consecuencia en B, pero se necesita un poco de trabajo para demostrarlo.

(iii) Un teorema de A se parece a una pregunta en B, lo suficientemente cerca para permitir imitar o adaptarla en A, y responder a la pregunta en B.

(iv) Con el fin de resolver un problema en A, uno es llevado a desarrollar herramientas en B que son de interés independiente.

(v) La zona B contiene las definiciones que se asemejan a las de la zona A. La zona A, a continuación, sugiere fructíferas formas de organizar y hacer frente a los resultados y los problemas en B.

(vi) Si uno gana una experiencia en la zona A, entonces uno recoge ciertos hábitos de pensamiento que le permiten a uno hacer una contribución significativa a la zona B.

(vii) La zona A está suficientemente cerca en espíritu a la zona B, que cualquiera que es bueno en el área A es probable que sea bueno en la zona B.”[18]

Estas premisas se verán reflejadas en las *formas de entender y formas de pensar* reveladas en los diferentes problemas y conceptos combinatorios, con los cuales se llega a la caracterización del pensamiento combinatorio como una estrategia usada en la solución de problemas, siendo el corazón de nuestro componente didáctico.

---

[18] Ibíd

2.4. Componente cognitivo: *Teorías del Desarrollo Cognitivo*

Este componente se soporta sobre aportes teóricos pertinentes para nuestra investigación, tomados de las teorías del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de autores como Piaget y Fischbein. Estos aportes son utilizados para interpretar teóricamente los resultados obtenidos en la investigación desde el punto de vista de la formación del conocimiento y la consolidación de las formas de entender y de pensar.

Como la investigación gira alrededor de la caracterización del pensamiento, fue necesario conocer los comportamientos y esquemas cognitivos desde el punto de vista teórico, ya que a partir de estas conclusiones teóricas se da el soporte científico de la caracterización que se construye, con referencia al pensamiento combinatorio. Por tal motivo de cada autor y su teoría cognitiva se toma lo referente al desarrollo, construcción y formación del pensamiento, es decir, cómo se pueden dar las *formas de entender y formas de pensar* en los seres humanos y sus manifestaciones desde el punto de vista del pensamiento matemático, y en especial lo que atañe al pensamiento combinatorio.

A lo largo de la investigación se hace referencia al *desarrollo cognitivo*, por tal motivo asumiremos como definición la dada por Rafael (2008), quien dice que "se entiende por desarrollo cognitivo al conjunto de transformaciones que se producen en las características y capacidades del pensamiento en el transcurso de la vida, especialmente durante el período del desarrollo, y por el cual aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar, comprender y manejarse en la realidad".

2.4.1. Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget

En su trabajo, Piaget estudia cómo los seres humanos adquieren el conocimiento en las diferentes etapas de su desarrollo biológico. Esta tarea la realiza desde tres escenarios, uno de los cuales es la *psicología experimental*, al enfocar su trabajo en la observación y diálogo con niños para entender y describir cómo van construyendo su conocimiento, mediante la adaptación de la inteligencia, durante el proceso de construir progresivamente sus propias estructuras a partir de las respuestas y soluciones dadas a diferentes situaciones planteadas que dependen de la asimilación de la información adquirida mediante la experiencia. Un segundo escenario es la *epistemología*, a través de la cual explica cómo es, y cómo se da la relación entre el sujeto y el objeto, mediante el establecimiento de relaciones cognitivas construidas progresivamente a partir de la interacción sujeto-contexto. El tercer escenario es el de la *biología*, en la cual busca la explicación de cómo es, y cómo se da la relación de adaptación del sujeto-objeto, es decir cómo evolucionan las estructuras cognitivas con relación al contexto en el que se desarrolla el sujeto. A partir de la relación entre lo innato y lo adquirido Piaget consideró cuatro factores que contribuyen al desarrollo del conocimiento: 1) la maduración biológica; 2) la influencia del ambiente (experiencia); 3) la transmisión social (educación); 4) y el equilibrio progresivo, formado por dos características fundamentales para su funcionamiento intelectual, *"organización y adaptación"*, las cuales son las *funciones invariables* que rigen el desarrollo cognitivo.

Sobre esta categorización describió el factor cuatro, "*el equilibrio, a partir de la organización y la adaptación"*, que implícitamente trae la dependencia del factor dos y tres, *"la experiencia y la educación"*, ya que la adaptación implica los procesos de *"asimilación y acomodación"*, el primero de los cuales se da cuando se va de la experiencia a la mente y el segundo de la mente a una nueva experiencia, logrando así progresivamente la reorganización de las estructuras cognitivas, dándose un estado de equilibrio relativo en la adaptación del nuevo conocimiento.

Piaget observó que el desarrollo cognitivo se manifiesta con un cambio en las estructuras del conocimiento, las cuales se organizan y reorganizan en *esquemas*, los cuales son conjuntos de acciones físicas, de operaciones mentales, de conceptos o teorías a través de los cuales *organizamos y adaptamos* la información adquirida en la interacción con el contexto. Esta adaptación implica hacer el proceso de *asimilación*, que consiste en hacer encajar la información nueva sobre los esquemas ya existentes, lográndose un *equilibrio* si el encaje es perfecto, o de lo contrario será un *equilibrio progresivo*, que implicará hacer cambios al nuevo esquema o hacer variaciones a los ya existentes, hasta lograr el equilibrio. Este proceso se conoce como la *acomodación*, dentro de la adaptación, es decir, este nuevo esquema se forma por las modificaciones causadas por los elementos que se asimilan.

En la teoría de Piaget, el estadio de operaciones formales, que comprende las edades entre los 11 o 12 años en adelante, refiere a una época para la cual el niño ya cuenta con el estadio de operaciones concretas y comienza a formarse un esquema de la lógica formal e ideas abstractas, haciendo uso de los elementos asimilados en el estadio anterior, que usará como herramienta cognitiva para solucionar problemas que implican efectuar relaciones conceptuales, y organizar y clasificar los conocimientos adquiridos. Este estadio se caracterizará por tener los esquemas *de la lógica proposicional, del razonamiento propositivo, del razonamiento científico, del razonamiento combinatorio y el razonamiento sobre las probabilidades y proporciones.*

El esquema del razonamiento combinatorio le dará la capacidad de pensar en las múltiples consecuencias y sus combinaciones sobre una misma causa.

Además en otro de los trabajos realizados por Piaget e Inhelder (1955) se afirma que, durante la etapa de las operaciones formales, el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos. Piaget también relaciona las etapas en las que se manifiestan las operaciones combinatorias

- **Combinaciones.**

El estadio I llega alrededor de los 7 años, en ella el niño construye combinaciones por exploración natural o en forma empírica; sin generar un procedimiento metódico que establezca todos los casos existentes de combinaciones. El estadio II, se presenta alrededor de los 8 a 11 años. Se caracteriza por la búsqueda de un procedimiento organizado para establecer parejas, abandonando la organización de parejas aisladas; estos hallazgos no crean resultados exitosos y llevan al niño a sus métodos empíricos. El estadio III, se da alrededor de los 11 a 12 años. Es el momento donde el niño tiene hallazgos de procedimientos sistemáticos exitosos. El niño logra incorporar dos operaciones: seriación y correspondencia, llegando a encontrar todas las combinaciones posibles de n elementos tomados de dos en dos.

- **Permutaciones**

De cualquier modo, es clave comprender que se pueden conseguir un gran número de permutaciones a partir de un número de elementos muy pequeño; sin pretenderse que el niño encuentre todas las permutaciones ni tampoco que se llegue a deducciones de una expresión matemática. De estas circunstancias nace el hecho de pretender que los niños consigan un procedimiento para realizar todas las permutaciones posibles de un número pequeño de objetos y luego se pase a hacer permutaciones de 2, 3 y 4 objetos de colores sucesivos. Para simplificar se puede decir que los niños en el estadio I no crean procedimientos determinantes para encontrar todas las permutaciones, en el estadio II descubren métodos no formalmente estructurados y es en el estadio III que se va alcanzando un descubrimiento progresivo de la ley de formación de las permutaciones.

- **Variaciones**

Precisa advertir que para Piaget sólo es en el estadio III es que se llega a un procedimiento sistemático y a una comprensión de esta operación combinatoria. Piaget considera a las variaciones como la síntesis de las combinaciones y permutaciones. En las variaciones de n elementos tomados de m en m hay un primer paso de obtención de grupos de tamaño m y, a continuación, las posibles reordenaciones dentro de cada uno de ellos (Piaget e Inhelder, 1955).

Por esta razón se puede afirmar que es en el período de las operaciones formales cuando el niño consigue la capacidad de usar procedimientos sistemáticos en pro de la obtención de combinaciones, permutaciones y variaciones de un determinado número de elementos. Siendo este el momento en que se adquiere la comprensión por parte del niño de las operaciones combinatorias (Piaget e Inhelder, 1955).

Esta conceptualización de la parte cognitiva implícita en la investigación permitirá tener un fundamento para explicar y describir los razonamientos que harán los estudiantes durante el desarrollo de la misma, lo que dará un fundamento teórico para expresar los resultados investigativos. De igual manera se tendrá en cuenta que durante las operaciones de tipo formal se presenta un razonamiento lógico, sistemático y complejo, se empieza a utilizar símbolos para representar ideas y a partir de ellos hacer operaciones mentales.

2.4.2. Esquemas e intuiciones en el razonamiento combinatorio: Fischbein & Grossman

Se encuentra que la intuición es aceptada, pero también rechazada, como fuente del verdadero conocimiento porque puede ser engañosa; sin embargo, es tenida en cuenta en la fundamentación de las ciencias y las matemáticas porque genera influencia sobre creencias y procesos de desarrollo de la inteligencia. Sin embargo, para Fischbein (1987) existen otros términos relacionados que las describe como sentido común, entendimiento, comprensión, creencia o conjetura.

Las investigaciones de Fischbein y Grossman se centran en las relaciones entre las intuiciones y los esquemas; consideradas como categorías mentales que poseen características comunes como flexibilidad de adaptación, consistencia interna y generalidad.

Las intuiciones se entienden como cogniciones globales que poseen esquemas estructurados. En la presente investigación se ha tenido en cuenta esta hipótesis con respecto a los problemas de combinatoria (permutaciones, arreglos con y sin reemplazo, combinaciones).

Las intuiciones pueden ser expuestas como conjeturas y pueden ser manipuladas por los esquemas; las respuestas dadas por los estudiantes representan esquemas mentales, que se utilizan para abordar problemas nuevos. Fischbein y Grossman presentan en su hipótesis de investigación cómo las intuiciones se basan en esquemas. Los esquemas son sistemas organizados de interpretaciones y procedimientos secuenciales que expresan conjuntamente un cierto nivel de maduración mental y una cantidad suficiente de experiencia, mostrándose como sistemas estables y flexibles que manifiestan formas de interpretar y resolver situaciones. Esto es de interés para analizar las primeras formas de entender que revelan los estudiantes sujetos de la presente investigación al enfrentar problemas de combinatoria anteriormente desconocidos para ellos.

Los problemas combinatorios también generan especial atención porque aparecen frecuentemente en la cotidianidad; para Piaget e Inhelder (1958) las capacidades combinatorias constituyen esquemas de base, alcanzando la madurez durante la etapa de las operaciones formales. La naturaleza proposicional del razonamiento formal se basa en la capacidad combinatoria del adolescente.

En la investigación de las intuiciones combinatorias se presentan tres categorías básicas de datos: la conjetura espontánea, la solución matemática correcta y justificación conceptual a posteriori a su respuesta. La contrastación de los datos en cada categoría da una mayor información acerca de los mecanismos tácitos de intuiciones en general y de las intuiciones combinatorias específicas donde se ven implicadas estructuras generales y específicas. De acuerdo con Piaget, el sistema combinatorio es un esquema operacional con implicaciones de largo alcance en el comportamiento, siendo la experiencia un factor determinante en la formación de intuiciones y permitiendo con el tiempo la construcción de un sistema estable de representaciones estructuradas. De acuerdo a Fischbein, (1987), “la fuente básica del conocimiento intuitivo es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes”.

Conclusiones del Capítulo 2

El marco teórico expuesto en este capítulo se fundamentó en la postura de considerar la «EM» como un universo formado por cuatro componentes, uno de educación matemática, uno disciplinar, uno metodológico y uno cognitivo sobre la base de los cuales se desarrolló la propuesta metodológica y se realizó el análisis y discusión de los resultados.

De este modo para el componente de educación matemática se consideró el trabajo de Harel (2008 a y b), quien plantea que el fin último de la educación matemática es desarrollar el razonamiento matemático del estudiante el cual se compone de formas de entender y formas de pensar. Aquí se retomaron algunos elementos de esta teoría, y se modificaron o extendieron otros. Por otro lado, se tuvieron en cuenta además algunas de las consideraciones dadas por Timothy Gowers (2000) en su trabajo *Dos Culturas Matemáticas*, tomadas como elementos metodológicos e interpretativos de los procesos y resultados obtenidos. El componente metodológico fue plasmado desde una experiencia de clase, enmarcándose en la heurística de Lakatos y la propuesta de Polya sobre cómo plantear y resolver problemas. El componente cognitivo se basó en la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget y la teoría de los esquemas de Fischbein.

CAPITULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACION

Para llevar a cabo la investigación, se tuvo en cuenta dos hilos conductores: el primero fue la línea de la metodología de investigación científica, la cual permitió organizar y orientar el trabajo investigativo. El segundo fue la línea metodológica de la investigación en didáctica que permitió desarrollar el trabajo con los estudiantes en el aula de clase, la cual se fundamenta directamente en los elementos implícitos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.1. Metodología de investigación científica

Dado el carácter del problema, del objetivo de investigación y del resultado esperado, se determinó que el tipo de metodología de investigación científica más apropiado a seguir era la metodología de investigación cualitativa. Para ello se siguió lo planteado y expuesto en la metodología de la investigación de Hernández Sampieri et al (2014).

En ella se sugiere desarrollar el proyecto a partir de fases no lineales de trabajo, sino en fases de tipo iterativo o recurrente, sugerencia que se asumió, permitiendo conformar la hoja de ruta para orientar y consolidar la investigación bajo un cronograma de ejecución. Al mismo tiempo el desarrollo y consolidación de estas fases se convirtieron en los capítulos de este documento y sus resultados las conclusiones de cada capítulo. Para tal fin se establecieron las siguientes fases:

Fase 1. Concebir la idea de investigación. Esta idea nace durante el desarrollo del Seminario de Pensamiento Matemático, asignatura de este programa de doctorado, durante el primer semestre de 2013. La maduración de esta idea correspondió al desarrollo de esta fase, y su producto se utilizó como fundamento para la siguiente fase.

Fase 2. Planteamiento del problema de investigación. En esta fase se construyeron y definieron: i) el problema de investigación, ii) el objeto de estudio, iii) el objetivo general, iv) las preguntas de investigación, v) la justificación y viabilidad, vi) el contexto, vii) campo de acción y unidad de análisis, aspectos que ya han sido presentados y tratados en la introducción de este documento.

Sobre la base de las temáticas halladas en los resultados de investigaciones ya realizadas, se identificó un campo poco tocado y así se organizó y propuso la investigación a partir del problema de investigación expuesto en la introducción. Éste, en síntesis, busca conocer las características del pensamiento combinatorio, y así abrir un espacio para iniciar la consolidación de este tipo de pensamiento matemático.

Interiorizado el problema, se entendió que el resultado esperado de la investigación era de orden conceptual descriptivo. Es decir, éste era un problema que requería de una indagación profunda para apropiarse de mayor conocimiento y evidencias más sólidas, que deberían permitir su comprensión, adquiriendo de esta forma una base que posibilitara dar respuesta al interrogante planteado.

De esta manera para hacer realidad la investigación y tomar un horizonte que permitiera dar solución parcial o total al problema planteado se fijó el objetivo general. A partir del cual se orientó la caracterización, entendiéndose ésta como la descripción de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias, adquiridas o desarrolladas por los estudiantes, y su consolidación en la construcción del significado de los conceptos de conteo.

El proceso se desarrolló en el curso de Solución de Problemas para las carreras de ingeniería en la Universidad Antonio Nariño, Sede Sur, de Bogotá, siendo éste la muestra objetivo utilizada. En el curso una de las unidades temáticas de desarrollo es la combinatoria y específicamente las técnicas de conteo (ver Anexo 1). Este espacio se modificó para desarrollar los principios fundamentales de conteo constituyéndose en la unidad de análisis. Al mismo tiempo el curso cumplía con el otro elemento necesario para el desarrollo de la investigación, la cual requería que las clases se diesen en el contexto de solución de problemas, siendo éste la base de la metodología implementada en el desarrollo de este curso.

Para tal fin se formularon las cinco preguntas científicas dadas en la introducción, permitiendo direccionar la investigación, puesto que generaron las tareas de la misma, al igual que su planificación y cronograma de ejecución. El cronograma se construyó sobre la base de las fases de la metodología de investigación científica definida para este caso, y de este modo se precisó el mecanismo que permitió ejecutar las tareas propuestas y entrelazar los resultados obtenidos en cada una de ellas, alcanzándose el objetivo propuesto en la investigación.

El producto de esta fase fue el insumo para organizar la revisión del estado del arte, producto que se presentó en el Capítulo 1 de este documento. A su vez está revisión permitió elaborar la respuesta a la pregunta **P1**, fundamentada a su vez en los resultados de la revisión de los antecedentes del problema de investigación. Además, como parte de esta revisión se dejaron las bases para iniciar la siguiente fase.

Fase 3. Construcción del marco teórico y referencial. Los estudios iniciados con la revisión del estado del arte, permitieron delimitar y construir el marco teórico y referencial, así como la fundamentación del marco metodológico con el cual se realizó la investigación, resultado que conformó el cuerpo del Capítulo 2 de este documento.

El resultado de esta fundamentación metodológica se consolidó en la creación y el diseño del modelo metodológico «I.C.O.R.», propuesta que en adelante se asumió como el eje de la metodología, de la recolección de la información y del análisis de los resultados.

Cabe señalar que el enfoque dado al marco teórico en sí respondió a los cuatro componentes del modelo metodológico propuesto que ya han sido precisados.

Fase 4. Descripción metodológica. Esta fase se desarrolló sobre las premisas de la metodología de la investigación científica con enfoque cualitativo y la metodología de la investigación en didáctica basada en el proceder del modelo metodológico «I.C.O.R.» construido para tal fin. Ellas permitieron construir el diseño experimental, los instrumentos utilizados para la recolección de la información, el diseño de las actividades y la proyección de la implementación en el aula. El desarrollo y los resultados de esta fase corresponden al Capítulo 3 de este documento.

Fase 5. Análisis de resultados. En esta fase se hizo la revisión de la información y datos recolectados durante la aplicación y desarrollo de las actividades construidas para tal fin, proceso que se realizó con la implementación de la unidad didáctica, siendo ésta el instrumento diseñado para generar y recoger la información en esta investigación. El análisis de cada una de las actividades se consignó en las relatorías de clase, y a partir de éstas se definieron y consolidaron las categorías y variables de análisis utilizadas para determinar los resultados de la investigación utilizados para construir las respuestas a las preguntas **P2, P3** y **P4** de investigación. Los resultados de esta fase constituyen el Capítulo 4 de este documento.

Fase 6. Discusión de los resultados. En esta fase se dio respuesta a las preguntas de investigación **P2, P3, P4** y **P5**, sobre la base del análisis de los resultados obtenidos en la fase anterior y las bases teóricas definidas para tal propósito. Así se proporcionó un significado propio al entendimiento del problema planteado, significado que repercutió directamente sobre las conclusiones, las recomendaciones y aportes que surgieron de la investigación. Así se da una respuesta clara, objetiva y contundente sobre el objetivo y preguntas de investigación. De igual manera se dejaron abiertas nuevas preguntas de investigación para desarrollar en próximos trabajos. Los resultados de esta fase se presentan en el Capítulo 5 de este documento.

Fase 7. Organización del documento. Esta fase se desarrolló a la par de las anteriores, terminándose de organizar en este documento las tablas (contenido general, índice de tablas, gráficos y anexos), las referencias bibliográficas y los anexos.

3.2. Metodología de la investigación en el aula

Como recurso para llevar a cabo y alcanzar un control sobre la interacción del profesor y el estudiante durante la ejecución del proceso enseñanza y aprendizaje, está la metodología de la investigación referida a la didáctica. Para formalizar este recurso se creó y diseñó la propuesta metodológica denominada "Modelo Metodológico «I.C.O.R.»".

3.2.1. Modelo metodológico «I.C.O.R.»

La postura que permitió fundamentar el modelo metodológico fue considerar la investigación en educación matemática «EM» como un universo formado por cuatro componentes: uno de educación matemática, uno disciplinar, uno metodológico y otro cognitivo. Es oportuno ahora indicar que estos componentes se articularon y estructuraron bajo dos directrices, una de ellas es la ciencia del diseño y la otra es el diseño instruccional.

La primera fue tratada por Lesh y Sriraman (2005) en la reconceptualización de la educación matemática como una ciencia del diseño en la cual consideran que en la ciencia del diseño existe un *investigador*, un *sujeto* (éste está enfocado a tratar por lo menos un elemento de la «EM» (las matemáticas, los estudiantes, los profesores, las instituciones, las sociedades y las culturas) o la relación entre ellos), un *objeto investigado* (el cual debe responder y describir el cuándo, el dónde, el por qué, el cómo y el a quién) y *un objetivo de investigación* (instrumental o conceptual). De modo que esta directriz se utilizó para organizar e interrelacionar longitudinalmente cada uno de los componentes que hacen parte de cada uno de los módulos de la estructura del modelo.

La segunda está dada por la adaptación de las fases del diseño instruccional[19], tomadas de las cinco fases del modelo genérico de procesos de diseño instruccional ADDIE, de sus siglas en ingles *Analysis* (análisis), *Design* (diseño), *Development* (desarrollo), *Implementation* (implementación) y *Evaluation*

[19] Williams, P. eat, *Fundamentos de diseño técnico pedagógico en el aprendizaje.* Disponible en URL: http://aulavirtualkamn.wikispaces.com/file/view/2.+MODELOS+DE+DISE%C3%91O+INSTRUCCIONAL.pdf [Consulta 2 de octubre de 2015]

(evaluación), implementadas para dar la secuencialidad transversal en la construcción e implementación de cada uno de los módulos que componen el modelo.

La estructura del modelo metodológico inicia con la definición del primer módulo, el módulo de las *bases generales*, como se muestra en la Figura 5, el cual es un *componente invariante* de la estructura general del modelo, quedando éste conformado por los cuatro componentes mencionados anteriormente.

	¿Para qué?	¿El qué?	¿El cómo?	¿A quién?
Módulo 1 Bases Generales	EDUCACION MATEMATICA	DISCIPLINAR	METODOLOGICO	COGNITIVO

Figura 5. Módulo 1 de la estructura del modelo metodológico

El primer componente responde al *¿para qué*? o a el porqué del objeto investigado. Este da la directriz para definir la finalidad y el fundamento en el desarrollo e implementación del modelo, aplicado sobre un sujeto. El segundo componente concierne a un campo o rama del saber de las matemáticas según la clasificación que históricamente se le han dado, proporcionando el cuerpo a la intencionalidad, la cual responde a *¿el qué*? del objeto investigado. El tercer componente recoge el método o heurística *¿el cómo*?, el cual permite definir y construir los instrumentos apropiados para el contexto del objeto y sujeto investigado. El cuarto componente recae sobre el sujeto, siendo éste el facilitador o participante sobre el cual se indagan sus opiniones, sus saberes y su subjetividad frente al fenómeno en estudio según sea el objetivo de investigación, el ¿a quién?. (Frente a este último en cada caso se señalará un aspecto cognitivo o del aprendizaje del sujeto.)

Establecidas las bases generales del modelo, éstas se irán delimitando de forma progresiva en dos sentidos. Un primer sentido es el transversal, guiado por las fases del diseño instruccional adaptadas al modelo lo cual permite concretar y consolidar un enfoque de lo general a lo particular sobre el objeto de estudio. El segundo sentido es el longitudinal, que estará direccionado por los componentes del módulo de las bases generales (ver Figura 6), que se irán construyendo de acuerdo al objetivo de cada una de la fases transversales. De modo que este proceso implica el afianzamiento del desarrollo integral y coherente de los nuevos módulos que completarán la estructura del modelo. Cada uno de éstos yace como el producto del diseño y la ejecución de cada una de las fases.

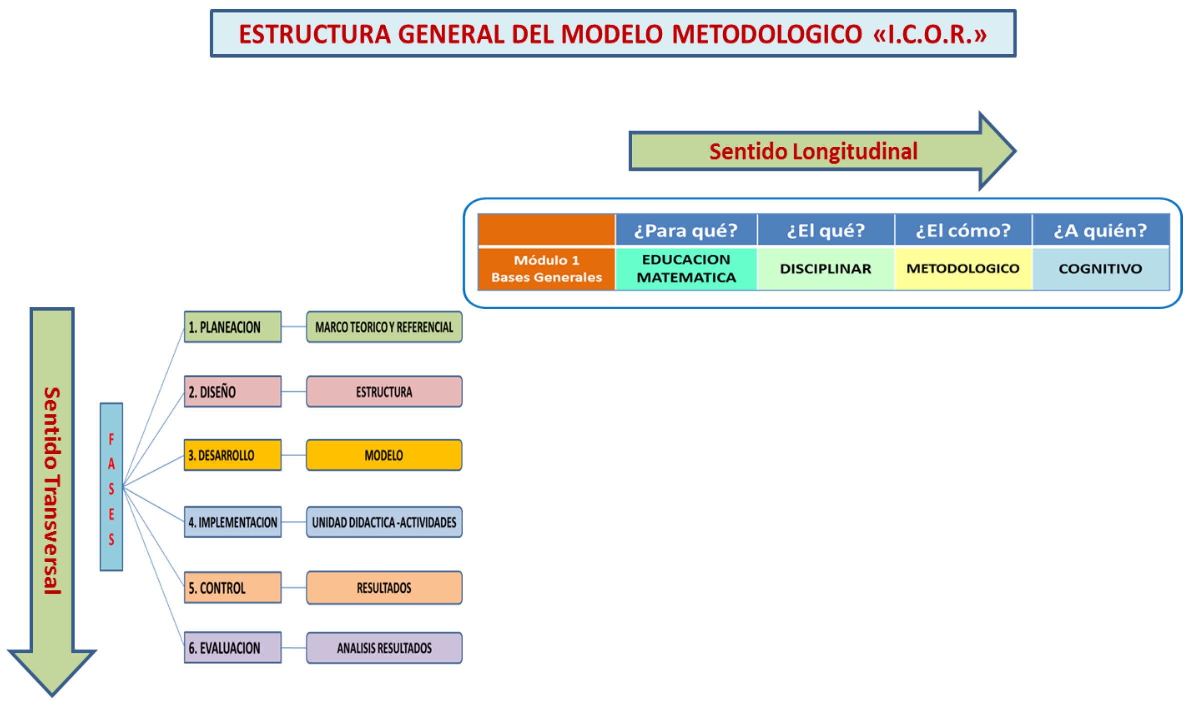


Figura 6. Estructura general del Modelo Metodológico[20]

Es de aclarar que para ejecutar la propuesta metodológica e iniciar un proceso de delimitación del problema se debe tener reconocimiento, claridad y dominio por parte del investigador en dos aspectos principalmente.

Un primer aspecto son los objetivos de la «EM» y las acciones que éstos demandan para alcanzar su finalidad, lo cual conduce a formular la primera pregunta ¿Cuáles son los objetivos de la educación matemática? Soportada esta respuesta, se debe tomar apropiación de uno de estos objetivos, convirtiéndose éste en el eje conductor del primer componente de la estructura del modelo (componente «EM»). El segundo aspecto es el campo del saber de las matemáticas de interés (componente

[20] Elaboración propia

disciplinar). Ahora se muestra la construcción de los nuevos módulos de una forma general, siguiendo los dos sentidos propuestos.

La primera fase, la fase de análisis o fase de planeación, aportó a la investigación la revisión del *estado del arte* y al modelo metodológico la construcción del segundo módulo, el módulo de las *bases primarias* correspondientes al *marco teórico y referencial*, como se puede ver en la Figura 7.

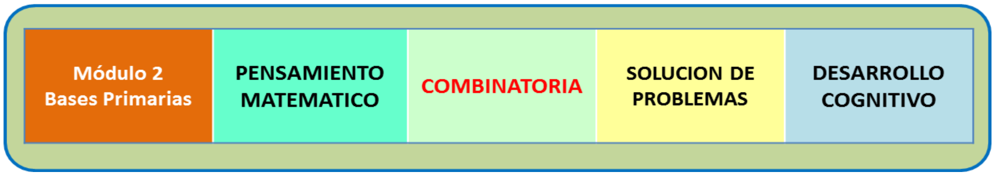


Figura 7. Módulo 2 de la estructura del modelo metodológico

Este módulo será el referente para soportar la solución del problema de investigación debidamente establecido después de hacer un análisis de las necesidades, la intencionalidad, los insumos y los recursos. Una vez determinados los criterios y líneas de planeación según el objeto de investigación, éste permitirá definir el objetivo de investigación y su contexto según el sujeto de trabajo seleccionado, al igual que el campo de acción y su respectiva unidad de análisis.

Como se puede ver, en esta fase se requiere tomar posición sobre un objetivo de la educación matemática que contenga al objeto de estudio y sobre un campo del saber matemático que definirá el insumo del objeto de estudio. La visión global sobre estos dos aspectos permitirá identificar y establecer la "acción" a estudiar, acción que permitirá formular las preguntas integradoras del sentido longitudinal.

Los resultados de la planeación constituyeron la base para iniciar la segunda fase, la fase del diseño. El producto de esta fase sobre el modelo es el tercer módulo, el módulo de las *bases teóricas*, como se muestra en la Figura 8.

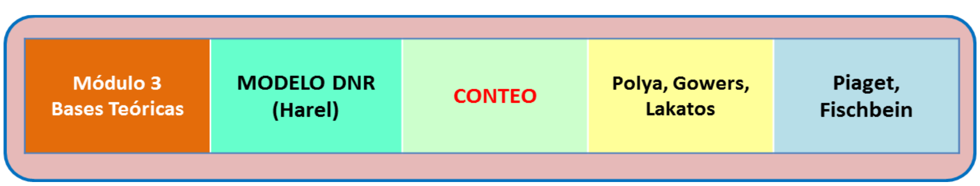


Figura 8. Módulo 3 de la estructura del modelo metodológico

El desarrollo de este módulo generó la *estructura* teórica y referencial requerida en cada componente de forma particular para dar alcance al objetivo de investigación propuesto. Estas bases teóricas son de carácter específico, ya que sobre ellas se dio el fundamento teórico, para argumentar y sustentar las respuestas a las preguntas formuladas en la fase de planeación.

Luego se continuó con la tercera fase, la fase de desarrollo. Esta dio como resultado el cuarto módulo, el módulo del *modelo* «I.C.O.R.» tal como se presenta en la Figura 9.

Figura 9. Módulo 4 de la estructura del modelo metodológico

Para la estructura general del modelo metodológico, ésta es la fase más importante, ya que es la columna que direccionará y transversalizará toda la propuesta desarrollada a través del modelo metodológico «I.C.O.R.», razón por la cual se dio a este módulo el carácter de *componente invariante*. Es así como el modelo «I.C.O.R.» se consolidó dentro de la estructura general dada en el primer módulo, y sus etapas se desarrollaron sobre el marco teórico construido en el tercer módulo.

Para el modelo «I.C.O.R.» en el componente de Educación Matemática se ubican la «C» -*Causa-Consecuencia*- en el marco de ver y evidenciar la relación entre las formas de entender y las formas de pensar matemáticamente, y viceversa. En el componente disciplinar está la «I» -*Iniciativa-Interiorización*- correspondiente a los problemas diseñados o adaptados para responder a la intencionalidad. Estos a su vez contendrán de manera implícita los conceptos asociados al campo disciplinar de investigación, convirtiéndose a la vez en el pretexto para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este proceso se espera se dé la apropiación conceptual o interiorización. En el componente metodológico se ubica la «R», -*Resultado-Réplica-,* asociada a los procesos y heurísticas utilizados en la solución de los problemas. Estos se alcanzarán por completo en el momento en que los sujetos evidencien su capacidad para abordar, interpretar y solucionar los diferentes problemas que les sean presentados, escenario que implicará el desarrollo del modelo en los dos sentidos propuestos. En el componente cognitivo se encuentra la «O» -*Organización-Orientación*-, acciones que permitirán la construcción y consolidación de los nuevos conocimientos que permitirán la reproducción y construcción de nuevos significados de los conceptos, convirtiéndose éstos en los nuevos saberes. Como es natural estos son procesos que se desarrollan de forma individual dentro de la cognición de cada uno de los sujetos involucrados de forma directa con la investigación. Lo anterior deja ver que el nombre del modelo «I.C.O.R.» es una consecuencia directa de la relación inherente entre las acciones que permiten el enlace longitudinal de los componentes estructurales del modelo metodológico, siendo su proceder la esencia de la metodología.

El proceder metodológico del modelo «I.C.O.R.» inicia con la determinación de la *integridad matemática* por parte del profesor, lo cual le permitirá diseñar la adecuada y pertinente *iniciativa* «I» (en términos del DNR, la necesidad (N)). Estas situaciones serán los problemas matemáticos y/o de contexto de carácter no rutinario (retadores), que se propondrán a los estudiantes como primera medida para *iniciar* y activar el proceso de *razonamiento* en ellos. Al mismo tiempo crearán en el estudiante la necesidad de iniciar la búsqueda de su solución o de una estrategia para conseguirla generando en él sus primeras *acciones mentales* frente a la interpretación dada a los datos e información contenida en la iniciativa.

La inferencia sobre estas acciones mentales serán la *Causa,* «C» de los primeros indicios de entendimiento (en términos del DNR, *las formas de entender* «FE»), dándose y produciéndose esta interpretación de forma natural o intuitiva basada en alguna creencia frente al concepto implícito en la solución o por la experiencia del estudiante con un conocimiento previo dentro del objeto de estudio o en otra área de las matemáticas.

Al mismo tiempo estas formas de entendimiento requieren de unos puentes cognitivos, los cuales se darán mediante la *Organización* y *Orientación*, «O», activados sobre la nueva información generada a partir del contexto de las iniciativas y de las preguntas por resolver en las mismas, provocándose así el entendimiento y comprensión de dicha situación. De esta forma el sujeto explicitará las suficientes y variadas acciones mentales que posteriormente se consolidarán en las formas de entender, transfiriéndose conceptual y heurísticamente en las formas de pensar, pues el entendimiento así logrado se plasmará en un proceder conceptual basado en la construcción del significado de los conceptos, permitiendo establecer y formalizar una estrategia para abordar el problema.

Al llegar a este punto la estrategia se implementará apoyada en la metodología de solución de problemas y las heurísticas implícitas en la misma, llevándolas a alcanzar un estado de madurez al pasar por los diferentes niveles de la metodología de solución de problemas. Esa madurez se verá reflejada en un conjunto de estructuras cognitivas, que a su vez son características propias de la *causa* (en términos del DNR, -*las formas de pensar* «FP»). Es decir, se dará una transferencia de las formas de entender a las formas de pensar cuyo producto traerá como *Consecuencia,* «C», la solución del problema, el entendimiento de los conceptos implícitos en la misma y el inicio de la formalización del pensamiento matemático, sobre la base de la *construcción de significado del concepto*.

Lo anterior corresponde o producirá un estado de *Interiorización*, «I», del nuevo conocimiento, originando que se establezca o complemente un saber (en términos del DNR, el *razonamiento repetido* (R)). Esta acción repercutirá en mejorar la capacidad del estudiante para solucionar nuevos problemas, caracterizados por tener un mayor grado de complejidad y una mayor diversidad en cuanto a su naturaleza, siendo éste el espacio tiempo en el cual se alcanza la primera etapa del modelo, el *Resultado* «R» (o primera réplica del modelo DNR), llegándose a construir un significado cada vez más *robusto* del concepto.

Alcanzado el *resultado*, el estudiante debe ser capaz de replicar este saber en la solución de variados problemas basado en las nuevas formas de pensar construidas, iniciándose de esta forma la segunda etapa del modelo, la *Réplica* «R». Esta etapa se dará a partir de una nueva *iniciativa*, «I», más original, compleja y/o general. En lo posible se espera que requiera reexaminar un concepto, viéndolo desde una nueva perspectiva que sea una generalización de la primera iniciativa o que sea una iniciativa cuya solución exige relacionar dos o más áreas de la matemática. Esta situación involucrará la utilización del *Doble* DNR –DDNR- tal como se ha definido en el marco teórico en el Capítulo 2.

La búsqueda de la solución a la nueva iniciativa propuesta *causará*, «C», la activación de las *nuevas y/o más avanzadas formas de pensar* (NFP) interiorizadas durante el resultado alcanzado en la primera etapa. Estas serán explicitadas mediante nuevas acciones mentales, con una mejor estructura y formalismo, repercutiendo en la construcción de nuevos y más profundos significados del concepto y así se robustecerá el concepto previo.

Estas formas de entendimiento avanzadas, al igual que en la primera etapa del modelo requieren de los puentes cognitivos de la *Organización* y la *Orientación*, «O». En *consecuencia*, «C», se generarán nuevas acciones mentales, vistas como un conjunto de *nuevas formas de entender*.

Al respecto conviene indicar que estos procesos permitirán dar solución a las nuevas iniciativas propuestas, llegándose así a la *Réplica*, «R». Su *Interiorización*, «I», se alcanzará cuando este resultado sea utilizado dentro del mismo contexto, o transferido a otros contextos para dar solución a nuevas iniciativas. Como lo dice Gowers (2000) en las conclusiones de su trabajo, *"como una zona A, puede ayudar a la zona B".* Esta conclusión la podemos ver en el modelo de dos formas. Una primera forma se da cuando la zona A corresponde a la primera etapa, el Resultado, «R», y la zona B, corresponde a la segunda etapa, la *Réplica*, «R». Y la segunda forma se puede ver cuando la zona A es un resultado de una iniciativa en un área en particular de la matemática, y la zona B otra iniciativa, en otra área en particular de la matemática.

El proceder de la primera etapa del modelo metodológico « I.C.O.R.» se esquematiza en la Figura 10 y el de la segunda etapa en la Figura 11.

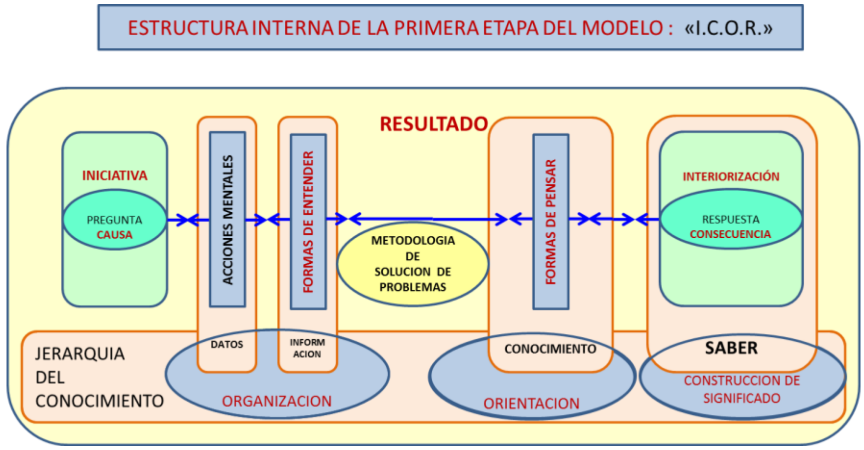


Figura 10. Desarrollo del Modelo «I.C.O.R ». Primera etapa, el Resultado[21]

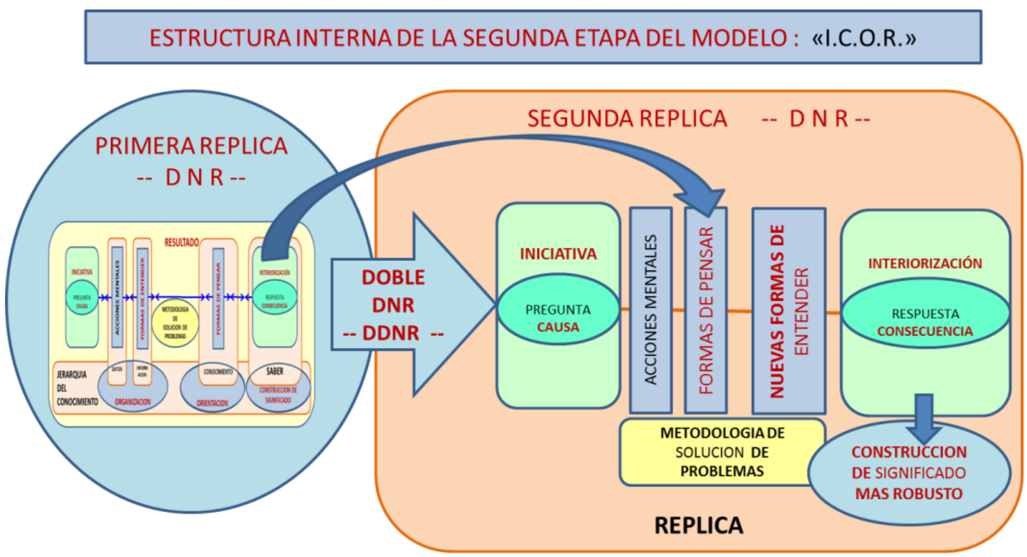


Figura 11. Desarrollo del Modelo «I.C.O.R.». Segunda etapa, la Replica[22]

Es de tener en cuenta que conjuntamente, tanto en el desarrollo de la primera etapa como en la segunda, se requiere que se den las necesidades psicológicas (en términos del modelo general DNR), que corresponden a la motivación, es decir el interés, el deseo o la voluntad que manifieste el estudiante por comprometerse con la búsqueda de una solución a las iniciativas presentadas, lo que debe generar dedicación, persistencia y perseverancia por obtener esa solución. De esta forma se concluye la tercera fase del diseño estructural del modelo.

[21] Elaboración propia
[22] Elaboración propia

La cuarta fase, la fase de implementación, implicó la elaboración de un instrumento metodológico y didáctico acorde al objetivo de investigación, que permitió indagar y recoger la información necesaria y suficiente para dar solución al problema de investigación. Su esencia estuvo soportada sobre la propuesta metodológica del modelo « I.C.O.R.».

Cabe anotar que el instrumento requerido en esta fase es relativo a los fines de la investigación, pero a su vez debe cumplir con unos elementos acordes a la estructura del modelo. Estos elementos permitirán focalizar y consolidar de forma específica el desenlace de la investigación, constituyéndose así el quinto módulo, el módulo del *instrumento* (ver Figura 12).

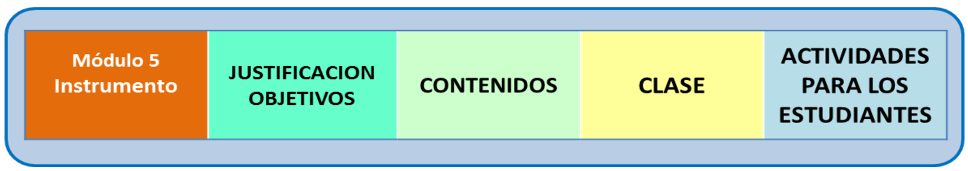


Figura 12. Módulo 5 de la estructura del modelo metodológico

De forma general estos elementos están dados así; dentro del componente de educación matemática se define la *justificación* del instrumento y se formulan los *objetivos* del mismo. Dentro del componente disciplinar se eligen los *contenidos* (temas) particulares sobre los cuales recae la investigación y que a su vez corresponden a la unidad de análisis. Dentro del componente metodológico está la planeación de la *clase* o implementación en el aula, la cual se puede hacer siguiendo el diseño instruccional utilizado en la estructura del modelo, adaptando la misma a las necesidades y proceder del modelo « I.C.O.R.» descrito en el módulo anterior. Dentro del componente cognitivo están las *actividades*, éstas están compuestas directamente por las *Iniciativas*, «I», adecuadas y pertinentes, creadas o adaptadas para cumplir con la integridad matemática establecida para tal fin. Además, deben ser diseñadas y construidas para el grupo de estudiantes participantes de la investigación, según su contexto.

Como se indicó anteriormente las actividades se conformarán por los problemas matemáticos y/o de contexto de carácter no rutinario (retadores), que se propondrán a los estudiantes como primera medida para iniciar y activar el proceso de razonamiento en ellos, permitiendo de esta forma generar el contexto propicio para que se produzca y emerja la información requerida para alcanzar el objetivo de investigación.

La quinta fase, la fase de control es básicamente la aplicación, la puesta en práctica y el desarrollo del instrumento construido. Permitiendo de esta manera la materialización de la propuesta metodológica del modelo «I.C.O.R.» durante la realización de las clases. Esta fase es el espacio-tiempo de interacción entre el investigador (el profesor) y el sujeto investigado (el estudiante), interacción que facilitará al investigador hacer un seguimiento a los instrumentos, a la metodología, a los avances y los resultados que se van obteniendo por parte de los sujetos al desarrollar cada una de las actividades propuestas. De esta forma se permite hacer los ajustes necesarios en el transcurso del desarrollo, o cambios si se llegaran a dar, tanto en los instrumentos como en la metodología. El producto de esta fase son los *Resultados*, los cuales se componen de dos módulos, el sexto módulo denominado *Resultados* I (ver Figura 13), y el séptimo módulo denominado *Resultados II* (ver Figura 14).

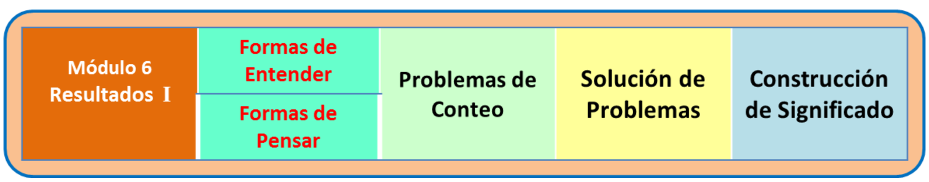


Figura 13. Módulo 6 de la estructura del modelo metodológico

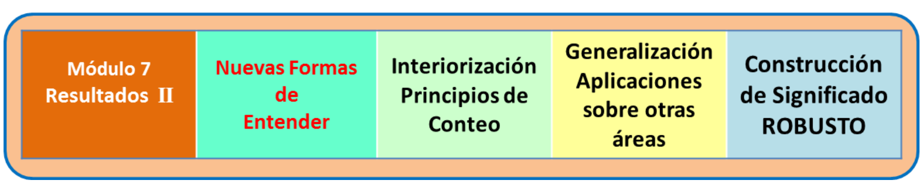


Figura 14. Módulo 7 de la estructura del modelo metodológico

El avance y ejecución de estos módulos conforman el resultado práctico del modelo metodológico. Por su parte, el módulo de Resultados I corresponde a la ejecución del modelo «I.C.O.R.» en su primera etapa, de modo que se alcanza el componente del *Resultado*, «R» y el módulo de los Resultados II es la ejecución del modelo en su segunda etapa, hasta alcanzar el componente de la *Réplica*, «R».

De igual forma el desarrollo de este proceso es el que permite recoger la suficiente información para ser analizada y consolidada en pro de obtener repuestas a las preguntas formuladas en la primera fase, que en conjunto consolidarán el alcance del objetivo de investigación y por ende la solución total o parcial al problema de investigación. Este último proceso se formalizará en la siguiente fase, la fase de evaluación.

Por último, está la sexta fase, la fase de evaluación. Es una tarea que se debe ir haciendo durante todo el proceso de implementación, de forma cualitativa, incluyendo la evaluación de los procesos realizados por los estudiantes y sus avances frente a la adquisición de un nuevo conocimiento. El resultado de esta fase es el *análisis y discusión de los resultados*, proceso que se consolida en el octavo módulo, el módulo de *Resultados III* (ver Figura 15). A partir de estos resultados se construyen las conclusiones, las cuales argumentan y validan el alcance del objetivo de investigación como un hecho particular y como un hecho general la respuesta parcial o total al problema de investigación.

Figura 15. Módulo 8 de la estructura del modelo metodológico

Dentro de la estructura general del modelo, el módulo Resultados III en el componente de educación matemática «EM» describe la relación entre las nuevas formas de entender y las nuevas formas de pensar matemáticamente y como éstas se consolidan en el sujeto, produciendo en él la construcción de un significado más robusto de los *conceptos* trabajados. En el componente disciplinar el sujeto ha incorporado e *interiorizado* nuevas herramientas e instrumentos matemáticos, avance que se verá reflejado en su formación y preparación, como sujeto activo en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En el componente metodológico se concibe que el sujeto haya desarrollado un *razonamiento* más robusto y maduro para afrontar y solucionar problemas matemáticos y en contexto, sobre la base conceptual formalizada durante el proceso desarrollado. En el componente cognitivo se espera que el sujeto se haya apropiado de los *objetos* matemáticos utilizados como el insumo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

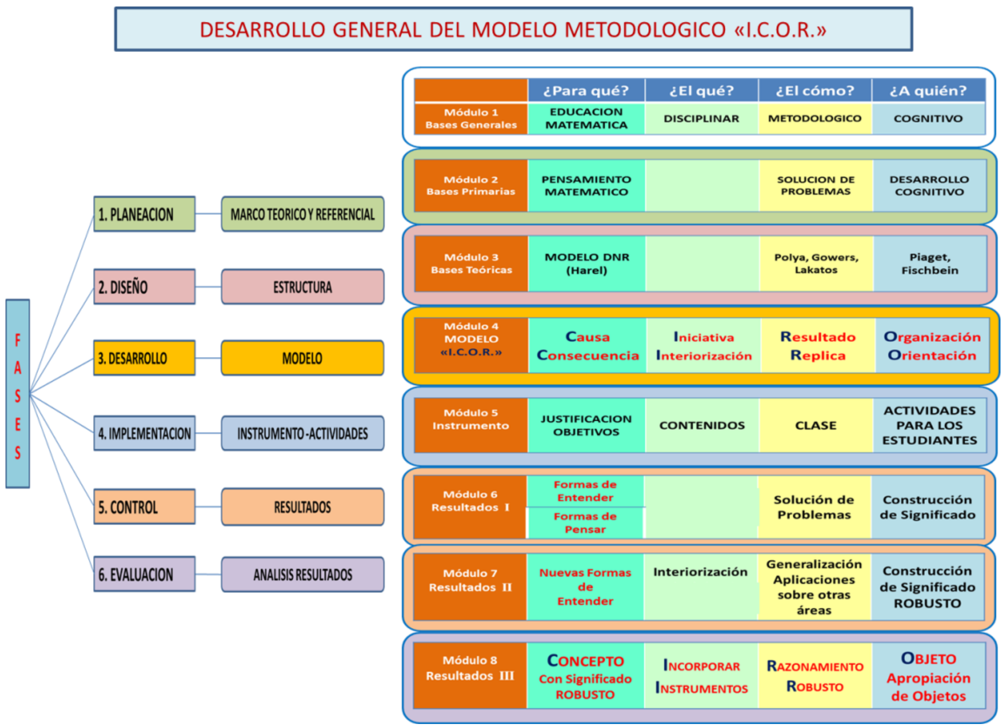


Figura 16. Desarrollo General del Modelo Metodológico «I.C.O.R.» [23]

Lo explicado anteriormente corresponde al desarrollo e implementación del modelo metodológico «I.C.O.R.» de forma general, situación que se representa en el esquema de la Figura 16, en la que se muestran las fases y módulos del modelo. Además, se observa que el componente disciplinar es la única variante en toda la estructura, situación que deja abierta la posibilidad de ser implementado en los otros campos de la matemática.

3.2.2. Implementación del Modelo Metodológico « I.C.O.R.»

Como se ha indicado anteriormente, este modelo metodológico es una herramienta para hacer investigación en «EM», motivo por el cual se puede hacer una validación de las fases del modelo metodológico «I.C.O.R.» frente a las fases de la metodología de investigación cualitativa. En este

[23] Elaboración propia

sentido la fase de planeación del modelo, corresponde a F1 y F2 en la metodología de investigación cualitativa, la fase de diseño a F3, la fase de desarrollo e implementación a F4, la fase de control a F5 y la fase de evaluación a F6 y F7 respectivamente.

De esta forma, en lo que refiere a esta investigación, que persigue el objetivo de lograr avances en la caracterización del pensamiento combinatorio, las fases de planeación, diseño y desarrollo ya se han adelantado, y su resultado dio como producto la Introducción, los Capítulos 1 y 2, y los avances iniciales del Capítulo 3.

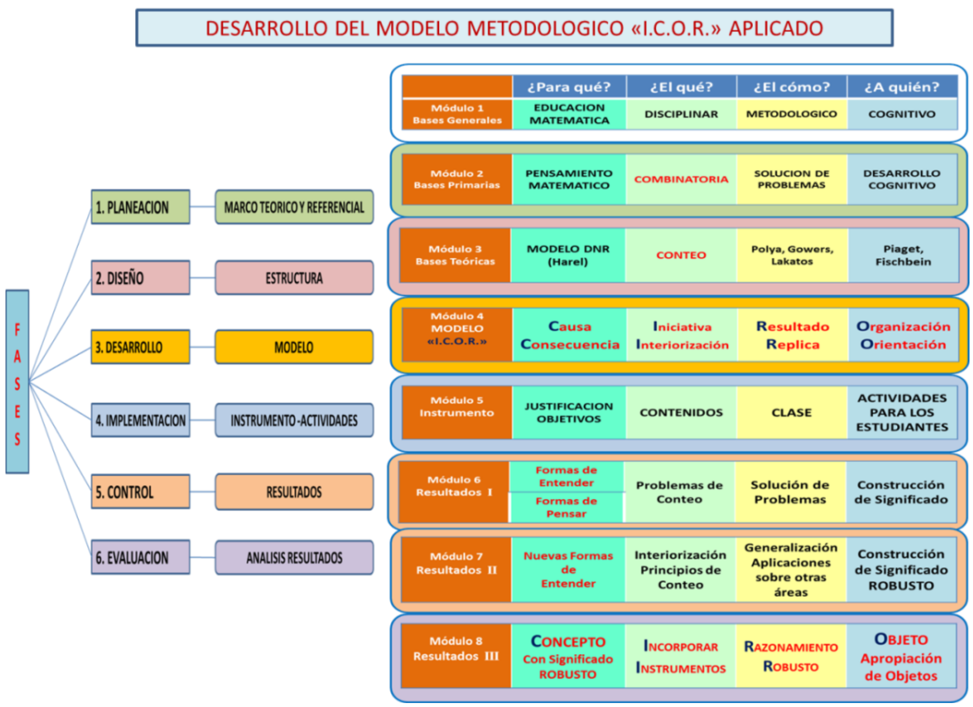


Figura 17. Desarrollo del Modelo Metodológico «I.C.O.R.» aplicado a la caracterización del pensamiento combinatorio

Siguiendo este proceso ahora se continúa con la explicación del desarrollo del modelo a partir de la fase de implementación, resultado que se presentó en la Figura 17.

La fase de implementación se da con la concreción del quinto módulo, el módulo del instrumento. Dadas las condiciones espacio-tiempo en las que se planificó esta investigación se asume y define que el instrumento pertinente para recoger la información, tener el control sobre ella y que cumple con las especificaciones dadas por el modelo para cada componente es una *unidad didáctica.*

El diseño y construcción de este instrumento metodológico y didáctico se dio bajo la adaptación de la estructura general de una unidad didáctica a los requerimientos del modelo. Esta estructura está compuesta por un título, una justificación y unos objetivos, elementos que responden al primer componente; unos contenidos que responden al segundo componente; una metodología que responde al tercer componente; y unas actividades que responden al cuarto componente. En este orden se exponen a continuación.

3.2.3. Instrumentos y actividades

Estructura de la unidad didáctica

1. TITULO

Se presenta el formato en la Figura 10, el cual puede ser adecuado según se considere la utilización de la unidad didáctica, se cambiaría, por ejemplo, el nombre de la asignatura.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO</td><td colspan="4">FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemáticas</td></tr>
<tr><td colspan="4">SOLUCION DE PROBLEMAS
Unidad Temática: COMBINATORIA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Subtema: Principios Fundamentales de Conteo
Principios de la Suma y el Producto</td></tr>
<tr><td>Nombre</td><td colspan="3"></td><td>Edad</td><td></td></tr>
<tr><td>Código</td><td></td><td>Fecha</td><td></td><td>Semestre</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">Actividad 1. Aprendiendo a contar</td></tr>
</table>

Figura 18. Formato del título en la unidad didáctica

2. JUSTIFICACION

Esta unidad didáctica es de tipo disciplinar, en la cual se presenta a los estudiantes de la población objetivo la unidad temática de combinatoria, la cual se desarrollará a partir de los principios fundamentales de conteo, contenido que se desarrollará según los syllabus (contenidos programáticos) del curso de solución de problemas.

Desde el punto de vista conceptual, con el desarrollo de esta unidad didáctica se pretende reconocer y evidenciar las formas de entender y las formas de pensar que el estudiante manifiesta o genera a partir de la solución de problemas de análisis combinatorio y problemas de contexto que requieren del análisis combinatorio para su solución. Estas soluciones se deben dar mediante el uso del razonamiento natural e inductivo. La información generada a partir del desarrollo de las actividades de esta unidad didáctica fue utilizada para construir las respuestas a las preguntas de investigación P2, P3, P4 y P5.

3. OBJETIVOS DIDACTICOS

Por lo anterior se plantean los siguientes objetivos generales para la unidad didáctica, los cuales se complementan con los objetivos específicos de cada actividad.

Objetivos generales

1) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el “conteo” implícito en la solución de un problema.

2) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.

3) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes conducentes a ser formalizados en principios de conteo.

4) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.

5) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.

6) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

El alcance del objetivo 1 permitió proporcionar la información para construir la respuesta a la pregunta **P2**, los objetivos 2 y 3 a la pregunta **P3,** los objetivos 4, 5 y 6 a la pregunta **P4**, y la respuesta a la pregunta **P5** se estructuró a partir de los resultados globales de las diferentes actividades aplicadas.

4. CONTENIDOS

En correlación con la intencionalidad de ¿el qué?, este componente está bajo el dominio de la combinatoria. De ella le interesa a la investigación el concepto de conteo. Este se desarrolló desde los principios fundamentales de conteo, los cuales conforman los contenidos. Para recordar, éstos son el principio de la suma, el principio del producto, el principio de la permutación, el principio de las variaciones, el principio de las combinaciones, el teorema del binomio y el principio de inclusión y exclusión.

5. METODOLOGIA

Este elemento corresponde al diseño de las clases, espacios en los cuales se implementará y desarrollará la unidad didáctica siguiendo la metodología descrita en la fase de desarrollo, como parte del proceder del módulo del modelo «I.C.O.R.».

Esta unidad didáctica se diseñó con ocho actividades proyectando cada actividad para ser implementada y desarrollada en dos clases. Cada actividad se subdivide en cuatro partes, correspondientes en su primera parte a las iniciativas de entrada, en su segunda parte a las iniciativas extraclase, en su tercera parte a las iniciativas colaborativas, y en la cuarta parte a la iniciativa de la semana –iniciativa foro. La clase C1 tienen una diferencia particular en la metodología con relación a las demás clases, por ser la primera de la unidad didáctica, al igual que la clase (C16) por ser la que cierra la unidad. De la clase C2 a la clase C15 se sigue un mismo diseño, que implica la proyección continua de las clases, es decir que, de una u otra forma, se dejó alguna situación, que permitió el enlace entre la terminación de una clase y el inicio de la siguiente clase.

En estructura general lo que marca la diferencia en sí es el tópico temático de trabajo, sobre el cual se cambia el contenido de la actividad.

Es de aclarar que el diseño metodológico propuesto es flexible, en cuanto a que no se puede predecir ninguna eventualidad durante el espacio de interacción estudiante-profesor, lo cual permite hacer ajustes sobre la marcha. Como parte de los anexos se presentan los diseños metodológicos de las 16 clases que incluyen las ocho actividades (ver Anexos 12 al 19).

6. ACTIVIDADES

La estructura de las actividades está dada por un título, una introducción, los objetivos, las recomendaciones y las tareas distribuidas en cuatro partes. En la primera parte están las iniciativas de entrada, compuesta por entre tres a cinco iniciativas. En la segunda parte están las iniciativas extraclase, compuesta por entre tres y cinco iniciativas. En la tercera parte están las iniciativas colaborativas, compuestas por tres o cuatro iniciativas. Y la cuarta parte contiene la iniciativa de la semana, la iniciativa foro. La explicación de estos componentes y su relación con el modelo metodológico se puede ver en los anexos de los diseños de las clases.

Para hacer la presentación de la actividad se elaboró una introducción, la cual no se presenta de forma impresa a los estudiantes. Esta se hace durante la socialización de las iniciativas de entrada y la explicación del material de trabajo, realizándose durante un aparte de las clases. A continuación se presentan apartes de las introducciones a cada actividad.

6.1. Actividad 1

La actividad A1, que se ha denominado "*aprendiendo a contar*", tiene como propósito iniciar al estudiante en la construcción del significado de los principios fundamentales de conteo, "los principios de la suma y del producto", haciendo énfasis en este último ya que es la base para la construcción y conceptualización de los próximos principios de conteo que se irán desarrollando en el curso. El título dado a la actividad A1 está vinculado con la iniciación de los estudiantes en el campo de la combinatoria, ya que su integridad o principio organizacional es "*el conteo*". Se puede consultar el texto completo en el Anexo 4.

6.2. Actividad 2

La actividad A2 que se ha denominado "*mi posición es importante*" y tiene como propósito continuar promoviendo en el estudiante la construcción del significado de conteo, ahora generado a partir del concepto del principio de conteo conocido como "*permutación*", el cual toma en cuenta el orden en la ubicación de los elementos para determinar las configuraciones posibles. Es decir, en una permutación la posición de cada elemento dentro de la configuración es importante, y por ello se dio este nombre a la actividad A2. Se puede consultar el texto completo en el Anexo 5.

6.3. Actividad 3

La actividad A3 se ha denominado "*el intercambio*", y tiene como propósito continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significado en conteo, ahora generado a partir del concepto base del principio de conteo conocido como "*variación*", el cual se puede considerar como la particularización de algunos casos de la permutación y el principio del producto. Se le dio este nombre a la actividad A3, el intercambio, por la variedad de casos que se presentan, que dependen básicamente de la permuta, del cambio o del reemplazo de alguno de los elementos del conjunto dado. Se puede consultar el texto completo en el Anexo 6.

