UN MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA LINEAL CENTRADO EN EL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN CARRERAS DE INGENIERÍA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Tesis en opción al título de doctor en Educación Matemáticas

Orlando García Hurtado

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

BOGOTÁ D.C

2017

UN MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA LINEAL CENTRADO EN EL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Orlando García Hurtado

Tesis presentada como requisito parcial al título de Doctor en Educación Matemática

Director de tesis: Dr. Mauro García Pupo

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

BOGOTÁ D.C

2017

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre 15 de 2017

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Mauro García Pupo, por sus orientaciones en el desarrollo de este trabajo.

A la Dra. Mary Falk de Losada, por sus valiosas recomendaciones y aportes a los problemas aplicados.

Al cuerpo de profesores de la Universidad Antonio Nariño, por sus valiosos aportes y formación.

A la Universidad Distrital por toda la colaboración prestada para el desarrollo de esta investigación.

DEDICATORIA

A Dios, fundamental en todas las etapas de mi vida.

A mis padres: Luisa Eugenia de García y Jesús Antonio García (Q.E.P.D.).

A mis hijas: Gabriela y Luisa.

A mis hermanos.

A mi esposa.

SÍNTESIS

Se propone una estrategia metodológica para la enseñanza del álgebra lineal en carreras de ingeniería centrada en el razonamiento plausible, conceptos desarrollados por Polya (1966) y Lakatos (1978), a través de la formulación y adaptación de problemas interesantes cuyos diseños admitan un modelo didáctico y un procedimiento metodológico para la generación de conjeturas a través de la mediación de la tecnología y la visualización geométrica como factores fundamentales en la construcción de los principales conceptos por parte de los estudiantes y que caracterizan esta disciplina.

Este trabajo está motivado por las insuficiencias que presentan los estudiantes de estas carreras para el aprendizaje del álgebra lineal; por ello que se plantea esta investigación y se informa su diseño.

Las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal se vienen investigando desde el pasado siglo, en particular en la década de los noventas; es referente el grupo LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group) en los Estados Unidos. Por otra parte, Anna Sierpinska y Jean-Luc Dorier lideran otro grupo en Canadá y Europa. Ambos grupos coinciden que uno de los grandes problemas en la enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal es el enfoque formal de las clases que tradicionalmente se imparte. Por tanto, es el punto de partida de este estudio que estudiantes de primer o segundo semestre experimentan gran dificultad en asimilar las definiciones, teoremas y demostraciones, las que resultan poco asequibles para los futuros ingenieros.

ABSTRACT

This thesis proposes a methodological strategy for teaching linear algebra for engineering students centered on conjecturing and plausible reasoning, concepts developed by Polya (1966) and Lakatos (1978), and is based on formulating and adapting interesting problems whose design admits a didactic model and a methodological procedure for the generation of conjectures mediated by technology and geometric visualization as fundamental factors in the construction by students of the main concepts that characterize this discipline.

This work is motivated by the inadequacies that students in these fields manifest in the learning of linear algebra which lead to this research and inform its design.

The difficulties of the teaching and learning of linear algebra have been the object of research since the last century, particularly in the nineties, and the LACSG group (Linear Algebra Curriculum Study Group) is a reference in the United States. On the other hand, Anna Sierpinska and Jean-Luc Dorier lead another group in Canada and Europe. Both groups agree that one of the great problems in the teaching and learning of Linear Algebra is the formal approach of the classes as it is traditionally taught. Therefore, it is the point of departure of this study that students of first or second semester experience great difficulty assimilating its definitions, theorems and proofs which are not easily acquired by future engineers.

INDICE PÁGINA

INTRODUCCIÓN

En los cursos de matemáticas que se imparten en el nivel superior no existen muchos espacios que permitan el desarrollo de un razonamiento plausible para desarrollar las clases. Una reflexión acerca de esta situación y de su importancia dentro de la educación matemática ha sido referida por Gascón (2000). Lo anteriormente planteado caracteriza a una clase de matemáticas tradicional, en particular la del Álgebra Lineal (AL) como espacios de enseñanza aprendizaje donde el estudiante no experimenta métodos activos en la construcción de su aprendizaje, desde el punto de vista argumentativo de los contenidos y por lo tanto haya una falta de poder apreciar otras formas de validación, ya que la única que se le presenta es el desarrollo formal que realiza el profesor.

Por ello, con base en los fundamentos del análisis en los trabajos de Polya (1966) y de Lakatos (1978), se tratará de determinar a través del diseño y adaptación de problemas del álgebra lineal cómo lograr en su solución que el estudiante desarrolle un razonamiento plausible. ¿Cuáles son los procedimientos que se ponen en juego en dichas situaciones? ¿Qué definiciones involucra? ¿Qué propiedades tiene? ¿Qué tipo de argumentaciones forman parte de su significado? Y por último, ¿Cómo poder aplicarlo en la enseñanza del álgebra lineal?

Uno de los principales problemas en la enseñanza de espacios vectoriales está en el "formalismo", conclusión a la que han llegado muchas de las investigaciones sobre la enseñanza del álgebra lineal. Algunas de estos trabajos han tratado de abordar el problema desde el punto de vista didáctico intuicionista, otros desde el punto de vista geométrico. Algunos dicen que el problema es semiótico, ya que a los estudiantes se les presentan las definiciones formalmente, sin haber aclarado algunos aspectos semánticos de ellas. Otros dicen que la cuestión es que los estudiantes poseen mínimas bases de lógica formal y esto hace que los conceptos sean más complicados para ellos. Pero uno de los principales investigadores, que el autor de esta tesis considera se destaca por sus resultados sobre el tema es Jean-Luc Dorier, quién sostiene que no hay una fórmula única válida para resolver estos problemas, ya que los procesos cognitivos de las matemáticas son demasiado complejos. Por lo tanto, todas las investigaciones que se realicen para sortear las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben servir para que el docente haga que su enseñanza sea más rica, más experta y más flexible, que es precisamente lo que se pretende con este trabajo.

Justificación del problema

El álgebra lineal constituye un elemento imprescindible en la formación básica de un ingeniero, ya que además de ser una asignatura de ciencias básicas, tiene inmensas aplicaciones tanto en la física como la estadística, las ecuaciones diferenciales, la modelación de funciones, los circuitos, los algoritmos computacionales, la criptografía, etc. Por ello, es importante que los estudiantes de ingeniería desarrollen conceptos más que técnicas, de matrices, vectores, bases, subespacios, aplicaciones lineales, vectores y valores propios, aspectos que están muy vinculados a la solución de problemas relacionados con su profesión; además, estos conceptos brindan la posibilidad de un avance claro y preciso de su conocimiento aplicable en cursos posteriores y cursos propios de su saber específico.

Estudios realizados desde la década de los 90s del siglo pasado muestran que el aprendizaje del álgebra lineal presenta grandes dificultades en los estudiantes y por lo tanto se han realizados investigaciones para poder detectar sus causas y proponer soluciones al problema; de ellas podemos resumir los siguientes aspectos.

a) Carencia de una participación activa del estudiante, ya que la enseñanza del docente se centra en la adquisición de habilidades de manipulación y computación, lo que reduce la motivación de ellos.

b) Se utiliza un aprendizaje memorístico, basado en la repetición de una serie de procedimientos, un conjunto de recetas algorítmicas de aplicación totalmente mecánica.

c) Se presenta el obstáculo del formalismo como lo llama Jean-Luc Dorier en el cual la enseñanza se basa en el razonamiento demostrativo y no se le da cabida al razonamiento plausible, a la conjetura ni a la intuición, ya que aquél tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica (formal o demostrativa), que es la teoría del razonamiento demostrativo[1].

d) Hay autores, además de Jean-Luc Dorier, como Sierpinska, Carlson, Harel, que llevan décadas investigando sobre el tema y quienes afirman que, siendo éste un problema de la educación matemática, no hay una fórmula que resuelva el problema, pero que cada investigación que se realice es un aporte que enriquece y por lo tanto mejora su enseñanza.

e) Muchas de las investigaciones que se han realizado para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal tienen que ver con las interpretaciones geométricas, incluyendo la utilización de sistemas computacionales algebraicos y geométricos como son el Derive y el Cabri. Otros trabajos han diseñado estrategias metodológicas basadas en el constructivismo como es la llamada teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema), que consiste en describir las construcciones y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, asimilación) que puede realizar un estudiante para elaborar un concepto matemático determinado.

f) Por la revisión que se ha hecho de las investigaciones realizadas hasta el momento no se ha podido destacar alguna basada en un enfoque cuasi empírico. Por todo lo anterior se propone que esta investigación se direccione bajo una concepción de un aprendizaje del álgebra lineal basada en el razonamiento conjetural y su paulatino refinamiento, aplicaciones, y el uso de las tecnologías. Además, la relación que existe con las insuficiencias que muestran año tras año los estudiantes de ingeniería en la Universidad Distrital presenta una dimensión contradictoria que muy bien puede explicitarse como una contradicción de carácter externo (Figura 1), como a continuación gráficamente se expresa y que puede clarificar el problema de investigación.

[1] Polya G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos, S. A. Madrid.

Figura 1. Contradicción externa que clarifica el problema de Investigación

En este trabajo se espera investigar los problemas de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería y con base en ello presentar un aporte metodológico que describa un modelo didáctico que se fundamenta en materiales docentes apoyados en el razonamiento plausible, el uso de la tecnología, la visualización geométrica y la resolución de problemas en carreras de ingeniería que es la vía que fue diagnosticada al comienzo de este proyecto (Anexo 1).

Sobre la base de lo anterior se espera dar respuesta al siguiente:

Problema de investigación

¿Cómo incidir en diferentes factores que influyen negativamente para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería?

Objeto de investigación.

El proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

Objetivo general

Implementar un modelo didáctico para mejorar los factores que inciden negativamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería de la Universidad Distrital.

Se plantean como:

Objetivos específicos

1. Determinar los factores que inciden negativamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería.
2. Analizar el proceso de aprendizaje que evidencian los estudiantes con la implementación del modelo didáctico propuesto.
3. Determinar los principales aportes del modelo didáctico propuesto.

Por todo lo anterior se puede asegurar que esta investigación se direcciona al **campo de acción** que está inmerso en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería en la Universidad Distrital.

Para el cumplimiento del objetivo del problema, se presenta la siguiente **hipótesis de trabajo**: Una estrategia metodológica basada en un modelo y un proceso didáctico soportado en el razonamiento plausible y la visualización geométrica mediante el uso de la tecnología, debe contribuir al perfeccionamiento en la solución de problemas del álgebra lineal en las carreras de ingeniería y con ella al mejoramiento del proceso de su aprendizaje.

En aras de dar cumplimiento al objetivo general y lograr dar respuesta al problema planteado, se proponen las siguientes:

Tareas de investigación

- Fundamentar teóricamente el problema. Revisar teorías propuestas e investigaciones realizadas en el diseño de actividades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.
- Construir el estado del arte de la presente temática que posibilite esclarecer el nivel de actualidad y originalidad del presente.
- Diseñar un modelo didáctico cuyos elementos se soporten en la reflexión sobre un aprendizaje del álgebra lineal mediante el razonamiento plausible, el uso de la tecnología, la visualización geométrica y la resolución de problemas, en carreras de ingeniería.

- Diseñar una estrategia o procedimiento didáctico que facilite la construcción de situaciones de aprendizaje del álgebra lineal para ingenieros a través del uso de preguntas generadoras de conjeturas.
- Diseñar y estructurar un sistema de actividades soportadas en el razonamiento plausible, como alternativa al formalismo en la construcción de significados del álgebra lineal.
- Valorar los resultados de la implementación del modelo y estrategia didáctica, así como, del sistema de actividades que van a soportar el estudio.

Aportes teórico y práctico

Diseño y validación de un modelo y un procedimiento heurístico, como dimensiones didácticas cuyos elementos se soporten en la reflexión sobre un aprendizaje del álgebra lineal mediante el razonamiento plausible, el uso de la tecnología para la visualización geométrica y la resolución de problemas, en carreras de ingeniería.

Estos aportes teórico-prácticos esperados se refieren a contribuciones para el proceso de aprendizaje del álgebra lineal que difieren de aquellas investigaciones que partiendo de supuestos similares privilegian sólo la enseñanza de la misma.

Novedad científica.

El establecimiento de las relaciones esenciales que emergen de la implementación y resultados del modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal introducido en el ejercicio docente.

Estructura de la tesis.

Se divide en introducción, cuatro capítulos que son: Capítulo I: estado del arte, Capitulo II: marco teórico, Capítulo III: diseño de un modelo didáctico y metodología, Capítulo IV: resultados, discusión y análisis, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y referencias y anexos.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se analizan trabajos de investigación sobre la enseñanza del Álgebra Lineal que se consideran muestran aspectos fundamentales del estado del arte, tanto desde el punto de vista histórico como teórico de la enseñanza del álgebra lineal. Por supuesto, no se abarca toda la obra que en este importante campo de acción han sido abordados, sino se presenta una muestra de aquellos cuyos temas principales son de interés para los fines de esta tesis.

1.1. Trabajo de autores del Linear Algebra Currículum Study Group (LACSG)

Durante la última década del siglo pasado en los Estados Unidos un movimiento de reforma a la enseñanza del álgebra lineal a nivel universitario fue conformado. Algunos profesores de matemática preocupados por mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal se agruparon en una organización llamada Linear Algebra Currículum Study Group (LACSG).

Así el grupo conformado unos pocos años más tarde, conjuntamente con la Mathematical Association of America (MAA), publican el primer estudio, donde recogen una serie de trabajos sobre aspectos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal agrupados en cinco categorías: (1) el rol del álgebra lineal, (2) el álgebra lineal desde el punto de vista de las otras disciplinas donde se imparte, (3) la enseñanza del álgebra lineal, (4) metodología de enseñanza del álgebra lineal y (5) aplicaciones del álgebra lineal.

Uno de los fundadores de esta grupo es David Carlson quien enfoca el problema de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal desde la perspectiva de un matemático al preguntarse: *¿Cómo aprendemos nosotros los matemáticos?*, y responde que *todo comienza con un estímulo inicial, un artículo o una conversación, luego trabajamos con ejemplos, hacemos conjeturas, resolvemos problemas, hacemos demostraciones y, finalmente, nos comunicamos con nuestros colegas, tanto por* *escrito como oralmente*[2]. Todo un enfoque con perspectiva constructivista pero también cuasi-empirista. Él sugiere un aprendizaje enfocado en Piaget donde los estudiantes aprendan a aprender, es decir que el profesor les enseñe a los estudiantes a aprender matemáticas por sí solos. Una de las tareas que debe realizar un docente de matemáticas es estimular a los estudiantes a que asuman la responsabilidad de su propio aprendizaje, pero esto se logra solamente si se lleva a cabo con trabajo duro y de forma efectiva. Así, realizar un seguimiento apropiado al trabajo independiente (como se llama actualmente cuando se habla de créditos aquí en Colombia) que los estudiantes efectúan después de cada clase, con el material tratado en ella, será muy importante, tal vez más importante que la propia clase. Pero ésta no es una tarea fácil, pues estimular a los estudiantes en esta dirección es muy difícil y para ello se propone la resolución de problemas como estrategia; como consecuencia de esto el grupo plantea como papel fundamental en el aprendizaje el enfoque en resolución de problemas. Otro investigador de este grupo es Carl Cowen, profesor de matemáticas de la Universidad de Indiana quien afirma "además de la resolución de problemas, otra estrategia de enseñanza que ha sido experimentada en cursos de álgebra lineal es el uso de proyectos. Las propuestas en esta dirección van desde la proposición de un proyecto específico hasta el uso de una colección de proyectos para ser desarrollados durante todo el semestre". Otro de los integrantes de este grupo es Guershon Harel quien propone varios principios para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, como se verá en su artículo más adelante. Las bases de las recomendaciones de este grupo se sustentan en:

- El conocimiento de los integrantes del grupo se debe a las investigaciones de cómo los estudiantes aprenden y cómo las matemáticas deben enseñarse, además de tener en cuenta consideraciones epistemológicas y pedagógicas que involucren el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal. Por

[2] Carlson, D. (1993). The linear algebra curriculum study recommendations for the first course in linear algebra. Recuperado del URL:http://www.jstor.org/discover/10.2307/2686430?uid=2&uid =4&sid=21104423314191

ejemplo, el grupo recomienda un fuerte énfasis en geometría ya que sus interpretaciones contribuirán significativamente a la comprensión en los estudiantes.

- La experiencia que cada uno de los integrantes del grupo ha tenido en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.
- La consulta que se les hizo a las disciplinas donde se prestan los servicios de la asignatura, sus puntos de vista sobre el plan de estudios y cómo se podría mejorar.

Estas son algunas sugerencias que el grupo da sin pretender que sea la última palabra.

A pesar de que las recomendaciones hechas tienen más de veinte años, son pertinentes para nuestra época y esta investigación, pues se argumenta que debe tenerse en cuenta cómo un matemático escribe y hace matemáticas para poder realizar una buena enseñanza de éstas, el cual es uno de los principios del cuasi empirismo. Además se resalta la importancia del trabajo independiente de los estudiantes, la consulta que se debe realizar a las otras disciplinas y el estímulo a los estudiantes con problemas aplicativos.

1.1.1. Three principles of learning and teaching. Particular Reference to Linear Algebra - Old and New Observations[3]

Este artículo propone la necesidad de un curso de desafío intelectual, con énfasis en demostraciones para mejorar el entendimiento. Para estudiantes de matemáticas se plantea un segundo curso, mientras que se recomienda utilizar la tecnología en el primer curso de álgebra lineal. El autor sugiere un marco teórico que tenga como núcleo tres principios en la enseñanza - aprendizaje: el principio de concreción, el principio de necesidad y el principio de la generalización.

En el principio de la concreción el autor sugiere que los textos de álgebra lineal no se acomoden a las necesidades pedagógicas de los estudiantes, pues considera que son muy abstractos para el

[3] Harel, G. (2001). Three principles of learning and teaching mathematics. Particular Reference to Linear Algebra - Old and New Observations. *On the teaching of linear algebra,* Melbourne, Australia, pp. 177-189.

pensamiento que los estudiantes de ese nivel poseen. Por ejemplo, los estudiantes pueden determinar cuándo un conjunto de vectores es linealmente independiente en R^n, pero se les dificulta cuando la pregunta se realiza frente a un conjunto de funciones. La premisa del principio de concreción es que los alumnos deben construir la comprensión de un concepto en un contexto que sea concreto para ellos.

Por otro lado, se tiene en cuenta que uno de los estudios realizados para probar si la utilización de un énfasis en sistemas geométricos daría mejores resultados que un sistema algebraico, obtuvo resultados positivos. En otro estudio que el autor realizó en el año 1999 se aplicaron conceptos geométricos en la enseñanza del álgebra lineal y se concluyó que a los estudiantes no se les debe dar de forma apresurada los conceptos de espacios vectoriales generales sobre R^n. Es decir, el docente debe ser muy cuidadoso al introducir estos conceptos y ejemplos como el espacio de funciones. La geometría puede ser una herramienta adecuada en la consolidación de conceptos de álgebra lineal, pero se tiene que considerar cuidadosamente cómo se introduce y utiliza, ya que, en el experimento realizado, algunos estudiantes creyeron que el objeto de estudio era la geometría y no avanzaron hacia la comprensión que se pretendía.

El segundo principio de la necesidad dice: "para que los estudiantes aprendan deben ver la necesidad de lo que se enseña. Por necesidad se entiende una necesidad intelectual en lugar de una necesidad social o económica".

El tercer principio es el de la generalización el cual dice: cuando la instrucción se refiere a un modelo "concreto", es decir, un modelo que satisface el principio de concreción, las actividades dentro de este modelo deben permitir e inducir la generalización de conceptos. Este principio tiene por objeto permitir a los estudiantes abstraer conceptos que aprenden en un modelo específico.

- Se aprecia que en este artículo hay algunas recomendaciones importantes que pueden servir para llevar a cabo el presente trabajo como son: la incorporación de situaciones (sistemas) geométricos, y los principios como el de la necesidad que es importante en la motivación del aprendizaje, o el principio de la generalización que es el objetivo final.

1.1.2. The linear algebra curriculum study recommendations for the first course in linear algebra[4]

Este artículo comienza refiriéndose a los planes de estudio que deben tener los programas de álgebra lineal que se imparten en carreras que no son de matemáticas, como la ingeniería, diciendo que muchas no abordan adecuadamente las necesidades de los estudiantes en estas disciplinas. También llama la atención sobre la dificultad que encuentran los estudiantes para apropiarse de conceptos del álgebra lineal como subespacio, conjunto generador e independencia lineal. Cuando los estudiantes tienen que aprender estos conceptos se confunden y desorientan. Dice el autor: "Como si una densa niebla los cubriera y no pueden ver dónde están o hacia dónde van". Entonces surge la pregunta: ¿Por qué son estos conceptos tan difíciles para los estudiantes? Carlson identifica las razones siguientes:

1) el álgebra lineal se enseña muy temprano,
2) estos son conceptos, no se trata de algoritmos computacionales,
3) algoritmos diferentes son requeridos para trabajar con estas ideas en contextos diferentes y
4) estos conceptos son introducidos sin conexión substancial con experiencias previas de los estudiantes y sin ejemplos y aplicaciones significativas.

Recomienda que para comprender las ideas centrales del álgebra lineal se requiere de trabajo duro, persistencia y atención de parte del estudiante, sin importar cuál sea el trabajo del profesor.

En el resto del artículo el autor propone un syllabus que comienza con matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y vectores; luego aborda espacios vectoriales, transformaciones lineales, y valores y vectores propios, como está actualmente en casi todos los libros y contenidos programáticos de las universidades. Para los estudiantes de matemáticas propone un segundo curso.

[4] Carlson, D. (1993). The linear algebra curriculum study recommendations for the first course in linear algebra. Recuperado del URL:http://www.jstor.org/discover/10.2307/2686430?uid=2&uid =4&sid= 21104423314191

Cierra su artículo con cinco puntos a tener en cuenta para impartir este curso:

1) la práctica enfocada es importante para el aprendizaje,
2) el temor impide el aprendizaje, pero el aprendizaje puede vencer al temor,
3) la práctica requiere de motivación; el éxito y el estímulo parcial son buenos motivadores,
4) la elegancia en la presentación del profesor no necesariamente ayuda al estudiante a aprender.

Este artículo hace referencia a recomendaciones que se deben tener respecto a la forma y los contenidos ya que no da referencia a ninguna investigación de fondo; sin embargo, el autor de la presente propuesta conceptúa que las sugerencias pueden ser aprovechadas.

1.2. Escuela europea

La escuela europea es liderada por Jean-Luc Dorier quien tiene un grupo de investigación en educación matemática ubicado en su país de origen Francia. Dorier presentó su tesis de doctorado desde el enfoque de la didáctica francesa de las matemáticas, predominada por Brousseau y Chevallard, sobre la enseñanza de los primeros conceptos del álgebra lineal a nivel universitario.

Este grupo centra su trabajo en la historia y la epistemología; su punto de apoyo es trabajar la génesis del álgebra lineal y su aprendizaje, son los creadores de la noción del "obstáculo del formalismo" y sus investigaciones se basan en cómo evadir este obstáculo. El grupo de Dorier toma algunas consideraciones del grupo LACSG, como son los tres principios de Harel.

Uno de los principios que tiene este grupo es trabajar en constructivismo desde el enfoque de la didáctica francesa y en particular la ingeniería didáctica, pues creen que ésta es otra herramienta fundamental para resolver el problema del llamado obstáculo del formalismo. Así mismo, se habla de la "palanca de meta" como un principio fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, en el cual se debe utilizar un instrumento de apoyo en el momento justo para, por ejemplo resolver un problema y hacer la reflexión matemática de lo aprendido.

Se informa que numerosos estudios se han realizado para detectar problemas sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y así mismo se han planteado también numerosas sugerencias para tratar de resolverlos, pero se argumenta con toda razón que son soluciones locales y parciales. Lo más importante es que se siga trabajando en ello ya que cada investigación enriquece la práctica docente de quien la realiza.

Los trabajos realizados por este grupo son significativos y por tanto referenciados en muchas investigaciones a nivel mundial sobre procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, ya que uno de los objetivos de este grupo es poder dar solución al problema llamado por ellos "obstáculo del formalismo". Para la presente investigación también es importante estudiar los trabajos que realizan ya que éste es uno de los objetivos del cuasi-empirismo.

1.2.1. Teaching and Learning linear algebra in first year of French Science University[5]

Este artículo muestra resultados sobre la enseñanza de espacios vectoriales con los cuales se pretende probar que el concepto de vectores linealmente dependientes se puede aprender mejor desde una perspectiva intuitiva que formal. Para ello se realizaron pruebas y entrevistas con estudiantes y profesores, análisis de las obras más significativas de álgebra lineal y de estudios que se han hecho dentro y fuera de la comunidad europea. En la primera etapa se investiga la historia de álgebra lineal a través del análisis epistemológico de los textos originales, cuyo objetivo es contrastar la hipótesis de lo que Dorier llama "el obstáculo del formalismo" en la enseñanza. Se concluye esta indagación formulando la "*hipótesis epistemológica fundamental"* en la cual el álgebra lineal es una teoría unificada y generalizada y por lo tanto es una teoría formal que simplifica la solución de muchos problemas, pero la simplificación es sólo visible para el especialista que pueda anticipar la ventaja de la generalización, porque él ya sabe muchos contextos en los que la nueva teoría se puede utilizar.

[5] Dorier, J. (1999). Teaching and Learning linear algebra in first year of French Science University, recuperado del URL: /Users/user/Downloads/unige_16857_attachment01.pdf.

Se informa que numerosos estudios se han realizado para detectar problemas sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y así mismo se han planteado también numerosas sugerencias para tratar de resolverlos, pero se argumenta con toda razón que son soluciones locales y parciales. Lo más importante es que se siga trabajando en ello ya que cada investigación enriquece la práctica docente de quien la realiza.

Los trabajos realizados por este grupo son significativos y por lo tanto referenciados en muchas investigaciones a nivel mundial sobre procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, ya que uno de los objetivos de este grupo es poder dar solución al problema llamado por ellos "obstáculo del formalismo". Para la presente investigación también es importante estudiar los trabajos que realizan ya que éste es uno de los objetivos del cuasi-empirismo.

Por otra parte, para un principiante, la simplificación no es tan clara, le cuesta aprender muchas nuevas definiciones y teoremas, los cuales le parecen demasiado grandes con respecto al uso que él o ella puede hacer de la nueva teoría. En otras palabras, la naturaleza unificada y generalizada del álgebra lineal tiene una consecuencia didáctica: "*es difícil motivar el aprendizaje de la nueva teoría, ya que su uso será rentable sólo después de que puede haber sido aplicado a una amplia gama de situaciones*"[6].

Se proponen dos ideas para que los estudiantes puedan ver los espacios vectoriales de una manera más significativa.

1. Introducir situaciones para que los estudiantes trabajen en tres o cuatro contextos diferentes, como por ejemplo sistemas lineales, geométricos, ecuaciones de recurrencia, antes de iniciar la teoría formal. Esta fase es principalmente experimental, incluyendo vocabulario específico; los resultados se verán en una segunda fase que es cuando se muestra la teoría unificada y generalizada.

[6] Dorier, J. (1999). Teaching and Learning linear algebra in first year of French Science University, recuperado del URL: /Users/user/Downloads/unige_16857_attachment01.pdf.

2. Situar a los estudiantes en una actividad matemática que puede ser resuelto por ellos y desde allí, hacerles analizar, en una actitud reflexiva, algunas posibilidades de generalización o unificación de los métodos que han desarrollado por sí mismos. Tal estrategia induce flexibilidad en los medios de acceso al conocimiento. Aún más, el análisis histórico muestra que el álgebra lineal proviene de fuentes muy variadas y que las interacciones entre diferentes contextos y formas de expresar ideas similares fueron esenciales en su desarrollo. Para ello se utiliza lo que se llama "palanca de meta", el significado que los autores le dan a "meta" es una actitud reflexiva del estudiante en su actividad matemática, es decir lo que se espera matemáticamente de él y "palanca" señala algo que tiene que ser utilizado en el momento justo, o en el lugar correcto para ayudar al estudiante a asumir una actitud reflexiva.

Conceptos elementales como dependencia e independencia lineal, espacios generados, conjuntos generadores, base, dimensión y rango, que constituyen los fundamentos de la teoría de espacios vectoriales, son nociones muy simples y claramente interrelacionadas. Es por esto que los autores sugieren que es más fácil aprender el concepto de dependencia lineal como solución de un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas, ya que los estudiantes están más familiarizados con éstos que si se les escribiera la definición formal como tradicionalmente se hace. En esta investigación se hace particular referencia a conceptos de dependencia e independencia lineal y se concluye que las dificultades en el aprendizaje se deben al formalismo que es específico en el álgebra lineal. Se proponen las siguientes indicaciones para enseñar el concepto de dependencia lineal.

Se debe enseñar primero las definiciones de espacio vectorial, sub-espacio y combinación lineal; luego se define el concepto de generador, ya que un conjunto generador concentra toda la información en el sub-espacio, por lo que es interesante reducirlo al mínimo. Por lo tanto, la cuestión es saber cuándo es posible quitar un vector del conjunto generador, y que los vectores restantes sigan siendo todavía generadores para el sub-espacio. Además "*los estudiantes encontraran fácil que la condición necesaria* *y suficiente es que el vector sustraído sea una combinación lineal de los otros*". Esto proporciona la definición de dependencia lineal: "un vector es linealmente dependiente de los demás, si y sólo si se trata de una combinación lineal de ellos". Esta definición es muy intuitiva, pero no es completamente formal y necesita ser generalizada, además induce sin dificultad a la definición de conjunto de vectores independientes como un conjunto de los cuales ningún vector es una combinación lineal de los otros. Concluyen los autores que el formalismo es el causante de que los estudiantes le teman a la teoría de espacios vectoriales y proponen como solución didáctica evitar el formalismo lo más posible, hasta que sea la etapa final, ya que de todas maneras ellos piensan que el formalismo es esencial teóricamente, y lo han confirmado en el análisis histórico que han hecho. Más aún, dicen que el formalismo debe ser presentado en relación con un enfoque intuitivo como el medio para la comprensión del papel fundamental de la unificación y generalización de la teoría y que esto tiene que ser un objetivo explícito de la enseñanza. El formalismo es no sólo la etapa final de un proceso gradual en el que los objetos se tornan más y más generales, debe aparecer como el único medio de la comprensión de los diferentes aspectos anteriores dentro del mismo lenguaje.

Se consideran pertinentes diferentes aspectos de estos resultados para el presente trabajo, ya que trata aspectos epistemológicos de la enseñanza del álgebra lineal y tiene como meta llegar a los aspectos formales de los conceptos y no comenzar con ellos, enfoque que muchos denominan una didáctica inversa.

1.2.2. Teaching Linear Algebra at University[7]

En este artículo se abordan los principales temas sobre la enseñanza del álgebra lineal que para el autor son:

[7] Dorier, J. (2002). Teaching Linear Algebra at University. Recuperado del URL: http://arxiv.org/pdf/math/0305018.pdf

- La especificidad epistemológica del álgebra lineal y la interacción con la investigación en la historia de las matemáticas.
- La flexibilidad cognitiva en el rol del aprendizaje del álgebra lineal.
- Los tres principios para la enseñanza del álgebra lineal como los postula G. Harel.
- La relación entre la geometría y el álgebra lineal.
- Un diseño de enseñanza original experimentado por M. Rogalski.

Para el autor se pueden distinguir dos principales tradiciones en la enseñanza del álgebra lineal: uno se centra en el estudio de los espacios vectoriales formales mientras que la otra propuesta es más analítica con un enfoque basado en el estudio de R^n y el cálculo matricial; sin embargo, la enseñanza del álgebra lineal es universalmente reconocida como difícil. Los estudiantes por lo general sienten que aterrizan en otro planeta, que se ven abrumados por el número de nuevas definiciones y la falta de conexión con conocimientos previos. Por otro lado, los profesores a menudo se sienten frustrados y desarmados cuando se enfrentan a la incapacidad de sus estudiantes para hacer frente a las ideas que consideran ser tan simples. Por lo general, se incrimina a la falta de dominio en la lógica básica y la teoría de conjuntos o de la imposibilidad de los estudiantes en utilizar la intuición geométrica.

Para Dorier un análisis epistemológico de la historia del álgebra lineal es una manera de revelar algunas posibles fuentes de dificultades de los estudiantes. Varios trabajos se han llevado a cabo en esta dirección, pero el autor afirma que solamente tendrá en cuenta uno de los principales resultados de este tipo de investigación. Se trata de la última fase de la génesis de la teoría de espacios vectoriales, cuyas raíces se encuentran en el final del siglo XIX, pero que realmente comenzó sólo después de 1930, y corresponde a la axiomatización del álgebra lineal, es decir una reconstrucción teórica de los métodos de resolución de problemas lineales, utilizando los conceptos y herramientas de una nueva teoría central axiomática. Estos métodos funcionaban, pero no estaban unificados explícitamente; es importante tener en cuenta que esta axiomatización no se hizo, en sí mismo, para permitir que los matemáticos resolvieran nuevos problemas; más bien, se les dio un enfoque y un lenguaje más universal para ser utilizado en una variedad de contextos (análisis funcional, formas cuadráticas, aritmética, geometría, etc.). El enfoque axiomático no era una necesidad absoluta, a excepción de problemas en dimensión infinita no numerable, pero se convirtió en una forma universal de pensar y organizar el álgebra lineal.

Una solución podría ser la de renunciar a la enseñanza de la teoría formal de los espacios vectoriales. Sin embargo, muchas personas encuentran que es importante que los estudiantes que empiezan las matemáticas universitarias y estudios científicos adquieran una idea acerca de la estructura algebraica axiomática de espacio vectorial. Para alcanzar este objetivo, el asunto del formalismo no se puede evitar. Por lo tanto, hay que inducir a los estudiantes a un cierto tipo de reflexión sobre el uso de sus elementos anteriores de conocimiento y competencias en relación con los nuevos conceptos formales.

En el llamado obstáculo del formalismo distinguen tres lenguajes básicos utilizados en álgebra lineal: el 'lenguaje abstracto' de la teoría general, el 'lenguaje algebraico' de la teoría en R^n y el 'lenguaje geométrico' de espacios tridimensionales. Otra dificultad que parece ser ignorada por los profesores es el constante cambio de notaciones sin alertar a los estudiantes.

Así mismo, en un estudio epistemológico de la conexión entre la geometría y el álgebra lineal, se encontró que la necesidad de la intuición geométrica fue muy a menudo postulada por los libros de texto o los profesores de álgebra lineal. Sin embargo, en realidad, el uso de la geometría era más a menudo superficial.

La investigación en educación matemática no puede dar una solución milagrosa para superar todas las dificultades en la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal. Varias obras contienen diagnósticos de las dificultades de los estudiantes, los análisis epistemológicos y experimentales de su enseñanza, ofreciendo remedios locales. Sin embargo, estos trabajos conducen a nuevas preguntas, problemas y dificultades, lo que no debe ser interpretado como un fracaso.

La mejoría en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no puede consistir en un remedio válido para todos. Los procesos cognitivos de las matemáticas son demasiado complejos para una visión simplista e idealista. Se trata de un conocimiento más profundo de la naturaleza de los conceptos y las dificultades cognitivas que encierran, y que ayuda a los profesores a hacer su enseñanza más rica y más experta; no de una manera rígida y dogmática, pero con flexibilidad. En este sentido, en varios países, la investigación en educación matemática se está influenciando por reformas curriculares, de manera no formal, ya que, en la educación en Norteamérica, todo se determina a nivel local, por institución o por profesor. Lo que propone el grupo se reduce a una propuesta que puede o no ser adoptada.

Este artículo es importante para esta investigación ya que tiene por objetivo estudiar diferentes maneras de enseñar - aprender álgebra lineal distinta al desarrollo axiomático hipotético deductivo que según Dorier es uno de los principales obstáculos para que el estudiante aprenda álgebra lineal. Precisamente esto es uno de los propósitos de esta investigación.

1.2.3. Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces[8]

En este artículo el autor hace un recorrido epistemológico e histórico de la enseñanza del álgebra lineal, comenzando por Francia su país de origen donde dice que el álgebra lineal se enseña generalmente en su versión axiomática y recuerda que estuvo influida por Nicolás Bourbakí quienes presentaban los conceptos de una manera hipotético-deductiva.

Plantea que, a pesar de ser una teoría relativamente nueva, el álgebra lineal siempre ha estado presente en todos los problemas lineales; de hecho, la posibilidad de modelar tantas situaciones en

[8] Dorier, j. (2000). *Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces.* On the teaching of the algebra linear red Kluwer academic publisher, pp. 1- 73.

casi todas las partes de las matemáticas y otras ciencias es una de las principales ventajas del álgebra lineal. Sin embargo, se podría argumentar que esto es del todo normal, ya que la linealidad es siempre el caso más fácil, y eso lleva a comenzar con problemas lineales antes de presentar preguntas más difíciles.

La teoría de los espacios vectoriales no constituye realmente un nuevo material; es más bien una nueva forma de ver viejos problemas y de organizar los conocimientos matemáticos. Con la teoría axiomática, nuevos problemas en dimensión infinita (inicialmente análisis funcional) se resolvieron, pero el beneficio más valioso está en la solución de viejos problemas. Este hecho histórico tiene un fuerte impacto en la enseñanza, especialmente en el primer nivel universitario, ya que precisamente por el nivel de las matemáticas con la que los estudiantes entran a la universidad es imposible introducir problemas de dimensión infinita cuya solución depende de la aplicación de la teoría axiomática.

Históricamente en cuanto a las ecuaciones lineales, unos de los primeros ejemplos significativos se pueden encontrar en un texto de Leonhard Euler, titulado, *Sur une Contradicción Apparente dans la Doctrina des Ligna Courbes*, en 1750, en el cual cuestiona el hecho de que cualquier sistema lineal de *n* ecuaciones con *n* incógnitas tenga única solución, para ello presenta unos ejemplos de sistemas donde hay infinitas soluciones y resalta la importancia de este hecho, ya que la causa es la dependencia lineal existente. Cramer con el nacimiento de los determinantes (1850) los convierte en el marco inevitable para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, aunque los determinantes eran una herramienta eficaz para el estudio de ecuaciones lineales, también tenía cierta complejidad la técnica para calcularlos y por eso surgen conceptos más abstractos como el de rango, alrededor de 1840, ya que en el contexto de ecuaciones lineales el rango es una invariante que determina el tamaño del conjunto de soluciones. Así mismo se resalta la importante relación que siempre ha existido entre la geometría y el álgebra, la cual proviene de la amplia utilización de un vocabulario común en los dos campos. Por ejemplo, el hecho de que la estructura lineal se denomina "espacio vectorial" identifica los orígenes geométricos de la teoría.

Así, la relación histórica entre la geometría y los problemas lineales es el resultado del descubrimiento de la geometría analítica, introducida de forma independiente por René Descartes (1637) y Pierre de Fermat (1643). Su objetivo era aplicar el poder del álgebra a la geometría, y el resultado del nuevo método tuvo consecuencias muy importantes, ya que la linealidad en la geometría se hizo mucho más esencial. Las cantidades imaginarias, los cuaternios de Hamilton y la teoría general de formas de Grassmann, publicadas en 1862 presentan formas muy similares a los axiomas de espacios vectoriales, aun cuando el término como tal de álgebra lineal se utilizó solamente hasta comienzos del siglo veinte.

En la segunda parte de este capítulo se realiza un recuento de las primeras presentaciones axiomáticas de álgebra lineal y las obras cruciales en problemas lineales de dimensión finita las cuales son más o menos contemporáneas (finales de la década de 1880). Sin embargo, los dos aspectos se mantuvieron en gran medida independientes hasta por lo menos 1920 y realmente comenzaron a ser unificados sólo a partir de 1930.

Este artículo es de suma importancia para este trabajo ya que hace un recorrido histórico y epistemológico del álgebra lineal, en el cual se puede ver que surge de problemas lineales y luego se axiomatiza buscando soluciones y enlaces con otros campos de la matemática como son el análisis funcional. También resalta la importante relación que tiene con la geometría y esto sugiere que siempre se debe tener presente esta relación cada vez que se imparta un curso de álgebra lineal.

1.2.4. On the Teaching of Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching of Vector Spaces[9]

En este artículo los autores también coinciden en que el problema del aprendizaje de la teoría de espacios vectoriales en álgebra lineal es sobre la manera formal en que este curso se enseña, y muestran que desde un punto de vista geométrico el aprendizaje de los espacios vectoriales es más significativo. También coinciden en que el álgebra lineal es un curso indispensable para los estudiantes universitarios, debido a su amplia aplicación en ciencias naturales y sociales. Así, se pretende dar respuestas geométricas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal.

Citando a Harel quien señala que los sistemas lineales, transformaciones lineales, matrices aritméticas y espacios vectoriales forman el contenido básico del álgebra lineal y teniendo en cuenta el hecho que en geometría euclidiana el espacio vectorial puede ser pensado como la generalización del sistema de coordenadas cartesianas con la abstracción algebraica, se justifica este estudio. También se tiene en cuenta que los objetos que se describen en los espacios vectoriales pueden ser objetos geométricos, pero a pesar de esto, los textos y algunos docentes los tratan únicamente como objetos con expresión algebraica. Los autores consideran que la enseñanza de espacios vectoriales desde el punto de vista geométrico es un método útil ya que ellos suponen que las estructuras geométricas algebraicamente compatibles en la enseñanza de espacios vectoriales aumentan significativamente el aprendizaje de estos conceptos. Es por ello que parten de la hipótesis de que los estudiantes que aprenden bien los conceptos de vectores en R^2 y R^3, como de la representación geométrica de sus operaciones, van a tener mayor éxito aprendiendo los conceptos de espacio vectorial y resaltan tres componentes que para ellos son importantes:

[9] Yains, S y Ahmet I. (2003). On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces. *Educational Research Journal* 《教育研究學, Vol. 7, No.1, marzo 2003, pp. 59-67.

i. El uso de la geometría de vectores como un método eficaz.

ii. El uso de las estructuras generales en los dos temas y las relaciones entre estos temas.

iii. El uso de descripciones geométricas para aclarar estructuras vectoriales.

Finaliza el artículo presentando los resultados de un estudio en el que, en dos cursos diferentes de álgebra lineal, de los que uno tuvo más énfasis geométrico que el otro, que tuvo mayor énfasis geométrico sólo al final, el primero obtuvo mejores resultados en el aprendizaje.

Este artículo resulta interesante, ya que muestra algunas experiencias que se llevaron a cabo utilizando geometría para la enseñanza del álgebra lineal con buenos resultados. Sin embargo, este tipo de estudio no se pretende replicar en este trabajo con la metodología utilizada por estos autores, pero si se apoyará en la visualización geométrica.

1.3. Otros enfoques sobre el aprendizaje del álgebra lineal

1.3.1. On some aspects of students' thinking in linear algebra[10]

Este artículo se centra en ciertos aspectos del razonamiento de estudiantes en álgebra lineal y sus dificultades para comprenderla. De manera general, se argumenta que los estudiantes tienden a pensar de manera práctica y no teórica, y varios ejemplos ilustran cómo esta tendencia puede afectar negativamente a su razonamiento en álgebra lineal. Específicamente, tres modos de razonamiento en álgebra lineal se pueden distinguir, correspondientes a sus interactuaciones con el lenguaje, los cuales son: el lenguaje "geométrico visual ", el lenguaje 'aritmético' de vectores y matrices como listas y tablas de números, y el lenguaje "estructural" de los espacios vectoriales y transformaciones lineales.

[10] Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra in DORIER J.-L. (ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question*, 209-246. @2000 Kluwer Academic Publishers.

Se realizó un estudio en la Universidad de Concordia, el cual se centró en los patrones de formación de comportamientos matemáticos de los alumnos al interactuar individualmente con los tutores y textos de álgebra lineal. El contenido matemático de las sesiones tutoriales no fue especialmente diseñado; se utilizó un texto guía, que el estudiante leía y el tutor sondeaba su comprensión, así como ayudaba al estudiante a aprender el material.

Por otro lado, se utilizó el paquete Cabri para diseñar un modelo geométrico de espacio vectorial de dos dimensiones. El objetivo de este estudio era intentar resolver el principal problema de reducir al mínimo las posibilidades de que los estudiantes desarrollen los síntomas de lo que se denomina "el obstáculo de formalismo", cambiando así un poco la noción introducida por Dorier, en el cual ellos afirman que el razonamiento erróneo de los estudiantes en álgebra lineal se derivada principalmente no sólo de la insuficiencia en la lógica y la teoría de conjuntos elementales, sino también en la manipulación de expresiones algebraicas.

Al final el objetivo se cumplió parcialmente, ya que unos lo lograron, pero otros no. Al basarse en Vygotsky, la autora hace la distinción en tres modos de pensar:

- sintético-geométrico,
- analítico-aritmético y
- analítico-estructural,

cuya identificación se basa en un análisis histórico y el estudio de diferentes "lenguajes" utilizados en la teoría del álgebra linear en sí.

Luego describe otras experiencias que se realizaron utilizando Cabri sobre vectores linealmente dependientes y transformaciones lineales. Por medio de los resultados visuales se les van realizando preguntas a varios estudiantes y luego son analizadas estas respuestas por la autora, a lo cual concluye: *"las respuestas dadas por los estudiantes son descripciones que no pueden ser entendidas fuera de lo que podían ver en la pantalla"*[11].

Luego se muestra más experiencias de pruebas realizadas con el Cabri, donde se concluye que muchos no podían generalizar las propiedades que se habían propuesto los investigadores ya que se quedaban en lo que veían en la pantalla del computador. Otros creían que el objetivo era estudiar geometría y no lo relacionaban con el álgebra lineal. La autora concluye que, en esta investigación sobre la enseñanza del álgebra lineal, se encontró que sin importar cómo se trate de abordar el contenido, las dificultades de los estudiantes parecían persistir.

Para la presente investigación es importante este artículo ya que se muestran experiencias valiosas de prácticas docentes utilizando tecnología y visualización geométrica, herramientas a utilizar en este trabajo de investigación.

1.3.2. Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level[12]

Ed Dubinsky es profesor de matemáticas norteamericano creador de la llamada teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema), quien ha realizado numerosos aportes a la educación matemática. Básicamente en este artículo se observan dos propósitos: el primero es realizar una crítica aguda a las recomendaciones que hace el grupo LACSG sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y el otro es el de proponer un enfoque alterno basado en la teoría APOE.

En las críticas hechas al artículo de David Carlson sobre las recomendaciones que da el grupo LACSG para la enseñanza del álgebra lineal, Dubinsky primero afirma que las dificultades de los estudiantes no solamente son hacia los conceptos de espacio vectorial, sino que a los estudiantes también se les

[11] Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra in DORIER J.-L. (ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question*, pp. 209-246. @2000 Kluwer Academic Publishers.

[12] Dubinsky, E. (s/f). Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level I Recuperado el 14 de octubre del 2014 de la URL: http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf.

dificulta aprender los conceptos de aplicaciones lineales. Además dice que las razones que Carlson da son muy generales y no apuntan claramente a cómo se pueden superar.

El autor está de acuerdo con la postura del grupo LACSG en que los procesos de enseñanza - aprendizaje deben ser más dinámicos, también está de acuerdo en que debe haber aplicaciones y que se estimule a los estudiantes con problemas, pero anota que el grupo no dice cómo hacerlo. Por eso él propone un enfoque constructivista, ya que argumenta que "el enfoque pedagógico en la mayoría de los cursos de álgebra lineal es, y ha sido durante mucho tiempo, el de decirle a los estudiantes sobre las matemáticas y mostrarles cómo funciona. Lo más cerca que llegan los estudiantes a jugar un papel activo es cuando trabajan en problemas. Pero esto no funciona muy bien, ya que, como profesión, el autor cree que los docentes sucumben a la demanda de los estudiantes que primero les muestran cómo hacer un cierto tipo de problema y luego les piden resolver muchos casos de este mismo problema. Para resumir, los estudiantes no entienden estos conceptos porque nunca tienen la oportunidad de construir sus propias estrategias.

Él propone la teoría APOE como proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, la cual presenta como se detalla a continuación.

Acción. Es una transformación, se considera que es una acción cuando se trata de una reacción a los estímulos que se perciben de manera externa. Estos estímulos, y la reacción, pueden ser físicos o mentales. Una acción puede ser o bien una respuesta de un solo paso o una secuencia de varios pasos de respuestas, es decir cuando un estudiante realiza una serie de pasos sin mucho sentido o, como se suele decir, mecánicamente, como por ejemplo cuando el estudiante aprende a reducir una matriz aplicando un algoritmo.

Proceso. Se produce cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede llegar a ser percibida como una parte del individuo y que él o ella puede establecer el control sobre él; es decir, es una interiorización de la acción. Una vez que un individuo ha construido un proceso, varias cosas son posibles. Por ejemplo, dos o más procesos pueden conectarse. Quizás el punto más importante es que cuando se trata de un proceso, un individuo puede pensar en una transformación. Por ejemplo, en álgebra lineal cuando un estudiante es capaz de expresar los pasos necesarios para determinar sin necesidad de verificación que la suma de dos elementos de un conjunto está o no en el conjunto, entonces se puede decir que el sujeto ha interiorizado las acciones en proceso.

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, y se da cuenta del proceso en su totalidad y de las transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre éste, entonces él puede construir sus transformaciones y estará pensando en este proceso como un objeto. Por ejemplo, en álgebra lineal cuando un estudiante es capaz de demostrar cuando un conjunto dado es un subespacio vectorial.

Esquema. El autor lo toma como el sumario de los anteriores, cuando se relacionan consciente o inconscientemente, y se pueden utilizar para realizar transformaciones y conseguir nuevos objetos. Se muestran varios ejemplos en álgebra lineal. Se ofrecen algunas recomendaciones como, por ejemplo, utilizar la tecnología y la geometría en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Es un artículo muy importante para el desarrollo de este trabajo ya que propone un método diferente al tradicional basado en el constructivismo, teoría ligada al cuasi-empirismo propuesto por Polya y Lakatos.

1.3.3. Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial[13]

Este artículo trata sobre el análisis del pensamiento de los estudiantes al resolver problemas sobre bases de espacios vectoriales y el análisis de seis textos guía de álgebra lineal sobre la presentación de estos conceptos al lector. La investigadora dice que, en su experiencia docente, los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal debido a que el contenido de la asignatura

[13] Chargoy, J. (2000). *Modos de pensamiento sintético y analítico*: el caso de la base de un espacio vectorial, Acta latinoamericana de matemática educativa vol. 13 año 2000, pp. 162..

contiene gran cantidad de símbolos, definiciones, propiedades, conceptos y teoremas con un alto grado de abstracción.

Ella desarrolla su trabajo sobre espacios vectoriales, los que considera como el concepto fundamental del álgebra lineal y las bases de los espacios o subespacios como el esqueleto que soporta el desarrollo de la misma. Con respecto a su experiencia y la literatura de los libros texto del álgebra lineal dice que prevalecen los procedimientos algorítmicos aritméticos más que los geométricos y conceptuales.

La investigación tiene como marco teórico la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska, la cual identifica tres modos de pensamiento matemático: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural. "La principal diferencia entre los modos "sintético" y "analítico" es que, en el modo sintético, los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, de manera natural, mientras que en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente. De hecho, son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos".

En esta investigación, se les entrega a unos estudiantes de ingeniería y licenciatura en matemáticas, problemas sobre bases de espacios vectoriales para que sean resueltos en grupo e individualmente por éstos, luego se realiza unas entrevistas sobre cómo resolvieron los problemas para analizar el tipo de pensamiento y las dificultades que se presentan en cada caso.

Los problemas que se plantean tratan sobre bases de subespacios en R^3 y R^2 y en este contexto la autora concluye que los estudiantes se confunden entre el número de elementos de una base y la dimensión de éstos. Por ejemplo, dados tres vectores linealmente independientes dos a dos en R^2, los estudiantes creyeron que podían generar una base para R^3. La autora también concluye que la mayoría de los estudiantes usualmente trabajan en el modo de pensamiento analítico-aritmético.

En cuanto a los textos concluye que utilizan diferente lenguaje y notación, promueven la intuición geométrica para incentivar algunos conceptos y la tecnología, y que cuando tratan conceptos de espacios vectoriales a través de la geometría analítica utilizan casi siempre las bases canónicas.

Este artículo es importante para esta investigación ya que estudia algunos problemas que presentan los estudiantes de álgebra lineal, los cuales se pretende dar solución en este trabajo.

1.4. Aproximaciones al cuasi empirismo

1.4.1. Imre Lakatos's Philosophy of Mathematics[14]

Lakatos (1922-1974) fue un filósofo y matemático crítico de la escuela formalista; planteó sustituir las características formales axiomáticas de las matemáticas por un énfasis en la heurística y procesos históricos de construcción de la teoría y la conceptualización.

Los tres autores más influyentes en su filosofía se perfilan a continuación.

El primero es Karl Popper cuya tesis principal afirma que no puede haber una verificación empírica de las teorías científicas. Lakatos aplica este énfasis en refutaciones a una disciplina que sabe que está basada exclusivamente en demostraciones, y demuestra que cuando los matemáticos hacen matemáticas entonces muy a menudo refutan (o refinan) las teorías unos de otros.

El segundo es George Polya y su teoría heurística. Lakatos destacó el papel de las reglas heurísticas en la práctica real de las matemáticas. Su preocupación eran las matemáticas informales, las cuales se ocupan de la forma cómo los matemáticos llegan a sus resultados. Lakatos propuso este punto de vista que casi no existía en la filosofía de las matemáticas, y utiliza estas ideas en su posición crítica a la escuela formalista.

[14] Gábor, K. (s/f). Imre Lakatos's Philosophy of Mathematics. Recuperado el 15 de mayo del link: http://hps.elte.hu/~kutrovatz/LakatosEng.pdf

El tercero fue Hegel y su teoría dialéctica la cual se puede ver en sus últimos escritos filosóficos, pero sobre todo en su filosofía de las matemáticas, cuando afirma que ésta debe ser una filosofía de desarrollo, no dé certeza estática.

Lakatos dio una clasificación de las ciencias, es decir, los sistemas axiomáticos deductivos, por un lado, sistemas elaborados en la tradición del sistema de Euclides, y por otro lado sistemas cuasi empíricos. Estos dos tipos de sistema comparten el "espíritu" axiomático-deductivo; es decir, ambos toman algunas declaraciones como base («axiomas») y tratan de obtener otras declaraciones por medio de deducción lógica ("teoremas") de estos axiomas. La principal diferencia radica en la forma en que estos sistemas son conectados a la 'verdad' y 'falsedad'.

Lakatos propone que, en el sistema de Euclides, la verdad es impuesta por los axiomas, a partir de allí ésta se hereda en los teoremas de forma automática bajo la naturaleza de la deducción lógica de las demostraciones. Después de las paradojas de Russell y los teoremas de Kurt Gödel y del fracaso del enfoque logicista de las matemáticas, Lakatos concluye que no puede haber una teoría formal, aunque reconoce que la mayoría de los matemáticos no están de acuerdo con ello. Él insiste en que la matemática no es una ciencia logicista ya que, por un lado, las matemáticas no son infalibles y, por otro lado, las matemáticas no son puramente demostrativas.

Así Lakatos escribe su importante obra de la filosofía de las matemáticas *Pruebas y refutaciones*, que después pasó a ser una importante obra también en educación.

A continuación, el autor del artículo pasa a explicar el método cuasi-empírico que se utiliza para resolver un problema matemático, en el cual se debe comenzar con una conjetura inicial llamada primitiva o ingenua, realizar un análisis a la prueba, por medio de contraejemplos y refutaciones; y luego debe haber una teoría o paso deductivo, hasta llegar a la teoría formal.

Este artículo es sumamente importante para esta investigación, que se tomará como parte del marco teórico.

1.4.2. Heurística y formalismo: La diferencia de Fréchet según Lakatos[15]

El objetivo de este artículo es realizar una comparación entre las posturas filosóficas de Fréchet y Lakatos desde el punto de vista epistemológico de las matemáticas, ya que ambos estaban en contra de que la matemática se presentara de una manera terminada bajo un desarrollo axiomático deductivo.

Fréchet, al igual que los cuasi-empiristas, reclama que en cada problema desarrollado en matemáticas se deben mostrar las conjeturas, su historia, las refutaciones y los contraejemplos. Él no sólo indica los pormenores que llevaron a su definición, sino además ubica los resultados en los intentos hechos por otros y por él mismo antes de llegar a los resultados finales.

El autor indica que la heurística de Lakatos está basada en dos componentes, por un lado, está lo que llama la "heurística negativa" en la que se reconocen aquellos procedimientos investigativos que deberían descartarse y que está dotada por hipótesis auxiliares inadecuadas, mientras que por el otro lado está la "heurística positiva" que apunta a las ideas centrales del problema, sin tener en cuenta las anomalías que se presenten en el desarrollo del mismo.

Mientras que Lakatos exponía su dura crítica a la escuela formalista de las matemáticas en sus escritos recogidos en *Prueba y refutaciones*, Fréchet lo había realizado medio siglo antes. El autor resume la postura planteada por Lakatos en su obra en siete estadios, que son: la formulación de la conjetura primitiva, desarrollo de la prueba, descomposición de la conjetura original en subconjeturas o lemas, formulación de contraejemplos globales, y por último análisis de la prueba donde pueden surgir contraejemplos locales. Hasta aquí estos cuatro estadios son obligatorios; dependiendo del problema se puedan dar tres más que son: el análisis de pruebas a otros teoremas para contrastar si aparecen

[15] Recalde, L. (2000). Recuperado el 4 de mayo del 2014 del URL: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/1701/1/8%20Heuristica%20y%20formalismo%20%20la%20diferencial%20de%20Frechet%20segun%20el%20enfoque%20de%20Lakatos.pdf.

los lemas recientemente descubiertos, luego la comprobación de las consecuencias, y por último los contraejemplos que se convierten en ejemplos nuevos, para abrir así otro campo de investigación.

Este artículo también es relevante para el desarrollo de esta investigación porque pone de manifiesto la importancia que ha tenido el cuasi empirismo desde medio siglo antes de Lakatos y sus significativas consecuencias.

1.4.3. Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural[16]

Este artículo es extraído de una tesis de maestría realizada por la misma autora de una investigación que se llevó a cabo en Argentina. El objetivo de este estudio era investigar en qué espacios se promueve el razonamiento plausible en estudiantes de nivel medio. Para ello se diseñaron encuestas y formularios, también se analizaron algunos libros de secundaria de matemáticas y se encuestó a profesores de matemáticas de nivel medio. Como resultado concluye que son mínimos los espacios donde se lleva a cabo este tipo de razonamiento; por ejemplo, de los libros de matemáticas para secundaría que son utilizados en los cursos, casi no se pone en práctica el razonamiento plausible. También en el artículo se realiza un resumen del capítulo décimo tercero del libro de Polya *Matemáticas y razonamiento plausible,* que trata sobre el grado de validez de una conjetura, el cual está en el marco teórico de esta investigación. Así mismo, se analiza la parte metodológica del cuasi empirismo de Lakatos como marco teórico de la investigación. La autora concluye que son casi nulos los espacios donde el razonamiento plausible se pone en práctica en estudiantes del nivel secundario.

El artículo resulta útil en el presente estudio, ya que se trata de investigar los espacios en los que se pone en práctica el razonamiento plausible en matemáticas.

1.4.4. Pruebas y refutaciones[17]

[16] Markiewicz, M. (2006). recuperado del URL: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Trabinvest/CTI2.pdf.

[17] Lakatos, I. (1976). *Pruebas y Refutaciones*, Editorial Alianza Madrid.

Este libro fue escrito por el matemático y filósofo Imre Lakatos, (1922-1974). Recopilado de su tesis doctoral, el libro fue escrito a manera de diálogo entre un profesor y sus estudiantes. En esta obra se ve la influencia que ha tenido en el autor la teoría heurística de George Polya.

Esta obra tiene aportes a la matemática, tanto desde el punto de vista epistemológico como de su educación.

Desde el punto de vista epistemológico se pueden ver todos los argumentos críticos de Lakatos hacia la escuela formalista donde dice "el formalismo desconecta la filosofía de las matemáticas de la historia de las matemáticas, puesto que, de acuerdo con la concepción formalista de las matemáticas éstas no tienen propiamente historia. El formalismo niega la condición de matemáticas a la mayoría de las cosas que normalmente se han considerado tales y no puede decir nada acerca de su desarrollo."

El aporte que esta obra hace a la educación matemática es importante en cuanto deja ver que la enseñanza de las matemáticas no se debe limitar al proceso de encadenar axiomas, definiciones, teoremas y corolarios; más allá de eso, existe la historia de la construcción y descubrimiento del conocimiento matemático y la matemática informal como herramienta para llegar al conocimiento.

Desde el punto de vista de la educación matemática, con esta obra se llega a conocer el cuasi empirismo a través de la resolución de problemas; para ello el autor comienza con un problema sobre una relación que cumplen el número de aristas, vértices y caras de un poliedro, donde se ponen de manifiesto las conjeturas, los contraejemplos globales y locales, el análisis de la demostración, la inducción y las conjeturas inductivas hasta llegar a la teoría formal. En los apéndices se analizan dos ejemplos más, en uno de los cuales realiza una comparación entre el enfoque deductivista frente al enfoque heurístico.

Esta es una de las obras en las cuales se motiva y se basa la presente investigación; hace parte también del marco teórico.

1.4.5. Matemáticas y razonamiento plausible[18]

Dice el autor que este libro es un ensayo filosófico y continuación de trabajos anteriores; hace un reconocimiento de por qué es importante el razonamiento plausible, además de ilustrar su significado. La obra está dividida en dos partes, la primera de las cuales trata sobre inducción y analogías en matemáticas; en ella el autor por medio de problemas interesantes lleva al lector a través de razonamiento plausible a resolverlos utilizando inducción, que es el objetivo de estos primeros capítulos.

La segunda parte del libro trata sobre patrones de inferencia plausible, donde se muestra, utilizando lógica formal, cuando una conjetura es más creíble o menos creíble que otra, así mismo muestra ejemplos interesantes aplicados a mínimos y máximos lo mismo que a probabilidad. Finaliza con un capítulo sobre el razonamiento plausible en la invención y la enseñanza. Forma parte del marco teórico de la presente investigación.

1.4.6. ¿Qué es la matemática realmente? Estudios y propuestas[19]

En este capítulo de Hersh (1997) se realiza una descripción de lo que son las matemáticas, primero como método y luego como contenido.

En una descripción rápida como método dice: "Las matemáticas son un método de conjeturas y pruebas, se llega a una red heredada de conceptos y hechos, propiedades y conexiones, llamado "teoría", e*sta teoría actualmente existente es el resultado de una evolución histórica, es el trabajo cooperativo y competitivo de generaciones de matemáticos, asociados por la amistad y la rivalidad, por la crítica y la corrección mutua, como líderes y seguidores, mentores y protegidos"*[20].

