REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

TRANSICIÓN DE LA MATEMÁTICA DE LA ESCUELA SECUNDARIA A LA DE LA UNIVERSIDAD A TRAVÉS DEL ÉNFASIS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Tesis presentada como requisito para optar al título de candidato a Doctor en Educación Matemática

Mg. Renne Andrés Peña Moreno

Bogotá D.C.

2017

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

TRANSICIÓN DE LA MATEMÁTICA DE LA ESCUELA SECUNDARIA A LA DE LA UNIVERSIDAD A TRAVÉS DEL ÉNFASIS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Tesis presentada como requisito para optar al título de candidato a Doctor en Educación Matemática

Mg. Renne Andrés Peña Moreno

DIRECTOR:

Dr. Rafael Sánchez Lamoneda

Bogotá D.C.

2017

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. octubre 21 de 2017.

Agradecimientos

Mi más sincero y profundo agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Rafael Sánchez Lamoneda, en primer lugar por haber aceptado dirigir mi investigación y en segundo lugar porque gracias a sus orientaciones y aportes logre culminar exitosamente mi tesis Doctoral. ¡Muchas gracias mi Doc!

A la Dra. Mary Falk de Losada, expresarle como siempre mi admiración, respeto y aprecio, le estaré eternamente agradecido. Dra. Mary gracias por confiar en mis capacidades y darme la oportunidad de vincularme con la Universidad Antonio Nariño y así poder cumplir mi más grande sueño que es ser Doctor en Educación Matemática.

Altamente agradecido con el equipo docente del programa de Doctorado por sus aportes y sugerencias dadas en los talleres de tesis, en especial al Dr. Gerardo Chacón.

A mi amigo el Dr. Jader Cortes, porque gracias a sus contribuciones en el campo de la matemática fue posible culminar otra etapa de vida profesional y académica.

A mi amigo el Mg. Nelson Sánchez por su apoyo incondicional.

A la Universidad Antonio Nariño, por permitirme realizar la presente.

Dedicatoria

A Dios.

Por brindarme todos los medios para poder culminar mis estudios como Doctor en Educación Matemática, ya que ha sido el logro más importante en mi vida personal y profesional.

A mi madre María del Carmen Moreno.

Por el amor incondicional que siempre me ha brindado, porque sin su esfuerzo y dedicación nunca hubiese podido alcanzar todos mis sueños. Siempre te llevare en mi corazón.

A mi esposa Lady Paola Osorio.

A mi esposa por ser mi fuente de inspiración, por creer siempre en mí, porque sin su apoyo incondicional no podría haber culminado exitosamente esta nueva meta que hoy culmino. Gracias amor.

A mis hijas Alejandra y Laura.

Espero que este nuevo logro académico y profesional les sirva como fuente de inspiración para luchar por todas sus metas y recuerden que siempre se puede ir más allá de sus propios sueños. Las quiero mucho.

SÍNTESIS

Es bien conocido que la transición que usualmente se da entre la matemática de la escuela secundaria (predominantemente procedimental) y la matemática universitaria (estructurada por definiciones, teoremas y demostraciones), demanda un profundo cambio en las formas de entender y pensar en matemáticas, que pocos estudiantes logran evitar sin sobresaltos. Varios estudios muestran que el estudiante con frecuencia se enfrenta a las nuevas demandas tratando de memorizar definiciones y demostraciones sin apropiarse de las nuevas teorías y desconociendo como puede aprovechar las nuevas formas de pensar matemáticamente.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, en la presente tesis se implementa un modelo didáctico para favorecer la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad con base en la resolución de problemas retadores como herramienta didáctica. De este modo los resultados prácticos experimentales obtenidos en la investigación demuestran la validez de las bases teóricas desarrolladas y su aplicabilidad en la escuela secundaria y universitaria al conseguir un mejor entendimiento de las matemáticas elementales y a su vez un desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.

El desarrollo de la investigación se realiza en el contexto de la clase de matemáticas de la escuela secundaria y el curso de solución de problemas matemáticos impartido en la Universidad Antonio Nariño y en él se emplean y se formulan problemas retadores como herramienta didáctica de aprendizaje, para enriquecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

ABSTRACT

It is well known that the transition between high school mathematics (predominantly procedural) and university mathematics (structured by definitions, theorems and proofs) demands a profound change in the ways of understanding and thinking in mathematics which few students manage to avoid without shocks. Several studies show that the student often confronts the new demands by trying to memorize definitions and proofs without appropriating new theories and not knowing how to take advantage of new ways of thinking mathematically.

Based on the above considerations, this thesis implements a didactic model to favor the transition from high school to university mathematics based on the solution of challenging problems as a didactic tool. In this way the experimental results obtained in the research demonstrate the validity of the theoretical bases developed and its applicability on the secondary and university levels by obtaining a better understanding of elementary mathematics and in turn a development of mathematical thinking in the student.

The development of the research is carried out in the context of the high school mathematics class and the mathematical problem solving course taught at the Antonio Nariño University in which challenging problems are used and formulated as a didactic learning tool in order to enrich the development of students' mathematical thinking.

TABLA DE CONTENIDO **PÁGINA**

INTRODUCCIÓN

Dentro del campo de la educación matemática, la resolución de problemas ha sido uno de los tópicos de investigación más productivo que ha existido puesto que es una línea amplia y que se trabaja desde la óptica de diversos modelos teóricos.

Las definiciones de problema que se han dado a lo largo de la historia de la matemática tiene que ver en gran medida con el aporte que realizaron cada uno de los investigadores que han trabajado en este campo.

Algunas de las definiciones de problema, más importantes, son las siguientes:

Newell y Simon (1972) definen problema como una situación en la cual un individuo desea hacer algo, pero desconoce el procedimiento o la acción necesaria para lograr lo que quiere.

Según Polya (1981) tener un problema significa determinar conscientemente una acción adecuada para lograr un objetivo claro pero no alcanzable en la inmediatez.

Chi, Feltovich y Glaser (1982) especifican como problema a una situación en la cual un individuo actúa con el propósito de alcanzar una meta utilizando para ello alguna estrategia en particular.

Krulik y Rudnik (1987) establecen que un problema es una situación que requiere una solución a la cual se enfrenta un individuo, y en la cual no se aprecia un método obvio que conduzca a la solución de la misma.

Labarrere (1988) propone que un problema es una determinada situación, en la que existen vínculos entre los conceptos que no son accesibles directamente al individuo.

Chacón, Farías, González y Poco (2009) definen un problema como una situación que requiere de una solución, pero para llevar a cabo esto el individuo debe estar motivado u obligado.

En educación matemática la resolución de problemas es una metodología de enseñanza empleada por los docentes con el propósito de mejorar la comprensión y el entendimiento del estudiante en el aula de clases, de este modo la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el estudio ICMI 16 (2006), denominado *"Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula"*[1] formula el siguiente planteamiento:

"*Algunos maestros utilizan problemas para desarrollar las ideas, el conocimiento y la comprensión que deben adquirir los estudiantes frente al material curricular; se puede decir que ellos están empleando un enfoque de solución de problemas*"[2].

La habilidad para resolver problemas, no necesariamente se adquiere resolviendo cuantiosas situaciones, sino proponiendo y conociendo diversas técnicas de resolución, y desarrollando y descubriendo los procesos de pensamiento matemático que se utilizan al resolver cada uno de ellos.

Descripción del problema

Es importante tener en cuenta que, debido a las actuales demandas de formación a nivel universitario, la solución de problemas podría ser una posible alternativa que responda a las exigencias generadas por una nueva cultura de aprendizaje, donde se aborden situaciones problemáticas y problemas matemáticos retadores, como método de enseñanza didáctico. En efecto uno de los propósitos de la solución de problemas matemáticos es desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad. Sobre la base de las consideraciones anteriores, no es suficiente proponer ejercicios en los que de alguna manera se pongan en práctica determinadas

[1] COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA. (2006) Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula. Recuperado en agosto 22 de 2014 de la URL: http://www.amt.edu.au/icmis16ddspanish.html
[2] Ibídem.

técnicas de solución ni crear una brecha infranqueable para el estudiante saltando a un tratamiento formal y rigoroso de la matemática que se debe aprender.

De este modo el objetivo de la enseñanza a nivel universitario, debe ser la formación de profesionales que tengan la capacidad de emplear en forma estratégica y competente los conocimientos que han adquirido en contextos inciertos y en continuo cambio. Es evidente entonces que no es suficiente que los estudiantes repitan los conocimientos que tienen de forma memorística, ni siquiera que sean capaces de comprender conceptualmente esos conocimientos. Lo realmente importante, es que tengan más bien la capacidad de emplear dichos conocimientos para analizar problemas en contextos en los cuales se encuentre presente la incertidumbre.

El nuevo enfoque del proceso de enseñanza a nivel universitario, debe apoyarse en nuevas formas de aprender, como lo hacen saber Pozo y Pérez (2009). Ellos declaran que la psicología del aprendizaje y la educación en la actualidad se pueden definir en términos de un aprendizaje constructivo teniendo en cuenta dos aspectos relevantes; el primero de ellos es el que se encarga de orientar el aprendizaje hacia la comprensión, en lugar de promover la repetición de lo aprendido; el segundo aspecto se encamina a fomentar el uso estratégico de los conocimientos ya adquiridos, de tal manera que les permita a los estudiantes afrontar la solución de problemas nuevos, en lugar de limitarse a aplicar esos conocimientos de manera rutinaria a ejercicios conocidos.

Como conclusión Pozo y Pérez (2009) afirman que "*Comprender y resolver problemas son de esta forma no sólo objetivos que debe buscar la enseñanza sino sobre todo nuevas formas de aprender sobre las que deben cimentarse esos nuevos enfoques de enseñanza universitaria*".[3]

[3] Pozo, J. y Pérez, M. (2009). Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias. Ediciones Morata, Madrid.

Pero los estudiantes que ingresan a las universidades colombianas se pueden caracterizar por no ser formados en una cultura de aprendizaje basada en la solución de problemas; dicha afirmación se puede evidenciar al verificar los resultados arrojados por el estudio PISA 2012, que permite comparar la educación colombiana con otros sistemas educativos. Con referencia a lo anterior se muestra la Tabla 1.

	Matemáticas	Lectura	Ciencias
Shanghái-China	613	570	580
Promedio OECD	494	496	501
Chile	423	441	445
México	413	424	415
Uruguay	409	411	416
Costa Rica	407	441	429
Brasil	391	410	405
Argentina	388	396	406
Colombia	376	403	399
Perú	368	384	373

Tabla 1. Resultados pruebas PISA 2012[4].

En los resultados de la prueba PISA 2012 es evidente como el desempeño de los estudiantes colombianos, particularmente en matemáticas, se mantiene por debajo del promedio de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD). En consecuencia, Colombia se ubica dentro de los últimos puntajes de América Latina, y, por tanto, del total de los países participantes. Como puede observarse, en matemáticas, 7 de cada 10 estudiantes colombianos se encuentran por debajo del nivel 2, considerado por la OCDE como el mínimo necesario para participar en una sociedad moderna, 3 de cada 100 se desempeñan en el nivel 4, es decir por encima del mínimo esperado, aunque no al nivel óptimo para la realización de actividades cognitivas complejas, y ninguno se encuentra en el

[4] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL DE COLOMBIA. (2013) PISA 2012: retos y avances para Colombia. La calidad continúa siendo la principal prioridad, Recuperado en agosto 22 de 2014 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-336001.html

nivel 6, donde los estudiantes se caracterizan por tener potencial para realizar actividades de alta complejidad cognitiva, científica u otras.

Debido a los resultados obtenidos por el estudio, se evidencia la necesidad de proponer un currículo colombiano en matemáticas más retador, de tal modo que se pueda integrar la resolución de problemas y se busque el desarrollo del pensamiento matemático. En ese mismo sentido De Losada (2011) en el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, afirma que hay que enfrentar dos aparentes paradojas que han aparecido en los últimos 15 años en el contexto de la educación matemática:

i. *En Singapur, el Ministerio de Educación ha pedido a los maestros que enseñen menos para que los estudiantes puedan aprender más.*

   Es claro que esta política desarrollada a nivel presidencial en Singapur toma resultados tanto de las teorías de aprendizaje como un entendimiento de la naturaleza de la matemática y del pensamiento matemático…el estudiante debe tener la oportunidad de desarrollar su pensamiento matemático, de modelar las situaciones matemáticas en términos que tienen sentido para él o ella, de resolver problemas que no sean repetitivos y rutinarios, sino que le exijan análisis, pensamiento y creatividad.

ii. *Para hacer frente a un alto nivel de fracaso en la matemática escolar, hemos propuesto que se desarrolle un currículo muchos más retador para todos los estudiantes donde se involucre la creatividad, la motivación y el reto*".[5]

De los anteriores planteamientos se puede deducir que, gracias a un currículo más retador y a la solución de problemas retadores, se puede llegar a propiciar una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. Dicha relación se definiría como un enriquecimiento mutuo

[5] Losada, M. (2011). XVIII Congreso nacional de matemáticas. *Paradoja: el papel que puede jugar en refinar las metas de la educación matemática*.

que se da entre el entendimiento de la matemática y el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante, siendo el mismo cíclico y dinámico a la vez.

Justificación

El estudiante que cursa el último grado de educación secundaria o el primer semestre de universidad, debe tener la oportunidad de encontrar una matemática más retadora, donde se ponga de manifiesto aspectos relevantes para su proceso de aprendizaje, como lo establece De Losada (2011). La investigadora propone que, al exponer al estudiante a un problema o situación matemática que este más allá de lo que alguna vez haya enfrentado, abre horizontes en el alumno para que tenga la capacidad de comprender el problema y pensar en él, es así como el maestro debe acompañar al estudiante para que halle nuevas formas de expresar sus pensamientos, progresos y soluciones.

De Losada (2011) manifiesta que existen razones suficientes para impulsar y renovar la educación matemática en Colombia, que aplica tanto a nivel de educación media como superior, lo cual significa que para llevar a cabo un verdadero giro en el proceso de enseñanza de la matemática es indispensable realizar una planeación cuidadosa de clase donde se propongan problemas originales y retadores utilizando representaciones no estándar. De este modo se puede neutralizar el alejamiento que algunos sectores han intentado establecer, entre la matemática elemental y la matemática escolar.

Al tener en cuenta los anteriores argumentos, surge el siguiente **problema de investigación:**

¿Cómo favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad?

Objeto de estudio. El proceso de enseñanza y aprendizaje en la asignatura de matemáticas de grado once y de la asignatura de resolución de problemas matemáticos en el nivel terciario.