6.4. Actividad 4

La actividad A4 se ha denominado "*calculando, combinando y contando*" y tiene como objetivo continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significado, ahora generado a partir del concepto del principio de conteo conocido como "*combinación*", el cual permitirá conocer el número de configuraciones posibles de k elementos tomados de n elementos de un conjunto, sin importar el orden en que se eligen y sin repetir elementos. El nombre dado a la actividad A4, se asocia a la diversidad de formas en los cálculos y en las acciones que implican el combinar y el contar, durante la solución de un problema de combinaciones. Se puede consultar el texto completo en el Anexo 7.

6.5. Actividad 5

La actividad A5 se ha denominado "*¿pensamiento o suerte*?" y está diseñada con el objetivo de seguir promoviendo en el estudiante la construcción de significado del conteo de combinaciones. Esta es la segunda parte de la anterior actividad A4, por lo que se continúa trabajando con el concepto y el principio de "*la combinación*". Aquí se pretende hacer uso de este concepto en casos más generales y complejos. El nombre dado a la actividad A5 se asocia al acierto, o no, en la solución de un problema, la cual debe implicar la resolución de un problema bajo un fundamento matemático, y no intuitivo como en ocasiones se hace llegando con suerte a la respuesta, más no a la solución del problema. Se puede consultar el texto completo en el Anexo 8.

6.6. Actividad 6

La actividad A6 que se ha denominado "*Triángulos aritméticos*" tiene el propósito de continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significados en conteo, ahora generado a partir de los conceptos relacionados con el *Teorema del Binomio* y sus propiedades, ya que en su desarrollo se encuentran propiedades asociadas al conteo interpretadas desde el valor de los coeficientes y de los exponentes de cada variable que conforma cada uno de sus términos en el teorema mencionado.

Además, estos resultados están asociados al conocido Triángulo de Pascal y a otras organizaciones triangulares que se pueden hacer con los valores de los coeficientes binomiales, también llamados números combinatorios; de ahí el nombre dado a la actividad A6. Se puede consultar el texto completo en el Anexo 9.

6.7. Actividad 7

La actividad A7, que se ha denominado "¿*Cuántas veces me cuentan*?", tiene el propósito de continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significados en conteo, ahora generados a partir de los conceptos involucrados en el "*principio de inclusión-exclusión*", el cual le permitirá tener una herramienta para contar los elementos de las intersecciones de dos o más conjuntos, lográndose así obtener el cardinal de la unión. En este proceso, de forma práctica, lo que ocurre es que se debe conocer cuántas veces se incluye un elemento, para luego ser excluidas las repeticiones del conteo para que ningún elemento sea incluido más de una vez en el conteo. Por lo anterior se ha dado el nombre a la actividad A7. Se puede consultar el texto completo en el Anexo 10.

6.8. Actividad 8

La actividad A8, que se ha denominado "¿*De cuántas formas*…?", tiene el propósito de hacer una revisión del grado de apropiación de los conceptos de conteo desarrollados en cada una de las actividades anteriores por parte de los estudiantes, evidenciando así su construcción de significados en conteo. A la Actividad 8 se la ha dado este nombre por la forma de pensar combinatoriamente que implica replantear las diferentes situaciones, en términos de preguntar ¿De cuántas formas…? Se puede consultar el texto completo en el Anexo 11.

Cada actividad tiene unos objetivos específicos que están dirigidos al estudiante, quien es quien debe alcanzarlos, para que de esta forma durante el proceso de desarrollar cada actividad, emerjan de ellos los suficientes datos (dados en forma de razonamientos), los cuales permitirán construir el enlace con el conocimiento, y de esta forma evidenciar la jerarquía del conocimiento durante su construcción, dado que la información se explica en términos de datos, el conocimiento en términos de información y el saber en términos de conocimiento. En este orden de ideas se establecen los siguientes objetivos específicos para cada actividad.

Objetivos.

1. Identificar y deducir los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significados del principio de *conteo** a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización del principio de *conteo**.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

Aclaración: En los objetivos 2 y 3, la expresión *conteo** se va sustituyendo por el principio de conteo desarrollado en cada actividad.

Además, en las actividades A1 y A2 se presentan a los estudiantes unas recomendaciones, que en realidad son parte de la estrategia metodológica propuesta para el abordaje y desarrollo de cada una de las iniciativas propuestas. Es de anotar que no necesariamente éstas se deben cumplir literalmente, ni tampoco aplican a la totalidad de iniciativas. Son de más utilidad para aquellos estudiantes que se les dificulta organizar las ideas (sus formas de entender), ya que los que tienen la habilidad de ver y desarrollar otras ideas para alcanzar la solución de las iniciativas probablemente no las requieran. Estas recomendaciones son las siguientes.

Recomendaciones:

1. Al resolver las siguientes iniciativas escribir y anexar los procedimientos y cálculos realizados como parte de la solución, y argumentar completamente por qué el proceso que siguió es correcto.
2. Al solucionar cada una de las siguientes iniciativas, mantener presentes los siguientes componentes del proceso seguido que pueden resultar valiosos para lograr una solución.
    1) Identifique el conjunto y/o conjuntos dados y las condiciones que caracterizan sus elementos.
    2) Defina el nuevo conjunto (conjunto que se obtendrá al realizar el conteo requerido) y las condiciones que caracterizan sus elementos.
    3) Describa la configuración que caracteriza los elementos del nuevo conjunto, del cual se quiere conocer su cardinalidad.
    4) Describa las formas naturales de entender el "conteo" requerido para solucionar el problema.
    5) Explique las estrategias utilizadas para calcular la cardinalidad del nuevo conjunto, a partir de la definición o caracterización de sus elementos.
    6) Reescriba el problema en términos de un problema similar del cual ya conozca su solución, si es posible, de tal forma que relacione su estrategia de solución para implementarla en el problema propuesto.
    7) Realice el conteo operacionalmente, sin listar sus elementos.

3.3. Diseño experimental.

Como lo expone Hernández Sampieri et al. (2014), el diseño experimental en la metodología de investigación cualitativa es el abordaje general que se dará a la investigación. De hecho, la misma metodología cualitativa es un diseño en sí misma, ya que no existen dos investigaciones cualitativas iguales. En este sentido el abordaje que se dará a la investigación, está dirigido a definir un marco interpretativo (Alvarez-Gayou, 2003)[24].

Este diseño se hizo sobre la base del contexto y objetivo de investigación, que enmarcan el objeto de estudio. Su construcción se hizo para orientar la implementación, la cual requirió de hacer una inmersión en el contexto, un trabajo de campo, la recolección de la información y el análisis de los datos, permitiendo de esta forma describir los resultados y dar las conclusiones de la investigación.

3.3.1. Contexto.

Como se indicó el objeto de estudio que transversaliza la investigación es *el proceso de enseñanza y aprendizaje del análisis combinatorio* que será manifestado durante la solución de problemas significativos, no rutinarios, del análisis combinatorio. En este sentido la población objetivo seleccionada para hacer el estudio está conformada por los estudiantes activos en las carreras de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño (UAN).

Para tal fin este diseño requirió de hacer una inmersión inicial en este contexto, con el objeto de hacer una caracterización del mismo e ir delimitando el trabajo de campo. Los resultados de la inmersión evidenciaron que esta población posee un gran potencial para ser utilizado en la investigación. Dentro de las fortalezas encontradas se tienen:

1. Por parte del diseño curricular, los planes de estudio para las carreras de ingeniería incluyen un curso de Solución de Problemas (información que se puede consultar en http://www.uan.edu.co), fortaleza que permitió potencializar el objetivo de estudio, ya que éste requiere que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas esté dado en un contexto metodológico de solución de problemas.

[24] Alvarez-Gayou, (2003). Como hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología. Ediciones Paidos. México.

2. La facilidad de tener acceso a estos grupos, ya que son parte de la Universidad a la cual pertenece el programa de doctorado.
3. Además, la revisión de los syllabus (ver Anexos 1, 2 y 3) de diferentes cursos para ingeniería y la licenciatura en Matemáticas, permitieron evidenciar que en su diseño se incluyen algunos tópicos de conteo.

Lo anterior permitió delimitar la muestra conformada por estudiantes potenciales que satisfacen las condiciones necesarias para el desarrollo de la investigación, que se dieron a partir del objetivo general definido para tal fin. De esta forma se dispusieron los recursos en dos tipos de muestras. Una muestra que en los diseños investigativos cumplió la tarea de ser la muestra piloto, dio lugar a entender el propósito investigativo y sus necesidades, permitiendo construir y refinar los instrumentos y actividades más adecuados a estas necesidades e implicando el diseño de su propia metodología (ver modelo metodológico «I.C.O.R.»"). La otra muestra, es la muestra objetivo que finalmente proporcionó la información utilizada para dar el soporte a los resultados de la investigación.

De acuerdo a la revisión de la población objetivo, las muestras consideradas piloto se conformaron por los estudiantes de los cursos de Solución de Problemas, Probabilidad y Estadística, Matemáticas Discretas (cursos para ingeniería y licenciatura en matemáticas) y un curso que se desarrolló como una electiva disciplinar para la licenciatura en el cual se realizó un curso de fundamentos de combinatoria enumerativa. Todos estos grupos estaban ubicados en la Sede Sur de la UAN, en la ciudad de Bogotá. Sobre este potencial se seleccionó al curso de solución de problemas como la muestra objetivo, proceso que se comenta en el diseño experimental y que implicó abordar dos tipos de diseño de investigación que se comentan a continuación.

3.3.2. Diseño de Investigación-acción.

La finalidad de este diseño es comprender y resolver problemáticas sobre grupos o comunidades. Como su nombre lo indica, este diseño está dado por acciones. Una primera acción es la *acción práctica*. Su estudio se enfoca en las prácticas locales en la cuales indaga al individuo y/o al grupo, centrándose en el desarrollo y sus aprendizajes. Los resultados de este estudio se verán reflejados en la implementación de un plan de acción dirigido a resolver el problema, introducir un aporte de mejora significativa que permita evidenciar un cambio tanto individual como grupal, siendo esta acción liderada por el investigador y algunos miembros líderes del grupo.

Una segunda acción, *es la acción participativa* enfocada al estudio de los hábitos y constructos sociales que dinamizan las vidas de los individuos y/o sus comunidades, resaltando el trabajo en equipo. Su función no es sólo hacer labores de diagnóstico y producción de conocimiento, sino de canalizar y usar estos resultados en planes de mejoramiento que permitan generar cambios que mejoren el nivel de vida de los miembros de la comunidad, dándole así un carácter emancipador a este tipo de diseño.

Stringer (1999)[25], propone tres fases sobre el diseño de investigación-acción. Estas se comentan desde su aplicación directa en la investigación fundamento de la presente tesis. En cada una de estas fases se debe dar una acción. En su orden son las acciones de *observar, pensar y actuar.*

Para la presente investigación este diseño se desarrolló sobre lo que hoy se denomina las muestras piloto, proceso que requirió planificar el trabajo de campo para realizar la inmersión sobre el campo de acción, *el proceso de enseñanza y aprendizaje del conteo,* realizando la acción práctica y participativa. Este proceso se dio sobre la intervención directa en los cursos seleccionados para tal fin. La intervención comenzó con la búsqueda, adaptación y creación de problemas dentro del contexto de la combinatoria enumerativa, los cuales se colocaban a prueba en los cursos de Probabilidad y Estadística

[25] Stringer, E. (1999). Action Research. Thousand Oaks, California, SAGE Publications.

y Matemática Discreta con el objeto de corregir su nivel, su pertinencia, su redacción, y sobre todo la forma de formular las preguntas. Después de este filtro se colocaban a prueba en los cursos de Solución de Problemas y la electiva en Combinatoria, con el propósito de hacer un acercamiento más real en cuanto al proceder metodológico y de implementación directa sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este proceso implicó desarrollar las fases del diseño durante tres semestres (I y II de 2015, I de 2016- ver Figura 6), fases en las cuales la acción de la observación permitió comprender el problema y su objetivo, que a la par aportó ideas para definir el tipo de problema requerido y que además lograra generar en el estudiante la explicitación de la información necesaria para avanzar en la investigación. La acción de pensar se direccionó en la parte metodológica permitiendo analizar el desarrollo de las clases e interpretar los actuares de los estudiantes y sus hábitos de aprendizaje. La acción de actuar se ve reflejada en la construcción de los instrumentos resultados de esta primera experiencia en la inmersión de campo.

Estos instrumentos corresponden a la propuesta teórico-práctica del modelo metodológico «I.C.O.R.», el diseño y elaboración de una unidad didáctica para desarrollar un curso básico de combinatoria enumerativa y el diseño metodológico del desarrollo de las clases. Estos diseños se exponen en la siguiente sección.

3.3.3. Diseño de Investigación utilizando elementos de la Teoría fundamentada.

Esta propuesta de investigación dada por Glaser y Strauss (1967)[26] se puede ver como un diseño y un producto, la cual reside en una explicación general o en una teoría que el investigador construye respecto a un fenómeno, a un proceso, o las acciones que se aplican y desarrollan en un contexto, bajo la necesidad de los involucrados en la investigación.

[26] Glaser, B.y Strauss, A. (1967). The discovery of the grounded theory: Strategies for qualitative research. New York: Aladine de Guyter. P

El producto de estas teorías implícitamente lleva al desarrollo de hipótesis, formulación de variables o de conceptos, los cuáles serán sus elementos. Estos a su vez generan una representación o modelo gráfico que permite visualizar su estructura. La formulación de estas teorías se da sobre la base del análisis de la información que suministran los datos recolectados para luego ser contrastada con una teoría superior, de orden formal y general, porque la nueva teoría hasta ahora se le puede considerar de orden medio, y de carácter específico. Así se permite contar con una buena base de interpretación que a su vez permitirá dar nuevas visiones y aportes de enriquecimiento al fenómeno o problemática en estudio.

Como se indicó en el diseño investigación-acción, como resultado de una primera inmersión en el campo de acción, se interactuó con una muestra piloto, y sobre la base del análisis de esta información (requisito de la teoría fundamentada) se propuso el modelo metodológico «I.C.O.R.».

Para la presente investigación este diseño es el que permite validar la estructura del modelo metodológico « I.C.O.R.» y la propuesta metodológica implícita en la estructura, como una teoría fundamentada (sobre las bases teóricas formales definida en el Capítulo 2). De este modo, se permite tener un instrumento teórico e interpretativo para el análisis de los datos recolectados sobre la muestra objetivo real, definida como el curso de Solución de Problemas, en el ciclo de fundamentación para carreras de ingeniería de la UAN, Sede Sur, de Bogotá conformada, como se ha dicho, por 23 estudiantes entre hombres y mujeres, con edades entre los 15 y 25 años.

Para esta segunda inmersión, realizada sobre la muestra objetivo, se aplicó la unidad didáctica producto de la primera inmersión en el diseño anterior, desarrollándose a la vez la propuesta metodológica implícita en el modelo. Esta se realizó durante un semestre (II-2016, ver Figura 19).

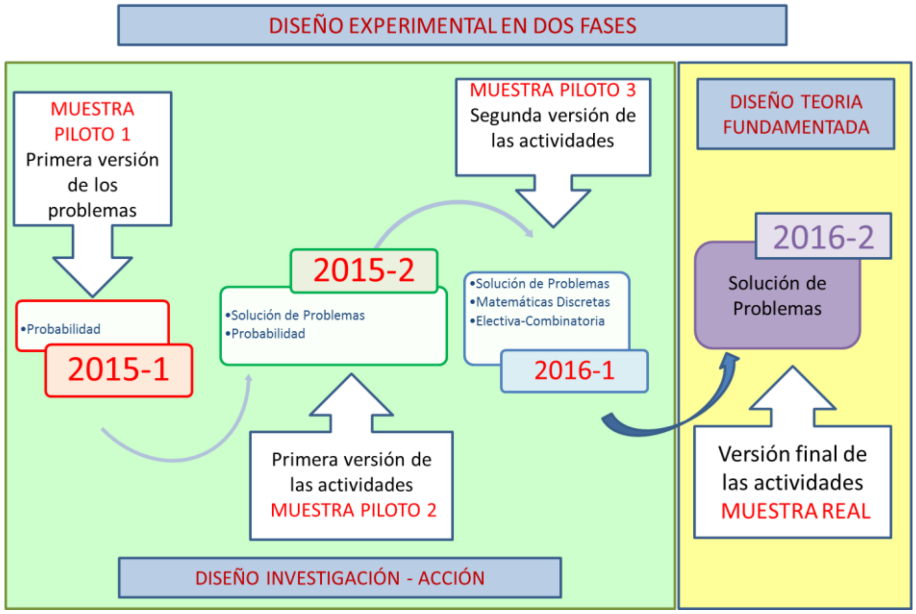


Figura 19. Diseño experimental en dos fases

Como resultado práctico de este segundo diseño se hizo la recolección de los datos, los cuales proporcionaron la información que se analizará en el Capítulo 4, como parte de los resultados de la investigación. Estos datos son el producto de la implementación de la unidad didáctica, la cual consistió en desarrollar las ocho actividades en dieciséis clases diseñadas para tal fin. Como evidencia de esta experiencia queda el material producido por los estudiantes al dar la solución a las diferentes iniciativas propuestas en cada una de las partes de la actividad, el material fílmico de las videograbaciones de cada una de las clases, una encuesta de satisfacción aplicada al finalizar la última clase y las memorias de un conversatorio realizado sobre la experiencia, con presencia de la directora de tesis.

Conclusiones del Capítulo 3

Este capítulo se desarrolló desde dos enfoques; por un lado, se hizo una introducción de la metodología de investigación cualitativa, la cual fue el hilo conductor del proceso investigativo en general. Por otro lado, se desarrolló una metodología de investigación en didáctica, para lo cual se construyó, desarrolló e implementó el modelo metodológico «I.C.O.R.», constituyéndose éste en un espacio conceptual y metodológico que facilitó y organizó la comprensión del problema de investigación. De este modo se permitió establecer las relaciones y características de los elementos objeto de estudio. Sobre la base del modelo se diseñó y construyó la unidad didáctica, compuesta por ocho actividades que contenían los problemas cuya solución tiene implícita un concepto de conteo, al igual que se diseñaron y planificaron las dieciséis clases necesarias para desarrollar la unidad didáctica. Estos instrumentos sirvieron para obtener y recoger los datos e información necesaria para dar sustento a las respuestas de las preguntas de investigación.

Por otro lado, se hizo el diseño experimental en dos fases, una basada en la investigación-acción y la otra en el diseño de la investigación usando elementos de la teoría fundamentada, de manera que con estos diseños se validaron los instrumentos y la propuesta teórico-práctica del modelo metodológico «I.C.O.R.».

CAPITULO 4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados bajo un enfoque de focalización progresiva (Mertens, 2010)[27] en la cual se hace una descripción progresiva de las situaciones. Para esta investigación se realizó el análisis de una forma exterior hacia una interior, es decir, de los resultados grupales a los particulares, siguiendo la estructura del modelo metodológico «"I.C.O.R."», la cual permitió establecer los componentes y fases de análisis, como se muestra en la Figura 20.

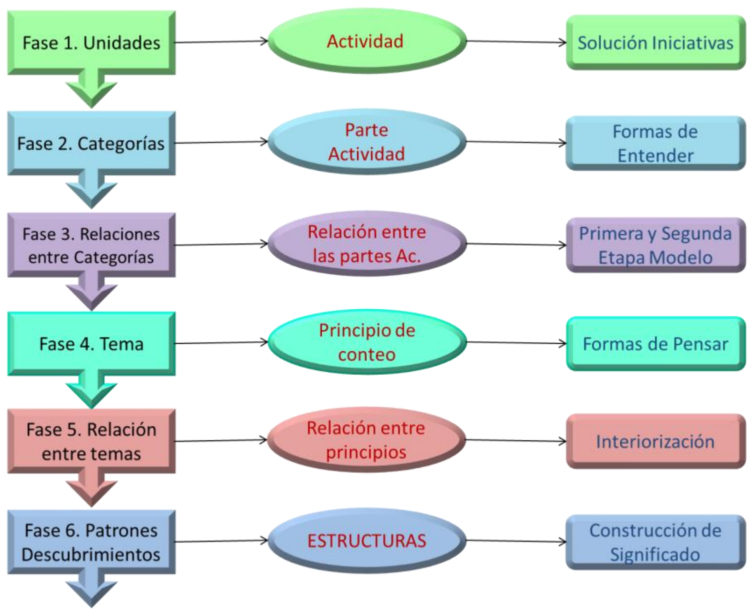


Figura 20. Estructura de Análisis. Enfoque de Focalización Progresiva

El insumo utilizado para tal fin son las relatorías de clase que se realizaron con el material producido por los estudiantes durante las 16 secciones de clase, al desarrollar las 8 actividades. Es de aclarar que para comenzar el punto se análisis se focalizó sobre el número de soluciones dadas a los diferentes problemas (iniciativas), como se muestra en la Tabla 1, base que muestra que se realizó un amplio y robusto estudio para generar la suficiente información que permitió dar sustento a los resultados de la investigación.

[27] Mertens, D. M. (2010) Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tabla 1. Cuantificación de la implementación de la unidad didáctica

CUANTIFICACION DE LA IMPLEMENTACION DE LA UNIDAD DIDACTICA					
CLASE	CONTENIDO	ACTIVIDAD	PARTICIPANTES	INICIATIVAS	SOLUCIONES
Clase 1 y 2	P. Suma y Producto	A1. Aprendiendo a contar	23 (90%)	14	291
Clase 3 y 4	P. Permutación	A2. Mi posición es importante	23 (97%)	12	268
Clase 5 y 6	P. Variación	A3. El intercambio	23 (86%)	11	217
Clase 7 y 8	P. Combinación	A4. Calculando, combinando y contando	23 (90%)	13	273
Clase 9 y 10	Miscelánea 1	A5. ¿Pensamiento o suerte?	23 (81%)	11	209
Clase 11 y 12	Teorema Binomio	A6. Triángulos Aritméticos	23 (86%)	12	237
Clase 13 y 14	P. Inclusión Exclusión	A7. ¿Cuántas veces me cuentan?	23 (90%)	12	248
Clase 15 y 16	Miscelánea 2	A8. ¿De cuántas formas?	23 (89%)	12	246
			TOTAL	97	1989

En ese sentido las *unidades de análisis* [1][28] macro son cada una de las actividades sobre las cuales se realizó luego un análisis cualitativo en cuanto al número de soluciones dadas en cada una de las partes de la actividad. Las iniciativas de entrada E, las iniciativas extraclase X, las iniciativas colaborativas C y las iniciativas de la semana-foro S, y en cada una de éstas se determinó si la solución fue correcta [SC], parcial [SP], no correcta [SNC], sin solución [SS] o si hubo inasistencia [I].

Sobre las soluciones correctas y parciales se hizo un análisis por subgrupos, determinados por cada una de las partes de la actividad consideradas como *categorías de análisis* [2], análisis que permitió determinar las formas naturales como los estudiantes se enfrentan a un problema, cuya solución trae implícito un concepto nuevo para ellos (iniciativas de entrada E). Por otro lado se analizó cómo evolucionó la interiorización del concepto nuevo en el estudiante (iniciativas extraclase X) y como este concepto se robustece al ser utilizado en la solución de problemas más complejos (iniciativas colaborativas C y las iniciativas de la semana-foro S).

[28] Estos numerales corresponden a cada una de las fases del enfoque de focalización progresiva, construidas para el análisis cualitativo de estos de los datos recolectados en esta investigación.

De igual modo se hizo un análisis sobre algunos de los problemas con preguntas a la inversa que se constituyeron en insumos que se utilizaron para mostrar y evidenciar cómo se dan y cumplen las dos réplicas del modelo metodológico «"I.C.O.R."», dándose así el análisis de las *relaciones entre las categorías* [3]. Estos acoplamientos permitieron establecer las relaciones y conexiones en la construcción del significado de los nuevos conceptos interiorizados por los estudiantes, los *principios de conteo*, que a su vez se incorporan en una fase correspondiente a los *temas* [4] y *relación entre los temas* [5].

Sobre la base de este análisis se *establecieron los patrones* [6] dados en las formas de entender y en las formas de pensar cuya descripción permitió hacer los avances en la caracterización del pensamiento combinatorio. Es de aclarar que las fases 4, 5 y 6 se desarrollarán en el capítulo 5, capítulo de Discusión de los Resultados.

Es de tener en cuenta que para el desarrollo del análisis que se realizará en este capítulo la anterior nomenclatura será el lenguaje utilizado y por otro lado las soluciones realizadas por los estudiantes individualmente, que en adelante se identificaran como el E*i*, estudiante, donde *i,* es el código dado por el investigador del estudiante en el curso de Solución de Problemas, y las grupales se indicarán como G. Por ejemplo: la nomenclatura E12-A1-E-1, indica que la solución presentada es del estudiante con código 12-[E12], de la Actividad 1-A1, de la parte de Iniciativas de Entrada-E, y corresponde a la iniciativa 1. La grupal estaría dada como G-A3-C-10, donde la G es solución de trabajo colaborativo, en la Actividad 3, en la parte de iniciativas colaborativas, en la iniciativa 10.

4.1. Actividad 1 – A1 – Aprendiendo a contar

1. Fase 1.

Como se indicó anteriormente esta fase está formada por el componente de la unidad de análisis, la cual corresponde a la Actividad 1 – Aprendiendo a contar. Para esta actividad la muestra objetivo era el total de soluciones esperadas, a saber, 322 soluciones, que se habría dado con la asistencia total de los

23 estudiantes, de los cuales, además se esperaba que todos cumplieran con resolver todas las 14 iniciativas de la actividad.

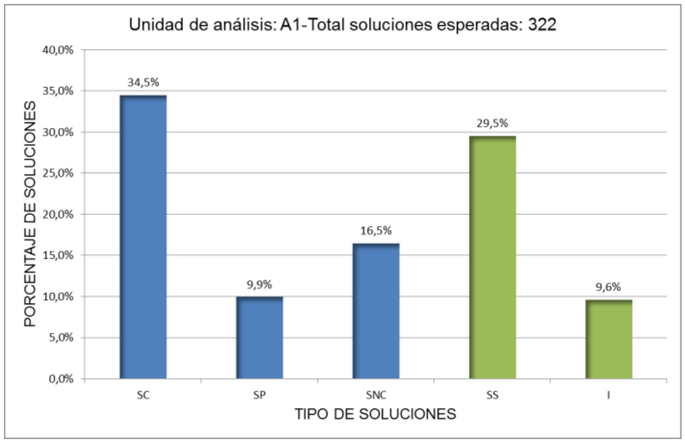


Figura 21. Unidad de Análisis: A1-Total de soluciones esperadas

En la Figura 21 se muestra la distribución porcentual de las soluciones obtenidas en la implementación de A1, durante el desarrollo de las clases C1 y C2. De ésta se resaltan dos situaciones no previstas en la figura anterior. Una primera situación fue el número de soluciones no obtenidas por la inasistencia I correspondiente al 10% de lo esperado, que en la práctica se aproxima a la inasistencia de 2 estudiantes al desarrollo de algunas de las partes de A1. La segunda situación fue la no solución [SS] de algunas iniciativas en las diferentes partes de A1, situación que puede considerarse por una parte es consecuencia del manejo del tiempo por parte de los estudiantes durante el trabajo en clase y, por otra parte, se presume que se debe a la falta de compromiso o dificultad en la comprensión del problema propuesto. De este modo se obtiene la muestra real que corresponde al 60,9% de la muestra objetivo, de la cual se descuentan los dos aspectos tratados anteriormente.

2. Fase 2.

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A1, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S, análisis realizado sobre la muestra real, correspondiente a 196 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 22 se presentan los resultados de este análisis sobre la muestra real, de la cual se tomó como muestra real de análisis el 73%, que corresponde a 143.

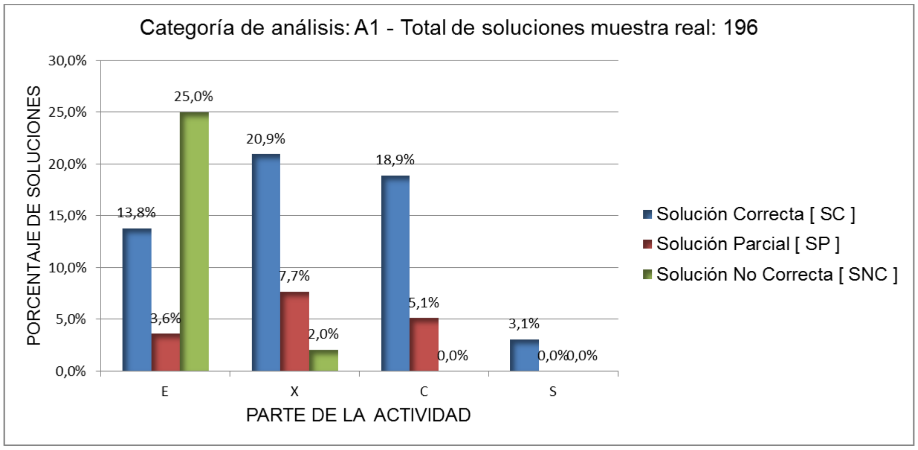


Figura 22. Categorías de Análisis: A1-Total de soluciones muestra real

De esta se resalta el avance significativo en la disminución de las soluciones no correctas [SNC] presentado entre la primera parte E y la segunda parte X, evidencia del inicio de la interiorización de los conceptos relacionados con los principios de la suma y del producto dado durante la transición de la solución natural e intuitiva a la solución con conocimiento previo del concepto. Esta situación se ratifica durante el desarrollo de la tercera parte de la actividad C. Este suceso es una prueba del avance de las formas de entender a las formas de pensar que ratifica dos cosas, la interiorización y construcción del significado del concepto combinatorio y el cumplimiento de la primera etapa del modelo «“I.C.O.R.”», el Resultado «R». Como debilidad se observa la poca participación de los estudiantes en la solución de la cuarta parte de la actividad S. Sin embargo, como fortaleza se tiene el avance de algunos estudiantes en sus formas pensar ya que sus logros conceptuales en la primera etapa los llevaron a solucionar este problema a partir de las formas de pensar desarrolladas, para llegar a las nuevas formas de entender. Lo anterior implica que en el estudiante haya dado la construcción de un significado más robusto de los conceptos relacionados con los principios de la suma y el producto.

3. Fase 3.

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas [SC] y las soluciones parciales [SP] de la muestra real de análisis, distribución porcentual que se presenta en la Figura 23. Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

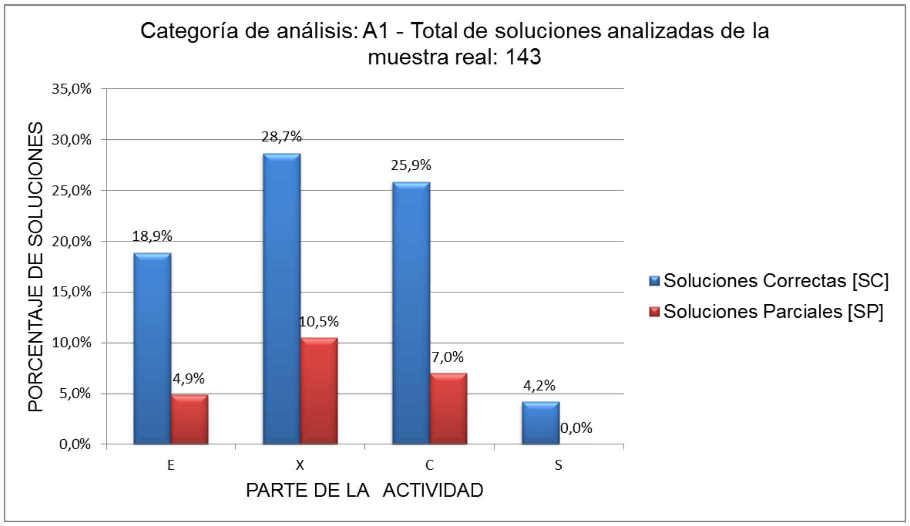


Figura 23. Categorías de Análisis: A1-Total de soluciones muestra real de análisis

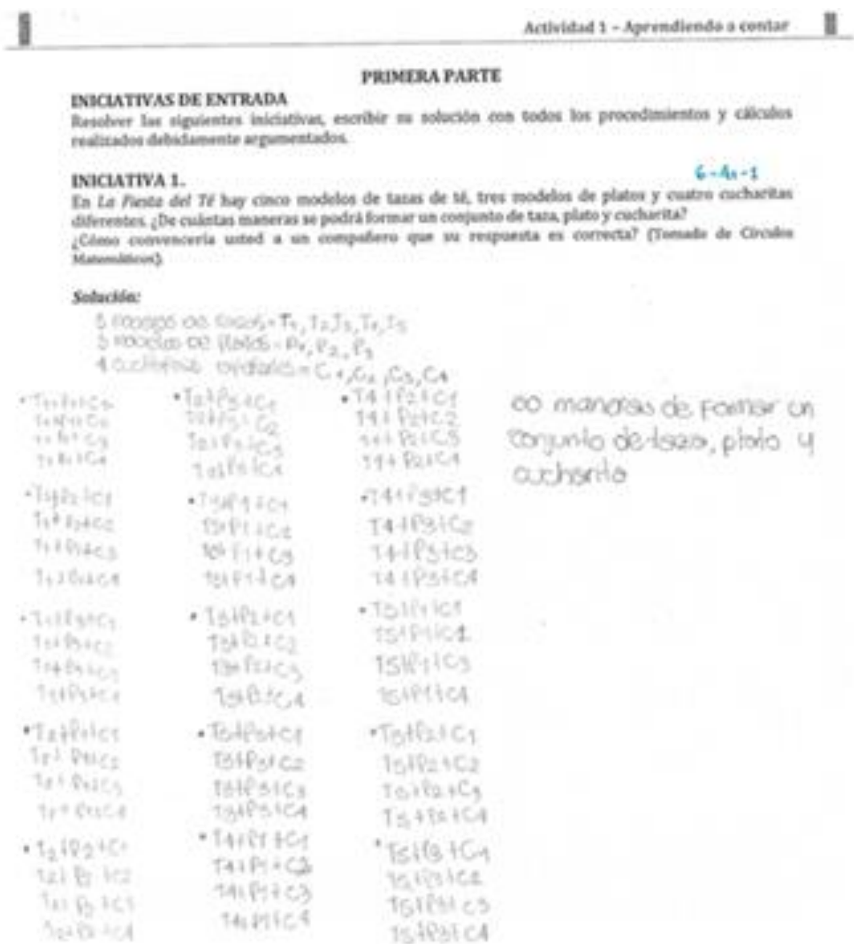
Por otro lado, se resalta la sobresaliente participación de los estudiantes quienes mostraron gran interés y acogida por el proceso de enseñanza y aprendizaje novedoso que se inició a trabajar con ellos con la aplicación de la actividad A1. Además se puede ver cómo para este caso la parte más exitosa de la actividad fue la segunda parte, las actividades extraclase y las colaborativas. Cifras que ratifican el avance en el proceso por desarrollar el pensamiento matemático y en este caso, el pensamiento combinatorio.

4.1.1. Análisis Soluciones Actividad 1- A1.

En cuanto a las formas de intentar materializar la situación planteada (hacer una representación) se destaca la manifestación de una estructuración progresiva en cuanto a su estructura y formalismo, con la cual se ayudan para hacer la interpretación, la relación y las operaciones que conducirán a la obtención de la solución del problema, es decir, mostrar una evolución entre sus acciones mentales primarias, las formas de entender y sus próximas formas de pensar.

Las soluciones logradas por los estudiantes evidencian una gran pluralidad de formas de abordar la iniciativa planteada, dejando entrever la existencia de unos razonamientos que van desde unas formas naturales y espontáneas de entender hasta unas formas estructuradas basadas en el análisis y la abstracción que implica la utilización de una estructura de interpretación, estructura de representación, estructura de relación y estructura de conexión.

Ahora se muestran algunas soluciones y sus interpretaciones.


Actividad 1 – Aprendiendo a contar

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

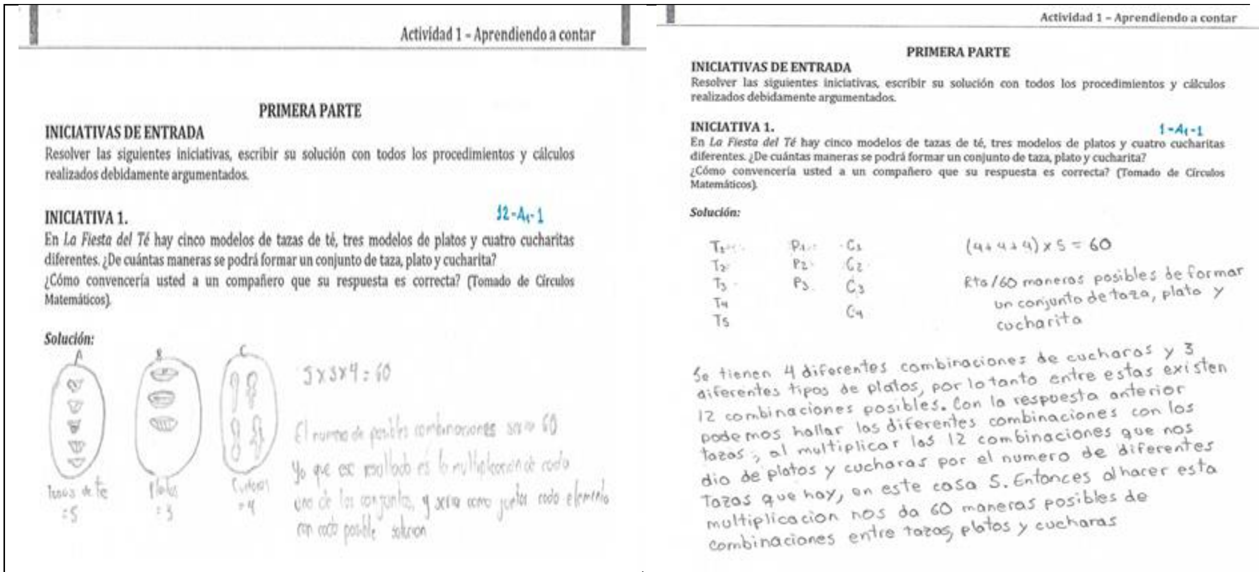
6-A1-1

En *La Fiesta del Té* hay cinco modelos de tazas de té, tres modelos de platos y cuatro cucharitas diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá formar un conjunto de taza, plato y cucharita?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Círculos Matemáticos).

Solución:

60 maneras de formar un conjunto de taza, plato y cucharita

Figura 24. Solución E6-A1-E-1



Actividad 1 – Aprendiendo a contar

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1. 12-A1-1

En *La Fiesta del Té* hay cinco modelos de tazas de té, tres modelos de platos y cuatro cucharitas diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá formar un conjunto de taza, plato y cucharita?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Círculos Matemáticos).

Solución:

A B C

Tasas de te =5 Platos =3 Cucharas =4

$5 \times 3 \times 4 = 60$

El numero de posibles combinaciones seria 60 ya que ese resultado es la multiplicacion de cada uno de los conjuntos, y seria como juntar cada elemento con cada posible solucion

Parte A - E12-A1-E-1

Actividad 1 – Aprendiendo a contar

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1. 1-A1-1

En *La Fiesta del Té* hay cinco modelos de tazas de té, tres modelos de platos y cuatro cucharitas diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá formar un conjunto de taza, plato y cucharita?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Círculos Matemáticos).

Solución:

T_1 P_1 C_1
T_2 P_2 C_2
T_3 P_3 C_3
T_4 C_4
T_5

$(4+4+4) \times 5 = 60$

Rta/60 maneras posibles de formar un conjunto de taza, plato y cucharita

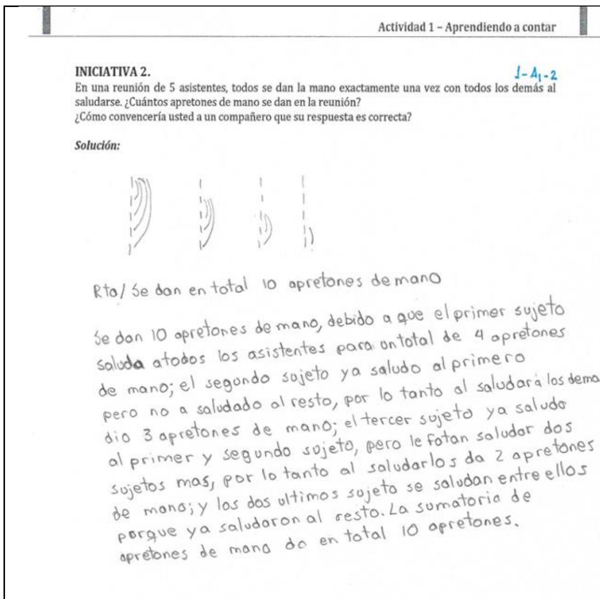
Se tienen 4 diferentes combinaciones de cucharas y 3 diferentes tipos de platos, por lo tanto entre estas existen 12 combinaciones posibles. Con la respuesta anterior podemos hallar las diferentes combinaciones con los tazas ; al multiplicar las 12 combinaciones que nos dio de platos y cucharas por el numero de diferentes Tazas que hay, en este caso 5. Entonces al hacer esta multiplicacion nos da 60 maneras posibles de combinaciones entre tazas, platos y cucharas

Parte B - E1-A1-E-1

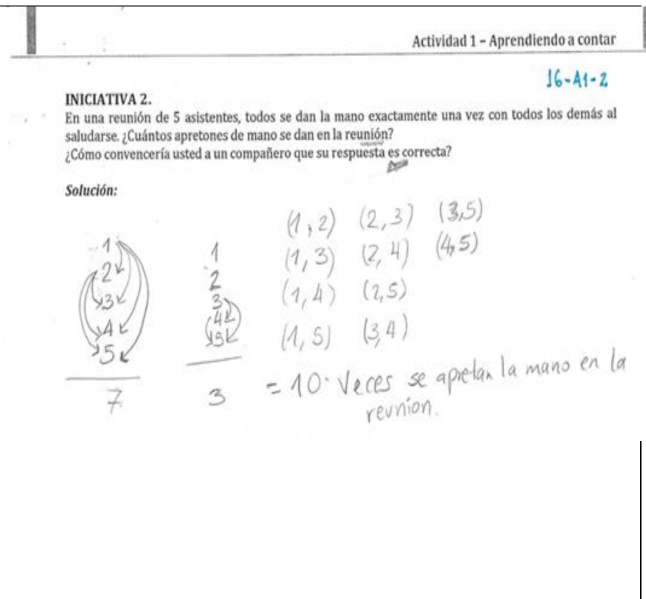
Figura 25. Solución E12 y E1-A1-E-1

Como se puede ver en la Figura 24 el estudiante E6 hace una representación mediante la asignación de símbolos a los objetos, los cuales relaciona de manera sistemática para listar todas las configuraciones posibles, logrando construir todos los elementos del nuevo conjunto (arreglos de tasa, plato y cuchara), obteniendo así la solución. Esta solución se asocia con la forma básica de interpretación (primeras acciones mentales), la cual conlleva al estudiante a realizar conteos mediante el listado de las configuraciones, siendo ésta su forma natural de entender el conteo. El estudiante E12 hace una representación mediante la construcción de los conjuntos de los objetos -condiciones- que establece el problema, como se muestra en la Parte A de la Figura 25, siendo éstas sus formas de entender, las cuales mediante la estructura de conexión relaciona conceptualmente con el concepto del producto, el cual entiende como el número de relaciones que se pueden dar entre los elementos de dos conjuntos, siendo esta última acción mental su forma de pensar, la cual implícitamente es el principio del producto. La solución del estudiante E1 presentada en la Parte B de la Figura 25, hace la abstracción directamente (formas de entender) de los símbolos sin necesidad de hacer el listado, ya que él analizó y sintetizó que cada *plato* (P_i), se puede relacionar una vez con cada *cuchara* (C_i) obteniendo 4 posibilidades por cada plato. Luego utiliza un argumento combinatorio aditivo para concluir que el total de subconjuntos de platos y cucharas es 12 (implícitamente utilizó el principio de la suma). De igual forma hace el análisis de las relaciones posibles bajo las condiciones dadas, entre el nuevo subconjunto (plato-cuchara) y el subconjunto de tasas, llegando a la solución del problema (implícitamente utilizó el principio del producto), siendo éstas sus formas de pensar.

El estudiante E1 en la solución de la iniciativa A1-E-2 mostrada en la Parte A de la Figura 26, hace una representación (materialización de las primeras acciones mentales) con símbolos (guiones verticales en este caso) para simular la situación y obtener todas las relaciones dadas con los saludos (formas de entender), para luego hacer el conteo de las mismas. Esta acción de conteo se asocia con el principio aditivo (formas de pensar aditivas).



Parte A - E1-A1-E-2

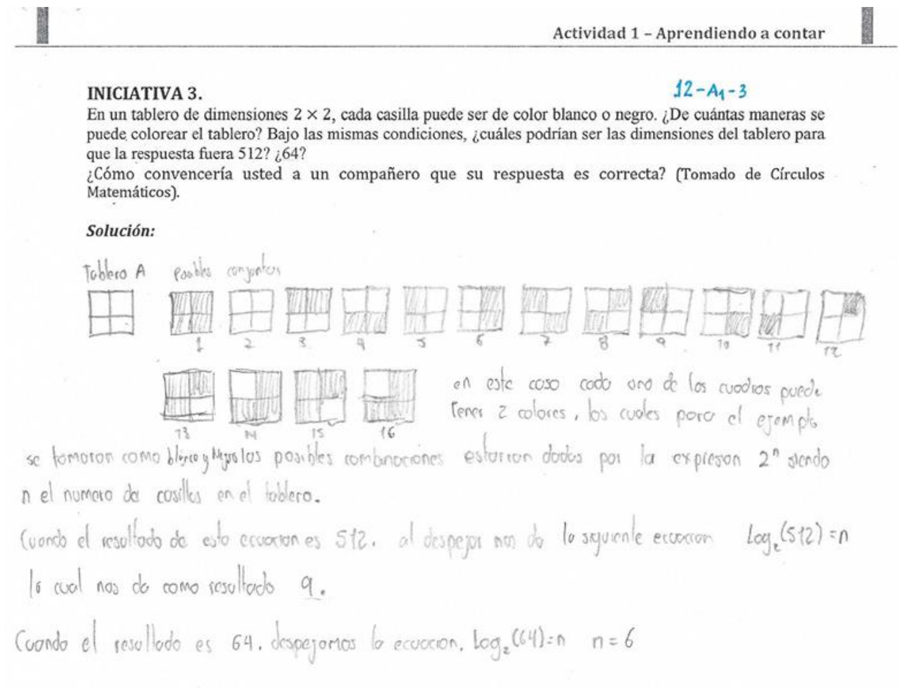


Parte B- E16-A1-E-2

Figura 26. Solución E1 y E16 -A1-E-2 y

El estudiante E16 en la solución de la iniciativa A1-E-2 expuesta en la Parte B de la Figura 26, realizó una estructura de representación asociada al producto cartesiano (formas de entender), descartando los casos que no cumplían las condiciones dadas en el problema. Ello evidencia que implícitamente está utilizando el principio de inclusión-exclusión, siendo estas acciones sus formas de pensar. Por ejemplo, por repetición del saludo (cuando la persona P_1 se saluda con la persona P_4, es equivalente a cuando la persona P_4 se saluda con la persona P_1) o por ser un caso no posible (el caso no posible que una persona cualquiera se salude consigo misma).

La solución dada por el E12 para la iniciativa A1-E-3 y presentada en la Figura 27, nuevamente pone de manifiesto la interpretación dada (ejecución de las primeras acciones mentales –formas de entender-) mediante estructura de representación que conduce posteriormente a las estructuras conceptuales (con algún tipo de argumento combinatorio implícito). Es así que E12 realiza una estructura de representación de los objetos (tableros pintados) para luego reproducir la situación puesta de manifiesto en la solución del problema, logrando así la solución de la primera pregunta, y en el proceso seguido dejando evidencia que sus formas de entender están basadas en el principio aditivo. A partir de ésta deduce el patrón conceptual implícito, un argumento combinatorio multiplicativo – variaciones con repetición-, siendo esta acción su forma de pensar, obteniendo el modelo general para la situación 2^n, donde claramente expresa que la base 2 representa los dos colores, y que el exponente representa el número de casillas que conforman el tablero (aquí el estudiante hace una construcción de significado al modelo 2^n). Hasta esta parte de la solución se puede concluir que se ha cumplido la primera etapa del modelo «"I.C.O.R."», el Resultado «R». Como se puede ver las formas de entender (principio aditivo) se transfieren a una estructura conceptual superior (principio del producto) siendo interiorizada por el estudiante como su nueva forma de pensar combinatoria. Además este proceso es la ejecución de la primera fase de control, el Módulo 6 o Resultados I, dentro de la estructura general del modelo metodológico.



Actividad 1 – Aprendiendo a contar

INICIATIVA 3. 12-A1-3

En un tablero de dimensiones 2 × 2, cada casilla puede ser de color blanco o negro. ¿De cuántas maneras se puede colorear el tablero? Bajo las mismas condiciones, ¿cuáles podrían ser las dimensiones del tablero para que la respuesta fuera 512? ¿64?

¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Círculos Matemáticos).

Solución:

Tablero A posibles conjuntos

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

13 14 15 16

en este caso cada uno de los cuadros puede tener 2 colores, los cuales para el ejemplo se tomaron como blanco y negro los posibles combinaciones estarían dadas por la expresion 2^n siendo n el numero de casillas en el tablero.

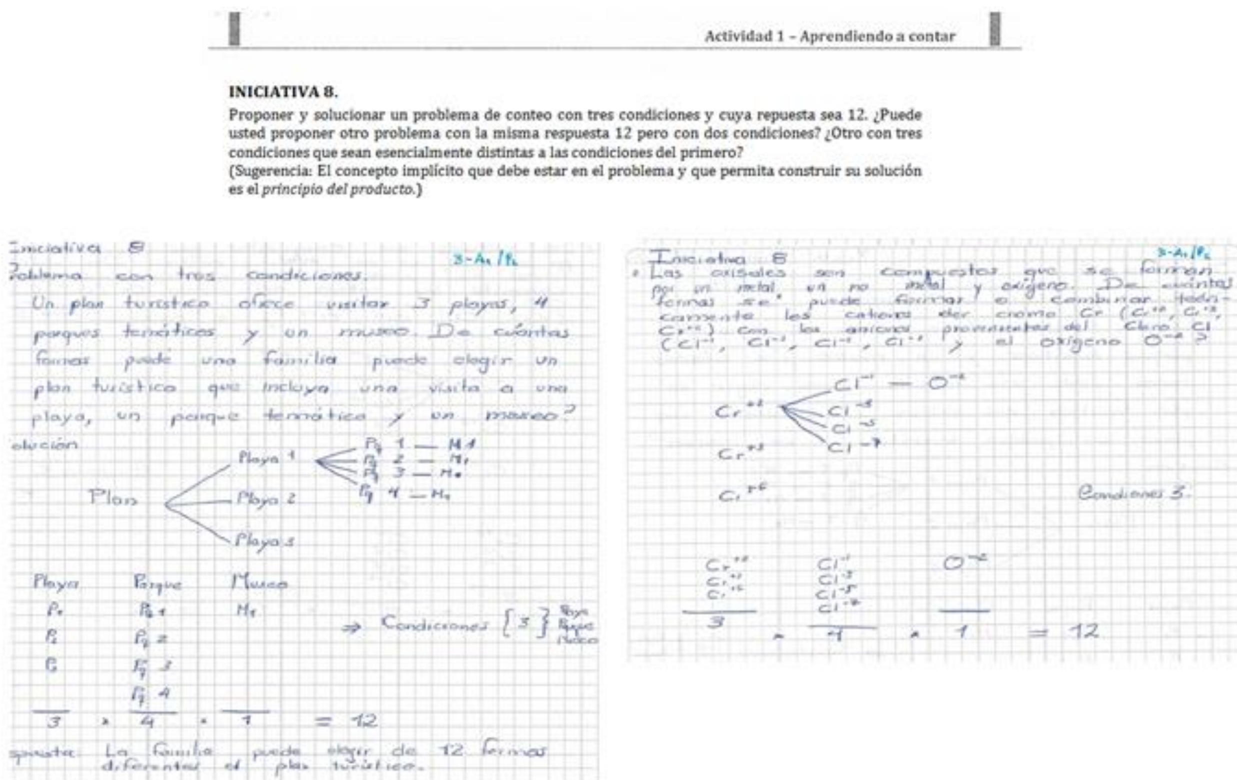
Cuando el resultado de esta ecuacion es 512. al despejar nos da la siguiente ecuacion $Log_2(512)=n$ la cual nos da como resultado 9.

Cuando el resultado es 64. despejamos la ecuacion. $log_2(64)=n$ $n=6$

Figura 27. Solución E12-A1-E-3

A partir de las formas de pensar interiorizadas en la primera etapa, el estudiante mediante la estructura de relación y conexión asocia el resultado obtenido (2^n) con un concepto conocido e interiorizado por él en otra área de la matemática, en este caso la logaritmación, para determinar la solución de las otras dos preguntas propuestas en el problema. Estas preguntas se plantearon a la inversa de la primera pregunta. De esta manera el estudiante muestra cómo sus acciones mentales para el caso estuvieron dadas por las formas de pensar desarrolladas en el primer caso, siendo éstas formas de pensar las que lo conllevaron a proceder sobre las nuevas formas de entender combinatoriamente, utilizando el principio del producto. Se evidencia un modelo o forma singular del producto que posteriormente representará el conteo de variaciones con repetición. Esta segunda parte se puede considerar como la ejecución de la segunda etapa del modelo «"I.C.O.R."», la Replica «R» en la cual se mostró cómo se da el Doble DNR «DDNR», que a partir de una forma de pensar interiorizada (principio del producto), se da una nueva forma de entender (principio de variación con repetición), lo cual constituye una construcción de un significado más robusto del principio del producto. Por otro lado, este proceso corresponde a la ejecución de la segunda fase de control, el Módulo 7 o Resultados II, dentro de la estructura general del modelo metodológico.

Es de anotar que los principios de conteo (formas de pensar) que se han ido evidenciando a través de las diferentes soluciones presentadas anteriormente aún no se habían presentado, ni desarrollado formalmente con los estudiantes, ya que estas iniciativas fueron su primer acercamiento con la combinatoria, y en particular con el conteo.


Actividad 1 – Aprendiendo a contar

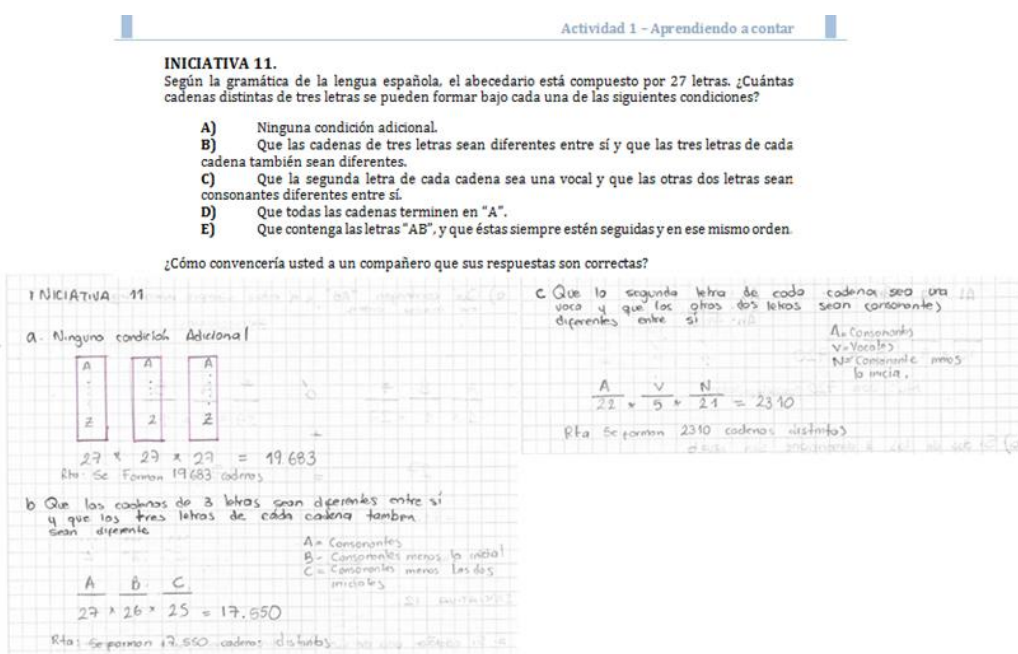
INICIATIVA 8.

Proponer y solucionar un problema de conteo con tres condiciones y cuya repuesta sea 12. ¿Puede usted proponer otro problema con la misma respuesta 12 pero con dos condiciones? ¿Otro con tres condiciones que sean esencialmente distintas a las condiciones del primero?

(Sugerencia: El concepto implícito que debe estar en el problema y que permita construir su solución es el *principio del producto.*)

Figura 28. Solución E3-A1-X-8

En la Figura 28 se muestra la solución realizada por E3 a la iniciativa A1-X-8, en la cual se solicitó a los estudiantes proponer y solucionar problemas con tres condiciones. El primero es un problema elaborado sobre un contexto de la cotidianidad, un plan turístico que incluye visitar una playa (primera condición), un parque temático (segunda condición) y un museo (tercera condición), a acepción del que se pueden ver en otro contexto, para este caso una aplicación química, utilizado en la formación de las oxisales (compuesto formado por tres elementos, las tres condiciones solicitas en el problema). Aquí se ve que el estudiante ha logrado extender sus razonamientos a otras áreas más formales. En general las situaciones planteadas están basadas en una estructura de representación dada por el diagrama de árbol, sobre el cual se hacen las relaciones de las condiciones en cada caso (formas de entender), transfiriéndose éstas a la estructura conceptual del principio del producto como se le sugirió (mostrado por el estudiante en la representación de las casillas). Se podría pensar que una forma de elaborar los problemas sería primero idear las condiciones y luego construir un contexto para las mismas. Viéndose así como una estructura conceptual (formas de pensar), puede asemejarse a una gran variedad de casos en diferentes contextos. Lo anterior deja entrever que estos estudiantes han logrado interiorizar el concepto del principio del producto atribuyéndole significado manifiesto en cómo plantearon sus problemas. Esta solución es otra evidencia de que los estudiantes lograron el desarrollo completo de la primera etapa del modelo «“I.C.O.R.”», el Resultado «R», que en la estructura general del modelo metodológico es la ejecución de la primera fase de control, el Módulo 6 o Resultados I.


Actividad 1 – Aprendiendo a contar

INICIATIVA 11.

Según la gramática de la lengua española, el abecedario está compuesto por 27 letras. ¿Cuántas cadenas distintas de tres letras se pueden formar bajo cada una de las siguientes condiciones?

A) Ninguna condición adicional.
B) Que las cadenas de tres letras sean diferentes entre sí y que las tres letras de cada cadena también sean diferentes.
C) Que la segunda letra de cada cadena sea una vocal y que las otras dos letras sean consonantes diferentes entre sí.
D) Que todas las cadenas terminen en “A”.
E) Que contenga las letras “AB”, y que éstas siempre estén seguidas y en ese mismo orden.

¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

INICIATIVA 11

a. Ninguna condición Adicional

A … Z A … Z A … Z

27 × 27 × 27 = 19 683
Rta: Se Forman 19 683 cadenas

b Que las cadenas de 3 letras sean diferentes entre sí y que las tres letras de cada cadena tambien sean diferente

A = Consonantes
B = Consonantes menos la inicial
C = Consonantes menos las dos iniciales

A × B × C
27 × 26 × 25 = 17.550
Rta: Se forman 17.550 cadenas distintas

c Que la segunda letra de cada cadena sea una voca y que las otras dos letras sean consonantes diferentes entre si

A = Consonantes
V = Vocales
N° Consonante menos la inicia.

A × V × N
22 × 5 × 21 = 2310
Rta Se forman 2310 cadenas distintas

Figura 29. Solución E11-A1-C-11

La solución de E11 a la iniciativa A1-C-11, expuesta en la Figura 29, es una muestra de los resultados que se obtuvieron en el desarrollo de los trabajos colaborativos. Además, son trabajos que se realizaron de manera independiente en el aula de clase, reflejando un buen nivel de empoderamiento del concepto del principio de conteo de la suma y el producto. Estos trabajos presentados cumplieron todos con la solución correcta, además todos tienen una misma estructura de desarrollo. Parten desde una estructura que permite representar la posición que ocupa cada letra dentro de la cadena, para luego hacer las restricciones necesarias según las condiciones dadas (formas de entender), y así hacer las relaciones necesarias entre las mismas, usando la estructura conceptual de la suma, el producto o la combinación de los dos. Lo anterior se puede considerar como un indicador para el grupo en general que han logrado interiorizar estos conceptos, cumpliéndose con el objetivo de la actividad y la primera etapa del modelo «"I.C.O.R."», correspondiente al «RESULTADO», siendo ésta la evidencia que ratifica la conclusión de la Fase 3 de este análisis (ver Figura 23 y Tabla 5).

4.2. Actividad 2 – A2 - Mi posición es importante

1. **Fase 1.**

Esta fase está formada por el componente de la unidad de análisis, la cual corresponde a la Actividad 2 – Mi posición es importante. Para esta actividad la muestra objetivo era el total de soluciones esperadas, 276, con la asistencia total de los 23 estudiantes, de los cuales, además se esperaba que todos cumplieran con resolver todas las 12 iniciativas de la actividad.

En la Figura 30 se muestra la distribución porcentual de las soluciones obtenidas en la implementación de A2, durante el desarrollo de las clases C3 y C4. De ésta resaltan nuevamente dos situaciones no previstas en el conteo original, el número de soluciones no obtenidas por la inasistencia [I] correspondiente al 2,9% de lo esperado y la no solución [SS] de algunas iniciativas en las diferentes partes de A2. De este modo se presenta la muestra real que corresponde al 61,2% de la muestra objetivo, de la cual se descuentan los dos aspectos señalados.