[18] Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Editorial Tecnos Madrid.
[19] Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Edit Oxford, pag 3-24
[20] Ibidem.

Para Hersh, hacer matemáticas es resolver problemas, también dice: *"el descubrimiento matemático se basa en una validación llamada prueba*",[21] el análogo de la experimentación en la ciencia física. Una prueba de un argumento concluye que el resultado propuesto sigue de la teoría aceptada. "Sigue" se entiende como el argumento que convence a matemáticos escépticos calificados".

Luego el autor expone las diferencias entre las matemáticas puras y las aplicadas distinguiéndolas así: Las matemáticas que hacen ahínco en los resultados de anteriores pruebas a menudo se llama "matemática aplicada". Mientras que las matemáticas que hacen referencia en la prueba por encima de los resultados a veces se llama "la matemática pura", más a menudo sólo "matemáticas".

Aquí el autor da un bosquejo de lo que son las matemáticas y dice "*Las matemáticas son una vasta red de problemas interconectados y solucionados"*[22]. A veces a un problema se le llama "una conjetura." Es decir, el matemático tiene un gran número de partes complicadas y lo que debe hacer es organizarlo por conveniencia y por estética y esto lo hace axiomatizando, ya que cualquier conjunto de axiomas planteados es una propuesta de solución la cual no será única. Volviendo a los axiomas dice que cuando alguien trata de inventar una nueva rama de las matemáticas, debe plantear algunos axiomas e ir desde allí, pero tales esfuerzos rara vez alcanzan la meta, más bien los problemas y las soluciones son lo primero, más tarde vendrán los conjuntos de axiomas que pueden ser de teorías ya existentes.

También hace referencia a la intuición la cual es la base en gran medida en la realización de una demostración.

En cuanto a lo que es la matemática por su contenido comienza con la definición del diccionario: *"la matemática es la ciencia de los números y las figuras"*[23], definición que sería acertada hasta hace 200 años, pero hoy en día no, ya que la matemática es mucho más qué eso. En la actualidad hay más de

[21] Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Edit Oxford, pag 3-24
[22] Ibidem
[23] Ibidem.

3400 subcampos que nadie puede describir en una sola frase, y para poder identificar cada una de estas ramas se debe guiar más por el método que por el contenido.

A continuación, el autor compara lo que es la matemática para los formalistas y los platónicos, dando él su punto de vista. Para los formalistas: *"Las matemáticas son un juego sin sentido."*[24] Con referencia al término juego es porque todo juego tiene reglas y dice que hay reglas deliberadas como las del monopolio y otras espontáneas como las de la aritmética elemental.

Después da algunas definiciones de matemáticos platonistas y comenta: El Platonismo dice que los objetos matemáticos son reales e independientes de nuestro conocimiento, que estos objetos existen fuera del tiempo y del espacio físico y que nunca fueron creados y que nunca cambian. Además para el platonismo matemático, un científico empírico, es como un botánico, él no puede inventar, porque todo ya está allí, lo único que puede es descubrir.

También afirma que los platónicos explican las matemáticas como un universo separado de objetos abstractos, independientes del universo material, pero, la pregunta es ¿cómo interactúan los universos abstractos y materiales? o mejor: "*¿cómo hacer que los matemáticos de carne y hueso adquieren el conocimiento de número?*[25] Para responder estas preguntas hay que olvidar el platonismo, y mirar el pasado sociocultural y el presente, en la historia de las matemáticas. En el universo conjuntista construido por Cantor y adoptada por los platónicos, se cree que incluyen todas las matemáticas, pasadas, presentes y futuros.

Desde el punto de vista de Frege persiste hoy en día entre los matemáticos dedicados a la teoría de conjuntos, platónicos que argumentan algo como esto*:…Seguramente existe el conjunto vacío, todos nos hemos encontrado con él ya que a partir del conjunto vacío se realizan algunas operaciones naturales como la formación del conjunto de los subconjuntos y en poco tiempo se tiene una magnífica*

[24] Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Edit Oxford, pag 3-24.
[25] Ibidem.

estructura en la que se puede incrustar los números reales, números complejos, los cuaterniones, espacios de Hilbert, variedades diferenciables infinito-dimensionales y cualquier otras cosas similares. Por lo tanto, es inútil hablar de inventar o crear las matemáticas. En este sentido toda configuración teórica estructurada y todo lo que podría desear o soñar ya está presente. Ello es cuestionado por Hersh con el siguiente argumento: *la mayoría de los avances en las matemáticas convencionales se hacen sin referencia a alguna a sus orígenes en la teoría de conjuntos*[26]. Decir que el espacio de Hilbert ya estaba allí en la teoría de conjuntos es como decirle a Rodin (el escultor de la pieza llamada "El pensador"*), "El Pensador es una bonita pieza de trabajo, pero todo lo que hizo fue deshacerse del mármol extra. La estatua estaba allí dentro de la cantera de mármol antes de que nacieras"*[27]*,* como Rodin hizo El Pensador quitando mármol. Hilbert, von Neumann y el resto hizo la teoría del espacio de Hilbert, analizando, generalizando y reordenando ideas matemáticas que estaban presentes implícitamente en las definiciones y los axiomas.

Aunque Frege mostró que los objetos matemáticos no son ni físicos ni mentales, los llamó objetos abstractos y afirmó que hay otros objetos abstractos diferentes a los números como, por ejemplo el empleo o el cansancio, lo que Hersh cuestionó con el siguiente argumento.

Los objetos matemáticos no son creados arbitrariamente por los seres humanos sino de la actividad con objetos matemáticos existentes y de las necesidades de la ciencia y de la vida diaria. Una vez creados, los objetos matemáticos pueden tener propiedades que son difíciles de descubrir, lo cual es equivalente a decir que hay problemas matemáticos que son difíciles de resolver.

Ahora para saber cómo crece la matemática, es necesario estudiar cómo se reconocen los problemas matemáticos. Las personas que los van a desarrollar los deben ver atractivos, porque para Hersh hacer matemáticas es resolver problemas, pero no cualquier problema, deben ser problemas interesantes.

[26] Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Edit Oxford, pag 3-24.
[27] Mencionado en Hersh, R. (1997). *What is mathematics really*? Edit. Oxford, pp. 3-24.

Este capítulo de libro es muy importante para esta investigación, ya que su autor como cuasi-empirista da ideas importantes; hacer matemáticas no es enunciar una serie de definiciones y axiomas deductivamente, sino resolver problemas utilizando esos axiomas, teoremas y demás propiedades matemáticas. En álgebra lineal esto es precisamente lo que se pretende en esta investigación.

1.4.7 Examining the Method of Proofs and Refutations in Pre-Service Teachers Education[28]

Este artículo trata sobre un estudio que se realizó para determinar cómo el método de Lakatos se pone en práctica en un programa de formación docente. La muestra consta de 24 profesores en formación en educación matemática elemental en Turquía, se les presentó un problema en el que se examinó la relación entre el perímetro y área de un rectángulo. El problema que se planteó fue: ¿Si el perímetro de un rectángulo aumenta, también se incrementará su área de la misma manera? Se proponía la conjetura y los estudiantes en grupos trabajaban en la respuesta. La mitad de los grupos dijo que era cierto, la otra mitad encontró contraejemplos, y por último solamente dos grupos mejoraron la conjetura convirtiéndola en verdadera.

El hallazgo reveló que el método de Lakatos era utilizable en el programa de formación docente. Sin embargo, algunos pasos del método descrito en Lakatos (1976) no estaban previstos en el entorno real del aula. El autor resalta la importancia del método cuasiempírico de Lakatos en la educación matemática afirmando que las matemáticas no se deben enseñar como un conjunto de verdades inmutables y absolutas ni como una cuestión de conjuntos estructurados de axiomas; se debe comenzar con problemas en los cuales el estudiante realice conjeturas y por medio de estrategias realice las demostraciones y/o refutaciones de éstas.

Este trabajo es significativo para la presente investigación ya que se muestra un ejemplo y resultados en geometría de procesos de enseñanza y aprendizaje utilizando el método cuasiempirista de Lakatos.

[28] Karakus F y B. Examining the method of proofs and refutation in pre-service teachers education, recuperado el 6 de agosto de 2015 del URL:http://www.scielo.bgr/scielo.php?pid=S0103636X2013000100011&script=sci_arttext.

1.5. Álgebra lineal y geometría

1.5.1. Geometrical and figural models in linear algebra[29]

En este artículo se estudian modelos geométricos, en especial basados en la teoría de Fischbein, quien considera que la intuición es un tipo de conocimiento que se caracteriza por la inmediatez y certeza, y que siempre supera los hechos dados. Fischbein mantiene que los modelos son un factor central de la intuición en las matemáticas y distingue varios tipos de modelos.

Un modelo intuitivo puede ser percibido como una realidad concreta; también puede deberse a una teoría matemática si se mantiene conectado con una cierta realidad (lo opuesto es un modelo teórico, es decir, una modelación matemática de una realidad física).

Dentro de los modelos intuitivos están los modelos analógicos y paradigmáticos. Un modelo analógico debe ser independiente del original; en ese caso, el modelo y el original pertenecen a dos sistemas conceptuales distintos. Por el contrario, un modelo paradigmático es una subclase de objetos, que se utiliza como modelo.

La autora define la intuición geométrica en álgebra lineal como el uso de modelos geométricos o figurativos. También define la geometría como una teoría matemática cuyo objetivo principal es proporcionar un modelo teórico para el espacio (restringido a R^3).

Un modelo geométrico es un modelo derivado de una geometría, es un modelo intuitivo porque la geometría está conectada con el espacio físico, pero además puede ser paradigmático o analógico, dependiendo de la geometría correspondiente (que la geometría puede ser de hecho una subclase de álgebra lineal, puede ser independiente de ella), y siempre se asocia con un modelo de figuras.

En el estudio que se realizó en este trabajo se trató de dar respuestas a las siguientes preguntas:

[29] Ghislaine, G. (2004). Geometrical and figural models in linear algebra. Recuperado del URL: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap74.pdf.

• *¿Cuáles son las posibilidades y los límites de la utilización de modelos geométricos y figurativos en álgebra lineal?*

• *¿Cuáles son los usos efectivos de modelos por parte de los profesores y estudiantes?*

Para ello se diseñaron cuestionarios que fueron contestados por profesores universitarios que enseñaran álgebra lineal (en Francia) y estudiantes.[30]

El cuestionario para docentes incluía varias partes relacionadas con diversos aspectos de la utilización de modelos geométricos y figurativos en álgebra lineal. En estos cuestionarios había dibujos que utilizan a veces los textos de álgebra lineal y se les preguntó si ellos lo utilizaban en sus clases y qué otras ilustraciones utilizaban en ellas.

El análisis de las respuestas llevó a la conclusión de que muy pocos docentes usan modelos de figuras, es decir, no utilizan muchos dibujos en sus cursos de álgebra lineal. Además, de los pocos que lo hacen, la mayoría de los dibujos se utilizan para ilustrar situaciones en dimensión ≤ 3. Las nociones ilustradas por al menos dos profesores son proyecciones, proyecciones ortogonales, simetrías, rotaciones y coordenadas de un vector.

Así que los profesores no parecen desarrollar un modelo figurativo específico independiente de un modelo geométrico en el álgebra lineal. Para algunos maestros, los dibujos sólo intervienen cuando mencionan una geometría afín en su curso de álgebra lineal; en ese caso, el álgebra lineal en R^2 y R^3 podría ser utilizada como un modelo intuitivo paradigmático para toda la teoría. Pero no constituye ninguna prueba de que los estudiantes serán capaces de utilizar ese modelo, sobre todo si los profesores no utilizan dibujos en espacios vectoriales generales.

Teniendo en cuenta las respuestas a todo el cuestionario, se llega a distinguir dos tendencias principales entre los profesores. Algunos alaban un enfoque estructural para álgebra lineal, con casi

[30] Ghislaine, G. (2004). Geometrical and figural models in linear algebra. Recuperado del URL: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap74.pdf.

ningún modelo figurativo asociado, mientras que otros optan por presentar una geometría afín, con un modelo figurativo asociado, antes de introducir el álgebra lineal. Sólo una minoría de profesores propone un modelo figurativo especialmente elaborado para el álgebra lineal. Observa la autora que esto podría tener consecuencias negativas en las prácticas de los estudiantes: si algunos estudiantes necesitan un modelo figurativo para ayudar a su razonamiento en álgebra lineal, es probable que utilicen un modelo asociado con la geometría afín, inadecuada en un espacio vectorial. La autora planteó a los estudiantes una tarea de álgebra lineal inusual: presentó dos conjuntos dados de vectores del plano representados por dos dibujos y se les pidió decir si existe una aplicación lineal entre ambos. Para dar respuesta a ella el estudiante puede utilizar algunos de los siguientes modelos.

Transformaciones geométricas habituales. Los estudiantes pueden utilizar el modelo de las aplicaciones "habituales" del plano: rotaciones, proyecciones, simetrías, dilataciones. Ese modelo puede venir del álgebra lineal o también de la geometría de la escuela secundaria. El principal problema aquí es que los estudiantes pueden responder negativamente si no identifican una transformación geométrica habitual que envíe el primer conjunto de vectores en el segundo. Ese problema ha sido señalado por Sierpinska, en un trabajo de investigación sobre el aprendizaje de las aplicaciones lineales. Ella llama ese tipo de fenómeno "pensando en conceptos matemáticos en términos de ejemplos prototípicos".

Preservación de las propiedades espaciales. Los estudiantes pueden asociar con la linealidad, o al menos con aplicaciones lineales de R^2 algunas propiedades de preservación. Por ejemplo: "Una aplicación lineal preserva la alineación" o "Una aplicación lineal conserva paralelogramos". Esta puede conducir a respuestas incorrectas si sólo se toma en cuenta la alineación; en ese caso, algunos estudiantes pueden declarar que un paralelogramo se puede transformar en un triángulo.

Propiedades de álgebra lineal asociados a un modelo figurativo. Los estudiantes pueden utilizar modelos de figuras, asociados a diferentes aspectos de la linealidad, y diferentes propiedades de aplicaciones lineales.

Propiedades de estabilidad. Las propiedades de estabilidad, para la suma y la multiplicación escalar, pueden ser asociado con dibujos. Por ejemplo, el dibujo de un paralelogramo puede ilustrar la suma de dos vectores, y la estabilidad correspondiente.

Transformación de los vectores de la base. El problema que puede surgir aquí es que los estudiantes sólo se preocupan por los dos vectores, olvidando el resto de la figura, en ese caso, incluso pueden responder que un paralelogramo se puede transformar en un círculo.

Este artículo es altamente pertinente para la investigación ya que en la misma la geometría será fundamental en el modelo didáctico que se propone y la visualización de los conceptos que se puedan llevar a cabo también será muy importante.

1.6. Sobre algunos syllabus de álgebra lineal de universidades colombianas y el MIT de E.U.A.

A continuación, se realiza un análisis de los programas de álgebra lineal de algunas universidades, en la que se destacan los principales factores que los componen.

1.6.1. Syllabus de álgebra lineal de la Universidad Distrital

El objetivo de la materia álgebra lineal es ofrecer al estudiante de ingeniería una visión global del álgebra lineal, sus fundamentos teóricos y aplicaciones, para que pueda modelar los diferentes problemas que surgen en sus cursos superiores y en su vida profesional.

La metodología del curso son clases magistrales acompañados de talleres que se realizan en grupo.

Los contenidos programáticos son: matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, bases ortonormales, proceso de Gram–Schmidt, matrices ortogonales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, diagonalización.

El tiempo es de 6 horas semanales y el texto guía es: Grossman, E. Álgebra lineal. Editorial McGraw-Hill. México.

1.6.2. Syllabus de álgebra lineal de la Universidad Javeriana

Este syllabus no plantea objetivos sino competencias que los estudiantes deben desarrollar. Los contenidos programáticos son matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, matrices ortogonales, transformaciones lineales autovalores y autovectores, diagonalización.

La metodología está compuesta por clases magistrales y talleres. El tiempo semanal es de 4 horas y el texto guía es: Kolman, Bernard/Hill, David R. Álgebra Lineal. 8ª. Edición. Ed. Pearson /Prentice Hall. México 2006.

1.6.3. Syllabus de álgebra lineal de la Universidad Nacional

El objetivo del curso de álgebra lineal es que los estudiantes asimilen los fundamentos del álgebra lineal, a nivel elemental, pero con la profundidad necesaria para adquirir los conocimientos y habilidades básicas (capacidad de análisis y de razonamiento lógico-deductivo) para la solución de problemas que involucren temas de álgebra lineal.

Los contenidos programáticos son: matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, bases ortonormales, proceso de Gram–Schmidt, matrices ortogonales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, diagonalización.

La metodología del curso se basa en la modalidad de cursos magistrales que consiste de un sistema integrado de conferencias teóricas, talleres y asesorías.

El tiempo de dedicación semanal es de 4 horas, el texto guía es: Kolman, Bernard y David R. Hill Algebra Lineal Pearson-Prentice Hall. Octava edición, México 2006.

1.6.4. Syllabus de álgebra lineal de la Universidad de los Andes.

El objetivo del curso es dar a los estudiantes las herramientas básicas de la materia, usadas en todas las ciencias y en las distintas ramas de ingeniería, y presentar estas herramientas de una forma matemáticamente rigurosa.

Los contenidos programáticos son: matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, bases ortonormales, proceso de Gram–Schmidt, matrices ortogonales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, y diagonalización.

La metodología está compuesta por dos sesiones magistrales de una hora y media y dos sesiones complementarias de una hora por semana. La duración del curso es de quince semanas. En las sesiones magistrales, el profesor encargado de la clase desarrolla de manera formal los aspectos teóricos del curso y, en las sesiones complementarias, los estudiantes resuelven ejercicios bajo la supervisión de un profesor.

El texto guía es: J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard, *Linear Algebra*, 3rd. Edition, Addison-Wesley, 1995.

1.6.5. Syllabus de álgebra lineal de la Universidad de Antioquía.

El objetivo del curso es proporcionar al estudiante una adecuada fundamentación teórica de los principales aspectos y resultados del álgebra lineal, así como enseñar el camino de aplicaciones de éstos.

Los contenidos programáticos son: matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, bases ortonormales, proceso de Gram – Schmidt, matrices ortogonales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, diagonalización y formas cuadráticas, y secciones cónicas.

La metodología no aparece y el tiempo semanal es de 4 horas. El texto guía es: Pita Ruiz, Claudio de j. Álgebra lineal. Mc Graw-Hill. Interamericana de México, 1991.

1.6.6. Syllabus de algebra lineal del MIT

El objetivo es aprender a emplear matrices, entendiendo su funcionamiento.

Los contenidos programáticos son: matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, bases ortonormales, proceso de Gram–Schmidt, matrices ortogonales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, diagonalización, el álgebra lineal en la ingeniería (grafos y redes, matrices de Markov, matriz de Fourier, transformada rápida de Fourier, programación lineal).

La metodología se basa en el trabajo independiente y cooperativo, donde se comentan y discuten los problemas reto, se utiliza Matlab.

El tiempo asignado es de 3 horas semanales.

El texto guía es: Strang, Gilbert, *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, marzo de 2003.

1.6.7. Un resumen comparativo con universidades colombianas seleccionadas

Tabla1. Factores de comparación con Universidades Colombianas

Universidades	Horas sem.	Horas totales	Metodología	Estrategia	Texto Guía	Temas no Comunes con U.D
Distrital	6	96	Clases Magistrales	Trabajo individual y cooperativo	Grossman	
Javeriana	4	64	Clases Magistrales	Trabajo individual y cooperativo	Kolman,	No hay
Nacional	4	64	Clases Magistrales	Trabajo individual y tutorías	Kolman,	No hay
Andes	3	45	Clases Magistrales	Trabajo individual cooperativo y tutorías	Fraleigh	Formas cuadráticas y se cciones cónicas
Antioquia	4	64	Clases Magistrales	Trabajo individual y tutorías	Pita Ruiz	Formas cuadráticas y se cciones cónicas

Tabla2. Factores de comparación de la Universidad Distrital con la MIT

Universidad	Horas sem.	Horas totales	Metodología	Estrategia	Texto Guía	Temas no Comunes con U.D
Distrital	6	96	Clases Magistrales	Trabajo individual y cooperativo	Grossman	
MIT	3		Clases Magistrales	Trabajo individual, cooperativo y tutorías	Strang	Programación lineal

En los contenidos de todos los programas se aprecia temas comunes, tales como: matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, vectores en R^2 y R^3, espacios vectoriales: bases, dimensión, rango, cambio de base, bases ortonormales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, diagonalización.

En cuanto a la metodología, son comunes las clases "magistrales", talleres y trabajo independiente.

En cuanto al tiempo de dedicación semanal en casi todas las universidades es de 4 horas, en la Universidad Distrital 6, de las cuales dos son de trabajo cooperativo, y en MIT es de tres horas semanales.

Se consideran los temas fundamentales al estudio asociado con esta investigación se corresponden con los relacionados en el primer párrafo de este epígrafe. Sin embargo, la metodología que se empleará no se corresponderá con lo que convencionalmente se ha estado utilizando hasta el momento, ya que se centrará en talleres orientados desde un razonamiento plausible.

1.7. Sobre la construcción de conceptos del Álgebra Lineal

1.7.1. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition[31]

Este artículo sugiere las siguientes recomendaciones para la enseñanza del álgebra lineal.

1. El plan de estudios y la presentación del primer curso de álgebra lineal deben responder a las necesidades de las disciplinas donde se imparte.
2. Los departamentos de matemáticas deben considerar seriamente hacer su primer curso de álgebra lineal orientado a matrices.
3. Las facultades deben considerar las necesidades e intereses de los estudiantes como aprendices.

[31] Harel, G.(S/A) The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition recuperado el 7 de septiembre2014 del URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/The%20Linear%20Algebra%20Curriculum%20Study%20Group%20Recommendations%20%20Moving%20Beyond%20Concept%20 Definition.pdf

4. Se debe alentar a la utilización de la tecnología.
5. Para estudiantes de matemáticas debe haber un segundo curso de álgebra lineal.

La primera parte del artículo da una gran relevancia sobre conceptos e imágenes de conceptos, apuntando que un concepto es definido por medio de una definición verbal que aparece en un libro de texto o es escrito por el docente en la pizarra, y que describe el concepto con precisión. La imagen de un concepto construido por el estudiante, por otro lado, es un esquema mental, una red, que consiste en:

a) lo que se ha asociado con el concepto en la mente de la persona y
b) lo que la persona puede hacer en relación con el concepto.

Esto puede incluir, por ejemplo, analogías y relaciones con otros conceptos, proposiciones en relación con el concepto, ejemplos y contraejemplos, y formas de resolver ciertos problemas. En particular, el estudiante va construyendo significado para el concepto a partir de la solución de problemas que lo involucran.

En términos generales, poseer una imagen que sea eficaz de un cierto concepto, significa entender el concepto y el indicador más importante para la comprensión de éste es la capacidad para resolver problemas relacionados con el concepto. De este modo se retroalimentan en doble vía: el significado apropiado permite resolver problemas y la resolución de problemas permite al estudiante construir significado cada vez más apropiado para el concepto.

Este indicador, sin embargo, es demasiado general, ya que los problemas pueden ser de diferentes niveles. Hay cuatro indicadores interrelacionados para la comprensión de un concepto:

1. la capacidad de recordar, no sólo memorizar,
2. la capacidad de comunicar ideas en sus propias palabras,
3. la capacidad de pensar en términos generales,
4. la capacidad de conectar ideas.

Cuando un estudiante construye una imagen de concepto adecuado, no sólo memoriza una definición del concepto, el estudiante sabe leer y escribir sobre el concepto y comunicarse con los demás sin sentirse obligado a referirse a la definición formal. El desarrollo conceptual que conduce a esta etapa no es inmediato.

Los conceptos se definen en términos generales. Pero esto no garantiza que los estudiantes sean capaces de pensar sobre ellos en términos generales. Si se mira, por ejemplo, el concepto de independencia lineal, se puede apreciar que la razón de la dificultad que los estudiantes tienen con este concepto no es tanto en la comprensión de su definición en sí, sino en su aplicación para resolver problemas que implican vectores no específicos.

Se discuten tres factores esenciales para la construcción de imágenes de concepto eficaces en álgebra lineal:

a. La adecuación del tiempo asignado al álgebra lineal. Para la mayoría de los estudiantes, la construcción eficaz de una imagen del concepto es un proceso largo y laborioso, y requiere un gran esfuerzo y tiempo suficiente por parte de los estudiantes así como de sus maestros.
b. Antecedentes y disposición de los estudiantes en cuanto a contenido (objetos, lenguaje e ideas que son únicos al álgebra lineal).
c. Antecedentes y preparación de los estudiantes en relación con el concepto de la demostración.

Desde un punto de vista cognitivo y pedagógico, un curso de álgebra lineal debe hacer énfasis en las demostraciones ya que éstas son a la vez una necesidad y un desafío. Son una necesidad porque el énfasis en las demostraciones es indispensable para el desarrollo del concepto el cual es eficaz y rico en imágenes en álgebra lineal, ya que sin entender el razonamiento detrás de la construcción de conceptos y la justificación de los argumentos, los estudiantes terminarán memorizando algoritmos y recitando definiciones. Es también un desafío porque, las demostraciones son un obstáculo para muchos estudiantes.

Otra recomendación es implementar el uso de la tecnología para la enseñanza del álgebra lineal, se recomienda Matlab. Es la opinión del autor del presente documento que en el año que se escribió el artículo Matlab era el mejor, hoy en día existen software libre muy bueno, lo importante es que se utilice algún software para potenciar el aprendizaje desde la tecnología.

Este artículo es de fundamental importancia para esta investigación ya que el autor hace unas recomendaciones muy valiosas que se deben tener en cuenta tales como, realizar demostraciones como desafío y necesidad, al igual que el uso de la tecnología y la forma en que se logra el aprendizaje de los conceptos.

Conclusiones parciales del Capítulo 1

Los estudios realizados sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, así como los del cuasiempirismo y razonamiento plausible, proporcionan los elementos científicos fundamentales que sustentan el problema y campo de acción de esta investigación. La mayoría de los autores consultados se constituirán en el soporte teórico para el próximo capítulo, tal como se indicó en cada momento.

Por otra parte, el conocimiento de los estudios que se han llevado a cabo sobre los problemas de aprendizaje del álgebra lineal resultó, no solo necesario, sino que garantiza un enfoque original del aporte tanto teórico como práctico que se quiere llevar a cabo con este trabajo y con ellos resultados novedosos para la educación matemática.

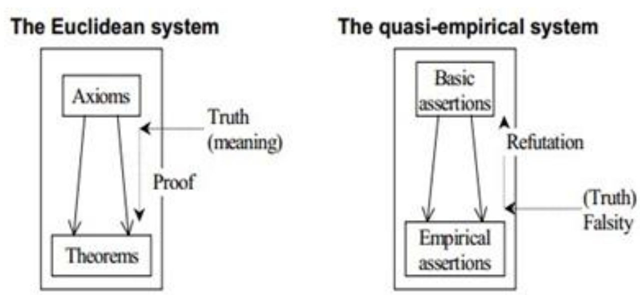
Además, en el capítulo se ve reflejado la importancia del álgebra lineal en las carreras de ingeniería, ya que, a comienzos de los años 90, tanto en Estados Unidos como en Europa y otras partes del mundo, se empezaron a organizar y formar diferentes grupos académicos ocupados por estudiar el problema de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Cada uno de estos grupos realizó y realizan recomendaciones a tener en cuenta para la enseñanza de la asignatura, pues no hay fórmula ni receta para resolver el problema, pero sí hay campo para investigar, proponer y mejorar su enseñanza y aprendizaje y por ende realizar un aporte para lograr una educación matemática de excelencia en Colombia.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se muestran los fundamentos teóricos que permiten orientar y valorar esta investigación a través del enfoque cuasiempirista de Lakatos unido al enfoque heurístico de Polya, la visualización, el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, con una visión didáctica, que debe conllevar a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal de los estudiantes de ingeniería. Es por ello que se retoman varias de las referencias del anterior capítulo.

2.1. Enfoque cuasi-empirista de Lakatos

Lakatos distingue dos tipos de sistemas para enfocar las ciencias matemáticas. Por un lado, sistemas euclidianos, llamando así a todos los sistemas matemáticos cuyas estructuras se desarrollan bajo un proceso axiomático deductivo, y por otro lado sistemas cuasi-empíricos que tienen el mismo objetivo pero que lo persiguen de diferente forma; es decir, un sistema basado en el desarrollo informal y cotidiano de las matemáticas. Así, los dos tienen en común un espíritu deductivo, es decir ambos comienzan con afirmaciones básicas que son axiomas o puntos de partida, y tratan de obtener por medio del análisis y/o deducciones lógicas teoremas; la diferencia son los caminos que utilizan, que se pueden identificar al observar las siguientes figuras:



Gráfica 2.[32] Esquema cuasiempirista

[32] Gábor, K.. Imre Lakatos's Philosophy of Mathematics. Recuperado el 15 de Mayo de 2014 del URL: http://hps.elte.hu/~kutrovatz/LakatosEng.pdf.

En el sistema euclidiano el conocimiento matemático es encadenado a definiciones, teoremas, demostraciones y corolarios. En el caso de los sistemas cuasi empíricos, la situación es ésta: la fuente de la verdad es la comparación con la experiencia por lo que las afirmaciones finales a las que se quiere llegar pueden asignarse directamente valores de verdad, pero la inferencia deductiva es tal que la verdad no puede ser heredado en la "marcha atrás" o "hacia arriba”. La verdad de la conclusión no permite decidir si las premisas son verdaderas. (También se dice que la inducción no es un procedimiento legítimo en este esquema deductivo general.) La falsedad, por el contrario, se hereda, ya que la falsedad de la conclusión implica la falsedad de (al menos de una) las afirmaciones locales, por lo tanto, los sistemas cuasi-empíricos trabajan con la refutación.

El proceso metodológico llevado a cabo por Lakatos se desarrolla mediante los siguientes pasos:

2.1.1. Conjetura primitiva

Una investigación matemática siempre parte de un problema (y cabe señalar que siempre termina en un problema). En el problema, debe realizarse o debe haber una intuición de cierta regularidad o conexión que no puede ser expresado dentro de los límites formales de teorías existentes. Por lo tanto, se debe expresar esta intuición como una conjetura primitiva, la cual no implica la posibilidad de la prueba.

Así, cuando algunos resultados particulares llevan a proponer una conjetura, es decir, una afirmación tentativa, es común que cuando se esté buscando regularidades, se falle en los primeros intentos hallando algún contraejemplo que refute la conjetura. Lakatos argumenta que las conjeturas no son inductivas, sino que se obtienen por procesos o tanteos de ensayo y error, a partir de algunas ideas o conjeturas ingenuas que el matemático tiene en mente cuando enfrenta el problema, y éstas se van refutando rápidamente una tras otra, hasta obtener la conjetura que él llama “primitiva”; algunos la llaman ingenua.

2.1.2. Análisis de la demostración

El siguiente paso es construir una teoría formal en la que la conjetura primitiva se puede expresar con precisión y poder realizar su demostración por medio de algún método deductivo. Para poder realizar esto se debe dar una demostración 'tentativa' de esta afirmación, es decir una manifestación 'intuitiva' de su validez general.

Por lo tanto, una vez se tenga la conjetura primitiva y que parezca “bastante plausible”, es decir que parece verificarse en todos los casos observados hasta el momento, entonces se intentará demostrarla, contrastándola a nuevas pruebas. Esta forma de contrastar se puede realizar de distintas maneras y con diferentes grados de profundidad. Una manera de poner a prueba la conjetura es a través de lo que se llama "verificación de consecuencias de la misma", donde se trata de encontrar una afirmación que se deduzca de dicha conjetura. Si la afirmación resulta falsa, entonces a través de un razonamiento puramente deductivo es posible concluir que la conjetura original también lo es. Pero si dicha afirmación resulta verdadera, entonces la conjetura original es más creíble, más plausible. Una importante consecuencia podría ser el cumplimiento de la conjetura en un nuevo caso particular aislado diferente a los que han sido considerados anteriormente. También se puede realizar algún tipo de verificación que permita corroborar si es válida la conjetura para toda una serie de casos, es decir para un subconjunto del que se considera como el dominio de validez de la conjetura considerada. Sin embargo, la forma más usual de contrastar una conjetura es verificar sus consecuencias, y también es posible contrastarla de otras maneras, por ejemplo, a través del examen de un posible motivo de la misma, que consiste en determinar una afirmación de la cual se deduce dicha conjetura. Si la afirmación resulta verdadera, por razonamiento deductivo es posible concluir que la conjetura original también lo será. Pero si se puede comprobar que dicha afirmación es falsa, disminuirá la confianza en la conjetura.

Así mismo es posible contrastar la conjetura por medio del examen de una conjetura rival incompatible, lo cual significa que la otra conjetura no puede ser verdadera al mismo tiempo que la conjetura original, por lo tanto, probando que ésta es falsa, se contribuirá a fortalecer la confianza en la conjetura original.

Otra forma diferente de contrastar es a través del examen de una conjetura análoga; es decir, si es posible vislumbrar y clarificar una analogía entre la conjetura original y otra, y demostrando que esta última es verdadera, la confianza en la conjetura original será mucho mayor.

2.1.3. Contraejemplos locales

Siempre que se realiza un análisis de la demostración es posible que se encuentren contraejemplos, en el razonamiento plausible se distinguen dos tipos, los llamados contraejemplos locales que no refutan el 'teorema' en general, sólo refutan algunos "lemas ocultos" si los hay y si están mal, y que inconscientemente se incluye en la demostración del teorema. En este caso se sustituye el 'lema culpable' con otro que excluya ahora la validez del contraejemplo.

2.1.4. Contraejemplos globales

Por otro lado, están los contraejemplos globales, los cuales refutan el teorema inicial, en caso de que éste tenga inconsistencias. Sin embargo, no se debe excluir el teorema y su demostración, lo que se debe hacer es modificar los conceptos y nociones involucrados, ya que esto hace más concreta la afirmación y puede eliminar los contraejemplos.

De esta manera, a través de la interacción dialéctica de demostraciones, refutaciones y prueba analizada, se crea gradualmente un sistema formal de conceptos precisos, y de este modo se construye, formalmente, una nueva teoría matemática.

Es importante recalcar que, así como cada nueva verificación de la conjetura fortalece la confianza en ella, el encontrar un caso particular que no verifique la conjetura (contraejemplo) puede llevar a revisar la misma y a tratar de reformularla. En caso de encontrar contraejemplos, Lakatos propone tratar de reformular la conjetura de diversas maneras:

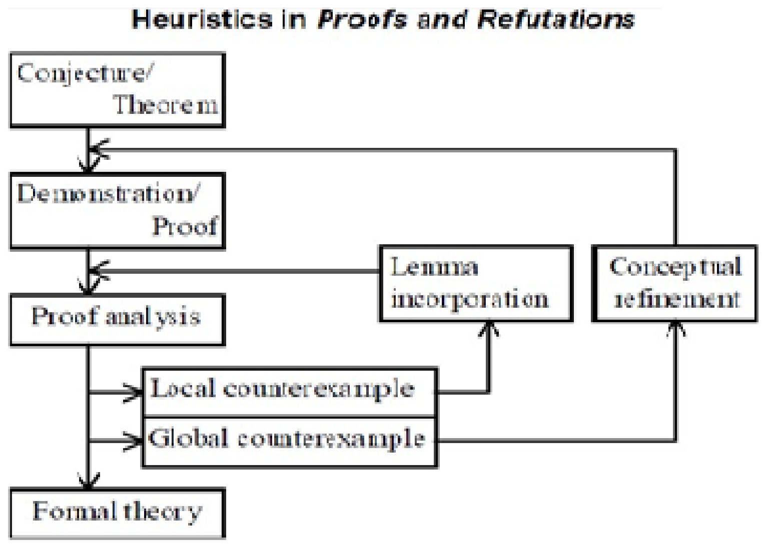
- Mediante una redefinición de los términos que en ella intervienen; es decir, tratar de que queden excluido cualquier contraejemplo de la conjetura original mediante redefiniciones convenientes de los términos involucrados.
- Mediante la reinterpretación de contraejemplos, significa que se debe realizar un minucioso análisis del contraejemplo para verificar que, en realidad, corresponde a una mala interpretación del mismo
- Mediante una restricción de su dominio de validez, de manera tal que la conjetura sea válida en el dominio restringido que excluye los contraejemplos hallados.
- Mediante la identificación del lema, que puede ser explícito o implícito en la demostración y que al ser refutado por un contraejemplo se podrá incorporar a la conjetura como condición. A esto lo llamó Lakatos "método de incorporación de lemas" el cual mejora la conjetura a partir de la prueba.

Luego esta conjetura primitiva se puede contrastar por medio de:

1. Examen de consecuencias en el que se realiza la comprobación de la validez de la conjetura en un nuevo caso particular aislado o en un conjunto de casos o por medio de un estudio mental contrastante que se puede realizar por un examen de un posible motivo, una conjetura rival incompatible o una conjetura análoga
2. Reformulación de la conjetura, encontrando contraejemplos globales que refutan la conjetura o contraejemplos locales que refutan alguno de los lemas, las cuales se pueden dar mediante redefiniciones de los términos, reinterpretación del contraejemplo o la restricción del dominio de la conjetura como condición.

2.1.5. Teoría deductiva

Por último, el problema será resuelto y se pasará a la etapa formal, donde los significados de los términos son fijados dentro del sistema axiomático, y muchos teoremas (probablemente incluyendo el original) se pueden deducir. En esta última etapa, toda la actividad matemática se reduce a resolver rompecabezas. Para la filosofía formalista de las matemáticas, ésta es la única forma real de la actividad matemática, pero para Lakatos, "éste es el más aburrido y menos interesante, ya que al formalizar se oculta la aventura y se esconde la lucha". Los anteriores pasos se pueden resumir en la siguiente figura:



Gráfica 3[33]. Esquema heurístico de pruebas y refutaciones.

Se observa que la teoría cuasi-empírica llega a la formalización de la teoría, pero su interés principal es describir cómo la matemática es generada por una comunidad y cuál es la trayectoria histórica de su génesis.

2.2. 2.2. El enfoque heurístico de Polya

Para Polya, hay dos tipos de razonamiento en matemáticas, demostrativo y plausible. Ahora bien, el que generalmente desarrollan los docentes en clase de álgebra lineal es el demostrativo, sin darle mucho espacio a la intuición y a la inferencia plausible. Los dos tipos de razonamiento se complementan, en el razonamiento estricto lo principal es distinguir una demostración de una intuición, una prueba válida de un intento sin validez, mientras que en el razonamiento plausible lo importante es

[33] Gábor, K.(s/a). Imre Lakatos's Philosophy of Mathematics. Recuperado el 15 de mayo de la URL: http://hps.elte.hu/~kutrovatz/LakatosEng.pdf.

distinguir entre intuiciones, unas más y otras menos razonables. Además, el uso eficiente del razonamiento plausible juega un papel fundamental en la resolución de problemas.

Dice Polya que todos los conocimientos, aparte de las matemáticas y de la lógica demostrativa, consisten en conjeturas. En el razonamiento plausible se llama conjetura a la proposición que se forma de indicios y observaciones, es decir de la experiencia a través de la inducción. En matemáticas, el concepto de conjetura se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que aún no ha sido demostrada ni refutada. Una vez que sea demostrada la veracidad de una conjetura, ésta pasará a ser considerada un teorema. Por ejemplo, una conjetura muy conocida en matemáticas es la llamada conjetura de Goldbach, a la cual se llega por inducción, observando que todo número par mayor que dos se puede escribir como la suma de dos números primos impares. (Recientemente ha habido progreso en la demostración de una de las conjeturas de Goldbach que ilustra con claridad el proceso descrito por Lakatos y Polya en su heurística.)

2.2.1. Inducción

Para Polya siempre se debe aprender de la experiencia y hacer de ella el mejor uso posible, extraer las conclusiones más correctas y acumular las experiencias más útiles para establecer la mejor línea de investigación; el procedimiento para tratar con la experiencia se suele llamar inducción.

La inducción es parte fundamental del razonamiento plausible, comienza con algunas observaciones como patrones o comportamientos los cuales llevan a sugerir un juicio general y pasar a formular una conjetura.

Polya recomienda a los docentes desarrollar en los estudiantes una actitud inductiva ya que ella permite adaptar creencias y experiencias tan eficazmente como sea posible, además requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones y descender de las generalizaciones más altas a las más concretas observaciones.

2.2.2. Generalización, especialización y analogía

La generalización es el paso de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contiene a la primera, por ejemplo, se generaliza cuando se pasa por ejemplo del estudio de polinomios de grado dos a polinomios de grado *n*.

Especialización es pasar de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie más pequeña contenida en la primera, por ejemplo, cuando se pasa de funciones a funciones exponenciales.

Analogía es una especie de semejanza, aunque para Polya la diferencia esencial entre analogía y semejanza es la intención del pensador.

2.2.3. Argumentaciones

Polya identifica ciertos patrones de inferencia plausible que se deben incluir en un modelo didáctico que esté basado en su heurística, las cuales son reglas que muestran condiciones para hacer más o menos creíble una conjetura, y que se describen a continuación.

1. Lo que se llama *patrón inductivo fundamental* el cual expresa que "la verificación de una consecuencia hace a la conjetura más creíble", que es lo que en lógica formal se llama *modus ponens*, es decir, si *p* es una conjetura bien formulada y *q* es una consecuencia de *p*, esto es si *p* implica *q*, y resulta que *q* es verdadera, estas dos premisas hacen que la conjetura *p* sea más creíble.
2. Otro patrón de razonamiento elemental clásico que también se aplica es el *modus tollens*, el cual se utiliza de la siguiente manera: *p* y *q* son conjeturas tales que *p* implica *q*, pero si *q* es falsa, entonces *p* será falsa y por lo tanto no será creíble.
3. Verificación sucesiva de varias consecuencias. Sea *p* una conjetura y q_1, q_2, q_3..., q_n las primeras verificaciones de *p* y además *p* implica q_{n+1}, entonces si q_{n+1} es verdadera, pero muy diferente de las primeras verificadas, entonces *p* es mucho más digna de ser creíble. Ahora si q_{n+1} es verdadera,

pero muy semejante de las primeras verificadas, entonces *p* es sólo un poco más digna de ser creíble.

4. Verificación de una consecuencia improbable. Sean *p* y *q* conjeturas tales que *p* implica *q* y *q* es muy improbable en sí misma, si *q* es verdadera, entonces *p* es mucho más digna de ser creíble. Pero si *p* implica *q* y *q* es bastante probable en sí misma y además *q* es verdadera, entonces *p* es sólo un poco más digna de ser creíble.
5. Inferencia por analogía. Una conjetura es más creíble cuando una conjetura análoga es verdadera, así, si *p* es análoga a *q* y *q* es verdadera, entonces *p* será más creíble.

Polya concluye que se puede observar que estos patrones están caracterizados por dos aspectos: la dirección (es más creíble o es menos creíble) y la magnitud (es mucho más creíble o sólo un poco más creíble).

Propiedades

1. El razonamiento plausible se distingue por ser: azaroso, provisional y controversial.
2. No tiene normas rígidas, por el contrario, son fluidas, además no hay una teoría clara y precisa del mismo.
3. De las características de los patrones de inferencia ya mencionados, la dirección se considera impersonal, puesto que no depende de la persona que realiza la inferencia, y además puede ser universal ya que tampoco depende del contenido, y hasta se podría considerar autosuficiente porque no necesita de nada fuera de las premisas para llegar a la conclusión, lo que de ningún modo hace considerarlo definitivo. El otro aspecto de la magnitud es también impersonal, universal y autosuficiente.

2.3. La tecnología en la enseñanza de las matemáticas

"La existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje"[34].

Actualmente la enseñanza de las matemáticas resalta la importancia del uso de la tecnología como herramienta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que con ésta el estudiante puede realizar observaciones y obtener conclusiones que en otros ambientes no va poder lograr.

En la literatura se encuentran variadas investigaciones sobre el uso de herramientas tecnológicas por parte del estudiante en la solución de problemas y en la visualización de conceptos en las cuales se observan los procesos que ellos realizan y su uso en representaciones, conjeturas, conclusiones, etc. De esta forma, se puede proponer qué tipo de actividades son las que el docente debe planear para optimizar la comprensión de los conceptos matemáticos y así mismo se puedan identificar las ventajas y deficiencias que se presentan al hacer uso de ellas.

El uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha cambiado su manera tradicional ya con ella se pretende que el estudiante explore y desarrolle un ambiente por descubrimiento y reflexión, la tecnología con frecuencia se usa para ayudar a construir significado para conceptos y teorías formales. Por otra parte, el NCTM (2000) indica que "el uso de la tecnología no debe pensarse como sustituto de operaciones básicas, sino que debe ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas, se debe sacar provecho a la potencia graficadora que actualmente tienen los paquetes matemáticos. Dada la capacidad de cálculo de los recursos tecnológicos los problemas a proponer al estudiante deben ser apropiados para que ellos puedan utilizar y ejecutar procedimientos

[34] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 52 (3), pp. 215-241.

rutinarios con rapidez y seguridad y se pueda disponer mayor tiempo al desarrollo de modelos y conceptos" [35](NCTM, 2000, p. 25).

En este trabajo se hará uso de la tecnología tanto como herramienta para visualizar conceptos, como para que el estudiante explore conceptos y descubra conjeturas.

2.42.4. La visualización

"La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación y uso de la reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión"[36] .

Durante las últimas dos décadas ha surgido y evolucionado el software matemático, en especial la parte gráfica, es por ello que actualmente hay una tendencia a reconocer la importancia de la visualización en los procesos y enseñanza de las matemáticas[37] y por consiguiente presenta nuevas formas de hacer matemáticas.

Como ya se ha mencionado, la enseñanza del álgebra lineal en general se realiza de manera formal y abstracta, dejando en un segundo plano otras posibilidades como son las de explorar, comprobar y refutar hipótesis, y verificar numérica y visualmente utilizando herramientas y estrategias didácticas computacionales. Es por ello que hoy en día hay muchos estudios de la visualización en el pensamiento matemático.

La comunidad de educación matemática ha realizado enormes y variados investigaciones y aportes en torno a la visualización, entre éstas están las investigaciones sobre el papel que desempeña la visualización de las figuras geométricas en el desarrollo de otras actividades cognitivas, como por

[35] Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* año 2, pp. 11-44.
[36] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics.* 52 (3), pp. 215-241.
[37] Marmolejo y Vega (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje recuperado el 10 de agosto del 2016 del URL: http://www.redalyc.org/pdf/405/40525846001.pdf.

ejemplo, el razonamiento deductivo, la argumentación y la modelación, así como aquellos que pretenden estudiar el papel de la visualización en el desarrollo de conceptos matemáticos en contextos educativos, como por ejemplo en conceptos como homotecia o área.

También hay estudios que investigan el rol de los materiales didácticos en entornos informáticos en el desarrollo de la visualización; así como, estudios respecto a cómo los libros escolares promueven o inciden en el aprendizaje por medio de la visualización.

También se afirma que en la visualización se llevan a cabo matemáticas que están relacionadas con el campo algebraico, numérico, gráfico y hasta verbal, así la visualización opera con el funcionamiento de estructuras cognitivas y las relaciones entre distintas representaciones de un objeto matemático. Por ello, la visualización es un medio con el que cuenta un estudiante para poder tener un mejor entendimiento y cuando se hace referencia a la visualización de un concepto, se habla de comprender un concepto a través de una imagen visual.

En este trabajo se van a realizar actividades que conlleven la representación, la conceptualización, el razonamiento, la visualización y la resolución de problemas. Por otro lado, no se pretende utilizar la visualización para la enseñanza de la geometría, sino utilizar ésta como herramienta para el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal.

2.5. La geometría en el aprendizaje del álgebra lineal

Una herramienta fundamental en el aprendizaje del álgebra lineal es la geometría como método para visualizar conceptos y procesos matemáticos, ya que ésta ayuda a la formación mental o física de algunos conceptos y procedimientos matemáticos. Es decir, permite asociar imágenes con conceptos o procedimientos.

A continuación, se muestran ejemplos referentes de algunos artículos mencionados en el estado del arte.

Problema 1. Tomado del apéndice del artículo: On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces. *Educational*:

Utilizando visualización geométrica y un paquete matemático, responda las siguientes preguntas y sustente su respuesta:

¿Cuál de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial V?

a. $w = \{\ x, y \ \in R^2 : y = x + 1\}$ Una de las respuestas fue: Tomando el espacio vectorial V como R^2 o R^3, w no puede ser un subespacio ya que, como se observa en la figura:

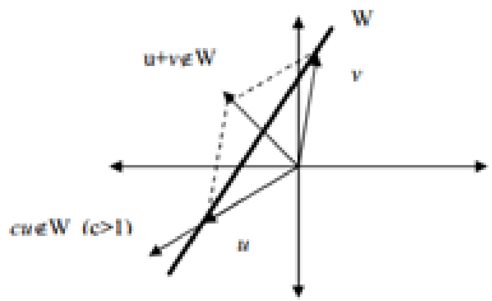


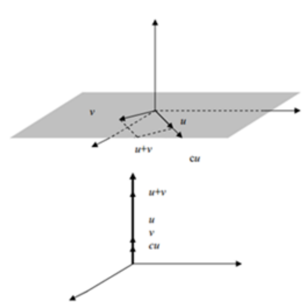
Figura 4[38] La geometría en el aprendizaje del álgebra lineal ejemplo1.

No cumple la propiedad de clausura para la suma, para cualquier vector $x, x + 1$

b. Sean $W_1 y\ W_2$, subespacios no triviales de un espacio vectorial V, ¿es la unión $W_1 \cup W_2$, un subespacio del espacio vectorial V?

Una de las respuestas fue:

Escogiendo V como R^3 y llámese W_1 = el plano xy y W_2= al eje z, ambos subespacios de R^3, como se ilustra en la siguiente figura:



[38] Yains, S. y Ahmet I. (2003). On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces. *Educational Research Journal* 《教育研究學, Vol.7 , No. 1, Marzo 2003, pp. 59-67.

Figura 5. La geometría en el aprendizaje del álgebra lineal ejemplo2.

Ahora la adición de dos elementos tomados de esa unión, uno del subespacio W_1 y otro del subespacio W_2 se ilustra en la siguiente figura:

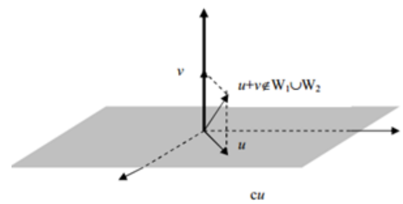


Figura 6. La geometría en el aprendizaje del álgebra lineal ejemplo 3.

Donde se muestra gráficamente que la suma no cumple la propiedad de clausura.

c. ¿Sean V un espacio vectorial y w un vector fijo en V. Se define W como el conjunto de todos los múltiplos escalares de w. ¿Será W un espacio vectorial?

Una respuesta fue la siguiente: Sea V = R^2 y w un vector fijo, como se ilustra en la siguiente figura:

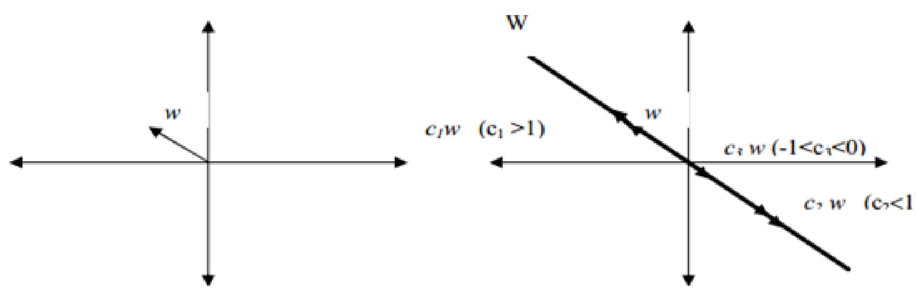


Figura 7. La geometría en el aprendizaje del álgebra lineal ejemplo4.

Entonces el nuevo conjunto está conformado por vectores de la misma dirección del primero, así, este nuevo conjunto sí es un subespacio vectorial.

2.6. Sobre los modelos

Un modelo es aquello que se toma para tratar de reproducir algo igual, también se define como una representación de un objeto, sistema o idea. Mario Bunge dice que un modelo es una construcción teórica que pretende otorgar una explicación sobre un fragmento acotado de la realidad y da información de cómo intervenir en dicha realidad.

El objetivo de los modelos es ayudar a explicar, entender o mejorar un sistema. El modelo de un objeto puede ser una copia exacta de éste o una abstracción de las principales propiedades del objeto.

El ser humano siempre ha intentado representar y expresar objetos e ideas con el fin de entender, transformar y mejorar su medio, así que el uso de los modelos no es algo nuevo.

Los modelos se suelen utilizar como herramienta que ayudan a organizar y clasificar conceptos imprecisos e inconsistentes. Una buena construcción del modelo ayuda a organizar, evaluar y examinar la validez de pensamientos.

Al tratar de explicar ideas o conceptos complejos, los lenguajes verbales muchas veces presentan ambigüedades e imprecisiones, es por eso que un modelo es la representación concisa de una situación ya que representa un medio de comunicación más eficiente y efectivo.

Los modelos no proporcionan información directa de lo que ocurre en el mundo real, todas las predicciones que se obtengan del modelo deben ser contrastadas por resultados empíricos. Existen modelos económicos, políticos, financieros, educativos, modelos de simulación, etc. El fin de este trabajo es el diseño e implementación de un modelo didáctico.

2.6.1. Constructivismo

Concibe el aprender como resultado de procesos de construcción tanto personal como colectiva, se opone al aprendizaje receptivo o pasivo; en este modelo se concibe la enseñanza como una actividad crítica y al docente como investigador autónomo que reflexiona sobre su práctica. En el constructivismo, al igual que el razonamiento plausible, aprender es arriesgarse a errar, es una organización de métodos de apoyo que permiten a los estudiantes construir su propio saber.

En el constructivismo, el alumno es visto como un constructor activo de su propio conocimiento, en él se debe fomentar actividades que provoquen auto-acciones, debe verse al estudiante como un sujeto que posee un determinado nivel de desarrollo cognitivo que determina sus acciones y actitudes, debe él mismo construir su propio conocimiento, siempre y cuando el profesor sea una guía; es decir el profesor debe ser un promotor del desarrollo y de la autonomía de los estudiantes. Debe conocer a profundidad los problemas y características del aprendizaje operatorio de los alumnos y las etapas y estadios del desarrollo cognitivo general.

Esta teoría tiene dos tipos de aprendizaje: de sentido amplio, el cual predetermina lo que podría ser aprendido, y el de sentido estricto, el cual contribuye a lograr avances en el primero.

El método de aprendizaje que se utiliza desde un enfoque constructivista es el denominado de "enseñanza indirecta", que consiste en crear o diseñar actividades que desarrollen la iniciativa y creatividad del estudiante. Para ello el profesor debe promover conflictos cognitivos, respetar los errores, el ritmo de aprendizaje de los alumnos, y crear un ambiente de respeto y camaradería. Se considera que es el adecuado en el modelo que se está proponiendo para este estudio.

Para Piaget el estudiante construye su conocimiento a partir del medio que lo rodea, mientras que para Vygotsky es el uso de instrumentos socioculturales, los cuales, pueden ser básicamente de dos tipos: las herramientas y los signos, los que son fundamentales para el aprendizaje del sujeto.

Con este enfoque, el alumno debe ser visto como un ser social, protagonista y producto de múltiples interacciones sociales. Los conocimientos y habilidades que inicialmente fueron transmitidos y regulados por otros, posteriormente deben ser interiorizados para que el que aprende luego sea capaz de hacer uso de ellos de manera autorregulada. En este sentido, el papel de la interacción social con los otros (especialmente con más conocimientos o habilidades como el maestro, padres, niños mayores, sus pares, etc.) es considerada de importancia fundamental para el desarrollo cognitivo y sociocultural.

En esta teoría el docente debe centrar su enseñanza en promover las denominadas zonas de desarrollo próximas, los cuales son espacios que, gracias a la interacción y ayuda de otros, una persona puede trabajar y resolver un problema o realizar una tarea de una manera y con un nivel que no sería capaz de resolverlo solo. Es un proceso activo donde se da la relación entre el aprendizaje y su desarrollo.

2.6.2. Flexibilidad cognitiva

La flexibilidad cognitiva es una teoría de aprendizaje que propone que el estudiante sea es capaz de aprender temas desde múltiples perspectivas; esta teoría se caracteriza por mantener que el estudiante es capaz de efectuar fácilmente un cambio de una actividad a otra y asimilar los cambios que pueden suceder en la solución de problemas o desarrollo de alguna actividad o tarea.

En la solución de problemas matemáticos, por ejemplo, propone que el sujeto sea capaz de examinar un objeto desde diferentes perspectivas. Los estudiantes que tienen una capacidad cognitiva flexible tienen una mayor inherencia en su propio aprendizaje y éste es experimentado de una forma más significativa; además, la teoría propone que el estudiante necesita representaciones diferentes para que se produzcan aprendizajes complejos.

Conclusiones parciales del Capítulo 2

Este capítulo presenta la plataforma teórica que requiere un modelo didáctico conjetural de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en las carreras de ingeniería soportado en la escuela cuasiempírica, la visualización geométrica, la ayuda de recursos informáticos y la resolución de problemas.

Por otra parte, el conocimiento epistemológico del álgebra lineal es un componente importante para el diseño del syllabus y de las actividades.

Así como también es importante estudiar y conocer las teorías heurísticas de Lakatos y Polya que se fundamentan en las conjeturas, las pruebas o refutaciones de éstas, y que hacen parte del razonamiento plausible. Así mismo, las investigaciones y propuestas sobre la enseñanza del álgebra lineal a través de la visualización geométrica con el uso de la tecnología son fundamentales en el soporte teórico del modelo didáctico y el proceso metodológico que se proponen en el próximo capítulo.

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE UN MODELO DIDÁCTICO. METODOLOGÍA

3.1. Metodología

Este trabajo se desarrolló bajo un enfoque cualitativo y las bases teóricas de la investigación-acción, cuyo propósito fundamental se centra en mejorar la calidad de una acción, en este caso de la educación a través de avances teóricos y prácticos.

Sampieri (2010) describe lo que es la investigación-acción para varios autores. Sandin afirma que "la investigación-acción pretende, esencialmente propiciar el cambio social, transformar la realidad y que las personas tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación". Elliot "concibe la investigación-acción como el estudio de una situación social con miras a mejorar la calidad de la acción dentro de ella". Kurt Lewis propone que "a través de dicha investigación se podía lograr avances teóricos y sociales". Por su parte, Stenhouse adapta lo que se conoce hoy como investigación - acción a la educación. De esta manera el método para estudiar y explorar este problema, el cual se origina en la enseñanza y aprendizaje, y más en el segundo, tiene como fin mejorarla; ésta es la hipótesis de mayor importancia que tiene esta investigación. El fin principal de la investigación es establecer y valorar estrategias para enriquecer la práctica.

3.1.1. Alcance del estudio

El estudio se realiza con todos los estudiantes de ingeniería y la muestra se tomó de los estudiantes que estudian en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Estos estudiantes toman la asignatura en segundo semestre, la que no tiene prerrequisito, y cursan las carreras de ingeniería electrónica, eléctrica, sistemas, industrial y catastral. Los estudiantes son de estratos 1, 2 y 3 en su mayoría y muchos vienen de colegios públicos.

3.1.2. Esquema general del desarrollo de la investigación

De acuerdo con el propósito de la tesis, la presente investigación se desarrolla en tres etapas, a saber:

Etapa I. Diseño del estudio. Las tareas concretas para esta etapa son:

a. Descripción de diferentes investigaciones relacionadas con los objetivos y el planteamiento del problema del presente estudio.
b. Recolección y análisis de syllabus del programa de álgebra lineal de universidades nacionales y extranjeras.
c. Fundamentación teórica del razonamiento plausible y otros a que haya lugar.
d. Diseño e implementación del curso de álgebra lineal.
e. Diseño y aplicación de pruebas diagnósticas.
f. Encuestas a profesores y estudiantes.
g. Diseño de actividades.
h. Diseño del modelo y procedimiento didáctico y prueba final.
i. Diseño de encuesta actitudinal para los estudiantes.

Etapa II. Aplicación del estudio. En esta etapa fundamental para la investigación se aplican las actividades propuestas con el objetivo de observar y registrar el desarrollo de éstas por parte del estudiante en el aula de clase.

Dentro de las tareas en esta etapa se encuentran las siguientes:

a. Desarrollo y aplicación de las diferentes actividades propuestas.
b. Implementación del modelo y procedimiento didáctico.
c. Aplicación de una prueba o encuesta final.

Etapa III. Análisis del proceso de aprendizaje. Concerniente al análisis de los resultados obtenidos, después de realizar toda la aplicación durante el estudio, éste se realizó utilizando el estudio de casos. Las tareas fueron:

a. Organización y análisis de las actividades realizadas por los estudiantes.
b. Organización y análisis de las respuestas de la encuesta realizada a los estudiantes.
c. Valoración del modelo didáctico para su validación mediante la utilización del criterio de expertos.

3.2. Modelos didácticos

Se diseñó un modelo didáctico y un procedimiento estratégico soportados en las teorías del capítulo anterior.

Todos los profesores enseñan de manera diferente y si se pregunta qué modelo pedagógico están utilizando dirían que ninguno, ya que no están utilizando teorías o enfoques pedagógicos, pero de lo que aparentemente no son conscientes es que todas las actividades realizadas en el aula forman una dinámica de trabajo inscrita en un marco epistemológico. Este marco recoge el cómo se genera y valida el conocimiento el cual está fundamentado por una base pedagógica y de pronto psicológica, y en el cual todo docente, de distintas formas, formula una serie de objetivos o metas, fija unos contenidos a tratar, busca estrategias adecuadas, prepara actividades y establece criterios de evaluación. Todo esto define lo que se considera como modelo didáctico. Es así que un modelo didáctico es aquél que comprende todo lo relacionado con el proceso de enseñanza y aprendizaje, "un modelo didáctico es una abstracción del proceso de enseñanza-aprendizaje que se ajusta a cualquier tipo de ciencia, que acepta los marcos referenciales de la didáctica y la pedagogía, que fundamentado teóricamente permite interpretarlo y establecer nuevas relaciones en función de perfeccionar dicho proceso¨[39].

Existen varios tipos de modelos didácticos como son el tradicional, también llamado receptor transmisor, el modelo constructivista, modelo por descubrimiento, etc. Para el objetivo de este trabajo se tomarán ideas de los modelos por descubrimiento, constructivismo y reflexión cognitiva.