Se pretende determinar cómo la resolución de problemas retadores en matemáticas elementales puede dinamizar una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático, en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad. Se propone el siguiente:

Objetivo general

Determinar los contenidos y el sistema de actividades que debería tener un curso de solución de problemas, de tal manera que se pueda establecer una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad.

Objetivos específicos

- Caracterizar los niveles del pensamiento matemático en estudiantes del grado once y del primer semestre de la universidad, para favorecer una modelación didáctica que conduzca al desarrollo del pensamiento matemático.
- Implementar y validar un modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento que permita una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario.

Todo lo anterior direcciona el **campo de acción** como:

El proceso de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares y la asignatura de resolución de problemas en el nivel terciario, a través de problemas no rutinarios.

Así como también, permite formular la siguiente:

Hipótesis de investigación

Un modelo didáctico sustentado en la resolución de problemas no rutinarios de matemáticas elementales, en la heurística de Polya, en la visualización como herramienta didáctica, en el uso de la historia de las matemáticas y la comunidad de práctica de Wenger, favorece la transición entre la matemática de la escuela secundaria a la universitaria en alumnos de grado once y del primer semestre de la Universidad, propiciando a su vez una relación dinámica y positiva entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Tareas de investigación

1. Determinar los fundamentos teóricos y conceptuales que debe tener un curso de matemáticas de grado once y otro de solución de problemas matemáticos a nivel universitario, de tal manera que pueda dinamizar una relación fructífera entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad.
2. Diseñar un modelo didáctico centrado en la heurística de Polya que pueda dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la matemática escolar y la universitaria.
3. Diseñar un sistema de actividades para el aprendizaje centradas en el modelo didáctico que propone la heurística de Polya, las cuales deben desarrollar el pensamiento matemático del estudiante que realiza la transición entre la matemática escolar y la universitaria.
4. Aplicar el sistema de actividades propuesto en el curso de matemáticas de grado once en el colegio José María Carbonell y en la cátedra de solución de problemas matemáticos en la Universidad Antonio Nariño con el propósito de validar la hipótesis de investigación.
5. Elaborar, analizar y contrastar el cuerpo de resultados obtenidos.
6. Formular conclusiones y recomendaciones de investigación.

Aportes

El **aporte práctico** consiste en:

Diseño de un curso de solución de problemas para estudiantes de grado once y otro para estudiantes universitarios.

Generación de un sistema de actividades que permita establecer una relación dinámica y positiva entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que cursan la escuela secundaria y la universidad.

El **aporte teórico** consiste en un modelo didáctico que informa el sistema de actividades que permita favorecer una relación dinámica y positiva entre el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de grado once y del nivel terciario, que propicie una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario.

El modelo didáctico se validará por medio de encuestas aplicadas a expertos en educación matemática que han tenido como metodología de trabajo en el aula la solución de problemas matemáticos. Para el procesamiento de los datos obtenidos en las encuestas se utilizará el método Delphi como técnica de validación estadística.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

Partiendo del hecho de establecer un estado del desarrollo de las investigaciones en educación que se han llevado a cabo en relación al desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición de la escuela secundaria a la universidad, se consultaron artículos de revistas especializadas de investigación en educación matemática y publicaciones de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) que permitan establecer el estado del arte a nivel mundial entorno al desarrollo de esta investigación.

1.1. Aprendizaje de la matemática de forma comprensiva[6]

El artículo propone una caracterización del entendimiento en matemáticas como una relación robusta que establece el estudiante en la cual se involucran nuevos conocimientos y aquellos que poseía previamente. Del mismo modo, plantea como uno de los objetivos que debe tener el docente de matemáticas en el aula de clase, que los estudiantes entiendan los conceptos matemáticos más relevantes. Es así como el entendimiento se considera eje fundamental en el proceso de aprendizaje, en ese sentido el estudiante al comprender un concepto, lo puede emplear de forma flexible ya sea adaptándolo para resolver un problema o usándolo como punto de partida para aprender otros nuevos conceptos o métodos.

Para los investigadores el entendimiento es una idea compleja, que no se obtiene de inmediato ni dura para siempre, por el contrario, es algo que evoluciona constantemente, que cambia y tiene un desarrollo en múltiples niveles. Por las consideraciones anteriores, la forma de poder caracterizar que un concepto fue interiorizado (entendido) consiste en que el individuo tiene la capacidad de relacionarlo con otros conceptos ya conocidos.

[6] Barrera, F. y Reyes, A. (2009). Learning mathematics with understanding. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Revista Electrónica de Investigación Educativa. Vol. 2, No. 3.

Es importante resaltar que las relaciones que se establecen en el entendimiento matemático deben estar bien estructuradas, esto se refiere a que deben posibilitar la profundización de ideas, conceptos y procedimientos. Con referencia a lo anterior cuando se promueve la realización de conexiones robustas, el conocimiento se organiza en redes conceptuales que permiten extenderlo.

De este modo Barrera y Reyes (2009) formulan la siguiente pregunta *¿cómo se construyen relaciones importantes durante el aprendizaje de las matemáticas?* Los autores sugieren que dichas relaciones se construyen por medio de procesos de reflexión y comunicación de ideas, las cuales se manifiestan durante el proceso de resolver y formular problemas matemáticos. En referencia a lo anterior, los investigadores conciben el concepto de problema como una situación en la que surgen elementos que propician el interés para hallar una posible solución, en el cual no se vislumbra un camino inmediato para abordar el problema y el estudiante puede encontrar varios caminos o métodos de solución.

Los autores del artículo afirman que el salón de clases también requiere de condiciones especiales para que los estudiantes realicen actividades matemáticas, tales como examinar, explorar, representar opiniones, determinar relaciones, formular y justificar conjeturas, establecer resultados y formular nuevos problemas.

Para finalizar Barrera y Reyes (2009) establecen que *"Algunos aspectos que se han identificado como relevantes en la construcción de un ambiente favorable para el aprendizaje con entendimiento ... son: (i) la naturaleza de las tareas, (ii) el papel del profesor, (iii) la cultura social del salón de clase, (iv) las herramientas matemáticas disponibles y (v) la equidad o accesibilidad".*[7]

En conclusión, los investigadores proponen que, para poder propiciar un ambiente favorable para el entendimiento se requiere un profesor que tenga conocimientos sólidos en matemáticas, didáctica y

---

[7] Barrera, F. y Reyes, A. (2009). Learning mathematics with understanding. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Revista Electrónica de Investigación Educativa. Vol. 2, No. 3.

epistemología. También sugieren que se encuentran estrechamente relacionadas las características que debe tener un aula de clases que promueve el entendimiento, por este motivo no se puede centrar la atención en una sola de ellas, por el contrario, todas son primordiales para lograr que los estudiantes entiendan matemáticas. Por último, afirman que el contexto social y las características de cada uno de los estudiantes determinan cuáles son las tareas y herramientas que se debe utilizar para favorecer en él un aprendizaje con entendimiento.

Se considera de muy apreciable interés para el desarrollo de la tesis los aspectos referidos en la anterior investigación.

1.2. Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático[8]

En este artículo, se hace referencia a los resultados obtenidos en la investigación llevada a cabo por Cantoral, Montiel y Reyes. Los autores parten del hecho de que, para poder desarrollar el pensamiento matemático en el estudiante, los docentes deben cambiar lo que se está enseñando y no sólo cómo se está enseñando. En consecuencia, se generan y priorizan procesos de investigación – innovación en matemática educativa de modo que se problematicen los contenidos que se imparten en matemáticas. Después de lo expuesto anteriormente los autores de la investigación expresan que, al estimular el desarrollo del pensamiento matemático a través de diseños didácticos, se genera en los estudiantes una apropiación de los contenidos que se problematizan y los hace conscientes de que no se trata de ser bueno o malo en matemáticas, sino de participar y hacer matemáticas en el aula de clases.

En el orden de las ideas anteriores Cantoral, Montiel y Reyes (2014) precisan que una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático, requiere de una postura nueva respecto a la matemática escolar. Por ello es necesario generar alternativas de desarrollo profesional docente en las cuales los maestros deliberen e indaguen respecto a los fundamentos matemáticos de los que se derivan

[8] Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2014). *Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático*.

los algoritmos donde se reconozcan las distintas formas de argumentación. Sobre la base de las consideraciones anteriores los investigadores proponen que se privilegie la vida misma del estudiante, beneficiando la aparición de múltiples formas de abordar un mismo conocimiento matemático, donde el saber obtenga un estatus de funcional.

Por ultimo Cantoral, Montiel, y Reyes (2014) señalan que "*Es por ello que las experiencias de formación docente que se han fundamentado en la teoría socio epistemológica comienzan por la organización de escenarios didácticos donde el profesor confronta su dominio de conocimientos, es decir, lo que ha aprendido, enseña y busca que aprendan sus estudiantes."*[9]

En la presente tesis se coincide con los criterios de los autores en relación a que el desarrollo del pensamiento matemático depende de cambiar lo que se está enseñando y no sólo cómo se está enseñándolo, pues ello permite proponer y priorizar procesos de investigación – innovación en educación matemática de modo que se problematizan los contenidos que se imparten en matemáticas a nivel de educación media y superior.

1.3. Matemáticas y cognición: Síntesis de investigación por el grupo de psicología para la educación matemática[10]

El estudio ICMI *"Matemáticas y cognición: Síntesis de investigación por el grupo de psicología para la educación matemática"*[11], tiene como propósito presentar los principales resultados de las investigaciones relacionadas con aspectos cognitivos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, todos ellos realizados por el grupo internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME).

---

9 Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2014). *Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático*.
10 COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA (1990). *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education.* Cambridge, Cambridge University Press, 1 – 13.
11 Ibídem.

En la introducción del estudio se hace referencia al interés recíproco que ha existido entre la psicología y las matemáticas a pesar de ser dos ciencias estructuralmente diferentes, dicho interés se establece en el momento en que los psicólogos siguen los modelos de ciencias empíricas donde tratan de expresar los fenómenos psicológicos en términos de modelos matemáticos, leyes cuantitativas o incluso por medio de sistemas deductivos axiomáticos. Por su parte algunos matemáticos como Poincaré, Hadamard, y, más recientemente, Polya y Freudenthal, se han interesado en la psicología del razonamiento matemático; de este modo sus investigaciones se basan en intentos introspectivos o de experiencias didácticas que tratan de esclarecer los aspectos psicológicos del razonamiento matemático. En este mismo sentido Piaget y sus colaboradores, han desempeñado un papel fundamental en el desarrollo de la psicología del razonamiento matemático como un dominio de investigación. Sin embargo, la educación matemática obtuvo poca ventaja de estos desarrollos, pues durante mucho tiempo los modelos y métodos de enseñanza en matemáticas, fueron basados en su mayoría por las ideas manifestadas por el grupo Bourbakí o por la experiencia de los maestros en la escuela.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, Fischbein (1990) autor de la introducción del estudio afirma que la educación matemática no tenía un dominio de investigación definida, pues no poseía su propia base teórica ni un sistema adecuado de estrategias de investigación, todo ello debido a la falta de comunicación entre los matemáticos, psicólogos y profesores de matemáticas, que impedían la creación de un dominio interdisciplinario genuino.

Como ya se ha aclarado, la psicología y las matemáticas son fundamentalmente diferentes no sólo en el contenido sino también en la naturaleza de su razonamiento científico, por ello se puede establecer que las matemáticas son en esencia de carácter deductivo formal, puesto que la organización de un dominio matemático es típicamente axiomática, así una demostración formal tiene una naturaleza puramente lógica – deductiva. En términos generales se puede decir que las entidades matemáticas no son objetos concretos, cada concepto debe definirse de manera explícita y absolutamente unívoca. En contraposición a las ideas acabadas de señalar, la psicología pertenece a las ciencias empíricas; por tanto, los conceptos utilizados son en su mayoría derivados de experiencias prácticas o incluso introspectivas, es decir que carecen de la exactitud, la precisión y la terminología unívoca de los conceptos matemáticos. Es evidente entonces que cuando se lleva a cabo una investigación en el campo de la psicológica, ha de tenerse en cuenta una gran variedad de factores subjetivos, sociales y físicos, de este modo los resultados obtenidos son de una naturaleza estadística. Todo lo anterior conlleva concluir que los investigadores en educación matemática se enfrentan a todo un reto, pues deben poseer una comprensión de los conceptos y explicaciones propias de las matemáticas y a su vez tener en cuenta las formas de razonamiento de los estudiantes.

En el segundo capítulo *"Psychological aspects of learning early arithmetic"*[12] del estudio ICMI, se realiza una descripción de la teoría psicológica clásica en la formación de conceptos, que consiste en definir un concepto en términos de sus atributos, ejemplos y contra ejemplos, sin embargo, para los autores Bergeron y Herscovics (1990) la teoría psicológica clásica de formación de conceptos, es insuficiente para el aprendizaje de un concepto en educación matemática, por ello los investigadores sugieren la inclusión de un esquema conceptual en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. El esquema conceptual consiste en una red de conocimientos o conceptos que pueden ser utilizados en la solución de problemas matemáticos. Es importante mencionar que en el artículo no se especifica qué es una red de conocimientos, resultando vaga la descripción de lo que es un esquema conceptual.

En síntesis, se puede decir que la teoría psicológica clásica en la formación de conceptos (psicología de aprendizaje) no tiene en cuenta la discusión histórica de la complejidad de conceptos matemáticos, como

[12] Bergeron, J. y Herscovics, N. (1990). Psychological aspects of learning early arithmetic. Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge University Press. Cambridge, England.

es el caso de la lógica en donde un concepto complejo en general no es un agregado de conceptos simples. Con respecto al esquema conceptual como propuesta para suplir las deficiencias de la teoría psicológica clásica en la formación de conceptos que plantean Bergeron y Herscovics (1990), difiere de la propuesta en educación matemática, que propone el aprendizaje de un concepto a través del proceso de construcción de su significado. Es así como el proceso de construcción de significado se desarrolla en la actividad de solución de problemas, donde cada nuevo problema contribuye al proceso de aprendizaje conceptual del estudiante, gracias a que los contextos nuevos logran enriquecer su significado. Sobre la base de las consideraciones anteriores, la solución de problemas permite establecer las relaciones que cumple el concepto con otros conceptos matemáticos o evidenciar cómo el concepto se vuelve objeto en un nivel superior de jerarquía en la estructura de la matemática, de forma que permite tratar la complejidad conceptual.