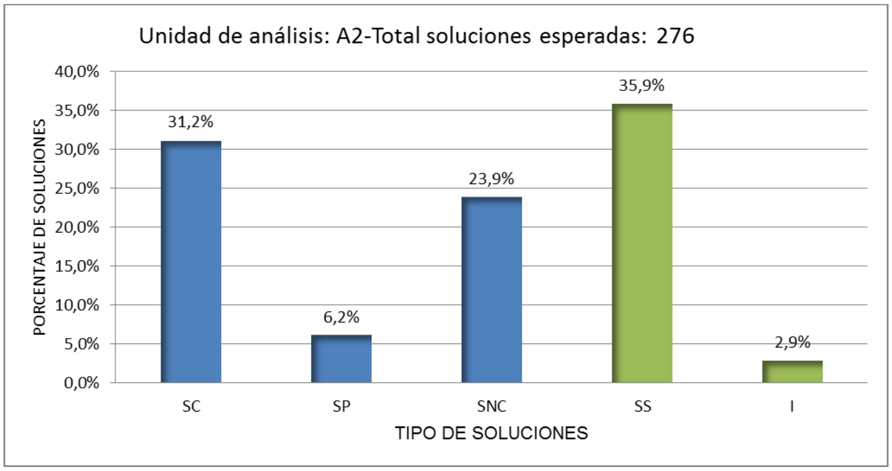


Figura 30. Unidad de Análisis: A2-Total de soluciones esperadas

2. Fase 2.

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A2, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S, análisis realizado sobre la muestra real, correspondiente a 169 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 31 se muestran los resultados de este análisis sobre la muestra, de la cual se tomó como muestra real de análisis el 60,9%, que corresponde a 103 soluciones.

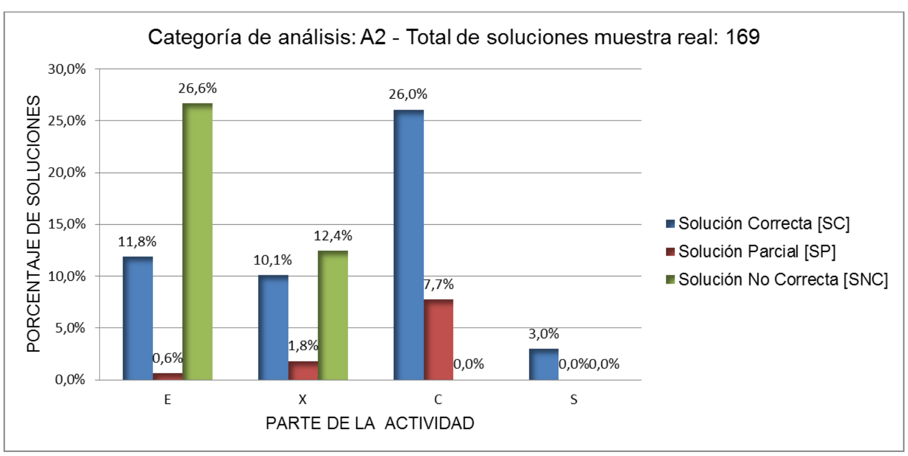


Figura 31. Categorías de Análisis: A2-Total de soluciones muestra real

De ésta se resalta el avance significativo dado por la disminución de las soluciones no correctas [SNC] presentado entre la primera parte E y la segunda parte X, evidencia del inicio de la interiorización del concepto del principio de la permutación que se dio durante la transición de la solución natural e intuitiva a la solución con conocimiento previo del concepto. Esta situación se ratifica durante el desarrollo de la tercera parte de la actividad C. Este suceso es una prueba del avance de las formas de entender a las formas de pensar que, como se notó en el caso de la A1, ratifica dos cosas la interiorización y construcción del significado del concepto combinatorio y el cumplimiento de la primera etapa del modelo «"I.C.O.R."», el Resultado «R». Igualmente, como debilidad se observa la poca participación de los estudiantes en la solución de la cuarta parte de la actividad S. Sin embargo, como fortaleza se tiene el avance de algunos estudiantes en sus formas pensar, ya que sus logros conceptuales en la primera etapa, los llevaron a solucionar este problema a partir de las formas de pensar desarrolladas, para llegar a nuevas formas de entender, situación que implica que en el estudiante se haya dado la construcción de un significado más robusto del concepto del principio de la permutación.

3. **Fase 3.**

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas SC y las soluciones parciales SP de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 32. Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

Por otro lado, se resalta la sobresaliente participación de los estudiantes, que continúan mostrando gran interés y acogida por el proceso de enseñanza y aprendizaje iniciado a trabajar con ellos, y que se continuó con la aplicación de la actividad A2. Además se muestra que la parte más exitosa de la actividad fue la tercera parte, las actividades colaborativas, y el cambio significativo entre la primera y segunda parte, evidenciándose la apropiación del concepto de la permutación, cifras que ratifican el avance en el proceso por desarrollar el pensamiento matemático y en especial, el pensamiento combinatorio.

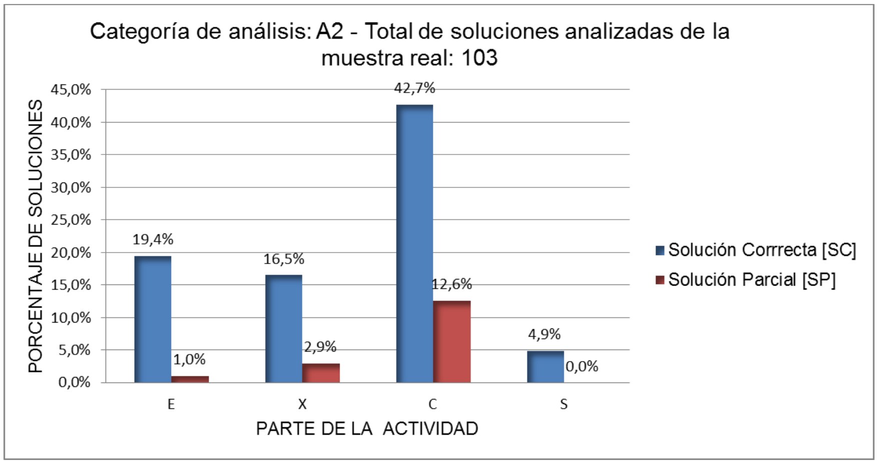


Figura 32. Categorías de Análisis: A2-Total de soluciones muestra real de análisis

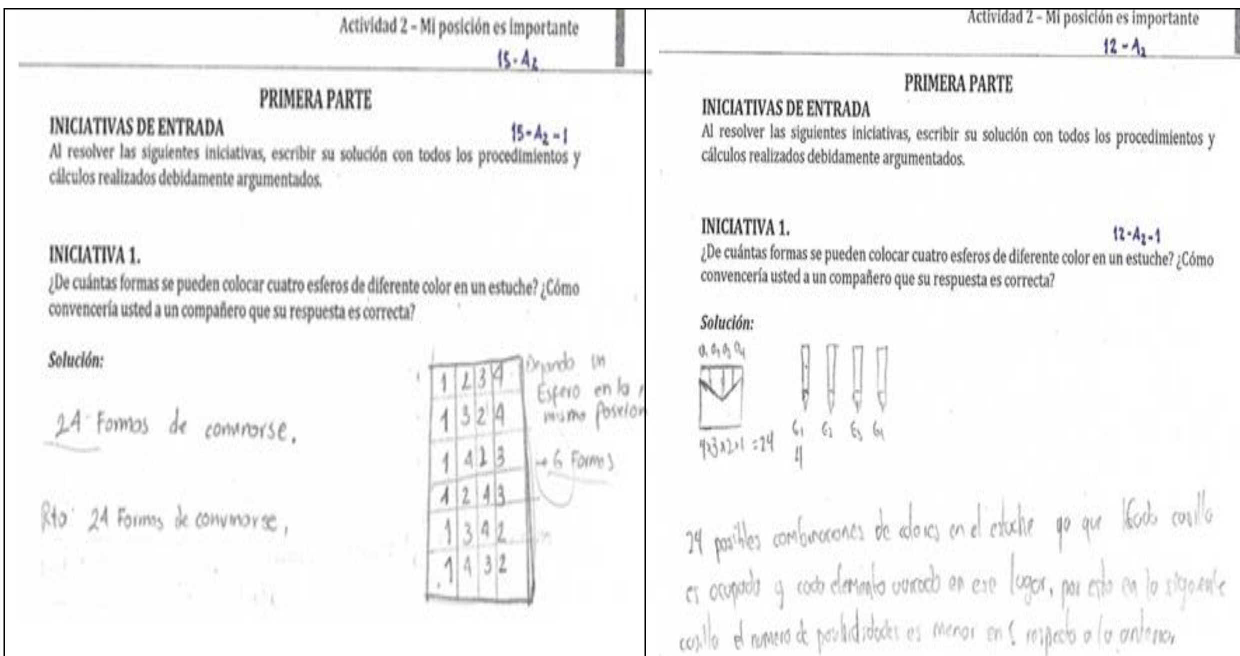
4.2.1. Análisis Soluciones Actividad 2- A2.

En las soluciones presentadas por los estudiantes se evidencia nuevamente una estructura implícita en la pluralidad de formas de abordar las iniciativas planteadas, la cual podría ser clasificada por niveles. Así se muestra nuevamente desde un nuevo concepto –principio de la permutación- la existencia de la hipótesis sobre los niveles de razonamiento que van desde unas formas naturales y espontáneas de entender hasta unas formas estructuradas basadas en el análisis y la abstracción que implican la utilización de estructuras de interpretación, estructuras de representación, estructuras de relación y conexión, estructuras conceptuales y estructuras operatorias. En cuanto a las formas de intentar materializar la situación planteada (hacer una representación) se destaca la manifestación de una esquematización progresiva en cuanto a su estructura y formalismo, con la cual los estudiantes se ayudan para hacer la interpretación, la relación y las operaciones que conducirán a la obtención de la solución del problema. Es decir, se nota una evolución entre sus acciones mentales primarias, las formas de entender, y sus próximas formas de pensar. Además, es una forma de sustentar y argumentar cómo se va dando la interiorización de los conceptos trabajados tanto en esta actividad como en la actividad anterior, ya que éstos se convirtieron en el hilo conductor de la solución de las iniciativas de la actividad A2, mostrando que sí sucede la primera etapa del modelo el RESULTADO «R».

Los resultados que se presentan a continuación y que fueron construidos por los estudiantes en esta parte del proceso dejan ver como el modelo se puede desarrollar completamente en sus dos etapas RESULTADO y REPLICA, mostrando como la maduración gradual de un concepto se convierte en la construcción de un significado robusto del mismo.

Además, se observará que los resultados expuestos a continuación son una buena aproximación a las consideraciones hechas por Gowers (2000), las cuales también harán parte de la caracterización del pensamiento combinatorio.

A continuación se presenta el análisis de algunas soluciones representativas de esta actividad.


Actividad 2 - Mi posición es importante

15-A2

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

15-A2-1

Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

¿De cuántas formas se pueden colocar cuatro esferos de diferente color en un estuche? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Solución:

24 Formas de commorse.

Rta: 24 Formas de convinorse,

1	2	3	4
1	3	2	4
1	4	1	3
1	2	4	3
1	3	4	2
1	4	3	2

Dejando un Esfero en la misma posicion → 6 Formas

Actividad 2 - Mi posición es importante

12-A2

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

12-A2-1

¿De cuántas formas se pueden colocar cuatro esferos de diferente color en un estuche? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Solución:

4x3x2x1 = 24

24 posibles combinaciones de colores en el estuche ya que cada casillo es ocupado y cada elemento ocupado en ese lugar, por esto en la siguiente casilla el numero de posibilidades es menor en 1 respecto a la anterior

Parte A - E15-A2-E-1

Parte B - E12-A2-E-1

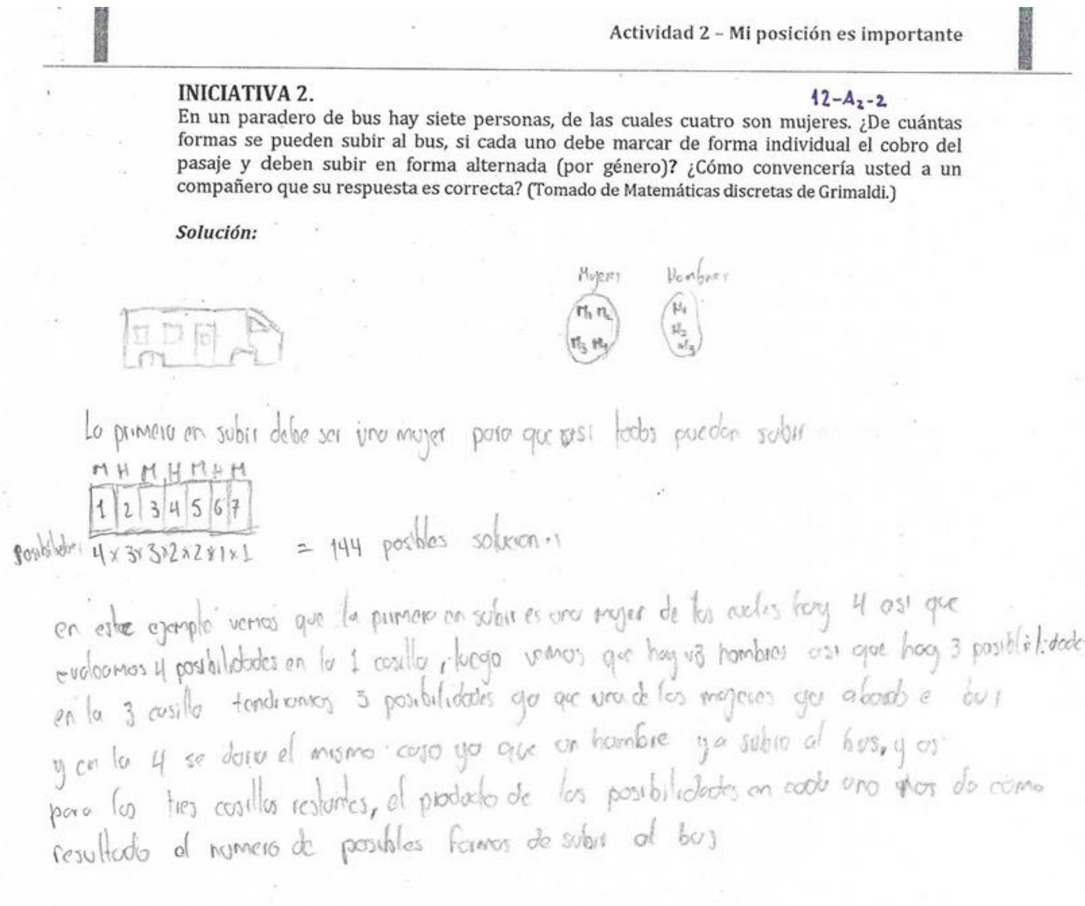
Figura 33. Solución E15 y E12-A2-E-1

En la solución dada por E15 y presentada en la Parte A de la Figura 33, se observa que hace un razonamiento bajo la estructura de representación por medio de los símbolos que asigna a los objetos -

esferos- dentro del problema, asignando números a los colores (1, 2, 3, 4, uno para cada color). Luego realiza la lista sistemática para un caso (formas de entender) y concluye, dando la solución. Esta conclusión está asociada a dos condiciones que la estudiante debió evidenciar en el esquema realizado cuando dice “dejando un esfero en la misma posición”, éstas son: que la configuración requiere de orden y que no se pueden repetir los elementos, siendo estás las formas de entender. Esta conexión le permitió activar su estructura conceptual (formas de pensar), generando de esta forma su respuesta, proceso que pudo haberse dado bajo el principio de la suma o el producto, ambos casos son viables.

Por otro lado, los razonamientos realizados por el estudiante E12 como se muestra en la Parte B de la Figura 33 pasan de la estructura de representación (el diseño del estuche, sobre el cual señala las posibles posiciones que puede ocupar un esfero) a la estructura conceptual bajo el principio del producto. Es decir, usó sus formas de pensar pre-construidas para resolver una situación combinatoria (principio del producto), evidenciando que ha entendido las condiciones necesarias, orden al indicar que un esfero ocupará una posición determinada en cada configuración y no repetición al señalar que en una posición siguiente habrá un esfero menos que entre las posibilidades para la posición anterior.

En la solución de E12 presentada en la Figura 34, observamos que el estudiante identificó que hay dos subconjuntos –mujeres y hombres- determinando que la primera en subir al bus debe ser una mujer para que se pueda dar la condición de alternados por género, siendo ésta la estructura de interpretación. Luego hace la estructura de representación, en el cual simula una situación mediante un dibujo. A partir de ésta pasa a la estructura de relación y conexión en la cual interpreta las condiciones (orden y no repetición), de tal forma que evidencia la manifestación de las formas de entender. Estás a su vez lo inducen a crear la estructura conceptual –principio del producto- manifestación de las formas de pensar, obteniendo de esta forma la solución del problema.



Actividad 2 – Mi posición es importante

INICIATIVA 2. 12-A2-2

En un paradero de bus hay siete personas, de las cuales cuatro son mujeres. ¿De cuántas formas se pueden subir al bus, si cada uno debe marcar de forma individual el cobro del pasaje y deben subir en forma alternada (por género)? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Matemáticas discretas de Grimaldi.)

Solución:

Mujeres Hombres

Lo primero en subir debe ser una mujer para que asi todos puedan subir

M H M H M H M

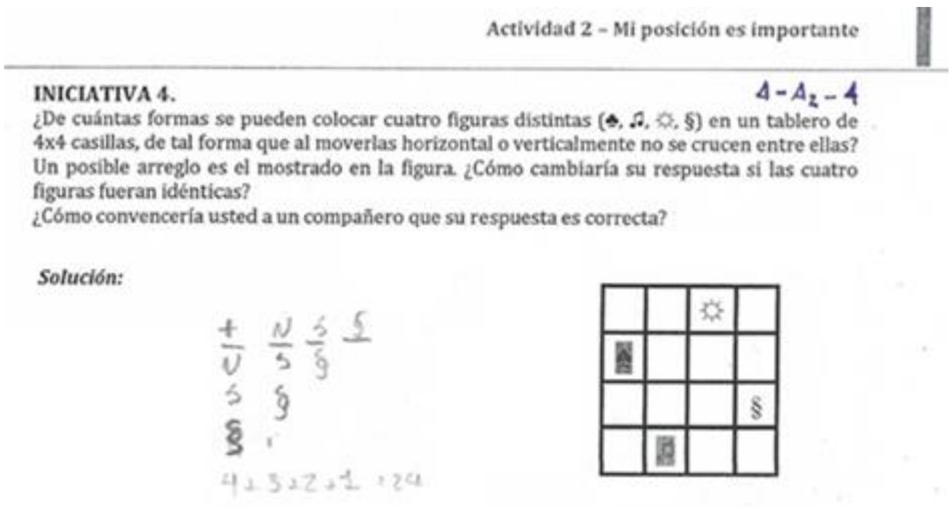
1 2 3 4 5 6 7

posibilidades 4 x 3 x 3 x 2 x 2 x 1 x 1 = 144 posibles solucion·s

en este ejemplo vemos que la primera en subir es una mujer de las cuales hay 4 asi que evaluamos 4 posibilidades en la 1 casilla, luego vemos que hay 3 hombres asi que hay 3 posibilidades en la 3 casilla tendriamos 3 posibilidades ya que una de las mujeres ya abordo el bus y en la 4 se dara el mismo caso ya que un hombre ya subio al bus, y asi para las tres casillas restantes, el producto de las posibilidades en cada una nos da como resultado el numero de posibles formas de subir al bus

Figura 34. Solución E12-A2-E-2

Se presenta en la Figura 35 una solución parcial a la primera pregunta de la iniciativa, dada por E4. En ésta el estudiante con ayuda de la estructura de representación [acciones mentales] identificó las condiciones (orden y no repetición), formas de entender parciales, sobre los elementos –figuras-, pero no identificó el doble movimiento que puede hacer una figura –horizontal y vertical- por lo que solamente hizo el conteo de la forma vertical, materializando las formas de pensar mediante la estructura conceptual del principio del producto. Por comentarios y participaciones durante la clase acerca de la segunda pregunta los estudiantes dijeron “que no sabían cómo interpretar las figuras idénticas”; esta condición es repetición de elementos indistinguibles.


Actividad 2 – Mi posición es importante

INICIATIVA 4. 4 - A_2 - 4

¿De cuántas formas se pueden colocar cuatro figuras distintas (♣, ♫, ☼, §) en un tablero de 4x4 casillas, de tal forma que al moverlas horizontal o verticalmente no se crucen entre ellas? Un posible arreglo es el mostrado en la figura. ¿Cómo cambiaría su respuesta si las cuatro figuras fueran idénticas?

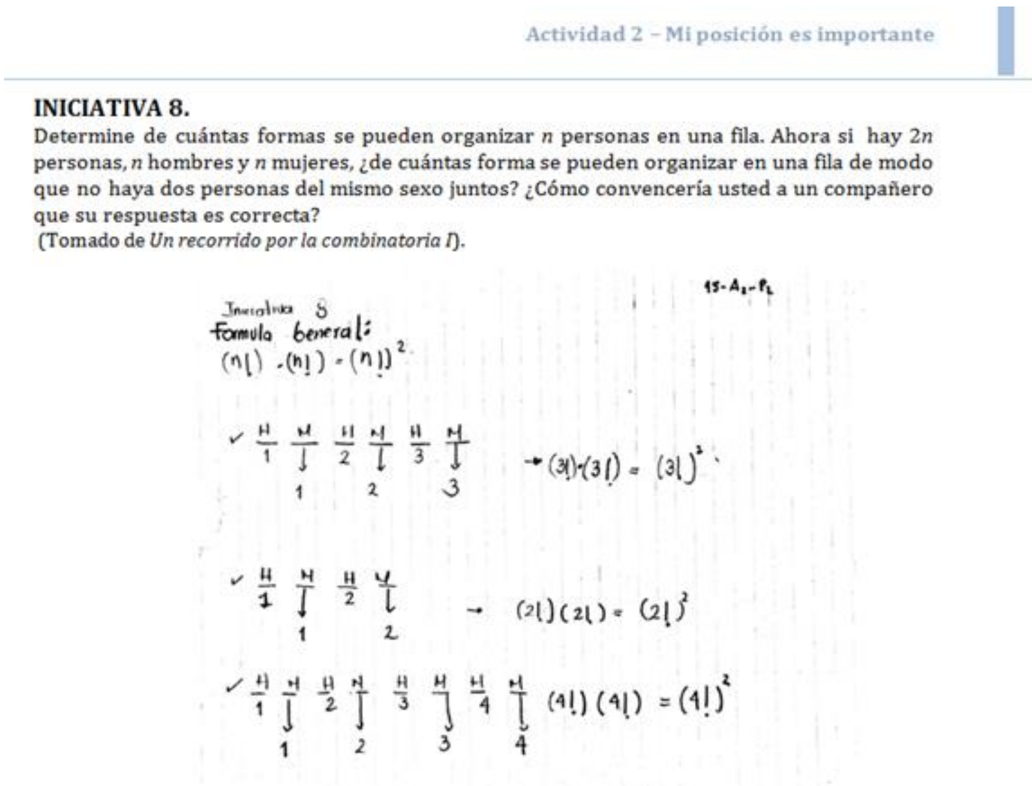
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Solución:

4 x 3 x 2 x 1 = 24

Figura 35. Solución E4-A2-E-4

La solución de E15, presentada en la Figura 36 es una iniciativa con solución de caso general. En ésta el estudiante recurrió a una estructura de representación para hacer algunos casos particulares de 2, 3 y 4 hombres y mujeres en cada caso (conjuntos iniciales), siendo éstas las formas de entender. Mediante una estructura de relación, transfirió el análisis de los casos a la estructura de generalización combinatoria, sustentada en dos estructuras conceptuales (formas de pensar). El primero de éstas es el principio de la permutación total (que se representará por $(n!)$) con el cual cuenta todas las rotaciones (configuraciones o arreglos) del subconjunto de hombres, por una parte, y por otra parte hace lo mismo con el subconjunto de mujeres. Luego utiliza el principio del producto para relacionar estos dos resultados $(n!)^2$, logrando dar la solución general para n-hombres y n-mujeres. Este caso es una evidencia de la ejecución de la segunda etapa del modelo, LA REPLICA «R». Como se ha dicho, en esta etapa se parte de las formas de pensar desarrolladas en la primera etapa (interiorización del concepto de permutación, evidenciado en la construcción de significado). Este proceso lo alcanzó el estudiante con el desarrollo de la primera parte E de A2, lo cual le permitió aplicar la estructura conceptual (formas de pensar) sobre la estructura de representación, logrando de esta forma construir los casos particulares. A partir de éstos formula la generalización combinatoria, es decir que se ha dado la transferencia de las formas de pensar (significado del concepto del principio de la permutación y del producto) a las nuevas formas de entender (significado más robusto del concepto del principio de la permutación y del producto), interiorizando de esta forma un nuevo objeto en su saber.



Actividad 2 – Mi posición es importante

INICIATIVA 8.

Determine de cuántas formas se pueden organizar *n* personas en una fila. Ahora si hay 2*n* personas, *n* hombres y *n* mujeres, ¿de cuántas forma se pueden organizar en una fila de modo que no haya dos personas del mismo sexo juntos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
(Tomado de *Un recorrido por la combinatoria I*).

15-A2-P2

Iniciativa 8

Formula General:

$(n!)\cdot(n!) = (n!)^2$

H M H M H M → $(3!)(3!) = (3!)^2$

H M H M → $(2!)(2!) = (2!)^2$

H M H M H M H M $(4!)(4!) = (4!)^2$

Figura 36. Solución E15-A2-X-8

En la solución de las Figura 37 y 38 realizadas por el G4, se muestra la apropiación del concepto de permutación. Esta situación también representa una forma de ver la ejecución del modelo en su segunda etapa, así como se puede observar que los estudiantes usan la estructura de representación (acciones mentales) mediante la cual hacen la estructura de relación y conexión entre los subconjuntos que forman las condiciones dadas (formas de entender), para luego proceder directamente con la estructura conceptual ya adquirida (principio del producto y de la permutación) siendo éstas las formas de pensar. De este modo se logra la solución del problema, situación que indica que han desarrollado nuevas formas de entender, ya que lograron aplicar varias operaciones combinatorias en un mismo procedimiento, y en algunos casos hacer la solución general del problema.

INICIATIVA 9.

Un comité europeo cuenta con 6 delegados alemanes, 5 delegados franceses, y 3 delegados italianos. ¿De cuántas formas pueden estos 14 delegados sentarse en una fila de 14 sillas, si los delegados de cada país insisten en estar todos sentados uno junto al otro?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

G4- A_2 - P_3

Iniciativa 9

¿De cuantos Formas pueden estos 14 delegados sentarse en una Fila de 14 sillas, si los delegados de cada pais Insisten en estar todos Sentados uno junto al otro?

6 Alemanes | 5 Franceses | 3 Italianos

1 2 3 4 5 6 | 7 8 9 10 11 | 12 13 14

Polarion Franceses

$3! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 3! = 3.110.400$ RTA= los delegados de cada pais pueden sentarse uno junto al otro de 3.110.400 Formas

Tres Subgrupos en Alemanes Franceses y Italianos, | Polarion Alemanes | Polarion Italianos

Figura 37. Solución G-A2-C-9

Actividad 2 – Mi posición es importante

INICIATIVA 10.

En un banco hay 10 módulos de atención al público, atendidos diariamente cada uno por un cajero fijo, los cuales se van a conocer como el cajero1, el cajero 2,… y el cajero 10 respectivamente. Cada mes se elige al "Gran Cajero" (cajero con el mayor número de atenciones al público). Si todos deben asistir a una reunión semanal y sentarse en la misma fila, cumpliendo con las siguientes reglas: Primera regla: El "Gran Cajero" del mes ocupará la silla correspondiente al número de su caja, ya que en ella le colocan el premio de la semana por ser el Gran Cajero. Segunda regla: a la derecha del Gran Cajero se deben sentar los cajeros con mayor número de caja que la del Gran Cajero y a la izquierda los de menor número.

a) Por ejemplo si el Gran Cajero del mes es el **C4** (cajero que atiende el modulo cuatro, cajero 4), a la derecha de él se sientan los cajeros 5 al 10; y a la izquierda de él los cajeros 1 al 3 (En el gráfico se muestra una posible ubicación de los cajeros el día de la reunión, ocasión en la cual el "Gran Cajero" es el cajero 4.) ¿De cuántas maneras se pueden sentar ese día? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

C3	C1	C2	GC	C8	C10	C5	C7	C6	C9

b) Suponiendo que el reconocimiento al Gran Cajero se hace sin repetición hasta completar un ciclo en el cual los 10 cajeros hayan sido elegidos como el Gran Cajero ¿Cuál es el total de formas posibles en las que se pudieron sentar los diez cajeros durante un ciclo? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

c) Construir un modelo que permita contar las formas de acomodarse cada vez que hay una nueva reunión de cajeros.
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Iniciativa 10

a) ¿de cuantas maneras se pueden sentar ese dia

$3! \cdot 6!$

$6 \cdot 720 = 4320$

b) ¿Cual es el total de Formas posibles en las que Se pudieron Sentar los diez Cajeros durante un ciclo?

1, 2, 3, 4, 5, mitad, 6

$9! + (1! \cdot 8!) + (2! \cdot 7!) + (3! \cdot 6!) + (4! \cdot 5!) + (5! \cdot 4!)$

7, 8, 9, 10

$+ (6! \cdot 3!) + (7! \cdot 2!) + (8! \cdot 1!) + 9!$

1 = 362880
2 = 40820
3 = 10800
4 = 4320
5 = 2880
6 = 2880
7 = 4320
8 = 10800
9 = 40820
10 = 362880

c) Construir un modelo que permita contar las Form. de acomodarse Cada vez que hay una nueva reunión de Cajeros.

$(n-1)! \cdot (10-n)!$

n = N° Posicion del Gran Cajero.

→ Modelo General Al variar el número de cajero.

$(n-1)! \cdot (x-n)!$

n = N° Posicion del Gran Cajero.
x = N° Cajeros

Figura 38. Solución G-A2-C-10

4.3. Actividad 3 – A3 - El intercambio

1. Fase 1.

Esta fase está formada por el componente de la unidad de análisis, la cual corresponde a la Actividad 3 – El intercambio. Para esta actividad la muestra objetivo era el total de soluciones esperadas, 253, con la asistencia total de los 23 estudiantes, de los cuales, además se esperaba que todos cumplieran con resolver todas las 11 iniciativas de la actividad.

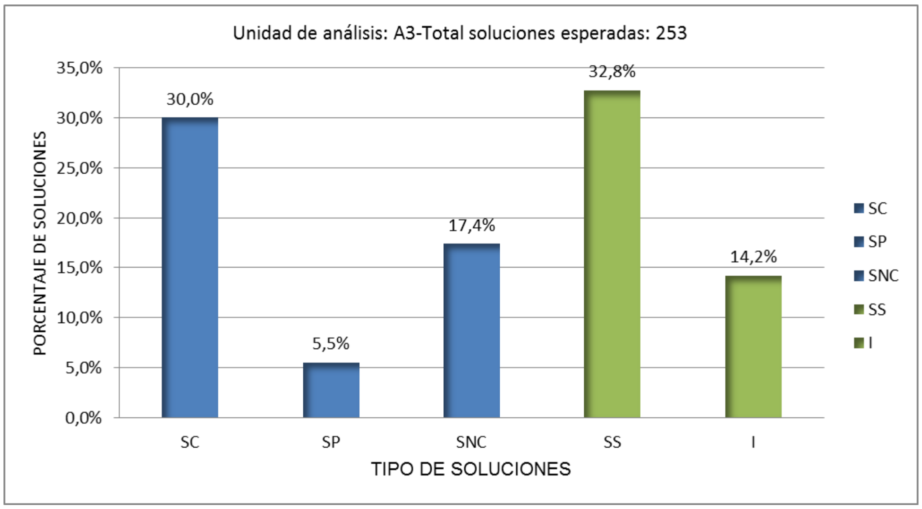


Figura 39. Unidad de Análisis: **A3-Total de soluciones esperadas**

En la Figura 39 se muestra la distribución porcentual de las soluciones obtenidas durante la implementación de A3, durante el desarrollo de las clases C5 y C6, de manera que se obtiene la muestra real corresponde al 53% de la muestra objetivo. Este resultado es consecuencia de la inasistencia de los estudiantes.

2. Fase 2.

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A3, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S, análisis realizado sobre la muestra real, correspondiente a 134 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 40.se presentan los resultados de este análisis sobre la muestra, en la cual se tomó como muestra real de análisis el 67,2%, que corresponde a 90 soluciones

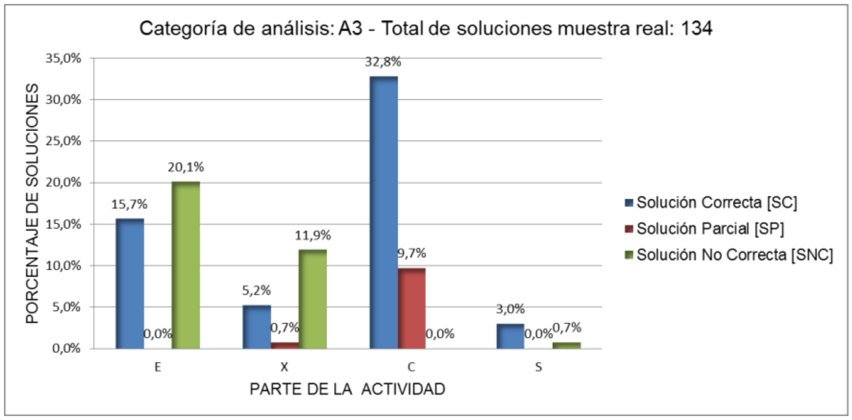


Figura 40. Categorías de Análisis: A3-Total de soluciones muestra real

De ésta se resalta la disminución significativa en las soluciones no correctas [SNC] presentada entre la segunda parte X y la tercera parte C, evidencia de la interiorización del concepto del principio de la variación dada durante la transición de la solución natural e intuitiva a la solución con conocimiento previo del concepto. Esta situación se ratifica durante el desarrollo de la tercera parte de la actividad, C, y constituye una prueba del avance de las formas de entender a las formas de pensar. De nuevo se ratifican dos cosas, la interiorización y construcción del significado del concepto combinatorio y el cumplimiento de la primera etapa del modelo «“I.C.O.R.”», el Resultado «R». Igualmente, de nuevo como debilidad se observa la poca participación de los estudiantes en la solución de la cuarta parte de la actividad S, y como fortaleza se tiene el avance de algunos estudiantes en sus formas pensar. Sus logros conceptuales en la primera etapa los llevaron a solucionar este problema a partir de las formas de pensar desarrolladas, para llegar a las nuevas formas de entender, situación que implicó que se hubiese dado en los estudiantes la construcción de un significado más robusto del concepto del principio de la variación.

3. Fase 3

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas [SC] y las soluciones parciales [SP] de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 41.

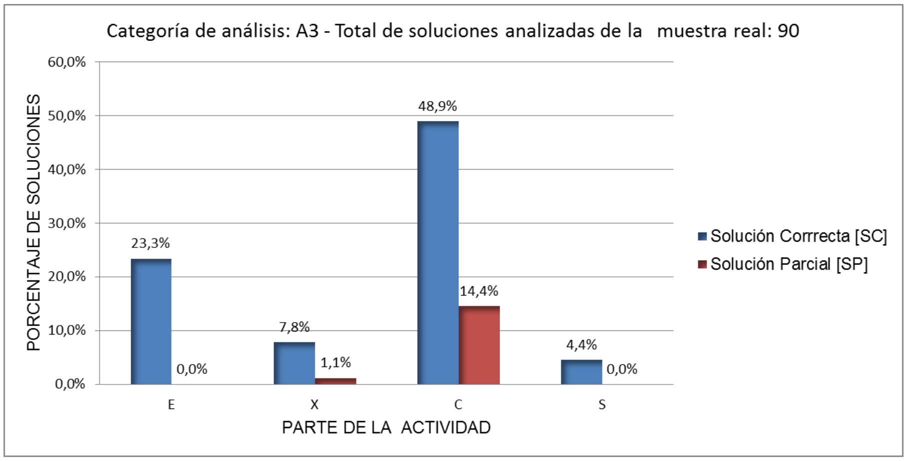


Figura 41. Categorías de Análisis: A3-Total de soluciones muestra real de análisis

Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase. Por otro lado, se resalta la sobresaliente participación de los estudiantes que continúan mostrando gran interés y acogida por el proceso de enseñanza y aprendizaje iniciado a trabajar con ellos, y que se continuó con la aplicación de la actividad A3.

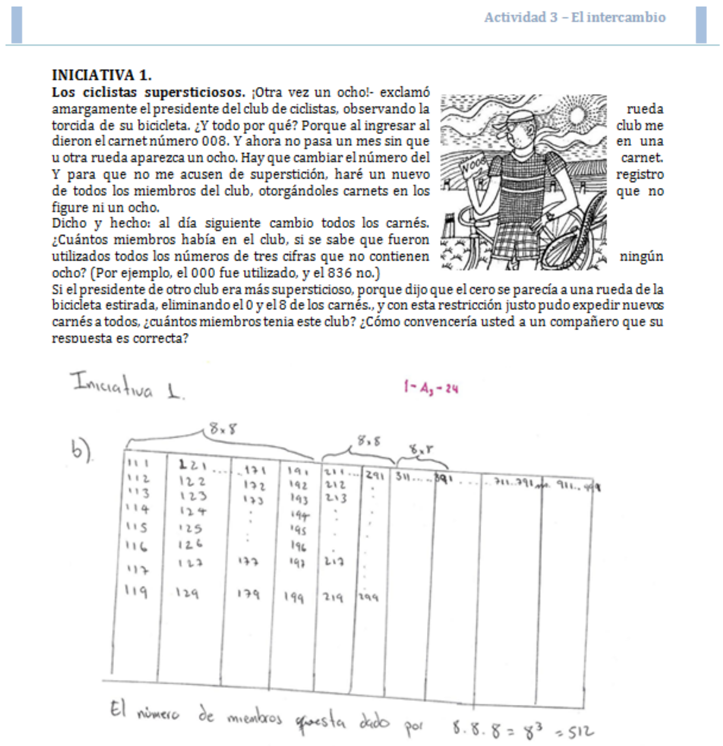
Es así como la parte más exitosa de la actividad fue la tercera parte, las actividades colaborativas, y se destaca el cambio significativo entre la primera y segunda parte evidenciándose la apropiación del concepto de la variación. Estas cifras ratifican el avance en el proceso por desarrollar el pensamiento matemático y en particular el pensamiento combinatorio.

4.3.1. Análisis Soluciones Actividad 3- A3

En las soluciones presentadas por los estudiantes se evidencia nuevamente una estructura implícita en la pluralidad de formas de abordar las iniciativas planteadas, la cual podría ser clasificada por niveles. Se muestra así desde un nuevo concepto –principio de la variación- la existencia de la hipótesis sobre los niveles de razonamiento que van desde unas formas naturales y espontáneas de entender hasta unas formas estructuradas basadas en el análisis y la abstracción que implican la utilización de una estructura de interpretación, una estructura de representación, una estructura de relación y conexión, una estructura conceptual y una estructura combinatoria. En cuanto a las formas de intentar materializar la situación planteada, es decir la representación de las acciones mentales o estructura de representación, aquí se destaca la manifestación de una esquematización progresiva en cuanto a su estructura y formalismo, con la cual se apoyan para hacer la interpretación. A partir de ésta evidencian las condiciones implícitas que deben cumplir las configuraciones de los elementos del nuevo conjunto construido, es decir, la manifestación de las formas de entender (estructura de relación y conexión), las cuales se organizan y orientan para proceder centrado en alguno(s) de los principios de conteo conocidos o interiorizados anteriormente apropiado(s) para aplicarlo(s) o adaptarlo(s) a la nueva iniciativa presentada. Es decir, se manifiestan las formas de pensar (estructura conceptual), las cuales, con la experiencia o capacidad de análisis y abstracción del estudiante, se podrán sintetizar en nuevas formas de pensar más robustas, que a su vez implicarán la construcción de significado de los conceptos (estructura combinatoria). De este modo se efectúa una evolución entre sus acciones mentales primarias, las formas de entender, y sus próximas formas de pensar. Además, es una forma de sustentar y argumentar cómo se va dando la interiorización de los conceptos trabajados en las anteriores actividades, los cuales se van convirtiendo en el hilo conductor dentro del estructura conceptual utilizada en la solución de las iniciativas de la actividad A3, mostrándose así cómo ocurre la primera etapa del modelo, el RESULTADO «R».

Los resultados presentados y construidos por los estudiantes en esta parte del proceso dejan ver cómo el modelo se puede desarrollar completamente en sus dos etapas RESULTADO y REPLICA, ya que se muestra cómo la maduración gradual de un concepto se convierte en la construcción de un significado robusto del mismo. Además, se aprecia cómo el conocimiento combinatorio puede modelarse como una cadena, en el cual se inicia con unas acciones mentales que se van estructurando y conceptualizando hasta llegar a la formalización de un concepto.

En la solución de E24 presentada en la Figura 42 se observa que el estudiante realizó una representación, por medio de una estructura de filas y columnas para dar solución a la parte b del problema.


Actividad 3 – El intercambio

INICIATIVA 1.

Los ciclistas supersticiosos. ¡Otra vez un ocho!- exclamó amargamente el presidente del club de ciclistas, observando la rueda torcida de su bicicleta. ¿Y todo por qué? Porque al ingresar al club me dieron el carnet número 008. Y ahora no pasa un mes sin que en una u otra rueda aparezca un ocho. Hay que cambiar el número del carnet. Y para que no me acusen de superstición, haré un nuevo registro de todos los miembros del club, otorgándoles carnets en los que no figure ni un ocho.

Dicho y hecho: al día siguiente cambio todos los carnés. ¿Cuántos miembros había en el club, si se sabe que fueron utilizados todos los números de tres cifras que no contienen ningún ocho? (Por ejemplo, el 000 fue utilizado, y el 836 no.)

Si el presidente de otro club era más supersticioso, porque dijo que el cero se parecía a una rueda de la bicicleta estirada, eliminando el 0 y el 8 de los carnés., y con esta restricción justo pudo expedir nuevos carnés a todos, ¿cuántos miembros tenia este club? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Figura 42. Solución E24-A3-E-1

Para ello listó sistemática y parcialmente los números solicitados logrando observar patrones que, mediante el uso de la estructura de relación y conexión, asocian la cantidad de filas formadas (por centenas, entre 100 y 200, entre 200 y 300 y así sucesivamente), con la cantidad de números formados por cada columna (por decenas, entre 110 y 120, entre 120 y 130 y así sucesivamente), y luego determina que este proceso se da 8 veces entre 100 y 1000. Luego, pasa a la estructura conceptual, en la cual utiliza correctamente el principio del producto, en efecto un caso singular del producto que se denomina principio de variación con repetición n^k [*k* elecciones entre *n* elementos con repetición y con orden]. Dicho principio aún no se había formalizado para el estudiante, pero aun así logra utilizarlo implícitamente bajo el concepto del producto, mostrando que el estudiante haya construido la estructura combinatoria apropiada.

La solución presentada en la Figura 43, realizada por E18 muestra a un estudiante que mediante la estructura de representación más avanzada y simplificada (mediante el uso de símbolos y expresiones más técnicas) logra representar las condiciones dadas, y evidencia las características propias del principio implícito (orden y repetición), enlazándolas mediante la estructura de relación y conexión, o sea, una explicitación de las formas de entender, permitiéndole pasar a la estructura conceptual. En ésta usa el principio del producto para dar solución así a las dos preguntas. Estas soluciones evidencian un proceder directamente combinatorio, es decir son aquellas dadas por estudiantes que ya tienen interiorizado el principio del producto y actúan directamente desde las formas de pensar.

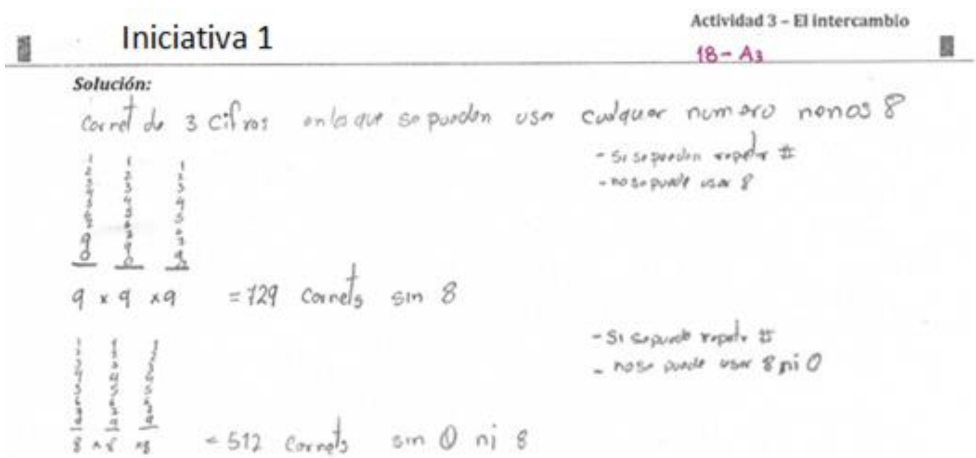
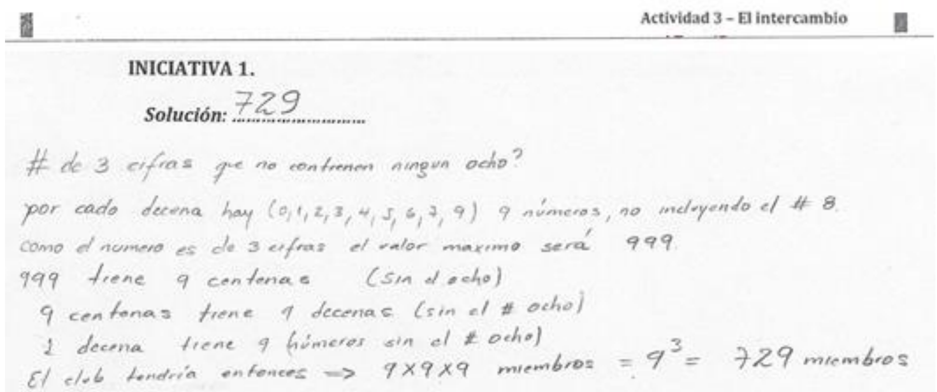


Figura 43. Solución E18-A3-E-1

La solución de E11 mostrada en la Figura 44 deja ver que la estrategia utilizada por el estudiante está basada en asociar el contexto del problema a un concepto conocido en otra área de la matemática, para este caso el significado de la posición de las cifras en un número decimal (unidades, decenas y centenas), siendo éstas las formas de entender, las cuales lo llevaron a proceder con las formas de pensar combinatoriamente, utilizando el principio del producto y construyendo de esta manera el conteo implícito de variaciones con repetición. Esta forma de pensamiento combinatorio no requirió de la estructura de representación, dado que la estructura de relación y conexión se fundamentó en un concepto en otra área, permitiéndole pasar a la estructura conceptual, siendo ésta una evidencia de la formación de la estructura combinatoria. En ésta las formas de entender están en otro concepto diferente a una forma combinatoria, las cuales por medio de la estructura de relación y conexión lo llevaron a proceder combinatoriamente, construyéndose así las formas de pensar combinatorias y manifestando el inicio de la construcción de significado de un principio combinatorio, en este caso principio de la variación.


Actividad 3 – El intercambio

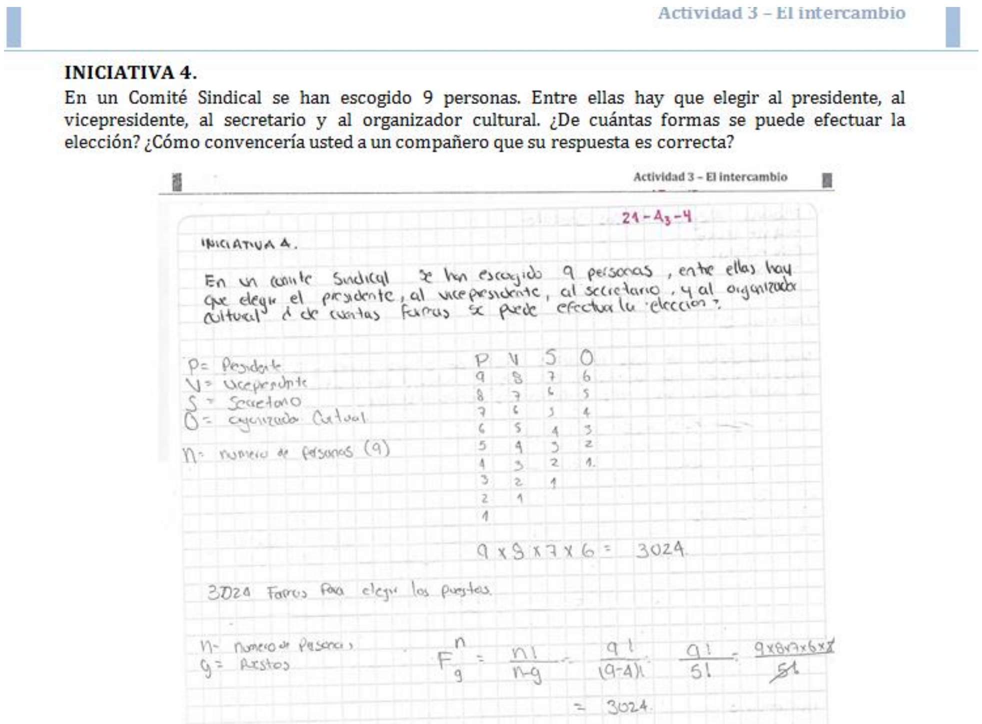
INICIATIVA 1.

Solución: 729

de 3 cifras que no contienen ningun ocho?
por cado decena hay (0,1,2,3,4,5,6,7,9) 9 números, no incluyendo el # 8
como el numero es de 3 cifras el valor maximo será 999
999 tiene 9 centenas (sin el ocho)
9 centenas tiene 9 decenas (sin el # ocho)
1 decena tiene 9 números sin el # ocho)
El club tendría entonces => 9X9X9 miembros = 9^3 = 729 miembros

Figura 44. Solución E11-A3-E-1

La solución A3-E-4 presentada en la Figura 45, el estudiante de E21deja ver cómo él construye primero la solución bajo un razonamiento basado en conceptos anteriores, para luego pasar a la estructura combinatoria con una nueva forma de pensar más robusta expresada con la construcción de un nuevo significado al proceder conceptual anterior (principio del producto). Así se consigue hacer la aplicación del concepto de variación implícito en la solución del problema (variaciones ordinarias con orden o variaciones sin repetición con orden), para dar una solución directa del mismo. Se observa que logra entender que el conteo requerido es seleccionar 4 elementos de un conjunto de 9 elementos, con orden y sin repetición (indicado por los cargos a ocupar, según la posición en que se está ubicado). De este modo se construye significado del concepto de variación ordinaria, de contar subgrupos de *k* elementos con orden y sin repetición tomados de un conjunto de *n* elementos.


Actividad 3 – El intercambio

INICIATIVA 4.
En un Comité Sindical se han escogido 9 personas. Entre ellas hay que elegir al presidente, al vicepresidente, al secretario y al organizador cultural. ¿De cuántas formas se puede efectuar la elección? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Actividad 3 – El intercambio

21-A3-4

INICIATIVA 4.

En un comite Sindical se han escogido 9 personas, entre ellas hay que elegir el presidente, al vicepresidente, al secretario, y al organizador cultural ¿de cuantas formas se puede efectuar la elección?

P= Presidente
V= vicepresidente
S= Secretario
O= organizador Cultural
n= numero de personas (9)

P	V	S	O
9	8	7	6
8	7	6	5
7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1
3	2	1	
2	1		
1			

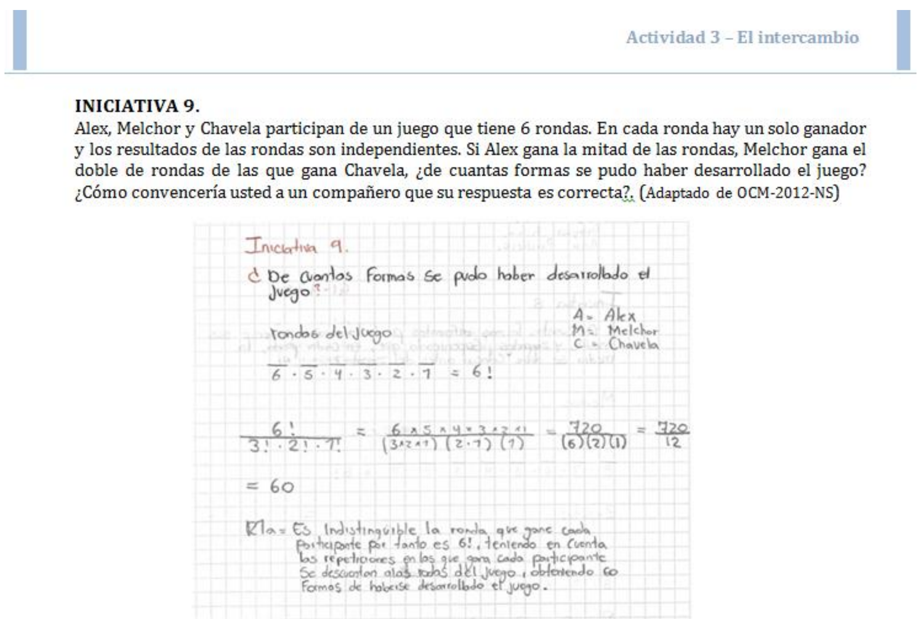
$9\times8\times7\times6 = 3024$

3024 Formas para elegir los puestos.

n= numero de Personas
g= Restos

$$F^n_g = \frac{n!}{n-g} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 3024$$

Figura 45. Solución E21-A3-E-4


Actividad 3 – El intercambio

INICIATIVA 9.
Alex, Melchor y Chavela participan de un juego que tiene 6 rondas. En cada ronda hay un solo ganador y los resultados de las rondas son independientes. Si Alex gana la mitad de las rondas, Melchor gana el doble de rondas de las que gana Chavela, ¿de cuantas formas se pudo haber desarrollado el juego? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?. (Adaptado de OCM-2012-NS)

Iniciativa 9.
¿De cuantos Formas se pudo haber desarrollado el Juego?

A= Alex
M= Melchor
C= Chavela

rondas del Juego

$\underline{6}\cdot\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1} = 6!$

$$\frac{6!}{3!\cdot2!\cdot1!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(2\cdot1)(1)} = \frac{720}{(6)(2)(1)} = \frac{720}{12}$$

$= 60$

Rta= Es Indistinguible la ronda que gane cada participante por tanto es 6!, teniendo en cuenta las repeticiones en las que gana cada participante se descuentan a las todas del juego, obteniendo 60 Formas de haberse desarrollado el juego.

Figura 46. Solución G-A3-C-9

La solución de la Figura 46 realizado por un G de trabajo colaborativo deja ver claramente cómo los estudiantes van de sus formas de entender esquematizadas (organización de la información en casillas para aplicar el principio del producto), a las formas de pensar combinatorias (principio de la permutación). En éstas interpretaron la situación como una permutación con repetición indistinguible en la que consideran 6 elementos (las rondas), y la repetición se da en cada ronda que gana un mismo participante. Cada una de ellas se hace indistinguible porque solamente está contando el ser ganador.

Aquí se evidencia el desarrollo de la estructura combinatoria, ya que proceden directamente con las formas de pensar combinatorias sustentadas en un argumento teórico combinatorio (en este caso el principio de la permutación y la variación), mostrando el cumplimiento de una de las observaciones hechas por T. Gowers. Esto se dice por que en los comentarios realizados por los estudiantes en la clase, decían: “esta iniciativa es parecida a la de las luces navideñas, solamente que ahora hay tres clases de elementos (Alex, Melchor y Chavela)”. Esta interpretación la realizaron al ver la cadena que se forma cuando interpretaron la condición dada en el problema. (Esta situación es equivalente a contar el número de formas de organizar 3 A’s (tres veces gana Alex), 2 M’s (dos veces gana Melchor) y una C (una vez gana Chavela), quedando en consideración los arreglos posibles de una cadena con los términos A A A M M C.).

Por último se presenta la solución de la Figura 47 de otro G colaborativo, en la que se manifiesta un avance a una nueva estructura, la *estructura de generalización combinatoria.*

En este caso los estudiantes construyen una solución general, a partir de la deducción realizada sobre los casos particulares, acreditando la existencia de nuevas formas de entender combinatorias, que a su vez son la evidencia de la ejecución de la segunda etapa del modelo.

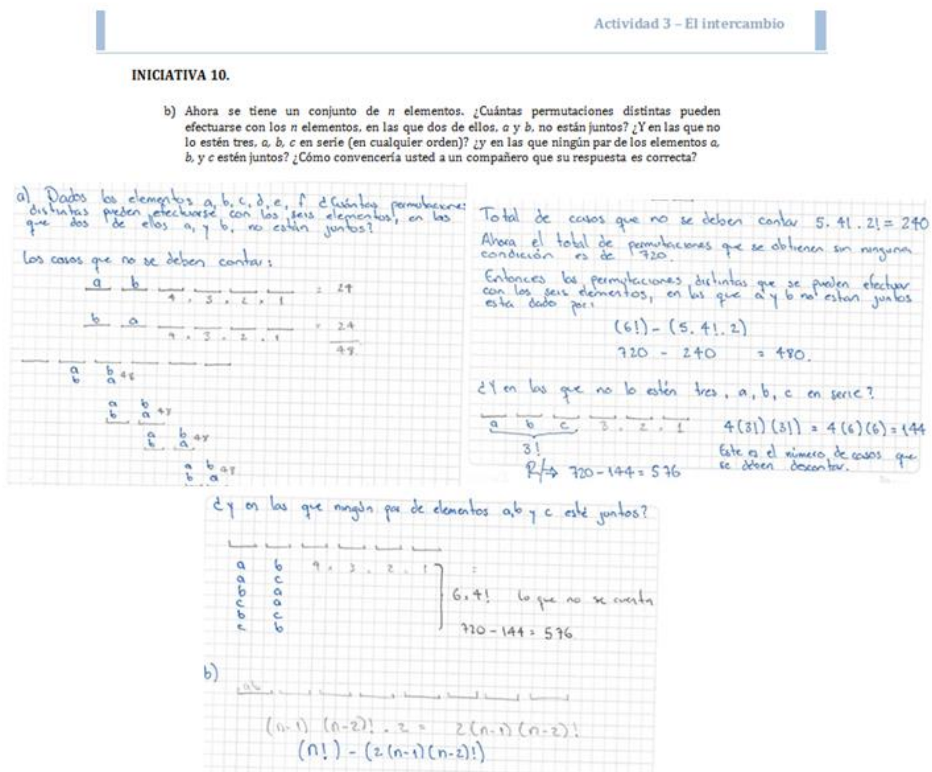


Figura 47. Solución G-A3-C-11

4.4. Actividad 4 – A4 - Calculando, combinando y contando

1. Fase 1.

La primera fase de esta actividad posee el componente de la unidad de análisis, la cual corresponde a la Actividad 4 – Calculando, combinando y contando. Para esta actividad la muestra objetivo era el total de 299 soluciones esperadas, 23 estudiantes asistentes y con la participación en 13 iniciativas de la actividad.

La Figura 48 permite observar la distribución porcentual de las soluciones obtenidas durante la realización de A4, en las clases C7 y C8. Al respecto conviene mencionar la inasistencia durante la actividad de un 10% y la no solución SS de algunas iniciativas, especialmente en las iniciativas extraclase X. Entre tanto, se puede indicar que la muestra real corresponde al 58,5% de la muestra objetivo, de la cual se descuentan los aspectos indicados anteriormente.

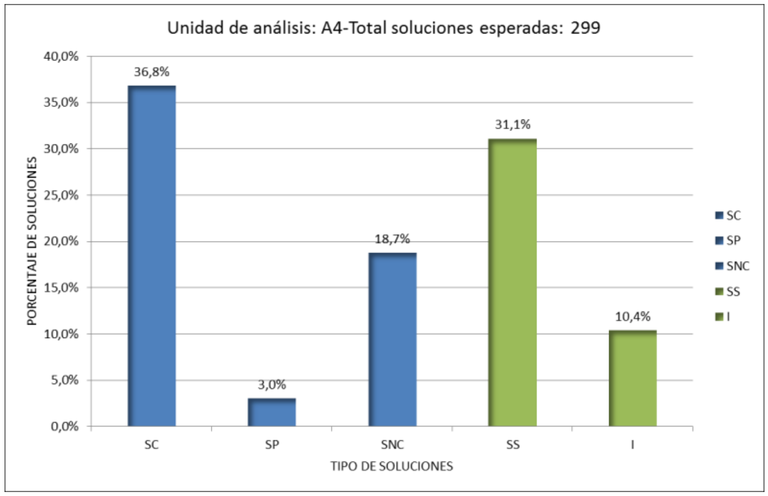


Figura 48. Unidad de Análisis: A4-Total de soluciones esperadas

2. Fase 2.

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A4, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S, análisis realizado sobre la muestra real, correspondiente a 176 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 49 se presentan los resultados de este análisis sobre la muestra real. La muestra real de análisis es el 67%, correspondiente a 120 soluciones.

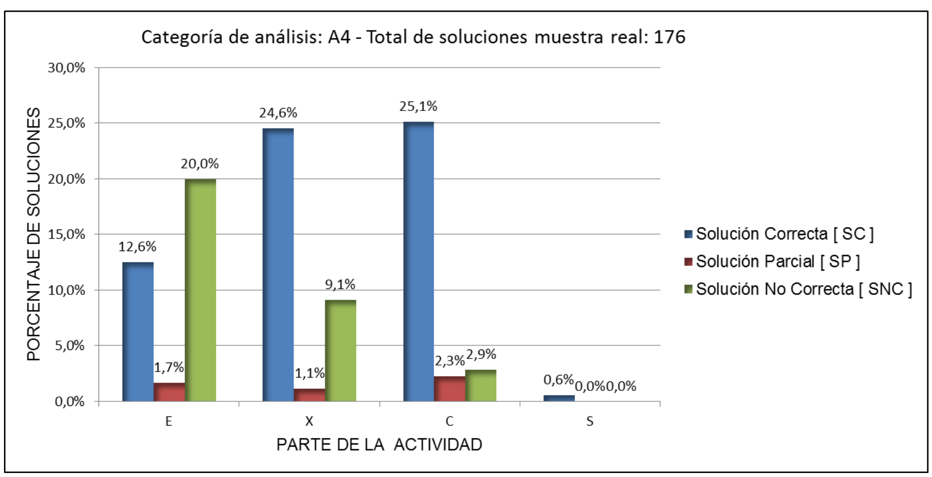


Figura 49. Categorías de Análisis: A4-Total de soluciones muestra real

De la anterior figura se destaca un porcentaje significativo en las soluciones no correctas [SNC] posiblemente debido a la introducción del concepto nuevo en la primera parte E el principio de la combinación. De otro lado, en la segunda parte X y la tercera parte C se da un incremento en el porcentaje de SC debido probablemente, como se observará más adelante, a la interiorización del principio, lo que es indicador de una transición positiva entre las formas de entender a las formas de pensar. La situación ratifica, como en actividades anteriores, dos cosas, la interiorización y construcción del significado del concepto combinatorio y el cumplimiento de la primera etapa del modelo metodológico «I.C.O.R.», el Resultado «R».