3.2.1. Diseño del modelo didáctico

Al consultar las distintas fuentes bibliográficas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal, algunos de cuyos elementos incluyeran el uso de tecnologías, no se encontró un trabajo específico que se soporte en el razonamiento plausible y que incorpore el uso de software libre

[39] Bunge. M. (s/f), *La ciencia, su método y su filosofía.* recuperado el 7 de marzo del 2014 del URL: http://disi.unal.edu.co/profesores/jeortizt/Sim/Archivos/31.%20LaCienciaSuMetodoYSuFilosofia.pdf.

Geogebra en carreras de ingenierías para mejorar el aprendizaje de esta importante disciplina a través de la visualización de problemas.

Es necesario comenzar este epígrafe con la siguiente interrogación ¿Qué se entiende por modelo de forma general?

Diferentes estudios de reconocidos expertos en la disciplina revelan una gran cantidad de rasgos, así como una amplia tipología relacionadas con la explicación de un modelo didáctico. Sin lugar a dudas, los trabajos de investigación deben ser coherentes y precisos con el tema de estudio, y en este sentido, es necesario fundamentar qué posición se debe tomar al respecto.

Los estudios realizados muestran, en su mayoría, que entre los rasgos más importantes de los modelos están aquellos que los relacionan con una teoría, e incluso la representación de un objeto, proceso o fenómeno, su carácter de sistema y su objetivo de predicción. Son éstos los rasgos que le permiten representar teóricamente lo más exactamente posible la realidad que pretenden transformar y vincular con un tema de investigación.

Aunque exista gran variedad de modelos que parezcan coherentes y explícitos a simple vista, hay casos donde se contradicen entre sí. Sin embargo, se considera pertinente la siguiente afirmación: *"por modelo se entiende un sistema concebido mentalmente o realizado de forma material, que, reflejado o al reproducir el objeto de investigación, es capaz de sustituirlo de modo que su estudio ofrezca nueva información sobre dicho objeto"*[40].

Representar una realidad a través de un modelo didáctico, exige una amplia preparación del docente, que a través del diseño de la actividad logra conectar los contenidos y recursos en el proceso enseñanza aprendizaje, en este caso del álgebra lineal.

Otros puntos de vista apuntan a la formación integral del estudiante. Es decir, a pesar de existir una intención en los modelos por mejorar los procesos, difieren en el concepto unificado. *"Un modelo*

[40] Miller, J. (1998). *The psychology mathematical*. Princeton the University Press, Princeton.

didáctico es una concepción sistemática que, en el plano de la enseñanza-aprendizaje, estructura una determinada práctica dentro del proceso docente educativo, para incidir en la formación integral de la personalidad del alumno" (Sigarreta, pp. 78 citado en Escalona, p. 66).[41]

Rodríguez G., Juana M. (1996) coherentemente coincide que los modelos didácticos se fundamentan en la "construcción teórico formal que basada en supuestos científicos e ideológicos pretende interpretar la realidad escolar y dirigirla hacia determinados fines educativos"[42].

Cruz, M. (2010), asume que *"el modelo didáctico es una abstracción del objeto de investigación, mediante el cual, se identifican los componentes y relaciones que son esenciales"*[43], y manifiesta que la matemática es una actividad humana y por tanto el estudiante la aprende en un proceso continuo en la formulación de hipótesis y resolución de problemas, es la posición epistémica que no rechaza el corpus de conocimiento como parte de esta ciencia, sino que involucra la abstracción del proceso como un medio didáctico.

La primera definición tiene relación directa entre el modelo y la realidad y se aprecia una organización de la actividad, pero se queda en que esta representación sólo permite evaluar la misma concepción teórica. La segunda definición se va más allá de la estructuración práctica, pues considera la meta a ser alcanzada. Otros autores especifican, que *"el modelo didáctico va dirigido a un determinado fin, en términos generales, las definiciones anteriores permiten asumir que ningún conocimiento es absoluto en el tiempo, sino relativo de acuerdo a su momento histórico"*[44].

[41] Escalona R., M. (2007). El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero, Holguín, pp. 15-27.
[42] Rodríguez G., Juana M. (1996). Perspectivas teórico educativas en la formación de maestros. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 27, pp. 141-147.
[43] Cruz, M. (2010). Definición de modelo didáctico; Holguín, Cuba.
[44] Jiménez, B. (1989). *Modelos didácticos para la innovación educativa*. Barcelona: PPU.

Los modelos didácticos están estrechamente vinculados con el proceso de enseñanza aprendizaje de las ciencias de la educación, cada uno con cierto interés particular en las respectivas modalidades del investigador. Por ejemplo, el autor asume una posición de modelo didáctico que tenga coherencia y fundamento con la enseñanza-aprendizaje de la matemática, particularmente con el álgebra lineal en carreras de ingeniería, por lo que una vez más se asume que: *¨Un modelo didáctico es una abstracción del proceso de enseñanza-aprendizaje que se ajusta a cualquier tipo de ciencia, que acepta los marcos referenciales de la didáctica y la pedagogía, que fundamentado teóricamente permite interpretarlo y establecer nuevas relaciones en función de lograr perfeccionar dicho proceso¨.*

A lo largo del último siglo son varias las corrientes y los modelos teóricos que han aportado sus descubrimientos e investigaciones para explicar el fenómeno del cambio en el individuo desde la didáctica general, la psicología y la didáctica de la matemática. En general, cada uno de estos modelos tiene sus propias explicaciones, a veces contradictorias a las que se presentan desde otras teorías. Esa diversidad de paradigmas explicativos enriquece la comprensión del fenómeno en desarrollo y permite comprender y ajustar las ideas de este modelo en particular. Como más significativos entre estos modelos, es necesario citar el psicoanálisis, la psicología genética de Piaget, el modelo socio-cultural de Vygotsky, las teorías de aprendizaje, el modelo del procesamiento de la información, y más recientemente, el modelo etnológico.

Según Erickson, E. (2007)[45] hay una serie de tareas implícitas en el desarrollo del ser humano, propias de las sucesivas etapas. Estas tareas son en gran parte impuestas por la sociedad y la cultura. A través del proceso de socialización, al cumplir estas tareas, llega a convertirse en una aspiración del propio individuo y marca definitivamente su proceder en determinados momentos de su vida.

Al considerar los argumentos que apuntan directamente sobre modelos y en especial los didácticos, se pasa a la explicación del modelo didáctico para este estudio, que permite sintetizar los fundamentos

[45] Ericsson, E. (2008). *Identidad, Juventud y Crisis.* Ed. Paidós, Buenos Aires, pp. 54-62.

teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra, como antecedentes o estado del arte analizado en el Capítulo 1. El modelo pensado consta de cuatro momentos fundamentales interrelacionados entre sí. Como primer momento están los fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal. En el segundo momento se encuentra el diagnóstico realizado al grupo antes de comienzo del estudio, que es quien permite la generación de un modelo que aproxime una posible solución al problema mediante un proceso metodológico basado en el razonamiento plausible y en cierto software como herramienta tecnológica. Este está formado por dos procesos: la instrumentalización, que permite explorar cada comando del software con los conocimientos previos del estudiante, y la instrumentación, que tiene que ver con la aplicación práctica de aquellos comandos en la solución de los problemas que forma parte de una determinada actividad. Ambos procesos se conocen como mediación instrumental.

Los elementos mediadores constituyen el tercer momento, los cuales son factores que deben acelerar la solución de las contradicciones tanto externa como interna, que con la aplicación de un procedimiento heurístico interrelacionan el modelo didáctico en su implementación práctica, como el cuarto y último momento.

Este modelo parte de la integración de elementos sistematizados en la fundamentación teórica, en los que descansa la resolución de problema como soporte didáctico y metodológico, la mediación instrumental hace parte de los niveles cognitivos de aprendizaje a través de los recursos de un software, en este caso el Geogebra.

Al hablar de condiciones iniciales y finales, en ambos subyace el resultado de un diagnóstico que involucra el uso del software, formado por dos categorías, las condiciones iniciales antes de aplicar el modelo, las cuales permiten caracterizar variables para valorar el conocimiento de los estudiantes respecto al álgebra lineal, y las condiciones finales que después de aplicarlo se comprueba si el software contribuye a mejorar la capacidad de los estudiantes para visualizar y dar respuestas correctas en la comprensión de los problemas (Anexo 1).

El principio de mediación instrumental, la flexibilidad cognitiva y fluidez asociativa, así como, la resolución de problemas, son los factores que integran la dimensión del modelo didáctico y que actúan como aceleradores de la solución de la contradicción, que son los que dan sentido y a la vez solución al problema.

El modelo relaciona directamente a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Distrital de Bogotá, Colombia, y presenta los referentes teóricos que favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal y que soportó el procedimiento heurístico, como la implementación práctica del modelo.

Se entiende por referentes teóricos los fundamentos científicos que sustentan este modelo, creados a partir de la propia contradicción que generó el problema, sobre la base del estudio epistemológico del objeto de estudio y del campo de acción, así como el proceso de diagnóstico, que en ella se realiza. Los fundamentos teóricos son resultado de profundas reflexiones, y su concepción se presenta en la relación dialéctica de la teoría con la práctica.

3.3. Estructura formal del modelo didáctico

La estructura formal del modelo didáctico incluye: premisas, elementos dinamizadores y fases.

3.3.1 Premisas del modelo didáctico

En el contexto de esta investigación se entiende por premisa los fundamentos teóricos sistematizados en los epígrafes anteriores que sirven de base al modelo. Las premisas son: los referentes teóricos en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal (AL) desde la perspectiva de las ciencias y la resolución de problemas y mediante el uso del software.

La mediación instrumental como acto cognitivo mediado por Geogebra, le permite al estudiante visualizar la figura, asociar el concepto y adquirir conocimiento para su formación como futuro ingeniero. En conjunto, la mediación instrumental como elemento transversal en el proceso de la solución de problemas no rutinarios le debe permitir al estudiante mediante la visualización poder justificar una conjetura asociada a la solución de un problema o pregunta de cada una de las actividades.

A continuación, se explica cómo funcionan estos referentes teóricos en el contexto del modelo.

En el modelo, se refrenda la asunción de un enfoque multilateral de estos criterios, que propugna por que las relaciones llevadas a término en el marco de las actividades programadas para los alumnos y de la organización, sean de carácter epistémico y reflejen la esencia y reciprocidad de los contenidos. Considerar la resolución de problemas mediante el uso de preguntas generadoras de conjeturas como referente teórico, en el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje del AL, significa un cambio en la forma de pensar frente a todas las problemáticas del conocimiento; además, presupone un cuadro explicativo de la realidad en su conjunto, sustentado en el establecimiento de nexos comunes, relaciones nuevas, generadoras de nuevos procedimientos lógicos, que garanticen la búsqueda integrada de información al abordar un contenido determinado mediante el proceso. Es decir, donde cada estudiante formula conjeturas como parte esencial de la resolución de problemas, lo que debe diferenciarlo de un proceso de enseñanza aprendizaje convencional.

La concepción de la resolución de problemas, como referente teórico del proceso de enseñanza aprendizaje, dinamiza las relaciones que se pueden establecer entre las diferentes disciplinas del área y de éstas con los recursos tecnológicos en la solución de problemas propios de la enseñanza, y se contextualiza de la misma manera en que se comprende la esencia de cada contenido estudiado en un marco más integrador, por lo que a su vez se convierte en un elemento esencial que compromete e involucra a los sujetos en la apropiación activa de conocimientos, valores, hábitos y formas de actuar en la construcción y justificación de conjeturas.

3.3.2. Elementos dinamizadores

En el modelo didáctico propuesto se entienden como elementos dinamizadores (o aceleradores) los componentes teóricos que parten de la sistematización de los contenidos científicos existentes, enriquecidos o creados, y que mueven el modelo y constituyen los elementos transversales. Dichos elementos transversales son: la mediación instrumental y con ella la resolución de problemas no rutinarios, como una vía para acercar a los alumnos a mejorar su aprendizaje del AL.

a) **Mediación instrumental:** este elemento transversal permitió en el proceso de investigación, mediar en el conocimiento de los estudiantes, una vez que interactuaron con el Geogebra para resolver las dificultades presentadas en el diagnóstico inicial; es decir, el aporte científico estuvo presente en el acto cognitivo mediado por el software.

b) **Resolución de problemas:** este elemento funcionó como el componente de ruptura de procesos de enseñanza aprendizaje tradicionalistas, basados en ejercicios rutinarios.

La transversalidad en el contexto del modelo, supera ampliamente el límite de la enseñanza aprendizaje del AL en carreras de ingeniería, al incluir la flexibilidad cognitiva y la fluidez asociativa en la construcción y justificación de conjeturas con el uso de software en el proceso de solución de problemas del AL.

3.4. Un modelo didáctico para la enseñanza del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible

La presentación del modelo didáctico propuesto es una representación práctica ideal del tratamiento del conjunto de actividades y acciones con carácter organizado e integrado del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal. El modelo que se pretende diseñar para este trabajo está basado en la escuela cuasi-empírica de las matemáticas liderada por Lakatos y Polya, con fundamentos cognitivos y de aprendizaje basados en el constructivismo y la reflexión cognitiva, pero además incluye la visualización y el uso de la tecnología como herramientas didácticas. Todo lo anterior en su conjunto constituye las bases teóricas de los fundamentos teóricos del proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

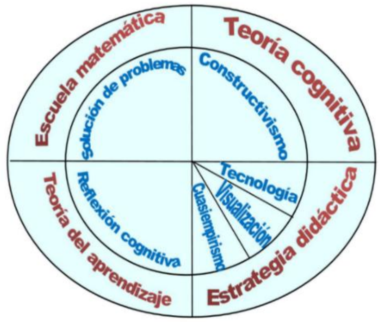


Figura 8. Elementos que fundamentan teóricamente el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal.

El modelo que se propone se fundamenta en el principio de una contradicción externa ya mencionada en la introducción de este estudio y que fue la que permitió formular el problema de investigación[46] abordado; es por ello, que se retomarán los mismos como una forma de reafirmar la génesis de su surgimiento.

La ya mencionada contradicción externa es:

Figura 9. Contradicción externa del problema de investigación.

Se puede apreciar que está fuera del objeto de la investigación; sin embargo, permitió mediante una reflexión epistemológica otra contradicción, con una pertenencia interna al objeto que se investiga.

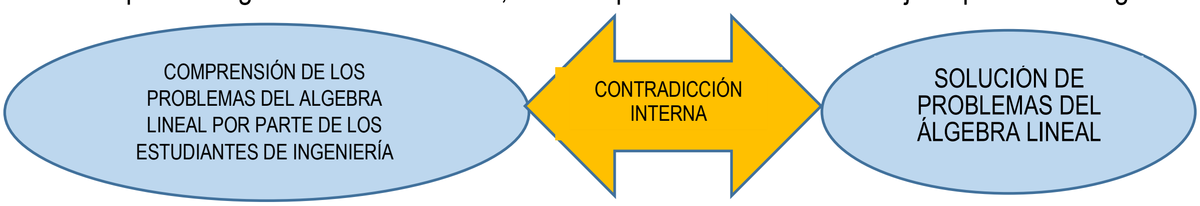


Figura 10. Contradicción interna del problema de investigación.

[46] García, M. y Nápoles, J. (2015). A dialectical invariant for research in mathematics education. *The Mathematics Enthusiast. Volume 12,* Numbers 1, 2, & 3. Article 33. Recuperable el 3 de diciembre de 2015 del URL: http://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1358&context=tme.

3.4.1. Representación gráfica del modelo didáctico centrado en el razonamiento plausible

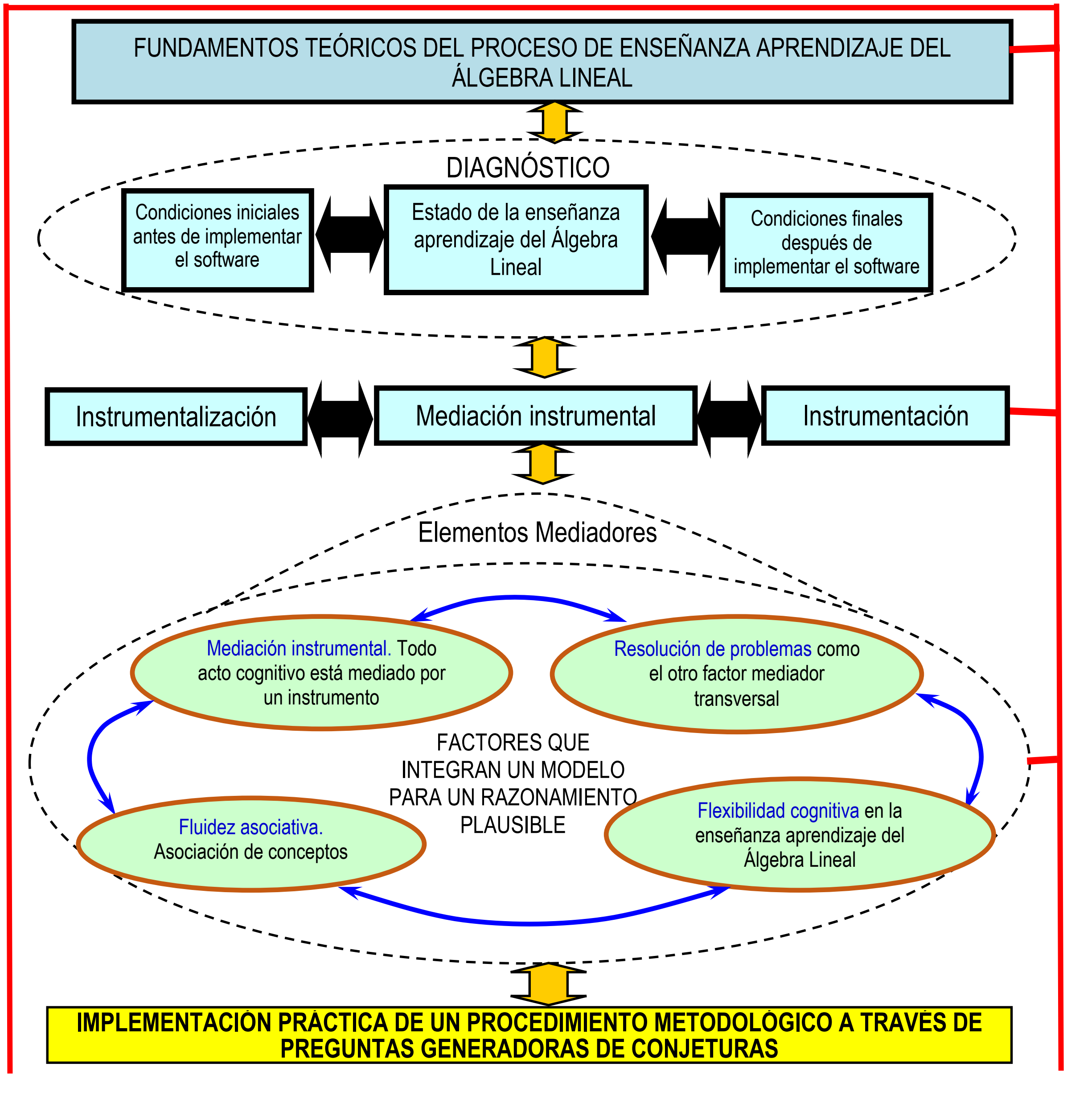


Figura 11. Modelo didáctico centrado en el razonamiento plausible.

3.4.2. Diseño de un procedimiento metodológico a través de preguntas

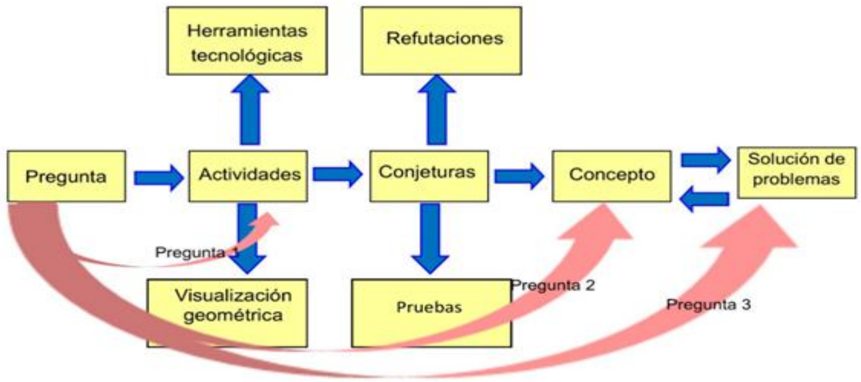


Figura 12. Procedimiento metodológico del modelo didáctico.

3.5. Diseño del curso álgebra lineal

El curso se llevó a cabo con el grupo 05 de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital los días lunes, martes y jueves de 08 a 10 am; este grupo estaba conformado por 34 estudiantes. Los tópicos que se trabajaron en la aplicación del modelo fueron: Sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes, vectores, espacios y subespacios vectoriales, independencia lineal, bases y dimensión, rango y nulidad.

Para cada tema primero se presentaron las orientaciones teóricas correspondientes. En la siguiente clase se trabajó de manera grupal las actividades compuestas por problemas de diferentes niveles de dificultad y aplicaciones a la ingeniería, frente a los cuales el estudiante explora, analiza, conjetura y demuestra propiedades del tema a desarrollar por medio del razonamiento plausible. Las soluciones dadas por los estudiantes a los problemas se socializaron en la siguiente clase. Cabe anotar que en algunas ocasiones hubo que socializar algunos puntos en el desarrollo mismo de la actividad.

Todo este desarrollo se llevó a cabo teniendo presente el modelo y el procedimiento metodológico propuesto en esta investigación.

El objetivo de cada problema consiste en que el estudiante explore, conjeture, demuestre o refute las conjeturas que surgen, además de abordar y resolver algunos problemas aplicados a la ingeniería, evidenciando el razonamiento plausible. Los contenidos completos del curso se encuentran en el syllabus del anexo correspondiente.

3.6. Diseño de las actividades

El diseño de cada actividad está compuesto por los siguientes elementos:

3.6.1. Objetivo

Lo que se pretende en cada clase y con cada problema.

3.6.2. Instrucciones generales

En este apartado se dan las indicaciones que debe seguir el estudiante para que la actividad se desarrolle de acuerdo a lo planeado en cada objetivo y su desarrollo sea efectivo.

3.6.3. Niveles de las preguntas generadoras de conjeturas

Primer nivel: son preguntas básicas donde se pretende buscar información e introducir al estudiante en el tema. **Ejemplos:**

1. ¿Se podrá cualquier vector en $\mathbf{R}^2$, expresarse como una combinación lineal de los vectores (1, 3) y (5,2)? ¿Si los vectores son (1,2) y (2,4)?
2. ¿Podrá cualquier polinomio de grado dos escribirse como una combinación lineal de los polinomios $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x^2}\}$?
3. En espacios vectoriales: ¿Todo espacio vectorial, diferente del trivial tiene infinitos elementos? Si es así de un ejemplo.
4. ¿Todos los conjuntos infinitos son espacios vectoriales?

Segundo nivel: son aquellas que implican que el estudiante analice, es decir que lo llevan a conjeturas, que van a probarse o refutarse

Ejemplos;

1. En subespacios vectoriales: ¿Todo subconjunto de un espacio vectorial es también un espacio vectorial?
2. ¿Qué condiciones serán suficientes que cumplan un subconjunto H de un espacio vectorial V, para ser también un espacio vectorial?
3. ¿Será la unión de dos subespacios vectoriales un subespacio vectorial?
4. ¿Será la Intersección de dos subespacios vectoriales un subespacio vectorial?

Tercer nivel: son aquellas preguntas donde el estudiante debe aplicar el concepto aprendido en práctica, es decir en la resolución de problemas no rutinarios.

Ejemplos:

1. Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ y U y W los subespacios de las matrices simétricas y antisimétricas respectivamente. ¿Podrá ser $\mathrm{V} = \mathrm{U} + \mathrm{W}$?

2. Sea s_{nn} el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que s_{nn} es un subespacio de M_{nn} y que su dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$.

3.7. Implementación de las actividades

Para la implementación de las actividades se conformaron doce grupos de tres estudiantes cada uno; para efectos de esta investigación los grupos se denominaron G1 al G12, los cuales cada uno desarrolla los problemas de forma independiente.

Estas actividades se aplicaron sistemáticamente en el segundo semestre del 2017.

El rol del profesor fue guiar y orientar cada una de las actividades establecidas; se llevaron a cabo a través de preguntas de tal manera que los alumnos, en el desarrollo de cada tarea, tuvieran la oportunidad de explorar, discutir, conjeturar y demostrar o refutar, además de utilizar la resolución de problemas como retroalimentación de los conceptos que el estudiante haya aprendido a través de este procedimiento didáctico. En el próximo capítulo se podrán apreciar, en toda su extensión, los detalles de las actividades diseñadas y desarrolladas en el estudio.

Conclusiones parciales del Capítulo 3

El análisis de los capítulos anteriores, las teorías cognitivas de Piaget y Vygotsky, la teoría de la reflexión cognitiva y el aprendizaje basado en preguntas, así como las bases teóricas de los modelos y en particular de los modelos didácticos, permitieron diseñar el modelo propuesto, el cual está dirigido a favorecer la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en alumnos que cursan la carrera de ingeniería. Este modelo didáctico basado en un procedimiento metodológico netamente heurístico que hace uso de la tecnología y la visualización geométrica, pretende mostrar una forma dinámica y efectiva de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

El modelo didáctico y el procedimiento metodológico deben favorecer un aprendizaje de los estudiantes centrado en un razonamiento plausible en el desarrollo de la solución de problemas en los cuales es necesario o aconsejable el uso de la tecnología y/o la visualización geométrica. Es por ello que se considera la fundamentación de este modelo si resulta efectivo, tal como se asume en la hipótesis de esta investigación, como novedoso.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS, DISCUSIÓN Y ANALISIS.

En este capítulo se pretende analizar los resultados de las actividades aplicadas a los grupos de estudiantes que se organizaron para la implementación del estudio en las diferentes sesiones de trabajo en el aula de clase, así como aquellas de carácter extra clase.

Como esta investigación es cualitativa, basada en el estudio de casos, se describirá los resultados más representativos de cada uno de los problemas que conforman cada una de las actividades aplicadas. Para ello cada problema se asocia con la solución de alguno de los once grupos que se organizaron y que, en este sentido, tuvieron la oportunidad de descubrir relaciones, plantear conjeturas, generalizar resultados y justificar sus soluciones, todo ello con base en argumentos obtenidos producto del modelo y procedimiento metodológico implementado.

Al finalizar cada una de las actividades, se presenta una tabla valorativa de los resultados de los grupos restantes. Se toma como medida de tendencia central la media aritmética a los efectos de valorar la efectividad del conjunto de problemas que integraron cada una de las actividades en cada uno de los once grupos del estudio.

4.1. Relatoría de los resultados de la aplicación de las actividades

4.1.1. Actividad 1. Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivos:

- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de sistemas lineales.
- Que el estudiante construya significado del concepto de linealidad.

Sugerencias metodológicas. En esta primera actividad se quiere explorar el concepto que el estudiante tiene sobre linealidad; por lo tanto, se han estructurado preguntas de niveles 1 y 2 (sección 3.6.3) de las que se espera que el estudiante llegue a formular conjeturas con un problema práctico final. La actividad está diseñada para desarrollarse en grupos de tres estudiantes, cada uno de los cuales desarrolla los problemas de forma independiente, y el docente a través de preguntas heurísticas orienta a aquellos estudiantes que presentan ciertas dificultades, de forma que cada uno de ellos construya sus conjeturas y la solución de los problemas propuestos. (Los problemas propuestos que rezan “fuente propia” son propuestas del autor, algunas de las cuales son de corte tradicional y otras de mayor originalidad.)

Se inicia la clase explicándoles a los estudiantes lo que significan una conjetura y una demostración, cómo se refuta una conjetura por contraejemplo, qué es un axioma, qué es un teorema y demás aspectos teóricos complementarios a la naturaleza del estudio.

Materiales a utilizar.

Para cada una de las actividades se pide a los estudiantes que lleven el software Geogebra, bien sea en tablet, celular o laptop, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad.

La actividad se desarrolló en dos clases y en la primera parte de una tercera clase se socializaron los resultados. A continuación, se plantea cada uno de los problemas con algunas soluciones dadas por los grupos de trabajo.

Problema 4.1.1.1. Dados los siguientes puntos en el plano (Fuente propia)

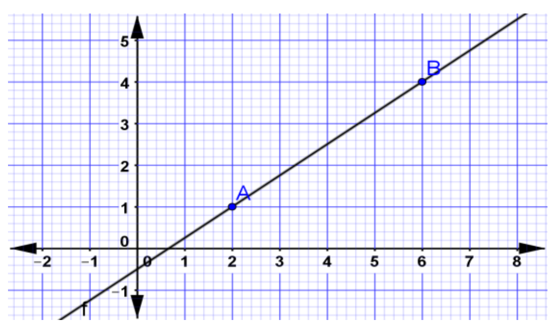


Figura 13. Problema 1. Actividad 1

Para $x = 3$, ¿cuál es el valor de la ordenada para que el punto esté sobre la recta?

Para cualquier valor x, ¿cuál es el valor de y para que el punto esté sobre la recta?

La anterior es una pregunta de primer nivel, cuyo propósito es explorar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre la ecuación de una línea recta y de ir introduciendo situaciones lineales.

Solución presentada por el grupo G1.

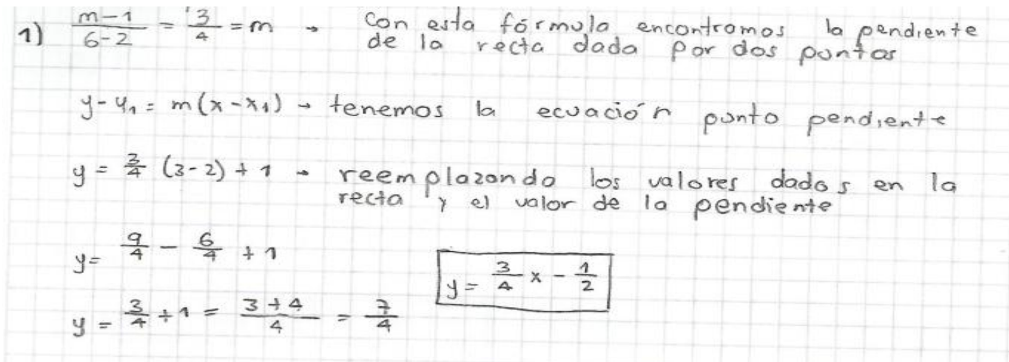


Figura 14. Solución del problema 1 de la actividad1 por el grupo G1

Revisando las soluciones de todos los grupos se observa que los estudiantes conocen la ecuación de una recta en el plano y que para poder hallarla deben calcular primero la pendiente, como se observa en la solución de este grupo; luego hallan la ecuación y sustituyen el valor dado.

Problema 4.1.1.2. ¿Qué figura geométrica se aprecia en la gráfica que corresponde a una ecuación de la forma? (Fuente propia):

a. $ax = 0$
b. $ax + by + c = 0$
c. $ax + by + cz + d = 0$

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo propósito es que el estudiante explore dando diferentes valores a las constantes en las ecuaciones dadas, para llegar a una ecuación determinada y conjeturar sobre ésta.

Solución presentada por los grupos G2 y G3.

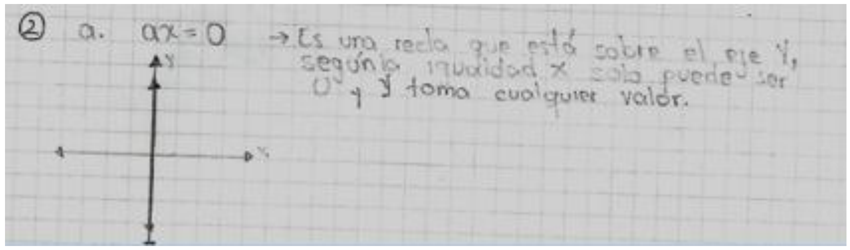


Figura 15. Solución del problema 2a de la actividad1 por el grupo G2

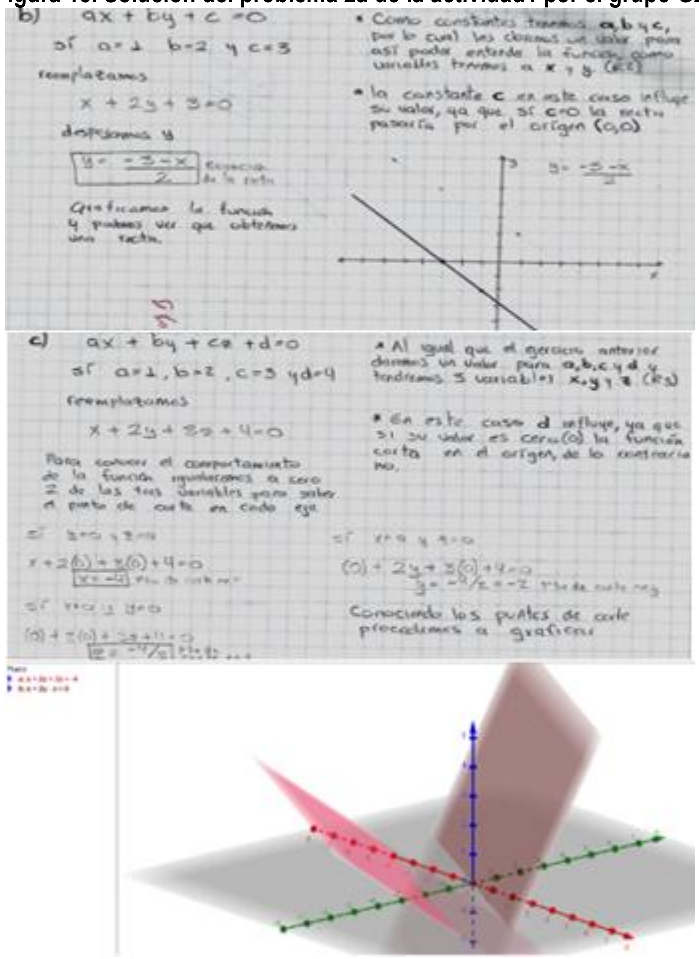


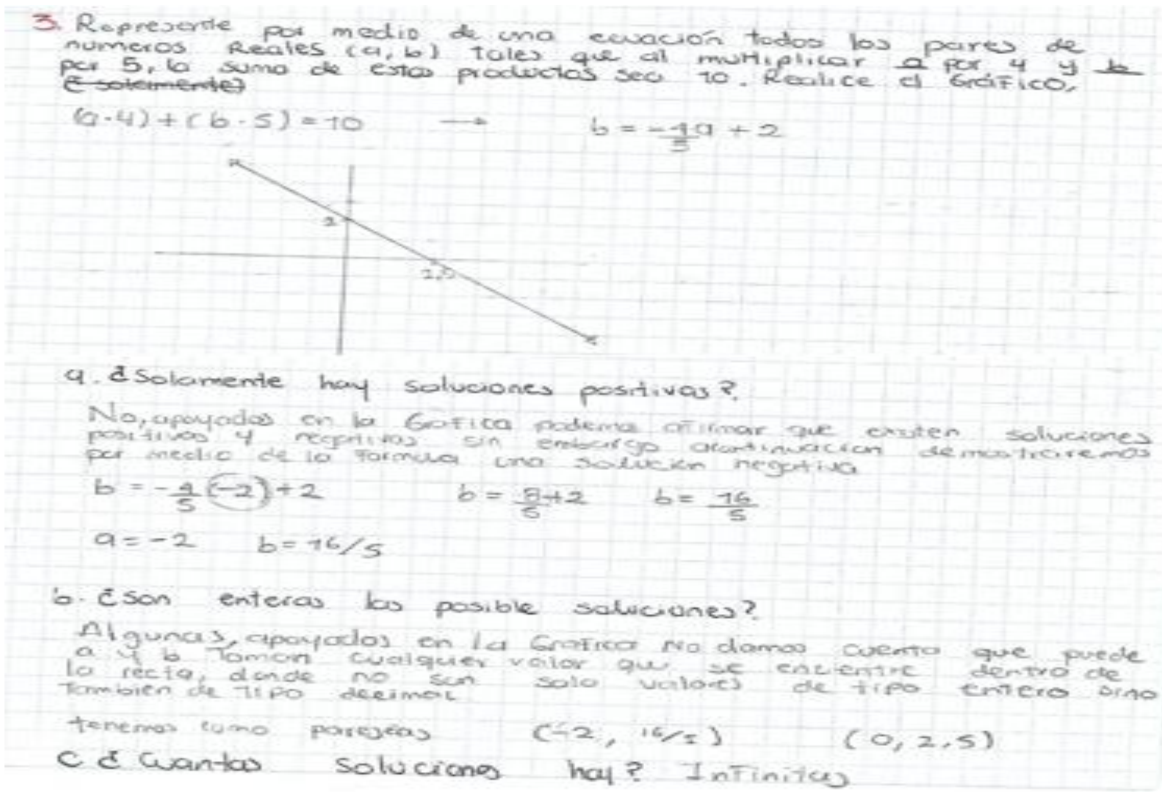
Figura 15. Solución del problema 2b y 2c de la actividad1 por el grupo G3

Los estudiantes exploran las ecuaciones dándole diferentes valores a las constantes, para identificar las figuras que representan las ecuaciones, en especial la del plano, la que también exploran en el Geogebra. Luego identifican correctamente las figuras geométricas que representa cada ecuación.

Problema 4.1.1.3. Represente por medio de una ecuación todos los pares de números reales (a, b) tales que al multiplicar a por 4 y b por 5, la suma de estos productos sea 10. Realice el gráfico. ¿Solamente hay soluciones positivas? (Fuente propia)

Estas es una pregunta del segundo nivel que tiene como fin que el estudiante analice y grafique posibles soluciones que se obtienen al representar gráficamente la ecuación lineal.

Solución presentada por el grupo G2.


3. Represente por medio de una ecuación todos los pares de numeros Reales (a, b) tales que al multiplicar a por 4 y b por 5, la suma de estos productos sea 10. Realice el gráfico, ¿solamente?

$(a \cdot 4) + (b \cdot 5) = 10 \longrightarrow b = -\frac{4}{5}a + 2$

a. ¿Solamente hay soluciones positivas?

No, apoyados en la Grafica podemos afirmar que existen soluciones positivas y negativas sin embargo a continuación demostraremos por medio de la formula una solución negativa

$b = -\frac{4}{5}(-2) + 2 \qquad b = \frac{8}{5} + 2 \qquad b = \frac{16}{5}$

$a = -2 \qquad b = 16/5$

b. ¿Son enteras las posible soluciones?

Algunas, apoyados en la Grafica nos damos cuenta que puede a y b Tomar cualquier valor que se encuentre dentro de la recta, donde no son solo valores de tipo entero sino tambien de tipo decimal

tenemos como parejas $(-2, 16/5) \qquad (0, 2.5)$

c ¿Cuantas Soluciones hay? Infinitas

Figura 16. Solución del problema 3 de la actividad1 por el grupo G2

Los estudiantes plantean la ecuación y realizan la gráfica de ésta, luego la utilizan para contestar las preguntas de los siguientes incisos correctamente.

Problema 4.1.1.4. Una compañía constructora almacena tres mezclas básicas A, B y C. Las cantidades se miden en gramos y cada "unidad" de mezcla pesa 60 gramos. Pueden formularse mezclas especiales de argamasa efectuando combinaciones de las mezclas básicas. La composición de éstas es:

Tabla 3: condiciones del problema 4.1.1.4

Material \ Mezcla	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	12	14
Arena	20	21	28
Gravilla	10	9	6

a. ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 80 gramos de cemento y 50 gramos de agua, utilizando únicamente las mezclas básicas A y B? De ser posible, ¿sólo existen soluciones positivas?, ¿sólo existen soluciones enteras?

b. ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 50 gramos de agua y 100 gramos de arena utilizando únicamente las mezclas básicas A y C? De ser posible, ¿sólo existen soluciones positivas?, ¿sólo existen soluciones enteras?

c. ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 90 gramos de cemento y 70 gramos de gravilla, utilizando únicamente las mezclas básicas B y C? ¿Por qué se puede o por qué no? De ser posible, ¿sólo existen soluciones positivas?, ¿sólo existen soluciones enteras?

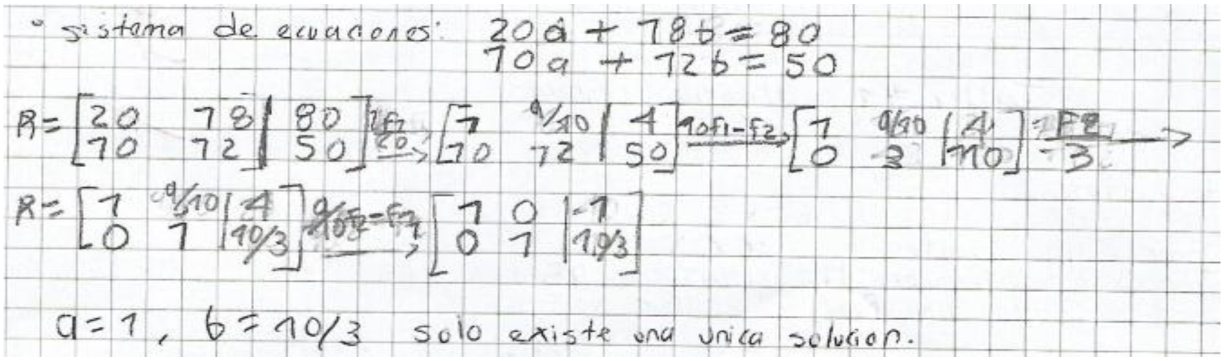
d. ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 100 gramos de cemento, 200 gramos de agua y 50 gramos gravilla utilizando las tres mezclas básicas A, B y C? Plantee la ecuación o ecuaciones que representan esta situación. ¿Por qué se puede o por qué no? De ser posible, ¿sólo existen soluciones positivas?, ¿sólo existen soluciones enteras?

e. Proponga un sistema de ecuaciones lineales en dos variables que tenga una, ninguna o infinitas soluciones.

f. Repita el inciso anterior para sistemas lineales con tres variables y realice una conjetura sobre los resultados obtenidos. (Modificado del libro de Grossman)

Esta es una pregunta del nivel dos, que con base en una información dada se pretende que el estudiante plantee ecuaciones y halle las soluciones de acuerdo al contexto del problema.

Solución presentada por el grupo G4.



• sistema de ecuaciones: $20a + 78b = 80$
$70a + 72b = 50$

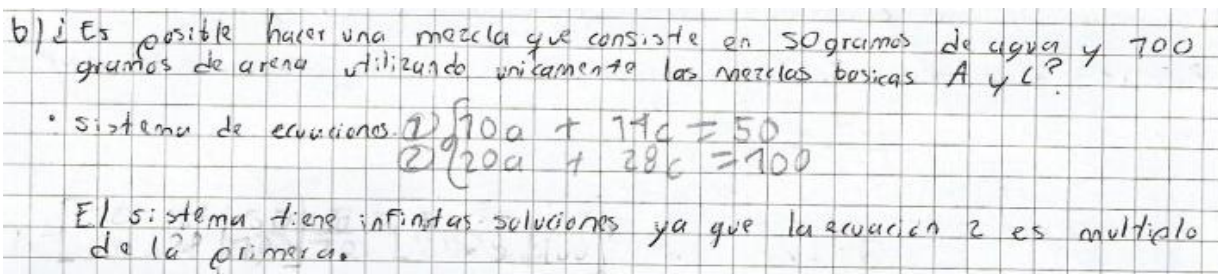
$R=\left[\begin{array}{cc|c}20 & 78 & 80\\ 70 & 72 & 50\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{20}F_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 9/10 & 4\\ 70 & 72 & 50\end{array}\right] \xrightarrow{70F_1-F_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 9/10 & 4\\ 0 & 3 & 110\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{F_2}{-3}}$

$R=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 9/10 & 4\\ 0 & 1 & 10/3\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{9}{10}F_2-F_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 10/3\end{array}\right]$

$a = 1$, $b = 10/3$ solo existe una única solución.

Figura 17. Solución del problema 4a de la actividad1 por el grupo G4

Los estudiantes plantean el sistema de ecuaciones correctamente, lo resuelven utilizando el método de Gauss-Jordan y responden la pregunta acertadamente.



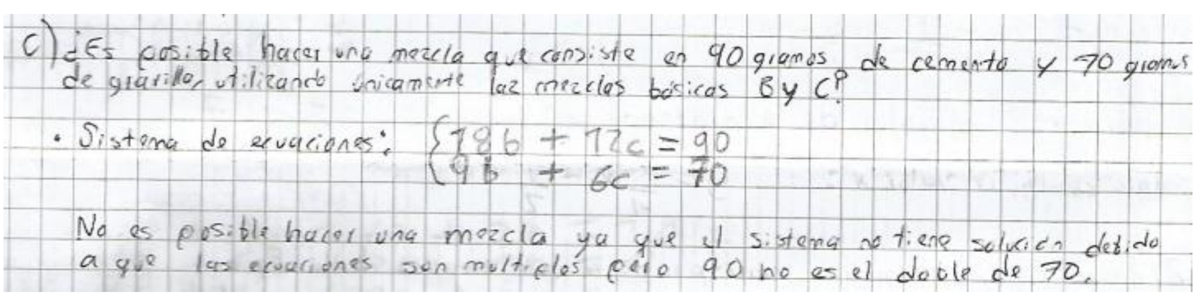
b) ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 50 gramos de agua y 100 gramos de arena utilizando únicamente las mezclas básicas A y C?

• sistema de ecuaciones. ① $10a + 14c = 50$
② $20a + 28c = 100$

El sistema tiene infinitas soluciones ya que la ecuación 2 es múltiplo de la primera.

Figura 18. Solución del problema 4b de la actividad1 por el grupo G4

Aquí los estudiantes plantean el sistema y dan la solución sin necesidad de resolver la ecuación, ya que observan que una ecuación es múltiplo de otra. En esta solución se observa que los estudiantes empiezan a conjeturar sobre las soluciones de sistemas lineales, que era uno de los objetivos del problema.



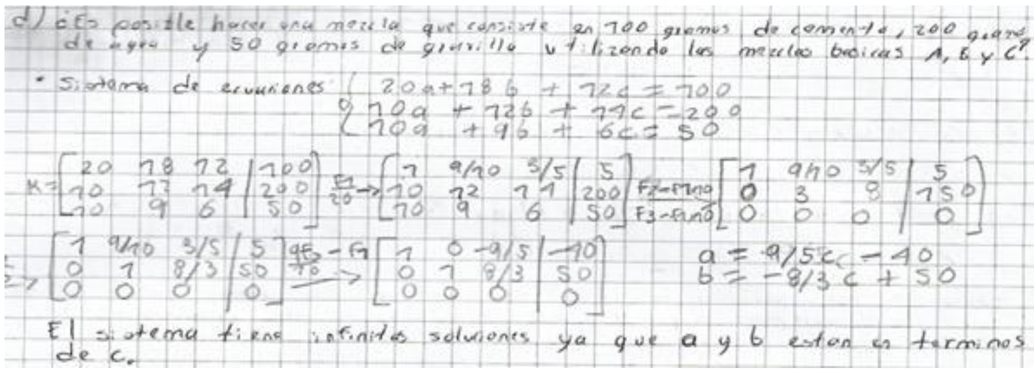
c) ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 90 gramos de cemento y 70 gramos de gravilla, utilizando únicamente las mezclas básicas B y C?

• Sistema de ecuaciones: $\begin{cases}18b + 12c = 90\\ 9b + 6c = 70\end{cases}$

No es posible hacer una mezcla ya que el sistema no tiene solución debido a que las ecuaciones son múltiplos pero 90 no es el doble de 70.

Figura 19. Solución del problema 4c de la actividad1 por el grupo G4

Al igual que el inciso anterior, los estudiantes plantean el sistema correctamente y al observar las ecuaciones, infieren sin necesidad de resolverlo, que el sistema no tiene solución.



d) ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 100 gramos de cemento, 200 gramos de agua y 50 gramos de gravilla utilizando las mezclas básicas A, B y C?

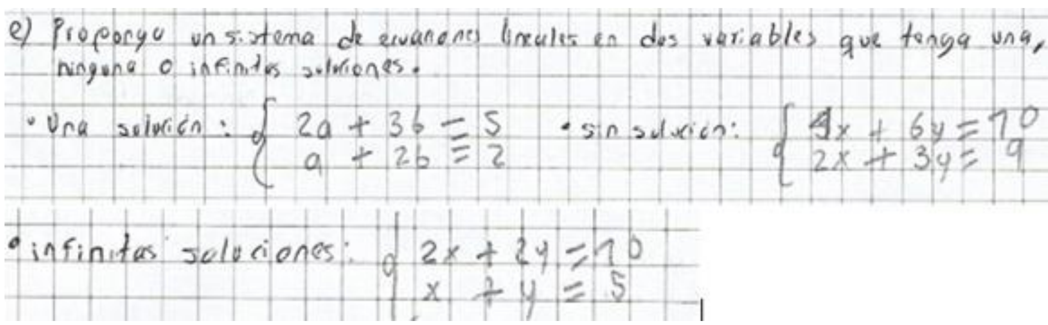
• Sistema de ecuaciones $\begin{cases} 20a + 18b + 12c = 100 \\ 10a + 12b + 11c = 200 \\ 10a + 9b + 6c = 50 \end{cases}$

$a = 9/5c - 40$
$b = -8/3c + 50$

El sistema tiene infinitas soluciones ya que a y b están en términos de c.

Figura 20. Solución del problema 4d de la actividad1 por el grupo G4

Los estudiantes plantean y resuelven el sistema correctamente.



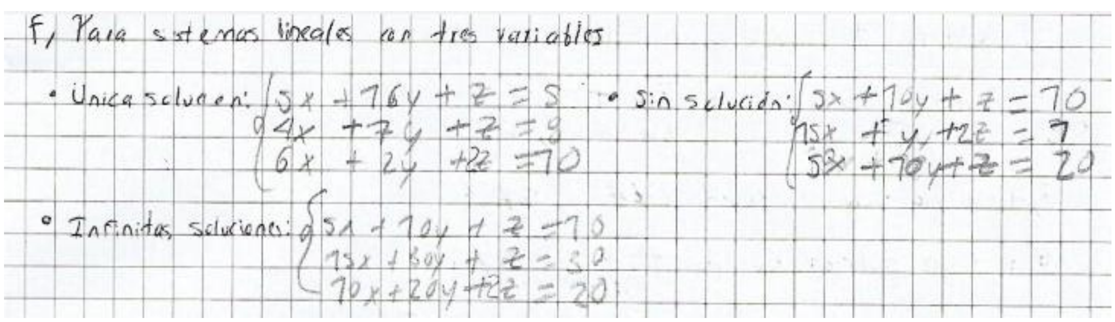
e) Propongo un sistema de ecuaciones lineales en dos variables que tenga una, ninguna o infinitas soluciones.

• Una solución: $\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ a + 2b = 2 \end{cases}$ • Sin solución: $\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

• infinitas soluciones: $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Figura 21. Solución del problema 4e de la actividad1 por el grupo G4

Como consecuencia de los incisos anteriores los estudiantes plantean correctamente los sistemas pedidos sin necesidad de resolver los sistemas.



f) Para sistemas lineales con tres variables

• Única solución: $\begin{cases} 5x + 16y + z = 5 \\ 4x + 7y + z = 9 \\ 6x + 2y + 2z = 10 \end{cases}$ • Sin solución: $\begin{cases} 5x + 10y + z = 10 \\ 15x + y + 2z = 7 \\ 5x + 10y + z = 20 \end{cases}$

• Infinitas soluciones: $\begin{cases} 5x + 10y + z = 10 \\ 15x + 30y + z = 30 \\ 10x + 20y + 2z = 20 \end{cases}$

Figura 22. Solución del problema 4f de la actividad1 por el grupo G4

Los estudiantes plantean correctamente los sistemas lineales pedidos.

$$
\begin{aligned}
ax + by &= k \\
cx + dy &= l \\
2x + 3y &= 6
\end{aligned}
$$

Problema 4.1.1.5. Consideremos el sistema de ecuaciones:

Discuta las posiciones relativas de las líneas $ax + by = k, cx + dy = l$ y $2x + 3y = 6$ cuando:

a. el sistema no tiene soluciones.

b. el sistema tiene exactamente una solución.

c. el sistema tiene infinitas soluciones. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel, en la cual se pretende que el estudiante analice las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones con dos variables.

Solución presentada por el grupo G2.

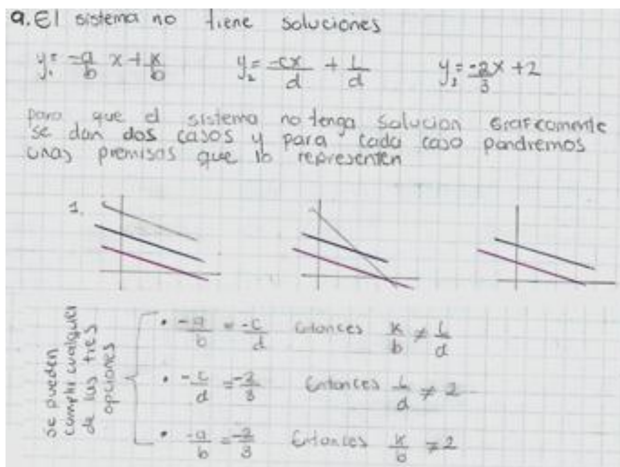


Figura 23. Solución del problema 5a parte uno de la actividad1 por el grupo G2

Los estudiantes de manera correcta plantean gráficamente tres situaciones donde el sistema no tiene solución y para cada caso quieren encontrar condiciones para las constantes: a, b, c, d, k y l. Observan que en el primer caso que representan, las pendientes de las tres ecuaciones deben ser iguales con sus términos independientes diferentes.

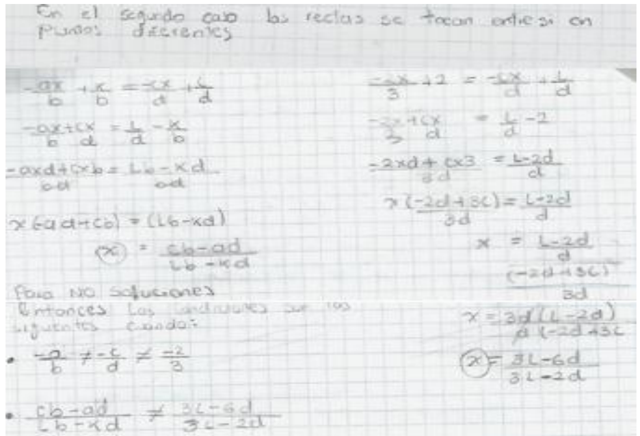


Figura 24. Solución del problema 5a parte dos de la actividad1 por el grupo G2

Para el segundo caso también intentan encontrar algebraicamente condiciones sobre las constantes, observando para ello que las pendientes deben ser diferentes y el punto de corte de las tres no debe coincidir.

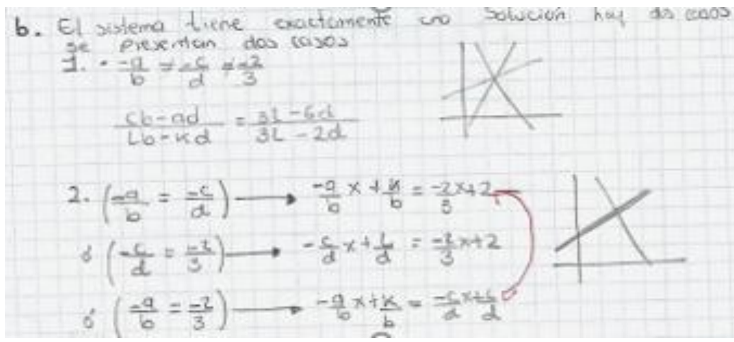


Figura 25. Solución del problema 5b de la actividad1 por el grupo G2

Al igual que en el caso anterior los estudiantes plantean las posibilidades gráficamente, en las cuales el sistema tiene única solución y tratan de darle condiciones a las constantes.

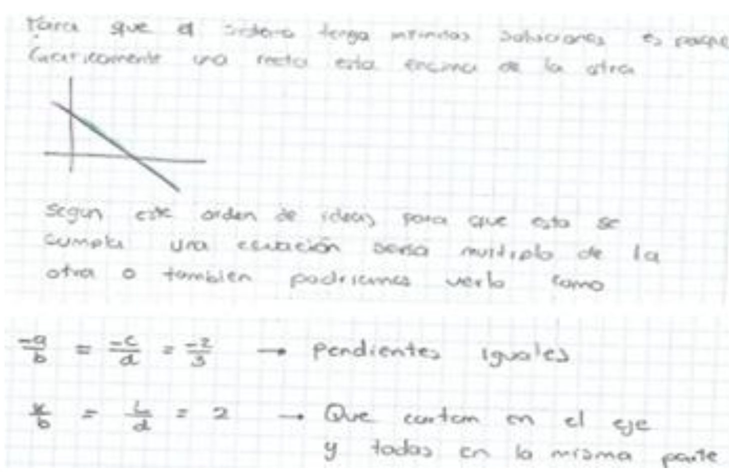


Figura 26. Solución del problema 5c de la actividad1 por el grupo G2

Los estudiantes reconocen gráficamente cuando un sistema tiene infinitas soluciones y lo argumentan correctamente.

Problema 4.1.1.6. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \\ ex + fy &= g \end{aligned}$$

Discuta las posiciones relativas de las líneas $ax + by = k, cx + dy = l$ y $ex + fy = g$ cuando:

a. el sistema no tiene soluciones.

b. el sistema tiene exactamente una solución.

c. el sistema tiene infinitas soluciones. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del tercer nivel, en la cual se pretende que el estudiante analice, conjeture y generalice sobre las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones con dos variables.

Solución presentada por el grupo G2.

Figura 27. Solución del problema 6 de la actividad1 por el grupo G2

Los estudiantes manifiestan que son las mismas condiciones del problema anterior, los procedimientos son análogos y, por tanto, proceden de la misma forma.

Problema 4.1.1.7. Dado el sistema lineal: $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 4x - 2y &= t \end{aligned}$

a. Determinar si existe algún valor de *t* para que el sistema tenga única solución. (Utilice visualización para diferentes valores de t.)

b. Determinar un valor de *t* para que el sistema tenga infinitas soluciones.

c. ¿Para qué valores de *t* el sistema no tiene solución?

d. De una interpretación geométrica de los puntos anteriores. (Modificado del libro de Grossman)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante ponga en práctica el resultado del inciso e del problema 4.

Solución presentada por el grupo G2.

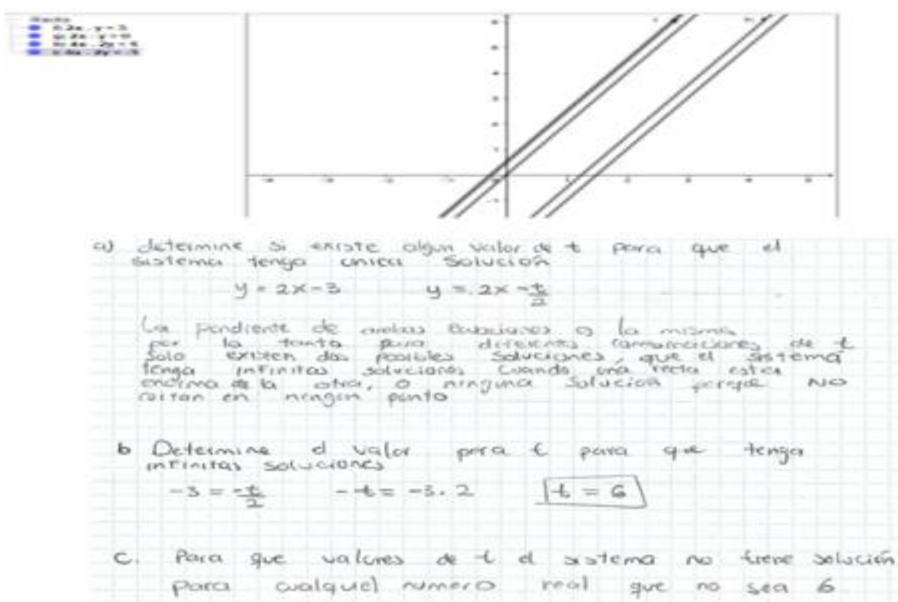


Figura 28. Solución del problema 7 de la actividad1 por el grupo G2

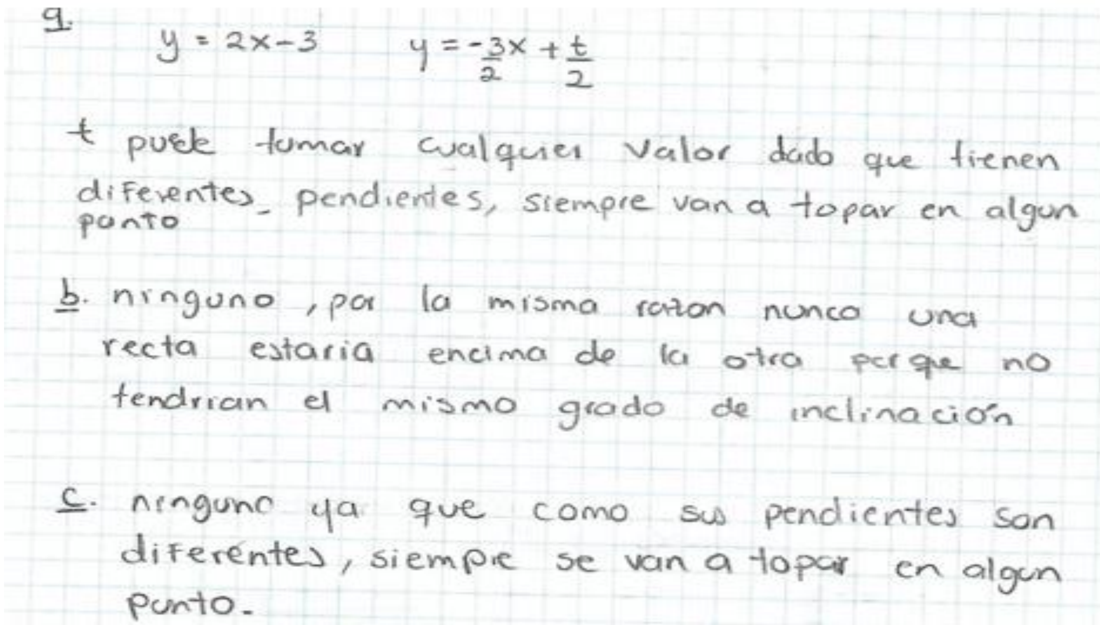
Los estudiantes exploran dando diferentes valores de t, luego encuentran las pendientes de las dos rectas y al observar que es la misma, determinan correctamente los valores de t.

Problema 4.1.1.8. Dado el sistema lineal: $\begin{matrix} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = t \end{matrix}$

Responda las mismas preguntas del ejercicio anterior.