De este modo la presente tesis no está de acuerdo con el planteamiento presentado por Bergeron y Herscovics y apoya la teoría de aprendizaje de conceptos matemáticos como una construcción gradual de significado de los mismos.

1.4. ¿Cómo favorecer el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas?[13]

Este estudio describe la experiencia llevada a cabo en el departamento de matemáticas de la Universidad de Matanzas (Cuba), donde se investigó la posible forma en que se pueden desarrollar destrezas a partir de actividades en clase relacionadas con la solución de problemas y la toma de decisiones. Dicho estudio se realizó con estudiantes de primer año de la carrera de agronomía.

Para los autores, resolver problemas matemáticos es una de las actividades que desarrolla en su cotidianidad tanto el docente de matemáticas como el estudiante universitario. De acuerdo con los

[13] Mazarío, I. y Sanz, T. (2009). *Reflexiones sobre un tema polémico; la resolución de problemas*. Universidad de Matanzas. Editorial Universitaria, Cuba, 16 – 19.

planteamientos formulados en el artículo, se establece que sin la resolución de problemas no se podría concebir un desarrollo del pensamiento matemático y por ende no se lograría tener una formación académica sólida. Sobre la base de las consideraciones anteriores la resolución de problemas se ha convertido en un elemento primordial en la didáctica de la educación matemática.

En la publicación se resalta la importancia de proponer problemas que sean atractivos, estimulantes y llenos de interés para los estudiantes, en este mismo sentido deben promover en el estudiante universitario procesos tales como la identificación, comparación, y modelación, todas ellas habilidades primordiales en la resolución de problemas. Con referencia a lo anterior Hernández (1990) propone "… *le permiten disponer de un modo de pensar matemático que atribute al modo de actuar que aspiramos formar durante la carrera*…"[14].

Si el proceso descrito anteriormente se desarrolla de forma adecuada, el estudiante logrará ampliar sus habilidades en la resolución de problemas y a su vez tendrá las herramientas necesarias para que "*aprenda a aprender*". Sin embargo, el proceso será realmente exitoso si el docente orienta de modo adecuado el trabajo en el aula y brinda la información requerida por el estudiante; también es importante que el profesor mantenga la motivación del grupo, controle el trabajo individual y grupal, y además evalué los aspectos positivos y negativos dentro del proceso de aprendizaje. Para finalizar, se describe cómo los estudiantes al realizar actividades encaminadas al tratamiento con problemas matemáticos, logran una mayor claridad en la aplicación de los conocimientos adquiridos en las cátedras de matemática superior. Como resultado los investigadores ultiman que luego de aplicar esta experiencia durante varios cursos y validar los resultados obtenidos, llegan a la conclusión que la propuesta constituye una vía eficiente para desarrollar en los estudiantes habilidades en la resolución de problemas, En ese mismo sentido los

[14] Hernández, H. (1990). Saltar a la vista lo evidente. Revista Cubana de Educación Superior, Vol. 10, No 1. Ciudad de La Habana, Cuba.

alumnos demuestran una mejoría en su expresión oral, pensamiento lógico y en la aplicación de los conocimientos adquiridos en diversas áreas del conocimiento. Cabe agregar que la solución de problemas matemáticos también promueve en los estudiantes la motivación por sus estudios universitarios, el pensamiento creativo y conlleva a un mejor desempeño como profesional, pues los prepara para resolver situaciones problema de su campo laboral.

Por último se puede deducir que, gracias al trabajo en educación superior basado en un enfoque de resolución de problemas matemáticos, se promueve en los estudiantes el desarrollo de estrategias y conocimientos no solo en el área de matemáticas sino también en otras áreas del conocimiento, y todo ello repercute positivamente en el proceso de formación profesional en el nivel terciario.

1.5. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas[15]

En este estudio se plantean los primordiales cuestionamientos que se formulan los docentes cuando analizan el potencial de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas al llevarla al aula de clase; dentro de las principales dificultades que los profesores manifiestan, se encuentran la extensión en el programa de estudio y la cantidad de estudiantes en el salón de clases.

En contraposición a lo mencionado anteriormente, el artículo identifica los principios fundamentales de la instrucción matemática basada en la resolución de problemas, lo cuales son:

- Ayudar a los estudiantes a ser autónomos en el aprendizaje de las matemáticas, es así como un estudiante que se desenvuelva en un ambiente matemático donde se empleen estrategias para leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos, está en la capacidad de aprender otros dominios y habilidades. El objetivo de una instrucción basada en resolución de problemas no es sólo equipar a los alumnos con ciertas estrategias y habilidades, sino que tengan la capacidad

[15] Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Centro de investigación y de estudios avanzados IPN.

de pensar y analizar por sí mismos; por ello el valor de las estrategias, habilidades y procesos, reside en el desarrollo de una forma flexible e independiente de pensar para el estudiante.

- La socialización y discusión de las ideas entre los alumnos y el docente son primordiales en el aprendizaje de las matemáticas. Es importante que los problemas propuestos, presenten un potencial que permita a los estudiantes proponer conjeturas, usar ejemplos y contraejemplos, y discutir las posibles formas de solución.
- Los alumnos deben formular sus propios problemas, además, deben proponer actividades en las cuales se deba completar una tarea o resolver un problema, que incluya la necesidad de consultar términos o preguntar a especialistas en el tema. Lo primordial es que el estudiante tenga la posibilidad de interactuar con los diversos tipos de problema que aparecen en matemáticas.

En el artículo se proponen cinco fases que se presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, las cuales se presentan a continuación.

1. Se da una familiarización por parte del estudiante donde reconoce aspectos generales del campo de las matemáticas que estudia y de un vocabulario especifico empleado.
2. Intervienen actividades donde el docente guía al estudiante formulando problemas no rutinarios, los cuales favorecen la exploración de relaciones que se generan al interior del campo de estudio.
3. El alumno pretende verbalizar las relaciones observadas para así poder aprender eficazmente el lenguaje técnico implícito en el área de las matemáticas, de acuerdo con el contenido que se esté trabajando.
4. Se evidencia cuando el estudiante tiene la capacidad de resolver problemas que involucran varias iniciativas o métodos de solución, de este modo el alumno encuentra su propio camino en la red de relaciones que se encuentran vinculadas al proceso de resolución.

5. En la integración, el alumno tiene la oportunidad de construir una estructura de lo que ha aprendido dentro del campo de las matemáticas, trabajado de tal forma que identifica una red de relaciones nuevas que se pueden aplicar a otras ciencias.

De los anteriores planteamientos también se señala el papel que juega el docente en el aula de clase. Respecto a este tema Santos (1997) afirma:

"*Ayudar a los estudiantes a que acepten los retos de resolver problemas. Hay que tener en cuenta que un problema, no es un problema hasta que el estudiante muestra algún tipo de interés por resolverlo.*

Construir una atmósfera que le dé confianza al estudiante para atacar problemas no rutinarios y no sentirse mal al enfrentarse a alguna dificultad durante el proceso de solución.

Permitir que los estudiantes (y motivarlos) seleccionen e implementen sus propios caminos de solución y proporcionarles ayuda cuando ésta sea necesaria."[16]

En esta tesis se considera válido el criterio del autor al afirmar que el objetivo del proceso de aprendizaje basado en resolución de problemas no es sólo equipar al estudiante con ciertas estrategias y habilidades, sino que tenga la capacidad de pensar y analizar por sí mismo las situaciones y problemas presentados.

1.6. Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula[17]

Debido a la importancia de la matemática retadora dentro y fuera del aula, el ICMI (2006) realizó su decimosexto estudio en torno a este tema, formulando preguntas como la siguiente *¿qué podemos hacer para que la matemática creativa y genial sea más accesible para un mayor número de personas?* Para poder resolver este interrogante, se formulan nuevas preguntas como las siguientes *¿qué es un reto*

[16] Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Centro de investigación y de estudios avanzados IPN. p. 68.

[17] COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA, (2006). Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula, recuperado en noviembre 23 de 2014 de la URL: http://www.amt.edu.au/icmis16ddspanish.html

matemático?, ¿cómo proporcionamos retos? y ¿en dónde se encuentran los retos?[18] Todas estas interrogantes tienen el propósito claro de determinar cómo las matemáticas retadoras aportan beneficios a la formación del estudiante y a la educación matemática.

En relación con la pregunta *¿qué es un reto matemático?* los autores del estudio manifiestan que un reto matemático es una situación en la cual un individuo debe realizar algún tipo de reflexión y análisis ante una situación presentada, la cual conlleva un reto de modo que el sujeto debe tener la suficiente iniciativa para responder a eventos imprevistos con flexibilidad e imaginación. Por las consideraciones anteriores la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (2006) establece el reto matemático como una relación que surge entre una pregunta o situación dada y un individuo o un grupo. Ejemplo de ello se presenta en la siguiente pregunta ¿cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir si su perímetro debe ser igual a 10 cm? Puede ser que esto no constituya un reto para alguien familiarizado con algoritmos de cálculo, pero sí sería un reto, para un estudiante que se enfrenta a esta situación por primera vez. Es evidente entonces que se debe establecer el nivel del reto, de tal modo que los estudiantes queden perplejos ante el problema planteado, pero a su vez tengan los recursos para poder resolverlo. De este modo el estudiante al estar enfrentado a un reto puede tener éxito o no al tratar de resolverlo, sin embargo, el proceso de enfrentar sus dificultades puede resultar en un entendimiento más amplio.

Para finalizar, la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (2006) conceptúa que "*La presentación de retos matemáticos puede proporcionar la oportunidad de experimentar el descubrimiento independiente, por medio del cual uno puede adquirir nuevo entendimiento profundo y un sentido de poder*

[18] COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA, (2006). Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula, recuperado en noviembre 23 de 2014 de la URL: http://www.amt.edu.au/icmis16ddspanish.html.

personal. Entonces, el enseñar por medio del uso de retos puede incrementar el nivel del entendimiento y de la atracción que siente el estudiante por las matemáticas."[19].

Antes de contestar las preguntas ¿cómo se pueden proporcionar retos? y ¿en dónde se encuentran los retos?, es importante resaltar el papel que desempeña el profesor, pues es él, quien se enfrenta a la difícil misión de potenciar en sus estudiantes la espontaneidad y la creatividad en el aula de clases. El estudio ICMI (2006) señala que las situaciones retadoras suministran una oportunidad magnífica para realizar matemáticas y para pensar rigurosamente, es así como los estudiantes pueden estar expuestos a los retos tanto en el aula de clases como fuera ella, ya sea en círculos matemáticos, competiciones, exhibiciones, materiales recreativos o en la simple conversación que se establece entre pares.

El estudio ICMI (2006) también enfatiza en que "*Para proveer un reto no sólo se debe incluir problemas retadores, sino también, algo que con frecuencia ayuda más, se debe construir pequeños conjuntos de problemas que conducen a un estudiante a partir de unos hechos y ejemplos muy sencillos hacia otros más profundos y retadores"*[20].

1.7. Actitudes matemáticas: propuesta para la transición de la escuela secundaria a la universidad[21]

El artículo muestra como la transición de la educación secundaria a la terciaria, es uno de los temas que más preocupa a los educadores en matemáticas, muchos autores como por ejemplo Artigue, Batanero y Kent (2007); Hoyles, Newman y Noss (2001) y Wood (2001) han trabajado este tema. Las primeras

[19] COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA (2006). Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula. Recuperado en noviembre 23 de 2012 de la URL: http://www.amt.edu.au/icmis16ddspanish.html
[20] Ibídem.
[21] Gomez, I. (2009). Mathematical attitudes: proposals for the transition from high school to university. Educación Matemática, Grupo Santillana México, Distrito Federal, México. Vol. 21, No. 3, 5 – 32.

investigaciones realizadas en torno a este tema han reflejado las dificultades cognitivas y saltos conceptuales que experimenta el estudiante, tanto en el proceso demostrativo como en el comunicativo. Recientemente los autores se sitúan en una perspectiva antropológica, analizando la transición entre el proceso de enseñanza secundaria al universitario, definiéndolo como un problema de transición entre culturas. Sin embargo, otros investigadores como Tall (1991) y Sierpinska (2000) consideran que la dificultad se presenta por la forma en que piensan los estudiantes y la organización de su conocimiento. Dreyfus (1999), Iannone y Nardi (2007) sugieren que el problema se encuentra en el proceso de demostración y comunicación, para Artigue (2004) y Gueudet (2004) la problemática radica en la transposición didáctica y el contrato didáctico.

Sugiere el autor que las matemáticas constituyen un área propicia para el desarrollo de actitudes relacionadas con hábitos de trabajo, curiosidad e interés por investigar y resolver problemas, en los que intervienen la creatividad, la formulación de conjeturas, la flexibilidad para modificar o cambiar el propio punto de vista y, lo más importante, la autonomía intelectual para abordar situaciones nuevas con la confianza de aprender y resolver problemas.

Una de las conclusiones más relevantes que brinda Gómez (2009) se relaciona con el estudio de las actitudes y comportamientos del individuo dentro de una situación problemática. Este comportamiento depende en gran medida de las creencias particulares o la actitud hacia el objeto por parte del sujeto, donde además se activan las creencias o predisposiciones por la situación planteada. Hechas las consideraciones anteriores, Gómez (2009) concluye que:

"*La acción es determinada no sólo por una simple actitud, sino por un número de actitudes y por las condiciones de la situación. En las manos del profesor y de las instituciones educativas está el propiciar* *una mejor interacción entre las actitudes y las situaciones a través de una mejor calidad en las situaciones de aprendizaje".*[22]

Acorde con los resultados obtenidos por el investigador, se evidencia la necesidad de propiciar una interacción entre las actitudes que se generan por parte del estudiante hacia el objeto matemático y la predisposición que se activa en el momento de resolver un problema que involucre dicho objeto, pues es en ese momento donde debe intervenir el maestro formulando situaciones que propicien una alta calidad de aprendizaje.

1.8. Articulación: de la escuela secundaria a la matemática universitaria[23]

En primer lugar, el artículo en mención afirma que la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria es una de las problemáticas más comunes en la educación estadounidense; por este motivo es cada vez más frecuente que los estudiantes universitarios reporten dificultades en el área de matemáticas en comparación con otras disciplinas. Ante la situación planteada el autor de la publicación sugiere que la falta de articulación se debe a que las matemáticas escolares y las matemáticas universitarias no encajan bien, esta falta de ajuste puede ser causada por diferencias en el contenido o en los métodos de enseñanza. Un ejemplo de ello consiste en que la mayoría de las escuelas secundarias emplean calculadoras o computadoras en clase de matemáticas, mientras que la mayoría los docentes a nivel universitario no están de acuerdo con el uso de la tecnología. De hecho, los métodos de enseñanza en la universidad son por lo general distintos a los de las escuelas secundarias, pues se les solicita a los estudiantes tener un mayor compromiso con los cursos de matemática y además éstos tienen un ritmo más acelerado.