3. Fase 3.

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas SC y las soluciones parciales SP de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 50. Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

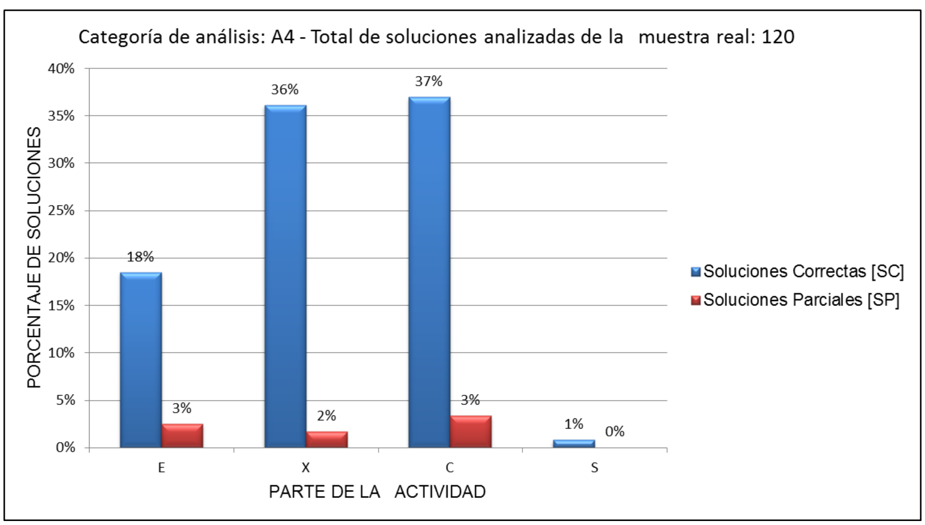


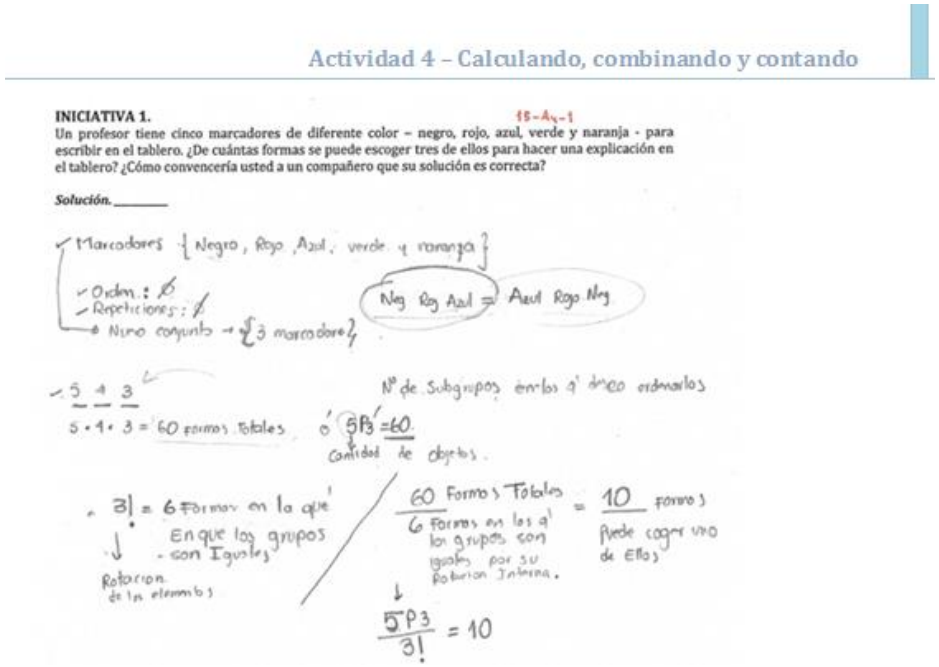
Figura 50. Categorías de Análisis: A4-Total de soluciones muestra real de análisis

Cabe señalar que en la A4 se mantiene un alto grado de participación e interés de los estudiantes, quienes han incrementado su aporte en el trabajo extraclase y mejorado su disposición en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Al mismo tiempo se indica como mejoraron los aportes gradualmente entre la primera y tercera parte, evidenciándose la apropiación del concepto de la combinación.

4.4.1. Análisis soluciones Actividad 4- A4

En esta etapa del proceso de implementación de las actividades se evidencia y fortalece cada vez más la apropiación de la metodología implementada y de los conceptos trabajados anteriormente. Ya que, por ejemplo, las configuraciones de los elementos del nuevo conjunto construido por el estudiante en el proceso de solución de un problema, es decir la manifestación de las *formas de entender* (estructura de relación y conexión) se hacen de forma más técnica. Ellas se *organizan y orientan* para proceder centrado en el tipo de principio de conteo conocido o *interiorizado* anteriormente que puede emplearse o adaptarse ante la situación, es decir que se manifiestan la *formas de pensar* (estructura conceptual), las cuales con la experiencia, capacidad de análisis y abstracción del estudiante, se pueden sintetizar *en nuevas formas de entender más robustas*, que implican construcción de significado de los conceptos (estructura combinatoria y de generalización combinatoria).

Las soluciones de los estudiantes E15 y E24 presentadas en las figuras 51 y 52 respectivamente, muestran a unos estudiantes con una estructura conceptual y combinatoria totalmente desarrollada en la primera etapa del modelo «I.C.O.R.». Como se puede ver en sus soluciones, sus análisis y síntesis se dan sobre unas formas de entender netamente combinatorias (estructura de relación y conexión), con las cuales deducen claramente lo que sucede en los procesos de conteo (particularizando condiciones) que transfieren a sus formas de pensar (estructura conceptual) desarrollando sus soluciones bajo los principios de conteo interiorizados en clases anteriores. Además, dejan ver el conteo sistemático (listas, estructura de representación) como una forma de verificación, no como el recurso de solución tal como lo hacían al comienzo del proceso de aprendizaje en la actividad A1.


Actividad 4 – Calculando, combinando y contando

INICIATIVA 1.

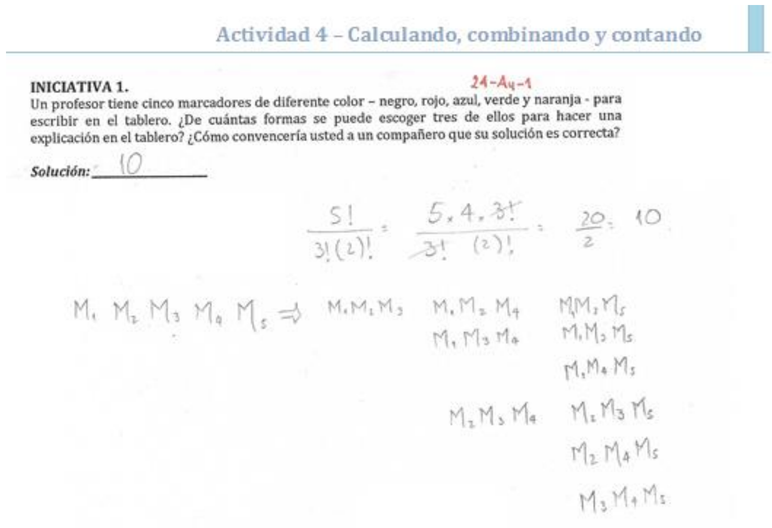
15-A4-1

Un profesor tiene cinco marcadores de diferente color – negro, rojo, azul, verde y naranja - para escribir en el tablero. ¿De cuántas formas se puede escoger tres de ellos para hacer una explicación en el tablero? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?

Solución. ________

Figura 51. Solución E15-A4-E-1

En la solución dada por E15, se evidencia como la estructura de representación (el uso de los conjuntos para escribir esta representación y la comparación de las configuraciones) ha evolucionado durante la implementación de la metodología propuesta en el modelo y el uso de la enseñanza a través de la solución de problemas. Sobre la representación la estudiante evidencia las condiciones que exige el problema (sin orden y sin repetición), éstas son llevadas por la estructura de relación y conexión a las formas de entender combinatorias interiorizadas anteriormente (principio del producto y de la permutación), conceptos que permitieron desarrollar una nueva estructura conceptual. Es decir, se dio la construcción de un nuevo significado a estos conceptos, que combinados formalizarán el nuevo concepto, el principio de la combinación, iniciándose de esta forma la construcción de una nueva forma de pensar en el estudiante. Esto se ve en la solución cuando la estudiante induce la forma de eliminar los casos repetidos (las permutaciones internas de los tres marcadores escogidos), relacionando esta simplificación con el cociente entre los resultados obtenidos de forma independiente con los dos principios de conteo aplicados. Este logro es una evidencia del cumplimiento de la primera etapa del modelo, el Resultado y del módulo 6 (la estructura general del modelo).



Actividad 4 – Calculando, combinando y contando

INICIATIVA 1. 24-A4-1

Un profesor tiene cinco marcadores de diferente color – negro, rojo, azul, verde y naranja - para escribir en el tablero. ¿De cuántas formas se puede escoger tres de ellos para hacer una explicación en el tablero? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?

Solución: 10

$$\frac{5!}{3!(2)!} = \frac{5.4.3!}{3!\ (2)!} = \frac{20}{2} = 10$$

$M_1\ M_2\ M_3\ M_4\ M_5 \Rightarrow$ $M_1M_2M_3$ $M_1M_2M_4$ $M_1M_2M_5$ $M_1M_3M_4$ $M_1M_3M_5$ $M_1M_4M_5$ $M_2M_3M_4$ $M_2M_3M_5$ $M_2M_4M_5$ $M_3M_4M_5$

Figura 52. Solución E24-A4-E-1

En la solución dada por E24 es un ejemplo de cómo el estudiante ha avanzado en la estructuración de sus formas de entender combinatorias, ya que relaciona el contexto de la iniciativa con una permutación de objetos indistinguibles de dos clases, una es la clase que representa los marcadores seleccionados y la otra los no seleccionados. Este esquema es la evidencia de la construcción de un nuevo significado al concepto de la permutación, el cual será ahora una nueva forma de pensar. Además, muestra como recurso de verificación la estructura de representación (listado sistemático), forma de proceder correcta porque para hacer una lista se debe conocer el total de elementos o configuraciones a listar, tornando ésta una estructura formal de realizar un conteo, ya que si se realiza de forma contraria es una forma intuitiva de hacer el conteo.

En la solución de E15 mostrada la Figura 53 el estudiante presenta claramente la apropiación de la metodología dada, evidenciando el uso de las recomendaciones que se daban en las actividades A1 y A2. Esta situación deja en evidencia el alcance de los objetivos propuestos (estructura de representación dada a través de las acciones mentales ejecutadas para realizar la interpretación y materializadas en los esquemas realizados).

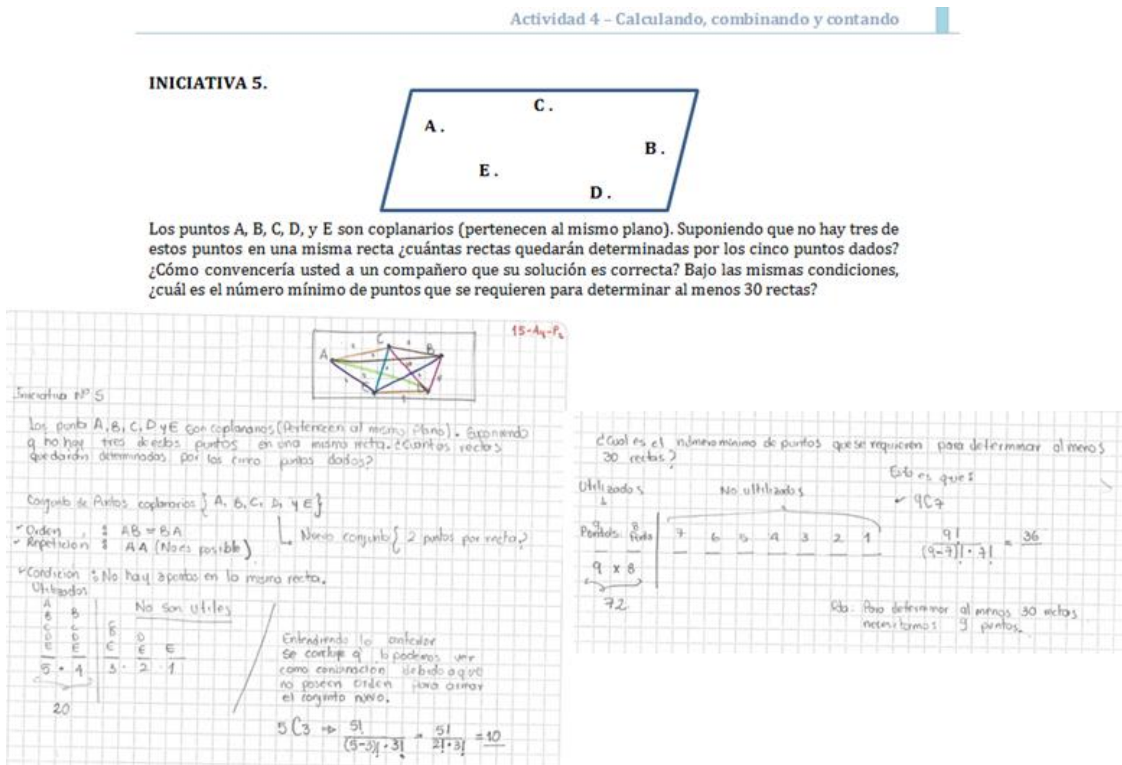


Figura 53. Solución E15-A4-X-5

Por otro lado, deja ver la interiorización del principio de la combinación, en una parte porque logra identificar las características que deben cumplir los elementos del nuevo conjunto (sin orden y no repetición) lo que muestra una estructura de relación y conexión, evidenciadas por las formas de entender combinatorias y los preconceptos aplicados, como el principio del producto). Luego aplica el principio de conteo adecuadamente que corresponde a una estructura conceptual, pues utiliza el principio de la combinación y su heurística, mostrando el avance en sus formas de pensar. Hasta este punto se puede considerar que se ha cumplido la primera etapa del modelo «I.C.O.R.», alcanzándose el componente estructural del Resultado «R», correspondiente al Módulo 6, Resultados I, en la fase de Control de la estructura general del modelo metodológico.

Por otra parte, porque consigue resolver la segunda pregunta planteada a la inversa, cuya forma de solución necesariamente requería del uso del principio de la combinación, una estructura combinatoria dado que necesariamente parte su razonamiento de las formas de pensar desarrolladas, permitiéndole hacer uso directo de los principios de manera formal. En este punto se puede considerar que se ha cumplido la segunda etapa del modelo «I.C.O.R.», alcanzándose el componente estructural de la Replica «R», correspondiente al Módulo 7, Resultados II, en la fase de Control de la estructura general del modelo metodológico.

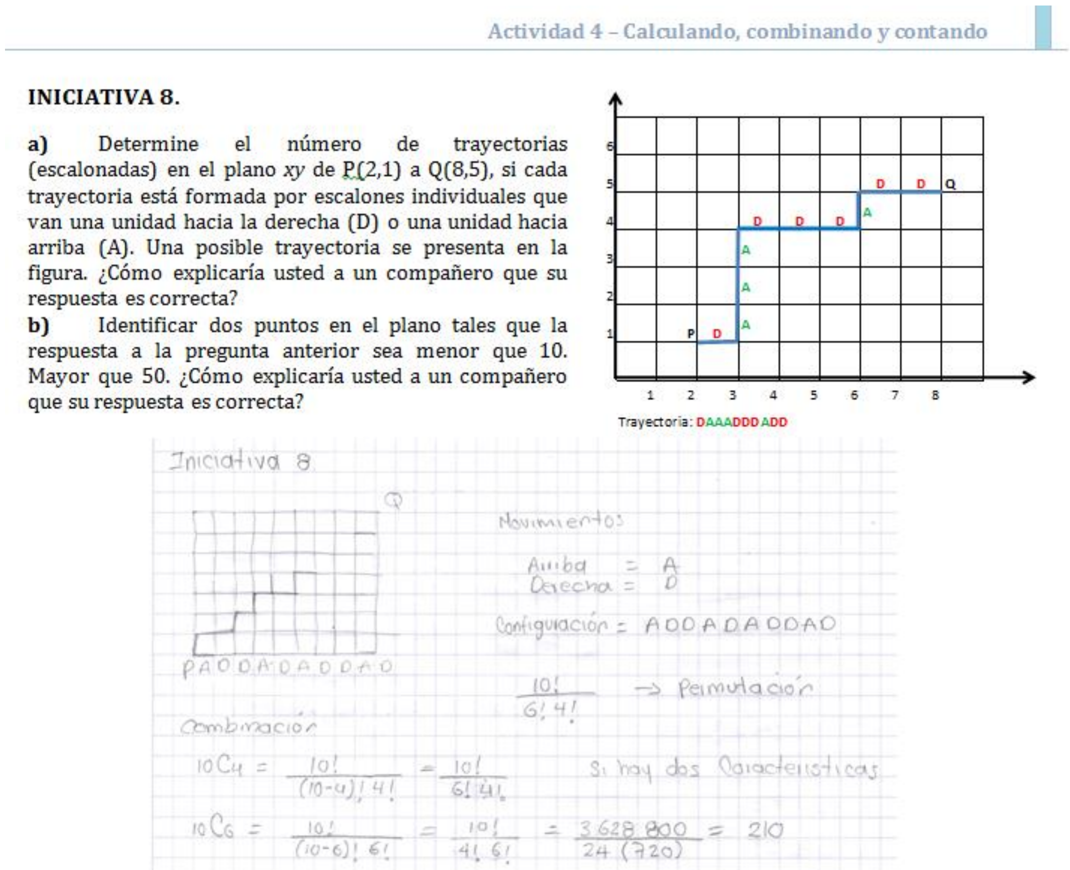


Figura 54. Solución E25-A4-X-8

La solución presentada en la Figura 54, realizada por E25, parte del análisis de la configuración donde relaciona la situación con una permutación con repetición de objetos indistinguibles (formas de entender, estructura de conexión y relación). Así se ve la relación de este caso particular con el principio de la combinación, en el cual se involucran dos condiciones únicamente, en este caso los movimientos arriba y a la derecha, lo cual corresponde a formas de pensar, o sea, la estructura conceptual.

INICIATIVA 10.

Si se dispone de ocho objetos, ¿qué es mayor, el número de agrupaciones tomando de a tres objetos o el número de agrupaciones tomando de a cinco de los mismos objetos? Razone su respuesta. Antes de hacer ningún cálculo piense intuitivamente una respuesta: ¿es correcta su intuición? En caso contrario, ¿dónde está la falla?

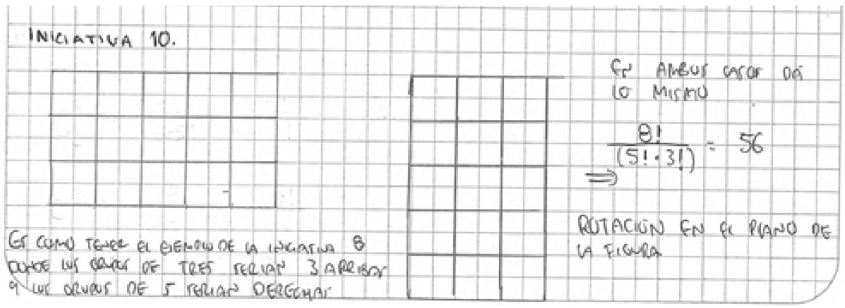


Figura 55. Solución G-A4-C-10

En la Figura 55 los estudiantes en trabajo colaborativo asociaron la situación con una iniciativa anterior, de la cual relacionan la combinación dada con un movimiento en el plano, deduciendo que el espacio de recorrido es el mismo, que lo que ocurre es una rotación de la figura que enmarca el espacio de movimiento. De esta forma se concluye que las expresiones son equivalentes.

En la solución dada por este grupo y presentada en la Figura 56 son correctas la b, c y d. Estas soluciones develan un avance significativo en la apropiación del concepto de combinación y los anteriores, ya que en algunas situaciones se requirió emplear la combinación de dos principios. Alcanzar estos estados para el estudiante significará haber desarrollado la estructura combinatoria en lo que a este principio se refiere.

INICIATIVA 12.

En un juego de POKER, ¿de cuántas formas puede recibir un jugador una mano (una mano son cinco cartas, escogidas al azar)? ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta? Si:

	**a)** la mano es una "***Escalera de color***"- cinco cartas en orden numérico, todas del mismo palo-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**b)** la mano es un ***"Póker"*** - cuatro cartas del mismo valor y una carta no emparejada-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**c)** la mano es un **"Full"** - tres cartas del mismo valor y un par de un mismo valor diferente al anterior-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**d)** la mano es un ***"Color"*** - cinco cartas del mismo palo-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**e)** la mano es una ***"Escalera"*** - cinco cartas consecutivas. El dibujo muestra un ejemplo.

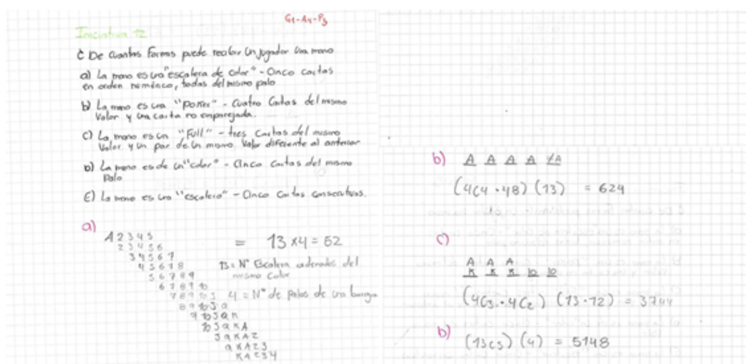


Figura 56. Solución G-A4-C-12

4.5. Actividad 5 – A5 -¿Pensamiento o suerte?

1. Fase 1

La primera fase de esta actividad posee el componente de la unidad de análisis, la cual corresponde a la Actividad 5 – ¿Pensamiento o suerte? Para esta actividad la muestra objetivo contó con un de total de 253 soluciones esperadas, 23 estudiantes asistentes y con la propuesta de 11 iniciativas en la actividad.

La Figura 57 permite observar la distribución porcentual de las soluciones obtenidas durante la realización de A5, en las clases C9 y C10. En relación con ella se destaca un aumento en la inasistencia, la cual alcanzó un 19%, lo que afecta directamente los otros tipos de soluciones. En la actividad A5 los tipos de soluciones presentan un desarrollo casi homogéneo.

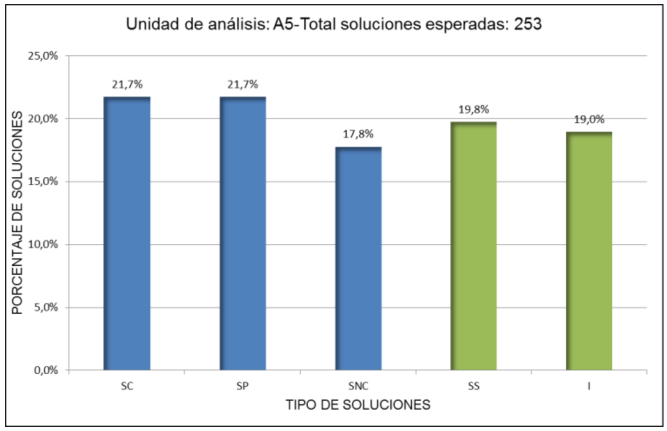


Figura 57. Unidad de Análisis: A5-Total de soluciones esperadas

De este modo se obtiene la muestra real que se ajusta en 61,3% de la muestra objetivo de la cual se descuentan los aspectos indicados anteriormente.

2. Fase 2

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A5, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S, análisis realizado sobre la muestra real, correspondiente a 155 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 58 se presentan los resultados de este análisis sobre la muestra real, de la cual se tomó como muestra real de análisis el 71%, correspondiente a 110 soluciones.

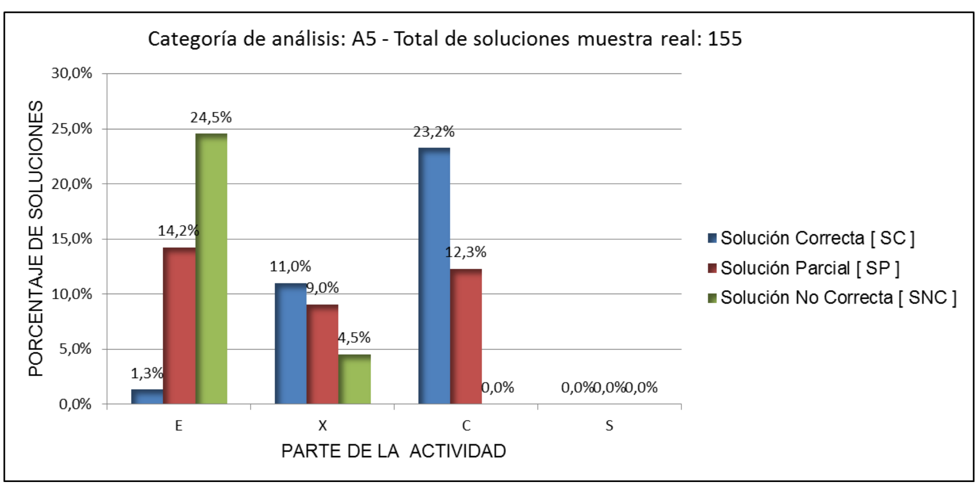


Figura 58. Categorías de Análisis: A5-Total de soluciones muestra real

Es significativo el incremento de las SC con el desarrollo de las diferentes partes de la actividad y la disminución de las SNC, situación que se conceptúa se generó porque la actividad comprendía una miscelánea de iniciativas referentes a los conceptos de las actividades anteriores, mostrando la apropiación de dichos conceptos por los estudiantes.

3. Fase 3

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas SC y las soluciones parciales SP de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 59. Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

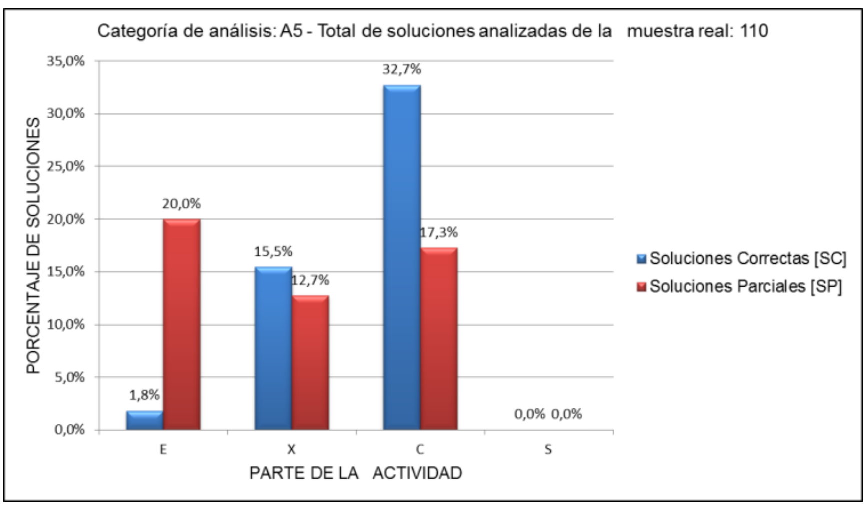


Figura 59. Categorías de Análisis: A5-Total de soluciones muestra real de análisis

De acuerdo con la A5 es pertinente reconocer cómo se incrementa en porcentaje las SC en la tercera parte como consecuencia de un marcado interés por las iniciativas novedosas que se presentan en la actividad y porque la consecución de la solución de las iniciativas se convirtió en un reto para los participantes. Además se puede ver como para este caso se enriquece la participación y aportes en la tercera parte. En relación con la iniciativa de la semana no se presenta participación.

4.5.1. Análisis Soluciones Actividad 5- A5

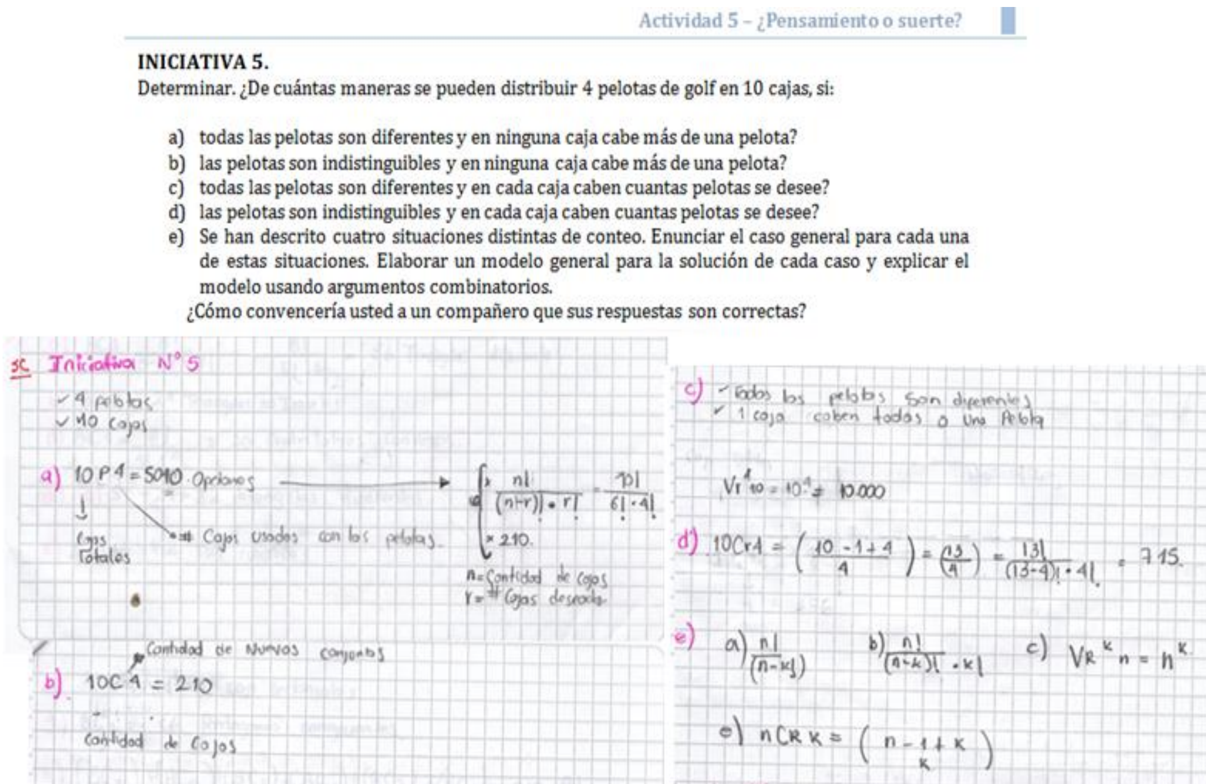
Los resultados presentados y construidos por los estudiantes en esta parte del proceso dejan ver cómo el modelo se puede desarrollar completamente en sus dos etapas RESULTADO y REPLICA, mostrando cómo la maduración gradual de un concepto se convierte en la construcción de un significado robusto del mismo.

Como la actividad A5 se construyó como una miscelánea de iniciativas que involucran los cinco primeros principios trabajados, en las soluciones presentadas a continuación se evidencian los avances significativos en la construcción de significado de los conceptos, la maduración en las formas de entender (estructura de relación y conexión), haciéndose ésta más formal. Al mismo tiempo se van dando las nuevas formas de pensar, evidenciadas con la construcción de nuevos significados de los conceptos ya organizados, los cuales son orientados para dar solución a las nuevas iniciativas.

Este tipo de razonamiento se puede evidenciar en las Figuras 60 a la 63 en las cuales se presentan unas soluciones con una estructura de análisis similar a la realizada en la Actividad 4, con la diferencia que en estas soluciones se da avance significativo en la formación de las nuevas estructuras.

La estructura combinatoria es la primera de ellas en la cual los estudiantes muestran un proceder directamente desde las formas de pensar ya estructuradas (principios de conteo formales) como se puede ver en las figuras presentadas, siendo este proceder el cumplimiento de la segunda etapa del modelo, la Réplica, que representa el desarrollo del módulo 7 de la estructura general.

La segunda es la estructura de generalización combinatoria, en la cual los estudiantes logran construir modelos generales para las soluciones que además son replicados en diferentes contextos. Por ejemplo, la Figura 60 es un caso propio del conteo, la repartición.



Actividad 5 – ¿Pensamiento o suerte?

INICIATIVA 5.

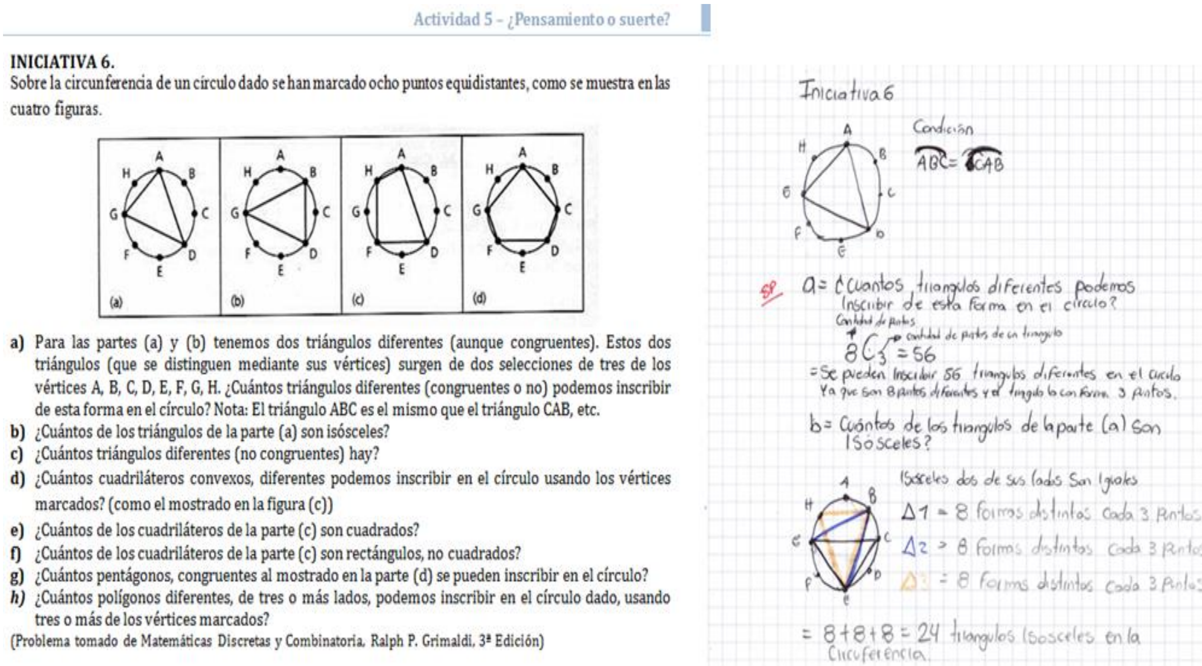
Determinar. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 4 pelotas de golf en 10 cajas, si:

a) todas las pelotas son diferentes y en ninguna caja cabe más de una pelota?
b) las pelotas son indistinguibles y en ninguna caja cabe más de una pelota?
c) todas las pelotas son diferentes y en cada caja caben cuantas pelotas se desee?
d) las pelotas son indistinguibles y en cada caja caben cuantas pelotas se desee?
e) Se han descrito cuatro situaciones distintas de conteo. Enunciar el caso general para cada una de estas situaciones. Elaborar un modelo general para la solución de cada caso y explicar el modelo usando argumentos combinatorios.

¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

Figura 60. Solución E15-A5-X-5

Las Figura 61 y 63 son aplicaciones en geometría y la Figura 62 es una aplicación en un contexto social, el lenguaje braille. Estos casos son evidencia del desarrollo del Módulo 8, Resultados III en el cual se evidencia la incorporación de los nuevos instrumentos por parte de los estudiantes (las nuevas formas de entender combinatorias, el uso de los principios de conteo), mostrando la apropiación de los objetos, es decir de las nuevas formas de pensar combinatorias. Estas estructuras conceptuales se evidencian cuando los estudiantes logran hacer combinaciones de los conceptos simples, formando nuevas estructuras manifestadas en la construcción de nuevos significados de los conceptos interiorizados en la primera etapa del modelo.



INICIATIVA 6.

Sobre la circunferencia de un círculo dado se han marcado ocho puntos equidistantes, como se muestra en las cuatro figuras.

a) Para las partes (a) y (b) tenemos dos triángulos diferentes (aunque congruentes). Estos dos triángulos (que se distinguen mediante sus vértices) surgen de dos selecciones de tres de los vértices A, B, C, D, E, F, G, H. ¿Cuántos triángulos diferentes (congruentes o no) podemos inscribir de esta forma en el círculo? Nota: El triángulo ABC es el mismo que el triángulo CAB, etc.

b) ¿Cuántos de los triángulos de la parte (a) son isósceles?

c) ¿Cuántos triángulos diferentes (no congruentes) hay?

d) ¿Cuántos cuadriláteros convexos, diferentes podemos inscribir en el círculo usando los vértices marcados? (como el mostrado en la figura (c))

e) ¿Cuántos de los cuadriláteros de la parte (c) son cuadrados?

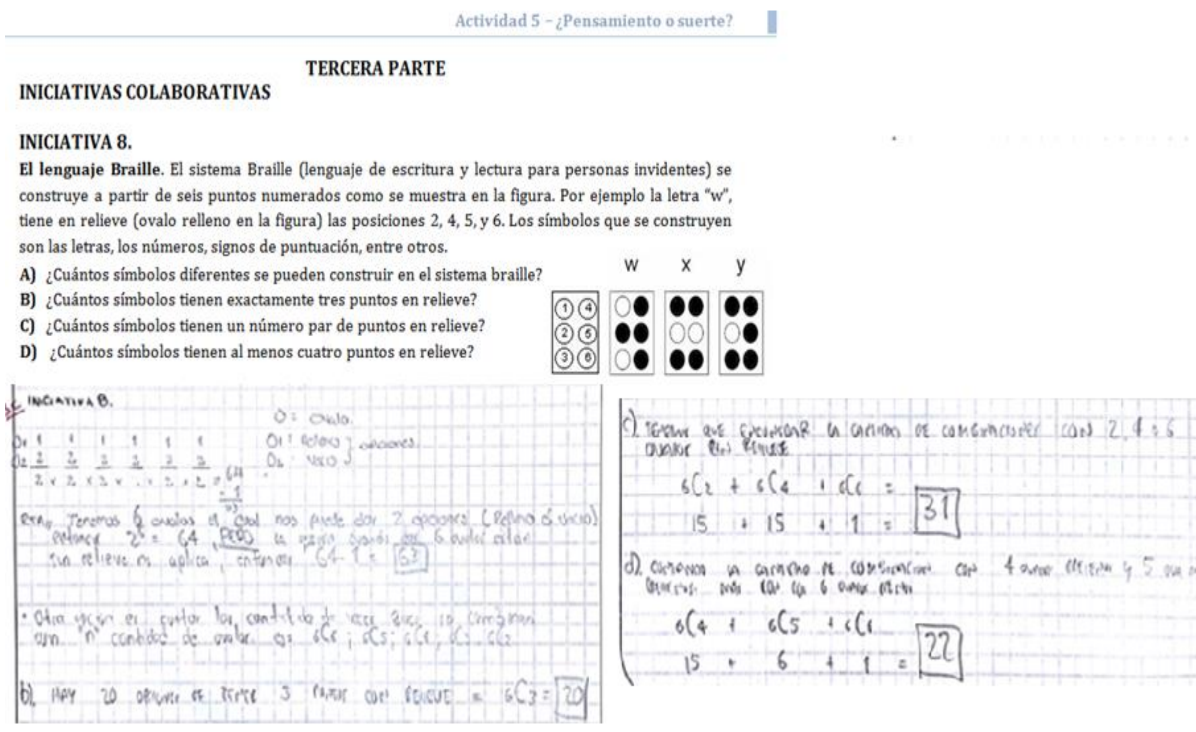
f) ¿Cuántos de los cuadriláteros de la parte (c) son rectángulos, no cuadrados?

g) ¿Cuántos pentágonos, congruentes al mostrado en la parte (d) se pueden inscribir en el círculo?

h) ¿Cuántos polígonos diferentes, de tres o más lados, podemos inscribir en el círculo dado, usando tres o más de los vértices marcados?

(Problema tomado de Matemáticas Discretas y Combinatoria. Ralph P. Grimaldi. 3ª Edición)

Figura 61. Solución E3-A5-X-6



TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 8.

El lenguaje Braille. El sistema Braille (lenguaje de escritura y lectura para personas invidentes) se construye a partir de seis puntos numerados como se muestra en la figura. Por ejemplo la letra "w", tiene en relieve (ovalo relleno en la figura) las posiciones 2, 4, 5, y 6. Los símbolos que se construyen son las letras, los números, signos de puntuación, entre otros.

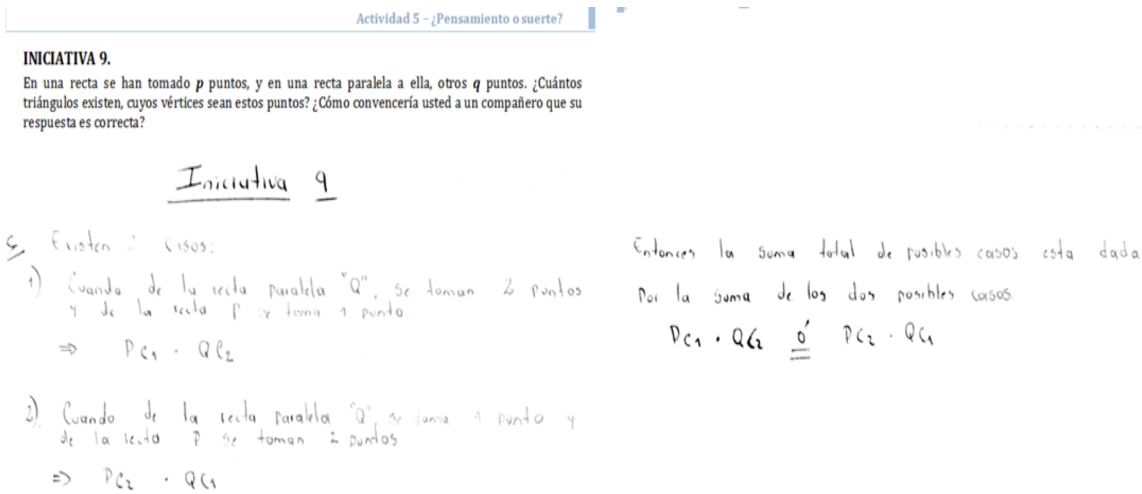
A) ¿Cuántos símbolos diferentes se pueden construir en el sistema braille?

B) ¿Cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?

C) ¿Cuántos símbolos tienen un número par de puntos en relieve?

D) ¿Cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

Figura 62. Solución G-A5-C-8


Actividad 5 – ¿Pensamiento o suerte?

INICIATIVA 9.

En una recta se han tomado ***p*** puntos, y en una recta paralela a ella, otros ***q*** puntos. ¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean estos puntos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Iniciativa 9

S. Existen 2 casos:

1) Cuando de la recta paralela "Q", se toman 2 puntos y de la recta P se toma 1 punto.

$\Rightarrow P C_1 \cdot Q C_2$

2) Cuando de la recta paralela "Q", se toma 1 punto y de la recta P se toman 2 puntos

$\Rightarrow P C_2 \cdot Q C_1$

Entonces la suma total de posibles casos esta dada Por la suma de los dos posibles casos.

$P C_1 \cdot Q C_2$ ó $P C_2 \cdot Q C_1$

Figura 63. Solución G-A5-C-9

4.6. Actividad 6 – A6 - Triángulos Aritméticos

1. Fase 1

La primera fase de esta actividad posee el componente de la unidad de análisis, relacionado con la Actividad 6 – Triángulos Aritméticos. Para esta actividad la muestra objetivo esperado era un total de 276 soluciones, 23 estudiantes asistentes y con la solución a 12 iniciativas que contenía la actividad.

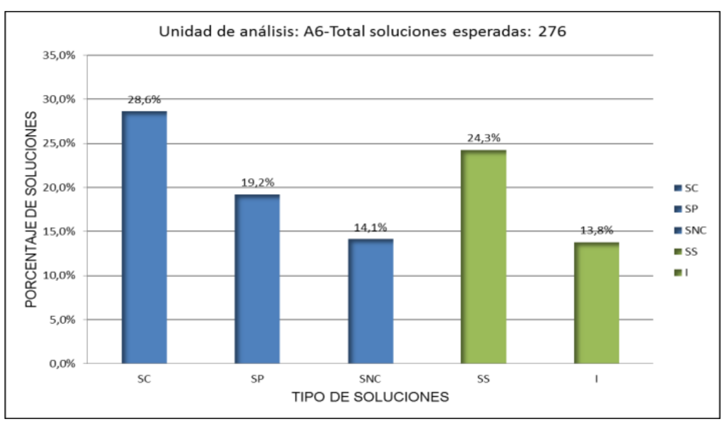


Figura 64. Unidad de Análisis: A6-Total de soluciones esperadas

La Figura 64 expone la distribución porcentual de las soluciones obtenidas durante la realización de A6, en las clases C11 y C12. De acuerdo con A6 se señala un ligero incremento en SC alcanzadas y disminución en la inasistencia con respecto A5, donde alcanzó un 19%. De este modo se obtiene la muestra real; ésta se ajusta al 62% de la muestra objetivo.

2. Fase 2

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A6, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S, análisis realizado sobre la muestra real, correspondiente a 171 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 65.se presentan los resultados de este análisis sobre la muestra real, que es el 77,2%, correspondiente a 132 soluciones.

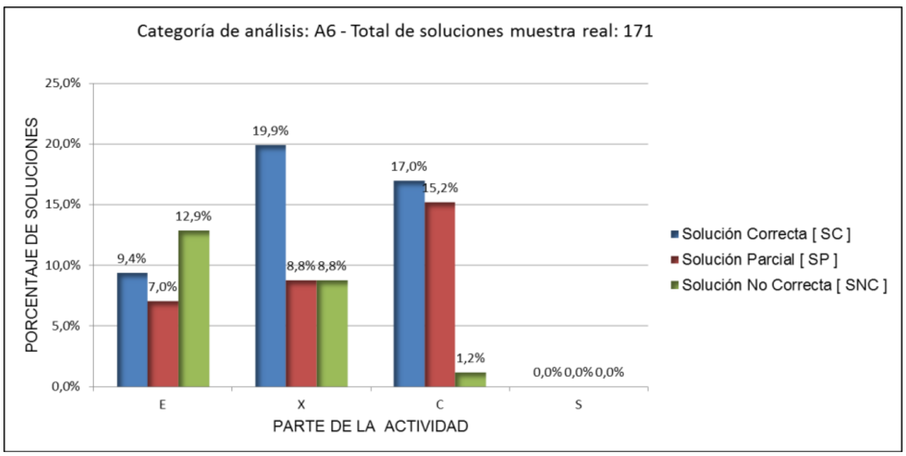


Figura 65. Categorías de Análisis: A6-Total de soluciones muestra real

Al respecto es conveniente mencionar el incremento en las soluciones SC presentadas en las actividades de la parte X y, de igual manera, la disminución de las SNC finalizando la A6 y las soluciones SP, esto probablemente debido al notorio esfuerzo por encontrar las soluciones a las diferentes iniciativas propuestas, que en muchas oportunidades si no se encontraron las SC, sí se caracterizaron por buscar con esfuerzo las rutas para llegar a ellas.

Además se evidencia un buen progreso en el inicio de la interiorización del concepto relacionado con el Teorema del Binomio implementado con un significado combinatorio. En la primera parte de la actividad no se evidenció un nivel alto de usar este teorema por intuición, dado que por comentarios en clase los estudiantes dijeron "desconocer" esta aplicación del teorema; solamente era claro para ellos el uso algebraico que se le da. Luego de que se dio a conocer esta herramienta como una aplicación de origen combinatorio, fue muy evidente su comprensión del manejo algebraico que ya conocían como preconcepto operatorio.

3. Fase 3

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas SC y las soluciones parciales SP de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 66.

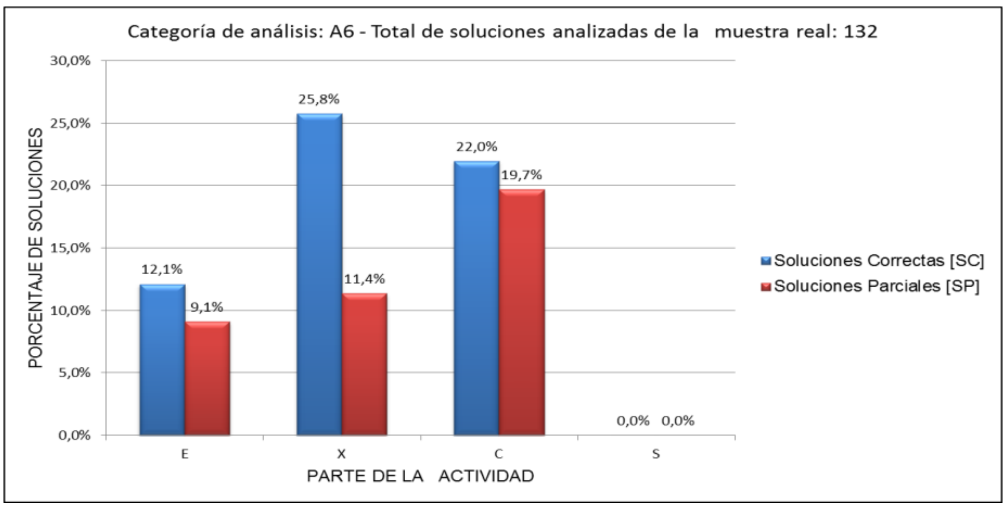
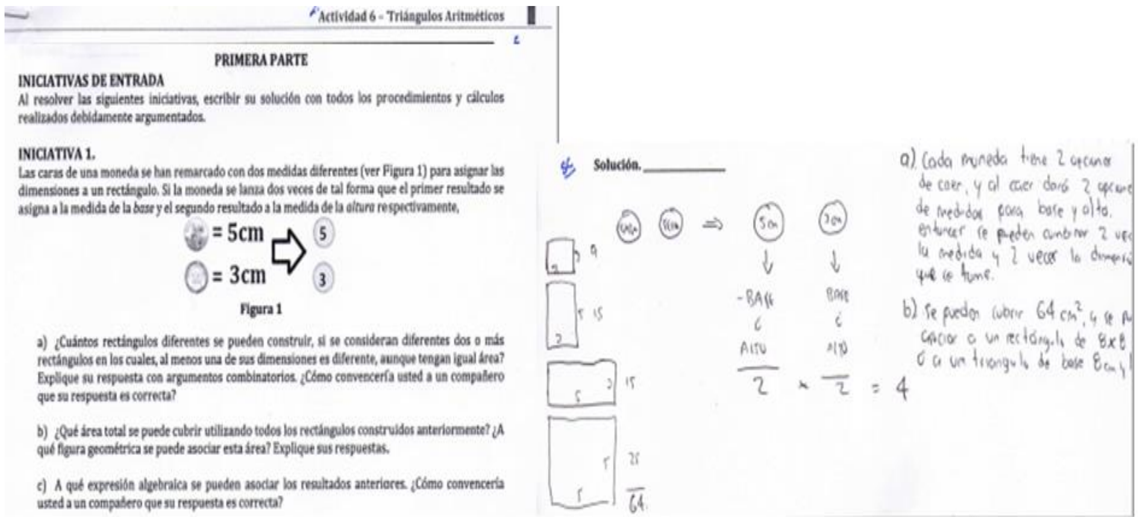


Figura 66. Categorías de Análisis: A6-Total de soluciones muestra real de análisis

Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

De acuerdo con los resultados de la A6 es pertinente reconocer cómo se incrementa en porcentaje de SC en la segunda y tercera parte como resultado de la necesidad que desarrollaron los estudiantes por encontrar soluciones diferentes a las iniciativas que comprendía la actividad. De igual modo se evidenció mayor intervención en la segunda parte X y tercera parte C de A6. En relación con la iniciativa de la semana no se presenta participación probablemente debido a la falta de tiempo de los estudiantes.

4.6.1. Análisis Soluciones Actividad 6- A6.


Actividad 6 – Triángulos Aritméticos

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

Las caras de una moneda se han remarcado con dos medidas diferentes (ver Figura 1) para asignar las dimensiones a un rectángulo. Si la moneda se lanza dos veces de tal forma que el primer resultado se asigna a la medida de la *base* y el segundo resultado a la medida de la *altura* respectivamente,

= 5cm ⇨ 5

= 3cm ⇨ 3

Figura 1

a) ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden construir, si se consideran diferentes dos o más rectángulos en los cuales, al menos una de sus dimensiones es diferente, aunque tengan igual área? Explique su respuesta con argumentos combinatorios. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) ¿Qué área total se puede cubrir utilizando todos los rectángulos construidos anteriormente? ¿A qué figura geométrica se puede asociar esta área? Explique sus respuestas.

c) A qué expresión algebraica se pueden asociar los resultados anteriores. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

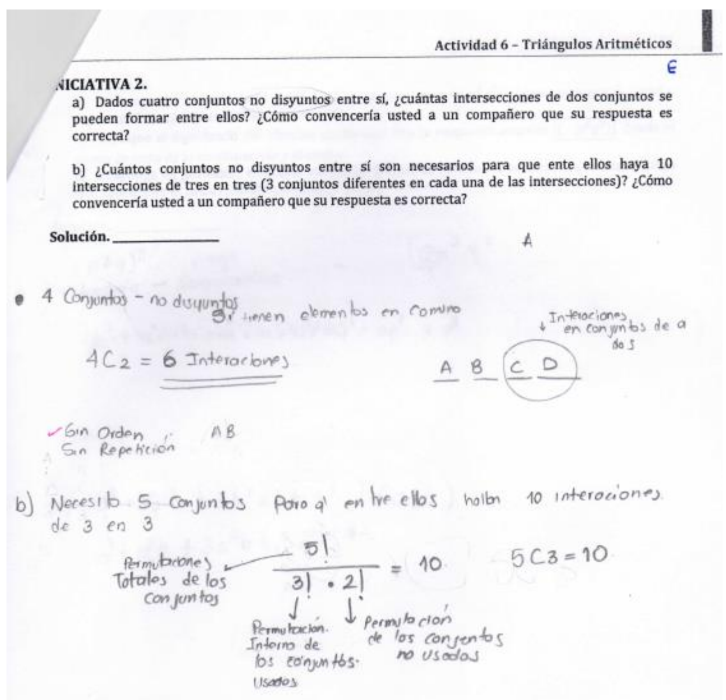
Solución.

a) Cada moneda tiene 2 opciones de caer, y al caer dará 2 opciones de medidas para base y alto. Entonces se pueden combinar 2 veces la medida y 2 veces la dimensión que se tome.

b) Se pueden cubrir 64 cm², y se puede asociar a un rectángulo de 8x8 ó a un triangulo de base 8cm

$\underline{2} \times \underline{2} = 4$

Figura 67. Solución E11-A6-E-1


Actividad 6 – Triángulos Aritméticos

INICIATIVA 2.

a) Dados cuatro conjuntos no disyuntos entre sí, ¿cuántas intersecciones de dos conjuntos se pueden formar entre ellos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) ¿Cuántos conjuntos no disyuntos entre sí son necesarios para que ente ellos haya 10 intersecciones de tres en tres (3 conjuntos diferentes en cada una de las intersecciones)? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Solución.

• 4 Conjuntos – no disyuntos Si tienen elementos en común

$4C_2 = 6$ Interacciones

Interacciones en conjuntos de a dos

A B C D

Sin Orden

Sin Repetición

b) Necesito 5 conjuntos para q' entre ellos halla 10 interacciones de 3 en 3

$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \qquad 5C3 = 10$

Permutaciones Totales de los conjuntos

Permutación Interna de los conjuntos Usados

Permutación de los conjuntos no usados

Figura 68. Solución E15-A6-E-2

Para resaltar en esta actividad las iniciativas propuestas estaban diseñadas para ser solucionadas con el uso del desarrollo del Teorema del Binomio, situación que no se presentó en las iniciativas de la primera parte. Ante esto los estudiantes usaron sus formas de entender combinatorias ya desarrolladas y sus estructura conceptual sobre las mismas (formas de pensar), logrando dar la solución como se muestra en las Figuras 67 y 68.

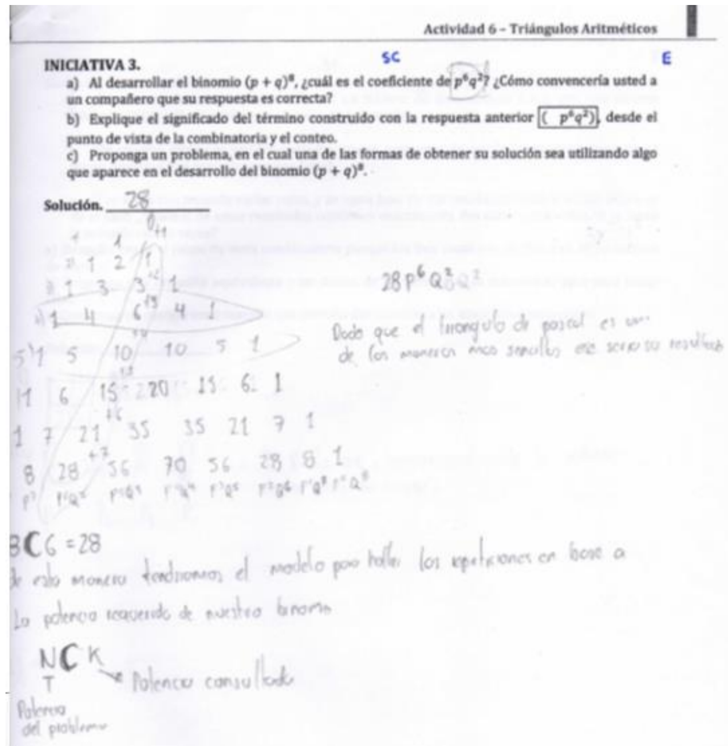
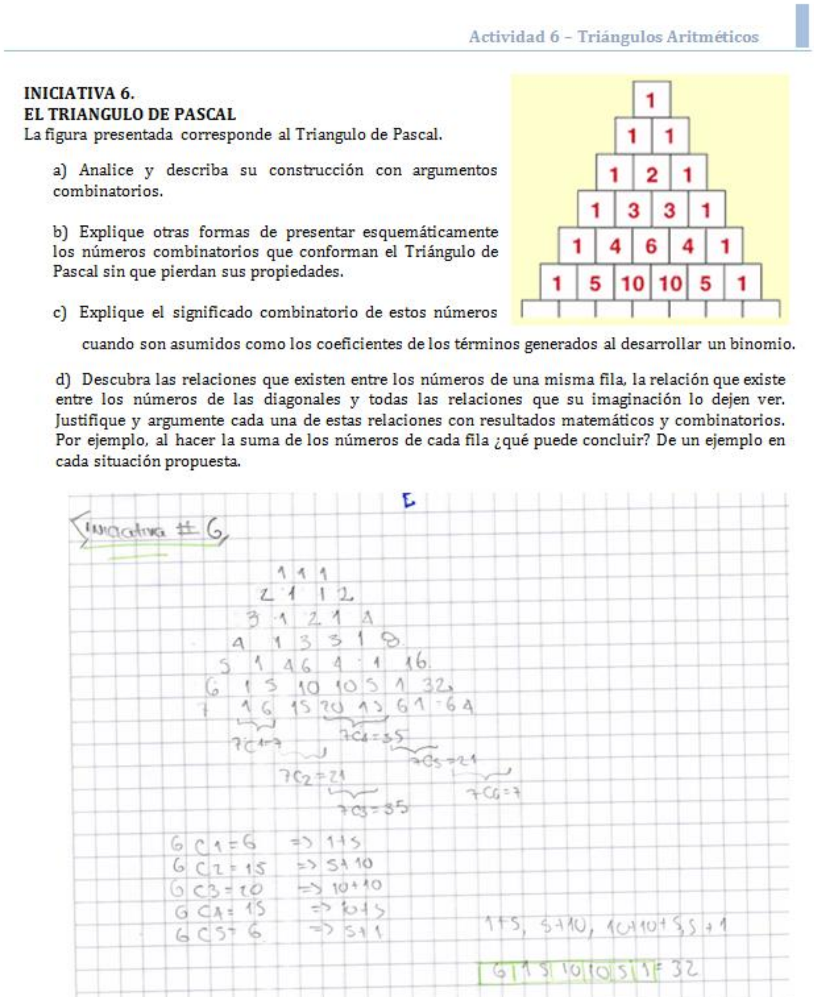


Figura 69. Solución E21-A6-E-3

La solución de la Figura 69 muestra cómo el estudiante evidencia la construcción de un significado para el concepto de la combinación, al deducir su equivalencia con el los números combinatorios (Triangulo de Pascal).

En las soluciones presentadas en las figuras 70 a la 72, se evidencia la apropiación del desarrollo del Teorema del binomio como una herramienta que ahora hará parte de la estructura conceptual utilizada en la solución de problemas combinatorios. Además se evidencia la transferencia de las formas de entender (principio de la variación y de la combinación), sobre una nueva forma de pensar combinatoria (el desarrollo del Teorema del binomio).