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre las soluciones de un sistema lineal.

Solución presentada por el grupo G2.


9.

$y = 2x - 3$ $\quad$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{t}{2}$

t puede tomar cualquier valor dado que tienen diferentes pendientes, siempre van a topar en algun punto

b. ninguno, por la misma razon nunca una recta estaria encima de la otra porque no tendrian el mismo grado de inclinación

c. ninguno ya que como sus pendientes son diferentes, siempre se van a topar en algun punto.

Figura 28. Solución del problema 8 de la actividad1 por el grupo G2

De igual forma que en el problema anterior, determinan que las pendientes son distintas, argumentan la solución correctamente sobre los posibles valores de t.

Problema 4.1.1.9. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{matrix} 3x + 4y = 8 \\ 6x + ty = s \end{matrix}$
donde t y s son números reales, hallar los valores de t y s para que el sistema:

a. Tenga exactamente una solución.

b. No tenga solución

c. Tenga infinitas soluciones

d. Realizar una interpretación geométrica de cada uno de los puntos anteriores.

(Modificado del libro de Grossman)

La anterior es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante ponga en práctica el resultado del inciso *e* de los problemas 4.1.1.4 y 4.1.1.7 pero con mayor dificultad que el problema anterior.

Solución presentada por el grupo G1.

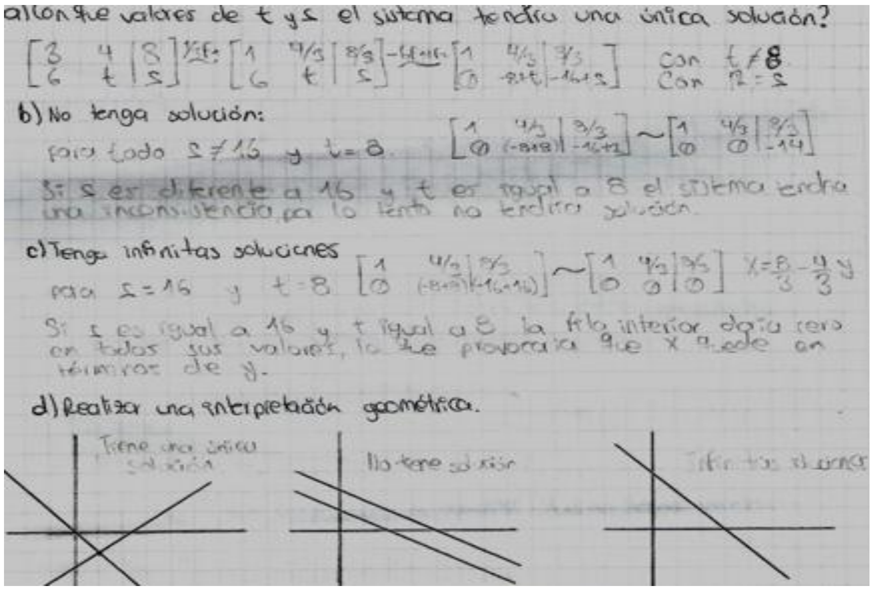


Figura 29. Solución del problema 9 de la actividad1 por el grupo G3

Los estudiantes reducen la matriz del sistema para así encontrar los valores pedidos correctamente y realizan la interpretación geométrica.

Problema 4.1.1.10. ¿Puede usted dar un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones en cuatro variables que no tenga solución? (Fuente propia)

Aquí se trata de una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante empiece a inferir sobre las soluciones de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

Solución presentada por el grupo G2.

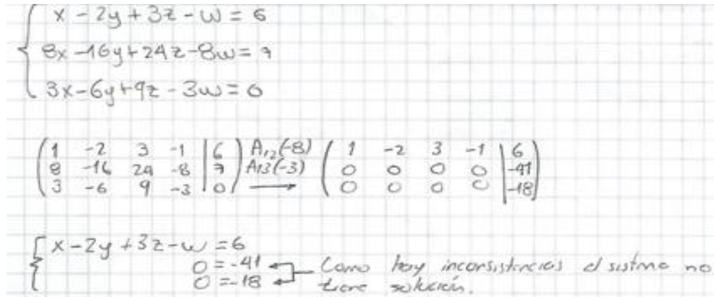


Figura 30. **Solución del problema 10 de la actividad1 por el grupo G2**

Los estudiantes plantean el sistema de tal manera que el miembro izquierdo de dos ecuaciones sean múltiplo de la primera pero el término independiente no lo sea y lo comprueban reduciendo las matrices.

Problema 4.1.1.11. Generalice sobre las soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales con n variables. (Fuente propia)

Se hace aquí una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre las soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales con n variables.

Solución presentada por el grupo G4:

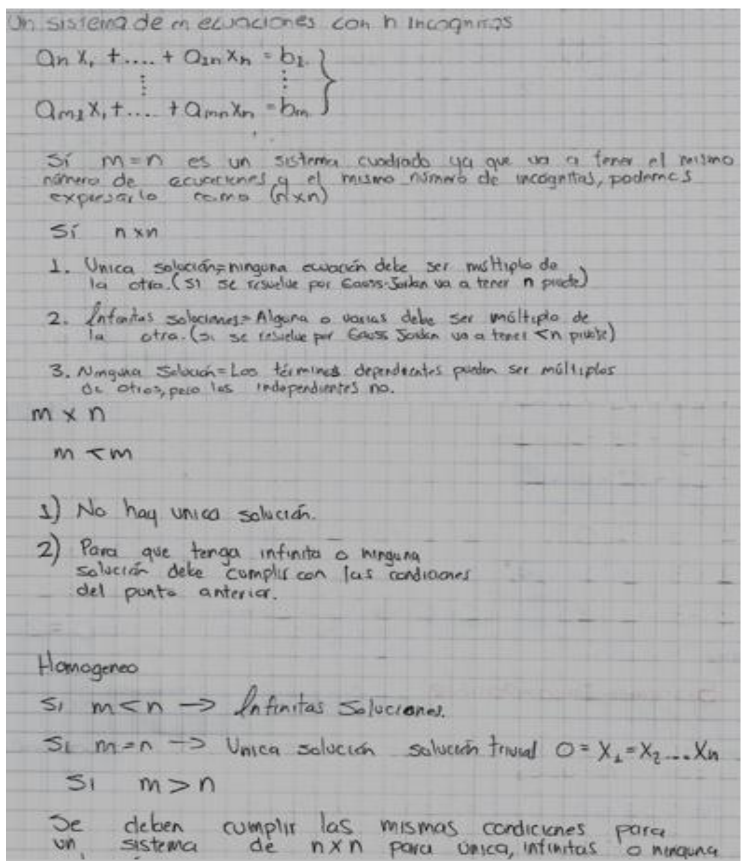


Figura 31. Solución del problema 11 de la actividad1 por el grupo G4

Los estudiantes plantean el sistema y realizan las conjeturas correctamente, primero para $n = m$, luego para $m < n$, después cuando el sistema es homogéneo y por último para $n < m$.

Problema 4.1.1.12. Suponga que la matriz A se ha reducido a la matriz R:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & a & 1 & 8 \\ x & y & z & v \end{matrix}, R = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

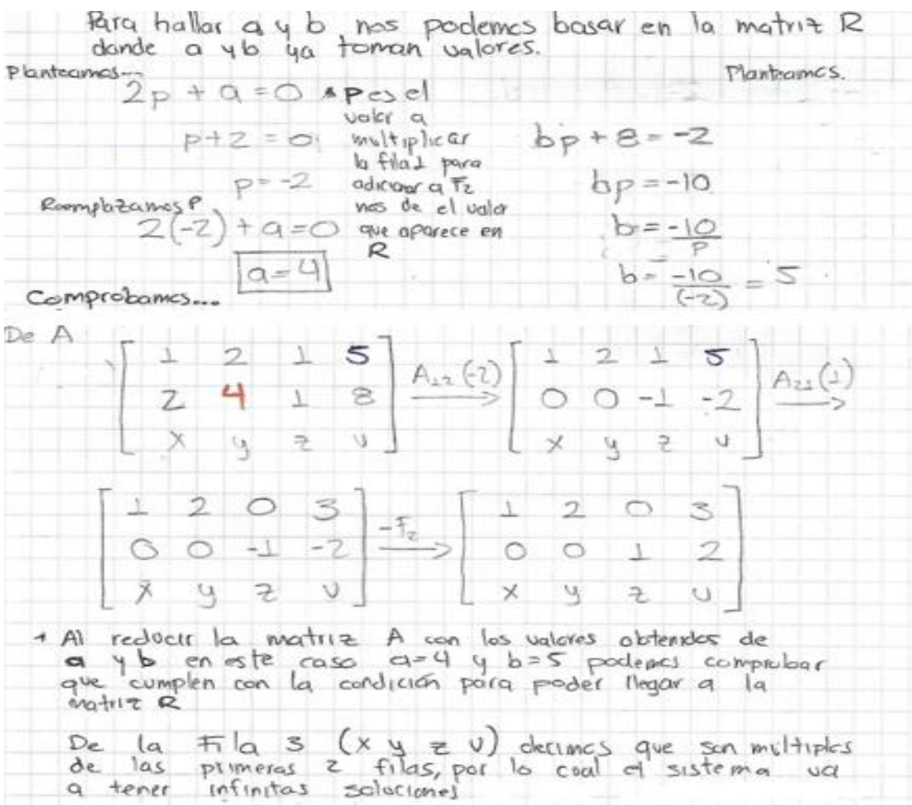
a. ¿Qué puede usted decir de la tercera fila (x y z v) de A?

b. ¿Cuáles son los valores de a y b?

c. Describa todas las soluciones de Rx = 0 (Modificado de la página de MIT)

Se trata de una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante aplique el concepto aprendido sobre reducción de matrices.

Solución presentada por el grupo G5.


Para hallar a y b nos podemos basar en la matriz R donde a y b ya toman valores.

Planteamos... $2p + a = 0$ * p es el valor a multiplicar la fila 1 para adicionar a F_2 nos de el valor que aparece en R

$p + 2 = 0$

$p = -2$

Reemplazamos p

$2(-2) + a = 0$

$\boxed{a = 4}$

Planteamos.

$bp + 8 = -2$

$bp = -10$

$b = \frac{-10}{p}$

$b = \frac{-10}{(-2)} = 5$

Comprobamos...

De A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ x & y & z & v \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ x & y & z & v \end{bmatrix} \xrightarrow{A_{21}(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ x & y & z & v \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ x & y & z & v \end{bmatrix}$$

* Al reducir la matriz A con los valores obtenidos de a y b en este caso a=4 y b=5 podemos comprobar que cumplen con la condición para poder llegar a la matriz R

De la Fila 3 (x y z v) decimos que son múltiplos de las primeras 2 filas, por lo cual el sistema va a tener infinitas soluciones

Figura 32. Solución del problema 11 de la actividad1 por el grupo G5

Los estudiantes encuentran primero los valores de a y de b que les piden, reduciendo la matriz A a la matriz R, luego comprueban que los valores encontrados estaban correctos y por último conjeturan acertadamente sobre la fila tres.

Apreciación del autor.

De los resultados de esta actividad se evidencian varias etapas del procedimiento metodológico propuesto en esta investigación.

Como parte inicial del razonamiento plausible se encuentra la exploración y tanteo que lleva a encontrar indicios a seguir o descartar en la solución de un problema. Además de tener una mejor comprensión de éste, se evidencia en el resultado del Problema 4.1.1.2 literal c). En este problema los estudiantes exploran la ecuación del plano que no la conocen, dándole valores conocidos a las constantes hasta determinar que se trata de la ecuación de un plano. En el problema 4.1.1.7, los estudiantes exploran dándole diferentes valores a t en el sistema de ecuaciones dado con el uso del Geogebra.

El razonamiento plausible se pone en manifiesto cuando se involucran la elaboración de conjeturas, distinguiendo entre éstas de manera especial a aquellas en las que es necesario formular una relación general. Se evidencia en los resultados de los problemas 4.1.1.2 literal *c*, 4.1.1.4 literales b, c, e, y f, 4.1.1.6, 4.1.1.7, 4.1.1.8, 4.1.1.10 y 4.1.1.11.

Concepto aplicado en la resolución de problemas.

Harel (Harel, 2014) sostiene: “En particular, el estudiante va construyendo significado para el concepto a partir de la solución de problemas que lo involucran. En términos generales, poseer una imagen que sea eficaz de un cierto concepto, significa entender el concepto y el indicador más importante para la comprensión de éste es la capacidad para resolver problemas relacionados con el concepto”.

Lo anterior se puede evidenciar en la solución de los problemas 4.1.1.3, 4.1.1.11 y 4.1.1.12. Igualmente, se observa en las soluciones 4.1.1.2 literal *c* y 4.1.1.7

A continuación, se muestra la Tabla 4 donde se resumen las soluciones a cada problema presentado por cada grupo, se utilizan las siguientes abreviaturas: (5) muy bien a una solución total y correcta, (4) bien a una solución parcial y correcta, (3) regular a una solución que el grupo piensa que es total pero que no está totalmente correcta y (2) mal a una solución totalmente incorrecta o no solucionado.

Como esta actividad es introductoria, donde casi todos los problemas eran preguntas para que llegaran a conjeturas de primer y segundo nivel, el resultado apreciado resulta muy positivo.

Tabla 4: Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 1

Grupos	Problemas												
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	media
G1	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G2	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G3	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.83
G4	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.83
G5	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G6	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.91
G7	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.66
G8	5.0	4.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	5.0	4.0	4.58
G9	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.58
G10	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	4.75
G11	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.0	5.0	4.58
G12	5.0	5.0	4.0	4.0	5.0	4.0	4.0	5.0	5.0	4.0	4.0	5.0	4.5
Tendencia general de la actividad 1													4.77

Logros:

- Todos los grupos entregaron las soluciones de las actividades en su mayoría con buenos resultados como se observa en la Tabla 4.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- Por ser ésta la primera actividad al principio se les dificultó la nueva metodología, ya que ellos estaban acostumbrados a que el profesor explicara todo en el tablero.
- Escribir y redactar los procedimientos detalladamente les cuesta un poco de trabajo.

4.1.2. Actividad 2: Matrices

Objetivos

- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de las operaciones entre matrices.
- Que el estudiante Interiorice el concepto de matriz inversa a partir de la solución de problemas.

Sugerencias metodológicas: En esta segunda actividad se realiza primero una clase de orientaciones teóricas donde se trata el concepto de matriz y clases de matrices, para que luego en el desarrollo de la actividad los estudiantes exploren y conjeturen sobre propiedades de matrices y las ponga en práctica en la solución de problemas propuestos. Al igual que en la actividad anterior la actividad se desarrolla en grupos de tres estudiantes, los cuales cada uno desarrolla los problemas de forma independiente.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se pide a los estudiantes que lleven el software Geogebra, bien sea en tablet, celular o tableta, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

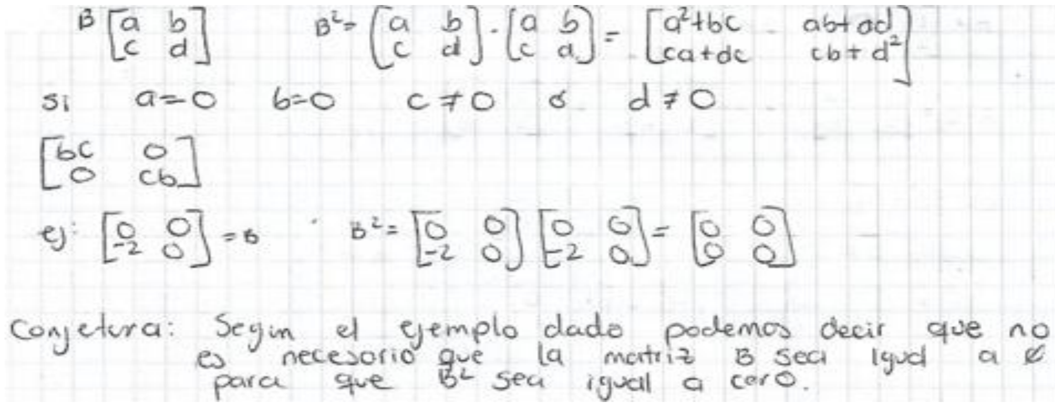
La actividad se desarrolló en dos clases, los puntos 9, 10 y 11 se desarrollaron extraclase. A continuación, se plantea cada uno de los problemas con algunas soluciones dadas por algunos grupos de trabajo.

Actividades

Problema 4.1.2.1. Si B es una matriz cuadrada tal que $B^2 = 0$, ¿necesariamente $B = 0$? Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta de segundo nivel que pretende que el estudiante explore multiplicando matrices diferentes de cero y al encontrar un contraejemplo correcto, conjeture que las matrices no cumplen las mismas propiedades que los números reales.

Solución presentada por el grupo G3:



$B \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+ad \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$

si $a=0$ $b=0$ $c \neq 0$ ó $d \neq 0$

$\begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & cb \end{bmatrix}$

ej: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = B$ $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Conjetura: Segun el ejemplo dado podemos decir que no es necesario que la matriz B sea igual a 0 para que B^2 sea igual a cero.

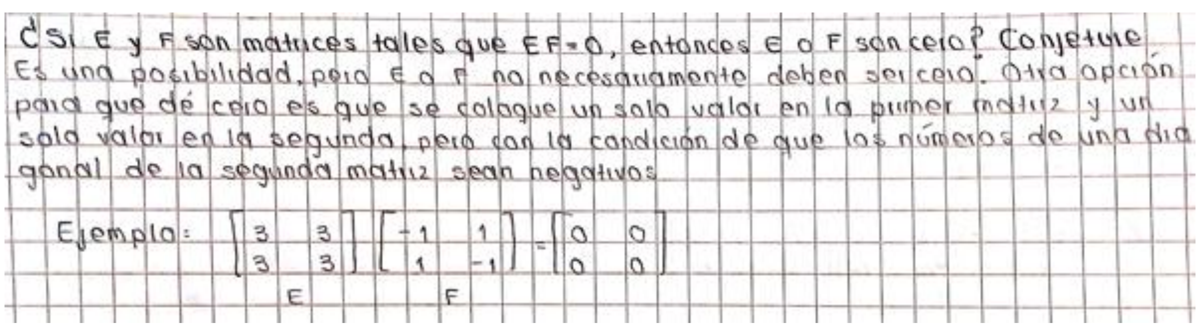
Figura 33. Solución del problema 1 de la actividad 2 por el grupo G1

Los estudiantes prueban con matrices de dos por dos e intentan encontrar un patrón, pero no lo encuentran, contestan correctamente, a través de un contraejemplo.

Problema 4.1.2.2. Si E y F son matrices $(E \neq F)$ tales que $EF = 0$, entonces ¿es E o F igual a 0? Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta de segundo nivel que pretende que el estudiante explore multiplicando matrices diferentes de cero y diferentes entre sí y al encontrar un contraejemplo correcto, conjeture que las matrices no cumplen las mismas propiedades que los números reales.

Solución presentada por el grupo G1:



¿Si E y F son matrices tales que EF=0, entonces E o F son cero? Conjeture

Es una posibilidad, pero E o F no necesariamente deben ser cero. Otra opción para que dé cero es que se coloque un solo valor en la primer matriz y un solo valor en la segunda, pero con la condición de que los números de una diagonal de la segunda matriz sean negativos

Ejemplo: $\underset{E}{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}} \underset{F}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Figura 34. Solución del problema 2 de la actividad 2 por el grupo G1

Los estudiantes prueban con varias matrices y encuentran un contraejemplo y un patrón en el cual al multiplicar dos matrices diferentes de cero el producto siempre será cero, para así contestar la pregunta correctamente.

Problema 4.1.2.3. Para qué tipo de matrices A y B se cumple: (Modificado del libro Grossman)

a. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b. $A + B \quad A - B \quad = A^2 - B^2$. Argumente.

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre propiedades que no siempre se cumplen con las matrices, pero que sí se cumplen para todos los números reales.

Solución presentada por el grupo G2:

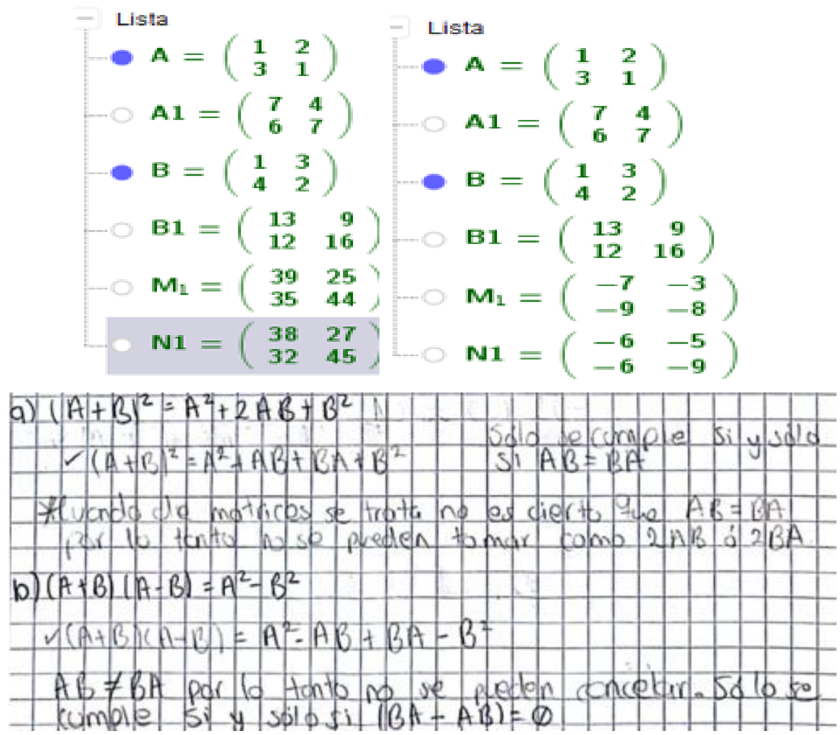


Figura 35. Solución del problema 3 de la actividad 2 por el grupo G2

Los estudiantes exploran las proposiciones con varias matrices en el Geogebra y encuentran contraejemplos para la afirmación, luego conjeturan que la única manera que la afirmación es cierta ocurre cuando las matrices cumplen la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Problema 4.1.2.4. Encuentre todas las matrices $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$, tal que $A \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} A$.

(Modificado de la página del MIT)

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que los estudiantes conjeturen sobre algunas propiedades de producto de matrices.

Solución presentada por el grupo G1:

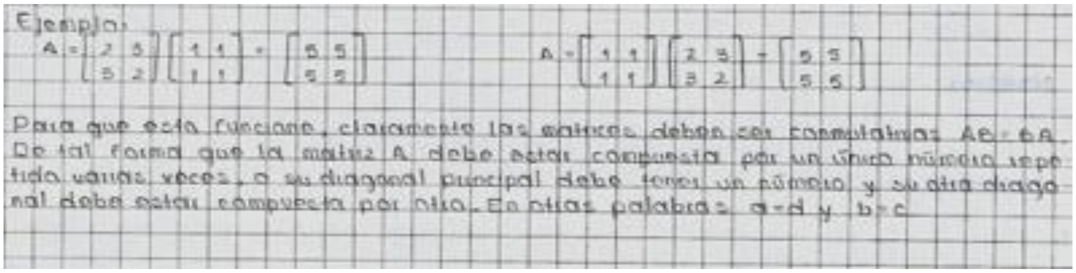


Figura 36. Solución del problema 4 de la actividad 2 por el grupo G1

Los estudiantes, explorando con diferentes matrices, encuentran una que cumple las condiciones pedidas y conjeturan correctamente.

Problema 4.1.2.5. Si $D = \begin{matrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$, halle D^k, conjeture y generalice. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre potencias de una matriz diagonal.

Solución presentada por el grupo G1:

Figura 37. Solución del problema 5 de la actividad 2 por el grupo G2

Los estudiantes exploran con matrices diagonales y conjeturan correctamente.

Problema 4.1.2.6. Sean A y B dos matrices cuadradas. Halle $(AB)^2$, A^2B^2y B^2A^2. ¿A qué será $(AB)^2$? Conjeture, generalice y argumente su resultado. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel, cuyo objetivo es que el estudiante conjeture sobre la potencia del producto de matrices.

Solución presentada por el grupo G3:

Figura 38. Solución del problema 6 de la actividad 2 por el grupo G3

Los estudiantes exploran con varias matrices y observan que las propiedades de potencia para números reales no se cumplen en las matrices, y conjeturan correctamente sobre bajo cuáles condiciones estas igualdades pueden ocurrir.

Problema 4.1.2.7. Sean A y B dos matrices tal que $AB = I$, ¿puede usted encontrar una matriz C diferente de B tal que $AC = I$? Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre la unicidad de una matriz inversa.

Solución presentada por el grupo G1:

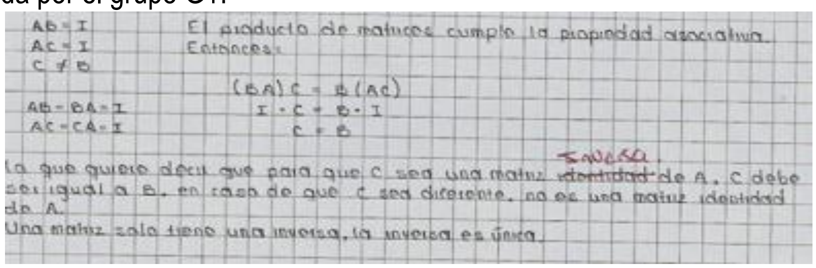


Figura 39. Solución del problema 7 de la actividad 2 por el grupo G1

Los estudiantes conjeturan y demuestran correctamente que para toda matriz invertible su inversa es única.

Problema 4.1.2.8. Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ que satisface $3A^6 - 2A^3 + A^2 - 12I = 0$, compruebe que *A* es invertible y exprese su inversa en términos de *A.* (Modificado del libro de Herstein)

Esta es una pregunta del tercer nivel cuyo objetivo es que el estudiante aplique el concepto de matriz inversa en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G4:

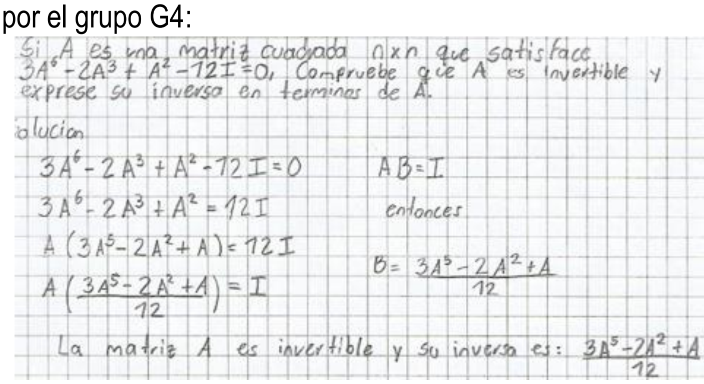


Figura 40. Solución del problema 8 de la actividad 2 por el grupo G4

Los estudiantes observan que al ser A una matriz invertible, debe existir una matriz tal que al multiplicarse por A el resultado sea la matriz identidad, así que aplican propiedades correctamente hasta encontrar la solución pedida.

Problema 4.1.2.9. Si A es una matriz invertible, ¿a qué será igual $(A^T)^{-1}$, $(kA)^{-1}$, $(AB)^{-1}$? Conjeture y demuestre sus resultados. (Fuente propia.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture y demuestre propiedades de matrices inversas.

Solución presentada por el grupo G2:

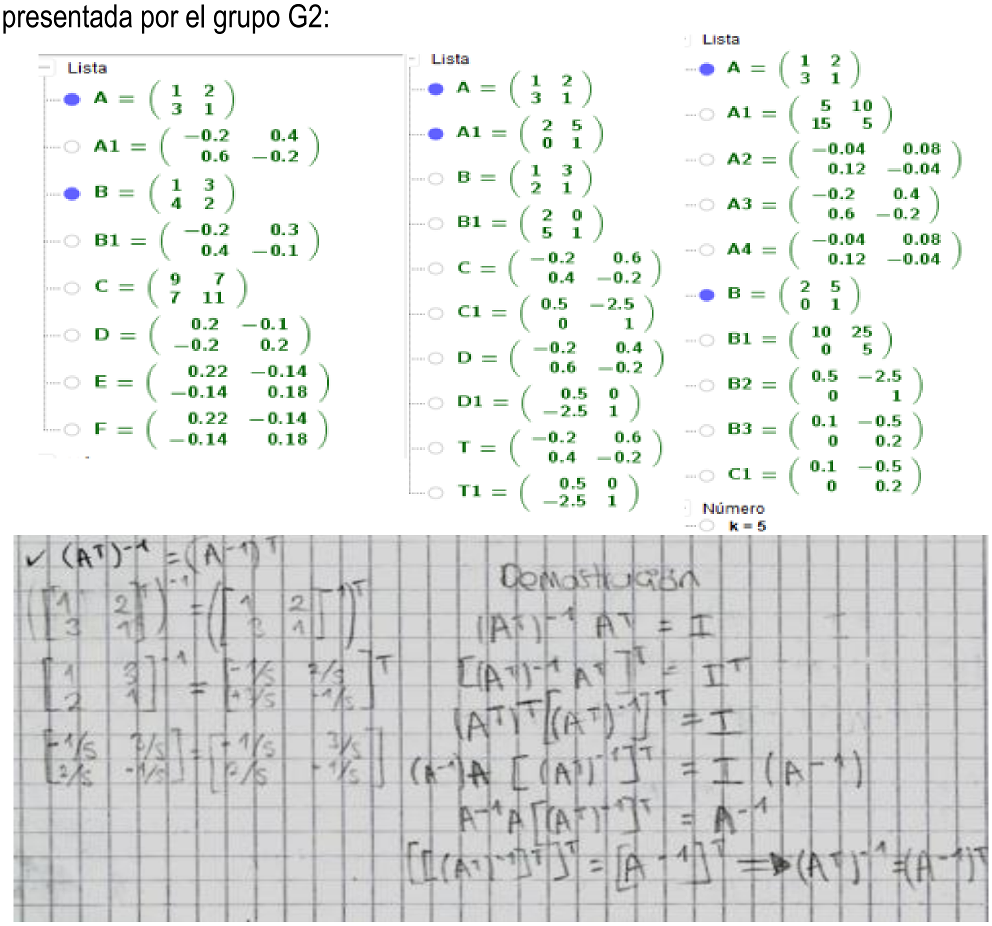


Figura 41. Solución del problema 9a de la actividad 2 por el grupo G2

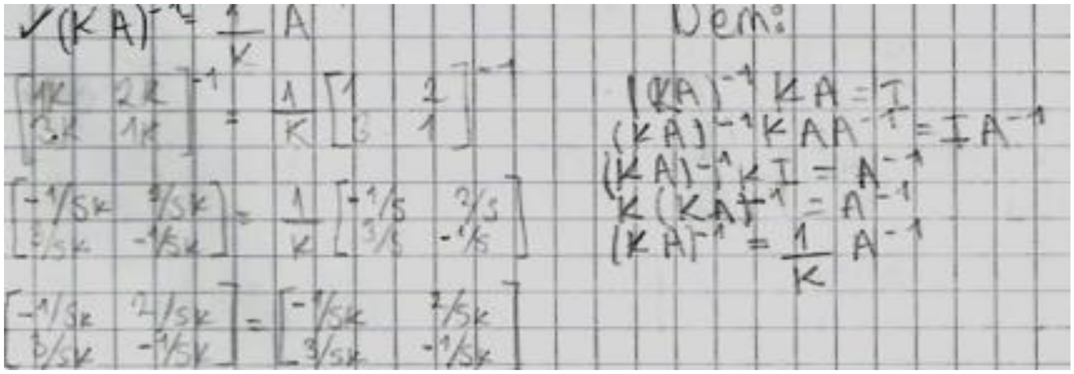


Figura 42. Solución del problema 9b de la actividad 2 por el grupo G2

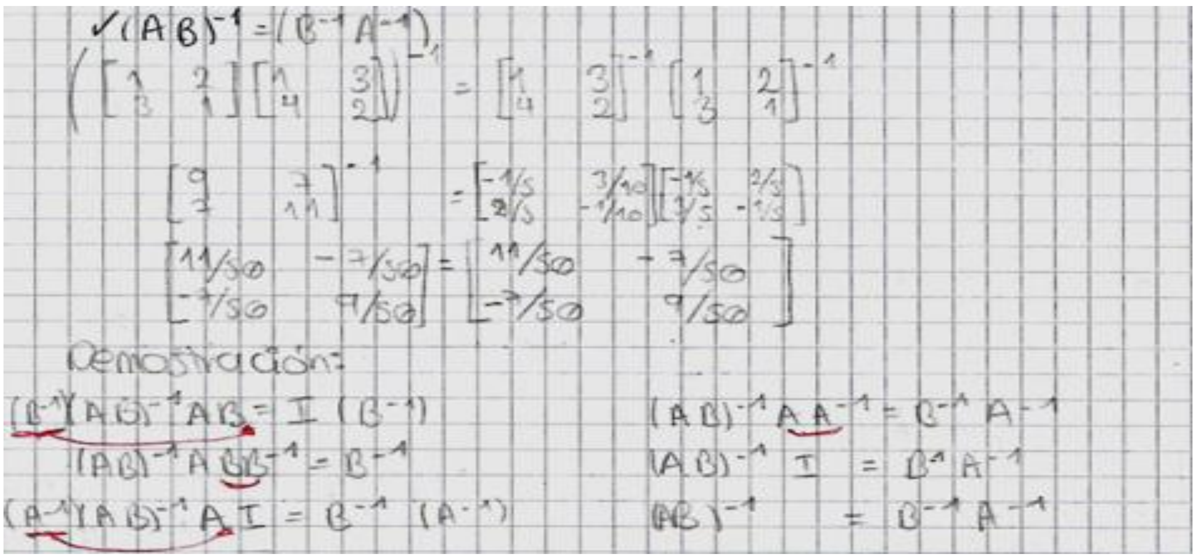


Figura 43. Solución del problema 9c de la actividad 2 por el grupo G2

Se observa que en cada caso los estudiantes exploran primero con ejemplos para verificar si lo que están conjeturando se cumple y luego realizan las demostraciones correctamente.

Problema 4.1.2.10. Si A es una matriz invertible de tamaño de $n \times n$, donde A es la matriz de coeficientes de un sistema lineal de *n* ecuaciones con *n* variables $Ax = B$, donde x es matriz columna de las variables y *B* es la matriz columna de los términos independientes., ¿cuántas soluciones tiene el sistema? Justifique su respuesta. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, cuando se sabe que el sistema tiene única solución.

Solución presentada por el grupo G1:

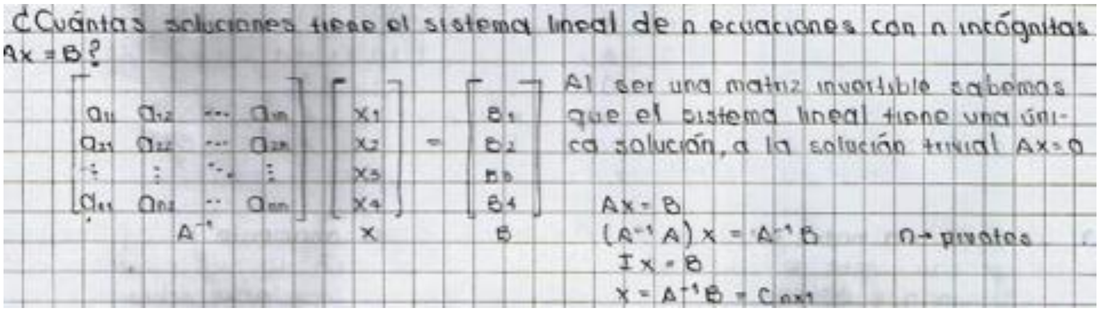


Figura 44. Solución del problema 10 de la actividad 2 por el grupo G1

Los estudiantes al resolver el sistema, contestan correctamente la pregunta.

Problema 4.1.2.11. Repite el ejercicio anterior si *A* es un a matriz singular. (Fuente propia)

Solución presentada por el grupo G1:

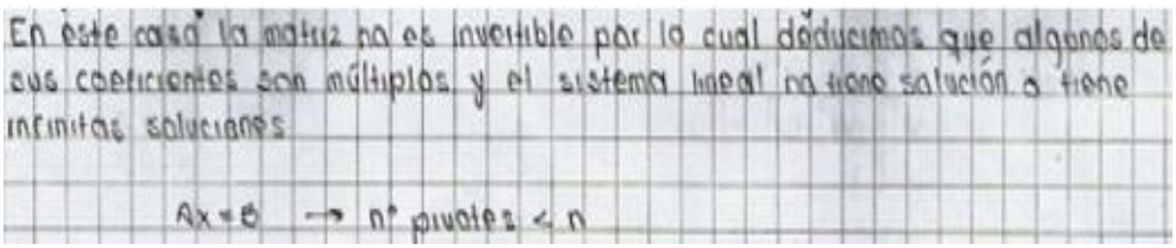


Figura 45. Solución del problema 11 de la actividad 2 por el grupo G1

Los estudiantes al tratar de argumentar se equivocan, ya que ellos escriben "algunos de sus coeficientes son múltiplos" en vez de "algunas de sus filas son múltiplos", pero la idea es correcta y saben que esto ocurre cuando el número de pivotes es menor que el número de filas, como lo escriben al final.

Apreciación del autor.

En esta actividad se observa que los estudiantes, para poder conjeturar una proposición desconocida para ellos, la exploran primero con ejemplos, como se evidencia en los resultados del problema 4.1.2.5 y 4.1.2.6. También utilizan el Geogebra en problemas relacionados con propiedades de matrices; primero realizan tanteos, como se evidencia en la solución de los problemas: 4.1.2.3 y 4.1.2.9, luego realizan las respectivas conjeturas, procedimiento que se observa en las soluciones: 4.1.2.3, 4.1.2.6 y 4.1.2.1. Si la conjetura parece ser cierta tratan de demostrarla o argumentarla, como se evidencia en los resultados del problema 4.1.2.9, en los cuales se observan demostraciones de algunas propiedades de matrices inversas, al igual que en los problemas 4.1.2.1 y 4.1.2.7. Y si la proposición es falsa tratan de encontrar el contraejemplo adecuado y así poder refutarla, procedimiento que se puede evidenciar en las soluciones 4.1.2.1, 4.1.2.2, 4.1.2.3 y 4.1.2.6.

En la solución del problema 4.1.2.8 los estudiantes aplican el concepto de matriz inversa en un problema no rutinario que la mitad de los grupos resolvió muy bien.

La Tabla 5 muestra la evaluación que se le otorga a cada problema presentado por cada grupo

Tabla 5. Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 2

Grupos	Problemas											
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	media
G1	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G2	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G3	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G4	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	3.0	4.0	5.0	5.0	4.63
G5	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	2.0	5.0	2.0	5.0	5.0	5.0	4.45
G6	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
G7	5.0	4.0	3.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.0	3.0	5.0	2.0	4.09
G8	2.0	4.0	5.0	2.0	5.0	5.0	3.0	2.0	5.0	2.0	5.0	3.63
G9	5.0	2.0	5.0	4.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	4.0	2.0	4.27
G10	5.0	4.0	2.0	5.0	4.0	4.0	3.0	3.0	2.0	5.0	4.0	3.72
G11	5.0	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	4.0	5.0	5.0	4.0	5.0	4.72
G12	5.0	4.0	5.0	4.0	4.0	3.0	5.0	2.0	5.0	4.0	4.0	4.09
Tendencia general de la actividad 2												4.46

Logros:

- Todos los grupos entregaron las soluciones de las actividades en su mayoría con buenos resultados como se observa en la Tabla 5.
- Los estudiantes consiguieron conjeturar y realizar demostraciones de algunas propiedades, así como también lograron encontrar contraejemplos frente a proposiciones falsas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- Se observa que los estudiantes tienen problemas en la escritura, es decir en la forma de expresar sus respuestas con un lenguaje matemático adecuado en algunas demostraciones o algunas argumentaciones, ya que son estudiantes de segundo semestre de ingeniería y es la primera vez que realizan demostraciones en un curso de matemáticas.

4.1.3. Actividad 3: Determinantes

Objetivos

- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de determinantes de matrices cuadradas.
- Incentivar al estudiante hacia el aprendizaje de los determinantes a través de la solución de problemas.

Sugerencias metodológicas: En esta actividad se realiza primero una clase de orientaciones teóricas en la que se trata el concepto de determinante de una matriz, para que luego en el desarrollo de la actividad los estudiantes exploren y conjeturen sobre propiedades de determinantes de matrices cuadradas y las ponga en práctica en la solución de problemas propuestos. Al igual que en la actividad anterior la actividad se desarrolla en grupos de tres estudiantes, los cuales cada uno desarrolla los problemas de forma independiente.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se les pide a los estudiantes que lleven el paquete Geogebra, bien sea en tablet, celular o laptop, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

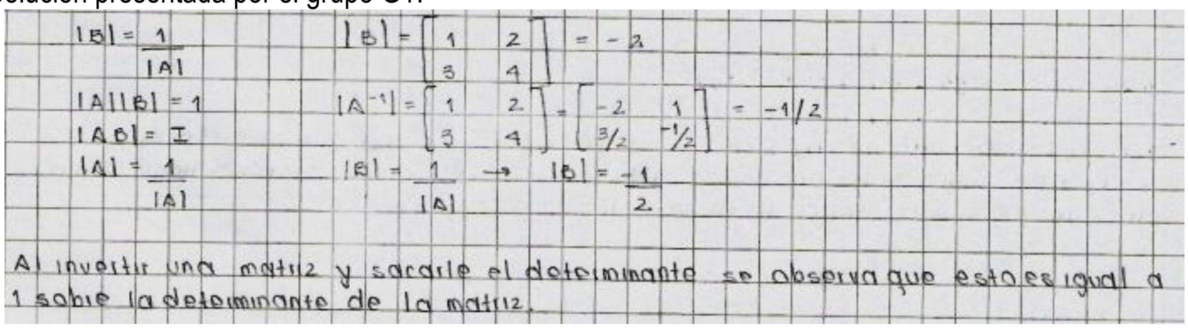
La actividad se desarrolló en una clase, los puntos 8 y 9 se desarrollaron extraclase. A continuación, se plantean cada uno de los problemas con algunas soluciones dadas por algunos grupos de trabajo.

Actividades

Problema 4.1.3.1. Si Ay B son dos matrices tal que $B = \frac{1}{A}$, ¿qué se puede decir acerca de la matriz B? Justifique. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante conjeture sobre el determinante de una matriz inversa.

Solución presentada por el grupo G1:



$|B| = \frac{1}{|A|}$

$|A||B| = 1$

$|AB| = I$

$|A| = \frac{1}{|A|}$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2$

$|B| = \frac{1}{|A|} \rightarrow |B| = -\frac{1}{2}$

Al invertir una matriz y sacarle el determinante se observa que esto es igual a 1 sobre la determinante de la matriz.

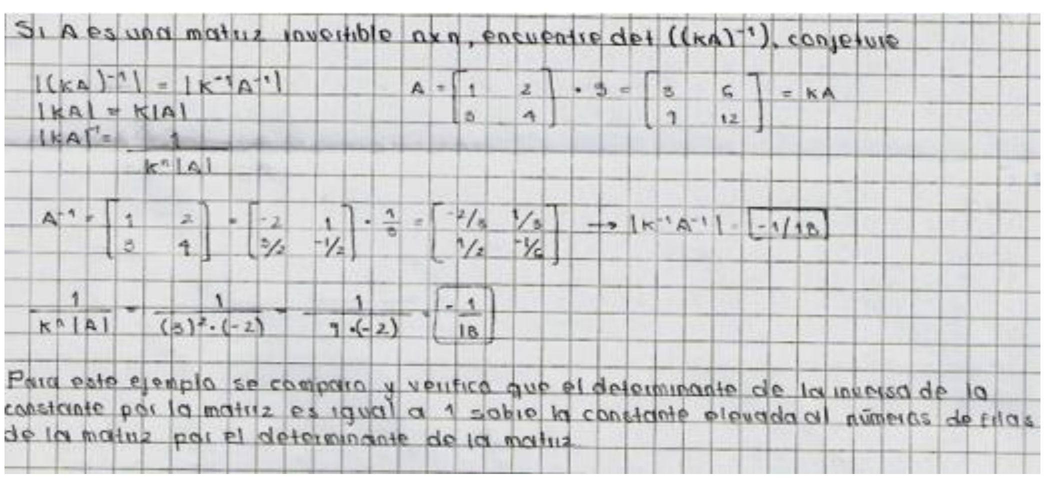
Figura 46. Solución del problema 1 de la actividad 3 por el grupo G1

Los estudiantes exploran con varias matrices (escriben solamente una) y observan que la relación se cumple para matrices inversas, luego demuestran la conjetura correctamente.

Problema 4.1.3.2. Si A es una matriz invertible $n \times n$, halle $\det \quad kA^{\ -1}$, donde k es una constante. Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre propiedades de los determinantes de matrices inversas.

Solución presentada por el grupo G1:



Si A es una matriz invertible nxn, encuentre det ((kA)⁻¹). conjeture

$|(kA)^{-1}| = |k^{-1}A^{-1}|$

$|kA| = k|A|$

$|kA|^{-1} = \frac{1}{k^n|A|}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = kA$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{bmatrix} \rightarrow |k^{-1}A^{-1}| = \boxed{-1/18}$

$\frac{1}{k^n|A|} = \frac{1}{(3)^2 \cdot (-2)} = \frac{1}{9 \cdot (-2)} = \boxed{-\frac{1}{18}}$

Para este ejemplo se comparo y verifico que el determinante de la inversa de la constante por la matriz es igual a 1 sobre la constante elevada al números de filas de la matriz por el determinante de la matriz

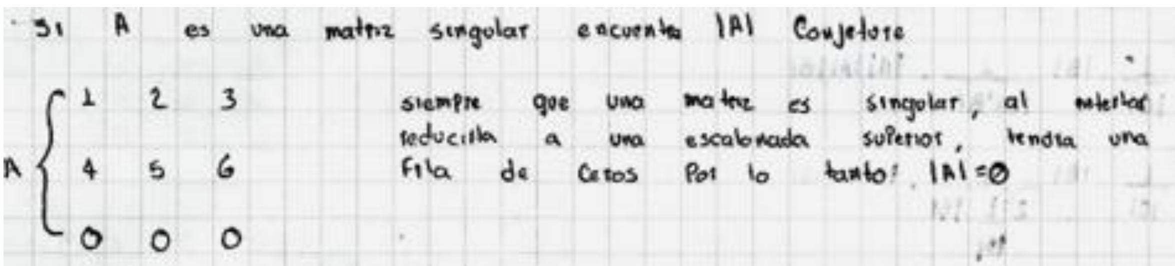
Figura 47. Solución del problema 2 de la actividad 3 por el grupo G1

Al igual que en el ejercicio anterior los estudiantes exploran con varias matrices y luego conjeturan la propiedad y la demuestran correctamente.

Problema 4.1.3.3. Si A es una matriz singular, encuentre A . Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre el determinante de una matriz singular.

Solución presentada por el grupo G4:


Si A es una matriz singular encuentre |A| Conjeture

$$A \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

siempre que una matriz es singular, al intentar reducirla a una escalonada superior, tendra una fila de ceros por lo tanto: |A| = 0

Figura 48. Solución del problema 3 de la actividad 3 por el grupo G4

Al igual que en el problema anterior los estudiantes exploran con varias matrices singulares, y determinan que, al reducirlas, siempre van a tenar por lo menos una fila de ceros y por lo tanto conjeturan y argumentan el resultado correctamente.

Problema 4.1.3.4. Si A es una matriz cuadrada y el sistema lineal $AX = 0$ tiene infinitas soluciones para X, ¿cuánto vale A ? y ¿si el sistema tiene única solución cuánto vale A ? Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante conjetura sobre el determinante de la matriz de coeficientes de sistemas lineales homogéneo con infinitas soluciones y con única solución.

Solución presentada por el grupo G2:

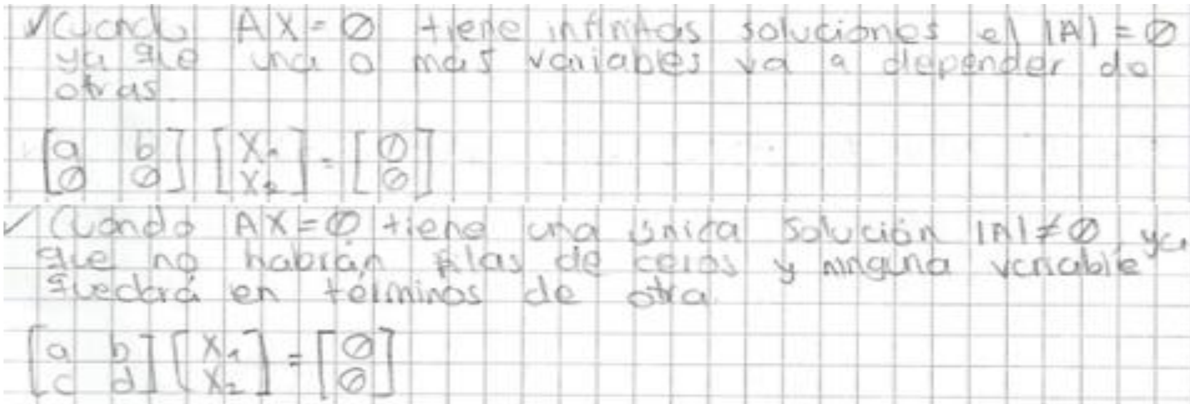


Figura 49. Solución del problema 4 de la actividad 3 por el grupo G2

Los estudiantes conjeturan de acuerdo a los resultados anteriores y argumentan su respuesta.

Problema 4.1.3.5. Si A es una matriz $n \times n$ y existe una matriz B $n \times 1$ tal que el sistema lineal $AX = B$ tiene única solución, ¿qué valor tiene A ? Y ¿si el sistema tiene infinitas soluciones? ¿si el sistema no tiene solución? Conjeture. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel, cuyo objetivo es que el estudiante conjeture sobre el determinante de la matriz de coeficientes de sistemas lineales no homogéneos.

Solución presentada por el grupo G3:

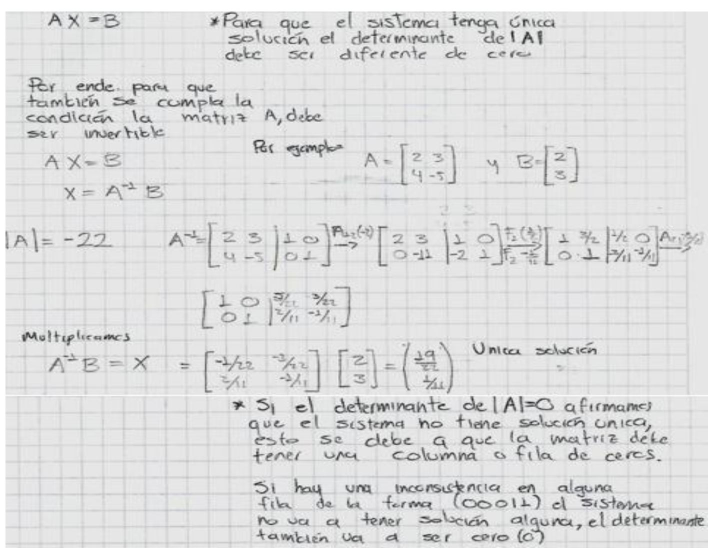


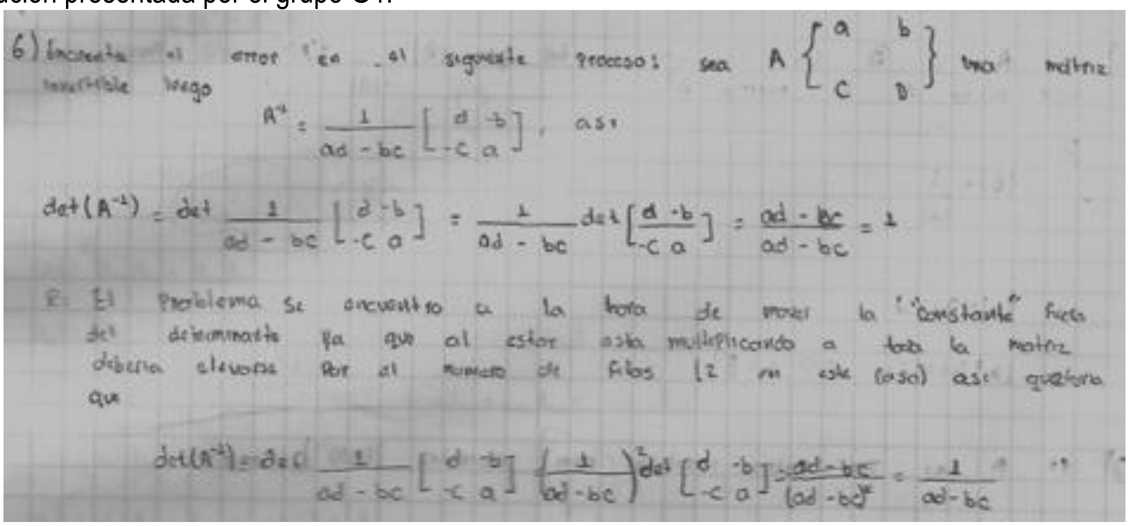
Figura 50. Solución del problema 5 de la actividad 3 por el grupo G3

De acuerdo a los resultados anteriores los estudiantes conjeturan y argumentan.

Problema 4.1.3.6. Encuentre el error en el siguiente proceso: Sea $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ una matriz de invertible. Luego $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}$, así $\det A^{-1} = det \frac{1}{ad-bc} \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix} = \frac{1}{ad-bc} det \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$. (De la página de MIT.)

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante aplique propiedades de los determinantes en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G4:


6) Encuentre el error en el siguiente proceso: sea $A \left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & D \end{matrix} \right\}$ una matriz invertible luego

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, así

$\det(A^{-1}) = \det \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \det \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$

R: El problema se encuentra a la hora de mover la "constante" fuera del determinante ya que al estar esta multiplicando a toda la matriz debería elevarse por el número de filas (2 en este caso) así quedaría que

$\det(A^{-1}) = \det \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \left(\frac{1}{ad-bc}\right)^2 \det \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad-bc}$

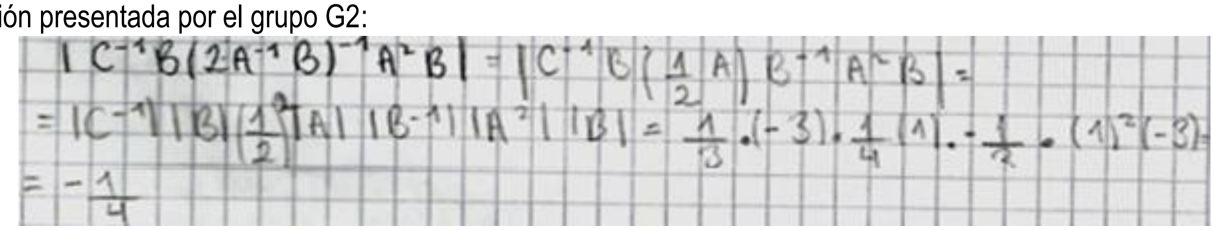
Figura 51. Solución del problema 6 de la actividad 3 por el grupo G4

Los estudiantes encuentran el error de acuerdo a las propiedades de los determinantes y dan la solución correcta.

Problema 4.1.3.7. Si $A, B \ y \ C$ son matrices de $2x2$ tales que $A \ = 1, \ B \ = -3 \ y \ C$ es una matriz que se obtiene al intercambiar las filas de B, hallar: $|C^{-1}B \ \ 2A^{-1}B \ \ ^{-1}A^2B|$. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel, cuyo objetivo es que el estudiante aplique propiedades de los determinantes en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G2:


$|C^{-1}B(2A^{-1}B)^{-1}A^2B| = |C^{-1}B(\frac{1}{2}A)B^{-1}A^2B| =$

$= |C^{-1}||B|(\frac{1}{2})^2|A||B^{-1}||A^2||B| = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4}(1) \cdot -\frac{1}{3} \cdot (1)^2(-3)$

$= -\frac{1}{4}$

Figura 52. Solución del problema 7 de la actividad 3 por el grupo G2

Los estudiantes aplican las propiedades de determinantes correctamente para obtener la solución pedida.

Problema 4.1.3.8. Sea A es una matriz $n \times n$. Suponer que B_1 se obtiene al sumar el mismo número t a cada elemento del i-ésimo renglón de A, y que B_2 se obtiene al restar t de cada elemento del i-ésimo renglón de A. Exprese el determinante de A en términos de B_1 y B_2. (Modificado del libro de Anton.)

Esta es una pregunta del tercer nivel cuyo objetivo es que el estudiante aplique las propiedades de los determinantes en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G2:

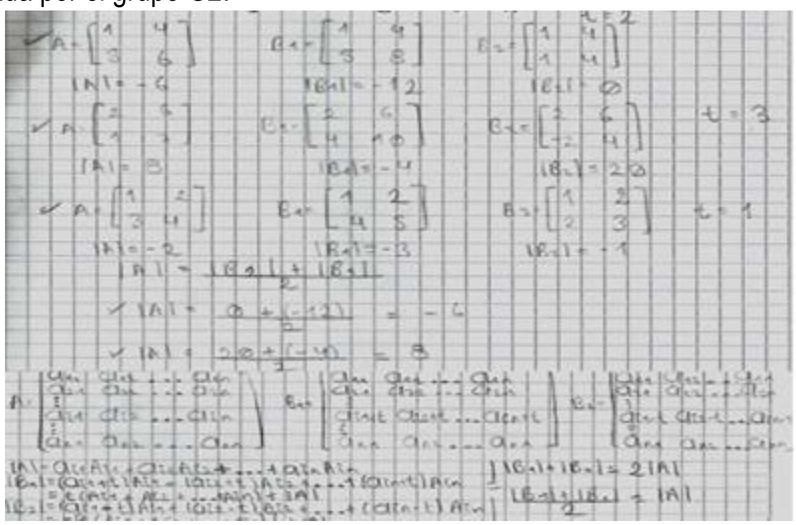


Figura 53. Solución del problema 8 de la actividad 3 por el grupo G2

Los estudiantes exploran con varios ejemplos y luego conjeturan y realizan la demostración correctamente**.**

Problema 4.1.3.9. Demostrar el teorema del coseno.

Esta es una pregunta del tercer nivel, cuyo objetivo es que el estudiante aplique los conceptos de determinantes en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G1:

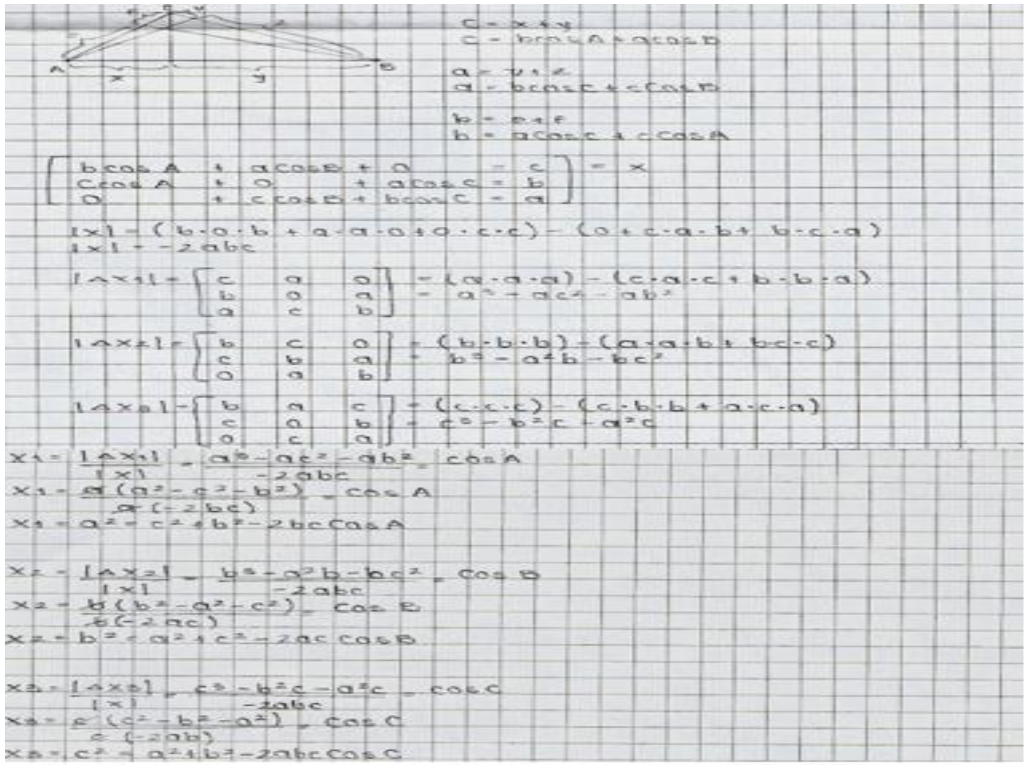


Figura 54. Solución del problema 9 de la actividad 3 por el grupo G1

Los estudiantes dibujan un triangulo obtusángulo del cual plantean correctamente un sistema de tres por tres, donde las variables son los cosenos de los ángulos de un triángulo. Luego utilizan la regla de Cramer, para acertadamente llegar a solución.

Apreciación del autor.

En esta actividad se observa que, en algunos problemas, para realizar las conjeturas, los estudiantes primero exploran con ejemplos, para tantear la veracidad de los enunciados, lo cual se evidencia en los resultados de los problemas: 4.1.3.1, 4.1.3.2, 4.1.3.3, 4.1.3.5, 4.1.3.8. Luego realizan las conjeturas, como se muestra en el resultado de los problemas: 4.1.3.2, 4.1.3.3, 4.1.3.5, 4.1.3.8. Encuentran contraejemplos adecuados para refutar las proposiciones falsas como se puede evidenciar en las soluciones de los problemas: 4.1.3.6. Así mismo realizan correctamente las demostraciones de las proposiciones verdaderas, las cuales se observan en las soluciones: 4.1.3.2, 4.1.3.3, 4.1.3.5, 4.1.3.8 El concepto aplicado a la resolución de problemas se puede evidenciar en las soluciones de los problemas: 4.1.3.6, 4.1.3.7, 4.1.3.5, 4.1.3.8 y 4.1.3.5, 4.1.3.9

En la Tabla 6 muestra la evaluación que se le otorga a cada problema presentado por cada grupo.