---

[22] Gomez, I. (2009). Mathematical attitudes: proposals for the transition from high school to university. Educación Matemática, Grupo Santillana México, Distrito Federal, México. Vol. 21, No. 3, 5 – 32.

[23] Bernard, L. (2012). Articulation issues: high school to college mathematics. Arkansas: Universidad de Arkansas. Recuperado el 18 marzo de 2014 en el URL: http://www2.kenyon.edu/Depts/Math/schumacherc/public_html/Professional/CUPM/2015Guide/ArticulationFinal.pdf

En lo que respecta a las temáticas tratadas en la escuela secundaria como la geometría, el álgebra y la trigonometría, se ajustan muy bien con los temas de la universidad, de modo que el problema no radica en la falta de acuerdo con las temáticas abordadas en clase de matemáticas, es más existe un solapamiento entre dichos contenidos. La verdadera problemática consiste en la secuencia que se establece, pues está compuesta principalmente de fundamentos que preparan a los estudiantes para sus estudios futuros en lugar de ser por sí mismos un fin. Debido a esto, se presenta en el estudiante gran dificultad para el aprendizaje de las matemáticas, además de un alto grado de insatisfacción; prueba de ello consiste en que muchos alumnos con tres o cuatro años de preparación matemática a nivel de educación secundaria, se topan con cursos en la universidad que tienen un contenido muy similar a los vistos en sus clases, pero contradictoriamente la mayoría de estas cátedras a nivel universitario exigen habilidades algebraicas con un nivel de complejidad muy alto. Esta situación conlleva a que los estudiantes demuestren falta de interés y una serie de problemas que subyacen sobre la base de las consideraciones anteriores, y que se evidencian en los exámenes que se les realizan.

Ahora bien, ampliar y profundizar en el estudio de los contenidos de matemáticas a nivel escolar puede generar una mejor comprensión y un mayor interés por parte de los estudiantes, pero debido a la problemática que se presenta en la transición de la matemática escolar a la universitaria han crecido recientemente el número de cursos de doble crédito en las escuelas secundarias estadounidenses. Una encuesta aplicada reciente en Estados Unidos de Norte América, estima que aproximadamente la mitad de todos los estudiantes de tercero y cuarto año (3,5 millones de alumnos) de las escuelas secundarias, están inscritos en cursos que les permitan tener créditos tanto para la escuela como para la universidad. Algunos de estos cursos se encuentran en programas basados en el examen de Colocación Avanzada (AP) y de Bachillerato Internacional (IB), donde el crédito universitario depende del puntaje obtenido en un examen nacional o internacional, más no en el hecho de graduarse de la escuela secundaria; sin embargo, no existen estudios que determinen cómo es el desempeño de los estudiantes que toman la opción de presentar los exámenes AP o IB a nivel universitario.

En el marco de las observaciones anteriores, Bernard (2012) precisa que la matemática de la escuela secundaria posee un nivel de complejidad muy limitado que puede conducir a numerosos problemas en los cursos más rigurosos y formales a nivel universitario. Por ello propone un curso de cálculo orientado a satisfacer las necesidades académicas que requieren los estudiantes para presentar las pruebas AP, el cual proporcione una transición fluida entre las matemáticas de la escuela secundaria y la universidad, de modo que este curso encaja de forma natural en la secuencia de contenidos de cálculo que se imparte en la mayoría de los colegios y universidades de los Estados Unidos. Para finalizar Bernard (2012) propone recomendaciones, para que los estudiantes lleven a cabo una transición adecuada a las matemáticas universitarias:

- Los estudiantes deben aprender las ideas y habilidades del álgebra, la trigonometría y la geometría en la escuela secundaria, es muy probable que necesiten de estos conocimientos más adelante y, de no tener las competencias mínimas, tengan que repetir estos cursos en la universidad.
- El alumno se debe informar en relación a las pruebas de ingreso utilizadas por las universidades a las cuales desea asistir, de este modo es importante que refresque su conocimiento y habilidades, antes de sentarse a contestar la prueba.
- Para poder tomar el curso de Cálculo AP en la escuela secundaria, se debe haber completado los cursos de matemáticas que normalmente se imparten en la escuela, todo ello con el propósito de aprobar el examen de Cálculo AP.

En la presente investigación se coincide con el criterio del autor, al afirmar que existe una problemática en la transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad, además, cursos como el de Cálculo AP tiene contribuciones invaluables a la transición entre la escuela secundaria y la universidad, gracias a los resultados obtenidos son un aporte enriquecedor para la presente tesis.

1.9. El acercamiento húngaro y cómo encaja en el ambiente educativo americano[24]

El articulo narra como el enfoque húngaro de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tiene un énfasis fuerte y explícito en la resolución de problemas matemáticos, la creatividad y la comunicación. Con referencia a lo anterior el autor de la investigación comenta cómo los estudiantes húngaros aprenden conceptos de las matemáticas trabajando problemas con un alto grado de complejidad, en los cuales se promueven la perseverancia y la reflexión profunda. Este tipo de problemas matemáticamente significativos se destacan por que promueven la fluidez del procedimiento, la comprensión conceptual, el pensamiento lógico, y las conexiones entre las diversas temáticas que se trabajan. Es así como para cada clase el docente selecciona los problemas que abordan los objetivos matemáticos de la lección y proporciona a sus alumnos mecanismos para enfrentar las dificultades encontradas con el propósito de tener un camino hacia el entendimiento.

Bajo el marco de la observación anterior, es importante agregar que el docente emplea una secuencia de problemas cuidadosamente seleccionados para propiciar la coherencia de los contenidos con las situaciones formuladas, de tal forma que les brinda a los estudiantes la oportunidad de aprender las temáticas presentadas. Es así como el maestro ve a los problemas que plantea como vehículos para fomentar las habilidades de los estudiantes respecto al razonamiento, la resolución de problemas, la escritura de una demostración, entre otros. El objetivo fundamental de cada clase es que los estudiantes aprendan lo que significa participar activamente en matemáticas y que puedan sentir la emoción del descubrimiento matemático.

[24] Matsuura, R. (2014). National council of teachers of mathematics. Principles to actions: ensuring mathematics success for all.

Otra característica que identifica el enfoque húngaro, es la socialización de la estrategia que usan los estudiantes para solucionar los problemas planteados, para ello después de trabajar los problemas de forma individual o en pequeños grupos de trabajo, los estudiantes pasan voluntariamente frente a la clase a compartir sus soluciones. Gracias a la naturaleza no trivial de los problemas presentados, los alumnos aprenden a comunicar su pensamiento con claridad y precisión. En ese mismo sentido cuando un estudiante se encuentra atascado el resto de los alumnos de la clase puede brindar apoyo y sugerencias de manera amistosa; como resultado el profesor crea un ambiente propicio para que los estudiantes puedan intercambiar experiencias matemáticas significativas.

En un ambiente académico de este tipo, el papel docente es el de motivador y facilitador, pues proporciona el estímulo y el apoyo para que los estudiantes se comprometan con el problema formulado' Significa entonces que el profesor debe guiar de manera asertiva a los estudiantes cuando se encuentren en un atasco o cuando tengan inquietudes en aspectos que requieran algún tipo de aclaración. Dadas las condiciones que anteceden, el docente luego de haber llevado a cabo un proceso de investigación de los estudiantes que componen su clase, debe destacar los resultados más importantes encontrados, resumirlos y generalizar sus hallazgos.

El interés de Matsuura (2014) en este modelo de enseñanza lo ha llevado a la participación del *"Budapest Semesters in Mathematics Education"* (BSME), un programa de un semestre en Budapest, que ha sido diseñado para que los estudiantes universitarios recién graduados de Estados Unidos y Canadá conozcan la propuesta húngara de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El BSME no sólo fue diseñado para alumnos que son apasionados por las matemáticas, también tiene como propósito contribuir a la formación de los futuros maestros de matemáticas. En este sentido los estudiantes que se preparan como profesores de matemáticas y que participan en este curso, tienen la oportunidad de profundizar en la exploración matemática por medio del enfoque húngaro, de modo que pueden apropiarse de esta pedagogía de trabajo en el aula para aplicarla en sus clases futuras.

Por ultimo Matsuura (2014) afirma que es más relevante la consecución de hábitos mentales en los estudiantes, que los mismos resultados obtenidos en el momento de resolver un problema matemático; esto quiere decir que el objetivo general del proyecto no es formar un gran número de estudiantes de secundaria para que sean excelentes matemáticos universitarios, sino por el contrario, se trata de ayudar a los estudiantes de secundaria para que aprendan y adopten algunas de las posturas que los matemáticos emplean cuando resuelven problemas. En conclusión, todos los estudiantes deben aprender a convertirse en pensadores matemáticos y estar preparados para cualquier carrera académica o campo profesional que seleccionen.

Después de las consideraciones anteriores la presente investigación está de acuerdo con el enfoque húngaro presentado por Matsuura, sin embargo, se considera importante establecer cuáles deben ser los tópicos que se deben trabajar en clase de matemáticas para que los estudiantes realicen una adecuada transición de la escuela secundaria a la universidad.

1.10. Álgebra interminable – La ruta mortal de la matemática escolar a la matemática universitaria[25]

El autor de este artículo expresa una gran preocupación por la forma en que se prepara a los estudiantes para la transición de la escuela secundaria a la universidad. De este modo formula las siguientes interrogantes: ¿realmente estamos ofreciendo a los estudiantes de secundaria una experiencia matemática apropiada?, ¿qué podemos hacer para proporcionar a los estudiantes matemáticas pertinentes y coherentes que promuevan una transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad?, ¿debe seguir siendo el álgebra lo que predomine y sea relevante en las escuelas secundarias de Estados Unidos? y ¿es el cálculo la asignatura que en realidad suple todas las

[25] Shaughnessy, M. (2011). National council of teachers of mathematics.

necesidades que tiene un estudiante para llevar a cabo una exitosa transición hacia la universidad?, Shaughnessy (2011) considera que la respuesta para todas estas preguntas es un ¡no! contundente. Hecha la observación anterior, Shaughnessy (2011) argumenta que durante más de 20 años las organizaciones nacionales y líderes prominentes en educación matemática de Estados Unidos incluyendo el NCTM, han advertido que la postura que se tiene frente al cálculo como la estrategia adecuada para una transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria es errónea, y no presenta una alternativa adecuada para muchos estudiantes. Es evidente entonces para el NCTM que se requiere un enfoque diferente para las matemáticas de la escuela secundaria, donde se lleve a cabo un plan de estudios amplio que incluya extensiones de los temas básicos, donde el cálculo ya no sea visto como la experiencia culminante y definitiva para los estudiantes.

El autor hace referencia a la investigación realizada por la Asociación Matemática de América (MAA) denominado informe CRAFTY; esta investigación examinó las necesidades matemáticas de diversas disciplinas orientadas a nivel universitario como la biología, química, economía, ingeniería, física, entre otras. El informe CRAFTY establece que las matemáticas de la escuela secundaria pueden facilitar la transición a la universidad a los estudiantes si se les proporciona las siguientes herramientas:

- Un mayor énfasis en la modelación.
- La consideración de los temas multivariados.
- Un énfasis en las habilidades del cálculo que son útiles en otros campos.
- Una base sólida en las unidades, la escala y el análisis dimensional.

Con referencia a lo anterior, Shaughnessy (2011) advierte que en debates llevados a cabo entre el comité del NCTM y el MAA, respecto a cuál debería ser el suplente del cálculo, se estableció que tanto las escuelas secundarias y universidades están operando bajo supuestos obsoletos, entre los cuales se encuentra el imaginario que los estudiantes de secundaria deben estar preparados para tomar clases de cálculo y que el camino adecuado hacia el aprendizaje del cálculo debe ser una sobredosis frecuente y repetitiva de álgebra. Un ejemplo de las consideraciones anteriores es la transición típica de un estudiante en la escuela secundaria que debe tomar los cursos álgebra I, álgebra II, y tal vez pre – cálculo, mientras que en la universidad el estudiante puede cursar las cátedras de álgebra intermedia, seguida por álgebra a nivel universitario, y tal vez, una vez más, cursar una cátedra de pre – cálculo. Esta interminable secuencia de cursos de álgebra es una experiencia común para muchos estudiantes y el nivel de desgaste a lo largo de este camino es muy alto.

En este orden de ideas se puede evidenciar cómo se está en un camino de transición entre la matemática de escuela secundaria hacia la universidad errado, profuso y de carácter repetitivo para los estudiantes. Sin embargo, el problema principal radica en que no hace nada para mejorar la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas. De este modo se llega a la concluir que cuando los estudiantes se limitan a ver el álgebra de forma repetitiva, se les niega la oportunidad de experimentar la belleza, la emoción, el poder, o la utilidad de las matemáticas como establecen las normas del NCTM (1989, 2000) o lo sugiere el informe CRAFTY del MAA.

Por las consideraciones anteriores el NCTM en conjunto con el MAA, presentan cuatro caminos como alternativas para una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la de la universidad.

- El primero de ellos consiste en enfatizar la cuantificación de la incertidumbre y el análisis de tendencias numéricas. Dentro de sus propósitos debería estar el análisis de datos, la combinatoria, probabilidad, el uso de dispositivos de recopilación de datos, el software estadístico interactivo, y el análisis de hojas de cálculo con tendencias numéricas.
- La segunda alternativa consiste en una transición que se lleve a cabo exclusivamente en el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes, que inicie en la escuela secundaria y

se continúe hasta el primer año de la universidad. En efecto el pensamiento estadístico propicia la comprensión de la necesidad de los datos numéricos, la relevancia de la recolección de datos, la universalidad de la variabilidad y la toma de decisiones cuando se presenta la incertidumbre.

- La tercera alternativa propone la construcción de un camino basado en la transición del álgebra lineal, un álgebra lineal que se encuentre integrada al álgebra y la geometría a través de métodos vectoriales. Significa entonces que este curso tiene la posibilidad de ofrecer un escenario en el cual los estudiantes puedan trabajar con el cálculo multivariado, que a su vez proporciona métodos matriciales de representación que les servirán en muchos otros campos académicos, como por ejemplo en matemáticas, ciencia, ingeniería, informática y economía.
- La última propuesta sugiere una clase de cálculo muy diferente a la clase tradicional, donde tenga como propósito las aplicaciones multivariadas tanto del cálculo como de la estadística, bajo la premisa que vivimos en un mundo multivariado. Por lo tanto, se debe hacer énfasis en las funciones multivariadas, derivadas parciales, conjuntos de datos multivariados y el análisis de la covarianza.