Actividad 6 – Triángulos Aritméticos

INICIATIVA 6.
EL TRIANGULO DE PASCAL
La figura presentada corresponde al Triangulo de Pascal.

a) Analice y describa su construcción con argumentos combinatorios.

b) Explique otras formas de presentar esquemáticamente los números combinatorios que conforman el Triángulo de Pascal sin que pierdan sus propiedades.

c) Explique el significado combinatorio de estos números cuando son asumidos como los coeficientes de los términos generados al desarrollar un binomio.

d) Descubra las relaciones que existen entre los números de una misma fila, la relación que existe entre los números de las diagonales y todas las relaciones que su imaginación lo dejen ver. Justifique y argumente cada una de estas relaciones con resultados matemáticos y combinatorios. Por ejemplo, al hacer la suma de los números de cada fila ¿qué puede concluir? De un ejemplo en cada situación propuesta.

Figura 70. Solución E21-A6-X-6

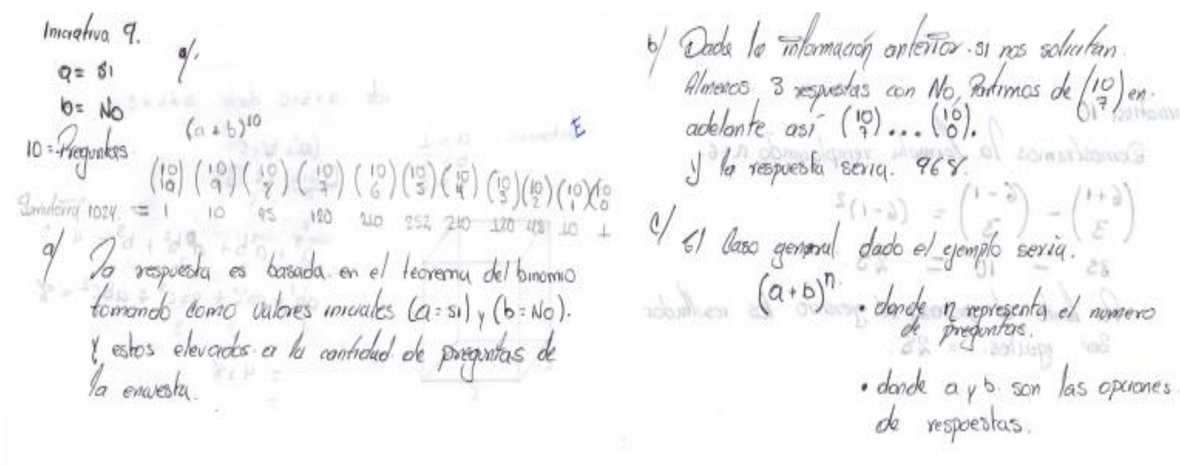


Figura 71. Solución G-A6-C-9

Actividad 6 – Triángulos Aritméticos

INICIATIVA 9.

Se presenta una encuesta de opinión de diez preguntas, con únicas respuestas de que "**SI**" o "**NO**" se está de acuerdo con cada pregunta del tema de consulta. Como ésta es virtual, se deben contestar las diez preguntas para poder ser guardada y enviada.

a) ¿De cuántas formas puede una persona contestar la encuesta? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) ¿Cuántos resultados tienen al menos tres respuestas con "**NO**"? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

c) Proponga el caso general para esta situación y su respectivo modelo general para su solución, explicando el proceder operatorio implícito en él bajo argumentos combinatorios y de conteo.

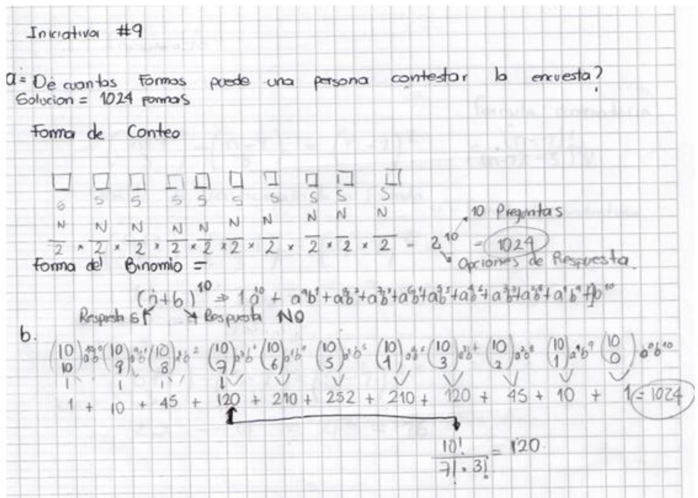


Figura 72. Solución G-A6-C-9

En esta iniciativa se solicitaba a los estudiantes hacer una demostración, pero ellos solamente llegaron a realizar la verificación de la identidad combinatoria, como se puede ver en la Figura 73.

Actividad 6 – Triángulos Aritméticos

INICIATIVA 10.

a) Demostrar o refutar: $\binom{n+1}{3} - \binom{n-1}{3} = (n-1)^2$

b) Proponer y resolver un problema en el cual su solución se pueda dar con la parte izquierda o derecha de la anterior igualdad.

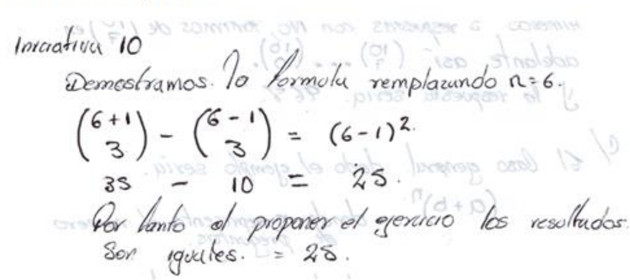


Figura 73. Solución G-A6-C-10

4.7. Actividad 7 – A7 - ¿Cuántas veces me cuentan?

1. Fase 1

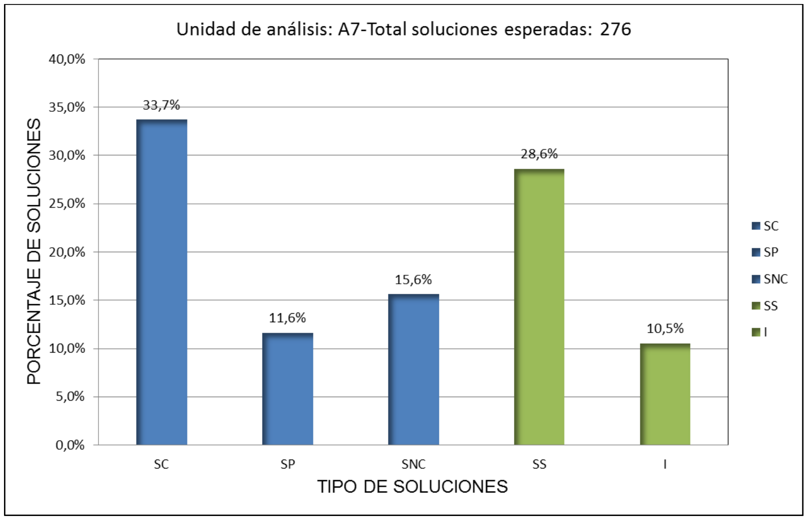


Figura 74. Unidad de Análisis: A7-Total de soluciones esperadas

La fase está formada por el componente de la unidad de análisis que corresponde a la Actividad 7 – ¿Cuántas veces me cuentan? La muestra objetivo, comprende un total de 276 soluciones esperadas, con la asistencia total de los 23 estudiantes que tenían como reto la solución de 12 iniciativas que contenía A7.

En la Figura 74 se muestra la distribución porcentual de las soluciones obtenidas durante la implementación de A7, durante el desarrollo de las clases C13 y C14. De ésta resaltamos los aportes alcanzados para lograr SC y el porcentaje de SS. La primera situación se atribuye al compromiso e interés despertado por trabajar en torno al principio de inclusión – exclusión y la segunda situación al tiempo que fue un limitante para que en las diferentes etapas de la actividad se abordaran otras soluciones a las iniciativas. De este modo se obtiene la muestra real de 60,9% de la muestra objetivo, de la cual se descuentan los dos aspectos tratados anteriormente.

2. Fase 2

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A7, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S. El análisis fue realizado frente a la muestra real, correspondiente a 168 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 75 se presentan en los resultados de este análisis sobre la muestra real; se tomó como muestra real de análisis el 74,4%, que corresponde a 125 soluciones.

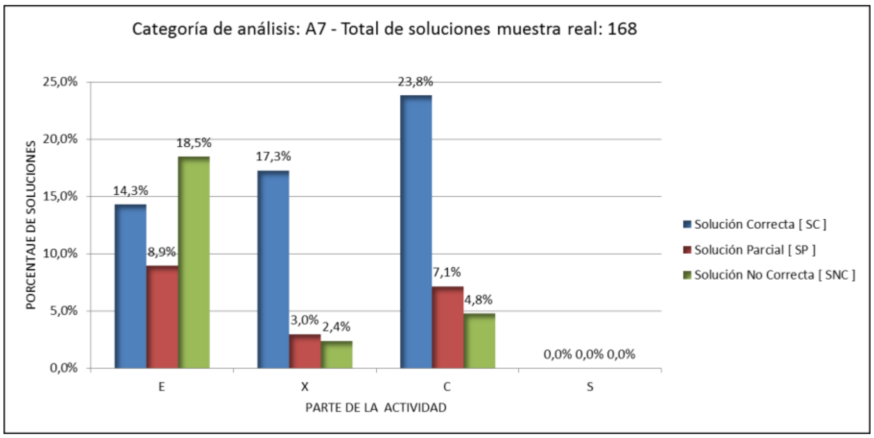


Figura 75. Categorías de Análisis: A7-Total de soluciones muestra real

Acerca de los resultados se resalta el avance significativo reflejado en la disminución de las soluciones no correctas SNC presentado entre la primera parte E y la segunda parte X que evidencia la apropiación del principio de inclusión – exclusión. En la parte E se muestra una alta tendencia en las SNC aparentemente debido a pocos elementos espontáneos para abordar las iniciativas propias de este principio y porque los participantes buscan equivocadamente rutas desde otros principios trabajados anteriormente.

Sin embargo, hacia la tercera parte C se muestra avance en transitar de las formas de entender a las formas de pensar, generando mayores soluciones adecuadas a las iniciativas SC. En efecto, el estudiante en este momento ha alcanzado una construcción de significados más robusto de los conceptos.

3. Fase 3

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas SC y las soluciones parciales SP de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 76. Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

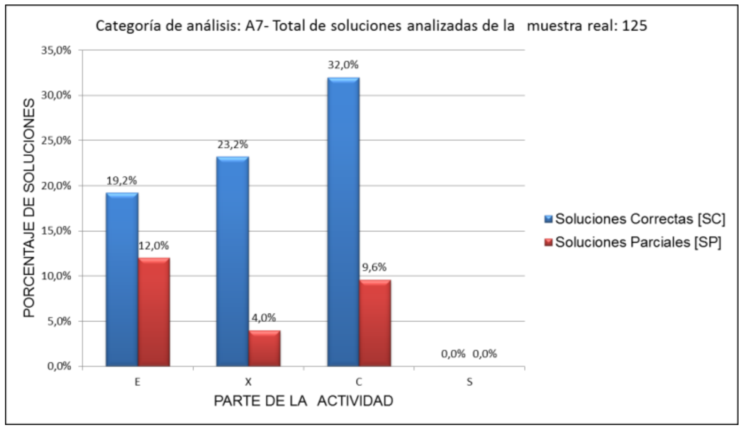


Figura 76. Categorías de Análisis: A7-Total de soluciones muestra real de análisis

En relación con esta actividad A7 se destaca el permanente interés manifestado por los estudiantes por participar en cada una de las etapas y el esfuerzo por presentar SC con permanente retroalimentación con los equipos de trabajo. Se indica cómo para este caso la parte más exitosa de la actividad fue la segunda parte, las actividades extraclase X y las colaborativas C que refuerzan el avance en el proceso por desarrollar el pensamiento combinatorio.

4.7.1. Análisis Soluciones Actividad 7- A7

Las soluciones presentadas en las Figuras 77 y 78 muestran cómo los estudiantes que tienen organizadas sus formas de entender en operaciones entre conjuntos las usaron para orientarlas a una forma de pensar que en el momento fue natural para los estudiantes pues desconocían que el principio que se estaba utilizando correspondía al principio de conteo llamado de inclusión - exclusión. Se puede afirmar que fue natural el razonamiento por el preconcepto interiorizado en teoría de conjuntos. Por otra parte, en la solución de la Figura 79 el estudiante aplica la exclusión únicamente de forma sistemática al descartar los valores dados por las restricciones de las variables de las ecuaciones.

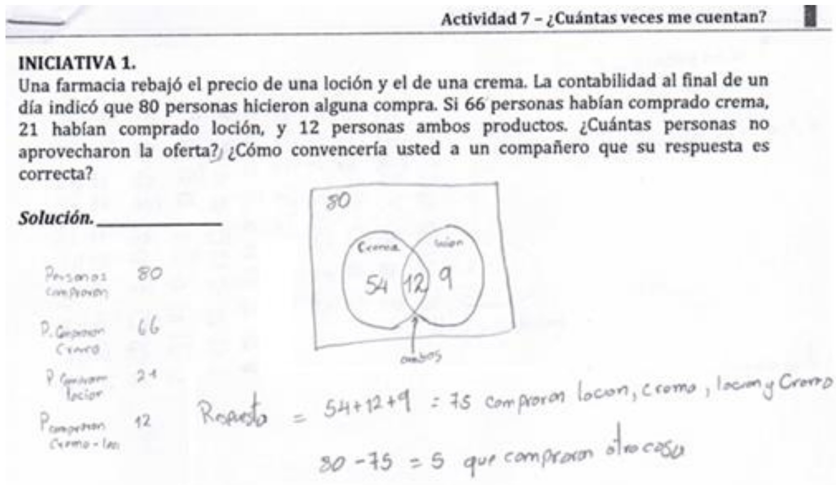


Figura 77. Solución E18-A7-E-1

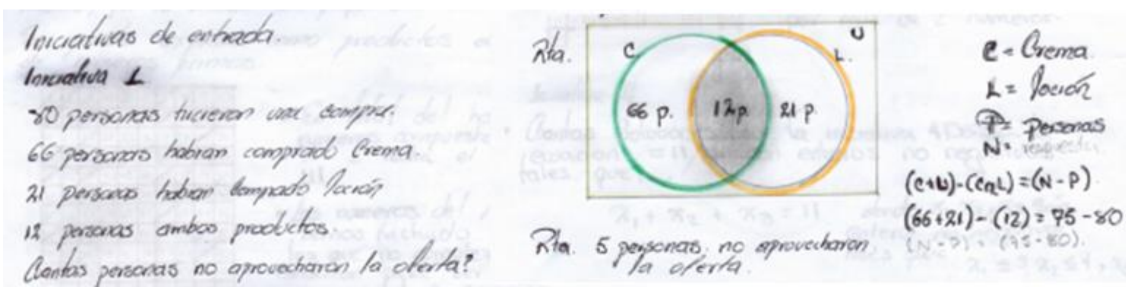


Figura 78. Solución E9-A7-E-1

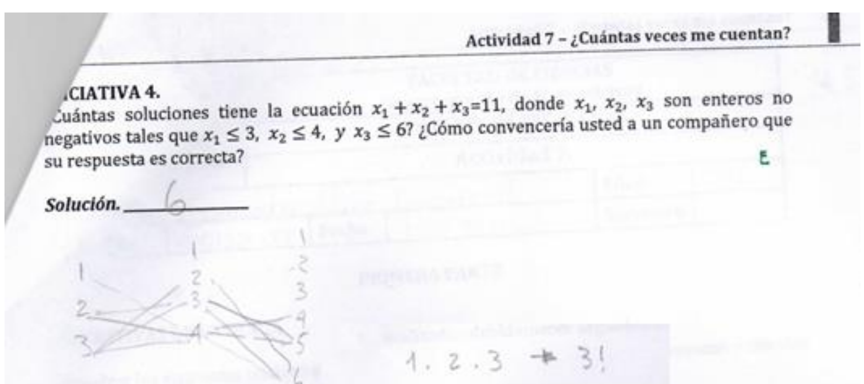
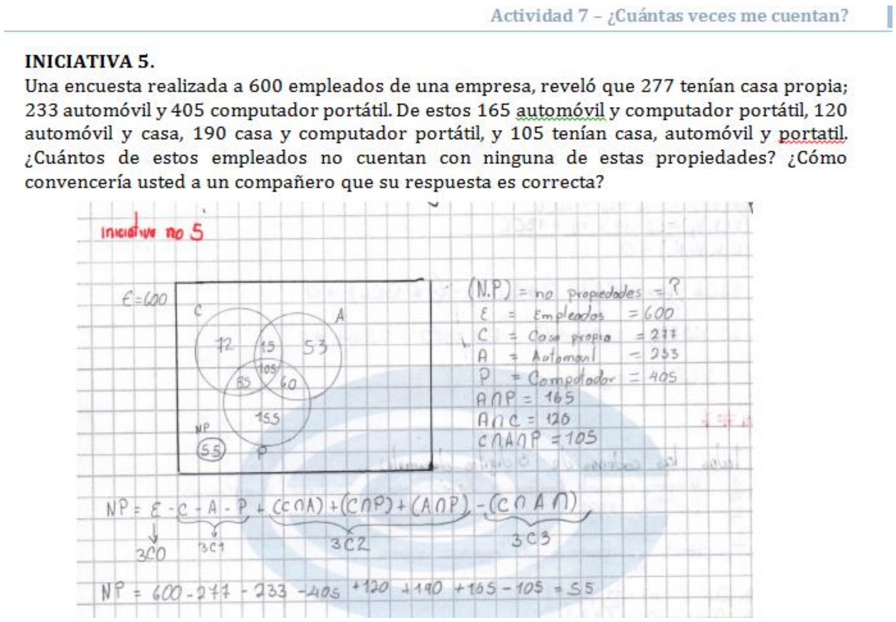


Figura 79. Solución E26-A7-E-4

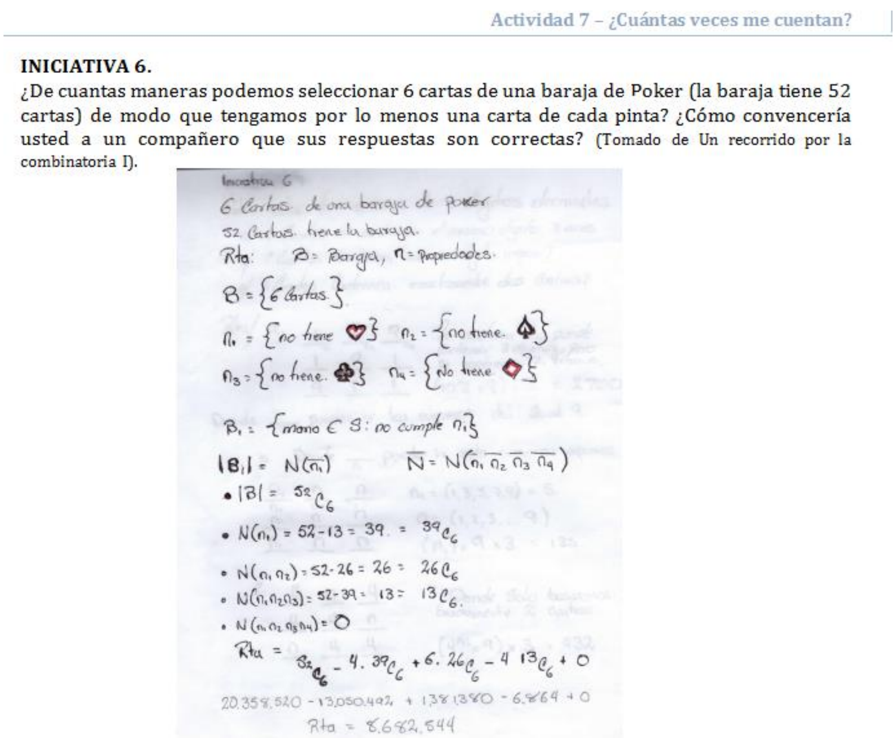
En las soluciones de las Figuras 80 a la 82, se evidencia cómo se facilitó la interiorización de este principio al existir una estructura de representación ya formalizada en los estudiantes como preconcepto (diagrama de Venn) que facilita hacer la relación y conexión con el principio de Inclusión-exclusión (nueva forma de entender). Este concepto a su vez se formaliza con la estructura conceptual al darle un significado combinatorio al desarrollo del principio asociado al desarrollo del Teorema del Binomio.


Actividad 7 – ¿Cuántas veces me cuentan?

INICIATIVA 5.

Una encuesta realizada a 600 empleados de una empresa, reveló que 277 tenían casa propia; 233 automóvil y 405 computador portátil. De estos 165 automóvil y computador portátil, 120 automóvil y casa, 190 casa y computador portátil, y 105 tenían casa, automóvil y portatil. ¿Cuántos de estos empleados no cuentan con ninguna de estas propiedades? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

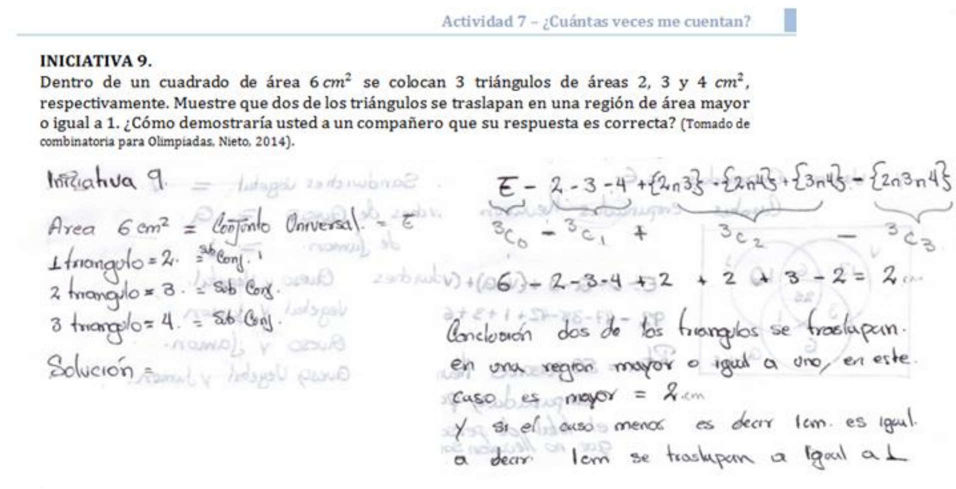
Figura 80. Solución E18-A7-X-5


Actividad 7 – ¿Cuántas veces me cuentan?

INICIATIVA 6.

¿De cuantas maneras podemos seleccionar 6 cartas de una baraja de Poker (la baraja tiene 52 cartas) de modo que tengamos por lo menos una carta de cada pinta? ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas? (Tomado de Un recorrido por la combinatoria I).

Figura 81. Solución E9-A7-X-6


Actividad 7 – ¿Cuántas veces me cuentan?

INICIATIVA 9.
Dentro de un cuadrado de área $6\,cm^2$ se colocan 3 triángulos de áreas 2, 3 y 4 cm^2, respectivamente. Muestre que dos de los triángulos se traslapan en una región de área mayor o igual a 1. ¿Cómo demostraría usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de combinatoria para Olimpiadas, Nieto, 2014).

Iniciativa 9.
Area 6 cm² = Conjunto Universal = E
1 triangulo = 2 = Sub Conj.
2 triangulo = 3 = Sub Conj.
3 triangulo = 4 = Sub Conj.
Solución =

$E - 2 - 3 - 4 + \{2\cap 3\} - \{2\cap 4\} + \{3\cap 4\} - \{2\cap 3\cap 4\}$
${}^3C_0 - {}^3C_1 + {}^3C_2 - {}^3C_3$
$(6) - 2 - 3 - 4 + 2 + 2 + 3 - 2 = 2$

Conclusión dos de los triangulos se traslapan en una región mayor o igual a uno, en este caso es mayor = 2 cm
y si el caso menor es decir 1cm. es igual a decir 1cm se traslapan a igual a 1

Figura 82. Solución G-A7-C-9

4.8. Actividad 8 – A8 - ¿De cuántas formas?

1. Fase 1.

La primera fase de esta actividad posee el componente de la unidad de análisis, la cual corresponde a la Actividad 8 – ¿De cuántas formas? En esta actividad la muestra objetivo, era el total de 276 soluciones esperadas, 23 estudiantes asistentes y con la participación en 12 iniciativas de la actividad.

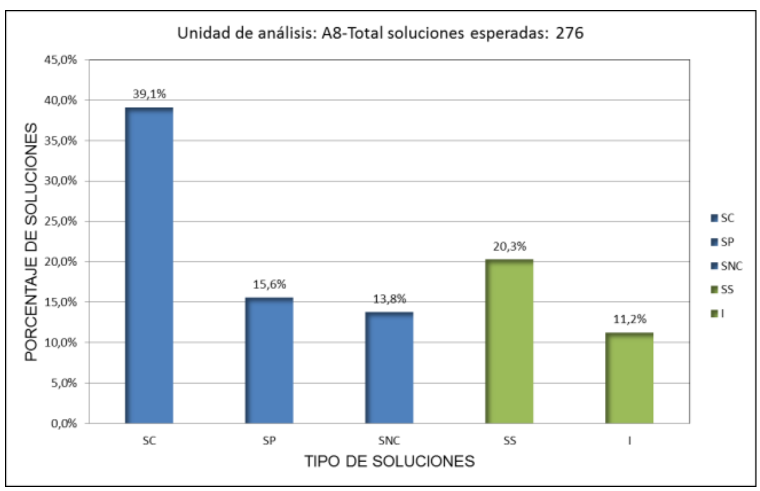


Figura 83. Unidad de Análisis: A8-**Total de soluciones esperadas**

La Figura 83 permite observar la distribución porcentual de las soluciones obtenidas durante la realización de A8 en las clases C15 y C16. Adviértase pues que situaciones como la inasistencia I e iniciativas sin solución SS se mantienen durante la actividad, pero se marca una elevada tendencia a SC y SP. De este modo se obtiene que la muestra real corresponda al 68,5% de la muestra objetivo.

2. Fase 2.

Esta fase corresponde a la categoría de análisis compuesta por las partes de la A8, iniciativas de entrada E, extraclase X, colaborativas C y de la semana S. El análisis fue realizado sobre la muestra real, correspondiente a 189 soluciones sobre el total esperado. En la Figura 84 se presentan los resultados de este análisis sobre la muestra real, de la cual se tomó como muestra real de análisis es el 79,9%, correspondiente a 151 soluciones.

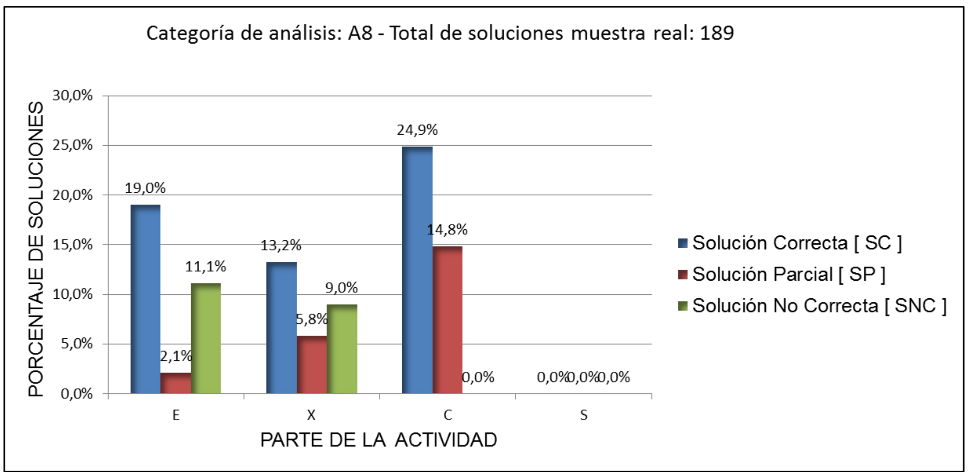


Figura 84. Categorías de Análisis: A8-Total de soluciones muestra real

De la anterior figura se destaca un porcentaje significativo de soluciones no correctas SNC posiblemente debido al grado de dificultad de las iniciativas y porque éstas comprendían una miscelánea de los diferentes principios: suma, producto, permutación, variación, combinación, teorema del binomio e inclusión-exclusión, que requerían de una elección acertada al momento de hallar una solución.

Al lado de ello, es claro que en la tercera parte C se da un incremento en el porcentaje de SC claramente debido a la interiorización de los principios. Al llegar a este punto es observable en los estudiantes un avance entre las formas de entender a las formas de pensar, dando por logrado el cumplimiento de lo planteado en el modelo metodológico «I.C.O.R.».

3. Fase 3.

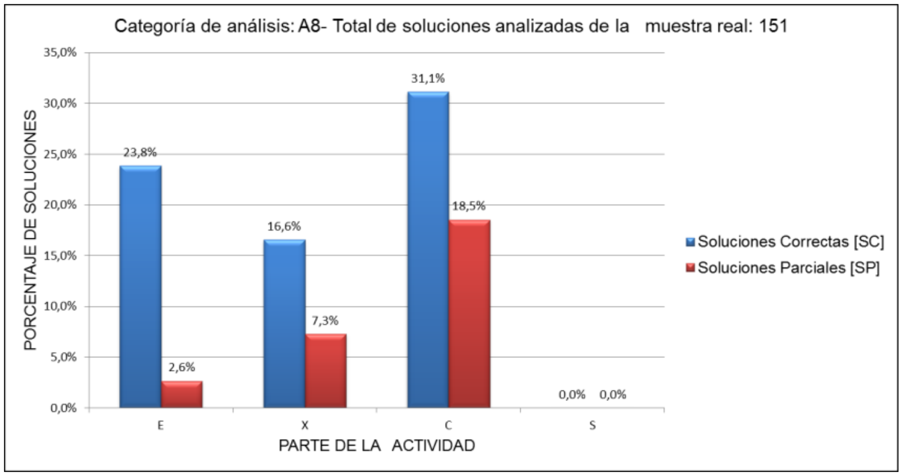


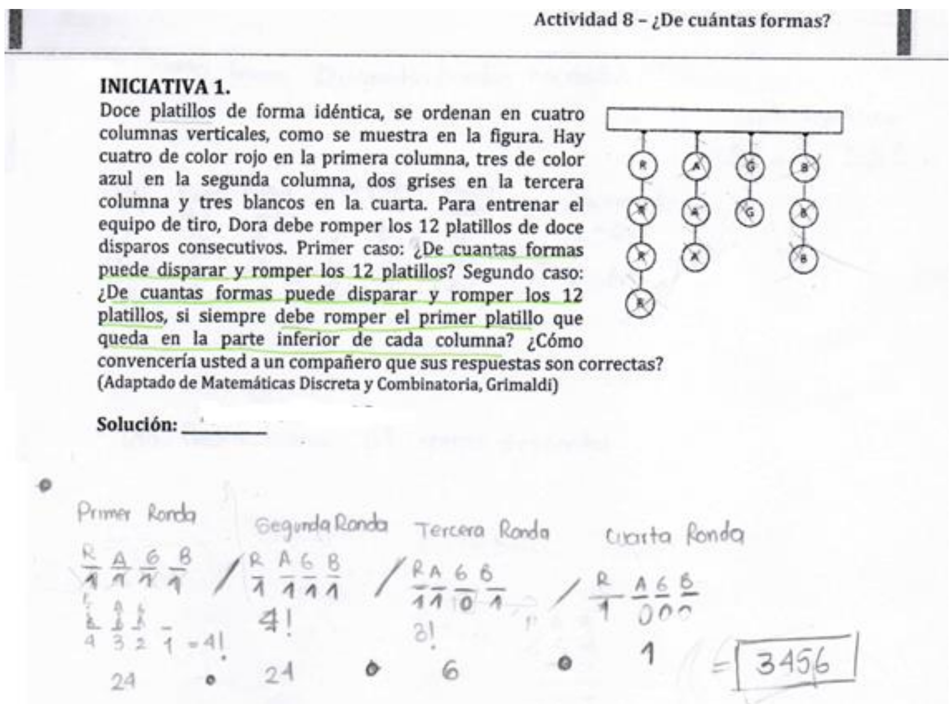
Figura 85. Categorías de Análisis: A8-Total de soluciones muestra real de análisis

Esta fase corresponde al análisis realizado sobre la base de las soluciones correctas SC y las soluciones parciales SP de la muestra real de análisis cuya distribución porcentual se presenta en la Figura 85. Al respecto el análisis descriptivo, comentarios y discusiones particulares de estas soluciones se presentan como el desarrollo de esta fase.

Cabe señalar que en la A8 predominó el alcance de SC en las diferentes partes de la actividad y se fortaleció el trabajo de retroalimentación en la parte C que contrasta con un alto número de soluciones parciales SP debido a la continua discusión frente a las posibles soluciones planteadas por los estudiantes en las iniciativas propuestas. Alrededor de las iniciativas se finaliza con un buen nivel de disposición en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Además se muestra una participación con aportes en las tres primeras partes de la actividad a diferencia de la iniciativa planteada en S, pues corresponden al tiempo que administra mejor el estudiante.

4.8.1. Análisis Soluciones Actividad 8- A8.

Esta actividad es una miscelánea que recoge todos los principios trabajados. En sus soluciones los estudiantes dejan ver una pluralidad en sus soluciones, ratificando el proceso llevado a cabo en cuanto a la evaluación de las acciones mentales, la formalización de las formas de pensar combinatorias (uso de los principios fundamentales de conteo) y el desarrollo de nuevas formas de entender, que les permitieron hacer avances en la estructuración de su pensamiento combinatorio.

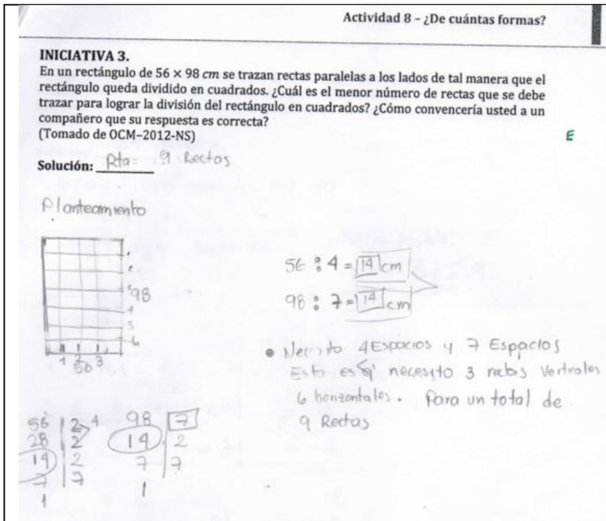

Actividad 8 – ¿De cuántas formas?

INICIATIVA 1.
Doce platillos de forma idéntica, se ordenan en cuatro columnas verticales, como se muestra en la figura. Hay cuatro de color rojo en la primera columna, tres de color azul en la segunda columna, dos grises en la tercera columna y tres blancos en la cuarta. Para entrenar el equipo de tiro, Dora debe romper los 12 platillos de doce disparos consecutivos. Primer caso: ¿De cuantas formas puede disparar y romper los 12 platillos? Segundo caso: ¿De cuantas formas puede disparar y romper los 12 platillos, si siempre debe romper el primer platillo que queda en la parte inferior de cada columna? ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas? (Adaptado de Matemáticas Discreta y Combinatoria, Grimaldi)

Solución: ________

Figura 86. Solución E15-A8-E-1

En las Figuras 86 a la 88 se exponen estas soluciones. En ellas se ratifican las conclusiones que se han estado formalizando al hacer el análisis de cada una de las actividades anteriores.


Actividad 8 – ¿De cuántas formas?

INICIATIVA 3.
En un rectángulo de 56 × 98 *cm* se trazan rectas paralelas a los lados de tal manera que el rectángulo queda dividido en cuadrados. ¿Cuál es el menor número de rectas que se debe trazar para lograr la división del rectángulo en cuadrados? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
(Tomado de OCM–2012-NS)

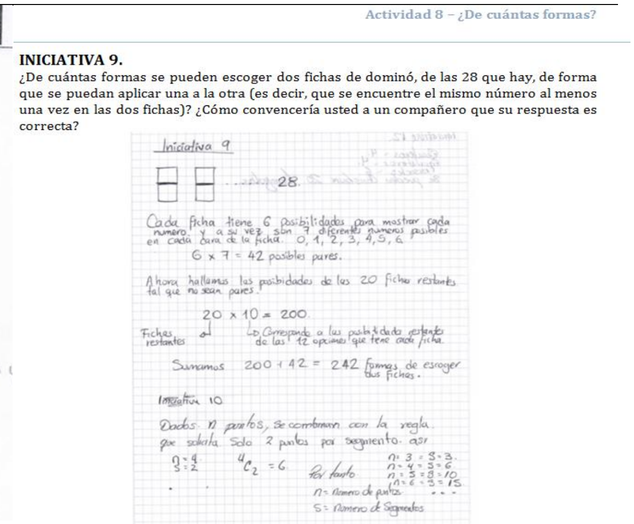
Solución: Rta: 9 Rectas

Planteamiento

56 : 4 = 14 cm
98 : 7 = 14 cm

Necesito 4 Espacios y 7 Espacios
Esto es que necesito 3 rectas Verticales y
6 horizontales. Para un total de
9 Rectas

Figura 87. Solución E12-A8-E-2


Actividad 8 – ¿De cuántas formas?

INICIATIVA 9.
¿De cuántas formas se pueden escoger dos fichas de dominó, de las 28 que hay, de forma que se puedan aplicar una a la otra (es decir, que se encuentre el mismo número al menos una vez en las dos fichas)? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Iniciativa 9

28

Cada ficha tiene 6 posibilidades para mostrar cada número y a su vez son 7 diferentes números posibles en cada cara de la ficha 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
6 × 7 = 42 posibles pares.

Ahora hallamos las posibidades de las 20 fichas restantes tal que no sean pares.
20 × 10 = 200

Sumamos 200 + 42 = 242 formas de escoger dos fichas.

Figura 88. Solución E16-A8-E-3

Conclusiones del Capítulo 4

En este capítulo se presentan los resultados de las diferentes actividades aplicadas a los estudiantes del curso de solución de problemas. Se pensó que una relatoría que reflejara en todo momento la riqueza de la dinámica del estudio y permitiera responder de forma convincente las preguntas científicas contenidas en el capítulo siguiente.

CAPITULO 5. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se da respuesta a las preguntas científicas que se plantearon para direccionar esta investigación, conducentes a alcanzar el objetivo general y dar solución al problema de investigación planteado. Se recuerda que para las preguntas P2, P3 y P4 se construyeron unos objetivos específicos. Estos se propusieron en forma de objetivos didácticos, los cuales corresponden a los objetivos de la unidad didáctica construida como medio para organizar el curso utilizado como contexto. A su vez estos objetivos se reformularon de manera específica para cada una de las actividades presentadas a los estudiantes, generándose a partir de éstos las recomendaciones presentadas a los estudiantes en las tres primeras actividades como parte de la estrategia metodológica propuesta. Para precisar esta relación y facilitar su lectura se presenta cada pregunta con sus respectivos objetivos en una tabla, desarrollándose de esta manera las fases 4, 5 y 6 de los componentes del análisis de los resultados dados en el Capítulo 4. Estos resultados son específicamente las respuestas de P2, P3 y P4, respectivamente.

Antes cabe precisar dos aspectos. Un primer aspecto a considerar es que los resultados y las discusiones que se presentan a continuación están dados sobre la base de la consolidación del análisis de los resultados expuestos en el capítulo anterior de este documento. El segundo aspecto a considerar es que no se debe asociar los resultados al número de respuestas correctas o incorrectas dadas por los estudiantes, sino lo que se debe considerar es que estas cifras representan el número de soluciones (completas, parciales y no correctas) que fueron desarrolladas por los estudiantes. De éstas se analizó paso a paso el razonamiento manifestado y presentado de forma escrita por cada uno de los estudiantes participantes en la investigación. Además, éstas se cuantificaron para mostrar y evidenciar las tendencias y comportamientos encontrados en el análisis de los mismos.

De esta forma se puede estimar que las ocho actividades desarrolladas por el grupo de 23 estudiantes del curso de Solución de Problemas (sujetos), conformaron la unidad didáctica (instrumento) que agrupó 97 iniciativas (problemas), de las cuales se espera obtener 2231 soluciones (muestra objetivo). En la Figura 89 se presenta la distribución de este resultado, del cual se puede ver que el 60,8% de estas soluciones se utilizó en el análisis de los resultados, siendo ésta la muestra real.

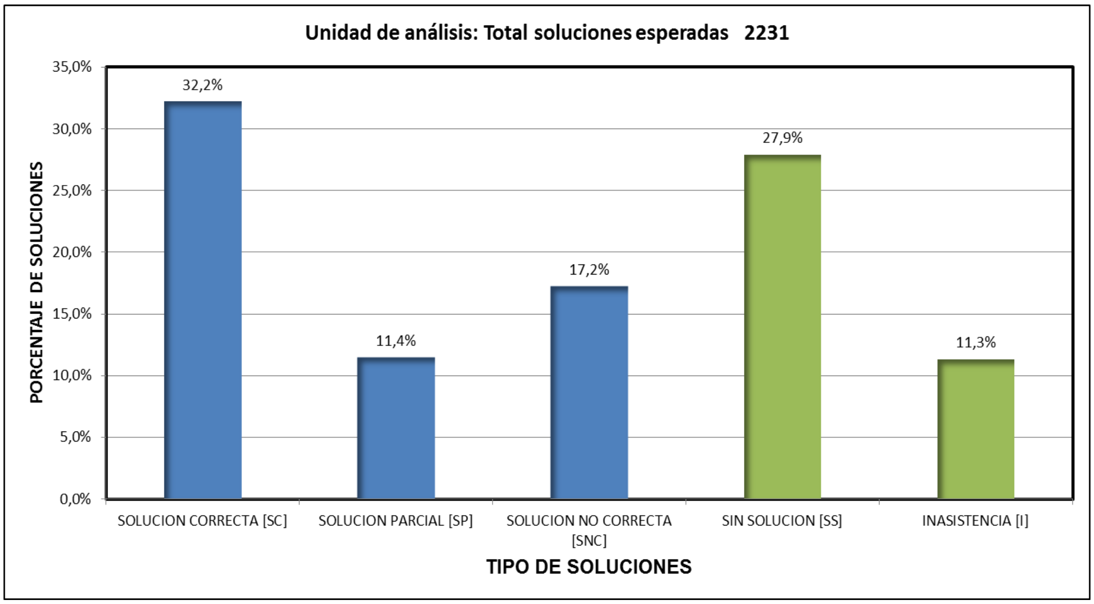


Figura 89. Distribución del total de soluciones esperadas en la muestra objetivo

Como se puede observar en la Figura 90, realmente el aporte de la información analizada corresponde al 71.7% de la muestra real. Resultado que se da, ya que se excluyeron del análisis las soluciones no correctas, que realmente no hacían ningún aporte al objetivo de investigación. De otro modo si había algún aporte se consideraron soluciones parciales. Además, se presenta en la distribución el aporte tomado en cada una de las partes de las actividades, evidenciándose que en la medida en que se avanzaba en el desarrollo de cada una de las partes de la actividad, el aporte fue más significativo.

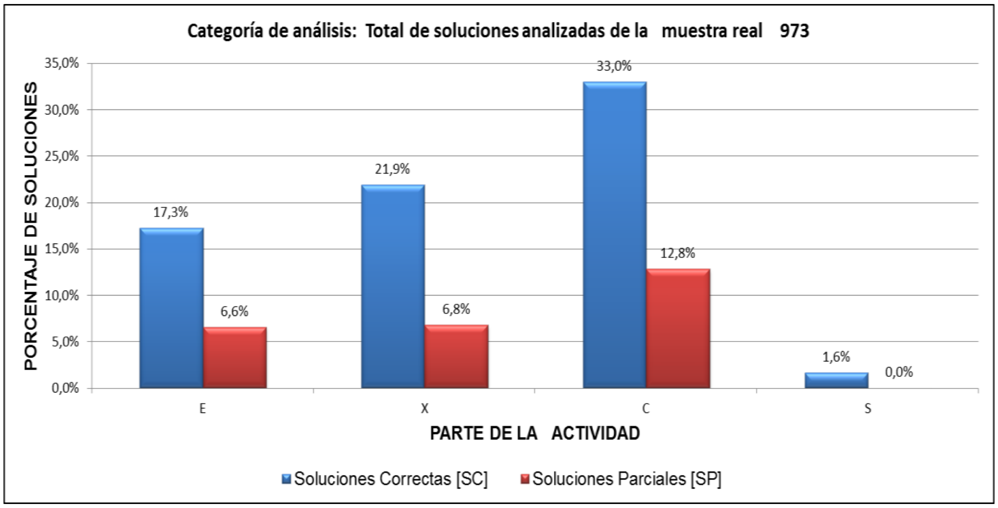


Figura 90. Distribución de la muestra real de análisis

Por otro lado, se pudo suponer que si el proceso llevado a cabo fuese equitativo a lo largo del desarrollo de las ocho actividades, cada una de ellas debería haber aportado un 12.5% de información en promedio. Al comparar este valor con los presentados en la Figura 91 se puede considerar que el proceso fue homogéneo ya que los valores experimentales están alrededor del valor teórico con una mínima diferencia que en parte se debe a la inasistencia de los estudiantes, ya que el faltar al desarrollo de una de las dos partes de la actividad presencial en el aula, afectaba el desarrollo de las otras partes de la actividad. Esta situación se evidenció especialmente en la A3, ocasión en la cual faltaron más estudiantes, mientras que se presentó el caso contrario en la A1 y A8.

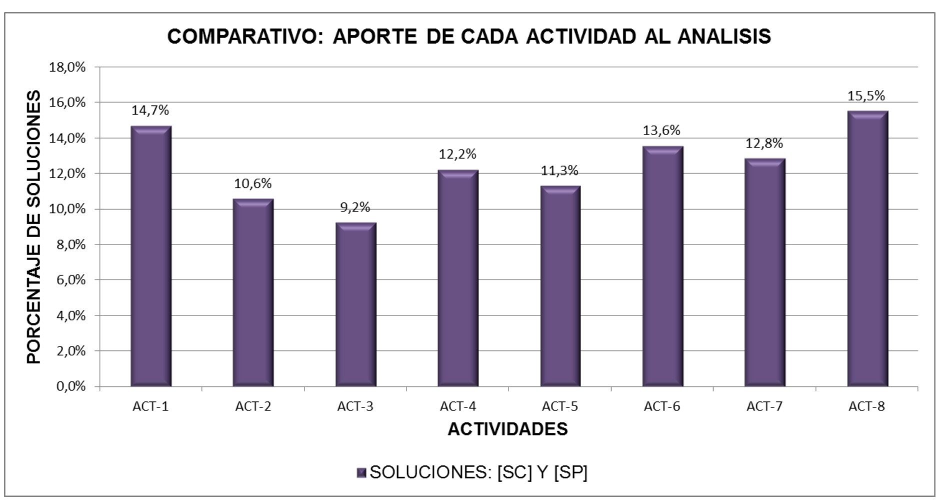


Figura 91. Distribución del aporte de cada actividad ala análisis

Estos resultados a su vez dejan ver como la propuesta metodológica basada en la estructura del modelo «I.C.O.R.» logró equilibrar el proceso de aprendizaje de los principios fundamentales de conteo, ya que en general los resultados de las dieciséis clases fueron similares como se ve en la Figura 91.

5.1. Pregunta Uno

En la Tabla 2 se presenta la primera pregunta de investigación para la cual no se construyeron objetivos específicos, ya que éste implícitamente era la revisión del estado del arte cuyo resultado se puede ver en el Capítulo 1 de este documento.

Tabla 2. Pregunta Uno de investigación

PREGUNTA DE INVESTIGACION
P1 ***¿Qué modelos de caracterización del pensamiento combinatorio se han desarrollado y cuál ha sido su impacto?***

Cabe señalar que a través de la revisión del estado del arte realizado durante la investigación no se encuentran en la literatura modelos específicamente enfocados al estudio de la caracterización del pensamiento combinatorio que determinen particularidades de las *formas de entender y de las formas de pensar.*

Precisa advertir, en todo caso, que existen trabajos científicos en los cuales se analiza el razonamiento combinatorio, sin que éstos describan específicamente las características del pensamiento combinatorio, que hace parte del objetivo de la presente investigación. Más bien se observó que estas investigaciones están enfocadas especialmente a revisar aspectos como: 1) Los errores más frecuentes y sus causas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las técnicas de conteo. 2) Las estrategias propuestas a los estudiantes para desarrollar problemas de conteo, más no a estudiar el tipo de estrategias que los estudiantes desarrollan de forma autónoma cuando se enfrentan a la búsqueda de una solución a un problema combinatorio, siendo ésta una limitante a la libertad en la construcción del significado de los conceptos. Además, esta práctica, al parecer de este investigador, va en contravía con la metodología de enseñanza y aprendizaje a través de la solución de problemas que hizo parte de esta investigación. 3) El tipo de problemas rutinario que se presentan a los estudiantes, los cuales terminan convirtiéndose en ejercicios de combinatoria repetitivos en cuanto a estrategia de solución y a estructura del mismo problema, metodología que no propicia un espacio para la construcción de significado de los conceptos, ni una interiorización del mismo.

5.2. Pregunta Dos

En la Tabla 3 se presenta la segunda pregunta de investigación con sus respectivos objetivos específicos.

Tabla 3. Pregunta Dos de investigación - Objetivos específicos

PREGUNTA DE INVESTIGACION	OBJETIVO DIDACTICO	OBJETIVO ESPECIFICO ACTIVIDAD
P2 ***¿Cuáles son los conceptos y significados empíricos que traen los estudiantes en conteo?***	1. Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.	1) Identificar y deducir los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.

Como se sabe, la combinatoria enumerativa tiene como objetivo contar el número de elementos de cierto conjunto descrito, elementos que se construyen a partir de unas condiciones dadas sobre los elementos de uno o varios conjuntos iniciales, y que generalmente se representan en una configuración. En este sentido se tomaron los resultados de la primera parte de las actividades, iniciativas de entrada E, evidenciándose que los estudiantes ante su primer enfrentamiento con el solucionar problemas combinatorios reconocen básicamente dos tipos de configuraciones como se presentan en la Figura 92. Es de aclarar que el orden en que aparecen en el gráfico es independiente a cómo ocurren en el proceso de solución de un problema.

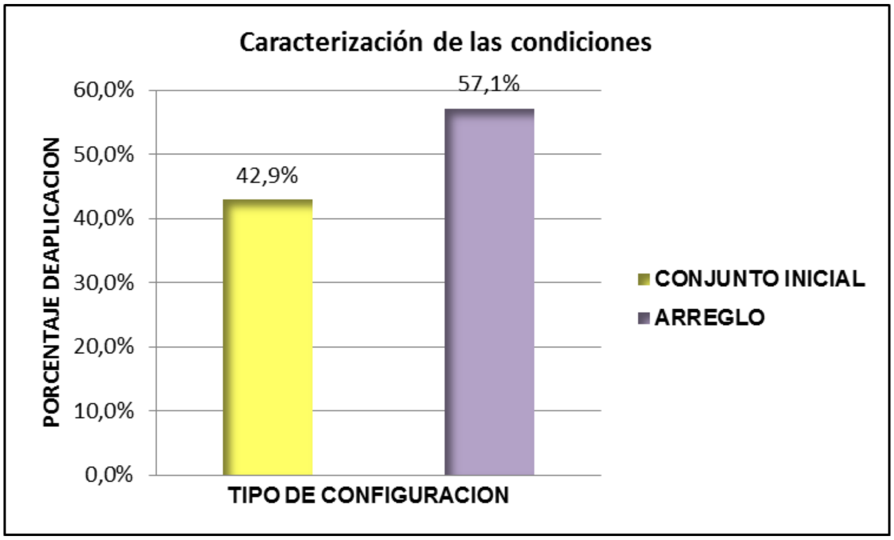


Figura 92. Distribución de las configuraciones

Es de tener en cuenta por otra parte que algunos estudiantes en una misma solución realizaron las dos configuraciones en el proceso de la interpretación inicial del problema propuesto. Para este investigador, esta situación se ha de considerar como lo ideal en el abordaje inicial del problema, ya que en esencia si el estudiante logra reconocer el conjunto o conjuntos iniciales, y con éstos construye un arreglo (configuración), en particular está interpretando las condiciones dadas sobre los elementos. Esta acción le permitirá hacer una relación y conexión con sus preconceptos o experiencias en el área, permitiéndole iniciar la construcción de sus primeras formas de entender combinatorias. Una manifestación de éstas son las relaciones de similitud que establece con otro problema que presenta una estructura muy similar, siendo ésta una característica del pensamiento combinatorio.

De esta forma en lo que respecta a lo evidenciado se ve que, en su mayoría, los estudiantes hacen algún tipo de arreglo inicial, situación que refleja la comprensión y distinción de las condiciones iniciales sobre los elementos. Estas condiciones posteriormente les permitirán construir significado del concepto de conteo implícito en la solución del problema, ya que éstas corresponden a los atributos propios del concepto.

Como consecuencia de la organización de esta información (acciones mentales provocadas por el reconocimiento de ciertas condiciones) en la cognición del estudiante, se orientará en la formalización de las formas de entender combinatorias. Este proceso se dará con la experiencia, permitiéndoles así alcanzar un estado de interiorización de argumentos combinatorios que les ayudarán en la construcción de un nuevo significado del respectivo concepto de conteo y, de este modo, convertirse éste en una nueva forma de entendimiento o en un entendimiento más robusto del concepto.

En cuanto a los conceptos previos explicitados por los estudiantes ante su primer enfrentamiento a cada una de las actividades, se analizó si el estudiante los manejaba de forma natural (no formal) pero análoga a la noción de conteo implícita en la solución de los problemas que conformaron cada una de las actividades. Por ejemplo, en la Actividad 2, se iniciaba la construcción del significado del concepto de permutación (inmerso en el principio de la permutación) y los estudiantes, bajo el principio del producto, lograron construir el principio, identificando las características que distinguen este concepto, a saber, arreglos con orden y sin repetición.

De esta forma los resultados ponen de manifiesto que, en esta parte del proceso, al inicio de la primera actividad, los estudiantes en una mínima parte tienen el concepto previo y el manejo explícito del principio de conteo. Esta característica es sustituida por la gran mayoría de los estudiantes por estrategias espontáneas de conteo arraigadas en sus formas de interpretar cada problema que enfrentan (las cuales se exponen en el análisis de la pregunta tres).

A partir de esta situación se pudo precisar que se dio un estado de interiorización de los significados de los conceptos, los cuales se fueron reutilizando como conceptos previos en la cadena de actividades. Por ejemplo, en la Figura 93 se puede observar cómo desde la Actividad 2 hasta la Actividad 4, se evidencia la existencia de un concepto previo, concepto que fue consecuencia de la organización y orientación del significado de los conceptos desarrollados en cada una de las actividades anteriores.

Esta acción se da como una operación cognitiva desarrollada por el estudiante dentro de sus propios esquemas cognitivos y, por lo tanto, este concepto previo formado debió ser una nueva forma de entender asimilada anteriormente.

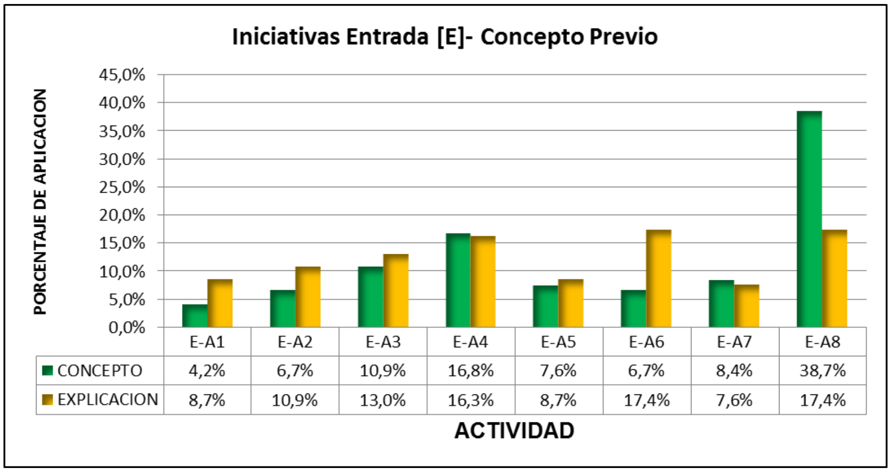


Figura 93. Distribución del concepto previo en las iniciativas de entrada

En el desarrollo de estas actividades se evidencia la existencia de la construcción e incorporación de significados de los conceptos de la suma y el producto (desde el punto de vista combinatorio), la permutación, la variación y la combinación respectivamente, considerándose éstos últimos como nuevas formas de entender más robustas del concepto del producto, dado que estos conceptos, por un lado, se fueron construyendo sobre la base del principio del producto y, por otro lado, sobre los conceptos previos que ya se habían construido. (Se aclara el uso de la categoría "explicación" en lo que sigue.)

En las actividades 6 y 7 se presenta una disminución en el uso del concepto previo como consecuencia de la incorporación de dos principios nuevos, con estructuras totalmente diferentes, entre sí y a la de los principios anteriores. Estos fueron el Teorema del Binomio (en su interpretación combinatorio) y el Principio de Inclusión-Exclusión, los cuales eran totalmente novedosos para el grupo de estudiantes.

Ello renace en la Actividad 8, la cual es una miscelánea de problemas cuya solución requiere la aplicación de uno o la combinación de varios de los principios trabajados en la unidad didáctica. De esta manera se muestra la existencia y utilización de un concepto combinatorio previo, suceso que evidenció y ratificó la organización y orientación de las formas de entender combinatorias, siendo éstas ahora parte del entendimiento de los estudiantes que las aplicaron al solucionar los problemas combinatorios con diferentes estructuras y grados de complejidad.

Por otro lado se puede observar que, como parte de la debilidad manifestada por algunos de los estudiantes al no manejar un concepto previo, recurrieron a realizar explicaciones informales, para justificar sus interpretaciones y argumentar sus soluciones. Esta situación mostró un comportamiento inverso, a saber, a mayor uso de conceptos previos, menor uso de explicaciones por parte de los estudiantes.

5.3. Pregunta Tres

En la Tabla 4 se presenta la tercera pregunta de investigación con sus respectivos objetivos específicos.

Tabla 4. Pregunta Tres de investigación - Objetivos específicos

PREGUNTA DE INVESTIGACION	OBJETIVO DIDACTICO	OBJETIVO ESPECIFICO ACTIVIDAD
P3 *¿Cuáles estrategias emplean los estudiantes en la solución de problemas de análisis combinatorio y cómo se puede caracterizar el pensamiento involucrado en ellas?*	2. Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos de del conjunto determinado por las condiciones dadas), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.	2) Construir significados del principio de *conteo*[29] a través de la solución de problemas de combinatoria.
	3. Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.	3) Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización del principio de *conteo*$_1$.

[29] **Aclaración:** En los objetivos específicos 2 y 3, de cada actividad. La expresión *conteo*[*] se sustituyó por el principio de conteo desarrollado en la actividad. Por ejemplo en la Actividad 2, se reemplazó por principio de la permutación.

Como se indicó anteriormente, los estudiantes que no mostraron el manejo claro de un concepto previo, basaron sus soluciones en conteos sistemáticos realizados a partir de las configuraciones (arreglos) obtenidas al interpretar y relacionar las condiciones dadas a los elementos del conjunto inicial, siendo éstas sus formas de entender primarias. Con base en estas configuraciones desarrolladas, lograron reproducir en algunos casos la totalidad de los elementos del nuevo conjunto (ver Figura 24). Otros analizaban comportamientos en los patrones observados en las configuraciones y con ayuda de las operaciones de la suma y del producto construían la solución (ver Figura 42).

Las estrategias presentadas en la Figura 94 fueron implementadas por los estudiantes durante el desarrollo de las diferentes actividades. Es de anotar que el orden dado en la representación gráfica es independiente a su aparición en las soluciones.

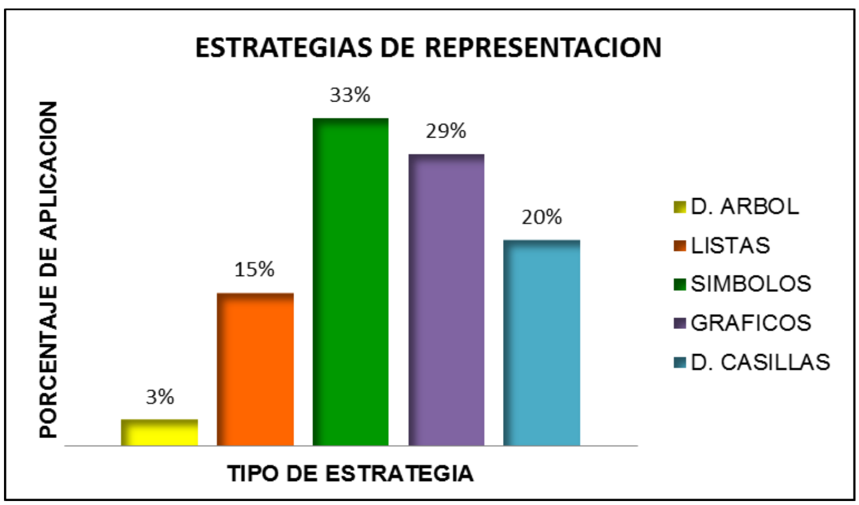


Figura 94. Distribución de las estrategias de representación

La estrategia de listas (por ejemplo, ver la Figura 24) fue implementada especialmente en las primeras actividades, y además se observó que se dejaba como último recurso después de explorar e intentar hacer la solución mediante razonamientos basados en algún concepto combinatorio (formas de entender combinatorias). El diagrama de árbol (por ejemplo, ver la Figura 28) fue muy poco implementado por el grupo de estudiantes, dado que en su mayoría encontraron unas estrategias menos dispendiosas, como lo fueron los símbolos (por ejemplo, ver Figuras 25.B, 26.A o 33.A) o el diagrama de casillas (por ejemplo, ver Figuras 26.B, 29 o 43). Los símbolos se entenderán como la asignación de una letra, un número u otro símbolo para representar los elementos involucrados en la solución, simplificando de esta forma su escritura y facilitando un control en la elaboración de las configuraciones. Las casillas por su parte son espacios representados por rectángulos o guiones, que representan las posiciones de cada uno de los elementos dentro de una configuración, esquema que permitió visualizar las relaciones a considerar (análisis de las condiciones sobre los elementos –formas de entender-). Un ejemplo claro está en la Figura 45. Estas dos representaciones casi que se dan a la par, permitiendo hacer una relación y conexión con el concepto del producto y evitando así hacer listados o diagramas de árbol dispendiosos. Los gráficos, que en este caso se entenderán como la representación de los objetos del contexto involucrados como elementos de los conjuntos iniciales, fue la otra estrategia de representación utilizada (por ejemplo, ver Figuras 25.A, 53 o 67).