Tabla 6. Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 3

Grupos	Problemas									
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	media
G1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
G2	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4.8
G3	5	5	5	4	5	5	4	5	4	4.67
G4	5	4	5	5	4	5	5	2	5	4.44
G5	5	4	5	4	5	5	4	5	4	4.55
G6	5	5	5	4	5	3	5	5	4	4.55
G7	2	5	4	3	5	2	5	2	2	3.33
G8	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4.55
G9	4	4	5	4	2	5	3	5	2	3.77
G10	2	4	4	5	5	5	2	2	4	3.66
G11	4	4	5	5	5	5	5	5	4	4.67
G12	3	5	3	4	3	5	4	4	3	3.77
Tendencia general de la actividad 3										4.32

Logros:

- Todos los grupos entregaron las soluciones de las actividades en su mayoría con buenos resultados como se observa en la Tabla 6.
- Los estudiantes consiguieron conjeturar y realizar demostraciones de algunas propiedades, así como también lograron encontrar contraejemplos para las proposiciones falsas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- En algunos estudiantes se presenta dificultad al momento de realizar demostraciones.

4.1.4. Actividad 4. Vectores

Objetivos

- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de vectores.

- Incentivar al estudiante hacia el aprendizaje de vectores a través de la solución de problemas.

Sugerencias metodológicas: En esta cuarta actividad se realiza primero una clase de orientaciones teóricas donde se desarrolla el concepto de vector, primero en $\mathbb{R}^2$ y luego en $\mathbb{R}^n$, para que luego en la actividad los estudiantes exploren y conjeturen sobre propiedades de vectores y las ponga en práctica en la resolución de problemas. Al igual que en la actividad anterior la actividad se desarrolla en grupos de tres estudiantes, cada uno de los cuales desarrolla los problemas de forma independiente.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se les pide a los estudiantes que lleven el paquete Geogebra, bien sea en tablet, celular o laptop, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

La actividad se desarrolló en cinco clases, los puntos, 10 y 11 se desarrollaron extraclase. A continuación, se plantean cada uno de los problemas con algunas soluciones dadas por algunos grupos de trabajo.

Actividades

Problema 4.1.4.1. Dados dos vectores u,v en $\mathbb{R}^2$ y k un escalar,

a. Si $v = ku$, ¿cuál es la condición sobre el escalar k para que el vector v cambie su dirección?

b. Si se sabe que $v^{\ 2} = v \cdot v$, encuentre una expresión algebraica que permita encontrar el ángulo entre dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué sucederá si el ángulo entre los dos vectores es 0 ó $\frac{\pi}{2}$? (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante explore y conjeture sobre el ángulo entre dos vectores.

Solución presentada por el grupo G1:

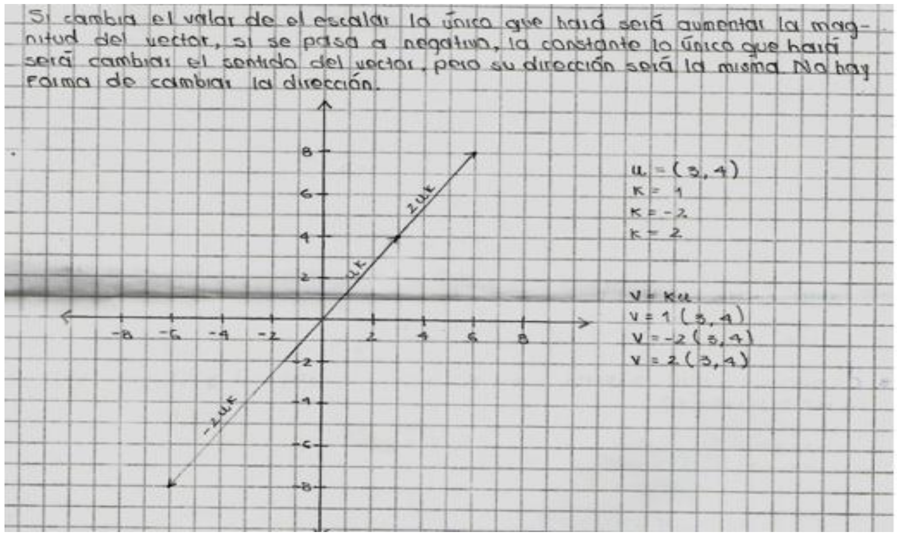


Figura 55. Solución del problema 1a de la actividad 4 por el grupo G1

Los estudiantes exploran con un vector dado y diferentes valores de k, luego conjeturan correctamente.

Solución presentada por el grupo G4:

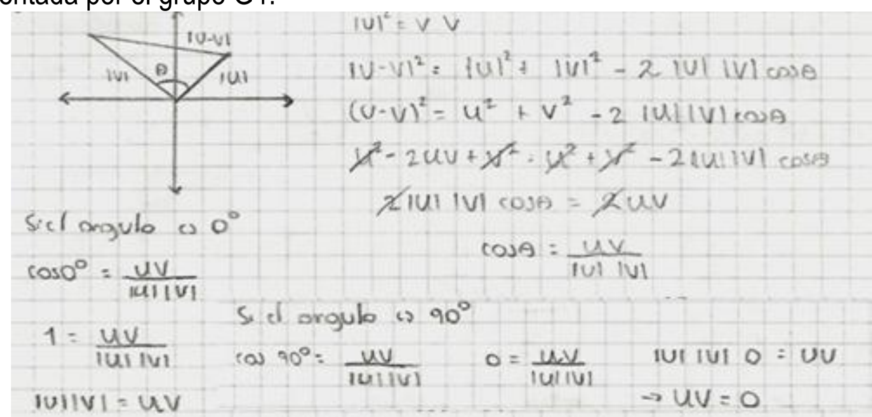


Figura 56. Solución del problema 1b de la actividad 4 por el grupo G4

Los estudiantes completan el triángulo formado por los dos vectores y partiendo del teorema del coseno ya demostrado en la actividad anterior deducen correctamente la fórmula para el coseno del ángulo entre vectores, luego deducen expresiones para cuando el ángulo entre los vectores es cero ó 90°.

Problema 4.1.4.2. Dado un vector u, en $\mathbb{R}^2$ encuentre un vector que sea ortogonal a u y unitario. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del segundo nivel, que pretende que el estudiante pueda encontrar y maniobrar vectores unitarios y ortogonales.

Solución presentada por el grupo G4:

Figura 57. Solución del problema 2 de la actividad 4 por el grupo G4

Los estudiantes toman un vector dado y otro en forma general al que quieren hallar sus componentes, calculan el producto punto y despejan una componente para luego sustituirla en la norma del vector y así encontrar las componentes. Luego conjeturan sobre el vector pedido, lo comprueban con un ejemplo y lo escriben en forma general.

Problema 4.1.4.3. ¿Cómo encontrar un vector v en $\mathbb{R}^2$que sea ortogonal y otro paralelo a la recta $ax + by = 0$ (Modificado del libro de Grossman.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique el concepto de vectores paralelos u ortogonales en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G3:

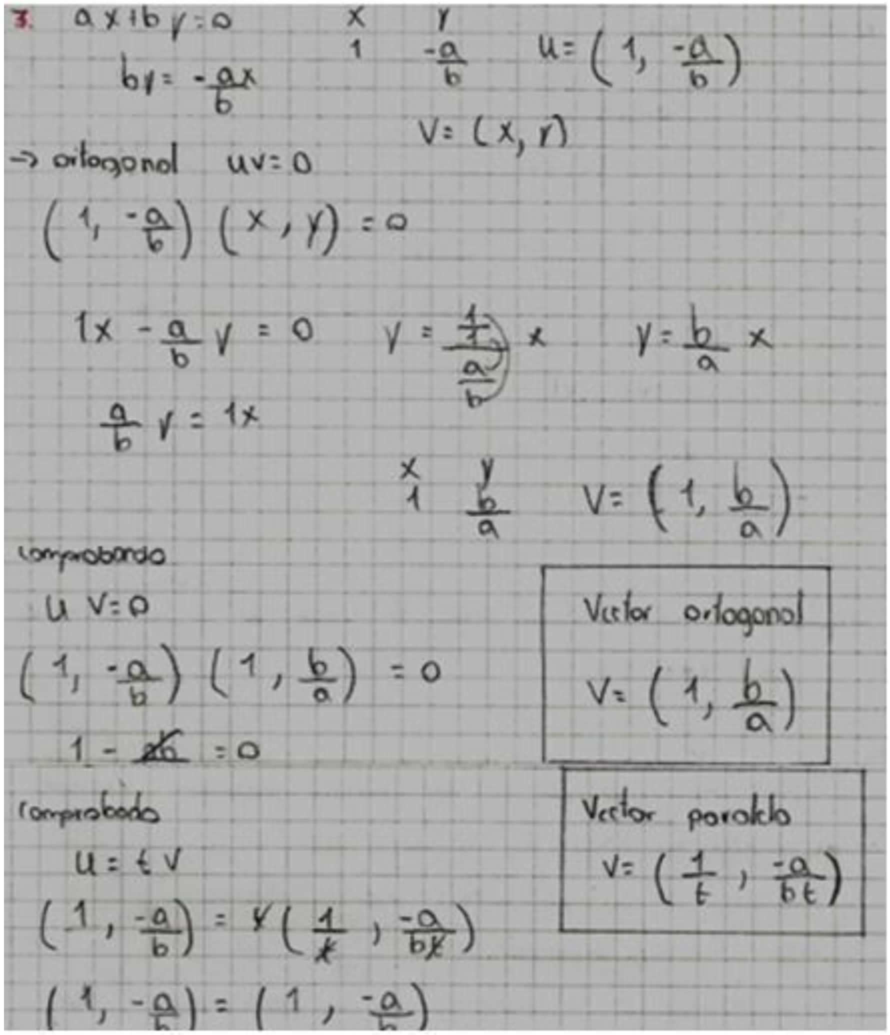


Figura 58. Solución del problema 3 de la actividad 4 por el grupo G3

Los estudiantes despejan una variable de la recta original, con ésta hallan un vector sobre la recta. Al saber que el vector que quieren encontrar debe dar cero al realizar el producto punto, encuentran el vector pedido y lo comprueban. Para encontrar el vector paralelo saben que este debe ser un múltiplo del que hallaron sobre la recta, así que determinan y verifican que efectivamente es el vector que buscaban.

Problema 4.1.4.4. Dados dos vectores u,v en $\mathbb{R}^2$, ¿cómo se podría justificar que $u \cdot v \leq \; u \;\; v$? ¿Cuándo se cumple la igualdad?

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante explore sobre la desigualdad del producto punto con el producto de las normas.

Solución presentada por el grupo G1:

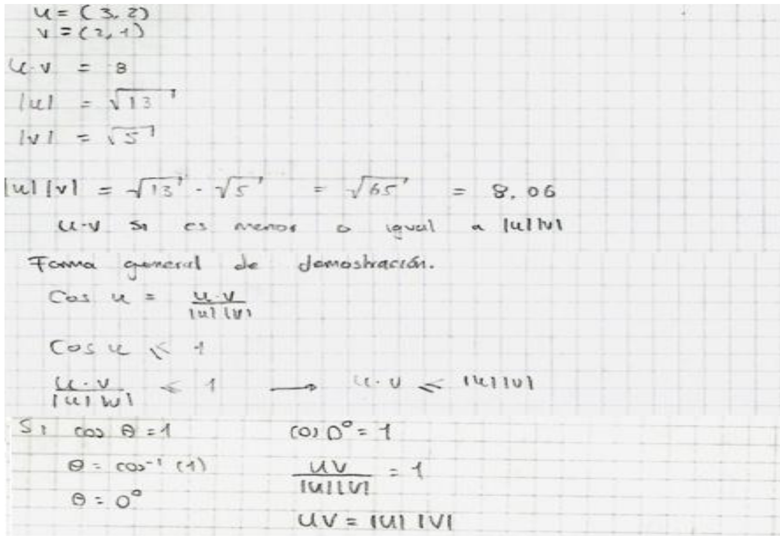


Figura 59. Solución del problema 4 de la actividad 4 por el grupo G1

Los estudiantes exploran con un ejemplo y luego realizan una argumentación correcta de la desigualdad.

Problema 4.1.4.5. Dados dos vectores u,v en $\mathbb{R}^2$, ¿cómo se podría justificar que $u + v \ \leq \ u + v$? ¿Cuándo se cumple la igualdad?

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante manipule y muestre la desigualdad triangular.

Solución presentada por el grupo G2:

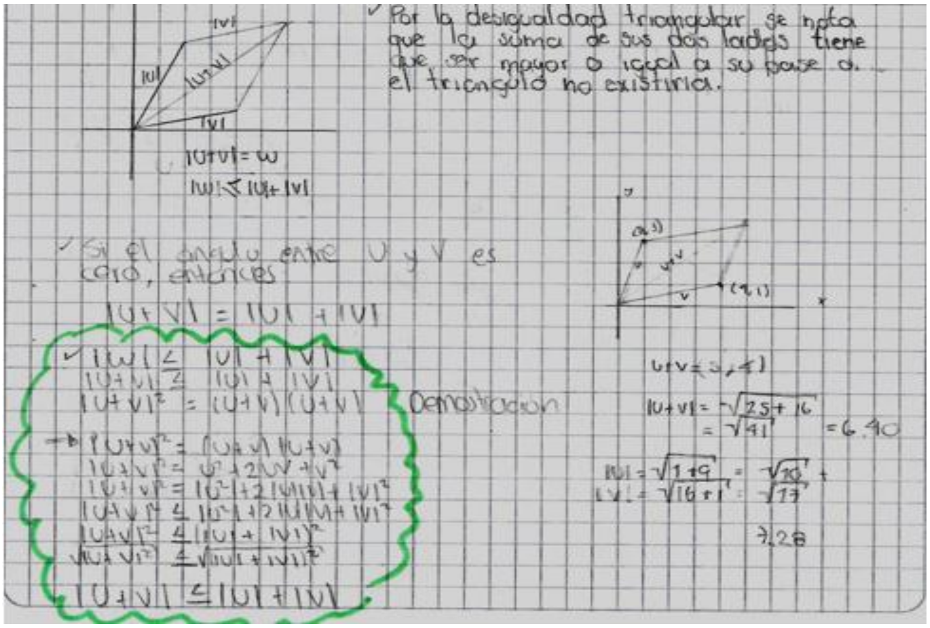


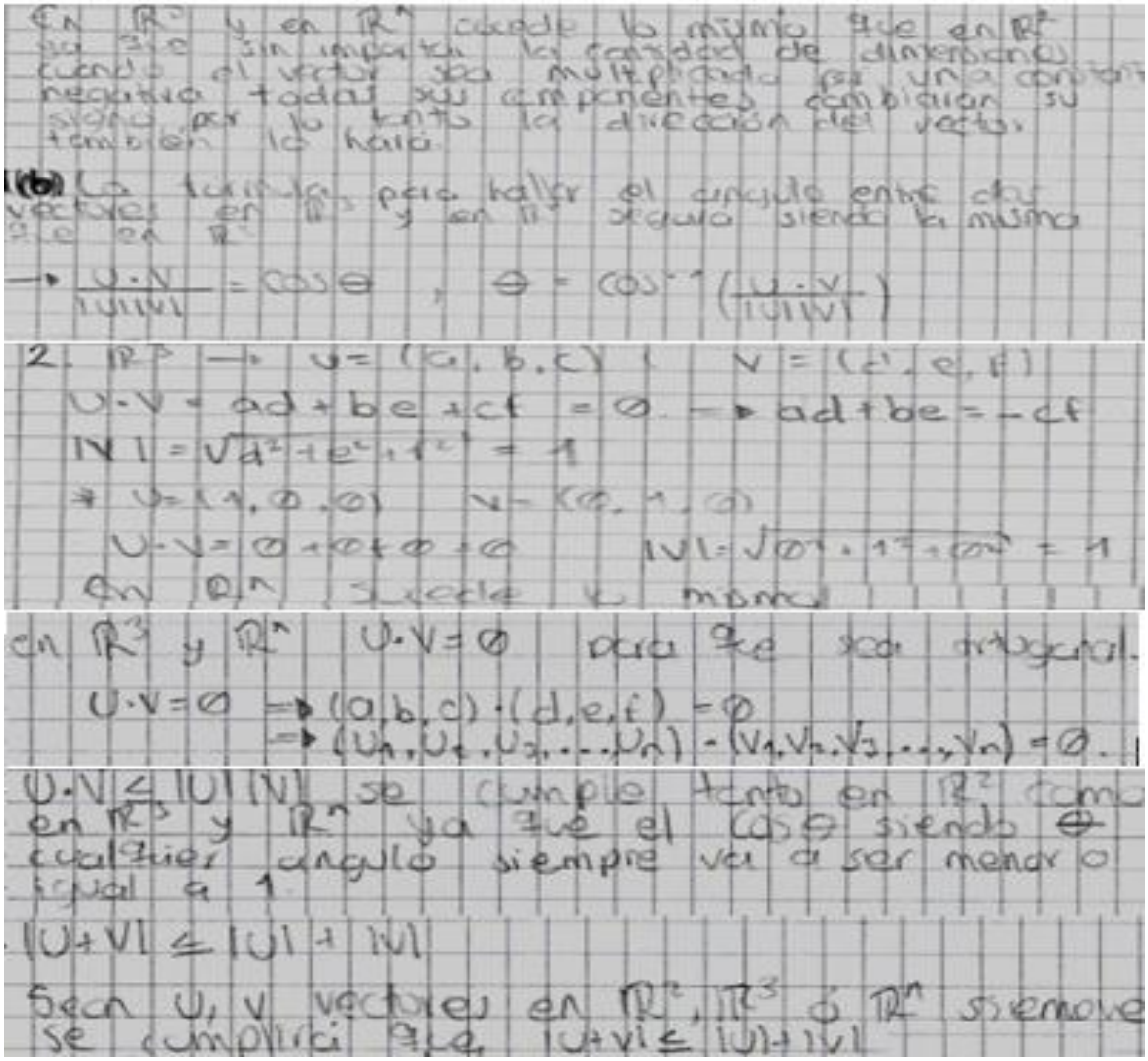
Figura 60. Solución del problema 5 de la actividad 4 por el grupo G2

Los estudiantes dibujan el gráfico correspondiente, realizan la demostración correctamente.

Problema 4.1.4.6. ¿Los anteriores puntos se cumplen o se pueden realizar en $\mathbb{R}^3$? ¿y en $\mathbb{R}^n$? (Fuente propia)

Esta es una pregunta del nivel tres cuyo objetivo es que el estudiante generalice sobre vectores en $\mathbb{R}^n$.

Solución presentada por el grupo G2:



En $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$ sucede lo mismo que en $\mathbb{R}^2$ ya que sin importar la cantidad de dimensiones cuando el vector sea multiplicado por una constante negativa todas sus componentes cambiarán su signo por lo tanto la dirección del vector también lo hará.

(b) La fórmula para hallar el ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{R}^n$ seguirá siendo la misma que en $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow \frac{U\cdot V}{|U||V|} = \cos\theta$, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{U\cdot V}{|U||V|}\right)$

2. $\mathbb{R}^3 \rightarrow U=(a,b,c)$, $V=(d,e,f)$

$U\cdot V = ad+be+cf = 0 \rightarrow ad+be=-cf$

$|V| = \sqrt{d^2+e^2+f^2} = 1$

* $U=(1,0,0)$ $V=(0,1,0)$

$U\cdot V = 0+0+0+0$ $|V|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$

en $\mathbb{R}^n$ sucede lo mismo

en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$ $U\cdot V=0$ para que sean ortogonal.

$U\cdot V = 0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(d,e,f)=0$

$\Rightarrow (U_1,U_2,U_3,\ldots,U_n)\cdot(V_1,V_2,V_3,\ldots,V_n)=0$.

$U\cdot V \leq |U||V|$ se cumple tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$ ya que el $\cos\theta$ siendo θ cualquier ángulo siempre va a ser menor o igual a 1.

$|U+V| \leq |U|+|V|$

Sean U, V vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ó $\mathbb{R}^n$ siempre se cumplirá que $|U+V|\leq|U|+|V|$

Figura 61. Solución del problema 6 de la actividad 4 por el grupo G2

Para los estudiantes es difícil generalizar; sin embargo, lo tratan de argumentar lo mejor posible para cada uno de los puntos.

Problema 4.1.4.7. Dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$, como se muestra en la siguiente figura, describa el conjunto de puntos que equidistan de éstos. Trate de hacer un bosquejo. (Fuente propia)

Se trata de una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante encuentre el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos dados.

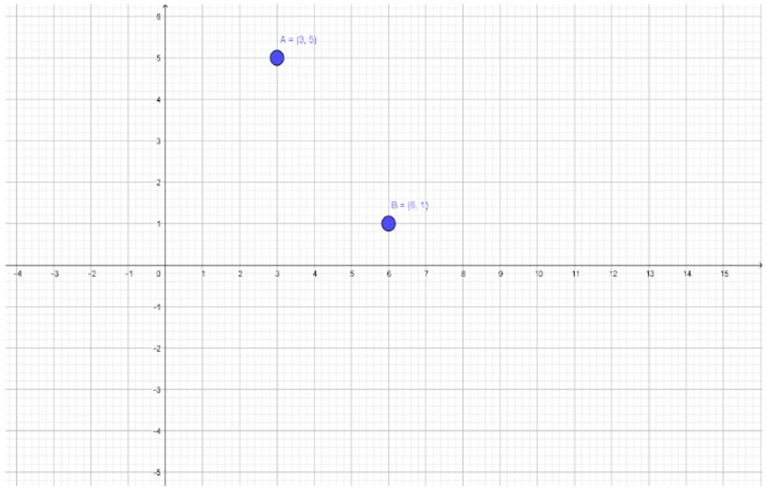


Figura 62. Problema 7 de la actividad 4

Solución presentada por el grupo G2:

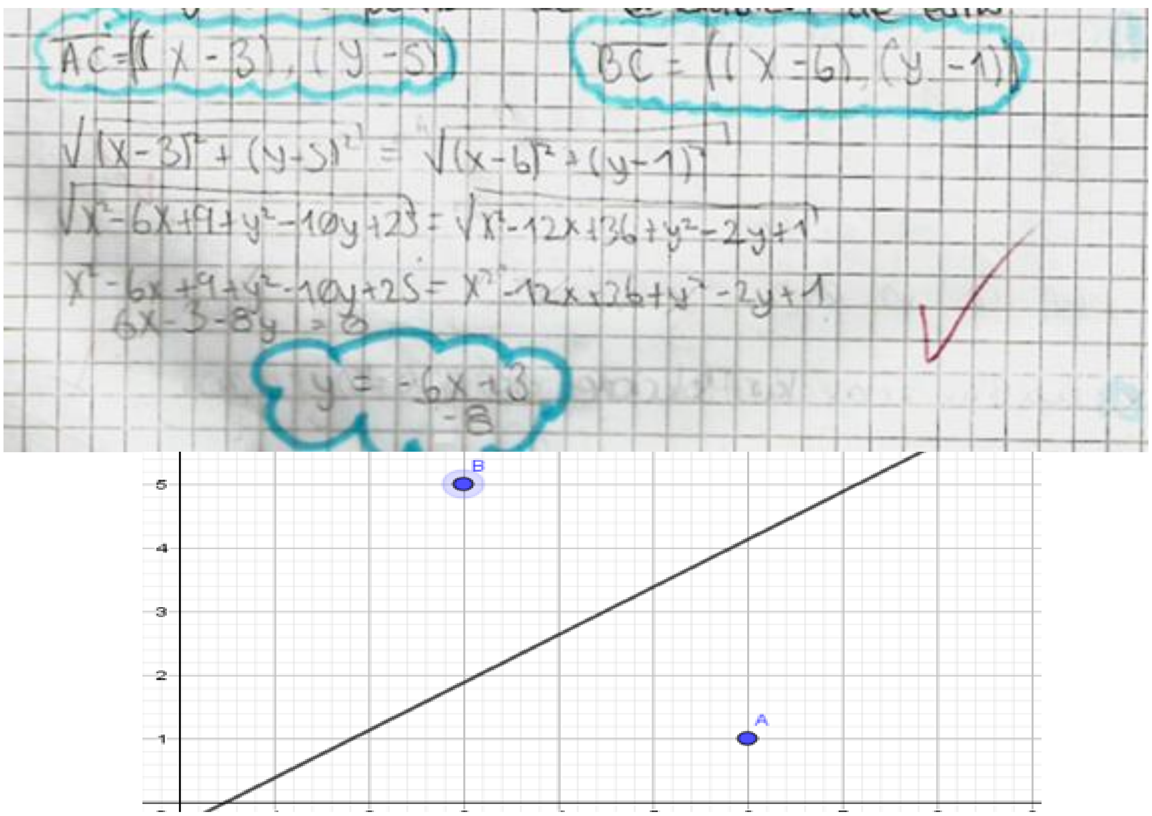


Figura 63. Solución del problema 7 de la actividad 4 por el grupo G2

Los estudiantes toman un punto cualquiera (x, y) y luego hallan los vectores correspondientes de ese punto a los puntos dados y posteriormente hallan las distancias, las cuales igualan como lo pide el problema para encontrar correctamente la solución pedida. Realizan la correspondiente gráfica

Problema 4.1.4.8. Dados los $A = (3, 2, -1)$ y $B = (1, 6, 5)$ puntos en $\mathbb{R}^3$, como se muestra en la siguiente figura, describa el conjunto de puntos que equidistan de éstos. Trate de realizar un bosquejo. (Fuente propia)

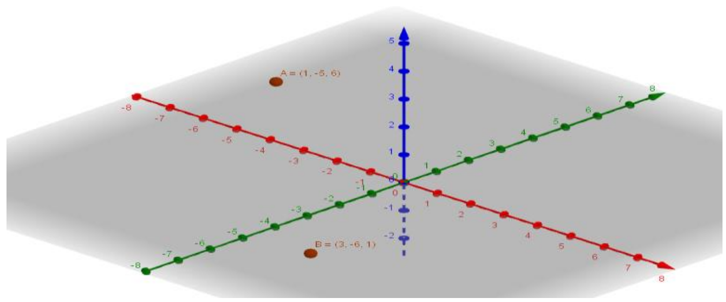


Figura 64. Problema 8 de la actividad 4

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante encuentre el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de dos puntos dados.

Solución presentada por el grupo G2:

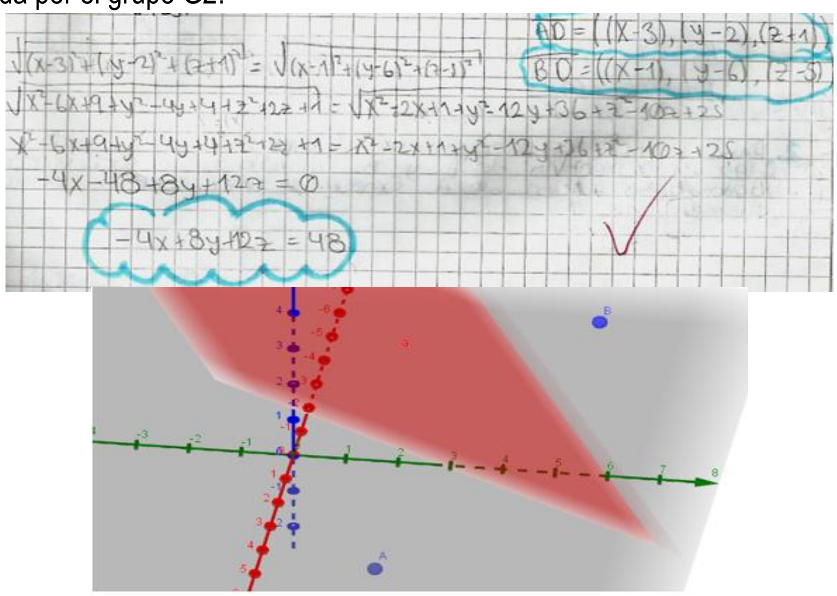


Figura 65. Solución del problema 8 de la actividad 4 por el grupo G2

Los estudiantes realizan el mismo procedimiento del ejercicio anterior, en tres dimensiones.

Problema 4.1.4.9. Determine una expresión algebraica que permita calcular la distancia de un punto exterior P(x_0, y_0, z_0) al plano π: $ax + by + cz + d = 0$.

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante aplicando proyecciones y la norma de vectores, encuentre una expresión algebraica para la distancia entre un punto y una recta.

Solución presentada por el grupo G4:

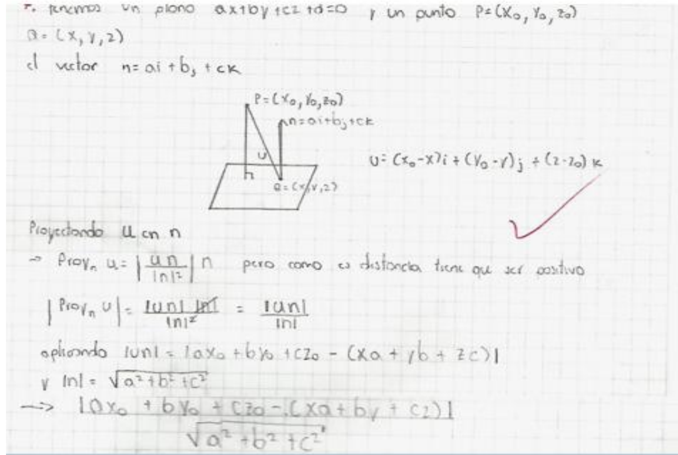


Figura 66. Solución del problema 9 de la actividad 4 por el grupo G4

Los estudiantes realizan el gráfico correspondiente al problema, hallan la proyección y la norma del vector pq, al que llaman u sobre el vector normal, para luego encontrar la expresión solicitada.

Problema 4.1.4.10. Determine una expresión algebraica que permita encontrar la distancia entre dos planos paralelos: $ax + by + cz + d = 0$ y $ax + by + cz + e = 0$.

Esta es una pregunta del segundo nivel, que pretende que el estudiante aplique el resultado anterior en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G1:

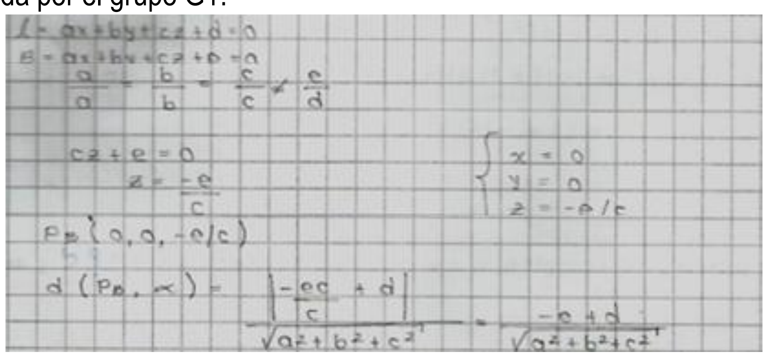


Figura 67. Solución del problema 10 de la actividad 4 por el grupo G1

Los estudiantes aplican el resultado anterior para encontrar la solución pedida.

Problema 4.1.4.11. Construya un paralelepípedo S con vértices en los puntos A, B, C, D, E, F, G y H, si se conocen los siguientes vértices: B = (3,4,0), C = (-1,4,0), D = (-1,1,0) y F= (-2,3,6).

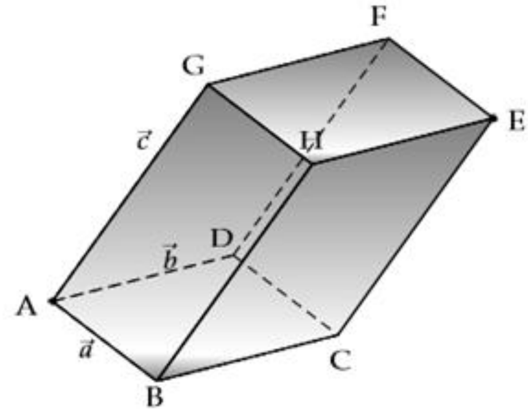


Figura 68. Problema 10 de la actividad 4

a. Halle los vértices que faltan y el punto medio P de la cara EFGH.

b. Determine el área de la cara superior EFGH.

c. Halle la ecuación de la recta L que pasa por los puntos C y G.

d. Determine el punto R sobre la recta L que esté más cerca del vértice E.

e. Halle la ecuación del plano generado por los vectores AB y AG.

f. Encuentre el punto Q en el plano que está más cerca del vértice E.

g. ¿Puede la recta del inciso d atravesar el plano del inciso f? Si es así, halle el punto.

h. Determina la ecuación del conjunto de todos los puntos en R^3que son equidistantes de los vértices E y G.

Esta es una pregunta del tercer nivel cuyo objetivo es que el estudiante aplique los conceptos aprendidos en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G4:

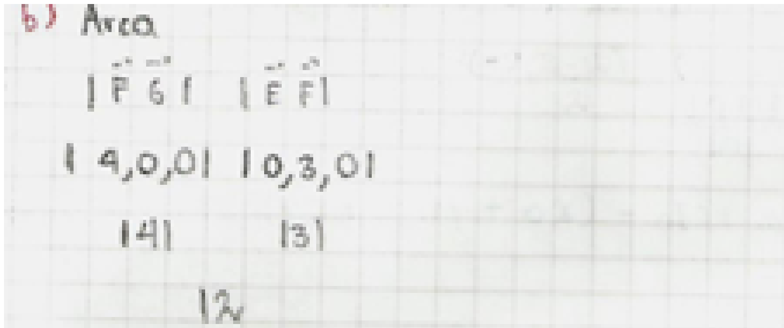


Figura 69. Solución del problema 11a de la actividad 4 por el grupo G4

Los estudiantes determinan los puntos pedidos y luego calculan correctamente el punto pedido.

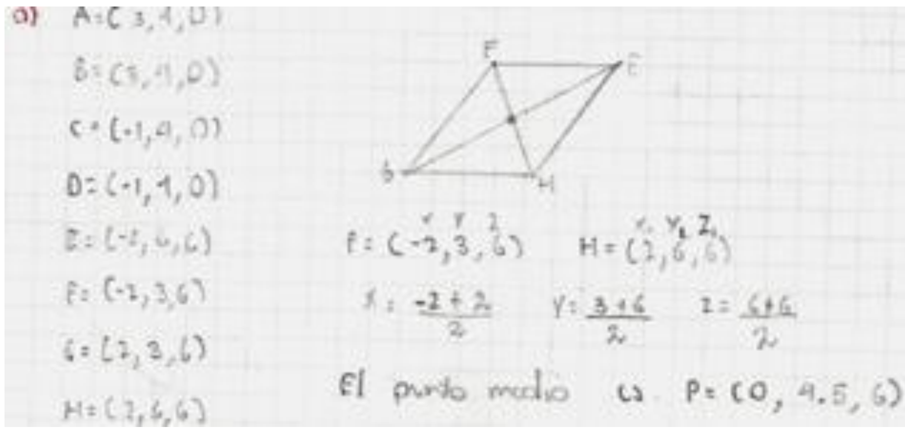


Figura 70. Solución del problema 11b de la actividad 4 por el grupo G4

Para hallar el área pedida, los estudiantes calculan las normas de los vectores que representan la base y la altura de la figura pedida.

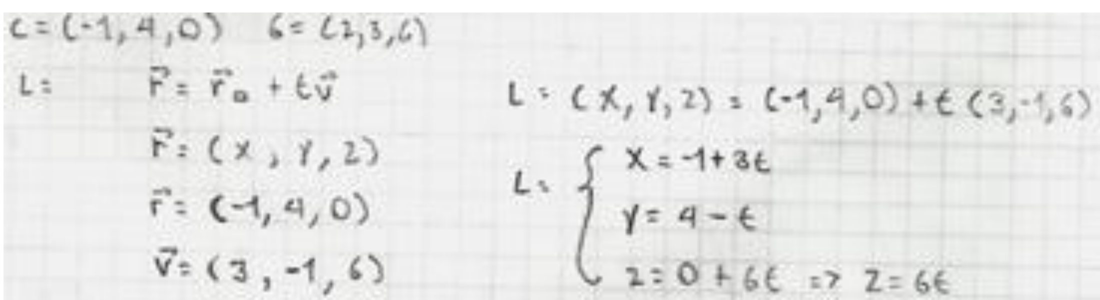


Figura 71. Solución del problema 11c de la actividad 4 por el grupo G4

Los estudiantes hallan el vector director de la línea pedida y con el vértice *c* hallan correctamente las ecuaciones paramétricas de la recta solicitada.

Solución presentada por el grupo G1:

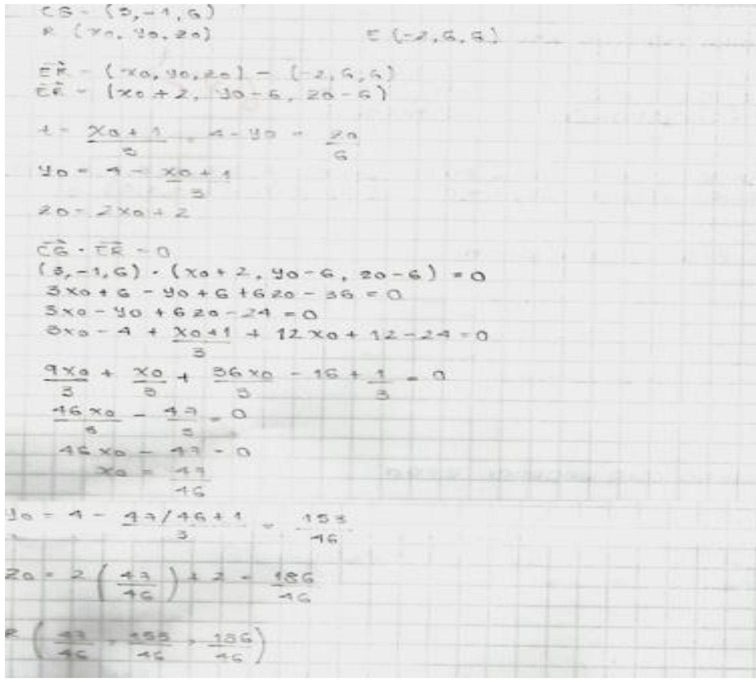


Figura 72. Solución del problema 11d de la actividad 4 por el grupo G1

Los estudiantes hallan los vectores que van desde un vértice al otro donde pasa la recta y del vértice E al punto R pedido. Luego, con las ecuaciones simétricas de la recta hallada en el literal anterior despejan una componente y al realizar el producto punto el cual es igual a cero, despejan y hallan la componente en x, la cual al sustituirla en las ecuaciones simétricas se encuentran las otras dos. Por último, trasladan el punto encontrado para así obtener correctamente el punto pedido.

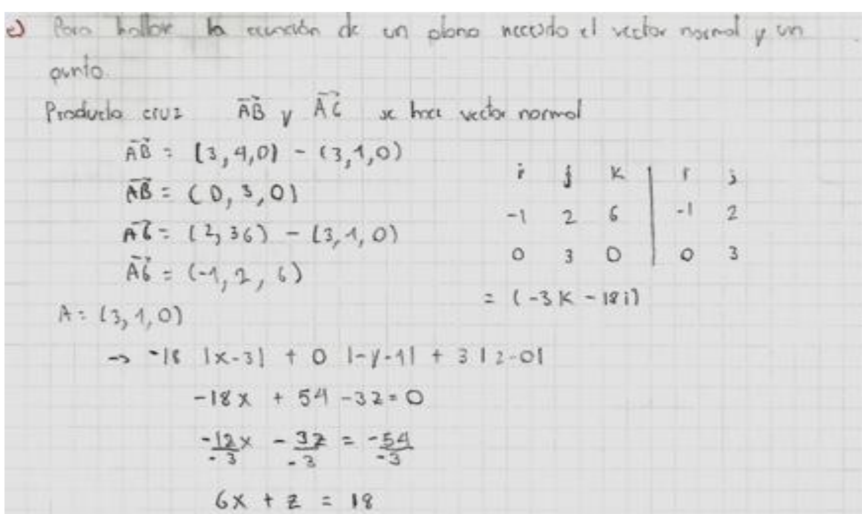


Figura 73. Solución del problema 11e de la actividad 4 por el grupo G4

Con los vectores AB y AC los estudiantes hallan correctamente la ecuación del plano, al encontrar primero el vector normal aplicando el producto cruz.

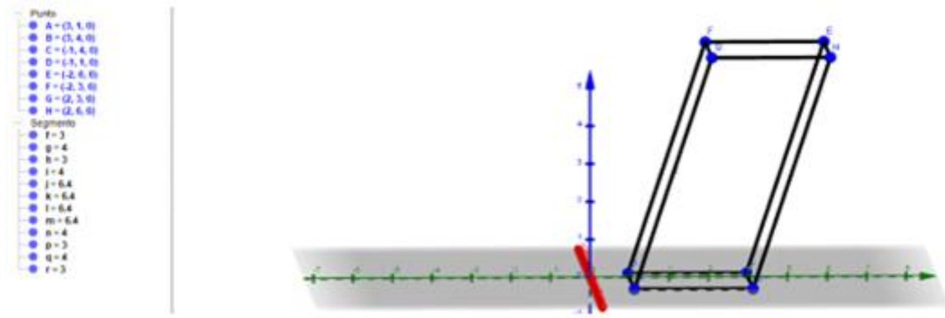


Figura 74. Grafico parcial de la solución del problema 11 de la actividad 4 por el grupo G1

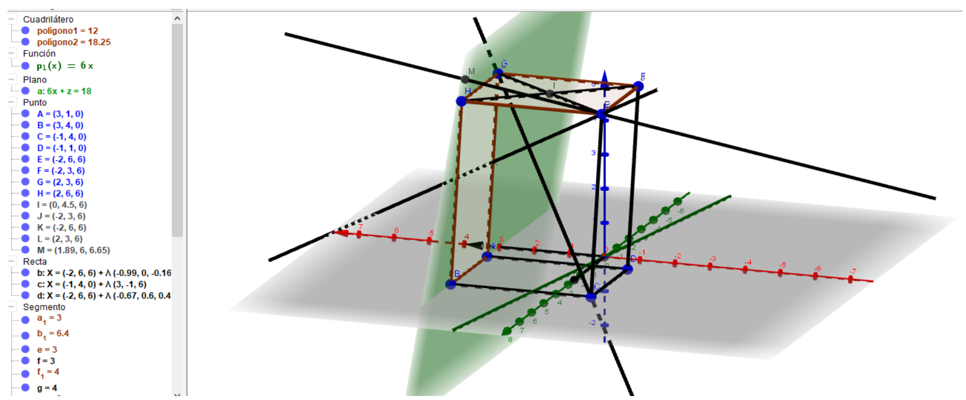


Figura 75. Grafico parcial de la solución del problema 11 de la actividad 4 por el grupo G1

Las anteriores figuras corresponden a las soluciones gráficas del problema realizadas en el Geogebra.

Apreciación del autor.

Las soluciones presentadas en cada una de las preguntas planteadas, muestran que los estudiantes exploran las proposiciones dadas, como se evidencia en los resultados de los problemas: 4.1.4.1a, 4.1.4.4. Luego conjeturan como se muestra en el resultado de los problemas: 4.1.4.2, 4.1.4.5, 4.1.4.6, 4.1.4.8, y después realizan las demostraciones correspondientes cuando las proposiciones son verdaderas. Se puede evidenciar en las soluciones de los problemas 4.1.4.1b, 4.1.4.4, 4.1.4.11, 4.1.4.8, que hacen uso de la tecnología cuando ésta se requiere, como se puede observar en las soluciones

4.1.4.11. El concepto aplicado a la resolución de problemas se puede evidenciar en las soluciones de los problemas: 4.1.4.5, 4.1.4.7, 4.1.4.7, 4.1.4.9 y 4.1.4.10, 4.1.4.10 y 4.1.4.11.

Una vez más se infiere que el procedimiento metodológico propuesto se va reflejando en los resultados descritos por los estudiantes.

La Tabla 10 muestra la evaluación que se le otorga a cada problema presentado por cada grupo.

Tabla 10: Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 4

Grupos	Problemas											
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	media
G1	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	3	4.72
G2	5	5	5	5	5	4	5	5	5	4	3	4.63
G3	5	5	5	4	5	3	4	5	5	4	3	4.36
G4	5	4	5	5	5	4	5	2	4	5	3	4.27
G5	5	5	5	5	2	2	5	5	5	4	3	4.18
G6	5	2	5	3	5	2	2	5	4	5	3	3.72
G7	4	5	5	5	3	3	4	5	3	3	3	3.90
G8	4	4	2	5	5	3	5	2	4	4	3	3.72
G9	4	4	5	5	3	2	5	3	4	4	3	3.81
G10	5	4	5	4	5	3	2	2	5	4	3	3.81
G11	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5	3	4.54
G12	4	5	4	5	4	3	4	4	5	4	3	4.09
Tendencia general de la actividad 4												4.15

Logros:

- El valor de la media para los problemas de esta actividad es 4.15.
- Los estudiantes en sus resultados muestran destreza en conjeturar proposiciones, realizan correctamente demostraciones sencillas y aplican acertadamente los conceptos aprendidos en la solución de problemas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- Algunos estudiantes tienen problemas en conjeturar propiedades en R^3 y en R^n como lo muestra la Tabla 10 en el problema 6.

4.1.5. Actividad 5. Espacios y subespacios vectoriales

Objetivos

- Que el estudiante interiorice el concepto de espacio y subespacio vectorial.
- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de espacios y subespacios vectoriales.

Sugerencias metodológicas: En esta actividad se realiza primero una clase de orientaciones teóricas donde se desarrolla el concepto de espacio y subespacio vectorial, para que luego en la actividad los estudiantes exploren y conjeturen sobre propiedades de espacios y subespacios vectoriales, y las ponga en práctica en la resolución de problemas. Al igual que en la actividad anterior, la actividad se desarrolla en grupos de tres estudiantes, cada uno de los cuales desarrolla los problemas de forma independiente.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se les pide a los estudiantes que lleven el paquete Geogebra, bien sea en tablet, celular o laptop, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

La actividad se desarrolló en dos clases, los puntos, 10 y 11 se desarrollaron extraclase. A continuación, se plantea cada uno de los problemas con algunas soluciones dadas por algunos grupos de trabajo.

Actividades

Problema 4.1.5.1. Sean V el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, π_1 y π_2 los planos de la siguiente figura, con n un vector normal al plano π_1, y $A = (1,1,-2)$ y $B = (-1,0,1)$, puntos que pertenecen al plano π_2

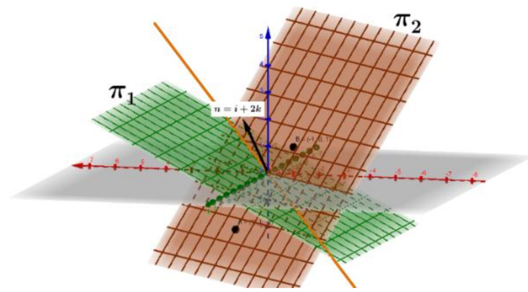


Figura 76. Grafico del problema 1 de la actividad 5

a. ¿Cuál es la expresión de la forma $Mx = 0$, que representa la intersección de los planos π_1 y π_2?

b. Determine la intersección de los planos π_1 ,$\pi_2 \in \mathbb{R}^3$

c. ¿La intersección de los planos π_1 y π_2, constituye un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

d. Si alguno de los planos π_1 o π_2, no pasara por el origen ¿sería $\pi_1 \cap \pi_2$ un subespacio vectorial de $V = \mathbb{R}^3$? (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante halle subespacios vectoriales, y empiece a conjeturar sobre intersección de subespacios.

Solución presentada por el grupo G1:

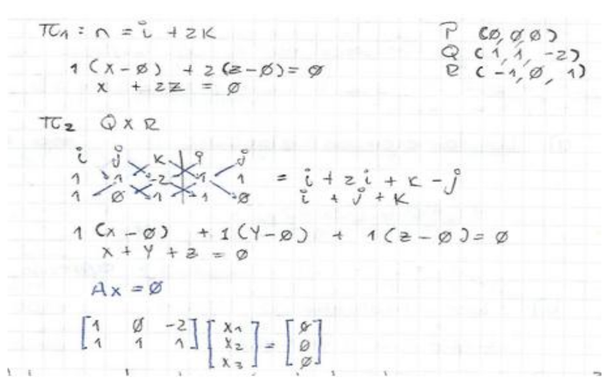
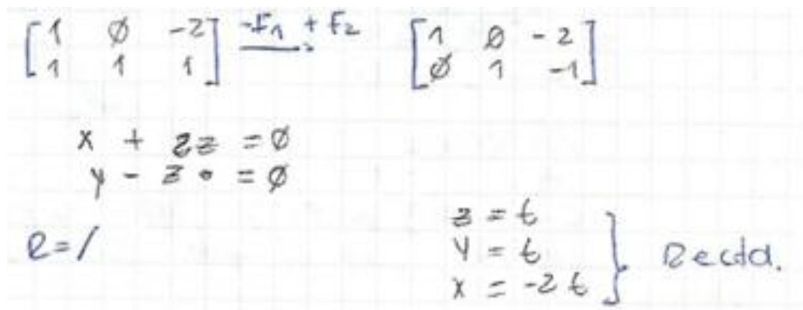


Figura 77. Solución del problema 1a de la actividad 5 por el grupo G1

Los estudiantes hallan la ecuación del primer plano con el vector normal y el punto del origen. Para encontrar la ecuación del segundo plano, toman los puntos dados y hallan el vector normal realizando el producto cruz entre éstos, luego responden la pregunta correctamente.



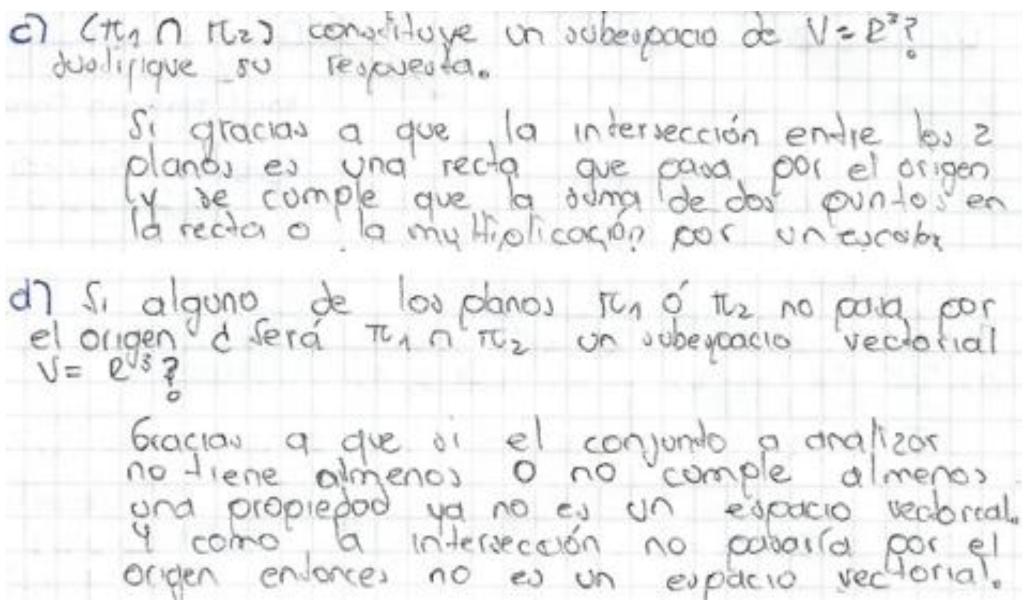
$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-f_1 + f_2} \begin{bmatrix} 1 & \emptyset & -2 \\ \emptyset & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x + 2z = \emptyset$$
$$y - z = \emptyset$$

$$\left.\begin{aligned} z &= t \\ y &= t \\ x &= -2t \end{aligned}\right\} \text{Recta.}$$

Figura 78. Solución del problema 1b de la actividad 5 por el grupo G1

Para la solución del inciso b, los estudiantes encuentran correctamente la recta intersección de los dos planos reduciendo la matriz que representa el sistema de las ecuaciones de éstos.



c) $(\pi_1 \cap \pi_2)$ constituye un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$?
Justifique su respuesta.

Si gracias a que la intersección entre los 2 planos es una recta que pasa por el origen y se cumple que la suma de dos puntos en la recta o la multiplicación por un escalar

d) Si alguno de los planos π_1 ó π_2 no pasa por el origen ¿será $\pi_1 \cap \pi_2$ un subespacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$?

Gracias a que si el conjunto a analizar no tiene almenos o no cumple almenos una propiedad ya no es un espacio vectorial. Y como la intersección no pasaría por el origen entonces no es un espacio vectorial.

Figura 79. Solución del problema 1c y d de la actividad 5 por el grupo G1

En la solución de los incisos c y d, los estudiantes contestan correctamente las preguntas sabiendo que la intersección de dos planos que pasan por el origen y no son múltiplos uno del otro, es una recta que pasa por el origen. Si uno de los planos no pasara por el origen también sería la intersección una recta, pero ésta no pasaría por el origen y no sería un subespacio vectorial.

Problema 4.1.5.2. Sean $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\}$

a. Dar la expresión algebraica que representa intersección de $H \cap S$.

b. ¿Geométricamente qué representa esa intersección?

c. ¿ Será $H \cap S$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante explore y conjeture sobre la intersección de un subespacio vectorial con un subconjunto que no es espacio vectorial.

Solución presentada por el grupo G3:

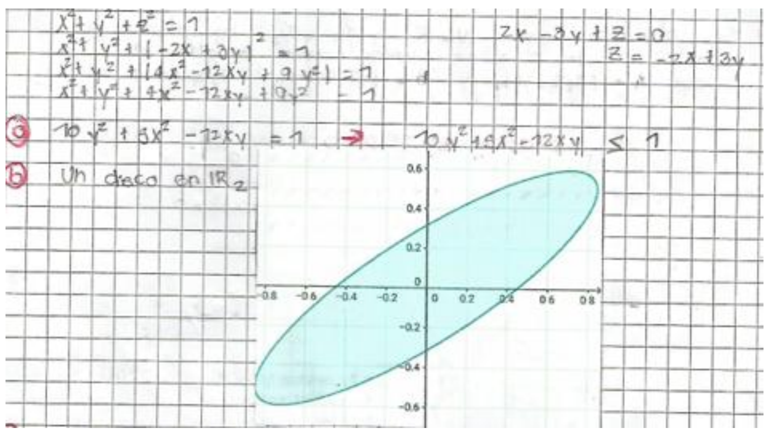


Figura 80. Solución del problema 2a y 2b de la actividad 5 por el grupo G3

Para los incisos a y b, los estudiantes encuentran correctamente la intersección al despejar una variable del plano y sustituirla en la esfera, realizan la correspondiente representación gráfica de la solución hallada.

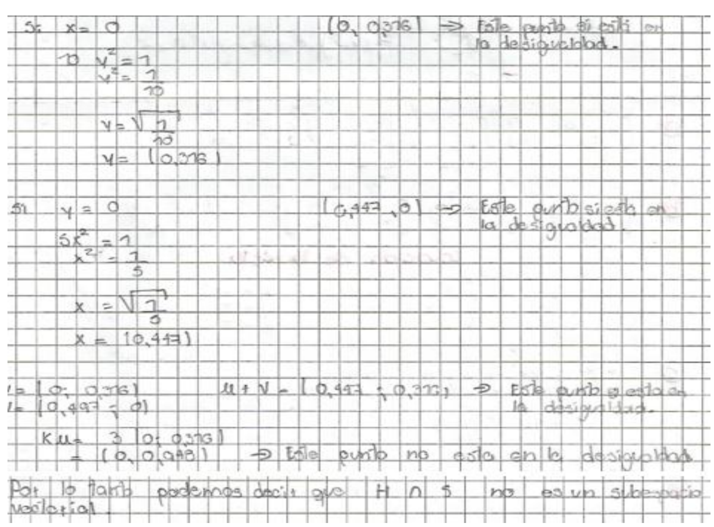


Figura 81. Solución del problema 2c de la actividad 5 por el grupo G3

Para el inciso c, Los estudiantes exploran con varios puntos para poder conjeturar si el conjunto encontrado cumple las operaciones de cerradura, encontrando al final un contraejemplo.

Problema 4.1.5.3. Sea M el espacio vectorial de todas las matrices 2 x 2 y sean $A = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ y $B = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$.

a. Describa un subespacio de M que contenga la matriz A pero no contenga la matriz B

b. ¿Si un subespacio de M contiene las matrices A y B entonces debe también contener la matriz identidad?

c. Describa un subespacio de M que contenga matrices diagonales diferentes de cero.

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture propiedades sobre espacios de matrices.

Solución presentada por el grupo G4:

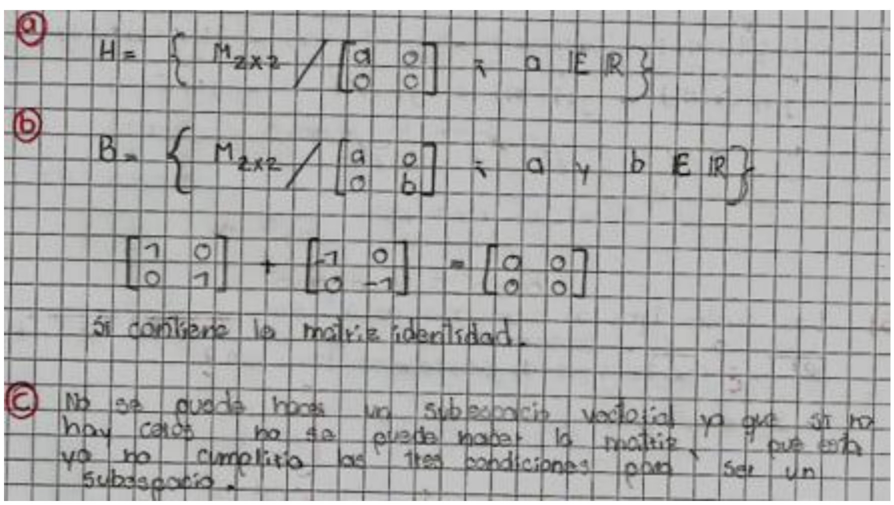


Figura 82. Solución del problema 3 de la actividad 5 por el grupo G4

En los literales a y b, los estudiantes encuentran correctamente subespacios que cumplen las condiciones dadas, para el literal c, dicen que no se puede porque no puede estar el modulo.

Problema 4.1.5.4. Sean $u = (3, -2, 1)$ y $H = \{v \epsilon \mathbb{R}^3 : u \cdot v = 0\}$.

a. ¿Qué representa H geométricamente?

b. ¿H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique su respuesta.

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo objetivo es que el estudiante identifique subespacios vectoriales de conjuntos ortogonales.

Solución presentada por el grupo G3:

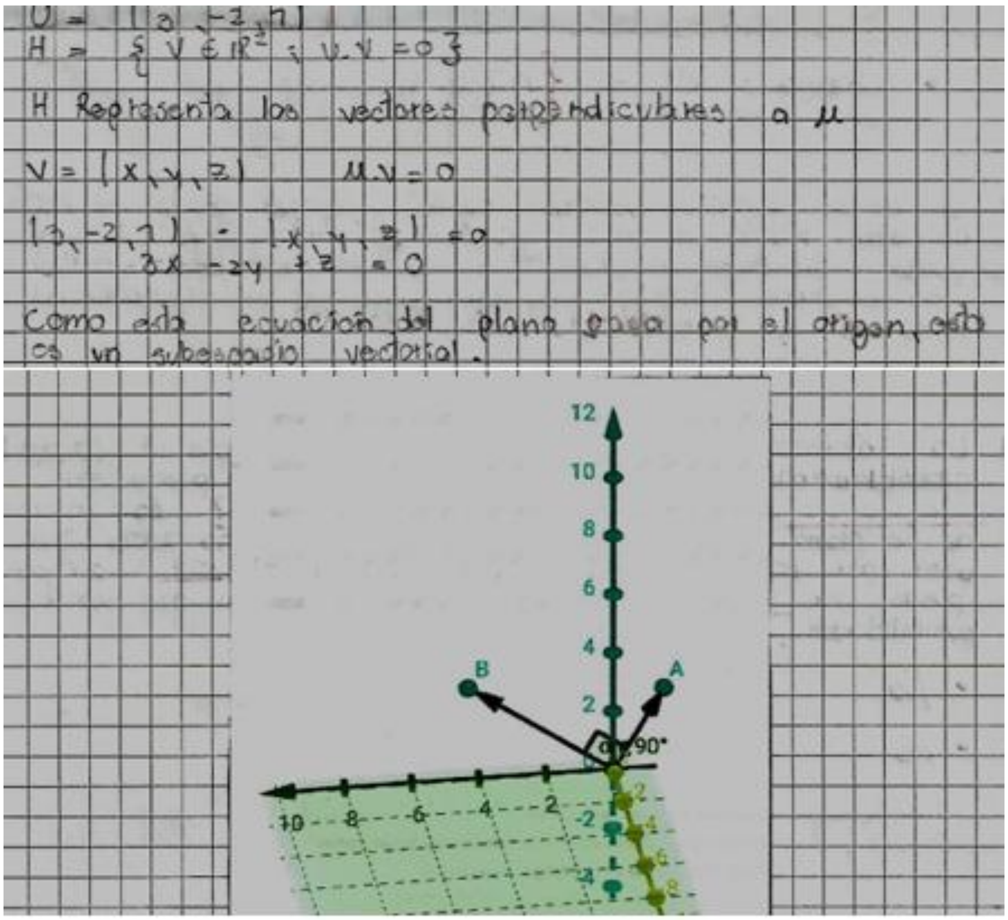


Figura 83. Solución del problema 4 de la actividad 5 por el grupo G3

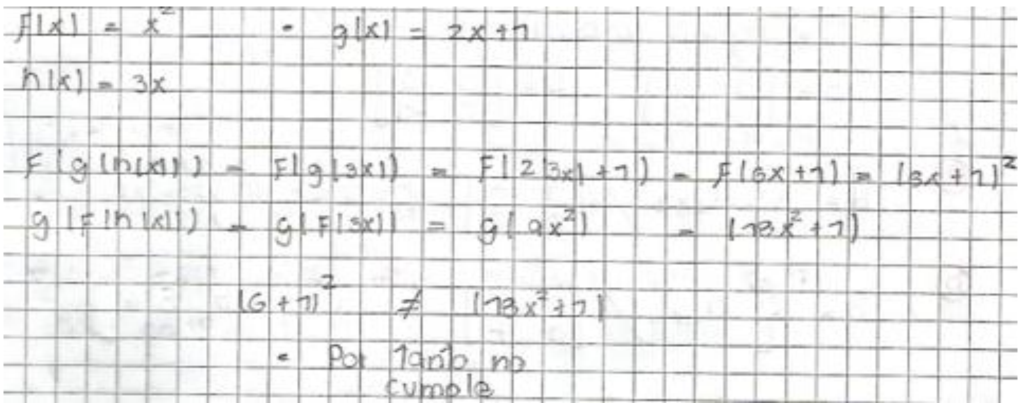
Los estudiantes encuentran correctamente la solución hallando la ecuación del plano correspondiente mediante el producto punto de dos vectores ortogonales.

Problema 4.1.5.5. Si la suma de "vectores" $f \;\; x$ y $g \;\; x$ en el espacio de las funciones reales se define como $f(g \;\; x \;\;)$, ¿cuál es la función $h(x)$ tal que $f \;\; h(x) \;\; = f(x)$?