Como conclusión Shaughnessy (2011) sostiene que los estándares curriculares proporcionan una oportunidad para repensar la secuencia de cursos que se imparten en el área de matemáticas de la escuela secundaria, teniendo en cuenta que todo esto representa un reto para los educadores matemáticos al tener que formular nuevas e interesantes hipótesis para realizar una adecuada transición de las matemáticas de la escuela secundaria a la universidad. Todo ello teniendo en cuenta los retos que se deben afrontar en pleno siglo XXI.

La presente tesis coincide con el criterio del autor en relación con una reformulación del currículo de matemáticas a nivel de educación básica, media y superior. Además, como se puede observar, tomar reiteradamente cursos de álgebra o cálculo, no es la estrategia apropiada para llevar a cabo una adecuada transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad.

1.11. Heurística y pensamiento matemático

En la resolución de problemas es importante resaltar el papel que juega la heurística al tratar de descubrir los procesos de generalización, inferencia, deducción, simbolización y estrategias que surgen durante el proceso de resolución de problemas matemáticos. Para Polya (1965) la heurística moderna *"trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Son diversas las fuentes de información y no se debe descuidar ninguna. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico, como psicológico".*[26]

Partiendo del hecho que la heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de un problema y las operaciones mentales utilizadas en el mismo, es necesario también hablar del pensamiento matemático inmerso en este proceso. En efecto el pensamiento matemático es toda una teoría y por ello se deben tener en cuenta las posturas que tienen diversos investigadores acerca de su caracterización. Por ejemplo, Mason, Burton, Stacey (2010) sugieren las siguientes características del pensamiento matemático y la experiencia matemática.

- La influencia que tiene el desarrollo del pensamiento matemático en el conocimiento de nosotros mismos y del mundo que nos rodea.
- Las emociones del sujeto que resuelve el problema son esenciales en el proceso de pensar matemáticamente, se debe sentir motivado gracias a una situación en la que se involucran contradicción, tensión y sorpresa en un contexto de preguntas, retos y reflexiones.

[26] Polya, G. (1989). *Como plantear y resolver problemas*. p. 102

- El enfoque positivo de la dificultad, también conocido como estar atascado, que se considera una situación muy digna y que constituye una parte esencial del proceso de mejoramiento del razonamiento, donde se valora más un intento de resolución fallido que una cuestión resuelta rápidamente y sin dificultades en donde es más importante el proceso que las respuestas.
- La importancia de dejar todo por escrito durante el proceso de la resolución del problema, con el objetivo de poder recordar y reconstruir un momento determinado del problema. Este procedimiento también ayuda a superar el bloqueo, cuando el sujeto que intenta resolver el problema no sabe qué hacer.
- Las notas y los rótulos pueden señalar estados de ánimo por los que se pasa, ideas felices, bloqueos o situaciones delicadas en las que hay algún riesgo de equivocarse.
- La actividad de razonar se puede describir como si existiera otro ser dentro de nosotros mismos, que nos aconseja acerca de lo que debemos hacer, supervisa los cálculos y los procesos llevados a cabo, identifica estados de ánimo, examina críticamente los razonamientos, y señala que hay que revisar y generalizar resultados, en resumidas cuentas, controla todo el proceso de resolución desde afuera.

Tall (1991) también habla del pensamiento matemático en términos de un pensamiento matemático avanzado, afirmando que se caracteriza por definiciones matemáticas precisas y deducciones lógicas, de teoremas basados en dichas definiciones, y que en los niveles superiores es importante mostrar la matemática tal como la concibieron los matemáticos profesionales, basada en el rigor.

La presente investigación está de acuerdo con los planteamientos de Mason, Burton, Stacey (2010) respecto a las características del pensamiento matemático y lo que debe ser la experiencia matemática gracias al trabajo en el aula de clases con la solución de problemas.

1.12. La motivación para mejorar el rendimiento en matemáticas: los resultados, las generalizaciones, y las críticas desde la investigación[27]

De acuerdo con los datos obtenidos a partir de las evaluaciones nacionales de los Estados Unidos de Norte América en la década de 1980 y de los estudios realizados por investigadores como Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, y Reys, (1981) y Dossey, Mullis, Lindquist, y Chambers, (1988), se pudo establecer que los niños estadounidenses disfrutan de las matemáticas en la escuela primaria, pero este gusto tiende a descender drásticamente cuando los niños van progresando en sus estudios a través de la escuela secundaria. Aunque los estudiantes perciben que las matemáticas son relevantes para su formación, el número de alumnos en las escuelas que quieren tomar asignaturas concernientes a esta ciencia, está disminuyendo ostensiblemente de acuerdo con Dossey, Mullis, Lindquist, y Chambers (1988). Las estadísticas son aún más alarmantes cuando se evidencia el hecho de que los niños no poseen el conocimiento necesario en matemáticas para afrontar una sociedad cada vez más avanzada tecnológicamente hablando. Esta problemática es considerada lo suficientemente importante como para que el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), enfoque sus esfuerzos en lograr una mayor motivación en el aprendizaje de las matemáticas, con el propósito de conseguir que los estudiantes logren apreciar su gran valor y que además puedan aumentar la confianza en sus propias capacidades (NCTM, 1989).

¿Pero qué son en realidad las motivaciones? En términos generales las motivaciones son las razones que tiene cada uno de los individuos para comportarse de cierta manera ante una situación dada; las motivaciones pueden surgir a partir de metas propuestas o pueden llegar a determinar si un individuo participa o no en una actividad dada, como lo propone Ames (1992).

---

[27] Middleton, J. y Spanias, P. (1999). Motivation for achievement in mathematics: findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for research in mathematics education*. Vol. 30, No. 1, 65 – 88.

En cuanto a la motivación a nivel académico se puede distinguir dos tipos distintos, motivaciones intrínsecas y motivaciones extrínsecas. Con referencia a lo anterior se puede definir como una motivación intrínseca, el deseo por parte del estudiante para participar en su proceso de aprendizaje, en otros términos, el estudiante participa procurando su propio bien. Aquellos estudiantes que están motivados intrínsecamente, logran involucrarse en las tareas académicas, pues ellos disfrutan de realizarlas. Para Middleton (1995) los alumnos caracterizados por tener motivaciones intrínsecas, consideran que el aprendizaje se relaciona con la forma en que se perciben a sí mismos, procurando llevar a cabo actividades que conlleven al aprendizaje por el simple placer de aprender. Tal como se observa, las motivaciones intrínsecas se centran en los mismos objetivos que busca el proceso de aprendizaje en el estudiante.

Con referencia a lo anterior los alumnos se encuentran motivados extrínsecamente cuando se involucran en las tareas académicas para obtener cierto tipo de recompensas, tales como, obtener buenas calificaciones, aprobar exámenes, superar asignaturas, etc. También pueden estar motivados extrínsecamente buscando evitar el castigo, el cual conlleva a la obtención de malas notas o la desaprobación, como se puede evidenciar en las motivaciones de este tipo de estudiantes suelen enfocarse en su rendimiento académico o en obtención de juicios favorables por parte de sus maestros, padres de familia, compañeros del colegio, o simplemente para evitar juicios negativos respecto a su nivel académico en matemáticas.

Después de las consideraciones anteriores se llega a la conclusión que los estudiantes involucrados en tareas en las que están intrínsecamente motivados exhiben una serie de comportamientos académicamente deseables como los siguientes:

- Aumento en el tiempo dedicado a realizar sus tareas.
- La perseverancia frente al fracaso.

- Un mejor proceso de comprensión.
- La selección de tareas con mayor dificultad.
- Mayor creatividad y compromiso en el momento de sobrepasar las dificultades.
- La selección de las estrategias más complejas y eficientes frente a los retos.

Todo ello se presenta gracias a la ausencia de una recompensa extrínseca, de acuerdo con Lepper (1988). Hecha la observación anterior, la motivación intrínseca está relacionada con la percepción que tienen los estudiantes respecto al nivel de conocimientos en matemáticas que desean poseer, y cuya meta está orientada hacia el dominio de dichos conocimientos.

Los investigadores que han centrado sus esfuerzos en estudiar la motivación en educación matemática, conjeturan que un estudiante que se ve a sí mismo como capaz de hacer bien sus labores académicas en matemáticas, tiende a darle una mayor importancia a la misma, a diferencia de aquellos que no se perciben como capaces de hacer bien sus actividades académicas en el área de matemáticas, pues éstos comienzan a restarle importancia. Por ello es indispensable que los estudiantes se sientan cómodos con las matemáticas, que logren sobreponerse a los retos que se les propongan, de tal modo que puedan experimentar el gusto de tener una motivación netamente intrínseca, es evidente entonces cómo las disminuciones en las actitudes positivas hacia las matemáticas, pueden explicarse en función de la falta de apoyo por parte del docente y del ambiente de clase.

En relación al estado actual de la investigación sobre motivación en matemáticas, se podría afirmar que se encuentra en sus inicios, pero los resultados son concluyentes al establecer que el éxito en matemáticas de los estudiantes está influenciado en la formación de sus actitudes motivacionales. Las investigaciones señalan que el esfuerzo que realiza un individuo en el desarrollo de una actividad, está determinado por el nivel de consecución satisfactoria de dicha tarea; por ello los estudiantes necesitan un alto grado de éxito en matemáticas para que puedan ser vistas como algo valioso. Sobre la base de las consideraciones anteriores, los alumnos pueden vivenciar los logros obtenidos en matemáticas como resultado de su capacidad y esfuerzo.

Ahora bien, el poco éxito de los estudiantes en matemáticas los lleva a percibir que sus dificultades radican en su falta de capacidades y genera en ellos una desmotivación para aprender, lo que influye desfavorablemente en su capacidad para procesar información matemática compleja. Este tipo de dificultades también se presentan en la solución de problemas matemáticos, y por ello es indispensable que los alumnos reciban por parte del maestro una valoración positiva ante el fracaso como lo expresa Kloosterman (1988), además, el aprendizaje de estrategias para un afrontamiento apropiado ante el fracaso es necesario para el desarrollo de un concepto matemático robusto en el estudiante.

Estudios recientes muestran que las motivaciones hacia las matemáticas que se desarrollan a temprana edad, terminan siendo sólidas en el tiempo, sin embargo, las mismas son influenciadas en gran medida por las acciones y actitudes de los maestros. Dadas las condiciones acabadas de mencionar, los estudiantes parecen consolidar sus actitudes de motivación hacia las matemáticas en la escuela secundaria. Las motivaciones son interiorizadas, lo que afecta su percepción de sí mismos y la forma de relacionarse con las matemáticas. De acuerdo con las consideraciones anteriores aquellos estudiantes que logran interiorizar conceptos gracias a su alta motivación, tienden a estar más centrados en la selección y uso de estrategias específicas para el éxito en la resolución de problemas, y de este modo suelen seguir estudiando carreras relacionas con matemáticas.

Es evidente entonces que aquellos estudiantes que tienen malas experiencias con las matemáticas escolares y que se sienten desmotivados, pierden el gusto por ellas a medida que van creciendo. De este modo se reduce la probabilidad que se inscriban a cursos de matemáticas cuando llegan a la universidad. Cabe agregar que este tipo de estudiantes, no ven las matemáticas como parte integral de su formación académica y tratan de evitar la ansiedad que conlleva el desarrollo de tareas que involucren esta área del conocimiento.

La presente investigación coincide con el criterio de los autores en relación con los resultados del estudio, al establecer que el docente debe tomar una postura en la que los estudiantes se sientan cómodos asumiendo riesgos, sabiendo que no van a ser criticados o humillados por cometer errores en su proceso de formación en el área de matemáticas. Cabe agregar que los estudiantes tienden a atribuir sus sentimientos hacia las matemáticas de acuerdo con el modo en que percibieron a sus docentes en dicha área del conocimiento. En efecto el modo en que los alumnos ven las matemáticas puede estar influenciado por las buenas o malas experiencias que hayan experimentado.

1. 13. Juegos matemáticos en la enseñanza[28]

El autor del artículo *"Juegos matemáticos en la enseñanza"*[29] considera importante formularse la siguiente pregunta a nivel de educación matemática ¿dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Ante la situación planteada De Guzmán (1989) indica que, en múltiples oportunidades se puede apreciar las matemáticas como una ciencia aburrida, que nada tiene que ver con el juego, pero cada vez es más frecuente dentro de la comunidad de educación matemática afirmar que esta ciencia puede ser vista como un juego, entre muchas otras cosas. En este orden de ideas se puede considerar que el juego en matemáticas tiene bien definidas sus reglas y posee un sinnúmero de movimientos, donde suele presentarse un análisis intelectual cuyas características son muy similares a las que se presentan en el desarrollo del pensamiento matemático. Lo que significa entonces que las diversas partes de la matemática son sus propias piezas, las cuales determinan su comportamiento a través de las definiciones de su teoría, en este mismo sentido las normas que se deben emplear en el manejo de dichas piezas son

[28] De Guzmán, M. (1989). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
[29] Ibídem.

brindadas por sus definiciones y por los procesos de razonamiento que son admitidos en su campo de acción.

Con referencia a lo anterior se observa claramente cómo la matemática puede ser considerada como un juego en todo el sentido de la palabra, pues presenta la misma tipología de estímulos y actividades que se muestran en el resto de juegos intelectuales que existen. De este modo el sujeto debe aprender las reglas, estudiar los movimientos esenciales, experimentar partidas simples, visualizar las partidas de los grandes jugadores, conocer sus mejores teoremas y establecer sus procedimientos para tratar de usarlos en condiciones semejantes. Es evidente entonces como el sujeto puede hacerse partícipe en la solución de problemas nuevos que surgen debido de la riqueza misma del juego, o puede llegar a resolver aquellos problemas antiguos que están abiertos y que tan solo esperan de una idea original para ser solucionados. De los anteriores planteamientos se deduce que muchos de los grandes matemáticos de todas las épocas hayan sido perspicaces observadores de juegos, participando activamente de ellos, logrando dar lugar a nuevos campos y modos de pensar en la matemática formal.