Al mismo tiempo se dieron algunos casos en los cuales estas estrategias de representación se dieron de forma progresiva (por ejemplo, ver Figura 34), evidenciándose por parte del investigador, este proceder como un ideal dentro de la formación del pensamiento combinatorio en su estructura inicial (ver análisis de la Figura 34, en el capítulo anterior). Esta situación se consideró representativa dentro del análisis de la caracterización del pensamiento combinatorio, por lo cual estas estrategias de representación serán consideradas como características propias del pensamiento combinatorio, pensamiento inmerso en la estructura de representación formada durante el proceso de solución de problemas significativos, de contexto y matemáticos.

Por otro lado, se analizó que otro grupo de estrategias empleadas por los estudiantes en la solución de los problemas propuestos fueron sus formas de proceder, las cuales estaban directamente asociadas a una estructura conceptual de formación previa o en proceso de construcción. Estas estrategias se presentan en la Figura 95 y es de aclarar que el orden como son presentadas en la gráfica está sujeto a la forma como se fueron presentando durante el análisis de las diferentes soluciones.

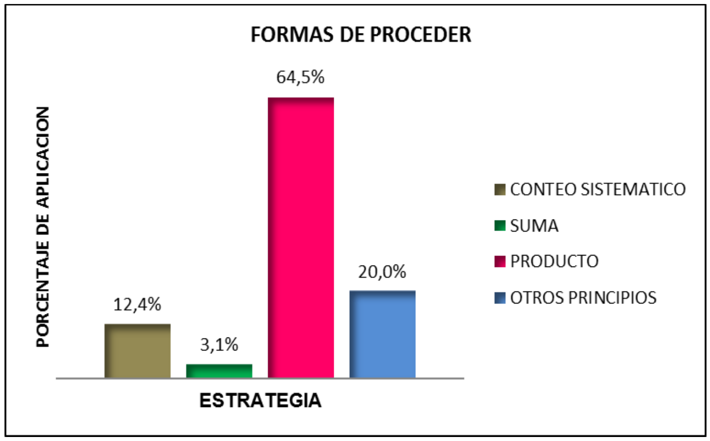


Figura 95. Distribución de las formas de proceder

En primera instancia tenemos el conteo sistemático, basado en alguna de las estrategias de representación expuestas anteriormente, representación sobre la cual el estudiante hace el análisis (identificación de los atributos propios del concepto combinatorio pertinente, basado en el análisis realizado a partir de las condiciones dadas sobre los elementos del conjunto inicial), logrando establecer una relación y conexión conceptual, que le permite identificar un concepto previo apropiado o adaptable, siendo esta acción una forma de entender. Esta, mediante puentes cognitivos propios de la cognición del estudiante, se organiza y orienta en la construcción del nuevo significado al concepto aplicado, acción que estará relacionada a un proceder dado por una forma de pensar la cual está asociada al principio de conteo que concierne dicho concepto. Por otro lado, se puede ver que la construcción de este nuevo significado puede ser la formación de un nuevo concepto, es decir de una nueva forma de entender.

El proceder descrito anteriormente se considera por parte del investigador como la evolución de las estructuras el pensamiento combinatorio, que traen consigo mismas la evolución entre las formas de entender combinatorias y las nuevas formas de entender (formas de entender más robustas), asociadas a una forma de pensar que permite la transferencia o el cambio de la una a la otra. Por ejemplo, una forma de entender asociada al concepto de la permutación, influenciada por el proceder del principio del producto, se transforma en una nueva forma de entender combinatoria, formando el concepto de la variación.

Como se observa en la Figura 95, el conteo sistemático fue sustituido por una síntesis del conteo a veces bajo el principio de la suma, pero principalmente bajo la estructura del principio del producto, entendido éste por los estudiantes como una forma de conocer el número de relaciones entre los elementos de un conjunto A, con los elementos de un conjunto B. Este resultado se asumió como la forma de entender combinatoria básica y fundamental considerada como una característica de la formación y evolución del pensamiento combinatorio dado durante la solución de problemas significativos.

Este proceder permitió la construcción de nuevos significados de los conceptos combinatorios (nuevas formas de entender combinatorias) influenciados bajo los demás principios de conteo (formas de pensar combinatorias), cuya evidencia se recoge en la evolución de la utilización de otros principios de conteo durante la solución de los problemas, como medio para materializar los nuevos significados de los conceptos trabajados.

5.4. Pregunta Cuatro

En la Tabla 5 se presenta la cuarta pregunta de investigación con sus respectivos objetivos específicos.

Tabla 5. Pregunta Cuatro de investigación - Objetivos específicos

PREGUNTA DE INVESTIGACION	OBJETIVO DIDACTICO	OBJETIVO ESPECIFICO ACTIVIDAD
P4 *¿Cómo procede la consolidación de un modo de pensar que puede llamarse combinatorio y qué*	4. Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.	4) Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y

características tiene?		de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
	5. Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.	5) Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.
	6. Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.	

Antes de continuar, es de aclarar lo que significa para este investigador el "caracterizar el pensamiento combinatorio". Entre las cosas que se buscaron fue entender y describir como el estudiante realiza las operaciones fundamentales de la actividad mental, entre ellas la abstracción, provocadas y orientadas a partir de las acciones mentales generadas durante el proceso de interpretación que él realiza cuando se enfrenta o se reta a solucionar un problema significativo, matemático (en este caso del análisis combinatorio) o de contexto. Se aclara que la investigación se enfocó en examinar el pensamiento que utilizaron los estudiantes en la solución de los problemas planteados en las actividades diseñadas para tal fin y en consecuencia se podrán ver los resultados como un avance significativo en la caracterización del pensamiento combinatorio, realizada sobre la base del marco teorico y metodologico construido para tal propósito.

En este sentido los resultados experimentales de la investigación llevaron a concluir y proponer una caracterización del pensamiento combinatorio suscitado por el análisis hecho por los estudiantes de las situaciones y preguntas planteadas. Esta caracterización se presenta de manera general en la Figura 96, para luego hacer su discusión.

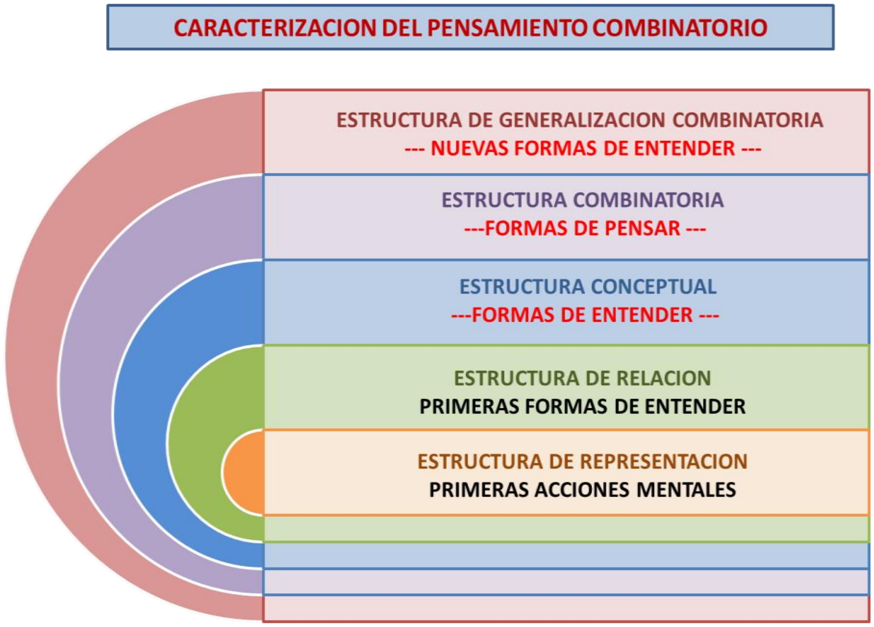


Figura 96. Estructura de la caracterización del pensamiento combinatorio

La actividad mental se provoca con una necesidad, que en este caso fue la interpretación y representación de las situaciones y preguntas planteadas por las *iniciativas* (problemas de conteo) propuestas a los estudiantes a través de las diferentes actividades. Así se genera una primera forma de entender basada en las relaciones y conexiones plasmadas en la representación, que en este caso corresponde al conjunto de *acciones mentales* producidas por los datos asimilados durante esta primera interacción entre el estudiante y el contenido del problema que trae implícito alguno de los conceptos fundamentales de conteo y cuya solución se podrá luego alcanzar bajo algún proceder espontáneo relacionado con alguno(s) de los principios de conteo. Este proceso se denominó dentro de la caracterización "Estructura de representación". Estas acciones tendrán correspondencia con la forma en que se consigna la interpretación en una representación del contexto y las condiciones del problema. Un ejemplo de ello es la iniciativa 1, de la Actividad 2 en la cual para los estudiantes resultó muy familiar hacer el experimento de colocar los esferos dentro de un estuche, de forma fisico-abstracta mediante un gráfico o diagrama, como se expuso en el análisis de los resultados en el Capítulo 4.

En general la investigación caracteriza la estructura de representación como el conjunto de estrategias de representación que los estudiantes puedan utilizar para materializar sus acciones mentales, tal como se expuso en la Figura 94 de la Pregunta 3 de investigación. En este momento de la actividad mental se da el análisis de las condiciones sobre los elementos de un conjunto inicial, condiciones que posteriormente se reconocen y decantan como los atributos propios de cada uno de los conceptos combinatorios implícitos en los problemas. De esta manera se comienza a producir la interiorización de unas primeras formas de entender combinatorias propias de cada concepto. Con la ocurrencia de este momento del proceso comienza la formalización de la estructura de representación dentro de los esquemas cognitivos de cada estudiante.

Iniciada la formalización de la estructura de representación, el estudiante hace una interpretación de la estrategía de representación utilizada, usando operaciones como la comparación y la contrastación, tanto externa como interna. Es decir, que puede relacionar lo construido con hechos ya vividos (por ejemplo un problema en otra área, un problema con estructura similar, entre otros) o con sus conocimientos previos, ya interiorizados. Por otro lado comienza la clasificación, al encontrar identidad o divergencia en las condiciones interpretadas, tal como se expuso en la pregunta dos de investigación.

La identificación y apropiación de estas condiciones son la transformación de los datos en información, produciéndose así la orientación y acomodación de la misma. De esta forma quedarán enmarcadas bajo las *formas de entender combinatorias*. Es decir, estas acciones generadas a partir de las condiciones, provocarán el entendimiento con el que el estudiante consigue hacer la conexión entre el esquema externo e interno (el problema propuesto y las forma de entender ya interiorizadas, respectivamente), con una aproximación a los conceptos combinatorios. De esta forma el estudiante logra hacer una organización a su inetrior, que active el significado previamente atribuido a los conceptos e identifique las modificaciones requeridas para enfrentar la nueva situación de modo que sean asimiladas, llevándolo a generar un significado más robusto. Al mismo tiempo este proceso será guíado por la metodología de solución de problemas que se esté implementando. Un ejemplo de la manifestación de este proceso se puede ver en la solución de la iniciativa E-1, de la actividad A3, presentada en la Figura 44. En la cual el estudiante relaciona el problerma con hechos ya conocidos en otra área (relación del esquema externo con el interno), conectando la situación con las formas de netender combinatorias ya apropidas (en este caso principio del producto), sobre las cuales llega a la construcción del concepto más robusto (variaciones con repetición), logrando la solución del problema.

El proceso descrito, dentro de la caracterización se denominó "Estructura de Relación y Conexión", siendo ésta el conjunto de acciones mentales, llamadas primeras formas de entender, que el estudiante utiliza para relacionar y conectar los primeros significados de tipo combinatorio originados. Estas acciones mentales compaginan las condiciones propias de cada concepto combinatorio, por ejemplo, atribuir orden y no repetición al concepto de permutación, tal como se evidenció en el análisis de los resultados en el capitulo anterior, proceso que se debe reconocer como la transición de una estructura del esquema a otra, la cual está dada por un puente cognitivo que se denominó en la investigación *organización*. Un ejemplo de esta estructura se encuentra en el análisis de solución presentada en la Figura 34 en el Capítulo 4.

Seguidamente estas relaciones y conexiones construidas activan el siguiente proceso, la "Estructura Conceptual", llamada así en esta caracterización porque en ella se producen las operaciones mentales del análisis y de la síntesis por medio de las cuales se construye significado de los conceptos combinatorios. La primera corresponde a la descomposición mental del objeto (el contenido del problema) en la que se identifican sus propiedades y atributos, mientras que, por medio de la segunda, se recompone el objeto. Este proceso se da por medio de otro puente cognitivo, denominado en la investigación *orientación*. Este cumple con la función de adaptar el conocimiento previo a estas propiedades y atributos, identificados o construidos durante el análisis-síntesis, acoplamiento que se exteriorizará mediante una estrategia cognitiva (utilización de un proceder combinatorio, por lo general inmerso dentro de alguno de los principios de conteo), considerada como una *forma de pensar*. Sobre la base de esta forma de pensar se dará la construcción de un significado del concepto combinatorio activado, significado que puede ser nuevo o robusto, es decir, la ampliación de uno ya construido. De esta manera se idea o produce la solución del problema. Las caracteristicas de esta estructura se plantearon en la discusión de la Pregunta 3 de investigación, las cuales se plantearon como estrategias cognitivas.

Al llegar el estudiante a esta etapa (correspondiente a una estructura en el esquema que se ha expuesto aquí), debe haber alcanzado la interiorización (construcción de significado) del concepto combinatorio implícito en la solución de los problemas, convirtiéndose así este conocimiento en un nuevo saber, dado que se presentó la formación de un nuevo concepto combinatorio o el robustecimiento de uno ya formado, al pasar el pensamiento combinatorio de unas representaciones que evidenciaron unas formas de entendimiento sobre el objeto, a unas formas de pensar estructuradas sobre el objeto. Esta situación implica que el estudiante podrá volver a activar estos conceptos con significado robusto, abriéndose así la posibilidad de generar nuevas formas de pensar en las cuales los nuevos problemas harán que el estudiante evoque primeramente las formas de pensar estructuradas, que ya formalizó como formas de proceder, para enfrentar la nueva situación y las transforme de acuerdo con las exigencias de la nueva situación planteada. Esto es exactamente lo que se buscó, por ejemplo, con la introducción de problemas que invierten la situación planteada dando una respuesta para que el estudiante planteara un problema cuya solución llevara a la respuesta dada. Como muestra de ello, se pueden consultar las soluciones dadas a las iniciativas 3, 5 y 10 de las Actividades A1 y A4 presentadas en las Figuras 27, 53 y 55 respectivamente.

Este proceso se denominó dentro de la caracterización del pensamiento, la “Estructura Combinatoria”, la cual se basa en implementar algún tipo de proceder elaborado, inmerso dentro de alguno de los principios combinatorios de conteo formalizados, las combinaciones de éstos o sus interrelaciones, como estrategia cognitiva, pues no hay una estrategia generalizada de la cual se valga el estudiante para resolverlos rutinariamente.

Esta estructura exige el desarrollo de un buen nivel de abstracción por parte del estudiante, nivel que es alcanzado en parte con la práctica y la experiencia que pueda vivir el estudiante, frente al interés y la necesidad por conseguirlo. Pero, por otra parte, se alcanza con la flexibilidad desarrollada al enfrentar problemas que requieren reorientar (por ejemplo, invertir) sus formas de pensar. Además, en esta etapa el conocimiento abandona lo concreto (la estructura de representación), volviendo a él sólo desde lo abstracto y reconstruyendo lo concreto con mayor rigurosidad. Como una muestra y evidencia de ello, se puede ver el análisis de las soluciones presentadas en las Figuras 51 y 52 en el Capítulo 4.

Finalmente, esta caracterización termina con la “Estructura de Generalización Combinatoria”, en la cual se espera que el estudiante cree modelos como solución de un problema, permitiendo así el desarrollo e implementación de una estrategia transformativa, con la cual puede convertir un problema en otro u otros parcial o totalmente equivalentes que ya se han dominado. Adicionalmente, otras características manifestadas en esta estructura corresponden a las conclusiones y observaciones dadas por Gowers (2000). Algunos casos de esta estructura se pueden ver en el análisis de las soluciones presentadas en las Figuras 36, 38 y 63.

De esta forma la investigación consolida la caracterización del pensamiento combinatorio manifestado en el desarrollo de la solución de problemas de conteo, cuyas soluciones traen implícitamente la utilización de alguno de los conceptos básicos de conteo contemplados en el marco teórico.

Por otra parte, se buscó consolidar este tipo de pensamiento matemático, objetivo que se alcanzó con la implementación del modelo metodológico «I.C.O.R.» y su relación con el diseño de las actividades y los avances logrados en la caracterización del pensamiento combinatorio como se muestra en la Figura 97.

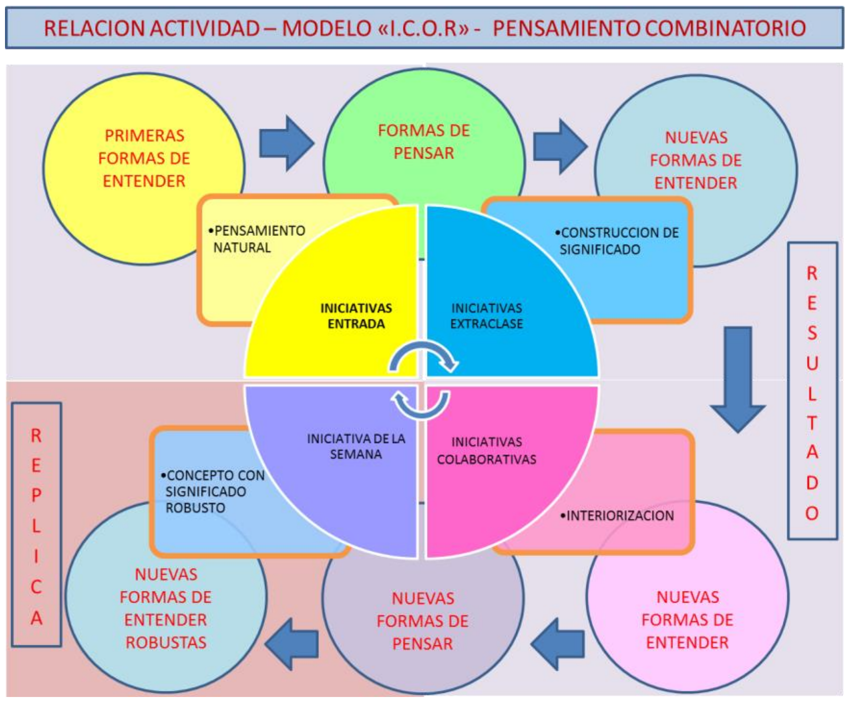


Figura 97. Relación del Modelo «I.C.O.R.», las actividades y la caracterización del pensamiento combinatorio

Interpretando todo esto en términos de la experiencia diseñada e implementada, se puede afirmar que las iniciativas de entrada E aportaron a la caracterización del pensamiento combinatorio la consolidación de la Estructuras de Representación y la Estructura de Relación y Conexión. De este modo el estudiante en esta etapa del proceso hace la identificación de los atributos propios del concepto combinatorio involucrado, basado en el análisis realizado a partir de las condiciones identificadas en la representación. Así logra establecer una relación y conexión conceptual, que o bien le permite identificar un concepto previo pertinente o bien suscita una explicación espontánea, siendo esta acción una forma de entender. Ella, mediante puentes cognitivos propios de la cognición del estudiante, se organiza y orienta en la construcción del nuevo significado al concepto aplicado. Así mismo, esta acción se conectará a un proceder dado por una forma de pensar, la cual está asociada al principio de conteo que concierne dicho concepto. Al mismo tiempo en este espacio-tiempo del proceso, el modelo alcanza el componente cognitivo de la organización.

En segunda instancia, se tienen las iniciativas extraclase X, las cuales contribuyeron a la caracterización del pensamiento combinatorio con el afianzamiento de la Estructura Conceptual. Como se puede ver, la construcción de este nuevo significado puede ser la formación de un nuevo concepto, es decir de una nueva forma de entender. De igual manera en este espacio-tiempo se consolida el componente de la orientación, dentro del modelo.

En tercera instancia se encuentran las iniciativas colaborativas C; éstas permitieron evidenciar la Estructura Combinatoria, espacio-tiempo en el cual se completa la interiorización, componente del modelo, siendo la etapa en la que se consolidó la construcción de significado de los conceptos. De este modo los estudiantes evidenciaron avances en la abstracción y conceptualización, operaciones cognitivas que ejecutan internamente usando las nuevas formas de entender adquiridas, para luego actuar extermanente desde las formas de pensar más estructuradas y formalizadas que en las etapas anteriores. Así se logra la construcción de significados más amplios de los conceptos ya interiorizados, es decir, nuevas formas de entender más robustas.

Por ejemplo, una forma de entender asociada al concepto de la permutación con elementos repetidos e indistinguibles entre los de la misma clase, influenciada por el proceder del principio del producto avanzado o una permutación total, se transforma en una nueva forma de entender combinatoria, formando el concepto de la combinación. Lo que indica este hecho es que, enfrentado a problemas con el concepto de combinación implícito en su solución en las iniciativas E, el estudiante despliega de forma natural sus formas de entender que estuvieron asociadas a los conceptos del producto y la permutación (identificando características como: relación entre los elementos de dos conjuntos –

concepto de producto-; orden y no repetición –concepto de la permutación-), que luego relacionó y conectó a los procederes definidos en los principios del producto y la permutación. Con la formalización del principio de la combinación y su uso en las iniciativas X, el estudiante desarrolló las nuevas formas de entender asociadas al concepto de la combinación (identificando atributos como el sin orden propia de la combinación y la aplicación de la combinación en situaciones “bi”, es decir que una parte de los elementos se toma y la otra no o como un complemento de un conjunto). Ya en las iniciativas C, los estudiantes ejecutaban el análisis internamente, expresándose a partir de las nuevas formas de pensar desarrolladas sobre la formalización del principio de la combinación y su interrelación con los otros principios ya trabajados, logrando desarrollar problemas más complejos que les aportaron la construcción de nuevos significados, expresados en formas de entender más robustas. Un ejemplo de esta situación se puede ver en la solución de la iniciativa X-5, de la actividad A5, presentada en la Figura 53, en el cual la manifestación de la forma de entender más robusta se da en la utilización del razonamiento a la inversa, utilizado por el estudiante para lograr solucionar el problema, cuya solución tenia implicito el concepto de la combinación.

Al mismo tiempo, cumplidas y desarrolladas las tres primeras instancias, por una parte se consolida la primera etapa del modelo, la etapa del Resultado (correspondiente a su vez a la ejecución del módulo 6, módulo de Resultados I en la estructura general del modelo metodológico). Se entienden los Resultados I como la parte del proceso que evidencia la evolución del pensamiento en el estudiante entre las estructuras de representación, de relación-conexión y la estructura conceptual, cuyo espacio tiempo de ejecución se asocia al desarrollo en la experiencia implementada de las iniciativas E y X. (Para algunos casos en esta instancia se evidenció la Estructura Combinatoria.) Por otra parte se da la segunda etapa del modelo, la etapa de la Réplica (correspondiente a su vez a la ejecución del módulo 7, módulo de Resultados II en la estructura general del modelo metodológico). Los Resultados II son la parte del proceso que evidencia la evolución del pensamiento en el estudiante en la estructura combinatoria y en algunos casos hasta la Estructura de Generalización Combinatoria, asociándose a esta parte del proceso, el espacio-tiempo de ejecución y desarrollo de las iniciativas C.

En la cuarta instancia se cuentan con las iniciativas de la semana S, las cuales propiciaron evidencia para ratificar la existencia y formación en el estudiante de la Estructura de Generalización Combinatoria, correspondiendo ésta a la parte final del proceso que permite ejecutar el módulo 8, el módulo de los Resultados III en la estructura general del modelo metodológico. Esta parte se asume como la evaluación del proceso de aprendizaje y del nivel de desarrollo y construcción del pensamiento combinatorio, dejando evidencia de la relación y conexión que se logró entre las nuevas formas de pensar combinatorias y las nuevas formas de entender combinatorias. Esta acción se consolida en el estudiante, produciendo en él la construcción de un significado más robusto de los conceptos básicos de conteo. De esta forma queda como prueba la incorporación e interiorización de las nuevas formas de pensar que exteriorizará por medio de nuevas estrategias cognitivas, mostrando así la apropiación de los objetos matemáticos utilizados como insumo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, que en este caso fueron los de los principios fundamentales de conteo.

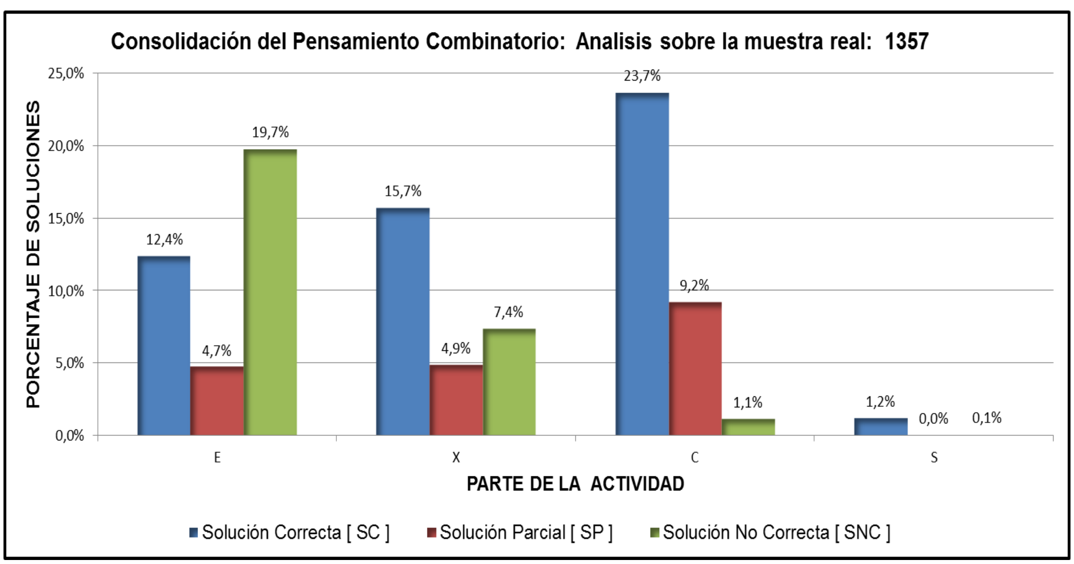


Figura 98. Distribución de la consolidación del pensamiento combinatorio

En la Figura 98, se pudo observar como el alcance de las soluciones a las iniciativas sobrellevó un cambio significativo y progresivo al transcurrir el desarrollo de cada una de las partes de la actividades, siendo éste inverso al no alcance de las mismas. Esta evidencia ratifica la consolidación tanto del modelo metodológico como de las estructuras de caracterización del pensamiento combinatorio.

Por otro lado, este comportamiento fue semejante durante la implementación de la unidad didáctica completa según la muestra real de análisis, como se puede observar en la Figura 99.

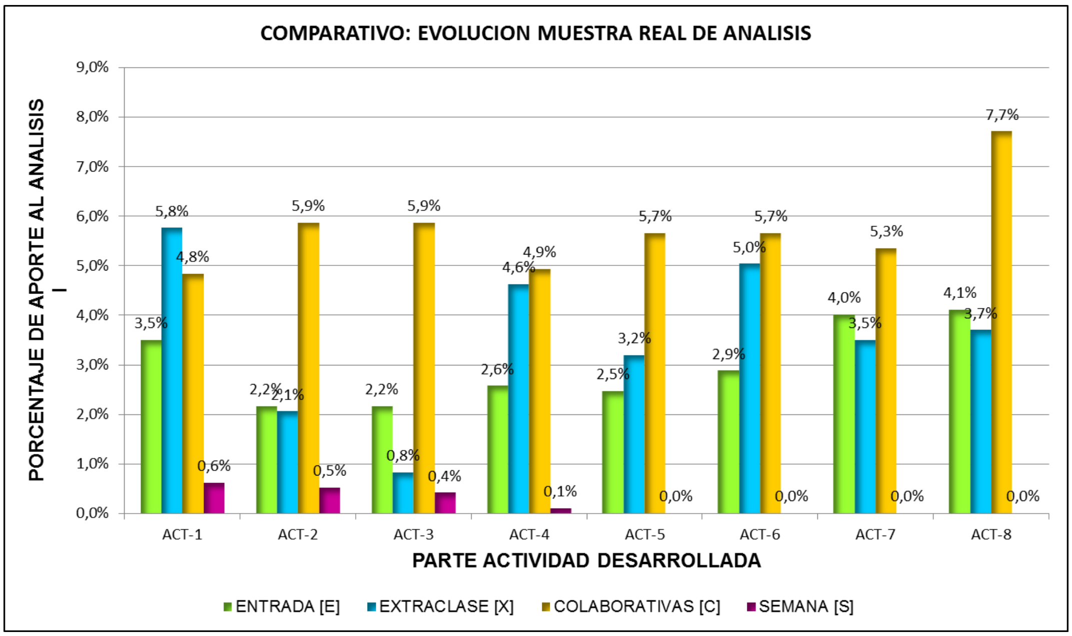


Figura 99. Distribución de la implementación de la unidad didáctica

5.5. Pregunta Cinco

En la Tabla 6 se presenta la quinta pregunta, para la cual no se enunciaron objetivos específicos. Esta se sustentó por una parte en el análisis de la encueta aplicada a los estudiantes (ver Anexo 21) al finalizar el curso, aclarando que esta fue contestada por 20 de los 23 estudiantes. Los resultados de las preguntas con ítems de respuesta en la Likert se presentan en la Tabla 7. Por otra parte, se sustentó con las notas tomadas en el conversatorio realizado en presencia de la directora de esta investigación, del investigador y los estudiantes con el objeto de intercambiar las experiencias vividas durante la implementación de las actividades.

Tabla 6. Pregunta Cinco de investigación

PREGUNTA DE INVESTIGACION
P5 ***¿Cómo ayuda el pensamiento combinatorio a la comprensión y aprendizaje de otras ramas de la matemática?***

Tabla 7. Resultados encuesta de estudiantes

ITEMS	FUERTAMENTE DE ACUERDO	DE ACUERDO	NI DE ACUERDO NI EN DESACUERDO	EN DESACUERDO	FUERTEMENTE EN DESACUERDO
1. La metodología contribuyó significativamente a mi formación en la resolución de problemas.	76,4%	23,5%	0%	0%	0%
2. La metodología del curso me permitió dominar nuevos conceptos de la combinatoria.	76,4%	17,6%	5,8%	0%	0%
3. Me sentí motivado por los problemas	64,7%	35,2%	0%	0%	0%
4. Me sentí retado por los problemas	82,3%	11,7%	0%	5,8%	0%
5. La interacción con mis compañeros me permitió avanzar en la solución de los problemas	76,4%	17,6%	5,8%	0%	0%
6. El pensamiento combinatorio desarrollado en el curso me aportó en la comprensión de otros campos de la matemática y de mi quehacer profesional	58,8%	35,2%	5,8%	0%	0%

De acuerdo a lo manifestado por los estudiantes, se observa que en su mayoría están fuertemente de acuerdo en los aspectos más relevantes de la investigación como la metodología, como el aprendizaje a través de la solución de problemas, como el espacio de trabajo colaborativo y el aporte que el pensamiento combinatorio puede traer a ellos en diferentes aspectos. Además, en el plano personal, se destacan algunas de las opiniones dadas por los mismos estudiantes.

- "Conocer un tema que era desconocido y evaluarme en qué nivel de comprensión estoy en la solución de problemas",

- "Me dejó un nuevo método de análisis de solución de problemas. Ya no tengo el pensamiento arcaico de enumerar todo, por el contrario, puedo desarrollar el problema y crear formas generales",
- "Interpretar diferentes situaciones con compromiso y disciplina",
- "Cambió la manera en las que veía los problemas. Me siento capacitado para implementar este tipo de pensamiento en mi vida laboral, pues en mi empleo las relaciones de materiales se llevan a cabo por conteo, uno a uno. Con los nuevos conocimientos se pueden hacer planteamientos para generar un cambio significativo".

Por otro lado, está el rol de estudiante y su visión de la naturaleza de la matemática, ante lo cual opinaron:

- "Ya no veo la matemática de manera operativa-repetitiva",
- "Encontré mejores herramientas para la solución de problemas matemáticos",
- "Ser más atrevido en la forma de entender la matemática y desarrollar las formas de entender y pensar, para ir avanzando en el campo matemático",
- "Ver las matemáticas de manera diferente, con formas diferentes de pensar y atacar un problema matemático",
- "Buenas metodologías que nos sacaron del área de confort y lo reta, lo enseña y a la vez amplios métodos, iniciativas y principios de pensamiento",
- "Nuevas formas de comprender el planteamiento de problemas y sus posibles soluciones. No sólo en las matemáticas sino en la ciencia que se aplique",
- "Conocimientos nuevos para atender otros cursos".

Lo anterior es una evidencia, más que natural muy sincera, por parte de los estudiantes quienes sintieron gratificación con los resultados y aportes dados por el curso, tanto en metodologías para solucionar problemas como en conocimientos y estrategias para implementar en lo personal, lo laboral y lo académico.

Conclusiones del Capítulo 5

Frente al problema de investigación: "¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado de los conceptos propios del análisis combinatorio?", se puede concluir que los hallazgos de esta investigación proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática dejando ver la existencia de unas estructuras cognitivas presentes en el desarrollo y evolución del pensamiento combinatorio. Dentro de éstas se dan las diferentes operaciones fundamentales de la actividad cognitiva, poniendo de manifiesto las particularidades que caracterizan este tipo de pensamiento. A continuación se presentan las generalidades de cada una de las estructuras reconocidas, ya que las particularidades y descripciones más detalladas se hicieron en los resultados de la Pregunta 4 de investigación presentados en este capítulo.

En la estructura de representación la característica principal del pensamiento combinatorio es el reconocimiento de las configuraciones (análisis de las condiciones dadas sobre los elementos de un conjunto o los conjuntos iniciales), acción que se realiza mediante el uso de las estrategias de representación y la interacción de operaciones mentales como la clasificación y organización.

En la estructura de relación y conexión se da la evocación de las formas de entender combinatorias, asociadas a la aprehensión que se generó sobre la representación y basadas en el análisis (realización de procesos mentales como la observación, comparación, distinción, entre otros) realizado a las condiciones dadas sobre los elementos. De esta forma se permite la identificación de la existencia, o no existencia, de los atributos combinatorios propios de las condiciones como: orden, repetición, distinción y posición de los elementos, las cuales están directamente inmersas en los conceptos combinatorios, acción que permite la construcción de nuevos significados del concepto o conceptos involucrados.

En la estructura conceptual se producen las formas de pensar combinatorias, como consecuencia de la síntesis realizada al proceso de la estructura anterior, síntesis en la que se activan procesos mentales como la integración y la orientación del conocimiento, que se materializa bajo un proceder asociado a alguno principio del análisis combinatorio. Esta es la característica del pensamiento combinatorio en esta etapa, el paso de una forma de entender combinatoria a una forma de pensar combinatoria.

En la estructura combinatoria, el pensamiento combinatorio se caracteriza en su etapa de formal, basada en la abstracción y la conceptualización. Es decir, se considera que el estudiante que alcanza esta estructura, ha construido e interiorizado un concepto combinatorio, acción que le permite realizar las dos primeras estructuras internamente (forma mental y abstracta), para ser exteriorizadas directamente en formas de pensar estructuradas y formalizadas. Además, como otra característica de esta estructura, está el razonamiento a la inversa que puede realizar el estudiante.

En la estructura de generalización combinatoria el pensamiento combinatorio se caracteriza por alcanzar resultados generales a partir de resultados particulares y producir nuevos modelos combinatorios sobre la base de los modelos ya conocidos, siendo las características principales la transformación y la generalización.

De igual manera se deja claridad que este grupo de características se evidenciaron y convalidaron durante el proceso dado en la solución de problemas del análisis combinatorio, por lo cual se consideran que constituyen un tipo de pensamiento, ya que pone de manifiesto la existencia y el uso de operaciones cognitivas generales del pensamiento, que se lograron caracterizar desde el caso particular de la combinatoria, consolidándose este tipo de pensamiento, que se ha denominado pensamiento combinatorio y alcanzándose así una solución satisfactoria al problema de investigación.

CONCLUSIONES

Se pretende poner en perspectiva la anterior discusión de los resultados. En cuanto al objetivo general, se aclara que la investigación no tenía el objetivo de hacer una caracterización exhaustiva, sino hacer avances significativos en la caracterización del pensamiento combinatorio, sobre la base de la solución de problemas significativos, de matemáticas y de contexto, con la correspondiente construcción de significado de conceptos del análisis combinatorio. Se estima que este resultado se alcanzó satisfactoriamente, como se puede evidenciar en la contestación a las preguntas dos, tres y cuatro dada en el Capítulo 5.

Frente al problema de investigación: "¿Cuáles son las características del pensamiento combinatorio implícitas en la solución de problemas matemáticos o de contexto y en su modelación para construir significado de los conceptos propios del análisis combinatorio?", se puede concluir que los resultados proporcionaron suficiente evidencia que se consolidó de manera sistemática. Es decir, deja ver que en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento matemático durante la solución de problemas del análisis combinatorio, existen unas estructuras que se implementan con el apoyo de operaciones fundamentales de la actividad cognitiva. Estas estructuras reconocidas corresponden a la representación, a la de relación y conexión, a la conceptual, a la combinatoria y a la de generalización combinatoria.

Con este esquema de estructuras se caracterizó el tipo de pensamiento matemático implícito en ellas, sobre la base de describir la formación de las formas de entender y las formas de pensar combinatorias y la interrelación entre ellas, la cual origina las nuevas formas de entender combinatorias.

Este grupo de características se convalidó y fundamento a partir del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en la solución de problemas del análisis combinatorio. De esta forma se logró consolidar en los estudiantes un tipo de pensamiento matemático, que se le ha denominado pensamiento combinatorio. Este proceso que se desarrolló a través de la unidad didáctica diseñada para tal fin; hecho que permitió hacer un aporte satisfactorio a la solución del problema de investigación. La descripción detallada de cada una de las estructuras identificadas se hizo en los resultados de la Pregunta 4 de investigación presentados en el Capítulo 5.

Al evaluar los resultados de la investigación con respecto a los objetivos de la educación matemática «EM», se dio con el cumplimiento de dos de ellos. Uno relativo a la caracterización del pensamiento matemático, propósito que se ratificó con la contribución realizada a la caracterización y consolidación del pensamiento combinatorio, como un tipo de pensamiento propio de las matemáticas. Por otro lado, está el modelo metodológico «I.C.O.R.», construido como herramienta de metodología de investigación, pero que a su vez puede servir como modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de otras ramas de las matemáticas.

En cuanto a lo teórico, está la fusión que se logró con los fundamentos del pensamiento de Harel y el análisis de Gowers, que permitió estructurar el marco teórico sobre el cual se construyó el modelo metodológico «I.C.O.R.», modelo que se presenta como un esquema aplicable al estudio de los diferentes fenómenos y problemáticas subyacentes en la «EM»; permitiendo su comprensión y análisis. En este sentido, el modelo es un espacio conceptual y metodológico que facilitará y organizará la comprensión de la realidad compleja inmersa en la «EM», ya que permite seleccionar el conjunto de elementos objeto de estudio, y descubre y caracteriza la relación entre ellos; además, profundiza en las implicaciones que emergen con la práctica. De este modo, aporta y deriva nuevos elementos para investigar, nuevos conocimientos, nuevas metodologías y nuevas experiencias. Éstas deben enriquecer la calidad de la dinámica del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, se tiene la innovación dada con la ampliación del DNR al DDNR, denominado así dentro del modelo metodológico el “DOBLE DNR” (DDNR), siendo ésta la base desarrollada en la segunda etapa del modelo, la etapa de la Réplica. Además, se resalta que en el modelo DNR se enuncia la existencia de las formas de entender y las formas de pensar, sin describir en detalle las características que tienen cada una de ellas dentro del pensamiento matemático ni precisar las formas en que interactúan. Esta particularidad se desarrolló en la caracterización del pensamiento combinatorio llevada a cabo en esta investigación.

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria la estrategia de trabajo del modelo metodológico «I.C.O.R.» se considera muy significativa; ya que, tanto para el autor como para los estudiantes, la enseñanza a través de la solución de problemas, fue una experiencia novedosa.

En cuanto a su aporte práctico, esta investigación dejó como resultado la construcción y consolidación de la unidad didáctica basada en el modelo, que podrá ser implementada dentro del syllabus de los cursos que desarrollen la unidad temática de los principios fundamentales de conteo. Ésta incluye el diseño metodológico de clases y la elaboración de las actividades implementadas sobre la base teórica de los principios fundamentales de conteo, de la suma, del producto; de la permutación, variación, combinación, el trasfondo del conteo contenido en el teorema de binomio y el principio de inclusión - exclusión.

Finalmente, es claro que la investigación arrojó unos resultados que podrán exponerse en ponencias y publicaciones científicas.

RECOMENDACIONES

A continuación se dejan algunas recomendaciones para futuras investigaciones en educación matemática, y en general para toda la comunidad de educadores matemáticos.

En cuanto al objetivo de la caracterización del pensamiento combinatorio, por un lado, es necesario continuar con ello ya que la presente investigación pretendió lograr unos primeros avances. Esto puede hacerse en especial frente a otros tópicos de la combinatoria, con el objetivo de ratificar, precisar y complementar la caracterización lograda y enriquecer la descripción alcanzada en las diferentes estructuras propuestas, y, por otro lado, de consolidar de manera general la caracterización del pensamiento combinatorio. Esta consolidación permitirá darle la importancia y status al pensamiento combinatorio dentro de los currículos, igual que el status que tienen otros tipos de pensamiento matemático como el algebraico o el geométrico.

En cuanto a los objetivos de la educación matemática, se debe implementar el modelo metodológico «I.C.O.R.» en nuevas investigaciones que impliquen la caracterización de otros tipos de pensamiento matemático. En otras palabras, se debe repetir esta experiencia con otras unidades temáticas, con el fin de refinar el modelo y ponerlo a prueba, de tal forma que se pueda consolidar como un enfoque teórico de carácter universal.

En cuanto a los aportes prácticos se sugiere al Departamento de Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño incluir total o parcialmente la unidad didáctica construida para esta investigación, como parte del material didáctico utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la unidad temática desarrollada –combinatoria básica, en particular los principios fundamentales de conteo-, implementación que se puede hacer en los diferentes cursos que en sus syllabus incluyen esta temática.

En cuanto al curso de Solución de Problemas utilizado como contexto para esta investigación se propone que se elabore en su totalidad con una metodología similar a la implementada en este trabajo, teniendo como objetivos desarrollar el pensamiento aritmético, el pensamiento métrico, el pensamiento geométrico, el pensamiento algebraico y el pensamiento combinatorio. Esta situación deja dos sugerencias. Una primera sugerencia es la ampliación de la intensidad horaria del curso. Esto porque la experiencia vivida durante el curso exigió la utilización de dieciséis clases, por un lado, y, por otro lado, porque se requiere de suficiente tiempo que permita hacer el debate y discusión sobre las formas de entender y de pensar de los estudiantes, las cuales son la base para la consolidación y desarrollo de cada uno de los tipos de pensamiento. La segunda sugerencia es la capacitación al grupo de docentes que dirigen estos cursos con el objetivo que se involucren y actualicen en la transformación de la enseñanza a través de la solución de problemas, y que efectivamente el curso en toda la población procure los mismos resultados.

En cuanto a la población y muestra se recomienda replicar esta experiencia en otros contextos que involucren estudiantes de educación básica primaria, media y media superior (con la salvedad que para la educación básica primaria y media se deben proponer y construir nuevos problemas acordes con el nivel de desarrollo biológico y cognitivo de los estudiantes involucrados), tanto de la educación pública como privada. Por un lado, con el objetivo de ratificar los hallazgos obtenidos en esta investigación, y por otro lado para complementar y robustecer los resultados de tal forma que se pueda seguir consolidando la caracterización del pensamiento combinatorio, y así reunir más evidencias para hacer sugerencias de fondo que ayuden a la transformación del currículo actual de la educación matemática en Colombia.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1) Alvarez-Gayou, (2003). Como hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología. Ediciones Paidos. México.

2) Anderson, Ian. (1993) *Introducción a la combinatoria*. Barcelona: Edit. Vicens Vives.

3) Beeler, Robert A. (2015). How to Count. An Introduction to Combinatorics and Its Applications. Springer.

4) Berge, C. (1971) Principles of Combinatorics, Academic Press. https://books.google.com.co/books?id=E0mJFt0RQIgC&pg=PA178&lpg=PA178&dq=Principles+of+combinatorics,+1968+berge&source=bl&ots=awFUlOv611&sig=03MkKoh-VwaHxhDua7kHx_qIEJc&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiF0fjY6KbQAhXLxFQKHRyZCxYQ6AEIQDAE#v=onepage&q=Principles%20of%20combinatorics%2C%201968%20berge&f=false

5) Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1997a*). Combinatorial reasoning and its assessment*. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), The Assessment Challenge in Statistics Education (pp. 239-252): IOS Press. Disponible en URL: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbk/chapter18.pdf [Consulta 20 de Abril de 2015]

6) Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997b). *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*. Educational Studies in Mathematics, 32, 181-199.

7) Cameron, P. J. (1994). *Combinatorics: Topics, techniques, algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press.

8) Dubois, J. G. (1984). *Une systématique des configurations combinatoires simples*. Educational Studies in Mathematics, 15 (1), 37-57.

9) Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordretcht, The Netherlands: Reidel

10) Fischbein, E. y Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. Educational Studies in Mathematics, 34: 27-47.

11) Fomin D., Genkin S., Itenberg I. (2012). *Círculos matemáticos*. Real Sociedad Matemática Española (versión en español).

12) Font, V. (2002). *Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas*. Revista EMA, 7(2), pp. 127-170. Disponible en URL: http://funes.uniandes.edu.co/1151/1/85_Font2002Una_RevEMA.pdf [Consulta 24 de Marzo de 2014]

13) Font, V (2003). *Matemáticas y cosas. Una mirada desde la educación matemática*. Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2. Disponible en URL: http://www.emis.ams.org/journals/BAMV/conten/vol10/bamv2003-2.pdf#page=134 [Consulta 2 de Marzo de 2014]

14) Glaser, B. y Strauss, A. (1967). The discovery of the grounded theory: Strategies for qualitative research. New York: Aladine de Guyter. P

15) Godino, J.D. (1991). *Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática*. En: A. Gutiérrez (Ed.), Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática (pp. 105- 148) Madrid: Síntesis. Disponible en URL: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/fundamentos_tem.pdf [Consulta 12 de Marzo de 2014]

16) Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1992). *Analysis of student's errors and difficulties in solving combinatorial problems.* Proceedings of the XVI P.M.E., (v.1, pp.241-248). University of New Hampshire. Durham.

17) Gowers, W. (2000).*Two Cultures of Mathematics*. Disponible en URL: https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf. [Consulta 24 de septiembre de 2014]

18) Grimaldi, Ralph. (1994). *Matemáticas Discreta y combinatoria.* Tercera edición. Editorial Adisson-Wesley

19) Guzmán, M. de, (1985) *Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática, Aspectos Didácticos de matemáticas 1*. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, 31-46

20) Guzmán, M. de (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Iberoamericana de Educación. No. 043, Enero-Abril, 19-58. Madrid, España.

21) Hadar, N. y Hadass, R. (1981). *The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls.* Educational Studies in Mathematics, 12: 435-443.

22) Halani A. (2013). Students’ Ways of Thinking about Combinatorics Solution Sets. A Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy ARIZONA STATE UNIVERSITY. Disponible en URL: https://repository.asu.edu/attachments/110671/content/Halani_asu_0010E_13085.pdf [Consulta 10 de noviembre de 2016]

23) Harel, G., & Sowder, L. (1998). *Students' proof schemes*. Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. III. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), AMS, 234-283. Disponible en URL : http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/Students'%20Proof%20Schemes.pdf [Consulta 16 de abril de 2015]

24) Harel, G., & Sowder, L. (2005). *Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development*, Mathematical Thinking and Learning, 7, 27-50. Disponible en URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/ [Consulta 12 de marzo de 2015]

25) Harel, G., & Sowder, L (2007). *Toward a comprehensive perspective on proof*, In F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, National Council of Teachers of Mathematics. Disponible en URL : http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/TowardComprehensivePerspective.pdf [Consulta 16 de abril de 2015]

26) Harel, G. (2008a). DNR *Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I, ZDM*—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500. Disponible en URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRI.pdf [Consulta 12 de marzo de 2015]

27) Harel, G. (2008b). DNR *Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II, ZDM*—The International Journal on Mathematics Education, 893-907. Disponible en URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRII.pdf [Consulta 30 de marzo de 2015]

28) Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014) *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición .México: McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V

29) Inhelder y Piaget, J. (1955) *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidos.

30) Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 3, 111-127.

31) Kavousian, S. (2005) The Development of Combinatorial Thinking in Undergraduate Students. Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hosted by Virginia Tech University Hotel Roanoke & Conference Center, Roanoke. Disponible en: URL http://citation.allacademic.com/meta/p_mla_apa_research_citation/0/2/4/6/8/p24689_index.html?phpsessid=nvg7rcbu5gla2kgoogjp2l05i2 [Consulta 28 de agosto de 2014]

32) Lakatos, Imre. (1978a) *La metodología de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza Editorial.

33) Lakatos, Imre. (1978b) *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Editorial.

34) Lakatos, Imre. (1978c) *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Editorial.

35) Lesh, R. & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.). *Perpsectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 361-384). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

36) Lesh, R., & Sriraman, B. (2005). John Dewey revisited - pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning. In A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman (Eds.), Proceedings of the 1st International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences (pp. 32–51). May 18–21, 2005, University of Schwaebisch Gmuend. Germany: Franzbecker Verlag.

37) Lockwood, E. (2013). *A model of students' combinatorial thinking: The Role of set out comes*, The Journal of Mathematical Behavior, 32, 251-265. Disponible en URL: file:///C:/Users/pc/Downloads/Lockwood2013JMBModel.pdf [Consulta 26 de agosto de 2014]

38) Lourenço, O. (2012). Piaget and Vygotsky: Many resemblances, and a crucial difference New Ideas in Psychology 30 281–295

39) Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos curriculares*, *7 de junio* de 1998. Bogotá, Colombia: Autor: Disponible en URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf [Consulta 27 de septiembre de 2014]

40) Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

41) Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Eds.). (2011). *Combinatorics and Reasoning: Representing, Justifying, and Building Isomorphisms.* New York: Springer

42) Mertens, D. M. (2010) Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage.

43) Moreno, L. (2002). *Evolución y Tecnología*. En: Memorias Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Bogotá: MEN, Enlace Editores Ltda. Pp. 67 – 80.

44) *Piaget's Theory*. (1970) Carmichael's Manual of Child Psychology. John Wiley and Sons, Inc. New York: En Mussen, P. H. (Traducción de Serigos, M).Disponible en URL: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/6/6PE_Piaget_Unidad_2.pdf [Consulta 30 de Abril de 2015]

45) Piaget, Jean. (1977) *Entrevista a Piaget*. En Jean Piaget: 80 años (Numero espacial de la Universidad de Camillas), pág. 34.

46) Piaget, J. (1978). Success and understanding. Cambridge, Mass. Harvard University Press.

47) Piaget Jean. (1950) *Introducción a la Epistemología Genética*. Buenos Aires: Paidós

48) Polya, G. (1965) *Como Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas

49) Polya, G. (1966) *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos

50) Rafael, A. (2008). *Desarrollo Cognitivo: Las Teorías de Piaget y Vygotsky*. Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en URL:

http://www.paidopsiquiatria.cat/files/teorias_desarrollo_cognitivo_0.pdf [Consulta 26 de Junio de 2013]

51) Restrepo M., Pascual. *Un Recorrido por la Combinatoria I*. Bogotá: Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño 2010

52) Rezaie M, Gooya Z. (2011). *What do I mean by combinatorial thinking?* Procedia Social and Behavioral Sciences 11 (2011) 122–126. Disponible en URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042811000486 [Consulta 2 de octubre de 2014]

53) Rosen, Kenneth. (2004). *Matemáticas Discreta y sus aplicaciones.* Quinta edición. McGrawHill.

54) Schoenfeld A. (2000) *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education*. Notices of the AMS, Volume 47, Number 6; June/July

55) Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.

56) Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. Disponible en URL: http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html [Consulta 20 de marzo de 2015]

57) Stringer, E. (1999). Action Research. Thousand Oaks, California, SAGE Publications.

58) Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), Plenary paper presented at the annual meeting of the international group of the psychology of mathematics education, (Vol 1, pp. 45-64). Morelia, Mexico: PME.

59) Tucker, Alan. (1980) *Applied Combinatorics*. EEUU: John Wiley

60) Vygotsky L. Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1978. 159 p.

61) Vygotsky L. Problems of general psychology // The collected works of L.S. Vygotsky. Vol. 1. New York: Plenum. 1987.

62) Vilenkin N. *¿De cuantas formas? Combinatoria, Primera y Segunda parte*. Editorial Mir. Moscú 1972

63) White AL. A revaluation of Newman's error analysis. MAV Annual Conference, 2009. p. 249–57

64) Wilhelmi, Miguel. (2004). *Combinatoria y Probabilidad.* Publicación departamento de matemáticas Universidad de Granada

65) Williams, P. eat, *Fundamentos de diseño técnico pedagógico en el aprendizaje.* Disponible en URL: http://aulavirtualkamn.wikispaces.com/file/view/2.+MODELOS+DE+DISE%C3%91O+INSTRUCCIONAL.pdf [Consulta 2 de octubre de 2015]

ANEXOS

Anexo 1. Syllabus: Asignatura Solución de Problemas

VICERECTORIA ACADEMICA
FACULTAD DE CIENCIAS
CONTENIDO PROGRAMÁTICO

Datos de Identificación	
Programa: INGENIERIAS, LICENCIATURAS, CIENCIAS DE LA SALUD, CIENCIAS ECONOMICAS.	**Asignatura:** SOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS
Código: 17432005	**Plan de estudios:**
Número de Créditos dentro del Plan de Estudios: 3 CREDITOS, 4 H/S CLASE	**Fecha de actualización:** ENERO 2015

Justificación de la asignatura

La Solución de problemas Matemáticos es una propuesta metodológica que pretende nivelar los conceptos matemáticos básicos de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería, Licenciaturas, Ciencias Administrativas, Económicas y Sociales en la Universidad Antonio Nariño.

En los últimos años, el nivel académico de ingreso de los estudiantes a las carreras de ingeniería en el campo de las matemáticas es deficiente, ellos han cursado sus once años de educación, que comprende Primaria, Básica y Media, la mayoría tienen también formación Pre-escolar.

Los conceptos básicos de matemáticas han sido tratados en forma un poco superficial o a veces no los han visto, como es el caso de la Geometría. Partiendo del hecho que estos conceptos no son del todo desconocidos por los estudiantes, se propone un repaso y afianzamiento de los mismos utilizando la metodología basada en la Solución de Problemas, en este caso, de Matemáticas.

Es de suma importancia cursar esta materia, pues ambienta, motiva y muestra la necesidad del trabajo en grupo para afrontar los diferentes retos que se le presentan en cada una de sus clases, les da autoestima y verifican que el aprendizaje de las matemáticas no se relega a realizar ejercicios largos y tediosos sino que por el contrario llega a ser divertido, ameno y significativo.

Objetivo general

Se pretende que al finalizar el curso, el estudiante comprenda lo que significa el “Pensamiento Matemático” que lo aplique en sus materias posteriores y además, clarifique, amplíe y complete los conceptos algunas veces erróneos o parcialmente ciertos que ha adquirido en su proceso de formación Primaria, Básica y Media.

Objetivos específicos

- Hacer uso de los algoritmos de Suma, Resta, Multiplicación y División y emplearlos correctamente en la formulación de la solución de los problemas propuestos.
- Descomponer correctamente los números enteros en sus factores primos y utilizar esta descomposición para resolver problemas.
- Reconocer los números racionales y los manipularlos correctamente.
- Leer comprensivamente los problemas propuestos y lograr formular caminos de solución.
- Emplear diferentes técnicas de solución de sistemas de ecuaciones, tanto lineales como no lineales, identificar el número de soluciones y aplicar estos conceptos para solucionar problemas.
- Hacer uso de los vectores, sus operaciones y sus propiedades, para solucionar problemas relacionados con vectores o formas vectoriales.
- Aplicar correctamente las técnicas de conteo.
- Dominar los conceptos de Permutación, Variación y Combinatoria, emplearlos en la solución de problemas.
- Construir e Interpretar correctamente las gráficas básicas para una distribución dada de datos.
- Conocer y aplicar correctamente los casos de congruencia y semejanza de triángulos.
- Aplicar correctamente los conceptos de perímetro y área, en las diferentes figuras geométricas tanto regulares como irregulares.
- Aplicar correctamente las relaciones que existen entre los lados del triángulo rectángulo, aplicar correctamente el teorema de Pitágoras.
- Conocer las construcciones básicas con regla y compás.

Contenidos

TEMAS	Semana
Ambientación (Estudiantes primer semestre entran semana 2)	1
Aritmética Operaciones Básicas Criterios de Divisibilidad Descomposición en números primos. Operaciones con Racionales.	2 - 3

Combinatoria Técnicas de conteo.	4
PRIMER PARCIAL	5
Álgebra Sistemas de ecuaciones. Técnicas de Factorización Ecuación Cuadrática.	6 – 8
SEGUNDO PARCIAL:	9
Geometría Áreas y ángulos. Congruencias y semejanza de triángulos. Trigonometría Representación en el plano	10-12
TERCER PARCIAL	13
Funciones	14
Aplicaciones: **Ingenierías:** Vectores y Matrices **Ciencias Económicas, Sociales, Derecho:** Aplicaciones Financieras **Ciencias de la Salud y Básicas:** Introducción Estadística Descriptiva	15-17
EXAMEN FINAL	18

Anexo 2. Syllabus: Asignatura Probabilidad y Estadística

VICERECTORIA ACADEMICA
FACULTAD DE CIENCIAS
CONTENIDO PROGRAMÁTICO

Datos de Identificación

Programa: INGENIERIAS y LICENCIATURA EN MATEMATICAS	**Asignatura:** PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
Código: 17434101	**Plan de estudios:**
Número de Créditos dentro del Plan de Estudios: 4 CREDITOS, 6 H/S CLASE	**Fecha de actualización:** ENERO 2015

Justificación de la asignatura

La Estadística como ciencia, comprende una serie de herramientas destinadas a automatizar y estandarizar la generación de estadísticas y reportes de acuerdo a los parámetros de la estadística descriptiva, la inferencial y el muestreo, mediante la implementación del método científico.

En esta asignatura se abordaran las técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales, iniciando con la descripción del método científico, pilar en el estudio de la estadística y de investigación, identificando las respectivas etapas y particularidades de un estudio descriptivo (método deductivo) y uno inferencial (método experimental). Se realiza un breve repaso de variables y medida o escalas de medición, las cuales permiten identificar el tipo de estudio o investigación a adelantar, al igual que los indicadores a usar para la toma de decisiones. En la primera parte del curso se impartirán las herramientas e indicadores descriptivos. En la segunda parte, se enfatizará sobre los fundamentos de la teoría de la probabilidad y de variables aleatorias, base para modelos discretos y continuos, para luego incursionar en lo elemental de las técnicas estadísticas inferenciales, propiamente de estimación puntual y por intervalo, siendo esta última una de las herramientas de mayor uso en la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre.

Si bien es cierto, que un estudio a nivel exploratorio, descriptivo, correccional o experimental, reviste de la misma relevancia, no debe dejarse de lado la importancia merecida de la estadística en toda su integralidad, por tanto, en un segundo curso "estadística aplicada y muestreo", se afianzara y complementara lo visto, con las herramientas de pruebas de hipótesis y el diseño de planes de muestreo, en donde el estudiante, estará en condiciones de establecer las bondades de usar uno u otro plan de muestro y de seleccionar las técnicas estadísticas adecuadas para la toma de decisiones, según el objetivo del estudio o investigación.

Para el futuro ingeniero de la Universidad Antonio Nariño, es de relevancia esta asignatura, puesto que lo capacita en las herramientas necesarias para comprender e interiorizar la fundamentación de los procedimientos estadísticos descriptivos e inferenciales, y en la trascendental toma de decisiones de manera responsable, metódica y crítica, cada vez que podrá llevarlos a la practica en su desempeño profesional

Desde este espacio académico se busca promover el desarrollo de habilidades cognitivas que permitan al futuro profesional conocer, comprender, apropiar y evaluar los conocimientos que adquieren sometiéndolos a la crítica, al juicio con fundamento con el fin de analizar su entorno inmediato identificando situaciones que se puedan transformar en beneficio del mejoramiento de la calidad de vida de la sociedad. Mediante el uso de herramientas estadísticas en los procesos de investigación se espera que el estudiante identifique soluciones económicamente viables, ecológicamente favorables, política y socialmente impactantes, a los problemas de las comunidades de interés.

Objetivo general

Objetivos específicos

Del saber:

- Adquirir conocimientos que le permiten, a futuro, tomar decisiones que tienen impacto en su entorno social y ambiental con consideraciones éticas, a partir del diagnóstico sustentado en criterios estadísticos y profesionales, para garantizar eficiencia y eficacia.
- Seleccionar en forma adecuada los recursos y procedimientos estadísticos, que le permiten la ejecución exitosa de actividades en espacios de aprendizaje compartido, acogiéndose a referentes y normas nacionales e internacionales de calidad.
- Utilizar convenientemente los programas estadísticos disponibles, para abocar óptimamente asuntos que exigen soluciones.

De habilidades:

- Utilizar el lenguaje simbólico estadístico para traducir una situación de su contexto profesional con el fin de emplear las herramientas estadísticas adecuadas y luego estar en capacidad de interpretarlas.
- Analizar y discutir la diferencia entre el escenario real de una situación y el modelo teórico que lo representa, utilizando el análisis de información de forma que le permita identificar tendencias para disponerla en la toma decisiones, interpretar y comunicar sus resultados según su necesidad.