Considere la multiplicación por un escalar de costumbre $cf\ x$, encuentre dos axiomas que no se cumplen de modo que el conjunto de las funciones reales con estas operaciones no constituya un espacio vectorial. (Modificado de la página del MIT.)

Esta es una pregunta del segundo nivel, cuyo objetivo es que el estudiante explore propiedades de espacios de funciones.

Solución presentada por el grupo G3:



$f(x) = x^2$ • $g(x) = 2x+7$

$h(x) = 3x$

$f(g(h(x))) = f(g(3x)) = f(2(3x)+7) = f(6x+7) = (6x+7)^2$

$g(f(h(x))) = g(f(3x)) = g(9x^2) = (18x^2+7)$

$(6+7)^2 \neq (18x^2+7)$

• Por tanto no cumple

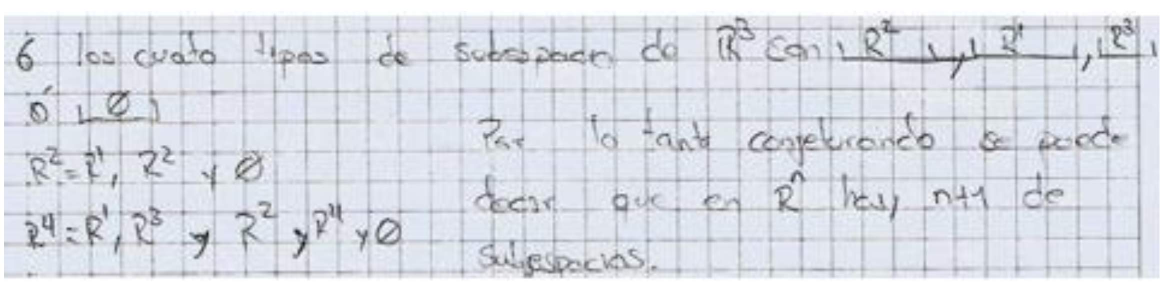
Figura 84. Solución del problema 5 de la actividad 5 por el grupo G3

Los estudiantes encuentran un contraejemplo en el que la propiedad asociativa no se cumple.

Problema 4.1.5.6. Los cuatro tipos de subespacio de $\mathbb{R}^3$ son ____, _____, ____o_____. Describa los tipos de subespacio de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^4$, ¿Cuántos tipos de subespacio tiene $\mathbb{R}^n$? (Modificado del libro de Strang.)

Se trata aquí de una pregunta del segundo nivel, que pretende que el estudiante conjeture sobre el número de tipos de subespacios vectoriales contenidos en espacios $\mathbb{R}^n$**.**

Solución presentada por el grupo G7:



6 los cuatro tipos de subespacio de $\mathbb{R}^3$ son $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^3$, ó $\emptyset$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ y $\emptyset$

$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ y $\emptyset$

Por lo tanto conjeturando se puede decir que en $\mathbb{R}^n$ hay n+1 de subespacios.

Figura 85. Solución del problema 6 de la actividad 5 por el grupo G7

Los estudiantes contestan correctamente las preguntas y la conjetura sobre los subespacios contenidos en $\mathbb{R}^n$ la realizan correctamente.

Problema 4.1.5.7. Sean π un plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$ y l una recta que pasa por el origen. ¿Cuál es el menor espacio vectorial que contiene tanto a π como a l? Justifique.

Esta es una pregunta del segundo nivel, cuyo objetivo es que el estudiante explore y conjeture sobre propiedades de subespacios vectoriales en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G8:

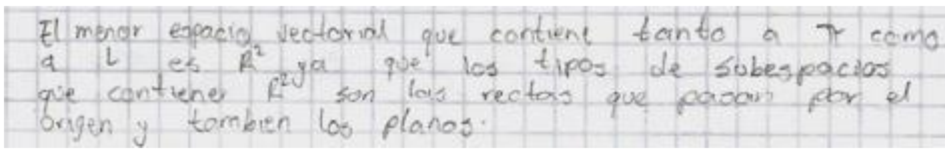

El menor espacio vectorial que contiene tanto a π como a L es $\mathbb{R}^2$ ya que los tipos de subespacios que contiene $\mathbb{R}^2$ son las rectas que pasan por el origen y tambien los planos.

Figura 86. Solución del problema 5 de la actividad 5 por el grupo G8

La respuesta no es correcta ya que el menor subespacio sería el plano dado que pasa por el origen, que sería isomorfo a $\mathbb{R}^2$, pero no necesariamente $\mathbb{R}^2$

Problema 4.1.5.8. La intersección de dos planos que pasan por $(0,0,0)$ probablemente es__________ aunque puede ser________. ¿Será la unión un subespacio? La intersección de un plano que pasa por $(0,0,0)$, con una recta que pasa por $(0,0,0)$ probablemente es__________ aunque puede ser________. Frente a cada una de esas posibilidades, ¿será la unión un subespacio? (Modificado del libro de Strang.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que estudiante explore y conjeture sobre la intersección y unión de subespacios vectoriales.

Solución presentada por el grupo G6:

8. La intersección de dos planos que pasan por el $(0,0,0)$ Probablemente es una recta que pasa por el origen aunque puede ser un plano.
¿Será la unión un subespacio?

No, porque al tomar dos elementos de cada uno y se suman, la suma no pertenece al subespacio, lo que ocasiona que no pueda ser llamado subespacio

La intersección de un plano que pasa por $(0,0,0)$, con recta que pasa por $(0,0,0)$ probablemente es un punto (el origen) aunque puede ser una recta, si esta pertenece al plano.
Frente a cada una de las posibilidades, ¿será la unión un subespacio?

No, porque la suma de dos elementos puede dar un resultado afuera del conjunto, lo que deduce que no es un subespacio.

Figura 87. Solución del problema 8 de la actividad 5 por el grupo G6

Los estudiantes contestan correctamente, aunque les faltó dar un contraejemplo para refutar que la unión de dos planos distintos que pasan por el origen no es un subespacio vectorial.

Problema 4.1.5.9. Sean H y S dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V.

a. ¿$H \cap S$ es un subespacio vectorial de V? Justifique.

b. ¿$H \cup S$ es un subespacio vectorial de V? Justifique.

c. Sea $M = \{m : m = u + v, donde\ u \in H\ y\ v \in S\}$ ¿Es M un subespacio vectorial? (Fuente propia).

Se trata aquí de una pregunta del segundo nivel, que pretende que estudiante conjeture, generalice y demuestre proposiciones que tratan la unión e intersección de subespacios vectoriales.

Solución presentada por el grupo G3:

9. Sea H y S dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V.

a) ¿$H \cap S$ es un subespacio vectorial de V? Justifique

$x \in H \cap S$ significa $x \in H$ y $x \in S$

$y \in H \cap S$ significa $y \in H$ y $y \in S$

Como H y S son subespacios vectoriales

si x y $y \in H$ $\quad x+y \in H$

si x y $y \in S$ $\quad x+y \in S$

$x+y \in H$ y S

es decir

$x+y \in H \cap S$

Figura 88. Solución del problema 9a de la actividad 5 por el grupo G3

Con base en los resultados anteriores, conjeturan que la intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial y aquí demuestran correctamente que la suma es cerrada.

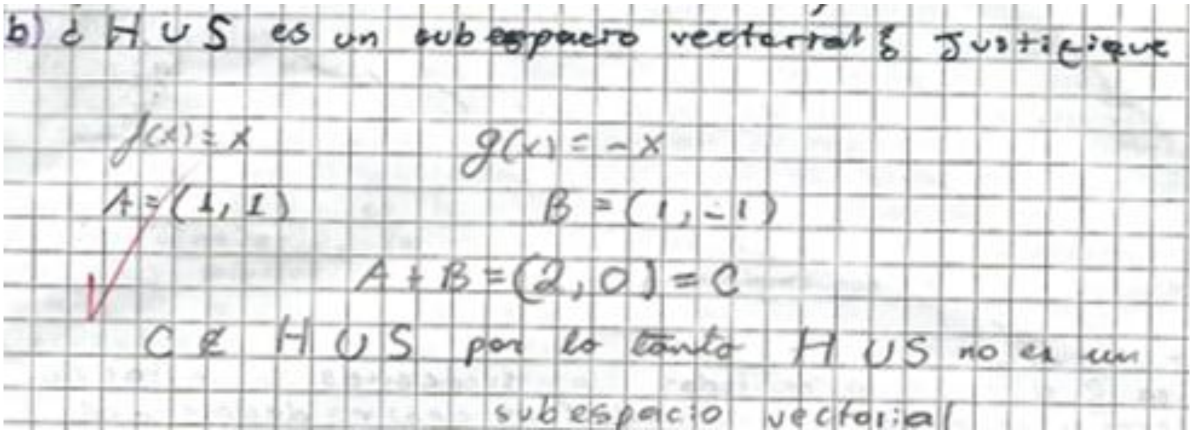


Figura 89. Solución del problema 9b de la actividad 5 por el grupo G3

Los estudiantes dan un contraejemplo que muestra que la unión de dos subespacios vectoriales no es un subespacio vectorial.

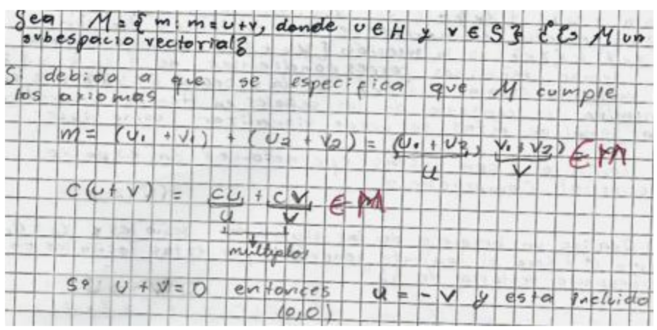


Figura 90. Solución del problema 9c de la actividad 5 por el grupo G3

Los estudiantes demuestran que el conjunto dado es un subespacio vectorial, aunque se nota que tienen algunas dificultades al escribirlo con un lenguaje matemático adecuado.

Problema 4.1.5.10. Sean V el espacio vectorial de las matrices cuadradas $n \times n$ y U y W los subespacios de las matrices simétricas y antisimétricas respectivamente. ¿Podrá ser $V = U + W$? y será ¿$U \cap W = \{0\}$?

Esta es una pregunta del tercer nivel, cuyo objetivo es que el estudiante aplique los conceptos de subespacio en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G2:

Figura 91. Solución del problema 10 de la actividad 5 por el grupo G2

Los estudiantes primero toman una matriz v cualquiera y muestran que la semisuma de ésta con su transpuesta es una matriz transpuesta, luego hacen lo mismo para demostrar que la semidiferencia de éstas es una matriz antisimétrica.

Problema 4.1.5.11. Sea S el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números a derecha e izquierda (es decir desde $-\infty\ hasta + \infty$): $\{y_k\} = (. \ . \ , y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ ...)$, Si $\{z_k\}$ es otro elemento de S, entonces la suma $\{y_k\} + \{z_k\}$ es la sucesión $\{y_k + z_k\}$ que se forma al sumar términos correspondientes de $\{y_k\}\ y\ \{z_k\}$. El múltiplo escalar $c\{y_k\}$ es la sucesión $\{cy_k\}$. S se denomina el conjunto de las señales en tiempo discreto, una señal de éstas se puede visualizar como sigue:

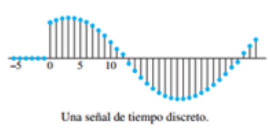


Figura 92. Gráfico problema 11 de la actividad 5

El conjunto S con estas operaciones es un espacio vectorial. Compruébelo.

a. Realice un bosquejo de las siguientes señales: $y_k = 0.7^k, x_k = \ 1^k$¿Será el conjunto generado por estas señales un subespacio vectorial de S?

b. Dados los escalares a_0,..., a_n con a_0 y a_n distintos de cero, y dada una señal $\{z_k\}$, la ecuación, $a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k$ para toda k se llama ecuación lineal en diferencias (o relación de recurrencia lineal) de orden n. Por simplicidad, usualmente se toma a_0 igual a 1. Si $\{z_k\}$ es la sucesión cero, la ecuación es homogénea; en caso contrario, la ecuación no es homogénea. Es frecuente que las soluciones de una ecuación homogénea en diferencias sean de la forma: $y_k = r^k$para alguna r.

Encuentre algunas soluciones para la ecuación $y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$ para toda $k.$ *Sugerencia:* Sustituya r^k por y_k en la ecuación y factorice el miembro izquierdo.

c. Sea *H* el conjunto de todas las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea de grado *n* y $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0$ para toda *k*. ¿Será *H* un espacio vectorial?

d. Si $a_n \neq 0$ y si $\{z_k\}$, está dada por la ecuación: $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k$, para toda $k,$ ¿tendrá solución única para cualesquiera $y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}$ específicas?

e. Describa algún criterio sobre una posible aplicación de este problema en su futuro campo profesional (opcional).

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que los estudiantes apliquen el concepto de espacio vectorial a la solución de problemas aplicados en ingeniería.

Este problema no fue resuelto completamente por ninguno de los grupos.

Apreciación del autor. Al ser éste uno de los temas abstractos del álgebra lineal se observa en los resultados mostrados por los estudiantes, rasgos fuertes del razonamiento plausible como es explorar con casos particulares, lo cual se evidencia en los resultados de los problemas 4.1.5.2, 4.1.5.3, 4.1.5.9, 4.1.5.10; las conjeturaras se evidencian en las respuestas a los problemas 4.1.5.1, 4.1.5.2, 4.1.5.4, 4.1.5.6, 4.1.5.7, 4.1.5.8. Además de argumentar los resultados obtenidos, los estudiantes también realizan demostraciones de proposiciones como se observa en las soluciones de 4.1.5.9 y el hallar contraejemplos se puede evidenciar en las soluciones 4.1.5.5 y 4.1.5.9. El concepto aplicado a la resolución de problemas se evidencia en el resultado 4.1.5.10. Por su parte, el uso de la tecnología y visualización se evidencia en los problemas: 4.1.5.2 y 4.1.5.4.

La Tabla 11 muestra la evaluación que se le otorga a cada problema presentado por cada grupo.

Tabla 11. Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 5

G3upos	Preguntas										
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	media
G1	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	2	4.63
G2	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	2	4.63
G3	5	5	5	5	5	5	4	5	4	4	2	4.45
G4	5	5	5	5	5	5	5	2	4	5	2	4.36
G5	5	5	5	5	5	5	4	2	4	4	2	4.18
G6	4	4	5	5	5	2	4	3	4	5	2	3.90
G7	5	4	4	2	4	5	4	3	4	5	2	3.81
G8	5	4	4	5	4	5	3	3	4	4	2	3.90
G9	5	4	3	5	3	3	4	2	3	4	2	3.45
G10	4	4	5	2	4	5	2	3	3	4	2	3.45
G11	4	4	5	4	4	2	4	2	3	4	2	3.45
G12	4	4	5	5	4	4	3	3	4	5	2	3.39
Tendencia general de la actividad 5												4.01

Logros:

- El valor de la media para los datos de esta actividad es 4.01, Tabla 11, la cual confirma la destreza de los estudiantes para resolver la mayoría de problemas de esta actividad.
- Los estudiantes en sus resultados muestran destreza en conjeturar proposiciones, realizan correctamente demostraciones sencillas y aplican acertadamente los conceptos aprendidos en la solución de problemas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- La Tabla 11 muestra que para esta actividad los estudiantes presentaron dificultades en el problema de aplicaciones.

4.1.6. Actividad 6. Dependencia e independencia lineal

Objetivos

- Que el estudiante interiorice los conceptos de dependencia e independencia lineal a través de combinaciones lineales.
- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de dependencia e independencia lineal.

Sugerencias metodológicas: La actividad se desarrollará a través de la solución de problemas que son resueltos en grupos de tres estudiantes, los cuales cada uno desarrolla los problemas de forma independiente. Ellos exploran diversos problemas en relación con la construcción del concepto de dependencia e independencia lineal, así como sus propiedades, empleando los elementos que constituyen el razonamiento plausible.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se les pide a los estudiantes que lleven el paquete Geogebra, bien sea en tablet, celular o tableta, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

La actividad se realizó en dos clases; en la primera se abordaron los problemas uno al cinco, los problemas 6 al 11 se trabajaron en casa y los restantes en clase.

Actividades

Problema 4.1.6.1. Gráficamente el vector $w = (10, 7)$ se ilustra como una "combinación" de los vectores $u = (-1,2)$ y $v = (4,1)$.

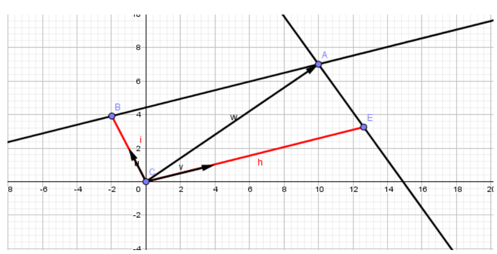


Figura 93. Gráfico del problema 1 de la actividad 6

¿Cómo se puede expresar el vector w en forma algebraica? (Fuente propia)

Esta es una pregunta del primer nivel cuyo objetivo es que los estudiantes exploren la combinación lineal de vectores en el plano y con base en ésta, planteen y resuelvan un sistema lineal con única solución, a partir del concepto de la suma de dos vectores.

Solución presentada por el grupo G1:

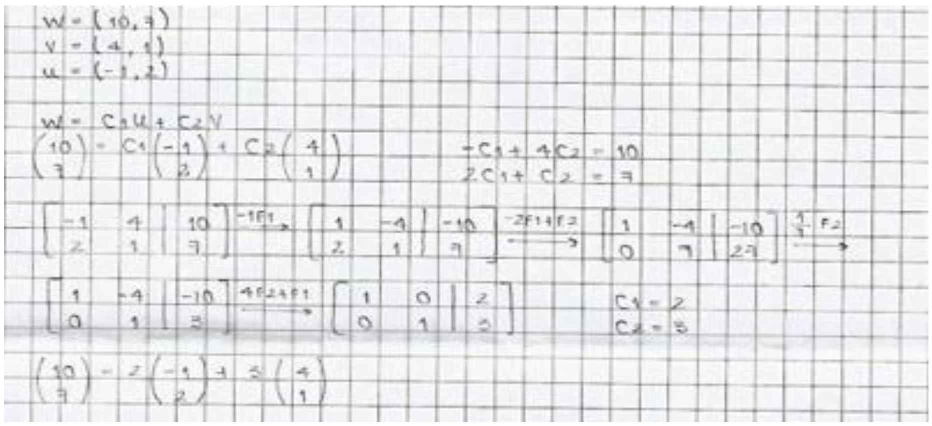


Figura 94. Solución del problema 1 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes plantean correctamente el sistema de ecuaciones, luego lo resuelven, encuentran la solución y lo comprueban.

Problema 4.1.6.2. Dado el vector $w = (-7,1)$ y los vectores $v = (1,2)$ y $u = (3,6)$, ¿habrá constantes c_1 y c_2 tales que w se pueda expresar como una "combinación" de éstos, es decir $c_1u + c_2v = w$? Realice una visualización de su resultado y conjeture. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture que un vector en el plano no se puede expresar como la combinación lineal de dos vectores linealmente dependientes y que al plantear el sistema correspondiente no se van a encontrar soluciones.

Solución presentada por el grupo G1:

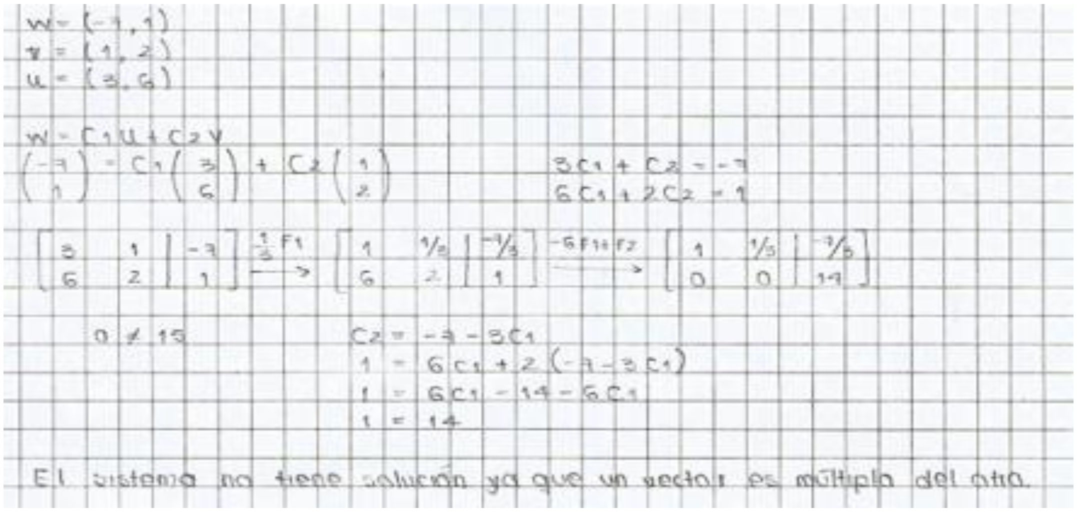


Figura 95. Solución del problema 2 de la actividad 6 por el grupo G1

Al igual que en el problema anterior los estudiantes plantean el sistema lineal y lo resuelven, luego comienzan a conjeturar sobre vectores linealmente dependientes.

Problema 4.1.6.3. Dado el vector $w = (4{,}3)$ y el vector $v = (1{,}2)$, ¿es posible hallar un vector u, tal que se puede expresar w en la forma $c_1u + c_2v = w$. ¿Existe sólo un tal vector u o puede haber más de uno? Justifique y conjeture. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo propósito es que el estudiante empiece a conjeturar sobre las posibles combinaciones lineales de vectores en el plano.

Solución presentada por el grupo G1:

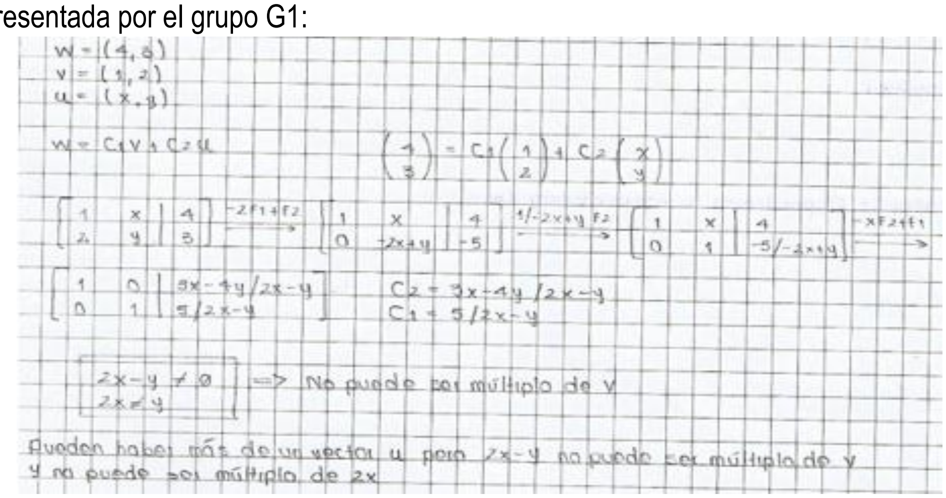


Figura 96. Solución del problema 3 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes plantean el sistema y lo resuelven correctamente, luego conjeturan sobre el resultado encontrado.

Problema 4.1.6.4. Dado el vector $w = (4,3)$, encuentre dos vectores: u y v tales que $3u + 4v = w$. Realice una visualización de su resultado. ¿Habrá solamente dos vectores que cumplen la relación? Justifique y conjeture. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre combinaciones lineales cuando los vectores son linealmente dependientes.

Solución presentada por el grupo G1:

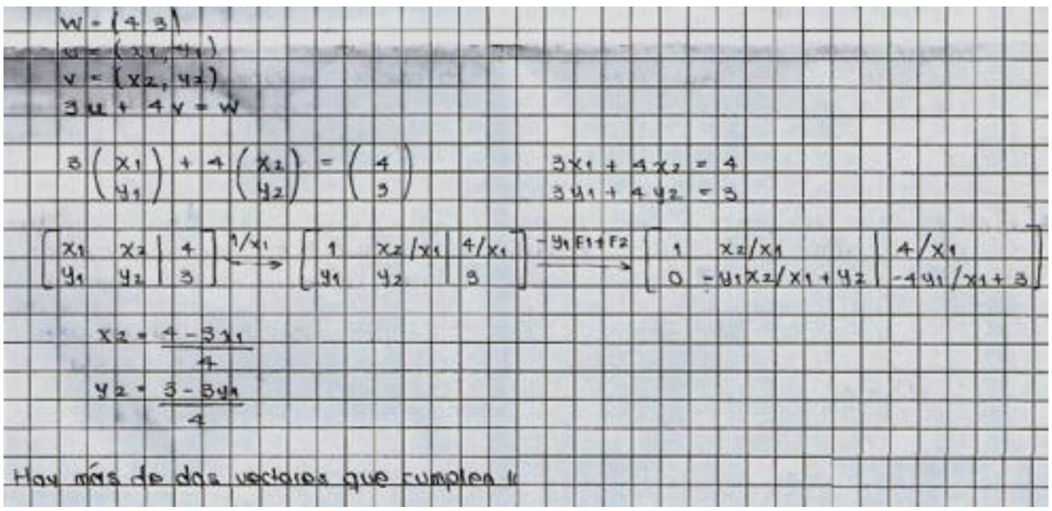


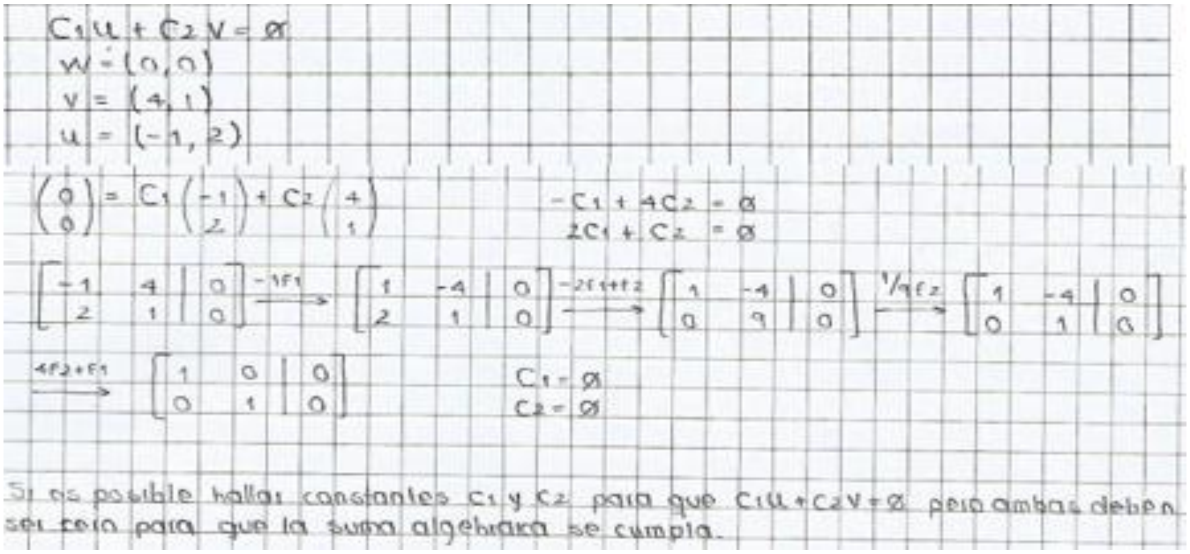
Figura 97. Solución del problema 3 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes plantean correctamente el sistema de ecuaciones y al encontrar infinitas soluciones contestan y conjeturan correctamente.

Problema 4.1.6.5. Para los vectores u y v del punto 1, ¿es posible hallar constantes c_1 y c_2 diferentes de cero tal que $c_1u + c_2v = 0$? Justifique su respuesta y realice una visualización de su resultado.

Esta es una pregunta del primer nivel que pretende introducir al estudiante en el concepto de vectores linealmente independientes. (Fuente propia).

Solución presentada por el grupo G1:



$C_1u + C_2v = \emptyset$
$w = (0,0)$
$v = (4,1)$
$u = (-1,2)$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\quad -C_1 + 4C_2 = \emptyset$, $\quad 2C_1 + C_2 = \emptyset$

$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{-1F_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -4 & 0\\ 0 & 9 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{1/9F_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right]$

$\xrightarrow{4F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right]$ $\quad C_1 = \emptyset$, $\quad C_2 = \emptyset$

Si es posible hallar constantes c_1 y c_2 para que $c_1u + c_2v = \emptyset$ pero ambas deben ser cero para que la suma algebraica se cumpla.

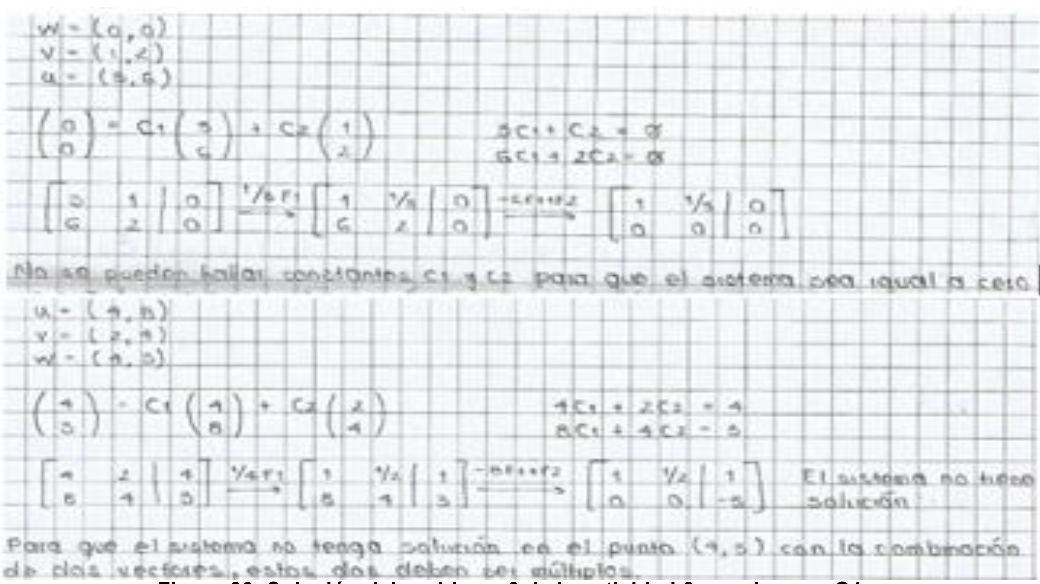
Figura 98. Solución del problema 5 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes plantean el sistema y lo resuelven, luego contestan la pregunta correctamente

Problema 4.1.6.6. Repita el ejercicio anterior para los vectores u y v del punto 4.1.6.2. Dar un ejemplo de un par de vectores en el plano tales que no es posible expresar $w = \ 4,3$ como "combinación" de ellos. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del primer nivel que pretende introducir al estudiante en concepto de vectores linealmente dependientes.

Solución presentada por el grupo G1:



$w = (0,0)$
$v = (1,2)$
$u = (5,6)$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad 5C_1 + C_2 = \emptyset$, $\quad 6C_1 + 2C_2 = \emptyset$

$\left[\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{1/5F_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1/5 & 0\\ 6 & 2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{-6F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

No se pueden hallar constantes c_1 y c_2 para que el sistema sea igual a cero

$u = (4,8)$
$v = (2,4)$
$w = (4,5)$

$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $\quad 4C_1 + 2C_2 = 4$, $\quad 8C_1 + 4C_2 = 5$

$\left[\begin{array}{cc|c}4 & 2 & 4\\ 8 & 4 & 5\end{array}\right] \xrightarrow{1/4F_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1/2 & 1\\ 8 & 4 & 5\end{array}\right] \xrightarrow{-8F_1+F_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{array}\right]$ El sistema no tiene solución

Para que el sistema no tenga solución en el punto (4,5) con la combinación de dos vectores, estos dos deben ser múltiplos.

Figura 99. Solución del problema 6 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes resuelven correctamente el problema al utilizar el mismo procedimiento de los problemas anteriores y van conjeturando sobre la dependencia lineal de los vectores.

Problema 4.1.6.7. ¿Se podrá escribir cualquier vector del plano en términos de los vectores $u = (-1,2)$ y $v = (4,1)$? (Fuente propia).

Pregunta de segundo nivel que pretende que el estudiante empiece a conjeturar sobre conjunto generador y espacio generado.

Solución presentada por el grupo G1:

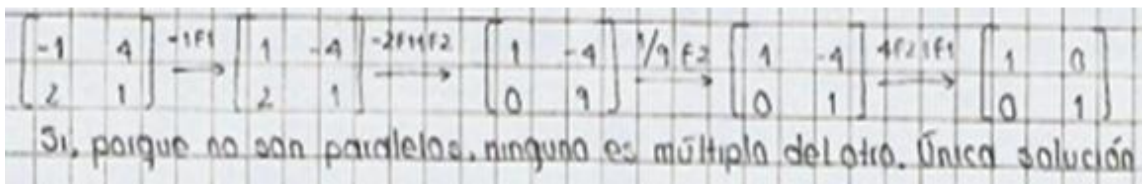


Figura 100. Solución del problema 7 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes reducen la matriz generada por los vectores columna, luego conjeturan sobre el conjunto generador

Problema 4.1.6.8. ¿Se podrá escribir cualquier vector del plano en términos de los vectores $v = (1,2)$ y $u = (3,6)$? (Fuente propia).

Esta es una pregunta de segundo nivel, mismo propósito del ejercicio anterior, pero en casos diferentes.

Solución presentada por el grupo G1:

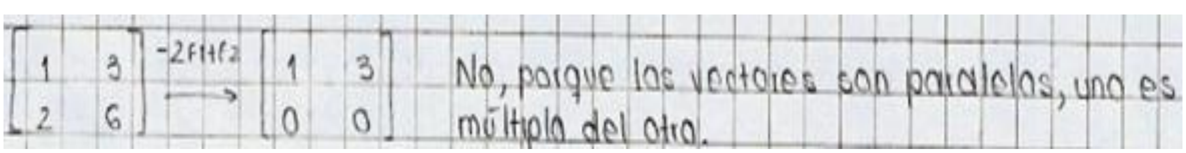


Figura 101. Solución del problema 8 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes proceden como en el ejercicio anterior y contestan correctamente.

Problema 4.1.6.9. Se podrá escribir el vector $(1,5)$ en términos de los vectores $u = (-1,2)$, $v = (4,1)$ y $w = (3,-2)$? Justifique y conjeture. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante interprete geométricamente el concepto de vectores linealmente dependientes en la aplicación de un problema.

Solución presentada por el grupo G3:

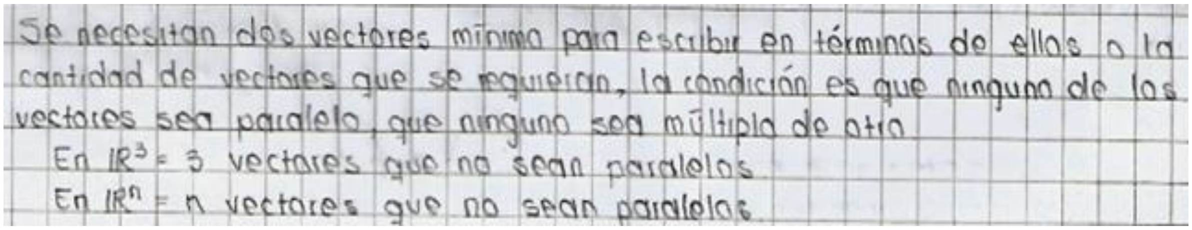
Figura 102. Solución del problema 9 de la actividad 6 por el grupo G3

Los estudiantes plantean el sistema de ecuaciones, lo resuelven, luego comprueban la solución para un valor dado, y contestan las preguntas correctamente.

Problema 4.1.6.10. ¿Cuántos vectores en el plano son necesarios para que un vector cualquiera se pueda escribir en términos de ellos y qué condiciones deben tener?, ¿Y en el espacio?, ¿En $\mathbb{R}^n$? Conjeture. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel, cuyo objetivo es que el estudiante conjeture sobre espacios generados.

Solución presentada por el grupo G1:



Se necesitan dos vectores mínimo para escribir en términos de ellos a la cantidad de vectores que se requieran, la condición es que ninguno de los vectores sea paralelo, que ninguno sea múltiplo de otro

En $\mathbb{R}^3$ = 3 vectores que no sean paralelos

En $\mathbb{R}^n$ = n vectores que no sean paralelos

Figura 103. Solución del problema 10 de la actividad 6 por el grupo G1

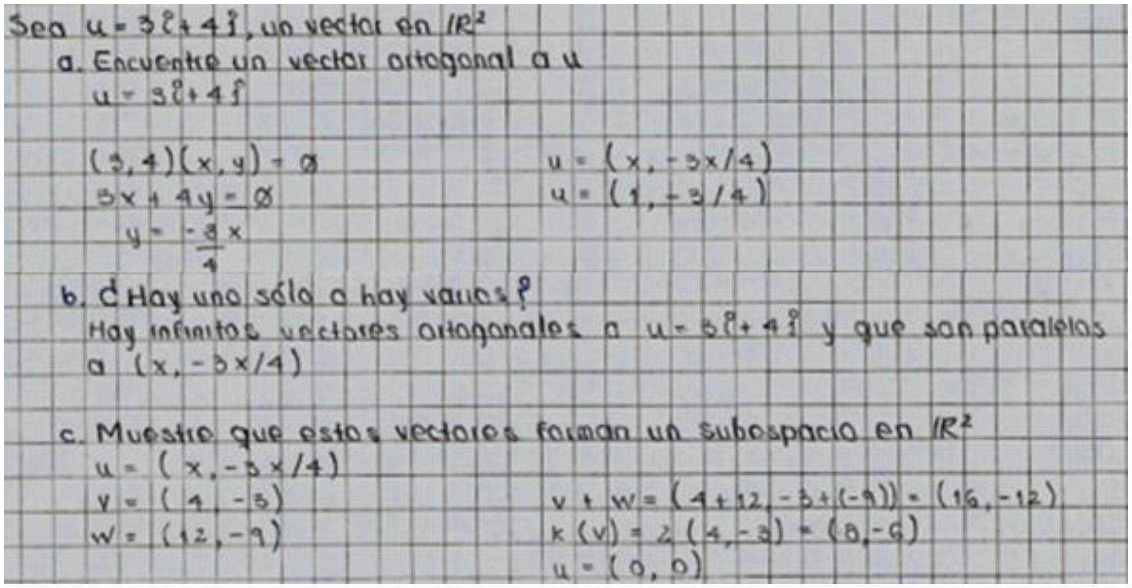
Los estudiantes empiezan a realizar conjeturaras parcialmente correctas sobre los conjuntos de vectores que generan los espacios en $\mathbb{R}^n$.

Problema 4.1.6.11. Sea $u = 3i + 4j$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

a. Encuentre un vector ortogonal a u.
b. ¿Hay uno sólo o hay varios?
c. Muestre que estos vectores forman un subespacio en $\mathbb{R}^2$.

Esta es una pregunta de segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre espacios ortogonales.

Solución presentada por el grupo G4:



Sea $u = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, un vector en $\mathbb{R}^2$

a. Encuentre un vector ortogonal a u

$u = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$(3,4)(x,y) = \emptyset$

$3x + 4y = \emptyset$

$y = -\frac{3}{4}x$

$u = (x, -3x/4)$

$u = (1, -3/4)$

b. ¿Hay uno sólo o hay varios?

Hay infinitos vectores ortogonales a $u = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ y que son paralelos a $(x, -3x/4)$

c. Muestre que estos vectores forman un subespacio en $\mathbb{R}^2$

$u = (x, -3x/4)$

$v = (4, -3)$

$w = (12, -9)$

$v + w = (4+12, -3+(-9)) = (16, -12)$

$k(v) = 2(4, -3) = (8, -6)$

$u = (0, 0)$

Figura 104. Solución del problema 11 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes encuentran la recta que contiene a todos los vectores ortogonales al vector pedido y responden acertadamente.

Un conjunto de *n* vectores $v_1, v_2, \ldots v_n$se dice linealmente dependientes si $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = 0$, donde las constantes $c, c_2, \ldots c_n$ son no todas nulas; en caso de que la ecuación sólo tenga solución cuando las constantes sean todas iguales a 0, los vectores son linealmente independientes.

Problema 4.1.6.12. Sea $u = (3, -2, 1)$.

a. Sea $H = \{v \epsilon \mathbb{R}^3 : u \cdot v = 0\}$.
b. Encuentre dos vectores que pertenezcan a H y que sean linealmente independientes, llámelos x y y.
c. Calcule $w = x \times y$ y muestre que u y w son linealmente dependientes. Dé una interpretación geométrica de los incisos a. y c. (Modificado del libro de Grossman.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante interprete geométricamente el concepto de vectores linealmente dependientes en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G4:

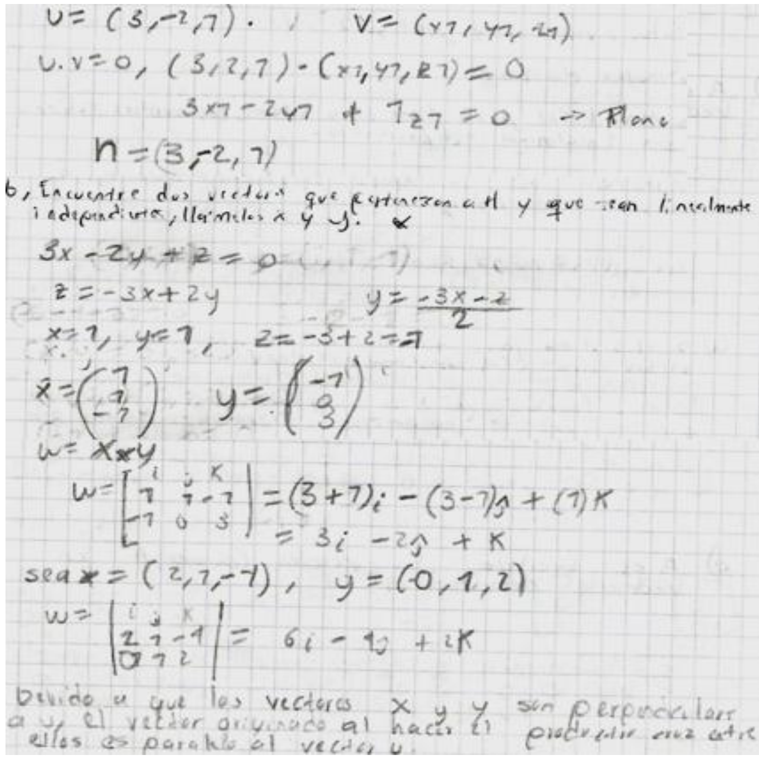


Figura 105. Solución del problema 12 de la actividad 6 por el grupo G4

Los estudiantes determinan correctamente la ecuación del plano y los vectores que se les pedía, luego hallan el vector perpendicular solicitado y argumentan bien la solución.

Problema 4.1.6.13. Responda falso o verdadero y justifique. Sea *A* una matriz de $n \times n$.

a. Si el sistema $Ax = 0$ tiene únicamente la solución trivial los vectores columna de A son linealmente dependientes.

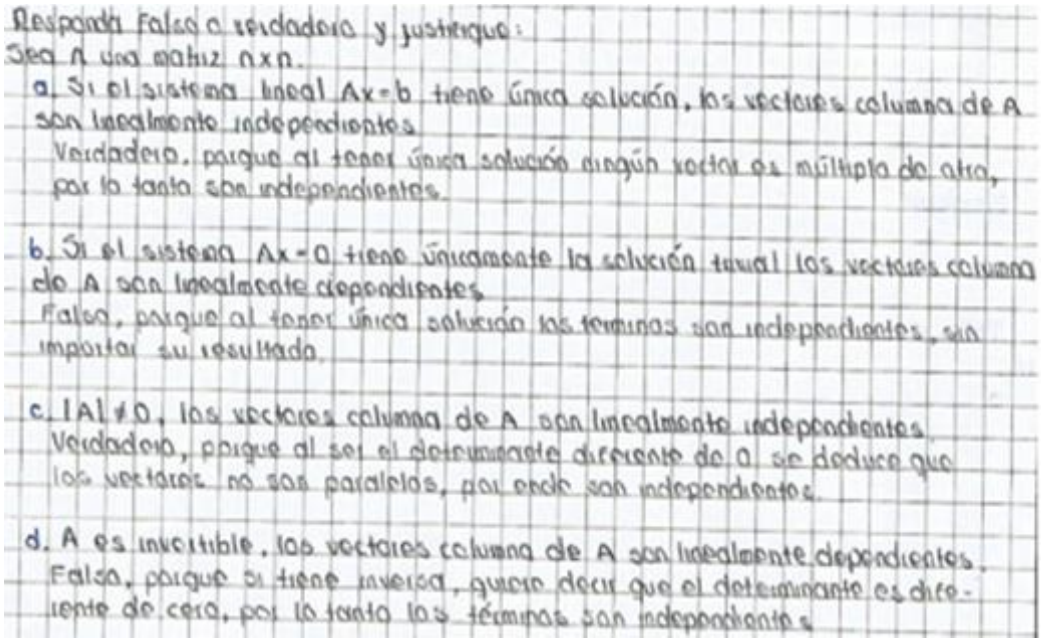
b. Si el sistema lineal $Ax = B$ tiene única solución, los vectores columna de *A* son linealmente independientes.

c. $|A| \neq 0$, los vectores columna de A son linealmente independientes.

d. Si A es invertible, los vectores columna de A son linealmente dependientes. (Fuente propia).

Esta es una pregunta del segundo nivel donde el estudiante debe conjeturar sobre las condiciones que deben cumplir los vectores columna de una matriz y la matriz para que el sistema tenga una única solución.

Solución presentada por el grupo G1:



Responda falso o verdadero y justifique:
Sea A una matriz $n \times n$.
a. Si el sistema lineal $Ax=b$ tiene única solución, los vectores columna de A son linealmente independientes
Verdadero, porque al tener única solución ningún vector es múltiplo de otro, por lo tanto son independientes.

b. Si el sistema $Ax=0$ tiene únicamente la solución trivial los vectores columna de A son linealmente dependientes
Falso, porque al tener única solución los términos son independientes, sin importar su resultado.

c. $|A| \neq 0$, los vectores columna de A son linealmente independientes
Verdadero, porque al ser el determinante diferente de 0 se deduce que los vectores no son paralelos, por ende son independientes.

d. A es invertible, los vectores columna de A son linealmente dependientes.
Falso, porque si tiene inversa, quiere decir que el determinante es diferente de cero, por lo tanto los términos son independientes.

Figura 106. Solución del problema 13 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes contestan acertadamente a cada una de las preguntas, lo que conlleva a conjeturar sobre las equivalencias de estas proposiciones.

Problema 4.1.6.14. Completar justificando.

a. Si los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, y si v_{n+1} es cualquier otro vector en $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ es linealmente ________________________

b. Si v_1, v_2, v_3, son vectores linealmente independientes, las diferencias $u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_1 - v_3$ y $u_3 = v_2 - v_3$ son linealmente____.

c. Si v_1, v_2, v_3, son vectores linealmente independientes, las sumas $u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_1 + v_3$ y $u_3 = v_2 + v_3$ son linealmente ____.

(Modificado del libro de Strang.)

Esta es una pregunta de tercer nivel que pretende que el estudiante aplique el concepto de vectores linealmente independientes.

Solución presentada por el grupo G5:

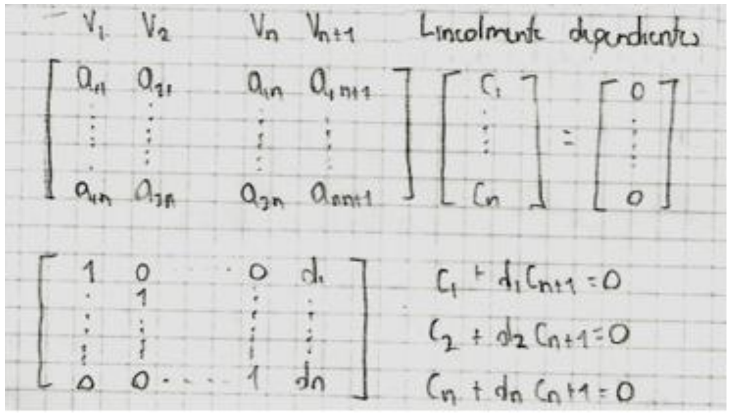


Figura 107. Solución del problema 15a de la actividad 6 por el grupo G5

Para el literal a, los estudiantes muestran que al colocar un vector más, quedarán variables libres y por lo tanto los vectores serán linealmente dependientes.

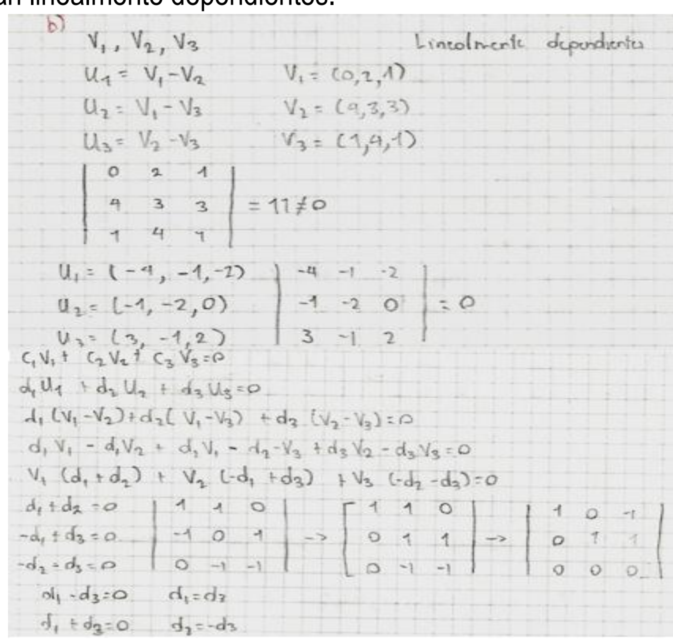


Figura 108. Solución del problema 15b de la actividad 6 por el grupo G5

En el literal b, los estudiantes exploran con varias matrices tomando tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y al calcular el determinante de la matriz formada por sus columnas, determinan si los vectores son linealmente independientes. Lo mismo hacen con la conformación de las diferencias $u_1 = v_1 - v_2, u_2 = v_1 -$

v_3 y $u_3 = v_2 - v_3$. Además, conjeturaron que los vectores son linealmente dependientes y luego lo demuestran.

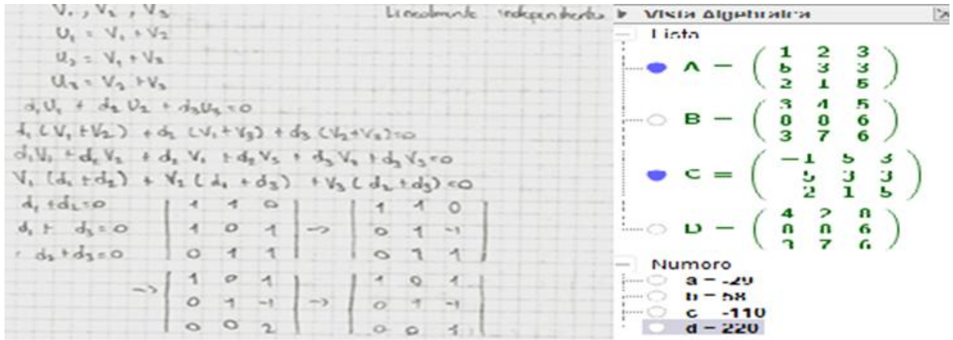


Figura 109. Solución del problema 15c de la actividad 6 por el grupo G5

En el literal c, al utilizar el mismo procedimiento que en el inciso anterior muestran que los vectores conformados por las sumas $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ y $u_3 = v_2 + v_3$ son linealmente dependientes.

Problema 4.1.6.15. Explique lo que está mal en el siguiente análisis: Sean $f(t) = 3 + t$ y $g(t) = 3t + t^2$g, y observe que $g(t) = tf(t)$. Entonces $\{f, g\}$ es linealmente dependiente porque g es un múltiplo de *f*. (Modificado de la página de MIT.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante manipule vectores en espacio de funciones.

Solución presentada por el grupo G1:

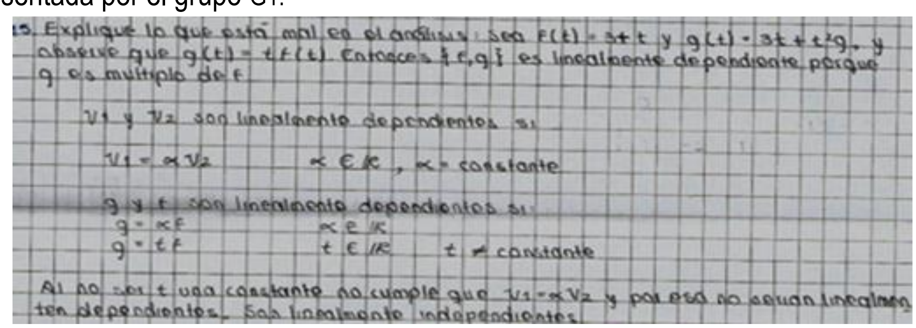


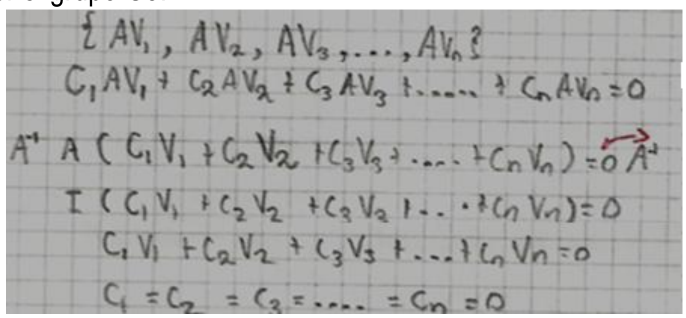
Figura 110. Solución del problema 16 de la actividad 6 por el grupo G1

Los estudiantes aplican el concepto de dependencia lineal y responden correctamente la pregunta.

Problema 4.1.6.16. Supongamos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son vectores linealmente independientes. Demuestre que, si A es una matriz invertible $n \times n$, $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_n\}$ son también vectores linealmente independientes. (Modificado del libro de Strang).

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique el concepto de vectores linealmente independientes en la resolución de problemas.

Solución presentada por el grupo G5:



$$\{AV_1, AV_2, AV_3, \dots, AV_n\}$$
$$C_1AV_1 + C_2AV_2 + C_3AV_3 + \dots + C_nAV_n = 0$$
$$A^{-1}\, A\,(C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + \dots + C_nV_n) = 0\, A^{-1}$$
$$I\,(C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + \dots + C_nV_n) = 0$$
$$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + \dots + C_nV_n = 0$$
$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$$

Figura 111. Solución del problema 16 de la actividad 6 por el grupo G5

Los estudiantes realizan la combinación lineal y la igualan a cero, luego factorizan la matriz A y como ésta es invertible multiplican ambos lados de la ecuación por ella, aunque cometen un error de escritura en el miembro derecho de la ecuación. Luego, aplican la hipótesis que los vectores son linealmente independientes, y de allí concluyen que las constantes deben ser cero y por lo tanto los vectores dados son linealmente independientes.

Problema 4.1.6.17. Sea S el conjunto de las señales discretas, definidas en la actividad 5. Muestre que las señales: $1^k,\ (-2)^k\ y\ 3^k$, son linealmente independientes. (Modificado del libro Lay.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique a problemas de ingeniería los conceptos de independencia lineal.

Solución presentada por el grupo G5:

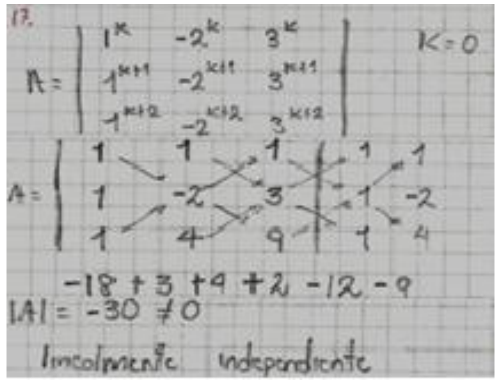


Figura 112. Solución del problema 17 de la actividad 6 por el grupo G5

Los estudiantes hallan la matriz de Casorati y al calcular el determinante de la misma, encuentran que los vectores son linealmente independientes.

Apreciación del autor

En la resolución de cada una de las preguntas de esta actividad se evidencia el razonamiento plausible, ya que los estudiantes para resolver los problemas 4.1.6.13, 4.1.6.14 y 4.1.6.15 exploraron con el Geogebra, pero en sus respuestas solamente se ve plasmadas la conjetura y la solución de cada uno de los problemas. Conjeturan, como se evidencia en los resultados de los problemas 4.1.6.3, 4.1.6.4, 4.1.6.10, 4.1.6.12 y 4.1.6.13. Realizan demostraciones que se evidencia en los resultados de los problemas 4.1.6.15 y 4.1.6.16; y refutan al encontrar el contraejemplo adecuado como se muestra en los resultados de los problemas 4.1.6.2, 4.1.6.3. Por otra parte, aplican el concepto a la resolución de problemas como se puede observar en las soluciones de los problemas 4.1.6.12, 4.1.6.13, 4.1.6.16 y 4.1.6.17.

La Tabla 12 muestra la evaluación que se le otorga a cada problema presentado por cada grupo.

. Tabla 12. Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 6

G3upos	Problemas																
	P1	PM	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P1M	P13	P14	P15	P16	P17	media
G1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4	3	4.76
GM	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	5	5	4	4	4.70
G3	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	3	4	4.70
G4	5	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	3	5	5	4	4	4.70
G5	5	5	4	5	4	5	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4.76
G6	5	5	4	3	4	3	4	5	3	5	3	5	4	3	5	4	4	4.05
G7	5	5	5	4	4	5	4	4	4	4	4	5	4	5	5	5	3	4.41
G8	5	4	5	5	4	4	4	4	4	4	5	4	3	4	5	3	4	4.17

G9	5	4	5	4	4	4	4	5	4	5	4	4	3	4	5	5	5	4.35
G10	5	5	4	5	4	5	4	4	5	4	5	4	3	5	5	5	3	4.41
G11	5	4	5	4	4	4	4	5	5	5	4	4	3	5	5	4	4	4.35
G1M	5	5	4	5	4	5	4	5	5	5	5	5	4	5	5	4	4	4.64
Tendencia general de la actividad 6																		4.50

Logros:

- El valor de la media para los datos de esta actividad es 4.5, como se muestra en la Tabla 12, confirmando los buenos resultados de los problemas resueltos por los estudiantes en ésta actividad.
- Los estudiantes en sus resultados muestran destreza en conjeturar proposiciones, realizan correctamente demostraciones sencillas y aplican acertadamente los conceptos aprendidos en la solución de problemas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- Algunos estudiantes todavía presentan problemas en la escritura, es decir en la forma de expresar sus respuestas con un lenguaje matemático adecuado en algunas demostraciones o argumentaciones.

4.1.7. Actividad 7. Base y Dimensión

Objetivo

- Que el estudiante interiorice los conceptos de base y dimensión.
- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de base y dimensión de un espacio vectorial.

Sugerencias metodológicas: En esta actividad se realiza primero una clase de orientaciones teóricas donde se trata el concepto de base y dimensión de espacios vectoriales. La actividad se desarrollará a través de la solución de problemas que serán resueltos en grupos de tres estudiantes, los cuales cada uno desarrolla los problemas de forma independiente. Ellos explorarán diversos problemas en relación con la construcción del concepto de base y dimensión, así como sus propiedades, empleando los elementos que constituyen el razonamiento plausible.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se les pide a los estudiantes que lleven el paquete Geogebra, bien sea en tablet, celular o laptop, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

La actividad se llevó a cabo en dos clases; en la primera se abordaron los problemas: 1, 2, 4, y 5, los problemas 3, 7 y 11 se trabajaron en la casa y los restantes en la siguiente clase.

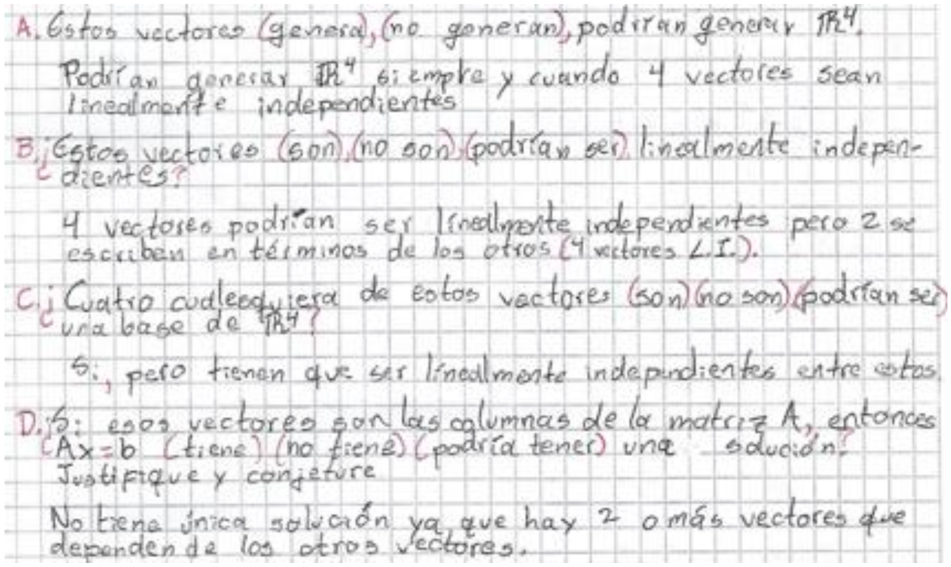
Actividades

Problema 4.1.7.1. Suponga que $v_1, v_2, \ldots v_6$, son seis vectores en $\mathbb{R}^4$.

a. Estos vectores (generan), (no generan), (podrían generar) $\mathbb{R}^4$
b. Estos vectores (son) (no son) (podrían ser) linealmente independientes.
c. Cuatro cualesquiera de estos vectores (son) (no son) (podrían ser) una base de $\mathbb{R}^4$.
d. Si esos vectores son las columnas de la matriz A, entonces $Ax = B$ (tiene) (no tiene) (podría tener) única solución. Justifique y conjeture. (Modificado del libro de Strang)

Esta es una pregunta del segundo nivel en la cual se pretende que el estudiante conjeture sobre bases de espacios vectoriales diferentes a los conocidos $\mathbb{R}^2$y $\mathbb{R}^3$.