Para De Guzmán (1989) la matemática es en gran medida un juego, que puede analizarse mediante instrumentos matemáticos para establecer las diferencias más relevantes entre la práctica de la matemática con la del juego; por este motivo las normas del juego no requieren una introducción extensa, complicada ni formal. En el orden de las ideas anteriores el juego al igual que las matemáticas debe ser divertido y además poderse vincular con ella de forma rápida, sin llegar a considerarla como solo divertida pues esta rama de las ciencias es un instrumento exploratorio de su propia realidad tanto interna y como externa, por consiguiente, así debe plantearse. Después de las consideraciones anteriores, se puede establecer que el juego en educación matemática posibilita que los estudiantes se encuentren más motivados, estimulados, agradados y apasionados por lo que están haciendo.

En conclusión, De Guzmán (1989) señala que:

“Han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y matemática…. Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes”.[30]

De este modo la presente investigación está de acuerdo con todos los planteamientos formulados por De Guzmán en el artículo *“Juegos matemáticos en la enseñanza”*[31].

1.14. Transitions in Mathematics Education[32]

En el presente artículo se discute la transición de la matemática de aquellos estudiantes que pasan de la educación básica primaria a la secundaria, como de aquellos que se promueven de la escuela secundaria a la universidad, precisando de una vez que dicha transición ocurre entre instituciones que mantienen una cierta relación ordenada, es decir que cada ciclo está parcialmente encaminado a preparar al estudiante para continuar al siguiente nivel.

Acorde con el estudio realizado, se observa como existen discontinuidades o vacíos entre la matemática que se imparte en la escuela primaria y secundaria (PS) y, así mismo, en la matemática de la escuela secundaria y la universidad (SU). Efectuada la observación anterior, es importante mencionar que existen investigaciones que proponen diferentes formas de disminuir las discontinuidades entre los niveles de

[30] De Guzmán, M. (1989). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
[31] Ibídem.
[32] Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon y Verschaffel (2016). Transitions in Mathematics Education. ICME – 13 Topical Surveys.

educación primaria, secundaria y terciaria, sin desconocer que dichas discontinuidades son inherentes a los procesos educativos.

En relación con la transición entre la educación secundaria y universitaria, ésta ha llamado la atención de muchos investigadores durante los últimos 20 años, como lo señalan Gueudet y Thomas (2008) y De Freitas, Druck, Huillet, Ju, Nardi, Rasmussen, y Xie (2015). Para todos estos investigadores, el paso de la escuela secundaria a la universidad está generalmente marcada por un aumento en la cantidad de asignaturas para el estudiante donde se tiene más de un profesor por clase. En el orden de las ideas anteriores cabe señalar que algunos de estos docentes también son investigadores con mucho más tiempo para preparar sus cátedras, pero con menos disponibilidad para cooperar en cuestiones pedagógicas.

Con respecto a las universidades es importante tener en cuenta que ofrecen diversos recursos tecnológicos a sus alumnos para que puedan utilizarlos en su proceso de aprendizaje; cabe agregar que a nivel académico estas instituciones permiten a los estudiantes aumentar su autonomía con el uso proactivo de libros, artículos, notas de clase, etc., en contraste con el libro único de texto que se utiliza en la escuela secundaria. Con referencia a lo anterior también los profesores tienen más libertad en la organización de los contenidos de su asignatura, así como en una mayor variedad de tipos de evaluación a emplear.

En el marco de la consideración anterior la matemática como disciplina a nivel universitario se ha centrado en la organización teórica de los contenidos matemáticos, el reconocimiento de fundamentos del conocimiento, y el trabajo con teoremas y demostraciones. Por el contrario, las matemáticas en secundaria hacen hincapié en la producción de resultados y un aspecto más práctico de la actividad matemática, donde el papel que juegan los axiomas, definiciones y pruebas es más "decorativo" por así decirlo. Al respecto Bosch, Fonseca y Gascón (2004) hablan de un sentido "incompleto" de las matemáticas en la escuela secundaria, teniendo en cuenta que aparecen como un conjunto de tareas aisladas que por lo general tienen una sola técnica de solución, donde la validación de los resultados se basa más en evidencias que en una construcción formal. En ese mismo sentido a nivel universitario también se puede hablar de incompletitud, pues existen una gran cantidad de resultados teóricos que se introducen sin conexión con los problemas y tareas que los motivan, así la necesidad de nuevos conocimientos está relacionada en raras ocasiones con el contenido y las prácticas de la matemática de la escuela secundaria.

Múltiples investigaciones sobre la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria se centran en el dominio de contenidos matemáticos específicos, como por ejemplo el cálculo, que es una de las líneas de investigación más estudiadas, de modo que se resta importancia al álgebra lineal y la geometría que son áreas de la matemática estrictamente involucradas en la transición de la escuela secundaria a la universidad. Por las consideraciones anteriores la evidencia basada en hechos geométricos de la secundaria debe convertirse en una prueba formal en la universidad.

Dentro de las investigaciones llevadas a cabo en relación con la transición SU, se evidencia como se han centrado en *"cursos puente"* organizados en varias universidades para disminuir la brecha entre la escuela secundaria y la terciaria como lo indican Kayander y Lovric (2005), Biehler, Fischer, Hochmuth y Wassong (2011). Algunos de estos estudios como los realizados por Serrano, Bosch, y Gascón (2007) y Sierpińska, Bobos, y Knipping (2008), muestran cómo los cursos complementarios de formación en realidad pueden llegar a aumentar la brecha entre las instituciones, en vez de facilitar la entrada de la nueva cultura y sus formas de trabajo. En este mismo sentido algunos cursos complementarios que proponen un trabajo intensivo basado en completar los conocimientos básicos necesarios, dan solidez a los conocimientos ya adquiridos, pero aparecen como una camisa de fuerza en la institución de educación superior con el propósito de establecer claramente los criterios de ingreso de los nuevos estudiantes, lo que dificulta la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria.

En último lugar el artículo señala que las diversas investigaciones llevadas a cabo en relación con la transición PS y SU se deben centrar en campos amplios de la matemática, donde el maestro tenga en cuenta la justificación de los contenidos matemáticos que imparte (para qué sirven), las razones por las que se les debe enseñar, e incluso su delimitación (lo que son). De los anteriores planteamientos, la posición de los investigadores acerca de la transición entre las instituciones de enseñanza, parece ser un asunto crítico en el cual se deben tener en cuenta las directrices institucionales.

En esta tesis se considera válido el criterio de los autores al establecer que las transiciones educativas requieren de diversas perspectivas teóricas y metodológicas para su desarrollo, donde las dificultades que se presentan se pueden asociar con oportunidades.

Conclusiones del capítulo 1

En el marco de las investigaciones que se han citado, se concluye que existe una problemática en la transición de la matemática de la escuela secundaria a la del nivel terciario. Con referencia a lo anterior, se evidencia la necesidad de formular un modelo didáctico basado en la solución de problemas matemáticos retadores, con el propósito de aplicar estrategias, desarrollar habilidades y generar nuevos conocimientos en los estudiantes que cursan los niveles de educación media y superior. Sobre la base de las consideraciones anteriores el modelo didáctico también debe contribuir al desarrollo intelectual del estudiante, al desarrollar su capacidad de pensar y analizar por sí mismo los problemas.

En este mismo sentido y dirección, es importante que dicho modelo didáctico contenga un sistema de actividades basado en la solución de problemas matemáticos como estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y que posea un énfasis fuerte y explícito en la creatividad y la comunicación.

Sobre la base de las consideraciones establecidas en los artículos se llega a la conclusión que los estudiantes aprenden conceptos de matemáticas resolviendo problemas con un alto grado de complejidad donde se promueven la perseverancia y la reflexión profunda. Este tipo de problema promueve la fluidez del procedimiento, la comprensión conceptual, el pensamiento lógico, y las conexiones entre las diversas temáticas que se trabajan en clase de matemáticas. De esta forma el profesor ve a los problemas que plantea como vehículos para fomentar las habilidades de los estudiantes respecto al razonamiento, la resolución de problemas, la escritura de demostraciones, entre otras.

Sin embargo, es necesario establecer que las transiciones educativas no sólo requieren ser vistas desde diversas perspectivas teóricas y metodológicas, pues deben ir enmarcadas en una reformulación del currículo de matemáticas. En referencia a lo anterior un currículo más retador permite cambiar lo que se está enseñando y no sólo cómo se está enseñando, puesto que esta teoría permite proponer y priorizar procesos de investigación – innovación en educación matemática, donde se problematice los contenidos que se imparten en la clase de matemáticas tanto a nivel de educación media como superior.

Como conclusión global del actual capítulo, se puede evidenciar cómo se ha tratado de presentar publicaciones que representan adecuadamente las investigaciones llevadas a cabo y que sean pertinentes para el desarrollo de la investigación que se propone en la presente tesis, sin desconocer que existe otro gran número de trabajos que tendrían una total pertinencia para ser analizados.

Sólo se pretende exponer una muestra que sea representativa para el próximo capítulo de la presente investigación.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Aunque el modo en que se presentará este capítulo, con los conceptos y definiciones teórico – conceptuales, muy bien podría parecer parte del estado del arte, la claridad que van a proporcionar al autor de este estudio los hacen merecedores de incluirse en el presente apartado.

2.1. Teoría de la resolución de problemas

Existe diversidad en la tipología de problemas que se emplean en matemáticas; la diferencia más importante para los profesores de matemáticas reside en los problemas que se denominan como rutinarios y los que no son rutinarios.

Se puede denominar como problema rutinario aquella situación que puede ser resuelta empleando un criterio que el estudiante aplica sin ningún esfuerzo ni conflicto, y que dada esta circunstancia no existe para el estudiante ningún tipo de desafío a su conocimiento. De este modo el estudiante obtiene cierta práctica en la aplicación de una regla para solucionar otros ejercicios que tengan características similares a la del problema formulado.

Por otra parte, un problema no es rutinario cuando el estudiante debe aportar cierto elemento de imaginación y originalidad para poder abordarlo; de esta forma enfrentar un problema no rutinario implica que el estudiante requiere un verdadero esfuerzo para encontrar su solución. Sin embargo, se debe partir del hecho que el estudiante no resolverá la situación presentada si no tiene razones para hacerlo. Dadas las consideraciones anteriores, se presentan a continuación algunas de las principales características que deben tener los problemas retadores.

- Debe tener un sentido y un propósito desde la perspectiva del estudiante.
- Deberá ser afín, de un modo natural, con su contexto o circunstancias familiares para el estudiante.
- Debe tener un propósito comprensible para él.

2.1.1. Modelo de solución de problema propuesto por Polya[33]

En esta publicación se plantea la actividad de resolver un problema como un arte en la que la imitación del maestro y la práctica ayudan al estudiante a descubrir e inventar en matemáticas. El modelo de solución de problemas que propone Polya (1945) se basa en cuatro fases, las cuales aparecen en su libro "*How to Solve It*" y se mencionan a continuación.

En la primera fase denominada comprensión del problema, el autor afirma que es imposible responder a una pregunta que no se comprende, al igual que es lamentable trabajar para un fin que no se desea, siendo estos dos errores muy comunes en la escuela que el docente debe evitar a toda costa que se presenten. Con referencia a lo anterior, si se presenta falta de comprensión o interés por parte del alumno, no es precisamente ocasionado por el maestro sino puede ser ocasionado por haberse seleccionado un problema inadecuado. Es por ello indispensable trabajar en el aula de clases situaciones y problemas que no sean ni muy difíciles ni muy fáciles. Después de las consideraciones el docente debe tomar un tiempo prudencial para poder exponer el problema planteado de forma natural e interesante a los estudiantes.

Es fundamental que el enunciado del problema sea comprendido por el alumno, y una forma eficaz de comprobarlo puede ser pidiéndole al estudiante que repita el enunciado, lo cual debe poder hacer sin ninguna duda. Es así como el alumno tendrá la capacidad de separar las principales partes del problema, determinar la incógnita, establecer los datos relevantes y encontrar las condiciones de la situación presentada. Precisando de una vez que en ocasiones surgirán en el aula preguntas tales como ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, etc.

En la fase de comprensión del problema, el estudiante debe establecer las partes principales del problema analizándolo bajo diversos puntos de vista. Por ejemplo, si el alumno puede realizar una representación

[33] Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University press.

gráfica del problema, debe poder destacar en ella los principales datos junto con la incógnita. Con referencia a lo anterior es importante que el estudiante asigne nombres a los elementos encontrados y por tanto realice una notación apropiada de los signos utilizados y cómo los emplea para la resolución del problema.

En la segunda fase, designada como concepción de un plan, se establece que el estudiante tiene un plan cuando sabe o al menos tiene una idea de los cálculos, razonamientos o construcciones que debe realizar para resolver la situación que se le planteó. En efecto Polya (1945) sugiere que, de la comprensión del problema a la concepción del plan, el camino puede ser extenso y sumamente complicado, es decir que la resolución de un problema consiste en concebir un plan para poder solucionar la situación presentada. Dadas las condiciones que anteceden, la idea ha de formarse paso a paso después de ensayos que parecen improductivos, luego de un período de dudas aparece una idea brillante para resolver el problema, por ello el docente debe procurar guiar al estudiante hacia esa idea brillante, sin necesidad de imponérsela o brindársela.

La tercera fase llamada por el autor ejecución del plan, consiste en ejecutar la concepción de la idea para solucionar el problema, tarea que no es nada sencilla, para lograr esta meta es necesario que el alumno ponga en juego todos los conocimientos que ha adquirido, su pensamiento matemático, concentración y hasta buena suerte. El plan brinda una perspectiva general de la solución del problema, donde se debe estar seguro que todos los elementos que se tienen hasta el momento encajan de forma adecuada para la solución del problema planteado. Por eso es necesario que en su ejecución también se examinen los detalles minuciosamente, de tal modo que se esté seguro de no incurrir en algún error. Resulta oportuno indicar que el estudiante debe tener mucha paciencia cuando llegue a la ejecución del plan.

Por último, se tiene la fase denominada visión retrospectiva en la cual es importante realizar un proceso de reconsideración de la solución, por ello es necesario verificar el resultado del plan concebido. Es evidente entonces como, gracias a la fase de visión retrospectiva, el estudiante puede afianzar sus conocimientos y desarrollar sus capacidades para resolver problemas. En este propósito es importante que el maestro comprenda y haga reflexionar a sus estudiantes que ningún problema está completamente terminado, siempre va a quedar algo por hacer, así pues, al perfeccionar la solución el estudiante logra una mejor comprensión de la solución propuesta.