Del saber:

- Adquirir conocimientos que le permiten, a futuro, tomar decisiones que tienen impacto en su entorno social y ambiental con consideraciones éticas, a partir del diagnóstico sustentado en criterios estadísticos y profesionales, para garantizar eficiencia y eficacia.
- Seleccionar en forma adecuada los recursos y procedimientos estadísticos, que le permiten la ejecución exitosa de actividades en espacios de aprendizaje compartido, acogiéndose a referentes y normas nacionales e internacionales de calidad.
- Utilizar convenientemente los programas estadísticos disponibles, para abocar óptimamente asuntos que exigen soluciones.

De habilidades:

- Utilizar el lenguaje simbólico estadístico para traducir una situación de su contexto profesional con el fin de emplear las herramientas estadísticas adecuadas y luego estar en capacidad de interpretarlas.
- Analizar y discutir la diferencia entre el escenario real de una situación y el modelo teórico que lo representa, utilizando el análisis de información de forma que le permita identificar tendencias para disponerla en la toma decisiones, interpretar y comunicar sus resultados según su necesidad.
- Analizar críticamente situaciones problémicas, a partir de modelos teóricos, que le permiten establecer en la simulación de escenarios probables ó la experimentación, el pronóstico de los posibles impactos reales.

De actitudes:

- Aportar ideas verbalmente o por escrito con creatividad discursiva, para plantear, afrontar, o resolver problemas, armonizando con otros miembros de su espacio académico, en búsqueda de consensos frente a situaciones específicas.
- Evaluar las implicaciones de su actividad y las de sus similares, sobre el entorno natural, con suficiente autonomía y responsabilidad como para contribuir a acciones que propendan por un impacto favorable en pro de un desarrollo sostenible, mediante el análisis estadístico de información.

Contenidos

TEMAS	**Semana**
Ambientación (Estudiantes primer semestre entran semana 2)	1
1. **Estadística descriptiva** 1.1 ¿Por qué de la estadística en procesos de investigación y estudios para toma de decisiones? 1.2 Introducción a la recolección de información (definiciones y conceptos básicos) 1.3 Representación gráfica de datos (intencionalidad e interpretación de gráficos) 1.4 Resumen numérico de datos (medidas de localización, medidas de variabilidad, medidas de relación) 1.5 Análisis exploratorio de datos (diagrama de caja - detección de datos atípicos) 1.6 Ajuste datos a una distribución de probabilidad (verificación gráfica y descriptiva de cumplimiento de supuestos)	2 - 3
PRIMER PARCIAL	4
2. Introducción a la probabilidad 2.1 Definición de probabilidad: Clásica, empírica y subjetiva. 2.2 Definición de eventos 2.3 Cálculo de probabilidades 2.4 Reglas de cálculo de probabilidades 2.5 Probabilidad Condicional 2.6 Teorema de Beyes	5 - 8
SEGUNDO PARCIAL:	9
3. Distribuciones de probabilidad 3.1 Definiciones y conceptos básicos 3.2 Distribuciones de probabilidad discretas 3.2.1 Caracterización gráfica de una distribución de probabilidad (Tabla, Gráfica puntual, gráfica acumulada) 3.2.2 Caracterización numérica de una distribución de probabilidad (Esperanza matemática, mediana, percentiles, varianza, desviación estándar, teorema de Chebyshev, coeficiente de variación) 3.2.3 Distribuciones discretas de probabilidad clásicas (Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica, Poisson)	10-12
TERCER PARCIAL	13

Anexo 3. Syllabus: Asignatura Matemáticas Discreta

VICERECTORIA ACADEMICA **FACULTAD DE CIENCIAS** **CONTENIDO PROGRAMÁTICO**	
Datos de Identificación	
Programa: INGENIERIA DE SISTEMAS y LICENCIATURA EN MATEMATICAS	**Asignatura:** MATEMATICAS DISCRETA
Código: 17433051	**Plan de estudios:**
Número de Créditos dentro del Plan de Estudios: 4 CREDITOS, 6 H/S CLASE	**Fecha de actualización:** ABRIL 2015

Justificación de la asignatura

La matemática discreta estudia lo que se conoce como matemática finita que es el estudio de los objetos discretos, es decir, aquella en la que el concepto de aproximación y límite no son utilizados. Esta matemática ha sido de gran impacto moderno por los diversos problemas reales los cuales son solucionados por este medio. El álgebra, la teoría de conjuntos, la combinatoria, la teoría de grafos, la teoría de juegos son unos cuantos ejemplos de este tipo de matemáticas que han sido aplicadas en problemas desde los puentes de Konigsberg hasta el modelamiento de la tabla para el "pico y placa" en las diferentes ciudades de Colombia. No es de extrañarse que a futuro sea una de las ramas más influyentes en las ciencias modernas.

En esta asignatura se desarrollará una parte sobre la teoría de grafos y la otra sobre la teoría de juegos, dos áreas de gran importancia moderna, pues uno de los futuros trabajos del docente en matemáticas (desde un punto de vista de la teoría de juegos) y del ingeniero de sistemas será diseñar y modelar estrategias de toma de decisiones o maximización de beneficio según sea el caso. Para ello veremos también que la teoría de grafos se aplica en la resolución de problemas de teoría de juegos y daremos las bases teóricas necesarias para la comprensión de los resultados tanto de la una como de la otra.

Para el futuro Ingeniero de Sistemas y Licenciado de Matemáticas de la Universidad Antonio Nariño es muy importante esta asignatura por la diversidad de los objetos tratados en ella, en cuanto a que la formación en grafos y teoría de juegos ayudará al estudiante a interesarse en hacer investigación en otra área del conocimiento como lo son la Informática, Economía o la propia Matemática. Por último, el familiarizarse con la metodología empleada para atacar los problemas que surgen en este tópico será de utilidad para que el estudiante fomente su capacidad inductiva y de solucionador de problemas de la vida cotidiana o de su trabajo docente.

Objetivo general

Dar al estudiante las herramientas teóricas de las matemáticas finitas, las cuales determinaran su grado de comprensión y abstracción hacia problemas específicos que surjan en sus carreras.

Objetivos específicos

De conocimiento (Lo que sabe)

- Realiza operaciones básicas con conjuntos.
- Maneja los diferentes conectivos lógicos y métodos de demostración.
- Identifica la estructura de un álgebra booleana y la utiliza en la simplificación de expresiones y circuitos.
- Conoce la teoría de grafos y árboles y la utiliza en la resolución de problemas.
- Conoce los elementos que intervienen en la formalización de un juego y las distintas formas de manejar.
- Conoce las nociones básicas de solución o equilibrio de cada tipo de juego y los procedimientos para obtenerlos.
- Se familiariza con los modelos prototipos de la teoría de juegos y sus aplicaciones.
- Utiliza teoría de grafos en la resolución de problemas de teoría de juegos.

De habilidad (Lo que sabe hacer)

- Reconocer a la matemática como una ciencia formal y exacta.
- Manejar apropiadamente los recursos tecnológicos tales como la calculadora y paquetes matemáticos en la solución de problemas concretos.
- Desarrollar habilidades y destrezas en situaciones problemáticas que involucren elementos de la matemática discreta.
- Realizar una adecuada búsqueda de información, valorando aquella que resulte relevante y significativa para abordar diferentes problemas y situaciones relacionadas.
- Expresar de manera clara y comprensible los argumentos utilizados en el planteamiento, desarrollo y solución de problemas específicos.
- Presentar propuestas novedosas y alternativas de solución a problemas relacionados con los elementos de matemáticas discretas.
- Emplear un adecuado lenguaje simbólico para expresar sus ideas y propuestas.

De conocimiento (Lo que sabe)

- Realiza operaciones básicas con conjuntos.
- Maneja los diferentes conectivos lógicos y métodos de demostración.
- Identifica la estructura de un álgebra booleana y la utiliza en la simplificación de expresiones y circuitos.
- Conoce la teoría de grafos y árboles y la utiliza en la resolución de problemas.
- Conoce los elementos que intervienen en la formalización de un juego y las distintas formas de manejar.
- Conoce las nociones básicas de solución o equilibrio de cada tipo de juego y los procedimientos para obtenerlos.
- Se familiariza con los modelos prototipos de la teoría de juegos y sus aplicaciones.
- Utiliza teoría de grafos en la resolución de problemas de teoría de juegos.

De habilidad (Lo que sabe hacer)

- Reconocer a la matemática como una ciencia formal y exacta.
- Manejar apropiadamente los recursos tecnológicos tales como la calculadora y paquetes matemáticos en la solución de problemas concretos.
- Desarrollar habilidades y destrezas en situaciones problemáticas que involucren elementos de la matemática discreta.
- Realizar una adecuada búsqueda de información, valorando aquella que resulte relevante y significativa para abordar diferentes problemas y situaciones relacionadas.
- Expresar de manera clara y comprensible los argumentos utilizados en el planteamiento, desarrollo y solución de problemas específicos.
- Presentar propuestas novedosas y alternativas de solución a problemas relacionados con los elementos de matemáticas discretas.
- Emplear un adecuado lenguaje simbólico para expresar sus ideas y propuestas.

De actitud (Lo que sabe ser)

- Mostrar actitud crítica y responsable.
- Valorar el aprendizaje autónomo.
- Mostrar interés en la ampliación de conocimientos y en la búsqueda de información.
- Valorar la importancia del trabajo en equipo.
- Estar dispuesto a reconocer y corregir errores.
- Respetar las decisiones y opiniones ajenas.

Asumir la necesidad y utilidad de la matemática discreta como herramienta en su futuro ejercicio profesional.

Contenidos

TEMAS		**Semana**
Ambientación (Estudiantes primer semestre entran semana 2)		1
Preliminares. Teoría de conjuntos, lógica proposicional e inducción matemática. Conteo: permutaciones, combinatoria, principio de las casillas, funciones de recurrencia.	• Realiza operaciones básicas con conjuntos • Maneja los diferentes conectivos lógicos y sus tablas de verdad. • Manejar métodos de demostración. • Usa la inducción matemática. • Aplica los principios de conteo a problemas prácticos • Hallar la formula general de una relación de recurrencia.	2 - 3
PRIMER PARCIAL		4
Algebras de Boole	• Identifica la estructura de Algebra de Boole • Construye la expresión Booleana correspondiente a una tabla. • Diseña circuitos. • Simplifica expresiones y circuitos Booleanas utilizando mapas de Karnaugh	5 - 8
SEGUNDO PARCIAL:		9
Teoría de Grafos: Definición, propiedades, trayectorias y caminos Eulerianos y Hamiltonianos, coloración de grafos. Árboles	• Identifica un grafo, sus partes: vértices y sus propiedades • Identifica grafos Isomorfos • Utiliza matrices de adyacencia para contar caminos. • Identifica cuando un grafo tiene circuitos o caminos Eulerianos. • Analiza condiciones necesarias para la existencia de circuitos y caminos Hamiltonianos. • Identifica grafos planos. • Encuentra el número cromático y el polinomio cromático de un grafo dado. • Resuelve problemas de aplicación utilizando coloración de grafos. • Realiza recorridos en árboles	10-12

Anexo 4. Actividad 1 – A1

Actividad 1 – Aprendiendo a contar

	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Principios Fundamentales de Conteo Principios de la Suma y el Producto				
Nombre				**Edad**	
Código		**Fecha**		**Semestre**	
Actividad 1. Aprendiendo a contar					

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA
Resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.
En *La Fiesta del Té* hay cinco modelos de tazas de té, tres modelos de platos y cuatro cucharitas diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá formar un conjunto de taza, plato y cucharita?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Círculos Matemáticos).

INICIATIVA 2.
En una reunión de 5 asistentes, todos se dan la mano exactamente una vez con todos los demás al saludarse. ¿Cuántos apretones de mano se dan en la reunión?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 3.
En un tablero de dimensiones 2×2, cada casilla puede ser de color blanco o negro. ¿De cuántas maneras se puede colorear el tablero? Bajo las mismas condiciones, ¿cuáles podrían ser las dimensiones del tablero para que la respuesta fuera 512? ¿64?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Círculos Matemáticos).

INICIATIVA 4.
En la clase de Solución de Problemas hay 9 mujeres y 12 hombres. ¿De cuántas formas puede el profesor elegir un monitor para la clase? ¿De cuántas formas se puede elegir el representante de curso y su suplente para el comité estudiantil? ¿De cuántas formas se puede seleccionar el representante y su suplente si se quiere que no sean del mismo género?
¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

INICIATIVA 5.
¿Cuántos enteros positivos de cuatro dígitos hay tales que sus dígitos son distintos, el primer digito de la izquierda es diferente de cero, el entero es múltiplo de 5 y el mayor digito es 5?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de OCM-2012-PN)

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE
Objetivos.
1. Identificar y deducir los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.

1. Construir significados de los principios de la suma y del producto a través de la solución de problemas de combinatoria.
2. Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización de los principios de la suma y del producto.
3. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
4. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

Definición.
Combinatoria enumerativa.
"La combinatoria enumerativa busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual concurre en encontrar su cardinal, teniendo como objetivo el –contar sin contar-, es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno"[1]

Recomendaciones:
1. Al resolver las siguientes iniciativas escribir y anexar los procedimientos y cálculos realizados como parte de la solución, y argumentar completamente por qué el proceso que siguieron es correcta.
2. Al solucionar cada una de las siguientes INICIATIVAS, mantener presentes los siguientes componentes en el proceso seguido, los cuales pueden resultar valiosos para lograr una solución.
   1) Identifique el conjunto y/o conjuntos dados y las condiciones que caracterizan sus elementos
   2) Defina el nuevo conjunto (conjunto que se obtendrá al realizar el conteo requerido) y las condiciones que caracterizan sus elementos.
   3) Describa la configuración que caracteriza los elementos del nuevo conjunto, del cual se quiere conocer su cardinalidad.
   4) Describa las formas naturales de entender el "conteo" requerido para solucionar el problema.
   5) Explique las estrategias utilizadas para calcular la cardinalidad del nuevo conjunto, a partir de la definición o caracterización de sus elementos.
   6) Reescriba el problema en términos de un problema similar del cual ya conozca su solución, si es posible, de tal forma que relacione su estrategia de solución para implementarla en el problema propuesto.
   7) Realice el conteo operacionalmente, sin listar sus elementos.

INICIATIVA 6.
Las seis caras de un dado están numeradas -3, -2, -1, 0, 1, 2. Si se lanza el dado dos veces y se multiplican los dos números que mostró el dado en la cara superior en las dos ocasiones, ¿de cuántas formas diferentes puede obtenerse como resultado un número negativo? Bajo las mismas condiciones, ¿cómo deberían colocarse números en las caras del dado para que la respuesta fuera 8?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de OCM-2012-PN)
INICIATIVA 7.
Un jugador de baloncesto hizo 5 canastas durante un juego. Cada canasta otorgaba 2 o 3 puntos. ¿Cuántos números diferentes pueden representar el total de puntos obtenidos por el jugador? Supóngase que hay un juego en el cual cada anotación valiera 2 o 4 puntos y que un jugador hiciera 5 anotaciones, y que se hiciera la misma pregunta. ¿Cambiaría la respuesta? ¿Por qué?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de OCM-2012-PN)

INICIATIVA 8.

[1] Restrepo Mesa Pascual. Un Recorrido por la Combinatoria I. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. 2010.

Proponer y solucionar un problema de conteo con tres condiciones y cuya repuesta sea 12. ¿Puede usted proponer otro problema con la misma respuesta 12 pero con dos condiciones? ¿Otro con tres condiciones que sean esencialmente distintas a las condiciones del primero?
(Sugerencia: El concepto implícito que debe estar en el problema y que permita construir su solución es el *principio del producto.*)

INICIATIVA 9.
Si hay 3 regalos idénticos (R_1, R_2, R_3) para repartir entre 5 niños (A, B, C, D, E). Cada niño puede recibir los tres regalos, dos regalos, un regalo o ningún regalo. ¿De cuántas formas se pueden repartir los tres regalos idénticos entre los cinco niños? Explique su respuesta.
Ahora, si ***n*** y ***k*** son enteros positivos, ¿de cuántas formas se pueden repartir ***n*** regalos idénticos entre ***k*** niños, si cada uno de los niños puede recibir varios regalos o ninguno? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
(Adaptado de Un recorrido por la combinatoria I).

INICIATIVA 10.
Sea ***n*** un entero positivo. ***n*** se puede expresar como suma de enteros positivos de distintas maneras. Si se consideran como diferentes dos sumas que tienen los mismos sumandos pero éstos aparecen en distinto orden, ¿de cuántas formas diferentes puede expresarse ***n?*** (Adaptado de Un recorrido por la combinatoria I.)

Nota. Por ejemplo, si $n = 3$, tenemos:
- Una forma de tres sumandos {(1+1+1)}.
- Dos formas de dos sumandos {(1+2), (2+1)}, y
- Una forma de un sumando {(3)}.

Luego el número de formas de expresar al entero positivo 3, como la suma de enteros positivos es 4.

Si $n = 5$, tenemos:
- Una forma de cinco sumandos {1+1+1+1+1}.
- Cuatro formas de cuatro sumandos {(1+1+1+2), (1+1+2+1), (1+2+1+1), (2+1+1+1)}.
- Seis formas de tres sumandos {(1+1+3), (1+3+1), (3+1+1), (1+2+2), (2+1+2), (2+2+1)}.
- Cuatro formas de dos sumandos {(1+4), (4+1), (3+2), (2+3)}, y
- Una forma de un sumando {(5)}.

Luego el número de formas de expresar al entero positivo 5, como la suma de enteros positivos es 16.
a) Si $n = 4$, ¿de cuántas formas se puede expresar a ***n*** como suma de enteros positivos? Explique su respuesta.

b) Si $n = 7$, ¿de cuántas formas se puede expresar a ***n*** como suma de enteros positivos? Explique su respuesta.
c) Construir un modelo general que permita contar el número de formas en las que se puede expresar a ***n*** como suma de enteros positivos bajo estas condiciones, y explicar el significado operativo del modelo.

d) Si usted conoce el Teorema del binomio, ¿considera que tiene esta situación algo que ver con el Teorema del binomio? Explique su respuesta.

TERCERA PARTE
INICIATIVAS COLABORATIVAS
INICIATIVA 11.
Según la gramática de la lengua española, el abecedario está compuesto por 27 letras. ¿Cuántas cadenas distintas de tres letras se pueden formar bajo cada una de las siguientes condiciones?

A) Ninguna condición adicional.
Que las cadenas de tres letras sean diferentes entre sí y que las tres letras de cada cadena también sean diferentes

A) Que la segunda letra de cada cadena sea una vocal y que las otras dos letras sean consonantes diferentes entre sí.
B) Que todas las cadenas terminen en "A".
C) Que contenga las letras "AB", y que éstas siempre estén seguidas y en ese mismo orden.

¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

INICIATIVA 12.
¿Cuántos paralelepípedos rectángulos distintos se pueden construir para los cuales la longitud de cada arista sea un valor entero de 1 a 10? a) Si cada una de sus tres dimensiones son diferentes. b) Si dos de las tres dimensiones son iguales. c) Si las tres dimensiones son iguales. d) ¿Cómo cambiaría el análisis de la solución si se estuvieran construyendo tetraedros y no paralelepípedos rectangulares? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 13.
Dado el conjunto $\boldsymbol{L} = \{a, b, c\}$, ¿cuál es el número de subconjuntos de ***L***? Si se forma un nuevo conjunto al cual se le incluye un nuevo elemento, $\boldsymbol{L'} = \{a, b, c, d\}$, ¿cuántos subconjuntos tendrá el nuevo conjunto que se formó? ¿Cómo se pueden contar? Intente pensar en dos formas esencialmente diferentes de contarlos. Ahora suponga que el conjunto dado ***L*** tiene 15 elementos, ¿Cuántos subconjuntos tendrá el conjunto ***L?*** **¿**Cuántos elementos debe tener un conjunto M para que el número de subconjuntos de M sea 1024? ¿Existe un conjunto que tenga exactamente 4 subconjuntos? ¿Exactamente 24 subconjuntos?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

CUARTA PARTE

INICIATIVA DE LA SEMANA

INICIATIVA FORO
Metodología.
1. El estudiante líder tendrá un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas sobre las preguntas orientadoras. Este insumo se considerara como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.

2. Todos los demás integrantes del grupo estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las pregunta orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo. Al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto.

3. **Preguntas orientadoras.**

   3.1. Explique con sus propias palabras en que consiste el problema planteado, respondiendo a:
      3.1.1. ¿Qué ha comprendido usted del problema en términos de la combinatoria?
      3.1.2. ¿Qué interpretación hace usted de la pregunta o preguntas planteadas?
      3.1.3. ¿Qué estrategia o camino ve que es posible construir para resolver el problema?

   Nota: A partir de las respuestas dadas por los integrantes del grupo se debe dar el debate, concluyendo con una posible estrategia para proceder a construir la solución del problema y así dar respuesta a la pregunta o preguntas formuladas.

INICIATIVA 14.
¿Qué número menor que 100, tiene el mayor número de divisores? ¿La respuesta es única? ¿Cómo se puede contar el número de divisores de un número? (Dado cualquier número entero, su método de contar debe poderse usar para hallar el número de divisores que tiene.) ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Anexo 5. Actividad 2 – A2

Actividad 2 – Mi posición es importante

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA Subtema: Permutación		
Nombre		Edad	
Código	Fecha	Semestre	
Actividad 2. Mi posición es importante			

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA
Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.
¿De cuántas formas se pueden colocar cuatro esferos de diferente color en un estuche? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 2.
En un paradero de bus hay siete personas, de las cuales cuatro son mujeres. ¿De cuántas formas se pueden subir al bus, si cada uno debe marcar de forma individual el cobro del pasaje y deben subir en forma alternada (por género)**?** ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Matemáticas discretas de Grimaldi.)

INICIATIVA 3.
Fernanda, Germán, Hernando y Juanita van a hacer tareas a la biblioteca de la UAN. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse juntos alrededor de una mesa redonda? Determinar las condiciones bajo las cuales dos formas de sentarse se deben considerar iguales.
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 4.
¿De cuántas formas se pueden colocar cuatro figuras distintas (♣, ♫, ☼, §) en un tablero de 4x4 casillas, de tal forma que al moverlas horizontal o verticalmente no se crucen entre ellas? Un posible arreglo es el mostrado en la figura.
¿Cómo cambiaría su respuesta si las cuatro figuras fueran idénticas?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

		☼	
♣			
			§
	♫		

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE
Objetivos.

1. Identificar y deducir los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significados del principio de la permutación a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización del principio de la permutación.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

Recomendaciones:
1. Al resolver las siguientes iniciativas escribir y anexar los procedimientos y cálculos realizados como parte de la solución, y argumentar completamente por qué el proceso que siguieron es correcta.
2. Al solucionar cada una de las siguientes INICIATIVAS, mantener presentes los siguientes componentes en el proceso seguido, los cuales pueden resultar valiosos para lograr una solución.
   1) Identifique el conjunto y/o conjuntos dados y las condiciones que caracterizan sus elementos.
   2) Defina el nuevo conjunto (conjunto que se obtendrá al realizar el conteo requerido) y las condiciones que caracterizan sus elementos.
   3) Describa la configuración que caracteriza los elementos del nuevo conjunto, del cual se quiere conocer su cardinalidad.
   4) Describa las formas naturales de entender el "conteo" requerido para solucionar el problema.
   5) Explique las estrategias utilizadas para calcular la cardinalidad del nuevo conjunto, a partir de la definición o caracterización de sus elementos.
   6) Reescriba el problema en términos de un problema similar del cual ya conozca su solución, si es posible, de tal forma que relacione su estrategia de solución para implementarla en el problema propuesto.
   7) Realice el conteo operacionalmente, sin listar sus elementos.

INICIATIVA 5.
Ángela, Berenice, Carlos y Diego están sentados aleatoriamente alrededor de una mesa cuadrada, una persona en cada lado de la mesa. ¿De cuántas formas diferentes pueden Ángela y Carlos quedar ubicados en lados opuestos de la mesa?
Bajo las mismas condiciones, invente un problema diferente cuya respuesta sea 4.
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
(Tomado de OCM-2012-PN)

INICIATIVA 6.
En un cajón hay una docena de medias blancas y una docena de medias azules sueltas y sin marcar. Un hombre elige los calcetines al azar sin mirar.
a) ¿Cuántas medias debe elegir para asegurar que al menos dos sean del mismo color?
   ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
b) ¿Cuántas medias debe elegir para asegurar que al menos dos sean azules?
   ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 7.
La revista MARCA especializada en el futbol decide publicar artículos sobre los 22 equipos de la primera división de la Liga Santander del futbol español, a razón de un club por semana. ¿De cuántas formas puede hacerlo si el primer artículo tiene que ser sobre el Villareal? ¿De cuántas si, los artículos del Atlético de Madrid, el Barcelona y el Real Madrid deben publicase en semanas consecutivas? ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas? Proponga una pregunta en ese mismo contexto cuya solución requiera un argumento de conteo similar a los utilizados en las dos preguntas anteriores y dé su solución.

INICIATIVA 8.
Determine de cuántas formas se pueden organizar n personas en una fila. Ahora si hay $2n$ personas, n hombres y n mujeres, ¿de cuántas forma se pueden organizar en una fila de modo que no haya dos personas del mismo sexo juntos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
(Tomado de *Un recorrido por la combinatoria I*).

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 9.
Un comité europeo cuenta con 6 delegados alemanes, 5 delegados franceses, y 3 delegados italianos. ¿De cuántas formas pueden estos 14 delegados sentarse en una fila de 14 sillas, si los delegados de cada país insisten en estar todos sentados uno junto al otro?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 10.
En un banco hay 10 módulos de atención al público, atendidos diariamente cada uno por un cajero fijo, los cuales se van a conocer como el cajero1, el cajero 2, … y el cajero 10 respectivamente. Cada mes se elige al "Gran Cajero" (cajero con el mayor número de atenciones al público). Si todos deben asistir a una reunión semanal y sentarse en la misma fila, cumpliendo con las siguientes reglas: Primera regla: El "Gran Cajero" del mes ocupará la silla correspondiente al número de su caja, ya que en ella le colocan el premio de la semana por ser el Gran Cajero. Segunda regla: a la derecha del Gran Cajero se deben sentar los cajeros con mayor número de caja que la del Gran Cajero y a la izquierda los de menor número.

a) Por ejemplo si el Gran Cajero del mes es el **C4** (cajero que atiende el modulo cuatro, cajero 4), a la derecha de él se sientan los cajeros 5 al 10; y a la izquierda de él los cajeros 1 al 3 (En el gráfico se muestra una posible ubicación de los cajeros el día de la reunión, ocasión en la cual el "Gran Cajero" es el cajero 4.) ¿De cuántas maneras se pueden sentar ese día? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

C3	**C1**	**C2**	**GC**	**C8**	**C10**	**C5**	**C7**	**C6**	**C9**

b) Suponiendo que el reconocimiento al Gran Cajero se hace sin repetición hasta completar un ciclo en el cual los 10 cajeros hayan sido elegidos como el Gran Cajero ¿Cuál es el total de formas posibles en las que se pudieron sentar los diez cajeros durante un ciclo?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

c) Construir un modelo que permita contar las formas de acomodarse cada vez que hay una nueva reunión de cajeros.
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 11.
¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres idénticas, de manera que no se coman una a la otra? Ahora suponga que cada torre es de diferente color. ¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez las 8 torres de diferente color, de manera que no se coman una a la otra? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

Veamos el caso general para el cual se tiene un tablero de n x n casillas y n figuras, las cuales se deben colocar en e tablero de tal forma que al moverlas horizontal o verticalmente no se crucen entre ellas. Con esta información proponga dos preguntas, que cumplan condiciones similares a las del tablero de ajedrez y describa como sería un modelo genera para su respectiva solución.

CUARTA PARTE

INICIATIVA DE LA SEMANA

INICIATIVA FORO
Introducción
El propósito del FORO –*Mi posición es importante*- es que a partir de las diferentes participaciones realizadas por los integrantes del curso se dé el debate alrededor de las preguntas orientadoras, conducentes a propiciar un trabajo y aprendizaje colaborativo que tendrá como objetivo elaborar una estrategia que permita construir la solución del problema y así dar solución a la pregunta o preguntas formuladas, debidamente justificadas y argumentadas.

Metodología
1. Cada estudiante tiene un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas en respuesta a las preguntas orientadoras. Este insumo se considerará como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.

2. Todos los demás integrantes del curso estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las preguntas orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo, al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto, avances que deben ser consignados en la página del foro.

3. **Preguntas orientadoras**

   3.1. Explique con sus propias palabras en que consiste el problema planteado, respondiendo a:
   3.1.1. ¿Qué ha comprendido usted del problema en términos de la combinatoria?
   3.1.2. ¿Qué interpretación hace usted de la pregunta o preguntas planteadas?
   3.1.3. ¿Qué estrategia o camino ve que es posible construir para resolver el problema?

   Nota: A partir de las respuestas dadas por los integrantes del grupo se debe dar el debate, concluyendo con una posible estrategia para proceder a construir la solución del problema y así dar solución a la pregunta o preguntas formuladas, debidamente consignada en la página del foro.

INICIATIVAS DE LA SEMANA -- INICIATIVA FORO

INICIATIVA 12.
Una industria nacional de alimentos tiene seis plantas de producción, una en Bogotá, una en Cali, una en Medellín, una en Villavicencio, una en Pereira y una en Neiva. El Departamento de Calidad desea hacer una inspección en todas las plantas, para lo cual designa a tres ingenieros, cada uno de los cuales visitará dos plantas. ¿De cuántas maneras el coordinador del Departamento de Calidad puede agrupar las seis plantas en tres grupos de dos plantas cada uno? Determine dos formas esencialmente diferentes de contarlas. ¿De cuántas maneras pueden asignarse las plantas para inspección a los ingenieros?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
¿Cuántas plantas debe haber y cómo se deben agrupar para que la respuesta a la primera pregunta sea mayor que 50 y menor que 100? ¿Hay más de una respuesta a esta nueva pregunta?
¿Cómo sería el caso general para este tipo de situaciones y cómo sería un modelo general para su solución?

Anexo 6. Actividad 3 – A3

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	**FACULTAD DE CIENCIAS** **Departamento de Matemáticas**
	SOLUCION DE PROBLEMAS **Unidad Temática: COMBINATORIA**
	Subtema: Variaciones

Nombre				**Edad**	
Código		**Fecha**		**Semestre**	

Actividad 3. El Intercambio

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Al resolver las siguientes iniciativas escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

Los ciclistas supersticiosos. ¡Otra vez un ocho!- exclamó amargamente el presidente del club de ciclistas, observando la rueda torcida de su bicicleta. ¿Y todo por qué? Porque al ingresar al club me dieron el carnet número 008. Y ahora no pasa un mes sin que en una u otra rueda aparezca un ocho. Hay que cambiar el número del carnet. Y para que no me acusen de superstición, haré un nuevo registro de todos los miembros del club, otorgándoles carnets en los que no figure ni un ocho.

Dicho y hecho: al día siguiente cambio todos los carnés. ¿Cuántos miembros había en el club, si se sabe que fueron utilizados todos los números de tres cifras que no contienen ningún ocho? (Por ejemplo, el 000 fue utilizado, y el 836 no.)

Si el presidente de otro club era más supersticioso, porque dijo que el cero se parecía a una rueda de la bicicleta estirada, eliminando el 0 y el 8 de los carnés., y con esta restricción justo pudo expedir nuevos carnés a todos, ¿cuántos miembros tenia este club? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 2.

Una instalación de luces navideñas consta de 3 luces azules y 2 amarillas, indistinguibles entre las luces del mismo color. ¿De cuántas formas se pueden colocar las luces consecutivamente en la instalación?

¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

¿Cuántas luces azules debe haber si hay 2 amarillas y ante esta situación la respuesta a la misma pregunta sea 21?

INICIATIVA 3.

Se realiza una competición entre los integrantes del equipo Olímpico de Ciclismo para elegir el capitán del equipo (primer puesto), el segundo capitán del equipo (segundo puesto) y el coequipero (tercer puesto). Si los integrantes del equipo son Pantano, Urán, Chaves, Henao y López, si no se admiten empates y todos terminan la carrera, ¿de cuántas formas puede terminar la competencia que determinará las respectivas capitanías del equipo?

¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 4.

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE

Objetivos.

1. Identificar, a partir de las experiencias, los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significado del principio de la variación a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización del principio de la variación.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

INICIATIVA 5.

Un tren empieza su recorrido en la estación A y lo termina en la estación F. Entre la estación A y la estación F están las estaciones B, C, D y E. Se quiere ir de la estación A a la estación F, parando o no en una o más de las estaciones intermedias. Se sabe que si el tren para en la estación C, entonces también para en la estación E, y si para en la estación E, es porque antes debió parar también en la estación C. Determinar la cantidad de maneras distintas en que se puede organizar el viaje del tren. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Adaptado de OCM-2012-NS)

INICIATIVA 6.

Al final de un torneo de bolos profesional, los 5 mejores jugadores de bolos tienen un play-off. En la primera partida se enfrentan el jugador #5 y el jugador #4, el perdedor recibe el quinto premio. El ganador se enfrenta en otra partida con el jugador #3. El perdedor recibe el cuarto premio, y el ganador se enfrenta con el jugador #2. El perdedor de este juego recibe el tercer premio, y el ganador se enfrenta con el jugador #1. El ganador de esta partida obtiene el primer premio y el perdedor el segundo premio. ¿De cuántas formas diferentes pueden obtener el primer premio cualquiera de los cinco jugadores? ¿Cómo cambiaría la respuesta si se siguiera un proceso similar sin "ranquear" los jugadores de modo que se comenzara con un partido entre dos cualesquiera de los jugadores, y el ganador se enfrentaría luego a cualquiera de los otros tres, y así sucesivamente? (AHSME 1988)

¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 7.

Una rifa consta de 20 boletas, numeradas del 1 al 20, que se venden a veinte personas diferentes. Hay cuatro premios distintos, de los cuales el premio mayor es un carro, el segundo premio es un viaje a una isla, el tercer premio un computador portátil y el cuarto premio una calculadora. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios si:

a) exactamente una de las personas con las boletas número 7 o 13 gana uno de los premios? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) exactamente una de las personas con las boletas número 7, 13 y 18 gana uno de los premios? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

c) cada una de las personas con las boletas número 7, 13 y 18 gana uno de los premios? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

a) ninguna de las personas con las boletas 7, 13, 15 y 18 gana un premio? Dé esta solución a partir de dos formas diferentes de entender la situación planteada. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) Proponga un problema relacionado con la misma situación cuya respuesta esté en el rango de 500 a 1000 y resuélvalo.

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 8.

Una araña tiene una media y un zapato distinguibles para cada uno de sus ocho patas. ¿De cuántas formas diferentes puede la araña ponerse sus medias y zapatos, suponiendo que, en cada pata, la media se debe colocarse antes del zapato? Explique su respuesta. (AMC12 2001)

INICIATIVA 9.

Alex, Melchor y Chavela participan de un juego que tiene 6 rondas. En cada ronda hay un solo ganador y los resultados de las rondas son independientes. Si Alex gana la mitad de las rondas, Melchor gana el doble de rondas de las que gana Chavela, ¿de cuantas formas se pudo haber desarrollado el juego? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?. (Adaptado de OCM-2012-NS)

INICIATIVA 10.

a) Dados los elementos *a, b, c, d, e, f*. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden efectuarse con los seis elementos en las que dos de ellos, *a* y *b*, no estén juntos? ¿Y en las que no lo estén tres, *a, b, c* en serie (en cualquier orden)? ¿y en las que ningún par de los elementos *a, b,* y *c* estén juntos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) Ahora se tiene un conjunto de *n* elementos. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden efectuarse con los *n* elementos, en las que dos de ellos, *a* y *b*, no están juntos? ¿Y en las que no lo estén tres, *a, b, c* en serie (en cualquier orden)? ¿y en las que ningún par de los elementos *a, b,* y *c* estén juntos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

c) Invente usted un problema de permutaciones con *n* elementos cuya respuesta sea 6.

CUARTA PARTE

INICIATIVA DE LA SEMANA – INICIATIVA FORO

Metodología.

1. El estudiante líder tendrá un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas en respuesta a las preguntas orientadoras. Este insumo se considerará como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.

2. Todos los demás integrantes del grupo estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las preguntas orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo, al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto, avances que deben ser consignados en la página del foro.

Anexo 7. Actividad 4 – A4

Actividad 4 – Calculando, combinando y contando

	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas		
UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA		
	Subtema: Combinaciones		
Nombre		**Edad**	
Código	**Fecha**	**Semestre**	
Actividad 4. Calculando, combinando y contando			

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.
Un profesor tiene cinco marcadores de diferente color – negro, rojo, azul, verde y naranja - para escribir en el tablero. ¿De cuántas formas se puede escoger tres de ellos para hacer una explicación en el tablero? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?

INICIATIVA 2.
Se tiene una pizza de 24 porciones para repartir entre 6 personas. Si se sabe que cada persona se come por lo menos tres porciones de pizza, ¿de cuántas formas es posible distribuir las porciones, si sólo interesa la cantidad de porciones sin tener en cuenta quién recibe qué? (OCM-2012-PN) ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?

INICIATIVA 3.
¿Cuántos triángulos se pueden construir, si la longitud de sus lados debe tomar un valor entre 1 y 7, inclusive? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?

INICIATIVA 4.
Una evaluación consta de cinco preguntas, tipo dicotómicas (de respuestas verdadera y falsa). Contestando al azar, ¿de cuántas formas un estudiante puede responder tres falsas y dos verdaderas? ¿Dos falsas y tres verdaderas? ¿De cuántas formas diferentes puede responder si contesta todas las preguntas sin que se pongan más condiciones? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?

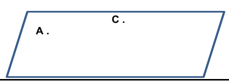
SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE

Objetivos.

1. Identificar y deducir los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significados del principio de la combinación a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización del principio de la combinación.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

INICIATIVA 5.



E .

D .

Los puntos A, B, C, D, y E son coplanarios (pertenecen al mismo plano). Suponiendo que no hay tres de estos puntos en una misma recta ¿cuántas rectas quedarán determinadas por los cinco puntos dados? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta? Bajo las mismas condiciones, ¿cuál es el número mínimo de puntos que se requieren para determinar al menos 30 rectas?

INICIATIVA 6.
En cada uno de los cinco sets de un partido de tenis (en el cual el primer jugador en ganar tres sets gana el partido), ¿de cuántas formas puede un jugador ganar el partido? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su solución es correcta?
(OCM-2012-NS)

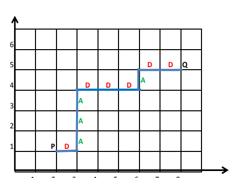
INICIATIVA 7.
El juego del POKER.

Una baraja de POKER consta de 52 cartas, con cuatro palos: corazones, diamantes, tréboles y picas, cada uno con 13 cartas: as, 2, 3, . . . , 9, 10, sota, reina y rey. Los palos corazones y diamantes son de color rojo y los otros de color negro. ¿De cuántas formas puede recibir un jugador una mano (una mano son cinco cartas, escogidas al azar)?, si:

a) la mano tiene tres ases.
b) la mano tiene cuatro cartas del mismo color.
c) la mano tiene tres ases y dos sotas.
d) la mano tiene un as, dos reinas y dos cartas correspondientes a un número entre 5 y 9.
e) Proponga usted dos problemas que concernientes a la combinación y las manos de póker y resuélvalos. Trate de crear un problema que tenga el menor valor posible (pero diferente de 0) y otro que tenga el mayor valor posible de combinaciones.
¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 8.

a) Determine el número de trayectorias (escalonadas) en el plano *xy* de P(2,1) a Q(8,5), si cada trayectoria está formada por escalones individuales que van una unidad hacia la derecha (D) o una unidad hacia arriba (A). Una posible trayectoria se presenta en la figura. ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta?
b) Identificar dos puntos en el plano tales que la respuesta a la pregunta anterior sea menor que 10. Mayor que 50. ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta?



Trayectoria: DAAADDDADD

INICIATIVA 9.
Abel, Benjamín, Carmen, Demetrio, Ester y Fabiola tienen cuentas en internet. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos internet entre sí, y ninguno de ellos tiene un amigo internet fuera de este grupo. Cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos internet. ¿De cuántas maneras diferentes puede pasar esta situación? ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta? (OCM-2012-NS)

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 10.
Si se dispone de ocho objetos, ¿qué es mayor, el número de agrupaciones tomando de a tres objetos o el número de agrupaciones tomando de a cinco de los mismos objetos? Razone su respuesta. Antes de hacer ningún cálculo piense intuitivamente una respuesta: ¿es correcta su intuición? En caso contrario, ¿dónde está la falla?

INICIATIVA 11.
Se dan 11 puntos, de los cuales hay 5 en una misma circunferencia. Además de éstos 5 puntos, no hay ningún otro grupo de 4 puntos que se hallen sobre una misma circunferencia. ¿Cuántas circunferencias se pueden trazar, de modo que cada una de ellas contenga por lo menos 3 de los 11 puntos dados? ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 12.
En un juego de POKER, ¿de cuántas formas puede recibir un jugador una mano (una mano son cinco cartas, escogidas al azar)? ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta? Si:

	**a)** la mano es una "***Escalera de color***"- cinco cartas en orden numérico, todas del mismo palo-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**b)** la mano es un ***"Póker"*** - cuatro cartas del mismo valor y una carta no emparejada-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**c)** la mano es un **"Full"** - tres cartas del mismo valor y un par de un mismo valor diferente al anterior-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**d)** la mano es un ***"Color"*** - cinco cartas del mismo palo-. El dibujo muestra un ejemplo.
	**e)** la mano es una ***"Escalera"*** - cinco cartas consecutivas. El dibujo muestra un ejemplo.

CUARTA PARTE

INICIATIVA DE LA SEMANA – INICIATIVA FORO

Metodología.

1. El estudiante líder tendrá un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas en respuesta a las preguntas orientadoras. Este insumo se considerará como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.

1. Todos los demás integrantes del grupo estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las preguntas orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo, al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto, avances que deben ser consignados en la página del foro.

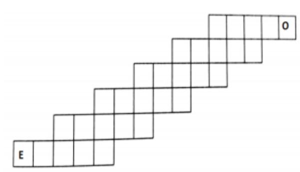
2. **Preguntas orientadoras.**

   2.1. Explique con sus propias palabras en que consiste el problema planteado, respondiendo a:
   - 2.1.1. ¿Qué ha comprendido usted del problema en términos de la combinatoria?
   - 2.1.2. ¿Qué interpretación hace usted de la pregunta o preguntas planteadas?
   - 2.1.3. ¿Qué estrategia o camino ve que es posible construir para resolver el problema?

   Nota: A partir de las respuestas dadas por los integrantes del grupo se debe dar el debate, concluyendo con una posible estrategia para proceder a construir la solución del problema y así dar solución a la pregunta o preguntas formuladas, debidamente consignada en la página del foro.

INICIATIVA 13.

a) El edificio donde trabaja Diego tiene muchas habitaciones dispuestas tal como se muestra en la figura. Existen puertas que comunican todas las habitaciones adyacentes. La entrada del edificio se encuentra en la habitación (E) de la izquierda y la oficina Diego (O) se encuentra en la habitación de la derecha. A Diego le hacer gusta hacer una trayectoria distinta todos los días, desde la entrada hasta su oficina. Sin embargo, el trayecto es largo por lo que él sólo avanza hacia la derecha y hacia arriba para no tardar más tiempo. ¿Cuántos días pueden pasar sin que Diego repita ninguna trayectoria? ¿Cómo explicaría usted a un compañero que su respuesta es correcta? (OCM-2012-NI)



b) Dibujar la maqueta de otro edificio tal que, bajo condiciones similares, Diego podrá durar más de dos años sin repetir ninguna trayectoria. Dibujar la maqueta con el menor número de habitaciones de modo que bajo condiciones similares podrá tardar Diego más de dos años sin repetir ninguna trayectoria.

Anexo 8. Actividad 5 – A5

FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas			
SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA			
Subtema: Combinaciones			
Nombre		Edad	
Código	Fecha	Semestre	
Actividad 5. ¿Pensamiento o suerte?			

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

Las caras de cada uno de tres dados diferentes (dado amarillo, azul y rojo) están marcadas con los números 1, 4, 13, 40, 121, 364. Si al tirarlos, se suman los números de la cara superior ¿cuántas sumas distintas se pueden obtener al tirarlos?
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

¿Cómo se colocarían números en las caras de los dados para que, con las mismas condiciones, al tirarlos haya exactamente 1 suma posible? ¿Exactamente 6 sumas distintas posibles? ¿Exactamente 16 sumas distintas?

INICIATIVA 2.

Los seis miembros de una familia están reunidos esperando el Año Nuevo. Cuando el reloj dé las 12 campanadas cada uno de ellos dará dos abrazos, cada uno a una persona distinta. ¿De cuántas maneras pueden hacer esto? (OCM-2012-NS)
¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 3.

¿Cuántas triplas de números enteros positivos satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 7$? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE

Objetivos.

1. Identificar a partir de las experiencias los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significados del principio de la combinación a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar el concepto de conteo generado a partir de la utilización del principio de la combinación.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

INICIATIVA 4.

Hay 3 gallinas, 4 patos y 2 gansos. ¿Cuántas agrupaciones existen para la elección de varias aves de forma que entre las escogidas haya tanto gallinas, como patos y gansos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 5.

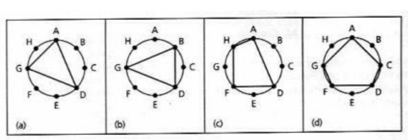
Determinar. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 4 pelotas de golf en 10 cajas, si:

a) todas las pelotas son diferentes y en ninguna caja cabe más de una pelota?
b) las pelotas son indistinguibles y en ninguna caja cabe más de una pelota?
c) todas las pelotas son diferentes y en cada caja caben cuantas pelotas se desee?
d) las pelotas son indistinguibles y en cada caja caben cuantas pelotas se desee?
e) Se han descrito cuatro situaciones distintas de conteo. Enunciar el caso general para cada una de estas situaciones. Elaborar un modelo general para la solución de cada caso y explicar el modelo usando argumentos combinatorios.

¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

INICIATIVA 6.

Sobre la circunferencia de un círculo dado se han marcado ocho puntos equidistantes, como se muestra en las cuatro figuras.



a) Para las partes (a) y (b) tenemos dos triángulos diferentes (aunque congruentes). Estos dos triángulos (que se distinguen mediante sus vértices) surgen de dos selecciones de tres de los vértices A, B, C, D, E, F, G, H. ¿Cuántos triángulos diferentes (congruentes o no) podemos inscribir de esta forma en el círculo? Nota: El triángulo ABC es el mismo que el triángulo CAB, etc.
b) ¿Cuántos de los triángulos de la parte (a) son isósceles?
c) ¿Cuántos triángulos diferentes (no congruentes) hay?
d) ¿Cuántos cuadriláteros convexos, diferentes podemos inscribir en el círculo usando los vértices marcados? (como el mostrado en la figura (c))
e) ¿Cuántos de los cuadriláteros de la parte (c) son cuadrados?
f) ¿Cuántos de los cuadriláteros de la parte (c) son rectángulos, no cuadrados?
g) ¿Cuántos pentágonos, congruentes al mostrado en la parte (d) se pueden inscribir en el círculo?
h) ¿Cuántos polígonos diferentes, de tres o más lados, podemos inscribir en el círculo dado, usando tres o más de los vértices marcados?

(Problema tomado de Matemáticas Discretas y Combinatoria, Ralph P. Grimaldi, 3ª Edición)

INICIATIVA 7.

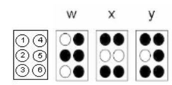
Cada lado de un cuadrado se ha dividido en dos partes iguales. ¿Cuántos triángulos se pueden construir cuyos vértices sean seleccionados de estos puntos de división? Ahora si cada lado del cuadrado se divide en tres partes iguales, ¿cuántos triángulos se pueden construir cuyos vértices sean seleccionados de estos puntos de división? Y en general si cada lado del cuadrado se divide en *n* partes iguales, ¿cuántos triángulos se pueden construir cuyos vértices sean seleccionados de estos puntos de división? ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 8.

El lenguaje Braille. El sistema Braille (lenguaje de escritura y lectura para personas invidentes) se construye a partir de seis puntos numerados como se muestra en la figura. Por ejemplo la letra "w", tiene en relieve (ovalo relleno en la figura) las posiciones 2, 4, 5, y 6. Los símbolos que se construyen son las letras, los números, signos de puntuación, entre otros.



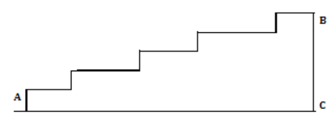
A) ¿Cuántos símbolos diferentes se pueden construir en el sistema braille?
B) ¿Cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?
C) ¿Cuántos símbolos tienen un número par de puntos en relieve?
D) ¿Cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

INICIATIVA 9.

En una recta se han tomado ***p*** puntos, y en una recta paralela a ella, otros ***q*** puntos. ¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean estos puntos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 10.

Se construye una escalera que conduce del punto *A* al punto *B* (ver figura). La distancia *AC* es igual a *4.5 m*, y la distancia *CB* a *1.5 m*. la altura de cada escalón (el contrapaso) es igual a *30 cm*, y su ancho (el paso), a un múltiplo de *50cm.* ¿De cuántas maneras se puede construir la escalera? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?



CUARTA PARTE

INICIATIVA DE LA SEMANA – INICIATIVA FORO

Metodología.

El estudiante líder tendrá un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas en respuesta a las preguntas orientadoras. Este

1. insumo se considerará como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.
2. Todos los demás integrantes del grupo estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las preguntas orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo, al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto, avances que deben ser consignados en la página del foro.
3. **Preguntas orientadoras.**
   3.1. Explique con sus propias palabras en que consiste el problema planteado, respondiendo a:
      3.1.1. ¿Qué ha comprendido usted del problema en términos de la combinatoria?
      3.1.2. ¿Qué interpretación hace usted de la pregunta o preguntas planteadas?
      3.1.3. ¿Qué estrategia o camino ve que es posible construir para resolver el problema?

   Nota: A partir de las respuestas dadas por los integrantes del grupo se debe dar el debate, concluyendo con una posible estrategia para proceder a construir la solución del problema y así dar solución a la pregunta o preguntas formuladas, debidamente consignada en la página del foro.

INICIATIVA 11.

¿Cuántas matrices diferentes 4 x 4 cuyas entradas son todas $1's$ o $-1's$, tienen la propiedad de que la suma de las entradas en cada fila es 0 y la suma de las entradas en cada columna es 0? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (AIME-1997)

Anexo 9. Actividad 6 – A6

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA Subtema: Teorema del Binomio			
Nombre			**Edad**	
Código		**Fecha**	**Semestre**	
Actividad 6. Triángulos Aritméticos				

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

Las caras de una moneda se han remarcado con dos medidas diferentes (ver Figura 1) para asignar las dimensiones a un rectángulo. Si la moneda se lanza dos veces de tal forma que el primer resultado se asigna a la medida de la *base* y el segundo resultado a la medida de la *altura* respectivamente,

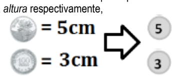


Figura 1

a) ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden construir, si se consideran diferentes dos o más rectángulos en los cuales, al menos una de sus dimensiones es diferente, aunque tengan igual área? Explique su respuesta con argumentos combinatorios. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) ¿Qué área total se puede cubrir utilizando todos los rectángulos construidos anteriormente? ¿A qué figura geométrica se puede asociar esta área? Explique sus respuestas.

c) A qué expresión algebraica se pueden asociar los resultados anteriores. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 2.

a) Dados cuatro conjuntos no disyuntos entre sí, ¿cuántas intersecciones de dos conjuntos se pueden formar entre ellos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) ¿Cuántos conjuntos no disyuntos entre sí son necesarios para que ente ellos haya 10 intersecciones de tres en tres (3 conjuntos diferentes en cada una de las intersecciones)? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 3.

a) Al desarrollar el binomio $(p+q)^8$, ¿cuál es el coeficiente de p^6q^2? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) Explique el significado del término construido con la respuesta anterior $\boxed{(\quad p^6q^2)}$, desde el punto de vista de la combinatoria y el conteo.

c) Proponga un problema, en el cual una de las formas de obtener su solución sea utilizando algo que aparece en el desarrollo del binomio $(p+q)^8$.

INICIATIVA 4.

Dadas las siguientes situaciones:

- ¿De cuantas formas se puede colorear un tablero de dimensiones 2×2, con dos colores diferentes? Describir las diferentes formas de colorearlo.
- ¿De cuantas formas se pueden contestar cuatro preguntas de opción verdadera y falsa, de tal forma que haya tres verdaderas y una falsa?
- Si se lanza una moneda varias veces, y se toma nota de sus resultados CARA o SELLO según se dé el caso. ¿Cuántos de estos resultados contienen exactamente dos caras y dos sellos, si se lanza la moneda cuatro veces?

a) Describa desde el punto de vista combinatorio porque los tres casos son similares en su estructura de conteo.
b) Proponga una situación equivalente a las dadas, de tal forma que su solución aplique para todas ellas.
c) Construya un modelo combinatorio que permita dar solución a las situaciones propuestas.

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE

Objetivos.

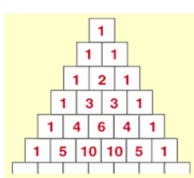
1. Identificar a partir de las experiencias los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significados del teorema del binomio a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar los conceptos de conteo generados a partir de la utilización del teorema del binomio en la solución de problemas de combinatoria.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

INICIATIVA 5.

Al desarrollar la expresión $(p+2q+3r+4)^7$, ¿cuál es el coeficiente de $p^3q^2r^2$? Explique el significado combinatorio de dicha expresión. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 6.
EL TRIANGULO DE PASCAL

La figura presentada corresponde al Triangulo de Pascal.



a) Analice y describa su construcción con argumentos combinatorios.

b) Explique otras formas de presentar esquemáticamente los números combinatorios que conforman el Triángulo de Pascal sin que pierdan sus propiedades.

c) Explique el significado combinatorio de estos números cuando son asumidos como los coeficientes de los términos generados al desarrollar un binomio.

d) Descubra las relaciones que existen entre los números de una misma fila, la relación que existe entre los números de las diagonales y todas las relaciones que su imaginación lo dejen ver. Justifique y argumente cada una de estas relaciones con resultados matemáticos y combinatorios. Por ejemplo, al hacer la suma de los números de cada fila ¿qué puede concluir? De un ejemplo en cada situación propuesta.

INICIATIVA 7.

Dados los binomios $(1+x)^8$ y $(1-x)^8$, construir su desarrollo usando argumentos combinatorios. Deducir la forma general para hallar el coeficiente de x^n, si $1 \le n \le 8$ y el término general que representa la suma de todos los coeficientes al desarrollar el binomio para un *n* determinado. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 8.

Si tenemos 5 pelotas y 4 pinturas de colores diferentes. ¿De cuantas formas se pueden colorear las cinco pelotas, si todas pueden quedar de un mismo color? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 9.

Se presenta una encuesta de opinión de diez preguntas, con únicas respuestas de que "**SI**" o "**NO**" se está de acuerdo con cada pregunta del tema de consulta. Como ésta es virtual, se deben contestar las diez preguntas para poder ser guardada y enviada.

a) ¿De cuántas formas puede una persona contestar la encuesta? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

b) ¿Cuántos resultados tienen al menos tres respuestas con "**NO**"? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

c) Proponga el caso general para esta situación y su respectivo modelo general para su solución, explicando el proceder operatorio implícito en él bajo argumentos combinatorios y de conteo.

INICIATIVA 10.

a) Demostrar o refutar: $\binom{n+1}{3} - \binom{n-1}{3} = (n-1)^2$

b) Proponer y resolver un problema en el cual su solución se pueda dar con la parte izquierda o derecha de la anterior igualdad.

INICIATIVA 11.

La arista de un cubo mide $a+b+c$ (ver Figura 1), con $a \neq b \neq c$ números reales positivos. Si el cubo se construye con paralelepípedos rectangulares cuyas aristas son las combinaciones de *a, b* y *c,* ¿cuántos de estos paralelepípedos se requieren para armar el cubo? ¿Cuántos paralelepípedos como el de la Figura 2, se incluyen en la construcción del cubo? Describa e indique cuantos paralelepípedos diferentes se utilizan en la construcción del cubo y cuantos de cada clase se requieren. (Nota: un paralelepípedo se considera diferente de otro si al menos varían en la medida de una de sus dimensiones) Argumente cada una de sus respuestas indicando el caso general y verificándolo para tres valores cualesquiera de $a,\ b$ y c.

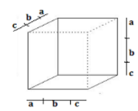


Figura 1

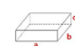


Figura 2

CUARTA PARTE

INICIATIVA DE LA SEMANA – INICIATIVA FORO

Metodología.

1. El estudiante líder tendrá un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas en respuesta a las preguntas orientadoras. Este insumo se considerará como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.

2. Todos los demás integrantes del grupo estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las preguntas orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo, al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto, avances que deben ser consignados en la página del foro.

3. **Preguntas orientadoras.**

   3.1. Explique con sus propias palabras en que consiste el problema planteado, respondiendo a:
   - 3.1.1. ¿Qué ha comprendido usted del problema en términos de la combinatoria?
   - 3.1.2. ¿Qué interpretación hace usted de la pregunta o preguntas planteadas?
   - 3.1.3. ¿Qué estrategia o camino ve que es posible construir para resolver el problema?

   Nota: A partir de las respuestas dadas por los integrantes del grupo se debe dar el debate, concluyendo con una posible estrategia para proceder a construir la solución del problema y así dar solución a la pregunta o preguntas formuladas, debidamente consignada en la página del foro.

INICIATIVA 12.

Dado el **Teorema**: *Si n es un entero positivo cualquiera, entonces*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r \qquad (1)$$

Usando la identidad $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, o de otro modo, determinar si es cierto que

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

Considerando el coeficiente de x^n a ambos lados de la ecuación (1).

Si es cierto, demostrarlo, y, si no lo es, enunciar una versión correcta de la expresión y demostrar que su versión es correcta.

Anexo 10. Actividad 7 – A7

Actividad 7 – ¿Cuántas veces me cuentan?

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas			
	SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA			
	Subtema: Principio de Inclusión-Exclusión			
ombre			Edad	
ódigo		Fecha	Semestre	
Actividad 7. ¿Cuántas veces me cuentan?				

PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.
Una farmacia rebajó el precio de una loción y el de una crema. La contabilidad al final de un día indicó que 80 personas hicieron alguna compra. Si 66 personas habían comprado crema, 21 habían comprado loción, y 12 personas ambos productos. ¿Cuántas personas no aprovecharon la oferta? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 2.
¿Cuántos números naturales entre 1 y 100 no son divisibles por 2, por 3 o por 5? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
Nota: Aquí la "o" es inclusiva, es decir son divisibles por 2 o por 5 o por ambos. Por ejemplo el número natural 20 es divisible por 2 y por 5, en cambio los números naturales 8 y 15 solo son divisibles por 2 y por 5 respectivamente.

INICIATIVA 3.
Todo número natural que es divisible por al menos otro número diferente a 1 y a el mismo, se dice que es compuesto. ¿Cuántos números entre 1 y 111 son compuestos? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 4.
¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3$=11, donde $x_1,\ x_2,\ x_3$ son enteros no negativos tales que $x_1 \leq 3,\ x_2 \leq 4,\ y\ x_3 \leq 6$? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE

Objetivos.
1. Identificar a partir de las experiencias los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significado del principio de inclusión-exclusión a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar los conceptos de conteo generados a partir de la utilización del principio de inclusión-exclusión.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

INICIATIVA 5.
Una encuesta realizada a 600 empleados de una empresa, reveló que 277 tenían casa propia; 233 automóvil y 405 computador portátil. De estos 165 automóvil y computador portátil, 120 automóvil y casa, 190 casa y computador portátil, y 105 tenían casa, automóvil y televisor. ¿Cuántos de estos empleados no cuentan con ninguna de estas propiedades? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 6.
¿De cuantas maneras podemos seleccionar 6 cartas de una baraja de Poker (la baraja tiene 52 cartas) de modo que tengamos por lo menos una carta de cada pinta? ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas? (Tomado de Un recorrido por la combinatoria I).

INICIATIVA 7.
De entre todas las cadenas de tres dígitos decimales,

a) ¿Cuántas no contienen el mismo digito tres veces?

b) ¿Cuántas comienzan con un digito impar?

c) ¿Cuántas contienen exactamente dos cuatros?

¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 8.
A un paseo a las afueras de la ciudad fueron 92 personas. 47 de ellas llevaron sándwiches de vegetales, 38 sándwiches de queso, 42 sándwiches de jamón, 28 sándwiches de queso y sándwiches de vegetales, 31 sándwiches de vegetales y sándwiches de jamón, y 26 sándwiches de queso y sándwiches de jamón. 25 personas llevaron los tres tipos de sándwiches, y varias llevaron empanadas en lugar de sándwiches. ¿Cuántas personas llevaron empanadas? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 9.
Dentro de un cuadrado de área 6 cm^2 se colocan 3 triángulos de áreas 2, 3 y 4 cm^2, respectivamente. Muestre que dos de los triángulos se traslapan en una región de área mayor o igual a 1. ¿Cómo demostraría usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de combinatoria para Olimpiadas, Nieto, 2014).

INICIATIVA 10.
Determinar el número de soluciones enteras de la ecuación $a + b + c = 2005$, donde *a, b, c* satisfacen $0 < a < b < c$. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de Un recorrido por la combinatoria I).

INICIATIVA 11.
El monitor de una clase dio los siguientes datos sobre los compañeros de curso: "En clase estudian 45 escolares, de los cuales 25 son niños. 30 escolares tienen notas de sobresaliente, entre ellos, 16 son niños. 28 alumnos practican el deporte, habiendo entre ellos 18 niños y 17 escolares que tienen notas de sobresaliente. 15 niños tienen notas de sobresaliente y al mismo tiempo practican deporte.
Al cabo de varios días el monitor fue llamado por el profesor director de curso (el cual para colmo dictaba matemáticas) quien le dijo que había un error en los datos. ¿Cuál es el error en la información dada por el monitor al profesor? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

CUARTA PARTE

INICIATIVAS DE LA SEMANA -- INICIATIVA FORO
Metodología.