Solución presentada por el grupo G1:



A. Estos vectores (generan), (no generan), podrían generar $\mathbb{R}^4$.
Podrían generar $\mathbb{R}^4$ siempre y cuando 4 vectores sean linealmente independientes
B. ¿Estos vectores (son), (no son) (podrían ser) linealmente independientes?
4 vectores podrían ser linealmente independientes pero 2 se escriben en términos de los otros (4 vectores L.I.).
C. ¿Cuatro cualesquiera de estos vectores (son) (no son) (podrían ser) una base de $\mathbb{R}^4$?
Si, pero tienen que ser linealmente independientes entre estos
D. Si esos vectores son las columnas de la matriz A, entonces ¿Ax=b (tiene) (no tiene) (podría tener) una solución?
Justifique y conjeture
No tiene única solución ya que hay 2 o más vectores que dependen de los otros vectores.

Figura 113. Solución del problema 1 de la actividad 7 por el grupo G1

Los estudiantes contestan correctamente cada una de las preguntas, justifican y conjeturan acertadamente sus respuestas.

Problema 4.1.7.2. Diga porqué los siguientes conjuntos con las operaciones dadas son un espacio vectorial. Proporcione una base y diga la dimensión del espacio:

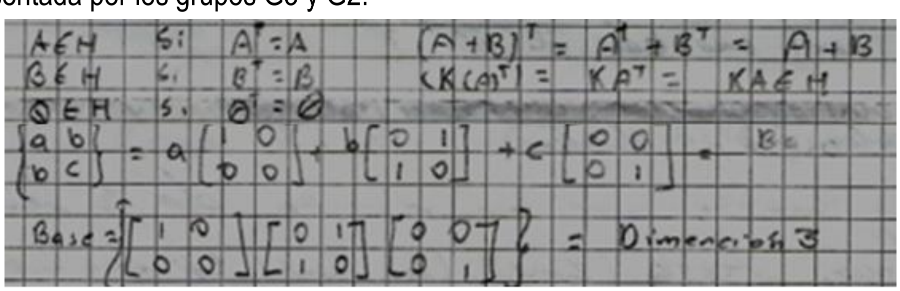
a. $H = \{A \epsilon M_{2\times 2} : A^T = A\}$, con las propiedades usuales de matrices 2×2.

b. $S = \{A \epsilon M_{2\times 2} : A^T = -A\}$, con las propiedades usuales de matrices 2×2.

c. $L = \{p(x) \epsilon p_2 : \int_0^1 p(x)\, dx = 0\}$, con las operaciones usuales de suma y producto entre polinomios en p_2. (Recuerde que p_2 representa el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a dos.) (Modificado de la página del MIT.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de base y dimensión de un espacio vectorial en la solución de problemas.

Solución presentada por los grupos G3 y G2:

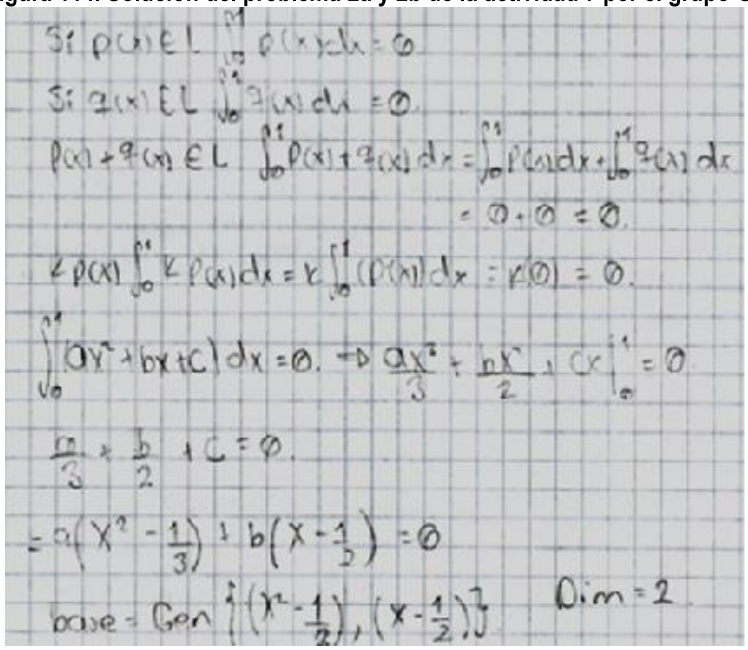


$A \in H$ si $A^T = A$ $\quad (A+B)^T = A^T + B^T = A + B$
$B \in H$ si $B^T = B$ $\quad (K(A))^T = KA^T = KA \in H$
$0 \in H$ si $0^T = 0$

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Base $= \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ = Dimensión 3

Figura 114. Solución del problema 2a y 2b de la actividad 7 por el grupo G3



Si $p(x) \in L$ $\int_0^1 p(x)dx = 0$

Si $q(x) \in L$ $\int_0^1 q(x)dx = 0.$

$p(x)+q(x) \in L$ $\int_0^1 p(x)+q(x)\,dx = \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 q(x)\,dx$

$= 0 + 0 = 0.$

$k\,p(x)$ $\int_0^1 k\,p(x)dx = k\int_0^1 (p(x))dx = k(0) = 0.$

$\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx = 0. \rightarrow \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_0^1 = 0$

$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0.$

$= a\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

base = Gen $\left\{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right), \left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}$ Dim = 2

Figura 115. Solución del problema 2c de la actividad 7 por el grupo G2

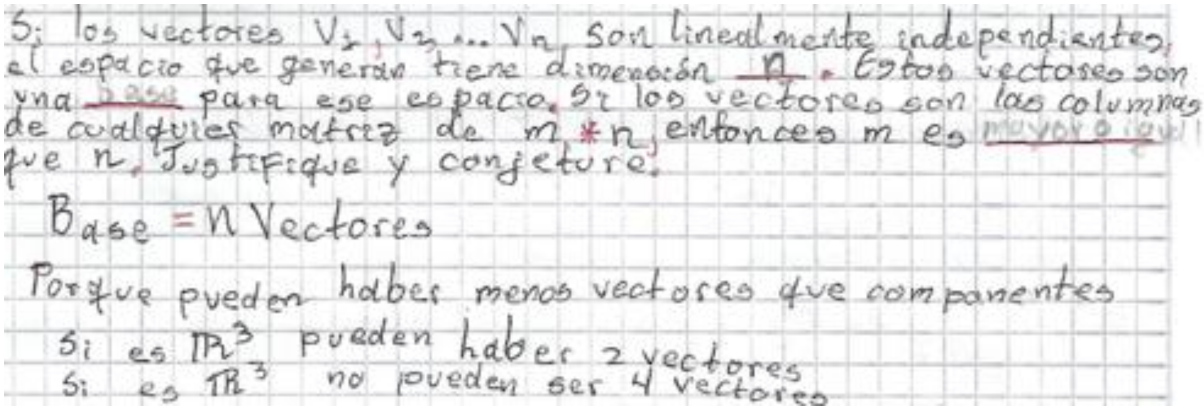
Los estudiantes primero hallan correctamente la base y la dimensión para el espacio de las matrices simétricas y antisimétricas. Luego, para el literal c, primero demuestran que el conjunto dado es un subespacio vectorial y luego, al evaluar la integral, logran determinar la base y la dimensión de este subespacio.

Problema 4.1.7.3. Complete los espacios con la respuesta correcta y justifique.

Si los vectores $v_1, v_2, \dots v_n$ son linealmente independientes, el espacio que generan tiene dimensión____ . Estos vectores son una ________ para ese espacio. Si los vectores son las columnas de cualquier matriz de $m \times n$, entonces m es _____ que n. Justifique y conjeture. (Modificado del libro de Strang.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de base y dimensión en preguntas que dejan de manifiesto si el estudiante tiene claro estos conceptos.

Solución presentada por el grupo G1:



Si los vectores $V_1, V_2 \dots V_n$ son linealmente independientes, el espacio que generan tiene dimensión n. Estos vectores son una base para ese espacio. Si los vectores son las columnas de cualquier matriz de $m * n$, entonces m es mayor o igual que n. Justifique y conjeture.

Base = n Vectores

Porque pueden haber menos vectores que componentes

Si es $\mathbb{R}^3$ pueden haber 2 vectores

Si es $\mathbb{R}^3$ no pueden ser 4 vectores

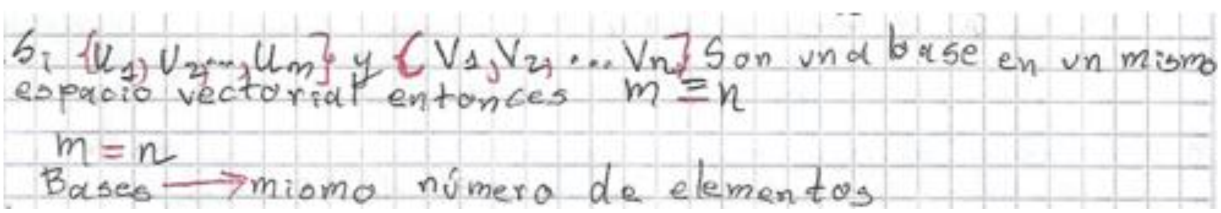
Figura 116. Solución del problema 3 de la actividad 7 por el grupo G1

Los estudiantes contestan acertadamente las preguntas y justifican sus respuestas.

Problema 4.1.7.4. Si $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son bases en un mismo espacio vectorial, entonces m__n

Esta es una pregunta de primer nivel que pretende que el estudiante conjetura propiedades sobre bases en espacios $\mathbb{R}^n$.

Solución presentada por el grupo G1:



Si $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$ y $\{V_1, V_2, \dots V_n\}$ son una base en un mismo espacio vectorial entonces $m = n$

$m = n$

Bases $\longrightarrow$ mismo número de elementos

Figura 117. Solución del problema 4 de la actividad 7 por el grupo G1

Los estudiantes contestan correctamente la pregunta, la argumentan y conjeturan sobre el número de vectores que debe tener cualquier base de un mismo espacio vectorial.

Problema 4.1.7.5. Encuentre una base y la dimensión para el plano $\pi: x - 2y + 3z = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Luego encuentre una base y la dimensión para la intersección de plano π con el plano xy. Luego encuentre una base del espacio vectorial de todos los vectores perpendiculares al plano π. Justifique. (Modificado del libro de Strang.)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que los estudiantes apliquen los conceptos de base y dimensión en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G2:

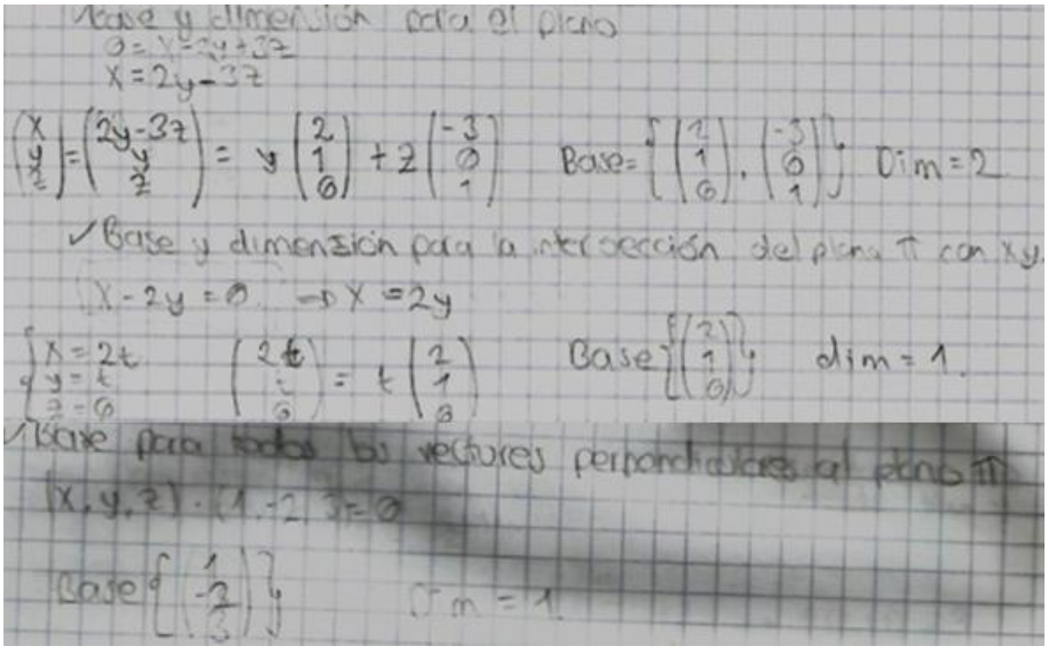


Figura 118. Solución del problema 5 de la actividad 7 por el grupo G2

Los estudiantes encuentran correctamente la base y la dimensión para el plano pedido, así como también al realizar la intersección de los planos. Para contestar la última pregunta, los estudiantes se dan cuenta que la base y la dimensión del conjunto buscado son todos los vectores paralelos al vector normal de dicho plano.

Problema 4.1.7.6. Suponga que S es un subespacio con dimensión 7 de $\mathbb{R}^8$.

a. Toda base de S ¿se puede extender a una base de $\mathbb{R}^8$ sumando un vector más?
b. Toda base de $\mathbb{R}^8$ ¿se puede reducir a una base de S quitando un vector? (Modificado del libro de Strang)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre propiedades de la base y la dimensión de espacios y subespacios vectoriales de mayor generalidad a los conocidos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Solución presentada por el grupo G4:

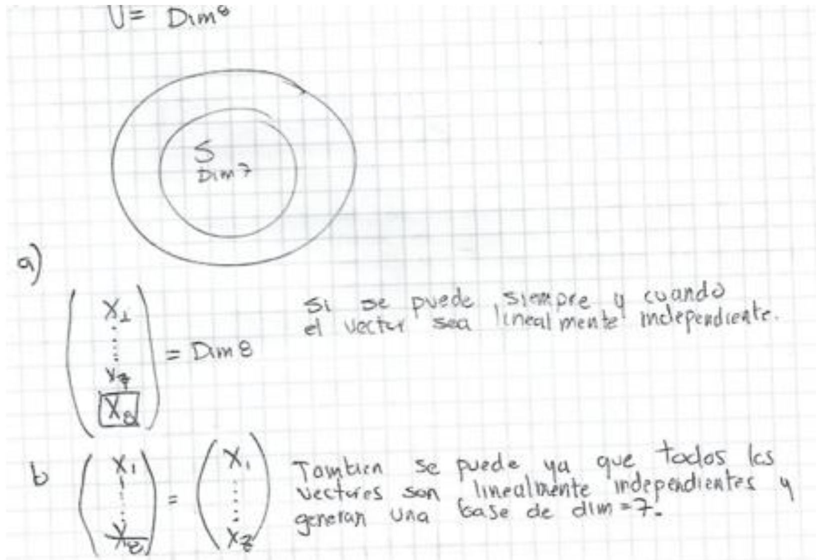


Figura 119. Solución del problema 6 de la actividad 7 por el grupo G4

Los estudiantes contestan correctamente las preguntas, justifican y conjeturan acertadamente.

Problema 4.1.7.7. Encuentre una base para el espacio de los polinomios $p_3(x)$ de grado menor o igual que 3. Sea $H = \{p_3(x) : p(1) = 0\}$, encuentre una base para H. (Modificado de la página del MIT)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de base y dimensión, en espacios de polinomios.

Solución presentada por el grupo G2:

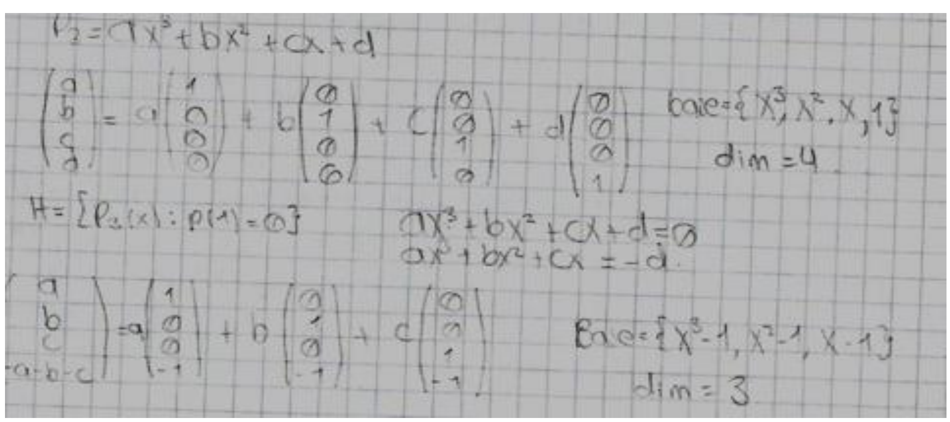


Figura 120. Solución del problema 7 de la actividad 7 por el grupo G2

Los estudiantes hallan correctamente la base canónica y la dimensión para el espacio de los polinomios pedidos.

Para el literal b, se dan cuenta que una variable queda en términos de las otras y acertadamente hallan la base y la dimensión.

Problema 4.1.7.8. Sea s_{nn} el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que s_{nn} es un subespacio de M_{nn} y que su dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$. (Modificado del libro de Grossman)

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que los estudiantes apliquen el concepto de base y dimensión en la solución de problemas en un espacio de matrices.

Solución presentada por el grupo 5:

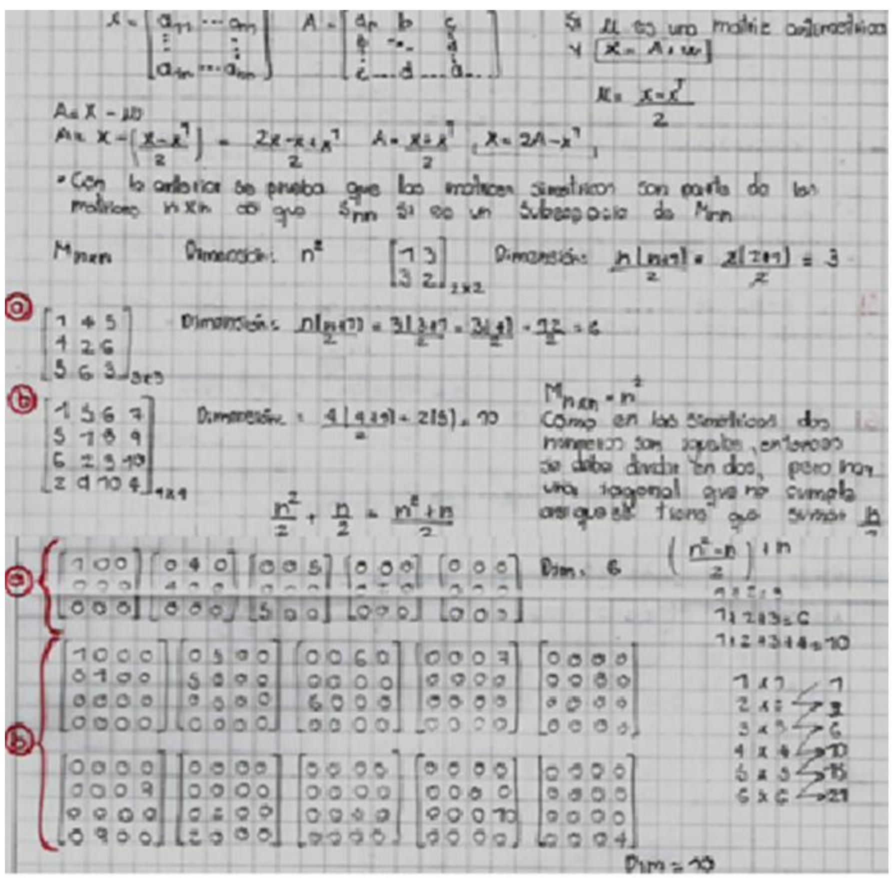


Figura 121. Solución del problema 8 de la actividad 7 por el grupo G5

Para la solución de este problema los estudiantes exploraron con varias matrices tratando de hallar un patrón como se muestra en el gráfico, hasta que pudieron conjeturar acertadamente sobre la dimensión de las matrices simétricas.

Problema 4.1.7.9. Encuentre una base para el conjunto de todas las soluciones de la ecuación en diferencias para toda k: $y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$. (Tomado del libro de Lay D).

Esta es una pregunta del segundo nivel, que pretende que el estudiante aplique los conceptos de base y dimensión en problemas aplicados a la ingeniería.

Solución presentada por el grupo 4:

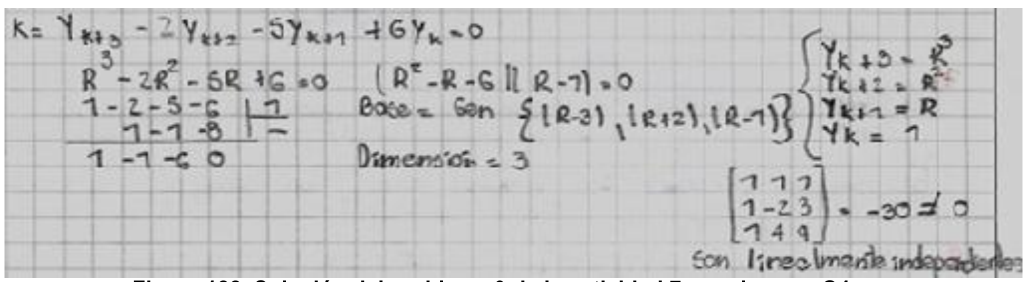


Figura 122. Solución del problema 9 de la actividad 7 por el grupo G4

Los estudiantes encuentran correctamente las señales solución y comprueban que es una base para el conjunto solución, luego determinan acertadamente la dimensión.

Apreciación del autor

En esta actividad se observa en los resultados mostrados por los estudiantes, rasgos fuertes del razonamiento plausible como es explorar con casos particulares, lo cual se evidencia en los resultados del problema 4.1.7.8. También exploraron con el Geogebra en los problemas 4.1.7.1, 4.1.7.3 y 4.1.7.6. Conjeturaron y argumentaron los resultados obtenidos, como se evidencia en el resultado de los problemas 4.1.7.1, 4.1.7.3, 4.1.7.4, 4.1.7.6 y 4.1.7.8. El concepto aplicado a la resolución de problemas se puede observar en las soluciones de los problemas 4.1.7.2, 4.1.7.5, 4.1.7.7, 4.1.79 y 4.1.7.10, ~~así~~ en los cuales también realizan demostraciones de proposiciones. Se pasa de trabajar con $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ a generalizar en $\mathbb{R}^n$.

La Tabla 13 muestra la evaluación que se le otorga a cada problema presentado por cada grupo.

Tabla 13. Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 7

G3upos	Preguntas									
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	moda
G1	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4.88
G2	5	4	5	5	5	5	5	4	3	4.55
G3	5	5	4	5	4	5	5	3	5	4.55
G4	5	5	5	5	5	5	5	4	3	4.66
G5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	4.88
G6	4	3	4	5	4	4	5	3	5	4.11
G7	4	4	4	4	5	3	5	4	4	4.11
G8	5	5	3	4	4	2	3	4	4	3.77
G9	4	3	4	5	5	4	3	3	3	3.77
G10	5	3	3	5	4	3	4	3	4	3.77
G11	4	4	2	5	3	3	5	4	4	3.77
G12	4	5	4	5	4	2	4	3	2	3.66
Tendencia general de la actividad 7										4.21

Logros:

- El valor de la media para los datos de esta actividad es 4.21, Tabla 13, lo cual confirma los buenos resultados mostrados por parte de los estudiantes en esta actividad.
- Los estudiantes en sus resultados muestran destreza en conjeturar proposiciones, realizan correctamente demostraciones sencillas y aplican acertadamente los conceptos aprendidos en la solución de problemas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- Algunos grupos tardan mucho más tiempo que otros en la solución y entrega de los problemas.

4.1.8. Actividad 8. Espacio nulo, espacio columna y rango

Objetivo

- Que el estudiante interiorice los conceptos de espacio nulo, espacio columna y rango.
- Que el estudiante analice, explore, conjeture y justifique propiedades de espacio nulo, espacio columna y rango.

Sugerencias metodológicas: En esta actividad se realiza primero una clase de orientaciones teóricas donde se trata el concepto de rango y nulidad de una matriz $m \times n$. La actividad se desarrollará a través de la solución de problemas los cuales deberán ser resueltos en grupos de tres estudiantes, cada uno de los cuales desarrolla los problemas de forma independiente. Ellos explorarán diversos problemas en relación con la construcción del concepto de rango y nulidad de una matriz y la relación entre éstos y el número de columnas de la matriz, empleando los elementos que constituyen el razonamiento plausible.

Materiales a utilizar:

Para cada una de las actividades se les pide a los estudiantes que lleven el paquete Geogebra, bien sea en tablet, celular o tableta, así como cuaderno, regla, lápiz, esferos y borrador.

Desarrollo de la actividad:

La actividad se llevó a cabo en dos clases; en la primera se abordaron los cinco primeros problemas y los restantes se trabajaron en la siguiente clase.

Actividades

Recuerde que si A es una matriz de $m \times n$, entonces $\vartheta \;\; A$ denota la nulidad de A y $\rho \;\; A$ denota el rango de A.

Problema 4.1.8.1. Dada la siguiente recta L, que pasa por los puntos A y B encuentre una matriz cuyo espacio columna la describa. (Fuente propia):

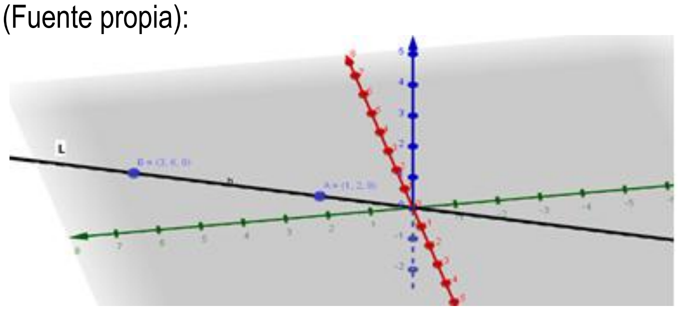


Figura 123. Gráfico del problema 1 de la actividad 8

Esta es una pregunta del segundo nivel cuyo propósito es que el estudiante aplique el concepto de espacio columna en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G1:

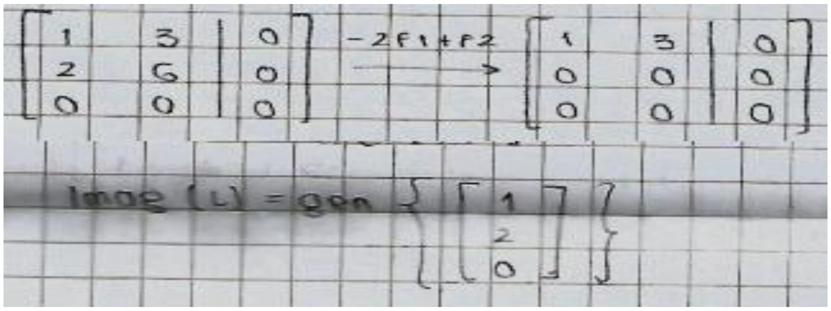


Figura 124. Solución del problema 1 de la actividad 8 por el grupo G1

Los estudiantes construyen la matriz con los vectores columna que les dieron, comprueban que son linealmente dependientes y luego hallan la base para esa recta.

Problema 4.1.8.2. Dada el siguiente plano π que contiene los puntos A, B y C, encuentre una matriz cuyo espacio columna lo describa. (Fuente propia)

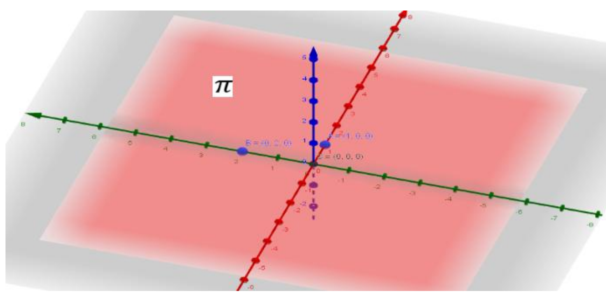


Figura 125. Gráfico del problema 2 de la actividad 8

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique el concepto de espacio columna con los vectores que generan un plano que pasa por el origen en el espacio.

Solución presentada por el grupo G2:

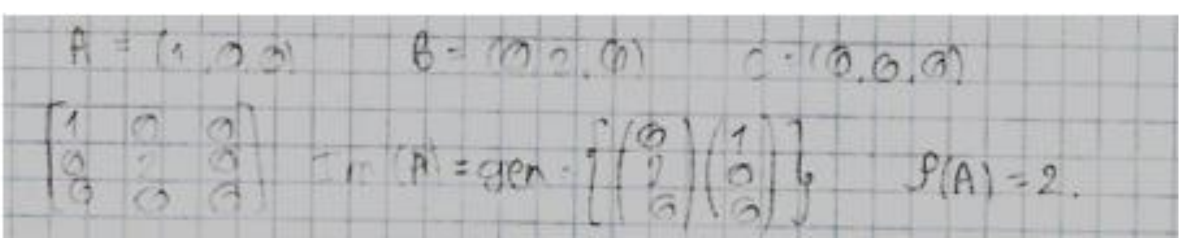


Figura 126. Solución del problema 2 de la actividad 8 por el grupo G2

Los estudiantes al igual que en el problema anterior construyen la matriz con los vectores que les proporciona el problema y luego hallan la base del plano.

Problema 4.1.8.3. ¿Para cuales números a y b el rango de la siguiente matriz es 2?

$$A = \begin{matrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & b & 7 \end{matrix}$$

(Modificado de la página del MIT)

Esta es una pregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de rango y nulidad en solución de problemas

Solución presentada por el grupo G1:

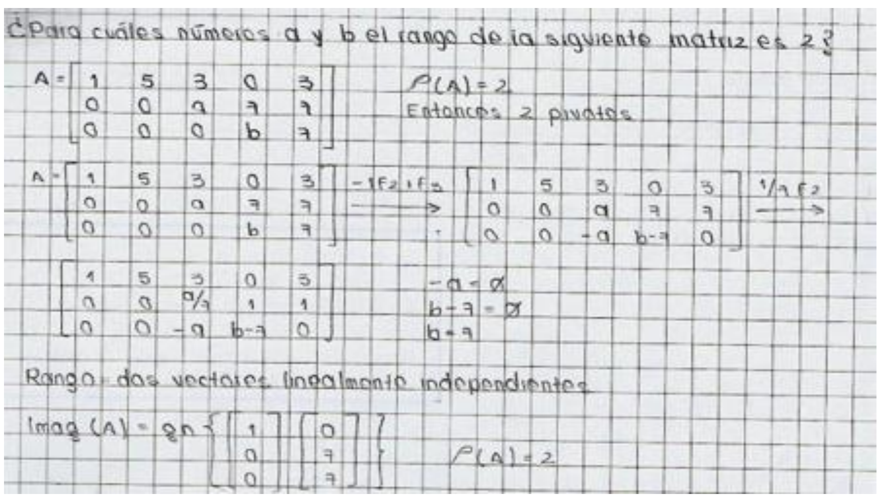


Figura 127. Solución del problema 3 de la actividad 8 por el grupo G1

Los estudiantes reducen la matriz e igualan a cero las componentes que son necesarias para cumplir las condiciones del problema, luego encuentran los valores dados correctamente y determinan la base.

Problema 4.1.8.4. Sea A una matriz de $n \times n$. ¿Cómo debe ser el espacio nulo para que A sea invertible? En dicho caso, ¿qué valores deben tener $\rho\ A$ y $\vartheta\ A$? Justifique sus respuestas. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante conjeture sobre la relación entre la nulidad y el rango de una matriz invertible.

Solución presentada por el grupo G1:

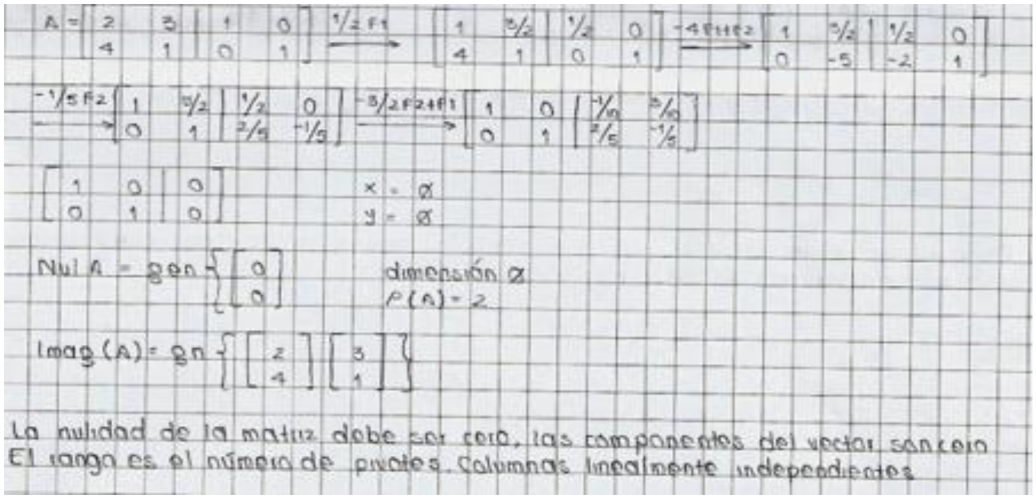


Figura 128. Solución del problema 4 de la actividad 8 por el grupo G1

Los estudiantes al explorar con varias matrices conjeturan y argumentan correctamente sobre la nulidad de una matriz invertible.

Problema 4.1.8.5. Si A es una matriz de $m \times n$, ¿qué relación hay entre el rango de A y el número de pivotes en su forma escalonada reducida? (Fuente propia).

Esta es una pregunta de segundo nivel que pretende que el estudiante explore con matrices de $m \times n$ y conjeture sobre la relación entre el rango y el número de pivotes de ésta.

Solución presentada por el grupo G3:

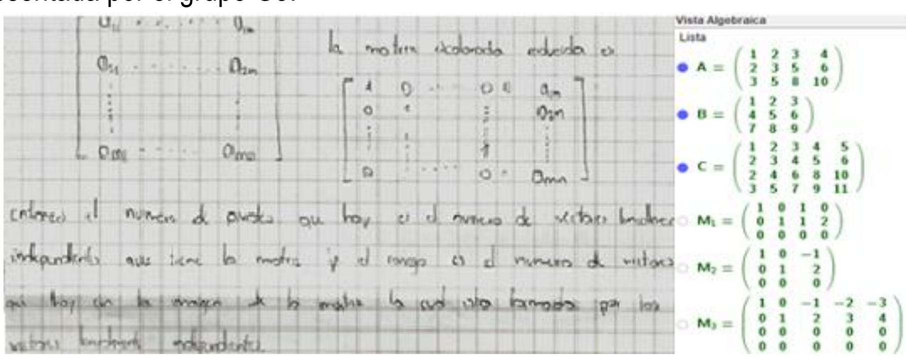


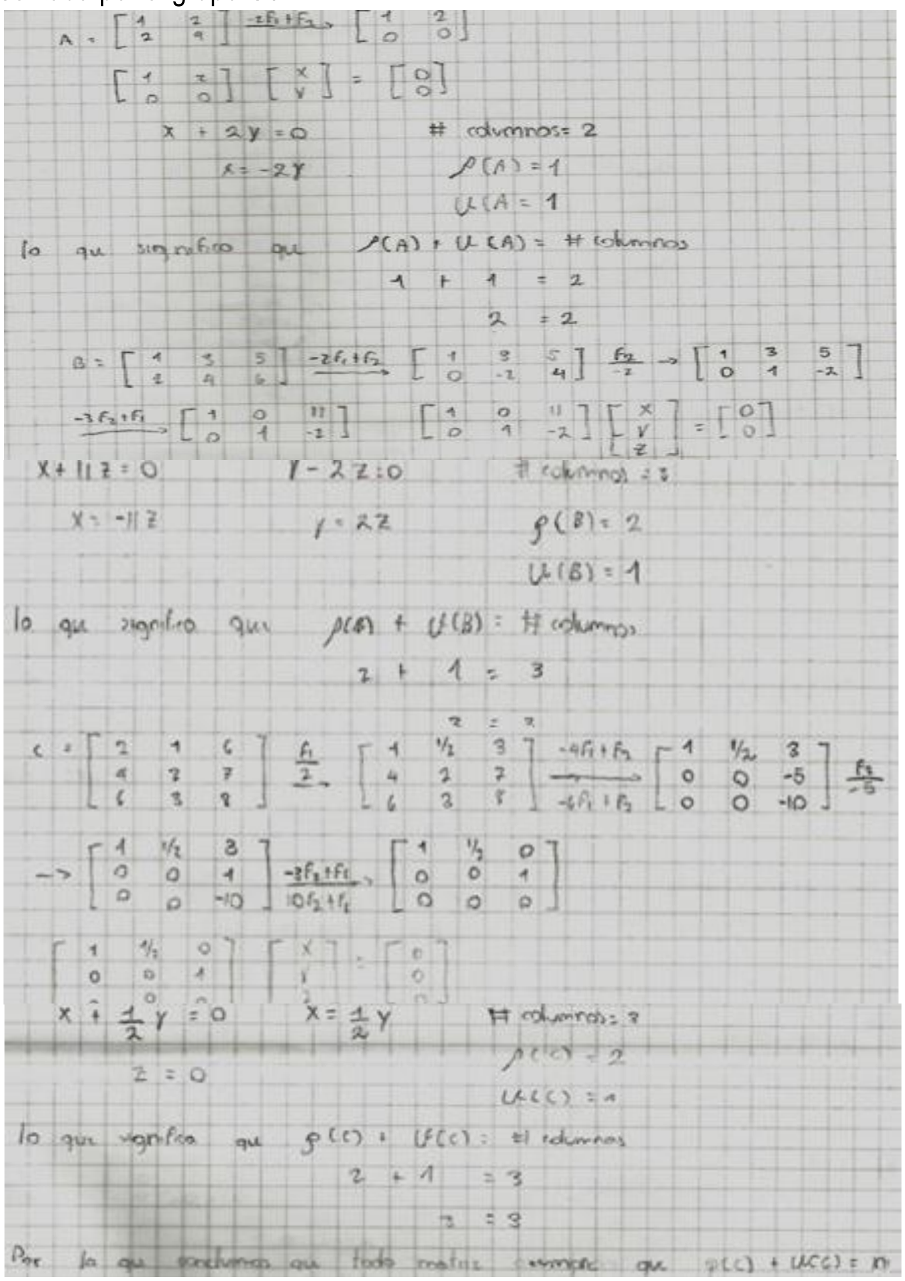
Figura 129. Solución del problema 5 de la actividad 8 por el grupo G3

Los estudiantes, al explorar con el Geogebra varias matrices de las cuales determinan el rango y el número de pivotes, conjeturan y argumentan correctamente sobre la relación entre el número de pivotes y el rango de una matriz, la cual plasman y argumentan en la solución presentada.

Problema 4.1.8.6. Sea A una matriz de $m \times n$. ¿Puede encontrar usted una relación entre $\vartheta \ A \ , \rho \ A$ y el número de columnas de A? Justifique su respuesta. (Fuente propia)

Esta es una pregunta del tercer nivel donde se pretende que el estudiante explore con varias matrices $m \times n$ al calcular en éstas el rango y la nulidad, y que luego conjeture sobre la relación que hay entre $\vartheta \ A \ , \rho \ A$ y el número de columnas de A en una matriz $m \times n$.

Solución presentada por el grupo G3:



$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x + 2y = 0$ # columnas = 2

$x = -2y$ $\rho(A) = 1$

$\nu(A) = 1$

lo que significa que $\rho(A) + \nu(A) =$ # columnas

$1 + 1 = 2$

$2 = 2$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{F_2}{-2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-3F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x + 11z = 0$ $y - 2z = 0$ # columnas = 3

$x = -11z$ $y = 2z$ $\rho(B) = 2$

$\nu(B) = 1$

lo que significa que $\rho(B) + \nu(B) =$ # columnas

$2 + 1 = 3$

$3 = 3$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{F_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-6F_1+F_3]{-4F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \frac{F_2}{-5}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[10F_2+F_3]{-3F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x + \frac{1}{2}y = 0$ $x = \frac{1}{2}y$ # columnas: 3

$z = 0$ $\rho(C) = 2$

$\nu(C) = 1$

lo que significa que $\rho(C) + \nu(C) =$ # columnas

$2 + 1 = 3$

$3 = 3$

Por lo que concluimos que toda matriz cumple que $\rho(C) + \nu(C) = n$

Figura 130. Solución del problema 6 de la actividad 8 por el grupo G3

Los estudiantes exploran con varias matrices a las que le hallan el rango y la nulidad para luego conjeturar correctamente que la nulidad más el rango es igual al número de columnas.

Problema 4.1.8.7. Sea A una matriz de $m \times n$. Dado el sistema $Ax = B$, ¿qué relación deben tener $m, n, \rho \ A$ y $\vartheta \ A$ cuando el sistema tiene:

a. ¿Única solución? b. ¿Infinitas soluciones? c. ¿No tenga solución? (Fuente propia)

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante explore y conjeture sobre la relación que existe entre las soluciones de un sistema lineal $Ax = B$ y $m, n, \rho \ A$ y $\vartheta \ A$.

Solución presentada por el grupo G2:

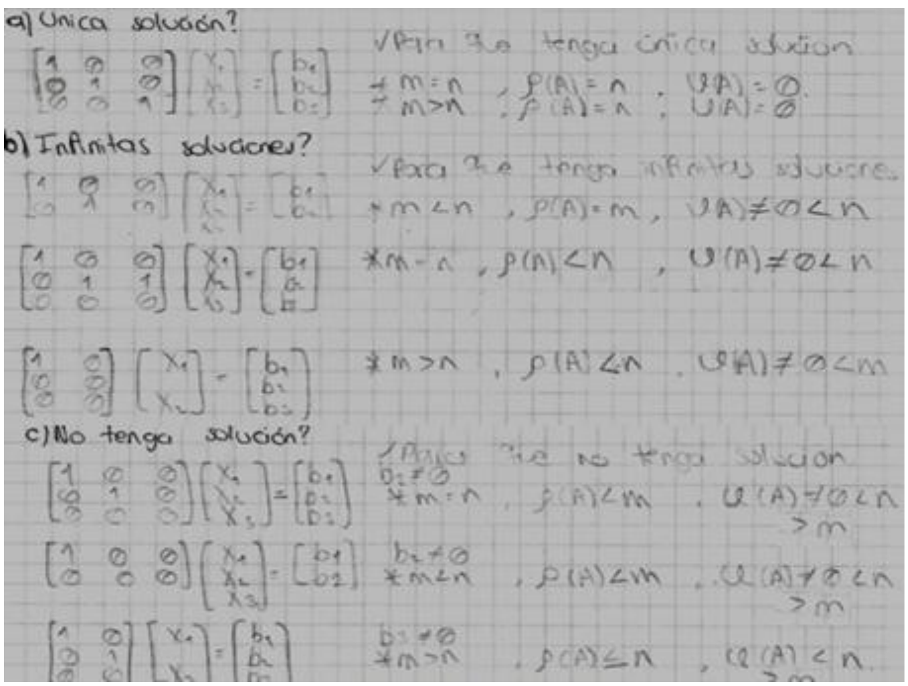


Figura 131 Solución del problema 7 de la actividad 8 por el grupo G2

Para el inciso a, los estudiantes toman dos casos y, acorde a los resultados del punto 3, conjeturan y argumentan correctamente la relación pedida cuando el sistema tiene única solución. En el inciso *b*, toman tres casos y en cada uno de ellos la conjetura es acertada cuando el sistema tiene infinitas soluciones. Para el literal *c*, vuelven y toman tres casos en los cuales la conjetura en cada uno de éstos es correcta, para que el sistema no tenga solución.

Problema 4.1.8.8. Pude usted construir una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ y cuyo espacio nulo contenga a $(1,0,1)$ y $(0,0,1)$. (Modificado de la página del MIT.)

Esta es una ppregunta del segundo nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de rango y nulidad en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G2:

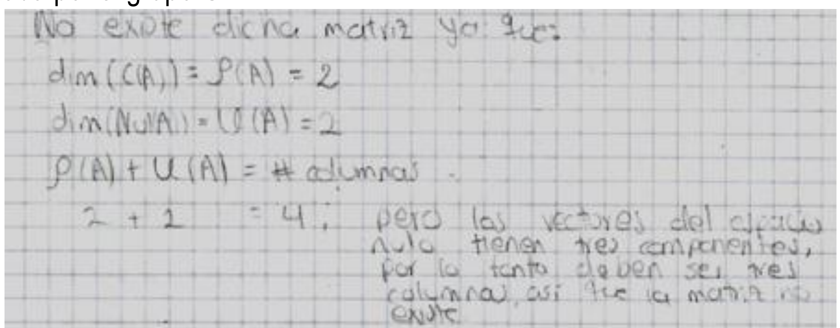


Figura 132 Solución del problema 8 de la actividad 8 por el grupo G2

Los estudiantes primero exploraron con varias matrices y tardaron bastante, hasta conjeturar que la matriz no se puede construir.

Problema 4.1.8.9. ¿Puede encontrar usted una matriz 5×5 donde el espacio nulo sea igual a su espacio columna? Conjeture.

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante explore y conjeture sobre el rango, la nulidad y el número de columnas de matrices cuadradas.

Solución presentada por el grupo G1:

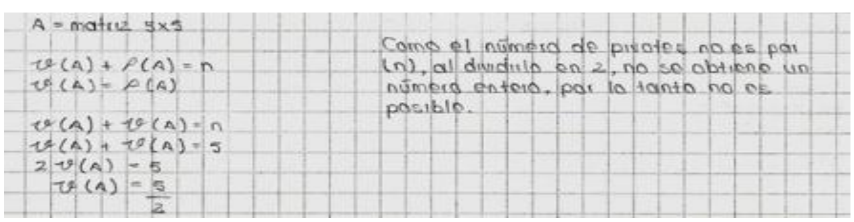


Figura 133 Solución del problema 9 de la actividad 8 por el grupo G1

Los estudiantes exploran y con el resultado del ejercicio anterior conjeturan correctamente que no es posible construir la matriz que les piden.

Problema 4.1.8.10. ¿Qué tendría usted que saber acerca del conjunto solución de un sistema de 26 ecuaciones lineales con 30 variables para asegurar que toda ecuación no homogénea asociada tiene solución?

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de rango y nulidad en la solución de problemas. Ningún grupo contestó correctamente este problema.

Problema 4.1.8.11. Si A es una matriz de 64 por 17 con rango 11, ¿cuántos vectores x linealmente independientes cumplen $Ax = 0$? y ¿cuántos vectores linealmente independientes y cumplen $A^T y = 0$. (Modificado del libro de Strang.)

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de rango y nulidad en la solución de problemas.

Solución presentada por el grupo G2:

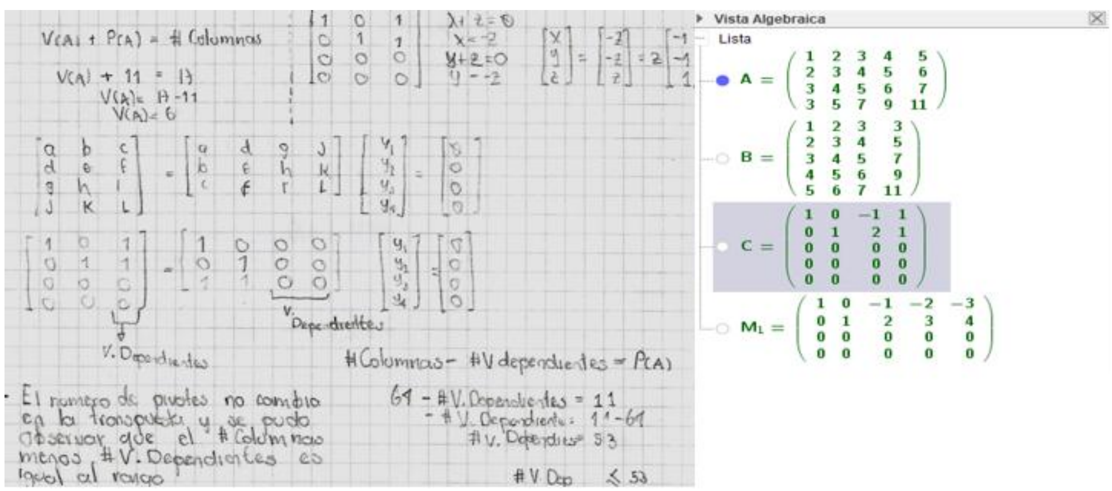


Figura 134 Solución del problema 11 de la actividad 8 por el grupo G2

Los estudiantes aplican la ecuación de rango más nulidad igual a número de columnas y responden correctamente la parte *a*. Para la segunda parte ellos exploraron con varias matrices hasta conjeturar que el rango de una matriz es el mismo que el de su matriz transpuesta, resultado que utilizan para contestar acertadamente.

Problema 4.1.8.12. Encuentre una base para el espacio solución de la ecuación en diferencias: $y_{k+3} - 4y_{k+2} + y_{k+1} + 6y_k = 0$. Demuestre que las soluciones encontradas generan el conjunto solución. Examine la matriz de Casorati que generan las señales solución de ésta y luego compruebe la relación que hay entre $\vartheta\ A$, $\rho\ A$ y el número de columnas de la matriz.

Esta es una pregunta del tercer nivel que pretende que el estudiante aplique los conceptos de rango y nulidad en problemas de ingeniería.

Solución presentada por el grupo G3:

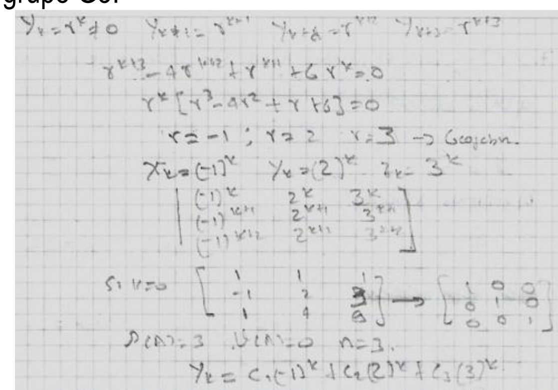

.

Figura 135 Solución del problema 12 de la actividad 8 por el grupo G3

Al sustituir los valores de $y_k$en la ecuación de diferencias encuentran una ecuación de tercer grado que la resuelven y así determinan tres señales que satisfacen la ecuación. Luego hallan la matriz de Casorati y responden correctamente.

Apreciación del autor

En esta actividad se observa que, en algunos problemas, para realizar las conjeturas los estudiantes primero exploran con ejemplos para tantear la veracidad de los enunciados, lo cual se evidencia en los resultados de los problemas 4.1.8.4, 4.1.8. y 1. 4.1.8.5. Luego realizan las conjeturas, como se observa en los resultados de los problemas 4.1.8.4, 4.1.8.5, 4.1.8.7, 4.1.8.8 y 4.1.8.11. La resolución de problemas no rutinarios donde aplican los conceptos de rango y nulidad se evidencia en en las soluciones de los problemas 4.1.8.1, 4.1.8.2, 4.1.8.3, 4.1.8.9, 4.1.8.10 y 4.1.8.10.

Tabla 14. Resumen estadístico de la valoración de los grupos en la actividad 8

G3upos	Problemas												
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	moda
G1	5	5	5	5	5	5	4	5	5	2	3	3	4.33
G2	5	5	5	4	5	5	4	5	5	2	4	3	4.33
G3	5	4	4	4	4	5	3	5	5	2	4	5	4.16
G4	5	5	5	4	4	5	4	5	5	2	3	2	4.08
G5	5	4	5	4	4	5	3	5	5	2	3	3	4.00
G6	4	4	4	4	4	5	4	5	4	2	3	2	3.75
G7	4	4	4	4	3	5	3	4	5	2	4	2	3.66
G8	4	3	3	5	4	5	3	42	4	2	3	3	6.75
G9	5	3	4	4	5	4	4	5	5	2	3	3	3.91
G10	4	4	3	4	4	4	3	5	4	2	3	3	3.58
G11	5	4	4	4	4	5	3	4	5	2	3	3	3.83
G12	4	5	4	3	4	4	3	5	4	2	3	3	3.66
Tendencia general de la actividad 8													4.17

Logros:

- El valor de la media para los datos de esta actividad es 4.17, Tabla 14, en la cual muestran destreza en la solución de problemas de esta temática.
- Los estudiantes en sus resultados muestran destreza en conjeturar proposiciones, realizan correctamente demostraciones sencillas y aplican acertadamente los conceptos aprendidos en la solución de problemas.
- Se observó que los estudiantes trabajaban de forma dinámica y con una actitud muy positiva en cada uno de los problemas de la actividad.

Dificultades:

- La Tabla 14 muestra que los estudiantes presentan dificultad en la solución de problemas de aplicación.

4.2. Análisis y discusión de los resultados de las actividades

Se puede concluir, de acuerdo a los resultados obtenidos, que el modelo y el procedimiento metodológico propuesto para la enseñanza del álgebra lineal a través del razonamiento plausible, la tecnología y la visualización fue un método adecuado para el desarrollo de esta asignatura en las carreras de ingeniería. Además, la deserción académica en esta asignatura disminuyó considerablemente en comparación con los semestres anteriores y con los demás cursos que se imparten en la facultad de ingeniería de la universidad donde se aplicaron las actividades. En cuanto al desarrollo de la asignatura se concluye que durante el semestre se observó en los estudiantes una actitud dinámica y participativa, ya que presentaban los resultados de los problemas en la retroalimentación y socialización de conceptos.

La demostración de proposiciones siempre presentó un poco de dificultad, sobre todo al principio, pero a medida que el curso se desarrollaba, los estudiantes se enfrentaban a éstas con una mejor aptitud.

4.2.1. Evaluación de todos los grupos del estudio

Se puede apreciar en la siguiente tabla, que se construye con la medida tendencia central que mejor se adecúa a una investigación de esta naturaleza, la efectividad de la metodología aplicada.

Tabla 15. Resumen de la efectividad general del estudio por grupos

Actividades	promedios de cada uno de los Grupos												
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	media
N°1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4.91
N°2	5	5	5	5	5	5	2	5	5	4	5	4	4.58
N°3	5	5	5	5	5	5	2	5	4	2	5	3	4.25
N°4	5	5	5	5	5	5	3	4	5	4	5	4	4.58
N°5	5	5	5	5	5	2	4	4	3	4	4	4	4.16
N°6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	5	4	5	4.58
N°7	5	5	5	5	5	5	4	4	3	3	4	4	4.33
N°8	5	5	4	5	5	4	4	3	5	4	4	4	4.33
Tendencia	5	5	5	5	5	5	4	4	5	4	5	4	4.46

4.2.2. Sobre la encuesta final a los estudiantes

Se realizó una encuesta y una entrevista a los estudiantes sobre la metodología utilizada en el desarrollo del curso a las cuales contestaron que les gustaba el aprendizaje por descubrimiento a través de la solución de problemas, porque así le veían más sentido a los temas tratados. Además, el uso de la tecnología y de la visualización fue de agrado, ya que les ayudaba a comprender mejor los conceptos y les evitaba cálculos largos y engorrosos. (Anexo 5.)

Los resultados obtenidos en estas encuestas los podemos clasificar como se presenta a continuación.

4.2.2.1 Actitud de los estudiantes

En cuanto a la respuesta a la pregunta número cinco de la encuesta, donde se les pregunta a los estudiantes sobre si la metodología desarrollada es más motivante, los resultados se observan en la siguiente gráfica.

Gráfico 1. Correspondiente a la respuesta 5 de la encuesta final a estudiante. Fuente propia.

Los resultan evidencian que más del 75% de los estudiantes manifestaron que la metodología desarrollada fue motivante y así se vivenció en cada una de las clases.

En la entrevista realizada, los estudiantes manifestaron el gusto por la metodología desarrollada en este curso ya que era dinámica y comentaron que el trabajar en grupos les permitía interactuar y debatir diferentes puntos de vista. Uno de los estudiantes manifiesta: “no sólo se interactúa con el profesor, el conjeturar en grupos es más emocionante para el estudiante”.

En cuanto a la pregunta número 1 de la entrevista, la totalidad manifiesta que es buena, bastante práctica y dinámica, ya que los estudiantes son el centro de la clase.

4.2.2.2. Sobre las conjeturas

En la encuesta final a la pregunta seis: La metodología utilizada en el curso conlleva a que usted descubra y conjeture conceptos del álgebra lineal, los resultados se muestran en el siguiente gráfico:

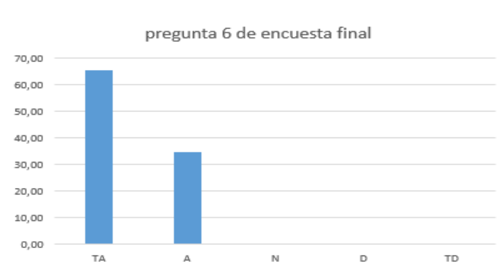


Gráfico 2. Correspondiente a la respuesta 6 de la encuesta final a estudiante. Fuente propia.

Los resultados evidencian que el 100% de los estudiantes manifestó haber realizado o descubierto conjeturas de conceptos en el curso. Estos resultados son acordes con las soluciones entregadas por ellos de cada una de las actividades.

4.2.2.3 Sobre el nivel de dificultad y el tiempo de solución de los problemas

En cuanto al nivel de dificultad y el tiempo que se da para el desarrollo de éstos, los resultados se presentan en las gráficas siguientes.

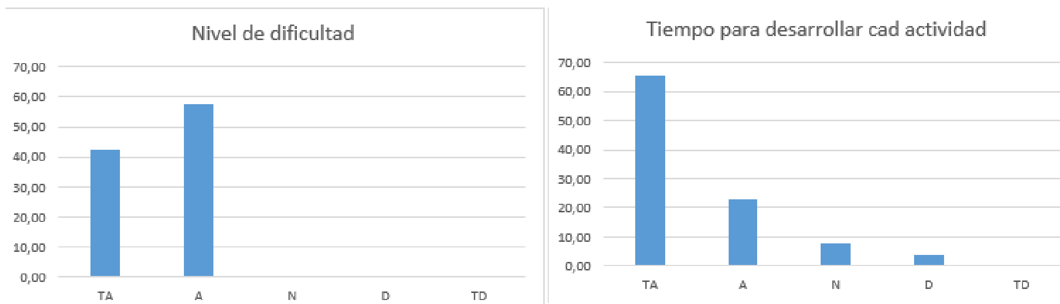


Gráfico 3. Correspondiente a la respuesta 2 y 3 de la encuesta final a estudiante. Fuente propia

El 100% encuentra que los niveles de dificultad de los problemas son adecuados y más del 80% creen que el tiempo es suficiente para poder desarrollar las actividades.

4.3. Validación a través del criterio de expertos del modelo y procedimiento didáctico[47]

Se hace un análisis de los resultados a los expertos consultados sobre el modelo y el procedimiento didáctico implementado en una práctica académica en el ambiente de clases reales. El método de criterio de expertos, consiste en la utilización sistemática del juicio de un grupo de docentes seleccionados que evaluativamente se clasificaron en los niveles alto (85-100) y medio (75-84) para obtener por consenso las opiniones de éstos. Se realizó la encuesta para dicha selección (ver Anexo 4), la que fue aplicada a 16 profesionales para escoger los expertos a partir de la evaluación resultante. De acuerdo a los coeficientes de competencia obtenidos por cada uno (ver Anexo 5) se seleccionaron trece

[47] García P., M. (2017). *Utilización del criterio de expertos para fundamentar la validez de conceptos por consenso*. Conferencia en el Seminario de Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño.

de los cuales once obtuvieron un coeficiente de competencia alto y dos un coeficiente de competencia medio. Además, se valoró de los 16 docentes escogidos en primera instancia, su producción intelectual y participación en eventos científicos y publicaciones con relación al tema de tesis, así como, su pertinencia a comunidades de educación matemática y que estuvieran vinculados con universidades colombianas y/o extranjeras. De los 13 expertos seleccionados, diez son doctores en educación matemática o ciencias pedagógicas y tres ostentan título de máster, todos con títulos de licenciatura o de ingeniería.

Para someter la propuesta a consideración de los expertos se elaboró una encuesta (ver Anexo 6) para que emitieran la calificación que consideraban tenía cada fase y componente. Las categorías evaluativas empleadas fueron: muy adecuado (MA), bastante adecuado (BA), adecuado (A), poco adecuado (PA) y no adecuado (NA). Cada experto, de manera individual, se pronunció con respecto a los diferentes componentes, y de esta forma se pudo procesar dichas calificaciones (ver Anexo 7 y 8). Con estos resultados se pudo determinar la concordancia de los aspectos que se sometieron a consideración (ver Anexo 9), ya que los conceptos emitidos validan tanto el modelo como el procedimiento didáctico. Por la alta calificación que obtiene el modelo y el procedimiento en el intervalo correspondiente a la calificación de muy adecuado, se consideran los mismos validados.

Conclusiones parciales del Capítulo 4

La práctica evidenció que, al aplicar un conjunto de actividades basadas en un modelo y un procedimiento didáctico centrado en el razonamiento plausible, la visualización geométrica y el uso de la tecnología para la resolución de problemas del álgebra lineal, se mejora significativamente el aprendizaje en esta asignatura en las carreras de ingeniería, no sólo en conjeturas y sino también en demostraciones de propiedades básicas del álgebra lineal por los estudiantes. Esta afirmación se apoya en los resultados de las soluciones de los problemas realizados por los estudiantes, que se muestran en la Tabla 22 anterior, ya que mide cuantitativamente la efectividad del estudio, consideración que comparten los expertos sometidos a consulta.

Se prestó atención a las tendencias de los alumnos al desarrollar estas actividades en la búsqueda de argumentos que les permitiera conjeturar o justificar resultados, sin estar atados a procedimientos algorítmicos en forma mecánica.

CONCLUSIONES

De esta investigación se puede concluir que la enseñanza del álgebra lineal es reconocida universalmente como muy compleja y es por ello que la cantidad de investigaciones sobre el tema es numerosa. Autores como (Carlson, D. (1993), Dorier, J. (2002), Harel, G. (2001), Sierpinska, A. (2000)), entre otros, han conformado y realizado estudios sobre los principales problemas que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y dan valiosas recomendaciones para afrontar los diferentes factores que inciden negativamente en estos procesos, pero no presentan un modelo o procedimiento didáctico centrado en el razonamiento plausible para afrontar este problema.

De lo observado en el estudio se puede concluir que un software o paquete matemático con capacidad para procesar simbólica y algebraicamente y con recursos gráficos debe ser utilizado en las prácticas para el desarrollo de los contenidos programáticos del álgebra lineal en carreras de ingeniería.

En esta investigación se utilizó tanto la parte gráfica para una mejor comprensión visual de muchos conceptos, como la parte simbólica donde se pudo comprobar su gran utilidad, ya que al utilizar el Geogebra los estudiantes pudieron explorar propiedades y hacer conjeturas al realizar los cálculos de una manera rápida y exacta. Además, al hacer uso de este software los estudiantes aprendieron que lo importante es el concepto y no la repetición o memorización algorítmica que tradicionalmente se hacen en esta asignatura. Este es uno de los factores negativos frecuentes en el proceso de enseñanza aprendizaje a la que se hacía referencia.