2. 2. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático[34]

El razonamiento se caracteriza por ser un proceso del pensamiento que posibilita obtener conclusiones a partir de ciertas premisas preestablecidas, de acuerdo a esta concepción se puede realizar una distinción entre razonamiento inductivo y deductivo. Algunos investigadores como Polya, Poincaré y Whitehead, consideran la inducción como una fuente importante de generación de conocimiento; de esta forma Polya (1945) indica que la inducción es un método que utilizan los científicos para abordar la experiencia o un método para descubrir propiedades por medio de la observación de fenómenos repetitivos. Con referencia a lo anterior Polya (1945) también propone que el razonamiento inductivo es el razonamiento natural que permite llegar al conocimiento científico por medio del develamiento de las leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Para Poincaré (1902) la inducción se refiere al acto de reflexionar y tratar la naturaleza del razonamiento matemático, e indica Poincaré que la inducción es el camino para llegar al conocimiento en cualquier ciencia, particularmente en la matemática, donde se parte de situaciones particulares para poder establecer regularidades y por último generalizar. A su vez Whitehead (1911) establece que la inducción parte de la percepción de lo general a lo particular, de distinguir lo que se conserva invariante y lo que es transitorio, durante el proceso de la generación del conocimiento científico.

[34] Castro, E., Cañadas, M, C. y Molina, M. (2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático*. p. 55 – 67.

Se puede observar como la inducción y el razonamiento inductivo se utilizan simultáneamente, denotando un proceso cognitivo que permite obtener regularidades a partir de un comportamiento común observado en casos particulares; en consecuencia, algunos autores consideran el razonamiento inductivo como base de la construcción del conocimiento matemático. En ese mismo sentido Castro, Cañadas, Molina (2010) proponen un modelo compuesto por siete fases que contribuyen a la construcción del conocimiento matemático basado en el razonamiento inductivo las cuales se describen a continuación.

- Trabajo con casos particulares: Casos concretos, sencillos y fácilmente observables.
- Organización de casos particulares: Tener los datos obtenidos de tal modo que ayude a la observación de patrones.
- Identificación de patrones: El patrón es lo que se encuentra reiteradamente o con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que ocurrirá nuevamente.
- Formulación de conjeturas: Es una proposición que se presume verdadera, teniendo en cuenta que no ha sido sometida a una exploración, en dicha exploración se puede determinar si es aceptada o rechazada.
- Justificación de las conjeturas: Establece la razón para evidenciar la verdad de una afirmación. En ese mismo sentido se pueden hacer dos distinciones entre justificaciones empíricas y justificaciones deductivas.
- Generalización: La conjetura obtenida se debe formular en términos que haga referencia a todos los casos particulares tenidos en cuenta, donde se realiza una extensión de razonamiento.
- Demostración: Es el proceso de validación formal que no da lugar a dudas sobre la conjetura que se trata de probar.

Después de las consideraciones anteriores es importante dejar en claro que estas fases no tienen la misma relevancia en el razonamiento inductivo, al punto de llegar a afirmar que algunas de ellas son necesarias y otras no. Es importante precisar que la sexta fase denominada "generalización" es imprescindible en el razonamiento inductivo, pero también es la más difícil de conseguir en los estudiantes, por este motivo se considera a la generalización como el proceso generador de conocimiento. La fase de generalización en matemáticas se puede expresar mediante lenguaje verbal, representaciones simbólicas, algebraicas o mediante cualquier tipo de lenguaje como el gestual. En relación con la última fase denominada *"demostración"*, permite verificar si se encuentra frente a un nuevo conocimiento, verificando si la conjetura tiene validez desde la matemática formal.

2. 2. 1. Razonamiento inductivo y educación matemática

En los estándares de NCTM (2003) se puede evidenciar como la generalización debe ser uno de los principales objetivos en educación matemática, esta afirmación se realiza gracias a la importancia de la inducción y del razonamiento inductivo en el proceso de formación de los estudiantes. Por ello se puede considerar a la inducción como un medio poderoso para la adquisición de conocimientos y el descubrimiento en matemáticas, de tal modo que los estudiantes experimenten situaciones semejantes a las que debe vivir un matemático en su rol como científico. Es evidente entonces como la inducción se puede describir en términos de la recolección de ideas, donde se pueda vislumbrar aspectos que van más allá de lo que podemos percibir, de modo que se puedan ver regularidades y además plantear conjeturas. De acuerdo con las observaciones que se han venido realizando, el NCTM afirma que hacer matemáticas implica descubrimiento y las conjeturas son el principal camino hacia el descubrimiento.

En el marco de las observaciones anteriores autores como Mason, Johnston y Wilder (2005) afirman que el trabajo en el aula con el propósito de realizar procesos de generalización es la esencia de la actividad matemática, por ello apoyan la hipótesis de considerar que una clase en la que los alumnos no tengan la oportunidad de hallar generalidades, no es una verdadera clase de matemáticas.

Por otra parte, Polya (1966) critica el hecho de considerar a la matemática como una disciplina formal y deductiva, pues resalta que debe tener una actitud inductiva. El investigador considera que se puede estar ante una verdad científica, cuando el estudiante trata de extraer de una situación determinada conclusiones adecuadas y además recolecta las experiencias más importantes, para establecer el mejor camino para llegar a una solución.

En relación con la educación matemática se le atribuyen dos funciones al razonamiento inductivo. La primera se refiere a que posibilita el descubrimiento de nuevos conocimientos por medio de la formulación de conjeturas a partir de casos particulares, obteniendo como resultado el proceso de generalización. La segunda función se establece en términos de la comprobación de conjeturas, mediante el análisis de argumentos particulares. Todo lo anterior indica que, introducir este tipo de razonamiento en clase de matemáticas como método previo al trabajo con el razonamiento deductivo, conlleva a procesos de validación formal, por tanto, parece obvio que la fase inductiva anteceda a la fase demostrativa, pues es así como se potencia en los estudiantes el desarrollo de capacidades y hábitos de trabajo que les permitan un adecuado manejo de procesos de validación formales.

Recientemente han sido numerosas las investigaciones en educación matemática que dan cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes que cursan la educación media y universitaria en relación con los procesos de validación formal, como por ejemplo los estudios realizados por Maher y Martino (1996) y Waring, Orton, y Roper (1999). Este tipo de dificultades se pueden evidenciar en el instante en que los estudiantes no pueden adquirir las habilidades de razonamiento necesarias para lograr comprender y realizar demostraciones matemáticas formales de forma inmediata, sino que por el contrario requieren un lapso de tiempo extenso para lograr adaptarse. Es evidente entonces la importancia de seguir un proceso lógico con el estudiante en el desarrollo de su razonamiento, pasando de los razonamientos cotidianos concretos, hacia los razonamientos matemáticos abstractos, dando así la relevancia que se merecen los procesos de validación informales como transición hacia las demostraciones formales en el área de matemáticas.

2. 3. El papel de las representaciones visuales en el aprendizaje de las matemáticas [35]

Para los investigadores Adams y Víctor (1993), el sentido de la visión es la fuente más importante de información que poseemos sobre el mundo que nos rodea, pues la mayor parte del cerebro participa en este proceso ya sea manteniendo el control visual del movimiento, percibiendo el entorno, codificando símbolos, formas o color de los objetos. El nervio óptico está compuesto por más de 1 millón de fibras a comparación con el nervio auditivo que tan solo contiene 50.000 fibras. Además, la investigación del sistema visual ha avanzado considerablemente, lo que conlleva a tener un mayor conocimiento de nuestro sistema nervioso; por ese motivo en la actualidad se sabe más acerca del sentido de la visión que de cualquier otro sistema sensorial.

Dadas las condiciones que anteceden a nivel sociocultural, se puede afirmar que vivimos en un mundo donde la información se transmite principalmente empleando medios visuales, soportado en las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. Cabe la pena resaltar que la humanidad siempre ha utilizado imágenes para el registro y la comunicación de información, es así como desde una concepción sociocultural más no desde una perspectiva biológica, es importante aprender a distinguir no sólo lo que se ve a simple vista, sino también lo que se es incapaz de ver. A lo largo de los planteamientos hechos se puede establecer que una forma de caracterizar la visualización y su importancia, puede ser reconociéndola como el medio para obtener imágenes, sin desconocer que la visualización también permite ver lo invisible, de acuerdo con lo propuesto por Mc Cormick, De Fantim y Brown (1987). Todo lo

[35] Arcavi, A. (2003*). The Role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 215 – 241.

mencionado anteriormente lleva a la conclusión que la visualización puede ir mucho más allá del sentido de la visión.

De este modo cuando se emplea la palabra invisible, nos referimos a aquello que no se puede ver, ya sea por limitaciones del ojo o porque el objeto se encuentra demasiado lejos o es demasiado pequeño. Teniendo en cuenta este tipo de situaciones, el ser humano ha desarrollado nuevas tecnologías que permiten superar sus limitaciones, pero a pesar de tener al alcance de la mano estas nuevas herramientas tecnológicas de visualización, es posible escuchar descripciones de objetos antes de poder ver sus imágenes y es en ese preciso momento que el cerebro pudo haber creado imágenes de acuerdo con las descripciones que nos hubiesen brindado. Sin embargo, ver el objeto con la ayuda de la tecnología, supera la limitación del deseo de ver que a su vez agudiza la comprensión y sirve como medio para realizar preguntas que no se había sido capaz de formular antes.

En un sentido figurado y profundo, poder ver lo invisible se refiere a un ente más abstracto, que ninguna tecnología óptica puede visualizar para nosotros; se puede entonces formular la necesidad de emplear una tecnología cognitiva como la denomina Pea (1987). De acuerdo con Pea (1987) la tecnología cognitiva, se debe emplear en el momento de desarrollar actividades que requieren de ayuda para trascender las limitaciones de la mente, el pensamiento, el aprendizaje o en la resolución de problemas. Este tipo de tecnología puede ayudar a desarrollar estrategias mentales para visualizar más fácilmente los conceptos y las ideas matemáticas.

Sobre la base de las consideraciones anteriores las matemáticas, como producto del intelecto humano, tratan con objetos y entes muy diferentes a los que podemos encontrar en los fenómenos físicos, pues dependen en gran medida de su visualización en diferentes formas o niveles. Es así como este tipo de visualizaciones se encuentran mucho más allá del campo visual de la geometría o de la visualización espacial en matemáticas. Es importante resaltar el concepto de Zimmermann y Cunningham (1991) al proponer que *"la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre las imágenes y diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el finalidad de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y hacer avanzar la comprensión"*[36].

En este sentido los matemáticos han sido conscientes del valor de la visualización, tanto para la enseñanza como para la heurística en el descubrimiento matemático, sin embargo, a pesar de la importancia de las imágenes en las actividades cognitivas humanas, las representaciones visuales siguen pasando a un segundo plano, tanto en la teoría como en la práctica de las matemáticas. Debido a esto, se ha presentado una cultura matemática que enseñó a mirar con recelo las pruebas y demostraciones que hacen uso crucial de diagramas, gráficos, u otras formas de representación no lingüísticas, teniendo como resultado tal desprecio por este tipo de pruebas y demostraciones que llegan a ser heredadas por los estudiantes. Por el contrario, las formas visuales de representación pueden ser importantes como elementos legítimos para formular demostraciones en matemáticas como lo hacen saber Barwise y Etchemendy (1991).

2. 4. Enseñanza de las ciencias y la matemática[37]

2. 4. 1. Sobre el papel de la historia en el proceso de formación del matemático

De acuerdo con De Guzmán (2004), la visión histórica convierte los simples hechos y destrezas sin antecedentes en conocimientos buscados ansiosamente por matemáticos que se alegraron inmensamente cuando se encontraron con ellos por primera vez, contrario a lo que ocurre en las aulas de clase donde muchos estudiantes han tenido que asumir como verdades absolutas los teoremas, lemas o axiomas que aparecen de la nada, pero que cambian de aspecto cuando adquieren un sentido dentro

---

36 Zimmermann y Cunningham (1991*). Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America. p. 1 – 8.

37 De Guzmán, M. (2004). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Madrid: Universidad complutense de Madrid.

de una teoría luego de estudiarla a fondo, incluyendo su contexto biográfico e histórico.

Como puede observarse el enfoque histórico de la matemática permite verla como una ciencia producto del intelecto humano, de modo que los estudiantes pueden verla menos endiosada y en ocasiones inexacta, pero como una ciencia que tiene la capacidad de corregir sus errores. Todo ello aproxima al estudiante a las personalidades de innumerables matemáticos que han ayudado a su progreso a lo largo de muchos siglos, por múltiples motivaciones. De los anteriores planteamientos se deduce que la historia de la matemática proporciona un contexto donde todos los elementos aparecen en su verdadera perspectiva.

En efecto, si en los conceptos matemáticos que aparecen en los libros de texto hubiese una referencia de la época respecto al tema que se está trabajando, se podría ver como siglos enteros saltarían disparatadamente hacia adelante y hacia atrás, alternándose continuamente, dentro de una misma página o párrafo. Ante la situación planteada, De Guzmán (2004) indica que no se trata de hacer conscientes a los estudiantes de esta circunstancia, es decir que el orden lógico no debe ser necesariamente el orden histórico, pero el docente debe saber el verdadero significado de la historia de las matemáticas en el aula con tres propósitos fundamentales, el primero de ellos es comprender los problemas del ser humano y de la humanidad en la producción de las ideas matemáticas, y por medio de esto comprender lo que le puede ocurrir a sus propios estudiantes. El segundo aspecto es el de entender mejor la construcción de las ideas, motivos y modificaciones que han sufrido las matemáticas. Por último, es importante emplear este saber cómo una guía de la pedagogía propia de su clase.

Retomando la idea principal, el conocimiento de la historia de las matemáticas brinda una visión dinámica de cómo ha evolucionado esta ciencia, pues es allí donde se pueden encontrar las ideas originales con un sentido de aventura, que en múltiples oportunidades desaparecen en los textos de educación secundaria. Por las consideraciones anteriores se debe tener presente la perspectiva dinámica de las matemáticas, de modo que puedan orientar a los maestros en relación con la posibilidad de extrapolación en el camino de aprendizaje del estudiante, así como la inmersión creativa en las dificultades del pasado y la comprobación del difícil recorrido del descubrimiento en matemáticas, junto con todas las ambigüedades que se presentan, las confusiones iniciales, etc.

A manera de resumen final, De Guzmán (2004) considera que el conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus exponentes más relevantes, posibilita vislumbrar el carácter profundamente histórico, contextual, circunstancial, y social de esta ciencia.