1. El estudiante líder tendrá un plazo máximo de dos días (viernes y sábado) para publicar las primeras aportaciones al foro, publicando las primeras ideas en respuesta a las preguntas orientadoras. Este insumo se considerará como la apertura del foro, alrededor del cual debe comenzar la construcción de la estrategia para atacar el problema de forma colaborativa.

1. Todos los demás integrantes del grupo estarán pensando y construyendo una posible respuesta a cada una de las preguntas orientadoras que se han dado para guiar el aprendizaje colaborativo, al mismo tiempo que estarán construyendo la solución del problema propuesto, avances que deben ser consignados en la página del foro.

2. **Preguntas orientadoras.**

   2.1. Explique con sus propias palabras en que consiste el problema planteado, respondiendo a:
   - 2.1.1. ¿Qué ha comprendido usted del problema en términos de la combinatoria?
   - 2.1.2. ¿Qué interpretación hace usted de la pregunta o preguntas planteadas?
   - 2.1.3. ¿Qué estrategia o camino ve que es posible construir para resolver el problema?

   Nota: A partir de las respuestas dadas por los integrantes del grupo se debe dar el debate, concluyendo con una posible estrategia para proceder a construir la solución del problema y así dar solución a la pregunta o preguntas formuladas, debidamente consignada en la página del foro.

INICIATIVA 12.
Un número de teléfono de 7 dígitos $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$, es fácil de recordar si los dígitos iniciales $d_1d_2d_3$ son iguales a $d_4d_5d_6$ o a $d_5d_6d_7$ (o posiblemente a ambos). Hallar el número de teléfonos fáciles de recordar. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de 102 problemas de combinatoria).

Anexo 11. Actividad 8 – A8

Actividad 8 – ¿De cuántas formas?

	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	SOLUCION DE PROBLEMAS Unidad Temática: COMBINATORIA
	Subtema: Principios básicos de conteo

ombre				Edad	
ódigo		Fecha		Semestre	

Actividad 8. ¿De cuánta formas?

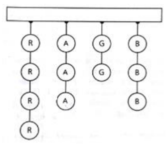
PRIMERA PARTE

INICIATIVAS DE ENTRADA

Al resolver las siguientes iniciativas, escribir su solución con todos los procedimientos y cálculos realizados debidamente argumentados.

INICIATIVA 1.

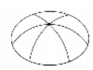
Doce platillos de forma idéntica, se ordenan en cuatro columnas verticales, como se muestra en la figura. Hay cuatro de color rojo en la primera columna, tres de color azul en la segunda columna, dos grises en la tercera columna y tres blancos en la cuarta. Para entrenar el equipo de tiro, Dora debe romper los 12 platillos de doce disparos consecutivos. Primer caso: ¿De cuantas formas puede disparar y romper los 12 platillos? Segundo caso: ¿De cuantas formas puede disparar y romper los 12 platillos, si siempre debe romper el primer platillo que queda en la parte inferior de cada columna? ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuestas son correctas?



(Adaptado de Matemáticas Discreta y Combinatoria, Grimaldi)

INICIATIVA 2.

Una gorra se hace uniendo seis piezas, todas del mismo tamaño y forma. Si cada pieza puede ser amarilla o café, ¿cuántas gorras diferentes pueden hacerse? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?



(Tomado de OCM-2011-NS)

INICIATIVA 3.

En un rectángulo de $56 \times 98\ cm$ se trazan rectas paralelas a los lados de tal manera que el rectángulo queda dividido en cuadrados. ¿Cuál es el menor número de rectas que se debe trazar para lograr la división del rectángulo en cuadrados? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?
(Tomado de OCM–2012-NS)

INICIATIVA 4.

En una urna hay fichas con los números 1, 2, 3, . . . ,10. De ellas se sacan tres fichas. ¿En cuántos casos la suma de los números escritos en ellas será igual a 9? ¿Y en cuántos será esa suma no menor que 9? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

SEGUNDA PARTE

INICIATIVAS EXTRACLASE

Objetivos.

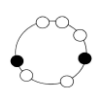
1. Identificar los conceptos involucrados en la solución de problemas de combinatoria.
2. Construir significados más amplios de los principios de conteo a través de la solución de problemas de combinatoria.
3. Interiorizar un concepto más robusto de conteo generado a partir de la aplicación de los diferentes principios de conteo en la solución de problemas.
4. Lograr la construcción de un significado más robusto del concepto de conteo construido, y que sea aplicado en los procesos de interpretar, establecer conexiones, modelar, generalizar, abstraer y simbolizar problemas matemáticos y de contexto que involucran o requieren del uso de la combinatoria para obtener su solución.
5. Generar en el estudiante el gusto por solucionar problemas retadores y no rutinarios, como método para construir sus formas de entender y formas de pensar combinatoriamente.

INICIATIVA 5.

Hay *n* puntos en el plano, entre los cuales no hay 3 sobre una misma recta, ni 4 sobre una misma circunferencia. Por cada dos de estos puntos se traza una recta, y por cada tres, una circunferencia. Hallar la mayor cantidad posible de puntos de intersección de todas las rectas trazadas con las circunferencias. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 6.

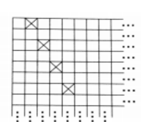
¿Cuántos collares podemos hacer usando cinco piedras rojas idénticas y dos azules también idénticas? Proponga y solucione el caso general de una situación equivalente a ésta. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?



(Tomado de Círculos Matemáticos)

INICIATIVA 7.

En un tablero de tamaño 100x100 se colocan 4 torres de ajedrez en las cuatro casillas mostradas en la figura. Las torres atacan las casillas en su misma fila o columna. Hallar el número de casillas atacadas por las 4 torres. (Tomado de OCM–2012-NS)



INICIATIVA 8.

José, el todero, fue contratado para pegar números en cada una de las puertas de 80 casas en un conjunto residencial. El comenzó a atornillar dígitos en las puertas, numerándolas de la 1 a la 80, pero se dio cuenta que ya había casas numeradas de la 1 a la 64 en el conjunto. Por lo tanto tiene que numerar las casas desde el 65 al 144. José va a reutilizar en forma eficiente los dígitos que ya había utilizado incluyendo el uso del 6 boca arriba para lograr el 9, y viceversa. Para terminar el trabajo, ¿Cuántos nuevos dígitos debe usar? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta? (Tomado de OCM–2012-PN)

TERCERA PARTE

INICIATIVAS COLABORATIVAS

INICIATIVA 9.

¿De cuántas formas se pueden escoger dos fichas de dominó, de las 28 que hay, de forma que se puedan aplicar una a la otra (es decir, que se encuentre el mismo número al menos una vez en las dos fichas)? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 10.

Se representan en el plano *n* puntos, sin haber tres colineales. Si se trazan segmentos tales que cada uno une dos a dos dichos puntos, ¿cuántos segmentos se trazarán? Trate de relacionar la ley que ha formulado con otras situaciones que ha encontrado en matemáticas. ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 11

¿Cuántos triángulos existen con lados de longitud entera y con perímetro igual a 40? ¿Y con perímetro 43? ¿Cómo convencería usted a un compañero que su respuesta es correcta?

INICIATIVA 12.

Si los lados de un triángulo pueden tener longitud 4, 5, 6 o 7, inclusive y con repetición, ¿cuántos triángulos se pueden construir? ¿Cuántos de éstos son equiláteros? ¿Cuántos de éstos son isósceles? ¿Cuántos de éstos son escalenos? Proponga un modelo para el caso general. ¿Cómo convencería usted a un compañero que sus respuesta son correctas?

Anexo 12. Diseño de clase – C1 y C2 - Actividad 1

UAN Universidad Antonio Nariño	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	ASIGNATURA______________________ Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Principios de la Suma y el Producto				
Clase 1 y 2					
Tiempo	4 horas -clase	Fecha		Semestre	
Actividad 1. APRENDIENDO A CONTAR					

Justificación.

La actividad (A1) que se ha denominado "aprendiendo a contar", tiene como propósito iniciar al estudiante en la construcción del significado de los principios fundamentales de conteo, "*los principios de la suma y del producto*", haciendo énfasis en este último ya que es la base para la construcción y conceptualización de los próximos principios de conteo que se irán desarrollando en el curso. El titulo dado a la actividad (A1) está vinculado con la iniciación de los estudiantes en el campo de la combinatoria, ya que su integridad o principio organizacional es "*el conteo*".

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se pueden presentar las aplicaciones del concepto de los principios de la suma y el producto, con el objeto de dar oportunidades a los estudiantes de desarrollar su pensamiento combinatorio y además indagar el estado del pensamiento matemático de los estudiantes frente a esta temática de trabajo, la cual para algunos casos es totalmente nueva.

La propuesta de trabajo se fundamenta principalmente en que a través de la solución de problemas, se llegue a las nuevas formas de contar, que corresponderán a los principios de la suma y el producto.

Objetivos

1)Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.

2)Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.

3)Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.

4)Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.

5)Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.

6)Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La clase uno (C1) y la actividad (A1) son de suma importancia para el desarrollo de toda la unidad didáctica construida para abordar la temática de combinatoria en estudio, ya que en éstas se hará la introducción al concepto de combinatoria enumerativa, y se iniciará la implementación de la nueva metodología de trabajo con los estudiantes, a partir de la cual se espera un cambio en los hábitos de trabajo y formas de atacar problemas matemáticos por parte de ellos, ya que se requiere que el estudiante escriba todo lo que su creatividad e imaginación producen para dar solución a cada iniciativa propuesta. Se busca hacer que reflexione sobre la importancia que tiene el escribir las soluciones de un problema, y que solucionar un problema no es solamente dar una respuesta asociada a una cantidad numérica, o a una expresión, sino que es la explicación y argumentación de todo el proceso que se llevó a cabo para lograr su solución.

La actividad (A1) se compone de catorce iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser abordada en dos clases (C1 y C2). En la primera parte de la clase (C1) se entregará a cada estudiante el material correspondiente a la primera parte de la actividad (A1), las *iniciativas de entrada*. Compuestas por cinco iniciativas, las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas, no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante. Esta labor se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cincuenta minutos. Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

En la segunda parte de la clase (C1) el profesor hará la entrega de la actividad (A1) a cada estudiante (ver actividades en formato estudiante) y la introducción sobre la nueva temática de trabajo, a partir de la exposición y explicación de la definición de combinatoria enumerativa dada por Restrepo Pascual (2010), "la combinatoria enumerativa busca contar el número de elementos de un conjunto con ciertas propiedades, lo cual concurre en encontrar su cardinal, teniendo como objetivo el -contar sin contar-, es decir poder determinar el número de elementos de un conjunto sin necesidad de tener que hacer la lista en la que se cuenten uno a uno"[1], para luego contextualizar el tipo de problemas que se había propuesto al inicio de la clase.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C1) en la cual se socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A1), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto de conteo generado por los principios de la suma y el producto. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria (principios de la suma y el producto), acercando así al estudiante a un primer contacto formal con el concepto de los principios de la suma y el producto. Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas. Además se dará de forma implícita una estrategia para abordar los problemas combinatorios enumerativos basada en conjuntos, la cual se propone como una recomendación en la estructura de la actividad. Buscando que el estudiante se apropie de la misma y la implemente durante el desarrollo del curso.

Como cuarta parte de la clase (C1) se propondrá y explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A1), las *iniciativas extraclase*. Esta tiene cinco iniciativas (de la iniciativa 6 a la 10), las cuales cada estudiante debe resolver de forma individual, para así generar en cada uno de ellos responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C2).

Para finalizar la clase (C1) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A1), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 14) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C1) y (C2), mediante la metodología de "**foro**". Para lo cual se requiere que todos estén matriculados en la plataforma de entornos virtuales de aprendizaje MOODLE de la universidad. Teniendo como objetivo que sus participantes alcancen la solución de la iniciativa propuesta como trabajo extraclase mediante la interacción virtual, por medio de la cual compartirán sus avances en pro de lograr la solución del problema plantado. Dando una respuesta debidamente argumentada a cada una de las preguntas planteadas en el mismo. A si mismo se hará la anotación que es un problema que requiere de varios momentos de trabajo, que no se debe abandonar ante la primera impresión, y que requiere ser analizado y pensado con suficiente tiempo.

La apertura del foro se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A1) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C2) se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C1). Se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas extraclase (iniciativa 6 a la 10) de esta actividad (A1), como parte de la motivación a los estudiantes por lograr desarrollar alguno de los problemas. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como segunda parte de la clase (C2), se desarrollará la tercera parte de la actividad (A1), *iniciativas colaborativas* (de la iniciativa 11 a la 13). Estas tienen como intención metodológica crear los espacios y ambientes de trabajo en equipo, para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, ya que se espera que los estudiantes sigan la heurística de Lakatos en el desarrollo de esta parte de la clase (C2). Para esto se organizarán grupos de trabajo de tres estudiantes, los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver dichas iniciativas, en un período de tiempo de aproximadamente una hora. Tiempo durante el cual el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de aproximarlos a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

Para finalizar la clase (C2) se harán sugerencias a todo el curso sobre los avances en el desarrollo la cuarta parte de la actividad (A1), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 14), la cual se debe haber venido trabajando después de la clase (C1), clase en la que se dio apertura al foro con la participación del profesor y se recordará que el cierre del mismo será hasta antes de iniciar la siguiente clase (C3), termino al cual se espera hayan alcanzado la solución del problema de forma colaborativa entre los participantes del mismo.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece que se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A1), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que

[1] Restrepo Mesa Pascual. Un Recorrido por la Combinatoria I. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño. 2010

se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo, del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A1) se promoverá la construcción del significado del concepto generado por los "*principios de la suma y el producto*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma. La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A1-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de éstas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en las nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente. Así se espera que cognitivamente se haya dado la construcción del significado de los conceptos de los principios de la suma y el producto, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. Es en ese momento en el cual se formalizará los conceptos de los principios de la suma y el producto, a partir de las nuevas o adicionales formas de entender combinatoriamente de los estudiantes, expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A1), permitiendo así al estudiante la construcción del significado de los conceptos de los principios de la suma y el producto, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada). Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos). Así se llega a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado de los conceptos de los principios de la suma y el producto) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A2), cumpliéndose en esta parte del proceso la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo). Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A1, y problemas retadores, cuarta parte de la A1), las cuales requieren que se haya dado la apropiación de los conceptos trabajados en la primera y segunda parte de la actividad. Lo anterior a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando el pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R», (componente estructural del modelo). **Evaluación** Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas,	

Anexo 13. Diseño de clase – C3 y C4 - Actividad 2

	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas
	ASIGNATURA Unidad Temática: COMBINATORIA
	Subtema: Permutaciones

Clase 3 y 4					
Tiempo	**4 horas -clase**	**Fecha**		**Semestre**	
Actividad 2. MI POSICION ES IMPORTANTE					

Justificación.

La actividad (A2) que se ha denominado "mi posición es importante" y tiene como propósito continuar promoviendo en el estudiante la construcción del significado de conteo, ahora generado a partir del concepto del principio de conteo conocido como "*permutación*", el cual toma en cuenta el orden en la ubicación de los elementos para determinar las configuraciones posibles. Es decir, en una permutación la posición de cada elemento dentro de la configuración es importante, y por ello se dio este nombre a la actividad (A2).

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se puede presentar la aplicación del concepto de permutación, con el objeto de dar oportunidades a los estudiantes de desarrollar su pensamiento combinatorio y además indagar el estado del pensamiento matemático de los estudiantes frente a esta temática de trabajo, la cual para algunos casos es totalmente nueva.

Por lo anterior se dan casos de permutación total, es decir una situación en la cual cambian de posición todos los elementos sin repetición de los mismos, y un caso particular en el cual los elementos se ubican de forma circular o alrededor de un punto de referencia.

La propuesta de trabajo es básicamente que, a través de la aplicación del principio del producto en la solución de problemas, se alcance una nueva forma de contar, que corresponde a la permutación. Lo anterior implica que el estudiante también llegue a la simplificación de cálculos mediante la utilización del $n!$ o factorial de un número natural.

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.
2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.
3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.
4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.
5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.
6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.
7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.
8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.
9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.
10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A2) se compone de trece iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C3 y C4). Iniciando la clase (C3), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A1). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C4). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones, en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa; en la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa, a éstos se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea; y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C4).

En la segunda parte de la clase (C3), se hará una reflexión acerca de la metodología utilizada en la actividad anterior (A1), en sus cuatro partes, con el objeto que los estudiantes vayan apoderándose de esta metodología, propia de la unidad didáctica construida. En seguida se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las cuatro primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A2), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas; no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen una herramienta de conteo, los principios de la suma y el producto. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos. Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C3) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A2), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto de permutación. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto), acercando así al estudiante a un primer contacto formal con el concepto de permutación. Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas. Además se resaltará la importancia de seguir las recomendaciones dadas en la actividad anterior (A1), como parte de la propuesta metodológica para abordar las iniciativas.

Finalizando la clase (C3) se hará la cuarta parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A2) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A2), la cual tiene cinco iniciativas (de la iniciativa 5 a la 9), las cuales todo el grupo de estudiantes desarrollarán como trabajo extraclase. La estrategia de asignar las mismas iniciativas a cada estudiante, es la de probar que se ha generado un cambio de actitud frente al compromiso de desarrollar una tarea de forma individual mostrando un alto grado de responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático, al presentar sus propias soluciones de cada una de las iniciativas. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C4).

Para finalizar la clase (C3) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A2), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 12) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C3) y (C4), mediante la metodología de "**foro**".

La apertura del foro 2 se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A2) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C4), se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C3). Como segunda parte de la clase (C4), se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A2) -problema no rutinario-presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dadas por los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (C4) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas extraclase (iniciativa 5 a la 8) de esta actividad (A2), como parte de la motivación a los estudiantes por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C4), se realizará la tercera parte de la actividad (A2), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo, para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes mejoren y muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C2), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 9, 10 y 11, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual, el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de aproximarlos a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

Para finalizar la clase (C4) se propondrá a todo el curso la cuarta parte de la actividad (A2), la iniciativa de la semana (Iniciativa 13), la cual tiene como objetivo proponer al estudiante un problema no rutinario y retador, el cual se desarrollará de forma individual como trabajo extraclase, haciendo la sugerencia que es un problema que requiere de varios momentos de trabajo, que no se debe abandonar ante la primera impresión, y que requiere ser analizado y pensado con suficiente tiempo. Los estudiantes deben entregar su solución al inicio de la siguiente clase (C5). En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A2), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo, del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A2) se promoverá la construcción del significado del concepto relacionado con el "*principio de la permutación*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma. La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A2-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de éstas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente. Así se espera que cognitivamente se haya dado la construcción del significado del concepto de la permutación, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. Es en ese momento en el cual se formalizará el concepto del principio de la permutación, a partir de las formas adicionales de entender combinatoriamente de los estudiantes, expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A2), permitiendo así al estudiante la construcción del significado del concepto de la permutación, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada). Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos). Así se llega a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de la permutación) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A2), cumpliéndose en esta parte del proceso, la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo).	
Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A2, y problemas retadores, cuarta parte de la A2), las cuales requieren que se haya dado la apropiación de los conceptos trabajados (incluye los de la actividad anterior). Esto a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R», (componente estructural del modelo). **Evaluación** Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la creatividad y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar. **Actividad** La actividad (A2) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 5 de este documento.	

Anexo 14. Diseño de clase – C5 y C6 - Actividad 3

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	ASIGNATURA Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Variaciones				
Clase 5 y 6					
Tiempo	4 horas -clase	Fecha		Semestre	
Actividad 3. EL INTERCAMBIO					

Justificación.

La actividad (A3) que se ha denominado "el intercambio", y tiene como propósito continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significado en conteo, ahora generado a partir del concepto del principio de conteo conocido como "*variación*", el cual se puede considerar como la particularización de algunos casos de la permutación y el principio del producto. Dándosele este nombre a la actividad (A3), el intercambio por la variedad de casos que se presentan, que dependen básicamente de la permuta, del cambio o del reemplazo de alguno de los elementos del conjunto dado.

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se puede presentar la aplicación del concepto de la variación, con el objeto de dar oportunidades a los estudiantes de desarrollar su pensamiento combinatorio y además indagar el estado del pensamiento matemático de los estudiantes frente a esta temática de trabajo, la cual para algunos casos es totalmente nueva.

Por lo anterior se dan casos de permutaciones parciales, es decir una situación en la cual sólo se tiene en cuenta el cambio de posición de los elementos de un subconjunto, sin repetición de los mismos, además de casos en los cuales los elementos del conjunto son repetidos e indistinguibles, y casos en los cuales se da la repetición de los elementos.

La propuesta de trabajo se fundamenta principalmente en que a través de la aplicación del principio del producto y de la permutación en la solución de problemas, se llegue a las nuevas formas de contar, que corresponden a las variaciones.

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.
2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.
3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.
4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.
5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.
6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.
7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.
8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.
9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.
10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A3) se compone de once iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C5 y C6). Iniciando la clase (C5), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A2). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C6). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones, en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa. En la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa o está sin concluir la solución de la iniciativa. A éstos últimos estudiantes se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea. En la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C6).

En la segunda parte de la clase (C5), se hará nuevamente la reflexión acerca de la metodología utilizada en las actividades anteriores (A1 y A2), en sus cuatro partes, con el objeto que los estudiantes mejoren en la apropiación y utilización de esta metodología, propia de la unidad didáctica construida. En seguida se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las cuatro primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A3), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas; no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen una herramienta de conteo, los principios de la suma y el producto, así como el caso particular de éste que son las permutaciones. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos. Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C5) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A3), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto de variación. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto o la permutación), acercando así al estudiante a un primer contacto formal con el concepto de variación. Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas. Además se resaltará la importancia de seguir las recomendaciones dadas en las actividades anteriores (A1 y A2), como parte de la propuesta metodológica para abordar las iniciativas.

Finalizando la clase (C5) se hará la cuarta parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A3) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A3), la cual tiene tres iniciativas (de la iniciativa 5 a la 7), las cuales todo el grupo de estudiantes desarrollará como trabajo extraclase. La estrategia de asignar las mismas iniciativas a cada estudiante es la de probar que se ha generado un cambio de actitud frente al compromiso de desarrollar una tarea de forma individual mostrando un alto grado de responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático, al presentar sus propias soluciones de cada una de las iniciativas. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C6).

Para finalizar la clase (C5) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A3), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 11) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C5) y (C6), mediante la metodología de "**foro**".

La apertura del foro 3 se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A3) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C6) se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C5). Como segunda parte de la clase (C6), se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A3) -problema no rutinario- presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dada por alguno de los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (C6) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas extraclase (iniciativa 5 a la 7) de esta actividad (A3), como parte de la motivación a los estudiante por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C6), se realizará la tercera parte de la actividad (A3), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo, para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes mejoren y muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C5), los cuales, como trabajo colaborativo, deberán resolver las iniciativas 8, 9 y 10, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual, el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de aproximarlos a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A3), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A3) se promoverá la construcción del significado del concepto relacionado con el "*principio de la variación*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma. La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A3-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de éstas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales, que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente. Así se espera que cognitivamente se haya dado la construcción del significado del concepto de la variación, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. Es en ese momento en el cual se formalizará el concepto del principio de la variación, a partir de las formas adicionales de entender combinatoriamente de los estudiantes, expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A3), permitiéndo así al estudiante la construcción del significado del concepto de variación, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada). Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos). Así se llega a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de la variación) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A3), cumpliéndose en esta parte del proceso, la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo). Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A3, y problemas retadores, cuarta parte de la A3), las cuales requieren que se haya dado la apropiación de los conceptos trabajados (incluyendo los de las actividades anteriores). Esto a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R», (componente estructural del modelo).	
Evaluación Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la creatividad y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar. **Actividad** La actividad (A3) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 6 de este documento.	

Anexo 15. Diseño de clase – C7 y C8 - Actividad 4

UAN Universidad Antonio Nariño	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	ASIGNATURA Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Combinaciones				
Clase 7 y 8					
Tiempo	4 horas -clase	Fecha		Semestre	
Actividad 4. CALCULANDO, COMBINANDO Y CONTANDO					

Justificación.

La actividad (A4) que se ha denominado "calculando, combinando y contando" y tiene como objetivo continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significado, ahora generado a partir del concepto del principio de conteo conocido como "*combinación*", el cual permitirá conocer el número de configuraciones posibles de k elementos tomados de un conjunto de n elementos, sin importar el orden en que se eligen y sin repetir elementos. El nombre dado a la actividad (A4), se asocia a la diversidad de formas en los cálculos y en las acciones que implican el combinar y el contar, durante la solución de un problema de combinaciones.

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se puede presentar la aplicación del concepto de la combinación. Por lo anterior se dan dos casos de combinaciones, una sin repetición de los elementos y otra con repetición, en los cuales se pueden seleccionar todos los elementos del conjunto a la vez, o se pueden hacer selecciones parciales por subconjuntos.

La propuesta de trabajo está basada en que a través de la aplicación de los principios del producto, de la permutación y de la variación en la solución de problemas, se llegue a las nuevas formas de contar que corresponderán a las combinaciones.

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.

2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.

3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.

4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.

5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.

6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.

7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.

8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.

9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.

10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A4) se compone de trece iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C7 y C8). Iniciando la clase (C7), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A3). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C8). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones, en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa; en la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa, a éstos se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea; y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C8).

En la segunda parte de la clase (C7), se hará nuevamente la reflexión acerca de la metodología utilizada en las actividades anteriores (A1, A2 y A3), en sus cuatro partes, con el objeto que los estudiantes mejoren en la apropiación y utilización de esta metodología, propia de la unidad didáctica construida. En seguida se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las cuatro primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A4), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas, no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen varias herramientas de conteo, los principios de la suma, el producto, la permutación y la variación. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos. Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C7) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A4), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto de combinación. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto, la permutación o la variación), acercando así al estudiante a un primer contacto formal con el concepto de combinación.

Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas. Además se resaltará la importancia de seguir las recomendaciones dadas en las actividades anteriores (A1, A2 y A3), como parte de la propuesta metodológica para abordar las iniciativas.

Finalizando la clase (C7) se hará la cuarta parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A4) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A4), la cual tiene cinco iniciativas (de la iniciativa 5 a la 9), las cuales todo el grupo de estudiantes desarrollarán como trabajo extraclase. La estrategia de asignar las mismas iniciativas a cada estudiante es la de probar que se ha generado un cambio de actitud frente al compromiso de desarrollar una tarea de forma individual mostrando un alto grado de responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático, al presentar sus propias soluciones de cada una de las iniciativas. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C8).

Para finalizar la clase (C7) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A4), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 13) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C7) y (C8), mediante la metodología de "**foro**".

La apertura del foro 4 se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A4) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C8), se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C7). Como segunda parte de la clase (C8), se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A4) -problema no rutinario- presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dada por alguno de los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (C8) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas extraclase (iniciativa 5 a la 9) de esta actividad (A4), como parte de la motivación a los estudiante por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C8), se realizará la tercera parte de la actividad (A4), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo, para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes mejoren y muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C7), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 10, 11 y 12, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual, el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de aproximarlos a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A4), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo, del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A4) se promoverá la construcción del significado del concepto relacionado con el "*principio de la combinación*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda, y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma.

La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A4-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de éstas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales, que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente. Así se espera que cognitivamente se haya dado la construcción del significado del concepto de combinación, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. Es en este momento en el cual se formalizará el concepto del principio de la combinación, a partir de las formas adicionales de entender combinatoriamente de los estudiantes, expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A4), permitiendo así al estudiante la construcción del significado del concepto de la combinación, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada).

Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos). Así se llega a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de la combinación) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A4), cumpliéndose en esta parte del proceso, la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo).

Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A4, y problemas retadores, cuarta parte de la A4), las cuales requieren que se haya dado la apropiación de los conceptos trabajados (incluyendo los de la actividades anteriores). Esto a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R», (componente estructural del modelo).

Evaluación

Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la creatividad y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar.

Actividad

La actividad (A4) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 7 de este documento.

Anexo 16. Diseño de clase – C9 y C10 - Actividad 5

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	ASIGNATURA Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Combinaciones				
Clase 9 y 10					
Tiempo	**4 horas -clase**	**Fecha**		**Semestre**	
Actividad 5. ¿PENSAMIENTO O SUERTE?					

Justificación.
La actividad (A5) que se ha denominado "¿pensamiento o suerte?" y está diseñada con el objetivo de seguir promoviendo en el estudiante la construcción de significado conteo. ,Esta es la segunda parte de la anterior actividad (A4), por lo que se continúa trabajando con concepto del principio de "*la combinación*". Aquí se pretende hacer uso de este concepto en casos más generales y complejos. El nombre dado a la actividad (A5), se asocia al acierto, o no, en la solución de un problema, la cual debe implicar la resolución de un problema bajo un fundamento matemático, y no intuitivo como en ocasiones se hace llegando con suerte a la respuesta, más no a la solución del problema.

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se puede presentar la aplicación del concepto de la combinación. La propuesta de trabajo está basada en que a través de la aplicación de los principios del producto, de la permutación, de la variación y de la combinación en la solución de problemas, se llegue a las nuevas formas de contar, que corresponderán a los principios básicos de conteo o la combinación de los mismos.

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.
2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.
3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.
4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.
5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.
6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.
7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.
8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.
9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.
10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A5) se compone de once iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C9 y C10). Iniciando la clase (C9), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A4). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C10). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones: en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa; en la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa, a éstos se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea; y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C10).

En la segunda parte de la clase (C9), se hará nuevamente la reflexión acerca de la metodología utilizada en las cuatro actividades anteriores, en sus cuatro partes, con el objeto que los estudiantes mejoren en la apropiación y utilización de esta metodología, propia de la unidad didáctica construida. En seguida se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las tres primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A5), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas, no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen varias herramientas de conteo, los principios de la suma, el producto, la permutación, la variación y un primera experiencia con la combinación. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos. Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C9) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A5), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto más robusto de combinación. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender y pensar de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto, la permutación, la variación o la misma combinación), acercando así al estudiante a un primer contacto formal con el concepto más amplio de la combinación. Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas.

Finalizando la clase (C9) se hará la cuarta parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A5) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A5). Es de anotar que a diferencia de las actividades anteriores en ésta no se darán las recomendaciones, con la intención de ver la verdadera apropiación de la metodología. Esta parte de la actividad tiene cinco iniciativas (de la iniciativa 4 a la 7), las cuales todo el grupo de estudiantes desarrollarán como trabajo extraclase. La estrategia de asignar las mismas iniciativas a cada estudiante es para evidenciar un cambio de actitud frente a la responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático, al presentar sus propias soluciones de cada una de las iniciativas. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C10).

Para finalizar la clase (C9) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A5), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 11) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C9) y (C10), mediante la metodología de "**foro**".

La apertura del foro 5 se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A5) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C10), se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C9). Como segunda parte de la clase (C10), se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A4) -problema no rutinario- presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dada por alguno de los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (C10) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas extraclase (iniciativa 4 a la 7) de esta actividad (A5), como parte de la motivación a los estudiante por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C10), se realizará la tercera parte de la actividad (A5), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo, para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes mejoren y muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente en (C9), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 8, 9, y 10, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual, el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de aproximarlos a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A5), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo, del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A5) se promoverá la construcción de un significado más robusto del concepto relacionado con el "*principio de la combinación*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda, y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma.

La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A5-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de estas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales, que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente. Así se espera que cognitivamente se haya dado la construcción del significado del concepto de combinación, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. Es en este momento en el cual se formalizarán nuevas propiedades del concepto de combinación, a partir de las formas adicionales de entender combinatoriamente, de los estudiantes, expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A5), permitiendo así al estudiante la construcción del significado del concepto de la combinación, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada).

Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos). Así se llega a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de la combinación) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A5), cumpliéndose en esta parte del proceso, la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo).

Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A5, y problemas retadores, cuarta parte de la A5), las cuales requieren que se actividades anteriores). Esto a su vez mostrará la haya dado la apropiación de los conceptos trabajados (incluyendo los de la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R», (componente estructural del modelo).

Evaluación

Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la creatividad y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar.

Actividad

La actividad (A5) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 8 de este documento.

Anexo 17. Diseño de clase – C11 y C12 - Actividad 6

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	ASIGNATURA Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Teorema del Binomio				
Clase 11 y 12					
Tiempo	4 horas -clase	Fecha		Semestre	
Actividad 6. TRIANGULOS ARITMETICOS					

Justificación.

La actividad (A6) que se ha denominado "Triángulos aritméticos" tiene el propósito de continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significados en conteo, ahora generado a partir de los conceptos relacionados con el *Teorema del Binomio* y sus propiedades, ya que en su desarrollo se encuentran propiedades asociadas al conteo, interpretadas desde el valor de los coeficientes y de los exponentes de cada variable que conforman cada uno de los términos de la expansión binomial. Además estos resultados están asociados al conocido Triángulo de Pascal y a otras organizaciones triangulares que se pueden hacer con los valores de los coeficientes binomiales, también llamados números combinatorios; de ahí el nombre dado a la actividad (A6).

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se pueden presentar las aplicación de las propiedades del desarrollo del teorema del binomio al conteo. Por lo anterior se propondrán casos que se pueden resolver con otros conceptos conteo, con el objeto de ver una nueva forma de interpretación de los resultados con ayuda del teorema del binomio, siendo ésta la propuesta de trabajo en la actividad (A6).

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.
2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.
3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.
4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.
5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.
6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.
7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.
8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.
9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.
10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A6) se compone de once iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C11 y C12). Iniciando la clase (C11), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A5). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C12). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones, en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa; en la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa, a quienes se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea; y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C12).

En la segunda parte de la clase (C11) se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las tres primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A6), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas, no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen varias herramienta de conteo. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos.

Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Es de aclarar que para esta parte de la clase (C11) no se realizará la reflexión acerca de la metodología, porque se espera que ya haya sido apropiada por los estudiantes. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C11) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A6), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto combinatorio implícito en el desarrollo del teorema del binomio. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto, la permutación, la variación o la combinación), acercando así al estudiante a la construcción inicial del significado del concepto de conteo asociado al teorema del binomio y los números combinatorios. Además se enfatizará en las condiciones cómo se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo modelos ideados por los estudiantes u otros modelos matemáticos conocidos para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas.

Finalizando la clase (C11) se hará la cuarta parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A6) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A6), la cual tiene cuatro iniciativas (de la iniciativa 5 a la 8), las cuales todo el grupo de estudiantes desarrollará como trabajo extraclase. La estrategia de asignar las mismas iniciativas a cada estudiante es la de evidenciar un cambio de actitud frente al compromiso de desarrollar una tarea de forma individual, dejando ver su grado de responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático al presentar sus propias soluciones de cada una de las iniciativas. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C12).

Para finalizar la clase (C11) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A2), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 12) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C11) y (C12), mediante la metodología de "**foro**".

La apertura del foro 6 se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A6) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C12) se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C11). Como segunda parte de la clase (C12), se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A6) -problema no rutinario- presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dada por alguno de los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (12) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas extraclase (iniciativa 5 a la 8) de esta actividad (A6), como parte de la motivación a los estudiantes por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C12), se realizará la tercera parte de la actividad (A6), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C11), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 9, 10 y 11 en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual, el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de sembrar inquietudes que les permite aproximarse a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A6), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo, del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a comenzar la construcción de su significado. En la actividad (A6) se promoverá la construcción del significado de conteo generado por la aplicación del "*Teorema del binomio*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda, y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma.

La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A6-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de éstas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones

mentales que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente, esperándose que cognitivamente se haya dado la construcción del significado del concepto de conteo asociado al teorema del binomio, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. En este momento se formalizará el concepto de conteo implícito en del desarrollo del teorema del binomio, a partir de las formas adicionales de entender combinatoriamente de los estudiantes expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A6), permitiendo así al estudiante en la construcción del significado de los conceptos de conteo asociados al teorema del binomio, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada). Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos), llegándose a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de conteo asociado al teorema del binomio) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A6), cumpliéndose en esta parte del proceso, la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo). Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A6, y problemas retadores, cuarta parte de la A6), las cuales requieren que se haya dado la apropiación de los conceptos trabajados (incluyendo los de la actividades anteriores), lo que a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R» (componente estructural del modelo). **Evaluación** Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la creatividad y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar. **Actividad** La actividad (A6) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 9 de este documento.	

Anexo 18. Diseño de clase – C13 y C14 - Actividad 7

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO	FACULTAD DE CIENCIAS Departamento de Matemáticas				
	ASIGNATURA Unidad Temática: COMBINATORIA				
	Subtema: Principio de Inclusión-Exclusión				
Clase 13 y 14					
Tiempo	4 horas -clase	Fecha		Semestre	
Actividad 7. ¿CUANTAS VECES ME CUENTAN?					

Justificación.

La actividad (A7) que se ha denominado "¿Cuántas veces me cuentan?" tiene el propósito de continuar promoviendo en el estudiante la construcción de significados en conteo, ahora generada a partir de los conceptos involucrados en el "*principio de inclusión-exclusión*". Este principio le permitirá tener una herramienta para contar los elementos de las intersecciones de dos o más conjuntos, lográndose así obtener el cardinal de la unión. En este proceso, de forma práctica, lo que ocurre es que se debe conocer cuántas veces se incluye un elemento, para luego ser excluidas las repeticiones del conteo, de modo que ningún elemento sea incluido más de una vez en el conteo. Lo anterior ha inspirado el nombre que se ha dado a la actividad (A7).

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se pueden presentar las aplicaciones del principio de inclusión - exclusión, siendo ésta la propuesta de trabajo en la actividad (A7).

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.
2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.
3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.
4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.
5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.
6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.
7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.
8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.
9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.
10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A7) se compone de once iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C13 y C14). Iniciando la clase (C13), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A6). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C14). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones: en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa; en la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa, a éstos se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea; y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C14).

En la segunda parte de la clase (C13) se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las tres primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A7), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas; no se colocará ningún título o temática relacionada con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen varias herramienta de conteo. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos.

Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Es de aclarar que para esta parte de la clase (13) no se realizó la reflexión acerca de la metodología, porque se espera que ya haya sido apropiada por los estudiantes. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C13) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A7), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto combinatorio implícito en la aplicación del principio de inclusión-exclusión. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto, la permutación, la variación, la combinación y el teorema del binomio), acercando así al estudiante a la construcción inicial del significado del concepto de conteo asociado al principio de inclusión-exclusión. Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas.

Finalizando la clase (C13) se hará la cuarta parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A7) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A7), la cual tiene cuatro iniciativas (de la iniciativa 5 a la 7), las cuales todo el grupo de estudiantes desarrollarán como trabajo extraclase. La estrategia de asignar las mismas iniciativas a cada estudiante es la de evidenciar un cambio de actitud frente al compromiso de desarrollar una tarea de forma individual, dejando ver su grado de responsabilidad y compromiso por el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático al presentar sus propias soluciones de cada una de las iniciativas. Su solución se debe presentar y entregar al inicio de la clase (C14).

Para finalizar la clase (C13) se propondrá y explicará todo el curso la cuarta parte de la actividad (A7), la *iniciativa de la semana* -Iniciativa Foro- (Iniciativa 12) y su metodología. Esta iniciativa es un problema no rutinario y retador para desarrollar de forma colaborativa entre los estudiantes del curso durante la semana de las clases (C13) y (C14), mediante la metodología de "**foro**".

La apertura del foro 7 se dará con la primera participación que se registre en la plataforma por parte de algún estudiante de forma voluntaria, quien dará las primeras respuestas a las preguntas orientadoras. Esto se realizará mediante contestación directa en la plataforma o mediante archivos adjuntos, de imágenes o documentos en los que muestre sus avances. El propósito es que todos los participantes del foro analicen esta posible solución, generando así las primeras conjeturas alrededor de la solución presentada, la cual puede ser refutada o aceptada por los demás, dando su respectiva justificación mediante su participación, la cual quedará evidenciada en la plataforma como una participación del estudiante en el foro. Se espera y así se le hará saber al curso que al menos una vez cada dos días, cada estudiante esté participando en el foro. Igualmente, cada vez que se presente en el curso una nueva participación ésta debe ser revisada y comentada por los demás integrantes del curso, con su respectiva justificación basada en argumentos combinatorios, generados a partir de las formas de entender y de pensar maduradas durante el proceso de desarrollo de las tres primeras partes de la actividad (A7) realizadas en la clase presencial.

La intención es que los estudiantes estén activos y motivados por conseguir la solución de la iniciativa durante la semana que estará abierto el foro, realizando nuevas aportaciones, aclarando otras y aceptando o refutando la de los demás colaboradores de una forma asincrónica, haciendo posible que las aportaciones y participaciones de los miembros del grupo permanezcan en el tiempo a disposición de todos.

Se espera que durante el desarrollo del foro se dé un suficiente y amplio intercambio de información mediante debates o comunicaciones que serán socializados y evidenciados, desde una simple petición de ayuda sobre el concepto implícito en la solución del problema, hasta la inclusión de textos o contenidos concretos, citas textuales referidas al concepto tratado, pasando por la aportación de una referencia bibliográfica o electrónica donde se trate el tema, inclusión de imágenes o videos, etc. Asimismo se aclara que una función fundamental del foro virtual es constituirse en un espacio de intercambio de conocimientos y experiencias, posibilitando el trabajo y el aprendizaje colaborativo a partir de lo que yo y otros hacemos, enriqueciendo a los demás con lo que hacemos.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C14) se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C13). Como segunda parte de la clase (C14) se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A6) -problema no rutinario- presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dada por alguno de los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (C14) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas (iniciativa 5 a la 7) de esta actividad (A7), como parte de la motivación a los estudiantes por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C14), se realizará la tercera parte de la actividad (A7), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes mejoren y muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C13), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 8, 9, 10 y 11, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de sembrar inquietudes que les permite aproximarse a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A7), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A7) se promoverá la construcción del significado del concepto generado por la aplicación del principio de "*inclusión-exclusión*". Este componente estructural del modelo implica la búsqueda y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma.

La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A7-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de estas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones

10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A7) se compone de once iniciativas, distribuidas en cuatro partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C13 y C14). Iniciando la clase (C13), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A6). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C14). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones: en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa; en la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa, a éstos se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea; y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C14).

En la segunda parte de la clase (C13) se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las tres primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A7), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas; no se colocará ningún título o temática relacionada con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante, recordando que ya tienen varias herramienta de conteo. Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto), para lo cual se dispondrá de cuarenta minutos.

Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Es de aclarar que para esta parte de la clase (13) no se realizó la reflexión acerca de la metodología, porque se espera que ya haya sido apropiada por los estudiantes. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Así se pasará a la tercera parte de la clase (C13) en la cual se contextualizarán y socializarán las iniciativas de entrada de la Actividad (A7), presentando primero la solución acertada de algún estudiante, con el fin de ir generando debate y participación argumentada, lo que conllevará a formar conjeturas entre ellos. Estas serán el instrumento que permitirá al estudiante la construcción inicial del concepto combinatorio implícito en la aplicación del principio de inclusión-exclusión. Luego se harán los análisis de los procesos y resultados de cada solución, con lo cual se espera comenzar a formalizar las formas de entender de los estudiantes, ya que éstos se realizarán desde un argumento teórico de la combinatoria trabajado anteriormente (principio del producto, la permutación, la variación, la combinación y el teorema del binomio), acercando así al estudiante a la construcción inicial del significado del concepto de conteo asociado al principio de inclusión-exclusión. Además se enfatizará en las condiciones en las cuales se pueden presentar los casos, y qué es lo que hace diferente un caso de otro, proponiendo los modelos correctos usados por los estudiantes, así como otros modelos matemáticos existentes para sus cálculos, los cuales se verificarán con la solución de las iniciativas presentadas.

El profesor estará moderando y administrando del foro, estando pendiente de recordar la participación a cada estudiante cuando éste no cumpla con el tiempo mínimo dado para su participación, de igual forma hará comentarios de crecimiento, que les permita evolucionar a los estudiantes en la consecución de la solución del problema.

La primera parte de la clase (C14) se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C13). Como segunda parte de la clase (C14) se hará la socialización de la parte cuatro de la actividad (A6) -problema no rutinario- presentando una de las más creativas e innovadoras soluciones dada por alguno de los estudiantes a dicho problema.

En la tercera parte de la clase (C14) se promoverá la discusión de las soluciones de cada una de las iniciativas (iniciativa 5 a la 7) de esta actividad (A7), como parte de la motivación a los estudiantes por lograr desarrollar alguno de los problemas; esto se hará mediante exposiciones de los estudiantes. Lo anterior se prevé desarrollar en 45 minutos o menos.

Como cuarta parte de la clase (C14), se realizará la tercera parte de la actividad (A7), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes mejoren y muestren mayor apropiación de la heurística de Lakatos y revelen avances significativos en la interiorización de los conceptos trabajados hasta el momento. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C13), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 8, 9, 10 y 11, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos, haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de sembrar inquietudes que les permite aproximarse a la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las tres iniciativas propuestas.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las cuatro partes de la actividad (A7), los cuales están relacionados por la estrategia de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Esta a su vez está directamente asociada al tópico o concepto de conteo del cual se pretende que los estudiantes trabajen en clase y lleguen a la construcción de su significado. En la actividad (A7) se promoverá la construcción del significado del concepto generado por la aplicación del principio de "*inclusión-exclusión*".

Este componente estructural del modelo implica la búsqueda y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma.

La implementación comienza con la proposición de las iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A7-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de estas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales, que conformarán las nuevas formas de entender combinatoriamente, las cuales, mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en las nuevas o adicionales formas de pensar combinatoriamente, esperándose que cognitivamente se haya dado la construcción del significado del concepto de inclusión-exclusión, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas. En este momento se formalizará el concepto del principio de inclusión-exclusión, a partir de las formas adicionales de entender combinatoriamente, de los estudiantes expresadas en la solución de las iniciativas de entrada (primera parte de la A7), permitiendo así al estudiante en la construcción del significado del concepto de conteo asociado al principio de inclusión-exclusión, a partir de su propia experiencia (solución empírica dada por los estudiantes a las iniciativas de entrada).

Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de entender y pensar estructuradamente (procesos cognitivos), llegándose a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo), es decir, que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de conteo asociado al principio de inclusión-exclusión) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas de la segunda parte de la A7), cumpliéndose en esta parte del proceso, la primera etapa del modelo, es decir que se ha alcanzado el resultado «R», (componente estructural del modelo).

Para continuar con el proceso se inicia con la segunda etapa del modelo, la cual se da con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las iniciales (problemas en otras áreas, tercera parte de la A7, y problemas retadores, cuarta parte de la A7), las cuales requieren que se haya dado la apropiación de los conceptos trabajados (incluyendo los de la actividades anteriores), lo que a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R» (componente estructural del modelo).

Evaluación

Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la responsabilidad, cumplimiento, asistencia y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar.

Actividad

La actividad (A7) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 10 de este documento.

Anexo 19. Diseño de clase – C15 y C16 - Actividad 8

	FACULTAD DE CIENCIAS **Departamento de Matemáticas**				
	ASIGNATURA **Unidad Temática: COMBINATORIA**				
	Subtema: Principios básicos de conteo				
Clase 15 y 16					
Tiempo	**4 horas -clase**	**Fecha**		**Semestre**	
Actividad 8. ¿DE CUANTAS FORMAS…?					

Justificación.

La actividad (A8), que se ha denominado "¿De cuántas formas…?", tiene el propósito de hacer una revisión del grado de apropiación de los conceptos de conteo desarrollados en cada una de las actividades anteriores por parte de los estudiantes, evidenciando así su construcción de significados en conteo. A la actividad (A8) se la ha dado este nombre por la forma de pensar combinatoriamente, que implican replantear las diferentes situaciones, en términos de preguntar ¿de cuántas formas…?

En esta actividad se propondrán una serie de iniciativas (problemas), combinadas entre problemas de contexto y matemáticos, con diferentes grados de dificultad, y con variedad en la forma cómo se pueden presentar los principios básicos de conteo, siendo ésta la propuesta de trabajo en la actividad (A8).

Objetivos

1) Identificar las formas cómo los estudiantes caracterizan un elemento del nuevo conjunto que se quiere contar, a partir de las condiciones dadas.
2) Identificar cómo los estudiantes describen la configuración (ordenación, arreglo, forma, manera, disposición, conformación, alineación) que caracteriza a los elementos del nuevo conjunto cuyo cardinal se quiere conocer.
3) Reconocer las formas naturales cómo los estudiantes interpretan y entienden el "conteo" implícito en la solución de un problema.
4) Identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes para representar las configuraciones (elementos del nuevo conjunto), y cómo a partir de éstas realizan el conteo.
5) Promover en el estudiante el uso de la síntesis para reescribir un enunciado.
6) Interpretar los procedimientos operacionales realizados por los estudiantes, conducentes a ser formalizados en principios de conteo.
7) Orientar al estudiante en la solución de problemas generales mediante el uso del razonamiento inductivo u otro recurso del pensamiento.
8) Causar en el estudiante la necesidad de crear modelos que representen la generalización de los conteos.
9) Interpretar cómo las formas de entender evolucionan e influyen en las formas de pensar combinatoriamente en el estudiante, y así evidenciar los procesos y/o técnicas formales o informales implícitas en la solución de problemas del análisis combinatorio.
10) Interpretar cómo las formas de pensar combinatoriamente impactan el entendimiento en el estudiante, y así evidenciar la construcción de significado de conceptos propios del análisis combinatorio.

Metodología

La actividad (A8) se compone de diez iniciativas, distribuidas en tres partes, las cuales están diseñadas para ser desarrolladas en dos clases (C15 y C16). Iniciando la clase (C15), en su primera parte, se pedirá a los estudiantes la entrega de sus soluciones a la iniciativa de la semana, cuarta parte de la actividad (A7). Dado que este problema se ha considerado no rutinario, se indicará que después de ser revisadas se socializarán los resultados al inicio de la clase (C16). De esta revisión se espera que se presenten tres situaciones; en la primera situación estarán los estudiantes que hayan desarrollado y solucionado completamente la iniciativa. En la segunda situación estarán los estudiantes que presentaron buenas ideas, pero que aún no han alcanzado la solución completa, o está sin concluir la solución de la iniciativa; a éstos se les darán sugerencias para continuar desarrollando la idea. Y en la tercera situación estarán aquellos que no presentaron ningún avance significativo en la solución del problema. A los estudiantes de las dos últimas situaciones se les harán las recomendaciones necesarias para que continúen pensando en la solución del problema, y se les pedirá que presenten sus avances al inicio de la siguiente clase (C16).

En la segunda parte de la clase (C15) se entregará a cada estudiante una hoja con la impresión de las cuatro primeras iniciativas (iniciativas de entrada) de la actividad (A8), las cuales solamente tendrán un encabezado en el que se pide resolver las iniciativas; no se colocará ningún título o temática relacionada, con el objetivo de evitar sesgos y dejar pensar libremente al estudiante. Además estas iniciativas serán variadas en cuanto al principio de conteo que se requiere para su solución y al orden en que dichos principios se desarrollaron en las actividades anteriores.

Este trabajo se realizará individualmente y sin ningún tipo de ayuda o colaboración entre un estudiante y otro, o consultas al profesor (excepto para asegurar que los estudiantes hayan entendido el problema propuesto). La metodología llevada hasta el momento se cambiará, ahora se pedirá a los estudiantes que solucionen la iniciativa 1; para lo cual se darán 10 minutos. Finalizado el tiempo se socializará su solución, indicando a un estudiante que haya realizado una solución correcta que la presente a sus compañeros, para luego hacer un análisis de los procesos y resultados presentados por los estudiantes en la solución a este problema. Se finalizará esta pequeña intervención con sugerencias de cómo resolver la misma iniciativa por otros caminos, que implican el uso de otros conceptos combinatorios, y así evidenciar la apropiación y construcción del significado de los principios básicos de conteo. De igual forma se continuarán desarrollando las demás iniciativas de entrada.

Durante este tiempo el profesor estará monitoreando los avances realizados por los estudiantes con el objeto de ver sus formas de proceder e ir recogiendo argumentos para la socialización. Cumplido el tiempo se recogerá el material producido.

Finalizando la clase (C15) se hará la segunda parte de la clase, en la cual se entregará el material físico de (A8) (ver actividades en formato estudiante), y se explicará la metodología de trabajo de la segunda parte de la actividad (A8).

La primera parte de la clase (C16) se iniciará con la recepción de la tarea propuesta en la clase (C15).

Como segunda parte de la clase (C16), se realizará la tercera parte de la actividad (A8), iniciativas colaborativas, las cuales tienen como intención metodológica crear espacios y ambientes de trabajo en equipo, para generar en los diferentes grupos de estudiantes la discusión, la cooperación y la participación en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento combinatorio, esperando que los estudiantes hayan apropiado la heurística de Lakatos e interiorizado los conceptos combinatorios trabajados en todas las actividades anteriores. Para esto se organizarán los mismos grupos de trabajo de tres estudiantes, designados anteriormente (C15), los cuales como trabajo colaborativo deberán resolver las iniciativas 9, 10, 11 y 12, en un período de tiempo de aproximadamente una hora, tiempo durante el cual el profesor estará monitoreando el trabajo en cada uno de los grupos y haciendo preguntas a los estudiantes según las situaciones que se van observando en el desarrollo de las mismas, con el objetivo de sembrar inquietudes que les permite aproximarse la construcción de conceptos combinatorios implícitos en las iniciativas. Durante todo el proceso se realizará una videograbación de la clase, y algún video individual observando las formas de proceder de los estudiantes durante la solución de las diferentes iniciativas.

Se espera que el tiempo dado para la actividad sea suficiente, lográndose que cada grupo alcance el desarrollo de las cinco iniciativas propuestas. No se realizará socialización ya que se espera que cada grupo de trabajo alcance la solución de las iniciativas.

Finalizando la clase (C16) se hará la tercera parte de la clase, en la cual se entregará un instrumento a cada estudiante, para que evalué la experiencia con la metodología de enseñanza aprendizaje que se ha llevado en el tratamiento de principios básicos de conteo, que se empleó en el desarrollo de las ocho actividades que conformaron la unidad didáctica elaborada para trabajar esos principios básicos. Así se da por terminado este módulo. Además se realizarán en una programación posterior algunas entrevistas que permitirán soportar los resultados de la experiencia.

En este sentido se cumple con la metodología planteada en el modelo didáctico propuesto, el cual establece se debe iniciar con la proposición de las iniciativas «I», que para este caso son los diferentes problemas que se proponen a los estudiantes en las tres partes de la actividad (A8), los cuales están relacionados por alguna de las estrategias de conteo que se anticipa se requiere para su solución. Estas iniciativas a su vez está directamente asociada a los tópicos o conceptos de conteo desarrollados en las anteriores actividades (A1 a A7), esperando de esta manera que los estudiantes evidencien la construcción de significado en conteo y apropiación de los mismos, como nuevas herramientas de pensamiento matemático. Este componente estructural del modelo implica la búsqueda, y adaptación de los problemas matemáticos y de contexto que permitirán provocar en el estudiante la necesidad intelectual al respecto, es decir, generar el interés y motivación por construir la solución del problema y los conceptos combinatorios implícitos en la misma.

La implementación se dará desde la segunda etapa del modelo, ya que se espera que con el trabajo realizado en las anteriores actividades se haya alcanzado completamente la primera etapa del modelo, el resultado «R». De esta forma se comienza con la proposición de nuevas iniciativas, variadas y más complejas que las propuestas en las actividades anteriores, como iniciativas de entrada «I», (componente estructural del modelo, -problemas de la primera parte de la A8-), las cuales serán el instrumento generador de la causa o causas «C», (componente estructural del modelo), y a partir de éstas se formarán y emergerán las suficientes y variadas acciones mentales, que conformarán las primeras formas de pensar combinatoriamente, las cuales mediante la metodología de solución de problemas y la estructura metodológica de Lakatos – el Cuasiempirismo -, deben alcanzar su estado de maduración, transformándose en las nuevas formas de entender combinatoriamente. Así se espera que cognitivamente se haya dado la construcción del significado de los diferentes conceptos de conteo, y se llegue a la consecuencia «C», (componente estructural del modelo), es decir que se alcance la solución de las diferentes iniciativas propuestas.

Este proceso se dará según las capacidades y habilidades de los estudiantes para orientar y organizar «O», (componente estructural del modelo) sus formas de pensar y entender estructuradamente (procesos cognitivos). Así se llega a alcanzar su interiorización «I» (componente estructural del modelo) de los diferentes conceptos de conteo, es decir que se evidencie el uso de este nuevo conocimiento (el significado del concepto de los diferentes principios de conteo) en el desarrollo de iniciativas nuevas, (problemas retadores, segunda parte de la A8, y problemas en otras áreas, tercera parte de la A8). Esto a su vez mostrará la construcción de un significado más robusto de los conceptos combinatorios, ya que se estará desarrollando un pensamiento matemático desde las formas de pensar combinatoriamente, a nuevas formas de entender combinatoriamente, en diferentes situaciones y contextos, completándose así, la segunda etapa del modelo, la etapa de la réplica «R» (componente estructural del modelo).

Evaluación

Este componente tiene como objetivo hacer un proceso de reflexión con el estudiante, en el cual, él o ella ha de evidenciar sus niveles de apropiación del conocimiento, sus capacidades y habilidades para solucionar problemas de combinatoria, sus competencias para argumentar y justificar las soluciones y respuestas dadas a las iniciativas, logrando así consolidar una nueva forma de pensar matemáticamente, al desarrollar el pensamiento combinatorio. El análisis de los resultados descritos en el anterior proceso será el insumo para dar un reporte cualitativo a los estudiantes en cuanto a sus avances en el proceso de aprendizaje de los nuevos conceptos de combinatoria, y el informe cuantitativo estará sujeto a la creatividad y calidad en la solución de cada una de las iniciativas propuestas. Se busca valorar lo que el estudiante ha podido hacer en lugar de castigar lo que no logró desarrollar.

Actividad

La actividad (A8) que se presenta a los estudiantes se puede ver en el anexo 11 de este documento.

Anexo 20. Consentimiento Informado para Estudiantes

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

COMUNICADO

DE: Docente Investigador JOSE CIRO ANZOLA CALDAS
PARA: Estudiantes del curso SOLUCION DE PROBLEMAS, Grupo 7, Jornada Nocturna, Sede SUR.
FECHA: Bogotá, Septiembre de 2016

Cordial saludo.

El proyecto de investigación "Caracterización del pensamiento combinatorio", es liderado por José Ciro Anzola Caldas, estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en el marco del desarrollo de su tesis doctoral. En este sentido para hacer realidad esta investigación y tomar un horizonte que permita dar solución parcial o total al problema planteado, se ha fijado como objetivo "*lograr la caracterización del pensamiento combinatorio implícito en la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto, y en la correspondiente elaboración de significado de los conceptos del análisis combinatorio, en estudiantes que están en la transición del pensamiento concreto al abstracto*". Proceso que se llevará a cabo durante el desarrollo de las clases de matemáticas en el contexto de solución de problemas en las cuales se construya significado de los conceptos fundamentales de la combinatoria, en particular, el concepto de **"*conteo*"**.

Dado lo anterior, y en su condición de estudiante activo del curso de Solución de Problemas, usted se considera participe de dicha investigación. Motivo por el cual se le solicita su valiosa colaboración, participación y compromiso en el desarrollo de la misma.

Si usted accede a participar, se le pedirá a lo largo del semestre, además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las entrevistas semiestructuradas serán grabadas en audio. Además se realizaran video grabaciones de todas las clases en las que se desarrollara la investigación, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que sean expresado.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Sus respuestas a los instrumentos y a las entrevistas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación en él. También, puede retirarse en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parece incómoda, tiene derecho de informarlo al investigador, incluso puede no responderlas.

Agradecemos su sincera participación.

Doctorado en Educación Matemática

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Yo ____ estudiante de Ingeniería _________________________________ de la Universidad Antonio Nariño, identificado con el código _____________________ acepto participar voluntariamente en el estudio "Caracterización del pensamiento combinatorio", liderado por el docente investigador José Ciro Anzola Caldas.

Me han informado que el objetivo general del estudio es "*lograr la caracterización del pensamiento combinatorio implícito en la solución de problemas significativos, matemáticos y de contexto, y en la correspondiente elaboración de significado de los conceptos del análisis combinatorio, en estudiantes que están en la transición del pensamiento concreto al abstracto*".

También me han informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso de Solución de Problemas, debo responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las entrevistas semiestructuradas serán grabadas en audio. Además se realizaran video grabaciones de todas las clases en las que se desarrollara la investigación, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que sean ha expresado.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto puedo contactar al docente investigador José Ciro Anzola Caldas a través del correo janzola@uan.edu.co.

En constancia firmo a los ____ días del mes de _____________ de 2016.

Doctorado en Educación Matemática

Anexo 21. Encuesta para Estudiantes

UAN
UNIVERSIDAD
ANTONIO NARIÑO

ENCUESTA

Nombre		Fecha	

El presente instrumento tiene como propósito evaluar la experiencia realizada durante el curso de Solución de Problemas, de la cual usted hizo parte como estudiante activo del curso, en la que se aplicó una estrategia metodológica para la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria enumerativa a través de la solución de problemas con el objetivo de hacer avances en la caracterización del pensamiento combinatorio.

Terminado el curso y la implementación de la unidad, solicitamos a usted diligenciar la presente encuesta de impacto de la experiencia en su proceso de formación, para lo cual se requerirá de su honestidad y las más asertivas opiniones.

Evalué cada ITEMS. Marcando con una X en el cuadro la escala de valoración.

ITEMS	FUERTAMENT E DE ACUERDO	DE ACUERD O	NI DE ACUERDO NI EN DESACUERD O	EN DESACUERD O	FUERTEMENT E EN DESACUERDO
1. La metodología contribuyó significativamente a mi formación en la resolución de problemas.					
2. La metodología del curso me permitió dominar nuevos conceptos de la combinatoria.					
3. Me sentí motivado por los problemas					
4. Me sentí retado por los problemas					
5. La interacción con mis compañeros me permitió avanzar en la solución de los problemas					
6. El pensamiento combinatorio desarrollado en el curso me aportó en la comprensión de otros campos de la matemática y de mi quehacer profesional					

7. Explique cuál es el concepto de "conteo" que usted tiene ahora, después de terminado el curso.

____
____
____
____
____
____

Doctorado en Educación Matemática

8. Explique qué aportes significativos le deja este curso frente a:

Lo personal

Su rol como estudiante

Sus formas de entender y sus formas de pensar matemáticamente.

COMENTARIOS Y OBSERVACIONES