Por otra parte, en el desarrollo del procedimiento metodológico o didáctico se dio relevancia a la utilización del método heurístico, ya que se planteó a los estudiantes preguntas de diferentes tipos de nivel conjetural que facilitaron la búsqueda independiente de aprender el concepto a través de la solución de los problemas, lo que les permitió construir su propio conocimiento y así llegar a los conceptos propuestos en cada uno de los temas vistos en el desarrollo del semestre.

Uno de los indicadores fundamentales que muestran la comprensión de un concepto está en la capacidad para resolver problemas relacionados con éste, de modo que se retroalimentan en doble vía. Primero, el significado apropiado que les permite resolver problemas, y segundo, de éste les facilita construir significados cada vez más apropiados para diferentes conceptos. Esto se evidenció en los resultados reflejados en este trabajo, como por ejemplo en las soluciones de los problemas 4.1.8.12, 4.1.8.8, 4.1.7.8, 4.1.7.9, entre otros.

Por lo tanto, el modelo didáctico diseñado y aplicado en esta investigación dirigida a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en las carreras de ingeniería tuvo resultados positivos que se evidencian cuando el alumno logra pasar de la instrumentalización al proceso de instrumentación. Tal asociación se logró en el momento en el cual los elementos mediadores transversales como la mediación instrumental se integran con fluidez y flexibilidad como factores mediadores del modelo.

Este modelo presenta, de forma implícita, como hecho fáctico, la definición y resolución de la contradicción externa y su transformación en su fase interna para determinar adecuadamente el objeto de la investigación, la cual se sustentó entre la comprensión de problemas del álgebra lineal en carreras de ingeniería y el resultado de los mismos.

A través de la solución de problemas en las ocho actividades aplicadas y las encuestas y entrevistas a los estudiantes, se pudo apreciar tanto en la media aritmética como medida de tendencia central de los resultados de cada grupo, así como la validación del modelo, a través del criterio de expertos, no solo, la pertinencia y operatividad, tanto del modelo como del procedimiento didáctico, sino también su efectividad, lo que confirma que los aportes teórico y práctico fueron logrados y dichos modelos y procedimiento didáctico validados.

Por todo lo anteriormente expuesto se considera que los objetivos propuestos se cumplieron y con ello se puede afirmar que la hipótesis de trabajo fue una excelente guía para este estudio.

RECOMENDACIONES

1. Socializar el modelo didáctico y el procedimiento de implementación práctico para que sean de utilidad tanto a los estudiantes como a los docentes de las facultades de ingeniería. Esta recomendación se hace mucho más importante en las carreras de la licenciatura en matemáticas, sobre todo, como parte de los cursos de álgebra lineal.
2. Implementar el cuasiempirismo como herramienta metodológica para el aprendizaje de la matemática, ya que puede facilitar al estudiante la oportunidad de explorar y entender los diferentes temas y proposiciones, y así se pueda enfrentar a problemas y demostraciones de éstos con una mayor posibilidad de éxito.
3. Usar la tecnología porque enriquece los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, ya que es una herramienta donde los estudiantes van a comprender mejor los temas cuando utilizan la visualización y les simplifica los cálculos largos y complicados. Sin embargo, ésta no puede considerarse nunca una herramienta mágica.
4. Enriquecer con problemas y aplicaciones las actividades de esta investigación.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

1. Arcavi, A. (2003). The role of visual representation in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 52 (3), 215-241.
2. Anton, H. (2014). Elementary linear algebra. 11th edition. Ed Wiley
3. Bunge. M. (s/f), *La ciencia, su método y su filosofía.* Recuperado el 7 de marzo del 2014 del URL: http://disi.unal.edu.co/profesores/jeortizt/Sim/Archivos/31.%20LaCienciaSuMetodoYSuFilosofia.pdf.
4. Cai, J. (2010). *Evaluation of Mathematics Education Programs*. University of Delaware, Newark, DE, USA. Elsevier Ltd. All rights reserved.
5. Carlson, D. (1993), y otros, The linear algebra curriculum study recommendation for the first course in linear algebra, recuperado del URL: http://www.jstor.org/discover/10.2307/2686430?uid=2&uid=4&sid=21104423314191
6. Chargoy. R (2000): Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial, *Acta latinoamericana de matemática educativa,* vol. 13 , pág. 162.
7. Cruz, M. (2010). *Definición de modelo didáctico*; Holguín, Cuba.
8. Day, J; Kalman, D (2001).. Teaching linear algebra: issues and resources. *The College Mathematics Journal*, 32.3 162-168.
9. Dorier, J (2000). *Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces.* On the teaching of the algebra linear red Kluwer academic publishers. pag 1- 73.
10. Dorier, J. (2000). *On teaching Linear Algebra.* Mathematics Education Library.
11. Dorier. J. (1999). Teaching and Learning linear algebra in first year of French Science University, recuperado del URL: file:///C:/Users/user/Downloads/ unige_16857_attachment01%20(1).pdf.
12. Dorier. J. (2002). Teaching Linear Algebra at University, recuperado del URL: http://arxiv.org/pdf/math/0305018.pdf.

13. Dubinsky, E Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level I. Recuperado del URL: http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf.

14. Elliot, J. (2000). La investigación-acción en educación p 5 a 7, recuperado del URL: http://www.cimm.ucr.ac.cr/wordpress/wp-content/uploads/2010/12/Elliot-J.-Investigaci%C3%B3n-acci%C3%B3n-2002.pdf

15. Ericsson, E. (2008). *Identidad, Juventud y Crisis.* Ed. Paidós, Buenos Aires, pp. 54-62.

16. Escalona R., M. (2007). El uso de recursos informáticos para favorecer la integración de contenidos en el área de ciencias exactas del preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero, Holguín, pp. 15-27.

17. Gábor, K.. Imre Lakatos's Philosophy of Mathematics. Recuperado el 15 de mayo del URL: http://hps.elte.hu/~kutrovatz/LakatosEng.pdf.

18. Gamboa (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* año 2, pp 11-44.

19. García, M. y Nápoles, J. (2015). A dialectical invariant for research in mathematics education. *The Mathematics Enthusiast. Volume 12,* Numbers 1, 2, & 3. Article 33. Recuperado el 3 de diciembre de 2015 de la URL: http://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1358&context=tme.

20. García, M. (2017). Utilización del criterio de expertos para fundamentar la validez de conceptos por consenso. Conferencia en el Seminario de Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño.

21. Gatica, S. y Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. EDMETIC, *Revista de Educación Matemática y TIC*, 1(2), 88-107.

22. Gascón, J. (2000). *El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la didáctica de las Matemáticas*. Trabajo realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT.

23. Ghislaine, G. (2004). Geometrical and figural models in linear algebra Recuperado del URL: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap74.pdf.

24. Grossman, S. (2012). Álgebra lineal. Séptima edición. Ed. Mc Graw Hill.

25. Guzner, C. (2012). El Desafío de enseñar Álgebra Lineal por Competencias. recuperado el 4 de abril de 2014 del URL: http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero46/COMPETENCIAS.pdf. Pedagogía Universitaria Vol XVII N° 5.

26. Harel, G. (1989). Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative. Approach to Visualizing Concepts and Processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1-2), 139-48.

27. Harel, G. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendation: Moving Beyond Concept Definition recuperado el 7 de septiembre del URL: http://www.math.ucsd.edu/~harel/publicatioM/Downloadable/The%20Linear%20Algebra%20Curriculum%20Study%20Group%20RecommendatioM%20%20Moving%20Beyond%20Concept%20 Definition.pdf

28. Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical–thinking at any age: Its Nature and its development. *Mathematical, thinking and learning*. Lawrence Erbaum Associates, Inc.

29. Harel, G. (2001). Three principles of learning and teaching mathematics. In Linear Algebra - Old and New Observation. *On the teaching of linear algebra,* Melbourne, Australia, pag. 177-189

30. Haykin y Van Veen. (2001). *Señales y sistemas*, Edit. Limusa , pag 3

31. Havelková, V. (2013). Geogebra in Teaching Linear Algebra. *European Conference on e-Learning*: 581-XiV. Kidmore End: Academic Conferences International Limited.

32. Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Edit Oxford, pag 3-24.

33. Herstein, N. (1988) Álgebra lineal y teoría de matrices, Ed Iberoamérica.

34. Jiménez, B. (1989). *Modelos didácticos para la innovación educativa*. Barcelona: PPU.

35. Karakus F y B. Examining the method of proofs and refutation in pre-service teachers education. Recuperado el 6 de agosto de 2015 del URL:*http://www.scielo.bgr/scielo.php?pid=S0103636X2013000100011&script=sci_arttext.*

36. Kolman, Bernard/Hill, David R. (2006). *Álgebra Lineal.* 8ª. Edición. Ed. Pearson /Prentice Hall. México.

37. Konyalioğlu, A, y otros. On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces, recuperado el 3 de mayo de 2014 del URL: http://journal.qu.edu.az/article_pdf/1006_80.pdf.

38. Lay- D (2012). *Linear Algebra and its application.* Edit. Addison-Wesley, fourth edition .

39. Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Editorial Alianza, Madrid.

40. Lipschutz, S. (1971). Álgebra lineal. Ed McGraw-Hill

41. Markiewicz, M.E. (2006). Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural, *Universidad Nacional de Río Cuarto* recuperado de la URL: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/ memorias/comunicaciones/Trabinvest/CTI2.pdf.

42. Marmolejo y Vega, (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. Recuperado el 10 de agosto del 2016 del URL: http://www.redalyc.org/pdf/405/40525846001.pdf.

43. Miller, J. (1998). *Psychology mathematical.* Princeton the University Press, Princeton.

44. MIT(página) https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/exams/

45. Ortega, P.(2002).La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico.Tesis Doctoralfile:///C:/Documents%20and%20Settings/equipo6/Escritorio/ucm-t25694.pdf.

46. Parraguez, M. (2009). Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial. Tesis doctoral. http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ parraguez_2009.pdf

47. Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Editorial Tecnos, S. A. Madrid.

48. Polya, G. (1993). *Como plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas México

49. Recalde, L (2000). recuperado el 4 de mayo del 2014 del URL: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/1701/1/8%20Heuristica%20y%20formalismo%20%20la%20diferencial%20de%20Frechet%20segun%20el%20enfoque%20de%20Lakatos.pdf

50. Reyes, M. y otros (2011). Study on the understanding of linear algebra in technical sciences students in the University of Camagüey.http://cvi.mes.edu.cu/peduniv/index.php/peduniv/article/viewFile/49/47.

51. Right, D. (1997). *Linear Algebra.* Second Edition Springer.

52. Rodríguez, M. Juana, M. et al. (1996). Perspectivas teórico educativas en la formación de maestros. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 27, pp. 141-147.

53. Ruíz, C. (2000). *Heurística y Formalismo La diferencial de Fréchet según Lakatos.* Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. VIII Nov del 2000.

54. Sierpinska, Anna (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra in Dorier J.-L. (ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question*, 209-246. @2000 Kluwer Academic Publishers

55. Sierpinska, A. and Dorier, J. (2001). Research and learning of linear algebra p 259. From the book: *The teaching and learning of mathematics at university level.*

56. Sierpinska, A. (1988). Epistemological remarks on function*, P.M.E. xii, Hungary*, 568-575.

57. Strang, G. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Cuarta edición. Ed Thomson

58. Sampieri, R. y otros (2010). *Metodología de la investigación*. Quinta edición. Ed. Mc Graw Hill

59. Yains, S y Ahmet I. (2003). On the Teaching Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching Vector Spaces. *Educational Research Journal,* Vol. 7, No.1, marzo 2003, pp. 59-67.

ANEXOS

Anexo 1. Diagnóstico inicial.

Actividades	Descripción del procedimiento con papel y lápiz	Descripción del procedimiento con Software	Resultados Obtenidos
Encuentre una matriz de 2 por 2 tal que $A^2 = I$, donde I es la matriz idéntica.			
Resolver el sistema: $\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 7 \\ x + 2y - 4z &= 8 \\ 2x - 4y + z &= 0 \end{aligned}$			

Tabla 16 Evaluación diagnóstica

Encuesta diagnóstica realizado a estudiantes de segundo semestre de Ingeniería de la Universidad Distrital en el segundo periodo del año 2017.

IDENTIFICACION.

Fecha: _____________Programa: ____________________Semestre: ________Grupo: _____________

B. ASPECTOS GENERALES.

El propósito de la siguiente encuesta es realizar un diagnóstico acerca del nivel de interés que presentan los estudiantes de Ingeniería al utilizar cualquier tipo de software en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

¿Conoce algún tipo de software que favorezca el proceso enseñanza aprendizaje en matemáticas?:

Si ¿Cuál?:____No___________________________

3. ¿Está de acuerdo que los docentes impartan sus clases con un software de matemáticas de tal forma, que los recursos tecnológicos permitan dinamizar, visualizar y conjeturar en la resolución de problemas?

- Muy Alto (Muy importante y necesario)
- Alto (Importante)
- Medio (Necesario)
- Bajo (Poco importante)
- No le afecta. (NO es importante, NO es necesario)

Nombre y Apellidos (Opcional):____

Para la realización del presente diagnóstico se les aplicó una encuesta y una prueba con sus correspondientes indicaciones metodológicas, quienes respondieron a cada uno de los interrogantes planteados en forma individual.

Los resultados en la encuesta fueron:

1. ¿Conoce algún tipo de software que favorezca el proceso enseñanza aprendizaje en matemáticas?

40%. repartido así: 12% wolfram, 12% Geogebra 8% Máxima y 8% restante repartido entre: Derive, mathematica, Maple y Matlab.

2. ¿Está de acuerdo que los docentes impartan sus clases con un software de matemáticas, de tal forma, que los recursos tecnológicos permitan dinamizar, visualizar y conjeturar en la resolución de problemas? El 100% estuvo de acuerdo con la pregunta.

En cuanto a la prueba diagnóstica la idea fue conocer en qué condiciones se encontraban los alumnos que cursaban por primera vez la asignatura de álgebra lineal y otros que iban a cursarla por más de una vez; se caracterizó cuatro variables en condiciones iniciales. Los resultados muestran un porcentaje del 12% del número de respuestas correctas con el Geogebra, es decir el 88% de los alumnos evaluados coincidían en afirmar que no conocían este tipo de software para dar respuesta a los interrogantes

Se puede inferir que, en términos generales, que los estudiantes a pesar de conocer algún software matemático, no sabían cómo funcionaba para la resolución de los problemas.

Las variables que caracterizan las condiciones iniciales Ci tales como: número de respuestas correctas (X), números de conceptos correctamente manejados (Y), número de respuestas con software (Z) y número de conceptos que manejan mediante el uso de software (Q). El número de respuestas a los interrogantes del cuestionario Ci (Condiciones iniciales) por ítems según calificación obtenida se muestra en la tabla 24. La primera columna contiene la calificación del total de respuestas correctas e incorrectas, la segunda muestra el total de las respuestas de las cuatro variables, la tercera el número de respuestas (X), la cuarta el número de conceptos (Y), la quinta el número de respuesta con software (Q) y la sexta columna el número de conceptos con software.

Tabla 17. Caracterización de variables en condiciones iniciales

Calificación	Ítems del examen				
	Total variables	(X): Número de respuestas	(Y): Número de conceptos	(Z): Número de R con S	(Q): Número de C. con S
Total	132	33	33	33	33
Correctas	11	3	2	4	2
Incorrectas	121	30	31	29	31

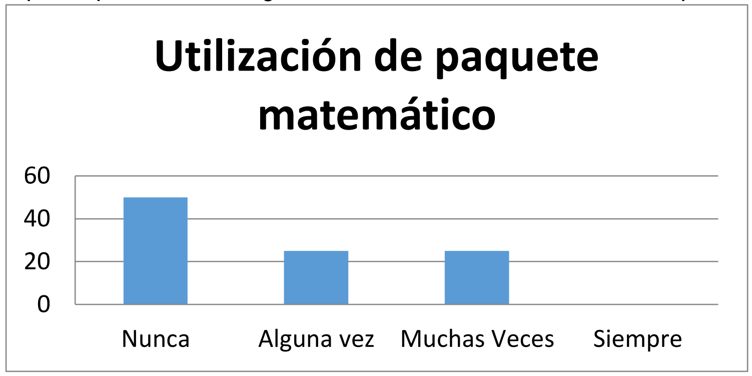
Estos resultados muestran que el uso de software en el proceso de resolución de problemas constituye un componente importante para el aprendizaje del álgebra lineal ya que los alumnos a través de explorar y visualizar algunas propiedades y conceptos pudieron plantear conjeturas y además, buscar aspectos invariantes que validaron los argumentos en la explicación de sus resultados caracterizados en condiciones finales.

Caracterización de variables establecidas en condiciones finales: esta fase incluye el diagnóstico permanente; es decir, está presente en todas las fases del modelo, su realización y análisis permitió conocer el estado actual de la situación existente respecto al interés de los estudiantes de ingeniería para mejorar en cuanto al conocimiento de algunos conceptos básicos del álgebra lineal, al considerar que el uso de software, puede servir como un aliado en las clases de matemática como quedó evidenciado en los resultados obtenidos.

Sobre las opiniones de docentes de Matemática

En una encuesta aplicada a 30 profesores que imparten la asignatura en la Universidad Distrital y en otras universidades

En una **primera parte** de la encuesta se les pregunto si utilizaban algún paquete matemático en los cursos de álgebra lineal que impartían. Los siguientes son los resultados de esta parte



Sobre la utilización de paquetes matemáticos. Fuente propia

La gráfica refleja que el 50% de los docentes no utiliza paquetes matemáticos en desarrollo de sus cursos.

La **segunda parte** de la encuesta corresponde si han realizado la implementación de algún modelo didáctico y otros aspectos relacionados. En los resultados se refleja que el 70% de los docentes nunca lo han implementado, llevar un texto guía, sobre la metodología tradicional y si está de acuerdo con el syllabus que lleva.

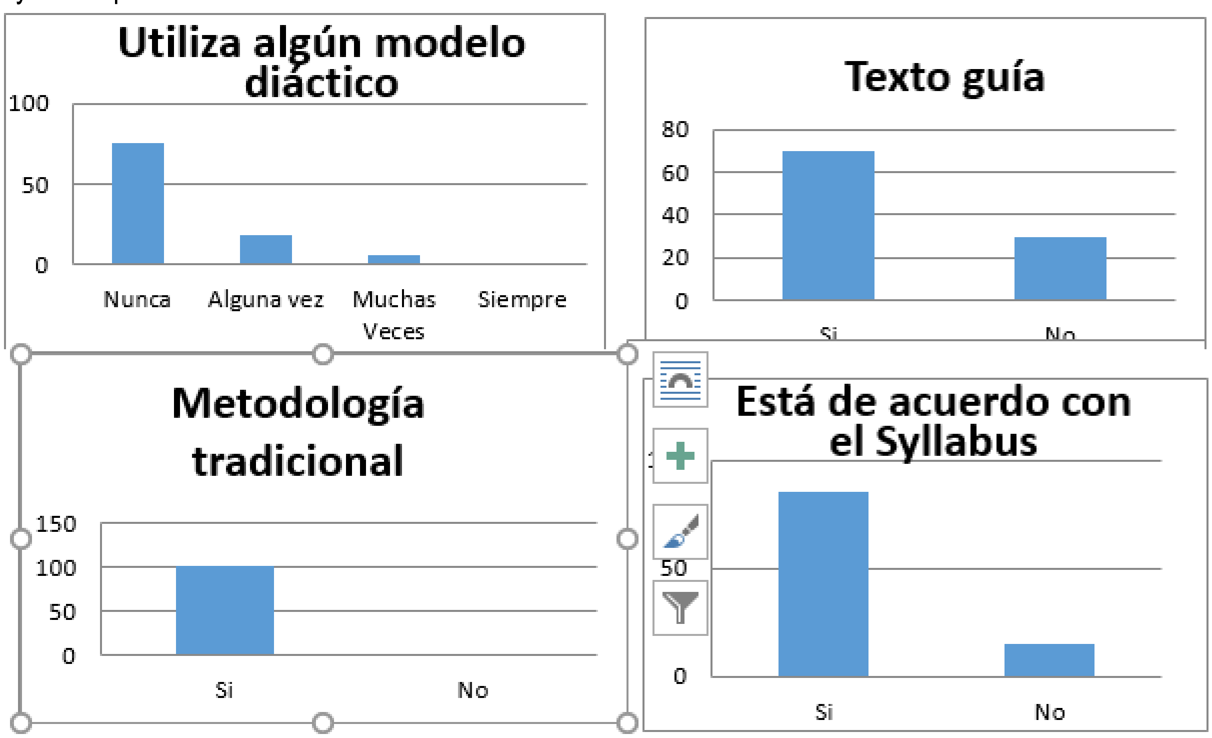


Gráfico9. Sobre metodología, texto guía y syllabus. Fuente propia

En la **tercera parte** de la encuesta se le pregunta:

¿Cuáles cree usted que son los principales problemas en el aprendizaje de los estudiantes en álgebra lineal?, Califique las características pertinentes para cada factor, siendo cinco (5) la calificación más alta y uno (1) la más baja. Si no tiene información que le permita calificar algún ítem no lo califique.

Características	1	2	3	4	5
1. Número de estudiantes por curso					
2. Calidad académica de los estudiantes					
3. Falta de estudio y disciplina por parte de los estudiantes.					
4. La metodología de enseñanza y aprendizaje.					
5. El tiempo del curso (6 horas semanales)					

Tabla18: Encuesta profesores

Los resultados se ven reflejados en las siguientes gráficas los que reflejan que los docentes si creen que el número de estudiantes por curso es una causa directa en el proceso de aprendizaje del álgebra lineal, así como la calidad académica de los estudiantes y la falta de estudio de estos.

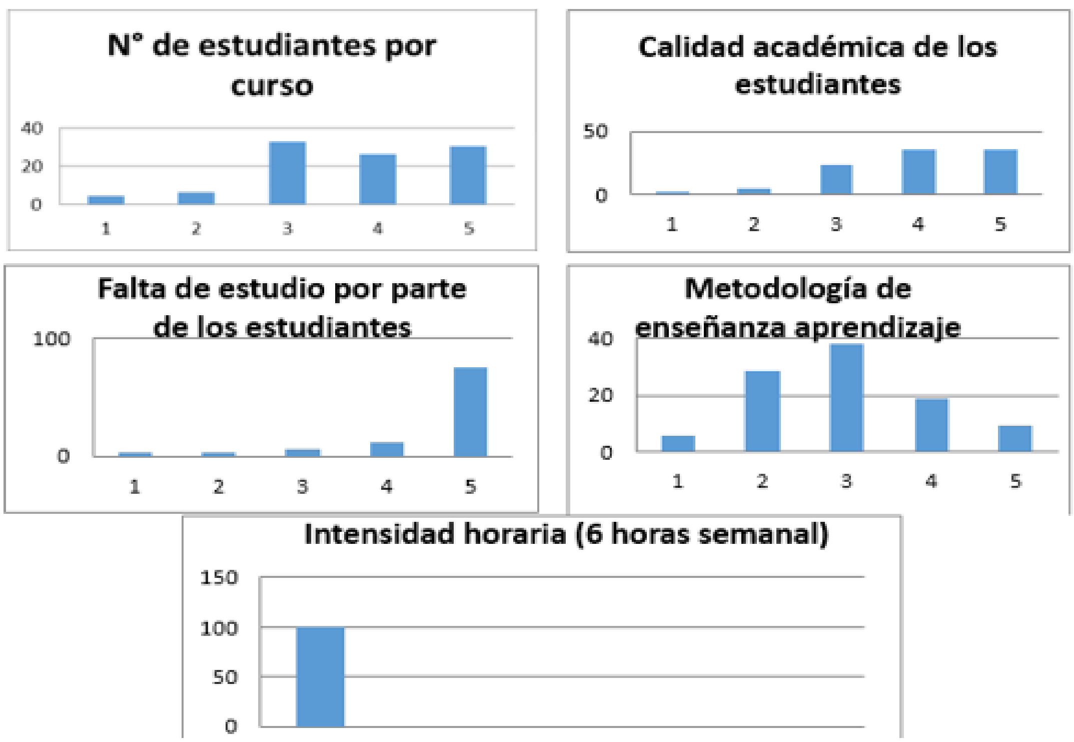


Gráfico10. Sobre características. Fuente propia

Anexo 2. Resultados de los exámenes finales conjuntos de Algebra Lineal de la Universidad Distrital

A continuación, se presentan los resultados de los exámenes conjuntos hechos por la facultad de ingeniería durante los últimos semestres, así como las estadísticas de la mortalidad académica de esta asignatura.

Las dos primeras gráficas corresponden a los porcentajes de estudiantes que aprobaron el examen final conjunto y los que pasaron la asignatura en el período 2013-1. En la universidad Distrital hay 15 grupos de álgebra lineal, los cuales están representados en el eje horizontal de las siguientes gráficas, en el eje vertical está el porcentaje de aprobados.

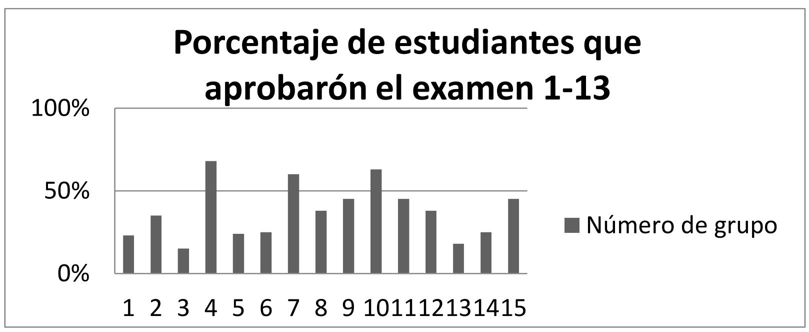


Gráfico 4. Porcentaje de estudiantes que aprobaron el examen 1-13. Fuente UD

Se observa que solamente en dos grupos de 15 más del 50% aprobó el examen. Los temas que se abarcaron en el examen fueron: matrices, determinantes, vectores, espacios vectoriales, transformaciones lineales y valores y vectores propios.

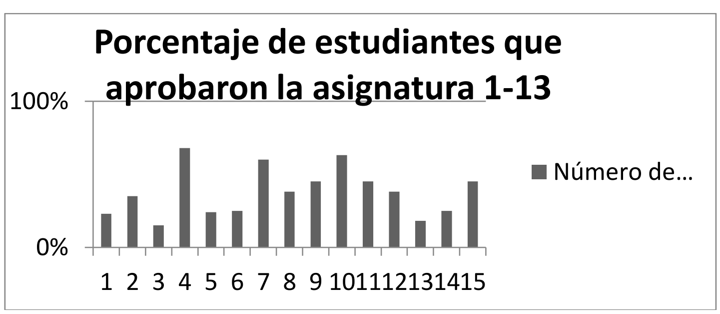


Gráfico 5. Porcentaje de estudiantes que aprobaron la asignatura 1-13. Fuente UD

En esta gráfica se observa que solamente en tres grupos de 15 más del 50% de los estudiantes pasó la asignatura.

A continuación, se observan las gráficas para el mismo ítem, pero del período 2014 período I,

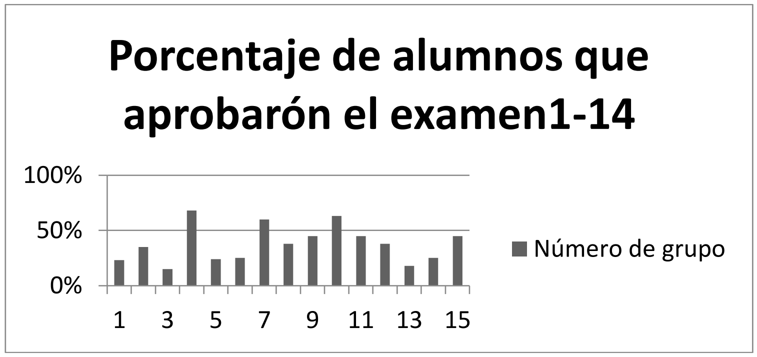


Gráfico 6. Porcentaje de estudiantes que aprobaron el examen 1-14. Fuente UD

Se observa que durante estos períodos solamente hubo tres grupos donde más del 50% los estudiantes aprobaron el examen mientras que la mortalidad académica sigue siendo bastante grande, como se ve reflejado en la siguiente gráfica,

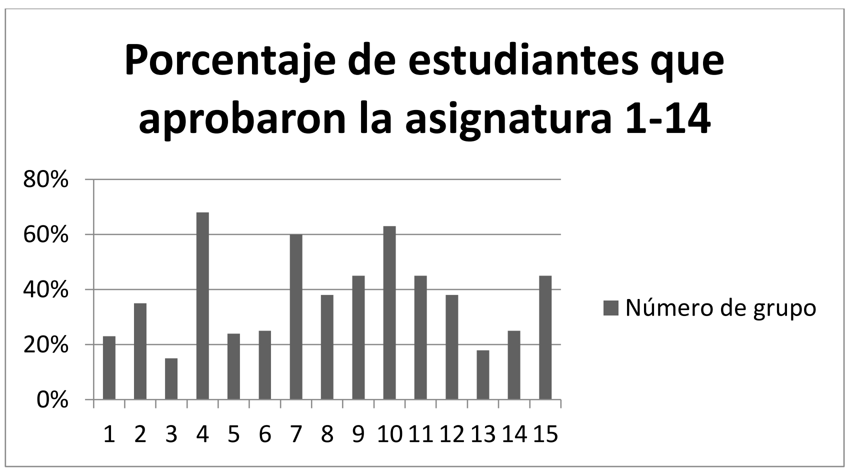


Gráfico7. Porcentaje de estudiantes que aprobaron la asignatura 1-14. Fuente UD

Anexo 3. Conjunto de actividades diseñadas e implementadas

Los títulos de las ocho actividades que conforman la implementación del estudio fueron:

Actividad 1. Sistemas de ecuaciones lineales

Actividad 2: Matrices

Actividad 3: Determinantes

Actividad 4. Vectores

Actividad 5. Espacios y subespacios vectoriales

Actividad 6. Dependencia e independencia lineal

Actividad 7. Base y Dimensión

Actividad 8. Espacio nulo, espacio columna y rango

No se explicita el contenido de cada uno de los problemas, toda vez que están presentados en el capítulo IV.

Anexo 4. Encuestas a docentes para la selección de expertos

Nombre y apellidos: ____.

Usted ha sido seleccionado como posible experto para ser consultado respecto al grado de relevancia de un modelo didáctico que presumiblemente debe servir para ayudar a mejorar el proceso de aprendizaje y a los profesores a la hora de impartir los temas de álgebra lineal.

Necesitamos antes de realizarle la consulta correspondiente como parte del método empírico de investigación *"consulta a expertos",* determinar su coeficiente de competencia en este tema, a los efectos de reforzar la validez del resultado de la consulta que posteriormente le realizaremos. Por esta razón le rogamos que responda las siguientes preguntas de la forma más objetiva que le sea posible.

1.- Marque con una cruz (X), en la tabla siguiente, el valor que se corresponde con el grado de conocimientos que usted posee sobre el tema: **"UN MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA LINEAL"**.

Considere que la escala que le presentamos es ascendente, es decir, el conocimiento sobre el tema referido va creciendo desde 0 hasta 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2.- Realice una autovaloración del grado de influencia que cada una de las fuentes que le presentamos a continuación, ha tenido en su conocimiento y criterio sobre **"UN MODELO DIDÁCTICO PARA EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA LINEAL".**

Marque con una cruz (X), según corresponda, en **A** (alto), **M** (medio) o **B** (bajo).

Fuentes de argumentación.	Grado de influencia de cada una de las fuentes.		
	A(alto)	**M**(medio)	**B**(bajo)
Análisis teóricos realizados por usted.			
Su experiencia obtenida.			
Trabajo de autores nacionales.			
Trabajo de autores extranjeros.			
Su propio conocimiento del estado del problema en el extranjero.			
Su intuición.			

Muchas gracias.

Anexo 5. Resultado de la encuesta a docentes para la selección como expertos

-------- Bajo
-------- Medio
-------- Alto

No	K_c	K_a	$K = \frac{K_c + K_a}{2}$ Coeficiente de Competencia	Categorías
1	0,9	1	0.95	Alto
2	0,9	1	0.95	Alto
3	0,8	1	0.95	Alto
4	0,8	1	0.95	Alto
5	0.9	0.9	0.9	Alto
6	0,8	0,9	0.9	Alto
7	0.9	0.9	0.9	Alto
8	0,8	0,9	0.85	Alto
9	0,8	0,9	0.85	Alto
10	0,8	0,9	0.85	Alto
11	0,8	0,9	0.85	Alto
12	0,7	0,9	0,8	Medio
13	0,7	0.8	0,75	Medio
14	0,6	0,6	0,6	Bajo
15	0,5	0,7	0,6	Bajo
16	0,1	0.5	0,3	Bajo

Anexo 6. Encuesta a los expertos para la validación del modelo y procedimiento didáctico

Nombre y apellidos: ____.Institución a la que pertenece: ___________________________________.Cargo actual: ____________________________________. Calificación profesional, grado científico o académico: Profesor: __Licenciado:__.Especialista: ___Master:___ Doctor:___. Años de experiencia en el cargo: ___. Años de experiencia académica: _____.

Como parte del tema de tesis de Doctorado en Educación Matemática se ha elaborado un modelo didáctico para favorecer y un procedimiento metodológico para el perfeccionamiento de la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en las carreras de ingenierías.

Explicación del modelo didáctico y del procedimiento metodológico propuesto y para los cuales queremos consultarle su opinión

El modelo didáctico pensado consta de **cuatro fases** fundamentales interrelacionados entre sí: **fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal** como **primera fase**, en la **segunda fase** se encuentra el **diagnóstico** a realizar al grupo antes del comienzo del estudio, que es quien permite la concepción de un modelo que aproxime una posible solución al problema mediante y el razonamiento plausible, está formado por dos procesos: la **instrumentalización,** que permite explorar cada comando del software con los conocimientos previos del estudiante, mientras que el proceso de **instrumentación** tiene que ver con la aplicación práctica de aquellos comando en la solución de los problema que forma parte de una determinada actividad. Ambos procesos se conocen como **mediación instrumental** y deben dar lugar a una visualización e interpretación geométrica de propiedades.

Los **elementos mediadores** constituyen la **tercera fase**, los cuales son factores que deben acelerar la solución de las contradicciones que justifican este tema de investigación; que, con la aplicación de un **procedimiento metodológico de carácter heurístico,** interrelacionan el modelo didáctico en su implementación práctica, como el **cuarta** y última fase.

Este modelo parte de la integración de elementos sistematizados en la **fundamentación teórica**, en los que descansa la **resolución de problema** como **soporte didáctico** y **metodológico**, la **mediación instrumental** hace parte de los niveles cognitivos de aprendizaje a través de los recursos de un software, en este caso el Geogebra.

En la fase de diagnóstico subyace el resultado del uso del software, formado por dos categorías, las **condiciones iniciales** antes de aplicar el procedimiento metodológico y **las condiciones finales** que después de aplicarlo se comprueba si el procedimiento metodológico determina la capacidad de los estudiantes para visualizar y dar respuestas correctas en la compresión de las propiedades de problemas del álgebra lineal.

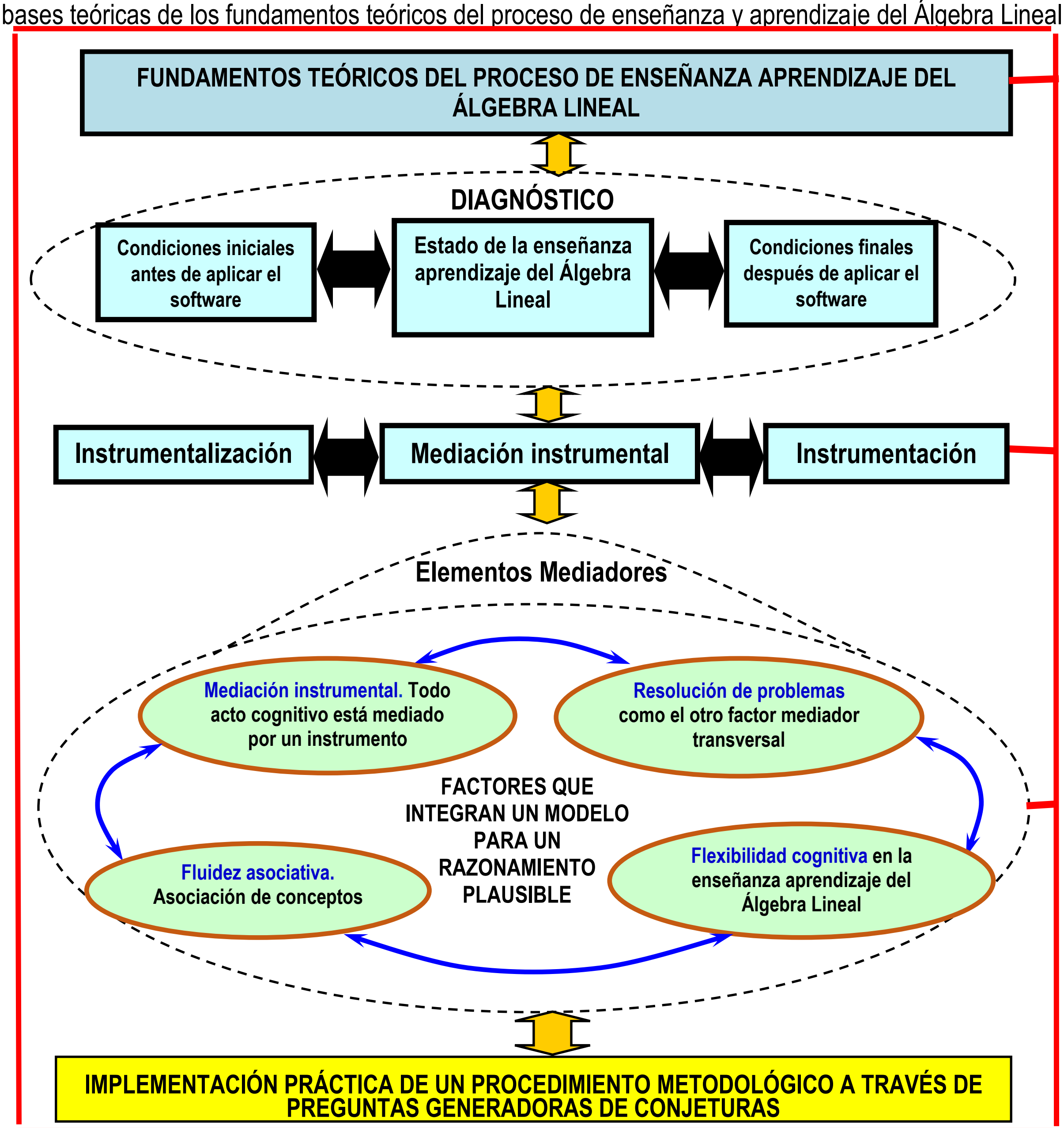
El principio de mediación instrumental, la **flexibilidad cognitiva** y **fluidez asociativa**; así como, la **resolución de problema**s son los factores que integran la dimensión del **modelo didáctico** que actúan como aceleradores de la solución de la contradicción, que son los que dan sentido y justifican este tema de investigación.

El modelo relaciona directamente a los estudiantes de ingeniería de la Universidad Distrital de Bogotá, Colombia, presenta los referentes teóricos que favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal y que soportó el procedimiento heurístico, como la implementación práctica del modelo.

Presentación del modelo didáctico para la enseñanza del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible

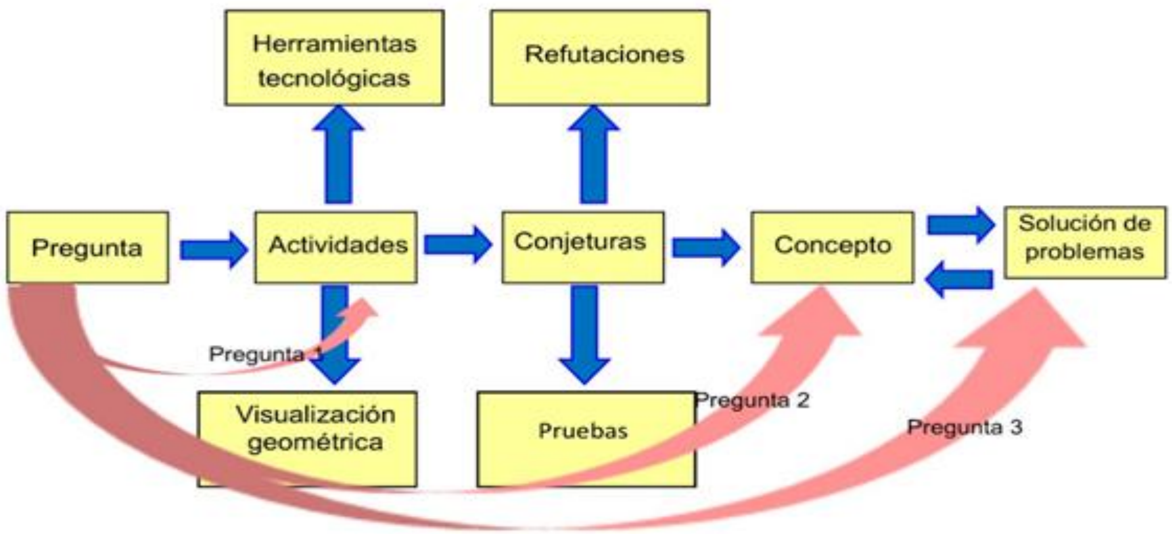
La presentación del modelo didáctico propuesto, es una representación práctica ideal al tratamiento del conjunto de actividades y acciones con carácter organizado e integrado del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal.

Este modelo que se pretende diseñar para este trabajo está basado en la **escuela cuasi-empírica de las matemáticas** liderada por Lakatos y Polya, con fundamentos cognitivos y de aprendizaje basados en el **constructivismo** y la **reflexión cognitiva**, pero además se tiene considerar la **visualización** y el uso de la **tecnología como herramientas didácticas**. Todo lo anterior en su conjunto constituye las bases teóricas de los fundamentos teóricos del proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.



Presentación de un procedimiento metodológico soportado por preguntas generadoras de conjeturas

A continuación, se le presenta el procedimiento metodológico heurístico soportado en preguntas que deben generar conjeturas y así contribuir al perfeccionamiento de la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en las carreras de Ingeniería.



Descripción gráfica de un aprendizaje por preguntas generadoras de conjeturas

Este enfoque está orientado a que los estudiantes piensen de manera sistemática para llegar a soluciones razonables de un problema, está centrada en el estudiante y se basa en problemas, por lo tanto, cada tema debe estar orientado hacía el concepto que el profesor quiere que el estudiante aprenda. Así, se deben elaborar cuidadosamente preguntas para que el estudiante desarrolle ideas en su interior evitando las preguntas triviales.

Aspectos que influyen para que se use este enfoque es una mejor actitud y aprovechamiento de los estudiantes ya que facilita la comprensión y el descubrimiento matemático, además como este enfoque está centrado en el estudiante, permite una participación más activa de estos, en la adquisición de conceptos, también ayuda a desarrollar el pensamiento crítico, facilita la capacidad para resolver problemas y por lo tanto otorga mayor habilidad en el desarrollo de procesos matemáticos.

Si en este momento ya comprendió las explicaciones anteriores, entonces ya está listo para responder esta encuesta.

INDICACIONES PARA DILIGENCIAR LA ENCUESTA:

Su opinión con relación a los aspectos siguientes es de suma importancia:

- Grado de relevancia de las fases y componentes del modelo didáctico para el perfeccionamiento de la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal en las carreras de Ingeniería.
- Grado de pertinencia del procedimiento metodológico a través de preguntas generadoras de conjeturas.
- Sugerencias de cambios de denominación de las fases y componentes propuestos, cuyo grado de relevancia, se somete a su consideración.

Le presento dos tablas que contienen las fases y componentes del modelo y del procedimiento didáctico descritos anteriormente para que las califique. A la derecha aparece la escala:

MA: Muy adecuado.**BA:** Bastante adecuado. **A:** Adecuado.**PA:** Poco adecuado. **NA:** No adecuado.

1. Marque con una cruz (X) en la celda que corresponda con el grado de relevancia que usted considere en cada fase y componente de la propuesta del modelo y procedimiento didáctico. Se le agradece de antemano el esfuerzo para responder, con la mayor fidelidad posible a su manera de pensar la presente encuesta.

Fase o componente del modelo didáctico	**MA**	**BA**	**A**	**PA**	**NA**
Fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal					
Diagnóstico					
Elementos mediadores					
Fase o componente del procedimiento metodológico	**MA**	**BA**	**A**	**PA**	**NA**
Preguntas generadoras de conjeturas					
Tres niveles de preguntas					
Herramientas tecnológicas para la visualización					

2. Si su respuesta fue marcada **PA** o **NA**, entonces escriba a continuación que fase o componente considera que deben ser incluidos o eliminados en esta propuesta:

Fase o componentes que se proponen ser incluidos	**Fase o componentes que se proponen ser eliminados**

3. Si su respuesta fue marcada **A,** entonces señale a continuación, si considera que el nombre de alguno de las fases o componentes de la propuesta, debe ser cambiado:

La fase o componente aparece como	**La fase o componente debe ser cambiado por**

Otra sugerencia que usted desee hacer sobre la propuesta del modelo y/o procedimiento para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal.

Anexo 7. Tablas de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas

<table>
<tr><th colspan="8">Tabla de frecuencias absolutas</th></tr>
<tr><th colspan="3">Modelo didáctico para la enseñanza del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible</th><th>MA</th><th>BA</th><th>A</th><th>PA</th><th>NA</th></tr>
<tr><th>FASES</th><th colspan="2">COMPONENTES</th><th colspan="5"></th></tr>
<tr><td rowspan="7">Primera
De los componentes del Modelo Didáctico</td><td colspan="2">Fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal.</td><td>12</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diagnóstico</td><td>Condiciones iniciales antes de aplicar el software</td><td>8</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Condiciones finales después de aplicar el software</td><td>8</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Elementos mediadores</td><td>Mediación instrumental</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Resolución de problemas</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Flexibilidad cognitiva</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Fluidez asociativa</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Segunda
De los componente del Procedimiento heurístico</td><td colspan="2">Preguntas generadoras de conjeturas</td><td>11</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tres niveles de preguntas</td><td>10</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Herramientas tecnológicas para la visualización</td><td>11</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="8">Tabla de frecuencias absolutas acumuladas</th></tr>
<tr><th colspan="3">Modelo didáctico para la enseñanza del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible</th><th>MA</th><th>BA</th><th>A</th><th>PA</th><th>NA</th></tr>
<tr><th>FASES</th><th colspan="7">COMPONENTES</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Primera
De los componentes del Modelo Didáctico</td><td colspan="2">Fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal.</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diagnóstico</td><td>Condiciones iniciales antes de aplicar el software</td><td>8</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Condiciones finales después de aplicar el software</td><td>8</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Elementos mediadores</td><td>Mediación instrumental</td><td>6</td><td>10</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Resolución de problemas</td><td>6</td><td>10</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Flexibilidad cognitiva</td><td>6</td><td>10</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Fluidez asociativa</td><td>6</td><td>10</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Segunda
De los componente del Procedimiento heurístico</td><td colspan="2">Preguntas generadoras de conjeturas</td><td>11</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tres niveles de preguntas</td><td>10</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Herramientas tecnológicas para la visualización</td><td>11</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td></tr>
</table>

Anexo 8. Distribución de frecuencias relativas acumuladas

<table>
<tr><th colspan="8">Valoración cuantitativa del modelo didáctico</th></tr>
<tr><th colspan="3">Modelo didáctico para la enseñanza del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible</th><th>MA</th><th>BA</th><th>A</th><th>PA</th><th>NA</th></tr>
<tr><th>FASES</th><th colspan="7">COMPONENTES</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Primera
De los componentes del Modelo Didáctico</td><td colspan="2">Fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal.</td><td>0,9</td><td>0,9</td><td>0,9</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Diagnóstico</td><td>Condiciones iniciales antes de aplicar el software</td><td>0,6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Condiciones finales después de aplicar el software</td><td>0,6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Elementos mediadores</td><td>Mediación instrumental</td><td>0,5</td><td>0,8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Resolución de problemas</td><td>0,5</td><td>0,8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Flexibilidad cognitiva</td><td>0,5</td><td>0,8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Fluidez asociativa</td><td>0,5</td><td>0,8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Segunda
De los componente del Procedimiento heurístico</td><td colspan="2">Preguntas generadoras de conjeturas</td><td>0,9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tres niveles de preguntas</td><td>0,8</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Herramientas tecnológicas para la visualización</td><td>0,9</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Anexo 9. Tabla de determinación de los puntos de corte

Función recíproca de la distribución normal para la determinación de los puntos de corte o límites										
Modelo didáctico para la enseñanza del álgebra lineal centrado en el razonamiento plausible			MA	BA	A	PA	NA	Suma	Prom (Prm)	N-Prm
FASES	COMPONENTES									
Primera De los componentes del Modelo Didáctico	Fundamentos teóricos del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal		1,48	1,48	1,48	4,09	4,09	12,62	2,52	0,85
	Diagnóstico	Condiciones iniciales antes de aplicar el software	0,44	4,09	4,09	4,09	4,09	16,80	3,36	-0,26
		Condiciones finales después de aplicar el software	0,44	4,09	4,09	4,09	4,09	16,80	3,36	-0,26
	Elementos mediadores	Mediación instrumental	0,31	1,04	4,09	4,09	4,09	13,72	2,74	0,36
		Resolución de problemas	0,31	1,04	4,09	4,09	4,09	13,72	2,74	0,36
		Flexibilidad cognitiva	0,31	1,04	4,09	4,09	4,09	13,72	2,74	0,36
		Fluidez asociativa	0,31	1,04	4,09	4,09	4,09	13,72	2,74	0,36
Segunda De los componentes del Procedimiento heurístico	Preguntas generadoras de conjeturas		1,48	4,09	4,09	4,09	4,09	17,84	3,56	-0,46
	Tres niveles de preguntas		1,04	4,09	4,09	4,09	4,09	17,40	3,48	-0,38
	Herramientas tecnológicas para la visualización		1,48	4,09	4,09	4,09	4,09	17,84	3,56	-0,46
SUMA			15,2	26,1	39,4	40,9	40,9	154,18	30.53	//////////
PUNTOS DE CORTE O LÍMITES			1,52	2,61	3,94	4,09	4,09	15,4	÷10	3.1
PROMEDIO DE PROMEDIOS = N			//////////	//////////	//////////	//////////	//////////	÷5 =	3.1	//////////

PUNTOS DE CORTE O LÍMITES

Todos valores los componentes del modelo y del procedimiento didáctico fueron consensuados de MUY ADECUADOS por los expertos

- ∞… MA	BA	A	PA	NA …∞
1,52	2,61	3,94	4,09	

Anexo 10. Encuesta y entrevista final a los estudiantes del estudio

Nombre y apellidos:__________________________________Carrera____________:

Estimado/a estudiante

Por favor, responda las preguntas que a continuación se plantean, las cuales están relacionadas con la metodología que se lleva a cabo en el curso de álgebra lineal, marcando al frente de cada una, la opción de respuesta elegida, de acuerdo a los siguientes criterios:

TA: totalmente de acuerdo, A: de acuerdo, N: ni de acuerdo ni desacuerdo: desacuerdo, TD: totalmente en desacuerdo.

	1-La metodología desarrollada en este curso implica mejor comprensión de los conceptos.
	2-El nivel de dificultad de los problemas es adecuado.
	3- El tiempo que se da para desarrollar cada actividad es suficiente.
	4- La metodología desarrollada es diferente a la que tradicionalmente se lleva a cabo en los
	5- La metodología desarrollada es más motivante.
	6- La metodología utilizada en el curso conlleva que usted descubra y conjeture conceptos del

Guía para la entrevista

1. ¿Cómo le ha parecido la metodología del curso?
2. ¿Cuáles son los aspectos que le han parecido más positivos de esta metodología?
3. ¿Puede describir algún problema o situación del curso que le ha llamado fuertemente la atención?
4. ¿Qué aspectos considera usted se deben mejorar en esta propuesta metodológica?
5. ¿Qué diferencias encuentra usted entre esta metodología y la de otros cursos de matemáticas que ha recibido en la universidad?
6. ¿Cuál cree que ha sido el aporte del curso en su formación como ingeniero?

Anexo 11. Información y aceptación de los estudiantes participantes de la investigación

Yo_______________________________________, estudiante de Ingeniería ___________________de la Universidad Distrital, identificado con el código ________________acepto participar voluntariamente en el estudio "un modelo metodológico para la enseñanza del álgebra lineal a través del razonamiento plausible", liderado por el docente investigador Orlando García Hurtado.

Me han informado que el objetivo general del estudio es "Implementar un modelo didáctico para mejorar los factores que inciden negativamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería de la Universidad Distrital".

También me han informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso de álgebra lineal, debo responder algunos instrumentos y entrevistas semiestructuradas que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las entrevistas semiestructuradas serán grabadas en audio. Además, se realizarán video grabaciones de todas las clases en las que se desarrollara la investigación, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que sea han expresado.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto puedo contactar al docente investigador Orlando García Hurtado a través del correo ogarcia68@gmail.com.

En constancia firmo a los ____ días del mes de ____________________________de 2017.

Anexo 12. Syllabus del curso de álgebra lineal de la Universidad Distrital

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS
FACULTAD DE INGENIERIA
SYLLABUS (2017)
FACULTAD DE INGENIERIA

NOMBRE DEL DOCENTE:
DOCENTES DE MATEMÀTICAS FACULTAD DE INGENIERÌA

ESPACIO ACADEMICO (Asignatura): Algebra Lineal. **Obligatorio (x) : Básico (x) Complementario ( )** **Electivo ( ) : Intrínsecas ( ) Extrínsecas ( )**	**CÓDIGO: 9**
NUMERO DE ESTUDIANTES: 35	**GRUPO:**

NUMERO DE CREDITOS: Tres 3

TIPO DE CURSO: TEÓRICO PRÁCTICO TEO-PRAC:
Alternativas metodológicas: Clase Magistral (X), Seminario ( ), Seminario – Taller ( ), Taller (X), Prácticas ( ), Proyectos tutorados (X), Otro: ____________________

HORARIO:

DIA	**HORA**	SALON

I. JUSTIFICACION DEL ESPACIO ACADEMICO
Se requiere contribuir a la formación de profesionales, de tal forma que les permita la aplicación coherente a la solución de problemas propios del área de formación y la satisfacción de necesidades personales, sociales y empresariales. La apropiación y perfeccionamiento continuo de los conocimientos y habilidades requeridos para un mejor desempeño en sus respectivas especialidades, lo cual repercutirá en formación, responsabilidades y funciones laborales. La matemática posibilita la comprensión de algunos secretos de la naturaleza, cuyo conocimiento contribuye de manera importante a la cultura humana, por cuanto su dominio hace que se capte el mundo y se interrelacione con los avances de la cultura moderna, la estructura política y económica de la sociedad y en el progreso tecnológico. El álgebra lineal proporciona al ingeniero herramientas teóricas sólidas. Su estudio fortalece el método de trabajo y la formación de un pensamiento lógico para entender las áreas de formación superior.

II. PROGRAMACION DEL CONTENIDO
OBJETIVO GENERAL
Ofrecer al estudiante de Ingeniería una visión global del algebra lineal, los fundamentos teóricos y aplicaciones, para que pueda modelar los diferentes problemas que surgen en sus cursos superiores y en su vida profesional.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
1. Analizar y plantear problemas de aplicaciones, que conducen a sistemas de de ecuaciones lineales.
2. Formular afirmaciones lógicas coherentes, esenciales para argumentar lo que se quiere demostrar.
3. Diferenciar las interpretaciones geométricas derivadas de conceptos vectoriales.
4. Utilizar los conceptos básicos del Álgebra Lineal para situaciones de la carrera.
5. Usar las nuevas tecnologías de información y de comunicación.

COMPETENCIAS DE FORMACION:
General: Se espera que a través del curso el estudiante domine e interprete el lenguaje matemático, desarrolle competencias genéricas instrumentales que le permitan diseñar, resolver y expresar situaciones que se presentan en su vida cotidiana y en el entorno profesional.
Específicas: Al finalizar el curso el estudiante:
1. Identifica los sistemas lineales homogéneos y no homogéneos, para relacionar, resolver y representar situaciones problémicas.
2. Define, interpreta y conceptualiza el concepto de matriz para representar situaciones de modelado por medio de lenguaje matemático.
3. Establece el concepto de espacio Vectorial, y lo utiliza para extender el concepto usado en Física.
4. Establece el concepto de transformación lineal, y relaciona el concepto para determinar la transformación asociada a una matriz.
5. Relaciona los conocimientos del algebra lineal con asignaturas como física, y modelos, y programación para solucionar problemas particulares que implican grados de abstracción.

PROGRAMA SINTETICO:
Unidades Temáticas

I. Matrice**s**
   1. Definición de matriz y clases de matrices
   2. Operaciones con matrices
   3. Matrices escalonadas y reducidas por filas
   4. Matriz inversa
   5. Determinante de una matriz y propiedades del determinante, Método de los cofactores para hallar el determinante de una matriz

II. Sistemas de Ecuaciones
   1. Eliminación Gaussiana
   2. Resultados sobre sistemas de ecuaciones e invertibilidad, Regla de Cramer para solucionar sistemas de ecuaciones

III. Vectores en R^2 y R^3
   1. Introducción a los vectores
   2. Norma de un vector y aritmética vectorial
   3. Producto punto, producto cruz y proyecciones ortogonales.
   4. Rectas y planos en el espacio

IV. Espacios vectoriales
   1. Definición de espacio vectorial y ejemplos.
   2. Subespacios, Independencia lineal.
   3. Base y dimensión, Espacio renglón, espacio fila y espacio nulo Rango y nulidad
   4. Definición de producto interior.
   5. Angulo entre dos vectores y ortogonalidad
   6. Bases ortonormales Proceso de Gram – Schmidt Matrices ortogonales

V. Transformaciones lineales
1. Definición de transformación lineal, Núcleo y recorrido.
2. Transformaciones lineales inversas
3. Representación matricial de transformaciones lineales

Autovalores y autovectores. Diagonalización.

III. ESTRATEGIAS

Se propone una estrategia metodológica para la enseñanza del álgebra lineal en carreras de ingeniería centrada en el razonamiento plausible, conceptos desarrollados por Polya (1954) y de Lakatos (1978), a través de la formulación y adaptación de problemas interesantes; cuyos diseños admitan un modelo didáctico y un procedimiento metodológico para la identificación de conjeturas a través de la mediación de la tecnología y la visualización geométrica como factores fundamentales en la identificación de los principales conceptos por parte de los estudiantes y que caracterizan esta disciplina.
Los estudiantes podrán disponer de espacios para asesoría por parte del profesor en los casos que así lo requieran.

	Horas			Horas Lectivas/sem	Horas Estudiante/sem	Total Horas Estudiante/sem	Créditos
Tipo de Curso	TD	TC	TA	(TD + TC)	(TD + TC +TA)	X 16 semanas	
Asignatura	4	2	6	6	9	144	3

Trabajo Directo (TD): Se desarrollará por parte del docente en clase presencial los contenidos mínimos del curso.
Trabajo Colaborativo (TC): Se desarrollarán semanalmente2 horas de clase alrededor de las temáticas trabajadas en la semana. Se sugiere desarrollar 2 o 3 proyectos a lo largo del semestre. En este espacio se espera que el docente oriente a los estudiantes en el desarrollo de su proyecto, resolviendo dudas, planteando inquietudes entorno a la temática del proyecto.
Trabajo Autónomo (TA):Trabajo del estudiante sin presencia del docente, que se puede realizar en distintas instancias: en grupos de trabajo o en forma individual, en casa o en biblioteca, laboratorio, etc.)

IV. RECURSOS

Medios y Ayudas: El curso requiere de espacio físico (aula de clase); Recurso docente, recursos informáticos (página de referencia del libro, CD de ayuda del mismo, Recursos bibliográficos y computadores (salas de informática).
Practicas específicas: Laboratorios sobre límites y derivadas a través de alguna herramienta informática.

V. BIBLIOGRAFIA:

TEXTOS Guías

Algebra lineal de Stalin Grossman. Séptima edición. Editorial MacGraw-Hill

[1] Algebra lineal de Gilbert Strang editorial Thomson. 4° edición
[2] Howard, Anton. *Elementary linear algebra.* Editorial Wiley. 11° edición
[3] Lay David. Linear algebra and its applications. Editorial Tomson. 4° Edition
[4] Apostol, Tom M. *Calculus.Vol. I*.segunda edición Ed. Reverté. Secciones:12.8,12.9,12.11,13.5,13.11 y 13.17.
[5] Nakos & Joyner. Álgebra Lineal con aplicaciones. Editorial Thomson 1999.

REVISTAS

[1] Revista Sociedad Colombiana de Matemáticas: http://www.emis.de/journals/RCM/revistas.html

DIRECCIONES DE INTERNET

www.matematicas.net
www.dudasmatematicas.com.ar

VI. EVALUACION

ASPECTOS A EVALUAR DEL CURSO

1. Evaluación del desempeño docente
2. Evaluación de los aprendizajes de los estudiantes en sus dimensiones: individual/grupo,
3. Teórica/práctica, oral/escrita.
4. Autoevaluación.
5. Coevaluación del curso: de forma oral entre estudiantes y docente

PRIMERA NOTA	TIPO DE EVALUACIÓN	FECHA	PORCENTAJE
SEGUNDA NOTA			
TERCERA NOTA			
EXAMEN FINAL	Examen Final conjunto con todos los grupos de la Facultad.		30%

VII. PROGRAMA COMPLETO

Semana	Unidades y temáticas
1	Sistemas de ecuaciones lineales Eliminación de Gauss-Jordan
	Sistemas de ecuaciones homogéneos
2	Vectores y matrices Operaciones de suma
	Producto vectorial y matricial
3	Matrices y sistemas de ecuaciones lineales
	Traspuesta de una matriz
4	Inversa de una matriz
	Determinantes
5	Propiedades de los determinantes
	Determinantes e inversas- Regla de Cramer
6	Vectores en el plano
7	Vectores en R3. Producto cruz
	Producto cruz
8	Rectas y planos
9	Espacios vectoriales
10	Subespacios vectoriales
11	Combinación lineal e Independencia lineal
12	Bases y dimensión
13	Rango de una matriz
	Coordenadas y cambio de base
14	Transformaciones lineales: Inyectivas, sobreyectivas e inversa.
	Núcleo e imagen de un TL
	Matriz de una T.L
15	Valores propios y vectores propios
	Diagonalización
16	Diagonalización de matrices simétricas