Para el autor de este artículo el verdadero significado del conocimiento histórico no consiste en tener un conjunto de historietas o de hechos curiosos para divertir a los estudiantes con el propósito de hacer un alto en el camino, la historia de las matemáticas se debe emplear para el entendimiento y la comprensión de conceptos complejos de un modo más adecuado. Con referencia a lo anterior el maestro que no tenga ni la más remota idea del desarrollo conceptual que ha tenido que sufrir el pensamiento matemático hasta llegar, por ejemplo, a la noción formal de número complejo, sentirá la necesidad de introducir en su enseñanza los números complejos como *"una extensión de los números reales y forman el mínimo cuerpo algebraicamente cerrado que los contiene. El conjunto de los números complejos se designa como..."*.

Para De Guzmán (2004) *“Quien sepa que ni Euler ni Gauss, con ser quienes eran, llegaron a dar ese rigor a los números complejos y que a pesar de ello pudieron hacer cosas maravillosas relacionadas con ellos, se preguntará muy seriamente acerca de la conveniencia de tratar de introducir los complejos en la estructura cristalizada antinatural y difícil de tragar, que sólo después de varios siglos de trabajo llegaron a tener”.*[38] Con referencia a lo anterior el autor señala que diversos métodos que se emplean en el pensamiento matemático, como la inducción, la probabilidad, la topología, la geometría analítica, el pensamiento algebraico y el cálculo infinitesimal, entre otros, han surgido en condiciones históricas

[38] De Guzmán, M. (2004). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Madrid: Universidad complutense de Madrid.

extremadamente interesantes y muy singulares, en la mente de matemáticos muy peculiares que son dignos de ser mencionados.

Como conclusión Miguel de Guzmán señala que la historia debe tener los siguientes objetivos:

- Resaltar la forma peculiar en que aparecieron las ideas en matemáticas.
- Establecer espacio – temporalmente las grandes ideas y problemas, junto con su motivación o precedentes.
- Referir los problemas propuestos de cada época, cómo han evolucionado y cómo se encuentran actualmente.
- Determinar cómo se relaciona la historia de la matemática con otras ciencias, donde se evidencia como el resultado de dicha interacción ha sido la consecución de aportes a diversas teorías.

2.5. Generación de un currículo más retador en matemáticas para todos los estudiantes[39]

De Losada (2011) propone que se debe diseñar y desarrollar un currículo matemático más retador para todos los estudiantes, de este modo se puede analizar la matemática como ciencia y además efectuar una práctica docente más profunda en donde se deje de lado los prejuicios del maestro.

Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede encontrar una línea de investigación y desarrollo enmarcada en el diseño, organización y realización de diversos aspectos que buscan promover una experiencia más retadora en matemáticas. Uno de los aspectos más importantes de esta teoría consiste en poder describir la naturaleza del pensamiento matemático y determinar cómo se puede llevar a cabo el desarrollo del mismo en el aula de clase, de tal forma que sea para el estudiante apropiado y divertido. En consecuencia, se espera que el alumno deje opciones abiertas en la toma de decisiones en

39 De Losada, M, F. (2011*). Retos matemáticos: una agenda para investigación y acción.* XXIV coloquio distrital de matemáticas y estadística.

su vida profesional, financiera, personal o ejerciendo sus derechos como ciudadano.

Retomando la importancia de realizar una evolución hacia un currículo matemático más retador, el mismo no ha tenido el impacto que se merece en la política de educación matemática en general, pues en la mayoría de los casos los maestros, así como quienes fijan los rumbos de la política educativa en cada país, siguen buscando un camino alternativo. Es evidente entonces que buscan una solución milagrosa o algún método que el docente pueda entender al instante y a su vez pueda transmitirlo a sus estudiantes sin ningún tipo de dificultad o sin realizar el más mínimo esfuerzo. No obstante, la investigadora señala que la matemática forma al estudiante y lo cautiva porque necesita de esfuerzo, un esfuerzo que debe ser constante e inspirado, para poder realizar matemáticas a todo nivel.

2.6. Una perspectiva conceptual, teórica y práctica. Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad[40]

A nivel académico, las instituciones se basan en el supuesto que el aprender debe ser un proceso de carácter individual que simplemente tiene un principio y un final, con el propósito que los estudiantes presten atención al docente o se centren en resolver ciertos ejercicios propuestos. Hecha la observación anterior, el proceso evaluativo de los aprendizajes se realiza a través de exámenes en los cuales los estudiantes se deben enfrentar solos a la evaluación de sus conocimientos; por ello la interacción con otros alumnos es considerada como trampa, motivo por el cual los estudiantes consideran el proceso de enseñanza como irrelevante y aburrido. Por los argumentos presentados anteriormente, se hace necesario replantear el proceso de aprendizaje en el aula, teniendo en cuenta que puede ser un fenómeno primordialmente social donde se refleja la naturaleza del ser humano como individuo capaz de conocer.

[40] Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: The press syndicate of the university or Cambridge.

Con referencia a lo anterior existen diversos tipos de teorías de aprendizaje, cada una de las cuales destaca diferentes aspectos y por ello, dependiendo de su enfoque, se puede utilizar con diversos fines. Es evidente entonces como cada una de las diferencias que existen entre las teorías propuestas en educación refleja un enfoque diferente para abordar un adecuado proceso de aprendizaje. En esta línea de pensar, la teoría social de aprendizaje pretende establecer un conjunto de principios y recomendaciones para lograr una adecuada comprensión y posibilitar el aprendizaje en el estudiante. La teoría de aprendizaje y naturaleza del conocimiento propuesta por Wenger (1998) tiene en cuenta las siguientes realidades a nivel educativo:

- Somos seres sociales.
- El conocimiento es una cuestión de competencia en relación con el campo de desempeño del individuo.
- Conocer es cuestión de participar en la consecución de estas competencias.

Es evidente entonces que el interés primordial de esta teoría se centra en el aprendizaje por medio de la participación social; en este mismo orden y dirección se denomina como participación social al proceso activo que lleva a cabo el individuo dentro de las comunidades de práctica, donde realiza la construcción de identidad en relación con su comunidad. Como consecuencia de todo ello, la teoría social de aprendizaje debe integrar componentes relacionados con la participación social, procurando favorecer los procesos de aprendizaje y obtención del conocimiento, teniendo en cuenta el significado de los objetos, la práctica, la comunidad y la identidad.

De acuerdo con los planteamientos que ha venido realizando, Wenger (1998) afirma que todos los seres humanos pertenecen a comunidades de práctica y en ocasiones pertenecen a varias comunidades de práctica simultáneamente. Algunos ejemplos de comunidades prácticas en la vida cotidiana pueden ser entornos familiares, laborales, académicos, religiosos, científicos, etc. En relación con la escuela, los estudiantes asisten a ella y, cuando se reúnen para asumir su rol en el día a día que impone la institución, se generan nuevas comunidades de práctica; pero a pesar del currículo, las normas de convivencia y los objetivos propios de la academia, es más significativo para el estudiante el aprendizaje derivado de la afiliación a las comunidades de práctica.

Hecha la observación anterior, el principal interés de esta teoría se centra en el aprendizaje como participación social, de este modo la participación no sólo se refiere a los acontecimientos específicos con cierto tipo de actividades y con determinadas personas, sino a un proceso más significativo consistente en participar activamente en las prácticas de las comunidades sociales y en construir identidades en relación con estas comunidades. Por esta razón una teoría social del aprendizaje integra los componentes necesarios para poder caracterizar la participación social como un proceso de aprender y de conocer. De acuerdo con Wenger (1998) los componentes de la teoría social de aprendizaje son:

- *Significado: una manera de hablar de la capacidad (cambiante) en el plano individual y colectivo de experimentar la vida y el mundo como algo significativo.*
- *Práctica: una manera de hablar de los recursos históricos y sociales, los marcos de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo en la acción.*
- *Comunidad: una manera de hablar de las configuraciones sociales donde el perseguir las empresas se define como valiosa y la participación es reconocible como competencia.*
- *Identidad: una manera de hablar del cambio que produce el aprendizaje en quién se es y de cómo crea historias personales el devenir en el contexto de las comunidades.*[41]

Según se ha visto es indiscutible como estos elementos se encuentran profundamente interconectados y se definen mutuamente como se puede apreciar en la Figura 1.

[41] Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: The press syndicate of the university or Cambridge.

Figura 1. Componentes de la teoría social del aprendizaje.[42]

Después de todas las consideraciones anteriores, Wenger (1998) sugiere que para poder repercutir en el proceso de comprensión y aprendizaje se debe replantear los siguientes aspectos a nivel académico:

- Que los individuos participen y contribuyan a las prácticas de las comunidades.
- Que las comunidades refinen su práctica y garanticen nuevas generaciones de miembros.
- Que las organizaciones sostengan intercomunicadas las comunidades de práctica.

Se puede apreciar claramente como el aprendizaje no es una actividad aislada, en la cual existen momentos en los cuales el aprendizaje se pueda intensificar y es en aquellos instantes que el sentido de familiaridad tambalea. En efecto esto sucede cuando se pone a prueba la capacidad de respuesta del intelecto ante un desafío, es decir, que implica emplear nuevas prácticas y es necesario unirse a nuevas comunidades.

Cabe agregar que la teoría propuesta por Wenger (1998) establece que, si se cree que el conocimiento está compuesto por fragmentos de información almacenados en el cerebro, entonces es imprescindible empaquetar esta información en unidades bien diseñadas, congregar a los futuros destinatarios de esta información en el aula de clase donde estén cabalmente inmóviles, aislados de cualquier distracción, y

[42] Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: The press syndicate of the university or Cambridge.

entregar dicha información de la forma más precisa y articulada posible. Desde esta óptica, se llega a considerar que si se cree que la información recopilada de formas explícitas sólo es una parte pequeña de conocer y que conocer establece principalmente una participación activa en comunidades sociales, entonces la educación tradicional no parece productiva. En este sentido, lo que sí parece alentadores son las formas en que los estudiantes participen en prácticas significativas, y de este modo se proporciona un acceso a recursos que refuercen su participación y aumenten sus horizontes en las comunidades de las cuales son participes.

De esta forma se puede concluir que aprender constituye una parte integral del cotidiano vivir, en el cual se establece relaciones con las comunidades y organizaciones. Pero el problema no radica en esto, el problema consiste en que no se posee formas sistemáticas para hablar de esta experiencia que es familiar para el individuo que conforma la comunidad de práctica. Por ello es importante considerar las repercusiones que tiene el tratar de organizar el aprendizaje y el discurso que se emplea para hacerlo, en términos de un marco de referencia que incluya el aprendizaje social.

2.7. Curso de solución de problemas[43]

El curso de solución de problemas matemáticos es una propuesta metodológica que tiene como propósito servir como escenario para lograr realizar exitosamente la transición de los estudios secundarios a los universitarios en matemáticas y nivelar sin repasar repetitivamente los conceptos matemáticos elementales de los alumnos que ingresan a las facultades de ingeniería, licenciatura, ciencias administrativas, económicas y sociales en la Universidad Antonio Nariño.

[43] UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO, (2015). Plan de estudios Ingeniería Mecánica. Recuperado en octubre 15 de 2015 de la URL: http: http://www.uan.edu.co/ingenieria-mecanica-plan-de-estudios

De acuerdo con la Universidad Antonio Nariño el nivel académico en el área de matemáticas de los alumnos que ingresan a las universidades colombianas en general es deficiente, a pesar de que han cursado once años de educación comprendidos entre los ciclos de educación primaria, básica y media.

También sugiere la Universidad Antonio Nariño que los conceptos básicos de matemáticas se han tratado de modo superficial o en ciertas ocasiones ni siquiera se han visto, como podría ocurrir en el caso de la geometría; sin embargo, se parte del hecho que estos conceptos básicos no son totalmente desconocidos por los estudiantes, de este modo la propuesta es desarrollar el pensamiento matemático del estudiante a la vez que se logra un repaso y afianzamiento de la matemática elemental, en el contexto de la solución de problemas novedosos y no rutinarios, empleando un sistema de actividades basado en la solución de problemas matemáticos.

Es evidente entonces la importancia de cursar esta materia, pues ambienta, motiva y muestra la necesidad del trabajo en grupo para enfrentarse a los diversos retos que se les presentan a los estudiantes en cada uno de sus cursos. Así el aprendizaje de las matemáticas no queda relegado a tan solo realizar ejercicios extensos y monótonos, por el contrario, llega a ser entretenido, agradable y significativo.

De acuerdo con el programa de la catedra de solución de problemas de la Universidad Antonio Nariño se pretende que, al finalizar el curso el estudiante comprenda lo que significa "Pensamiento Matemático", de tal modo que lo pueda seguir desarrollando en sus asignaturas posteriores y, además, que pueda clarificar, ampliar y completar los conceptos erróneos o parcialmente ciertos que ha adquirido en su formación de los niveles de educación primaria, básica y media.

Los objetivos específicos que tiene el curso de solución de problemas se citan a continuación.

- *Hacer uso de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división y emplearlos correctamente en la formulación de la solución de los problemas propuestos.*

- *Descomponer correctamente los números enteros en sus factores primos y utilizar esta descomposición para resolver problemas.*
- *Reconocer los números racionales y manipularlos correctamente.*
- *Leer comprensivamente los problemas propuestos y lograr formular caminos de solución.*
- *Emplear diferentes técnicas de solución de sistemas de ecuaciones, tanto lineales como no lineales, identificar el número de soluciones y aplicar estos conceptos para solucionar problemas.*
- *Hacer uso de los vectores, sus operaciones y sus propiedades, para solucionar problemas relacionados con vectores o formas vectoriales.*
- *Aplicar correctamente las técnicas de conteo.*
- *Dominar los conceptos de permutación, variación y combinatoria y emplearlos en la solución de problemas.*
- *Construir e interpretar correctamente las gráficas básicas para una distribución dada de datos.*
- *Conocer y aplicar correctamente los casos de congruencia y semejanza de triángulos.*
- *Aplicar correctamente los conceptos de perímetro y área, en las diferentes figuras geométricas tanto regulares como irregulares.*
- *Aplicar correctamente las relaciones que existen entre los lados del triángulo rectángulo, aplicar correctamente el teorema de Pitágoras.*
- *Conocer las construcciones básicas con regla y compás.*[44]

Los contenidos que se trabajan en la clase de solución de problemas se describen a continuación:

- Aritmética: Operaciones básicas. Criterios de divisibilidad. Descomposición en números primos. Operaciones con racionales.
- Combinatoria: Técnicas de conteo.

[44] UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO, (2015). Plan de estudios Ingeniería Mecánica. Recuperado en octubre 15 de 2015 de la URL: http: http://www.uan.edu.co/ingenieria-mecanica-plan-de-estudios

- Álgebra: Sistemas de ecuaciones. Técnicas de factorización. Ecuación cuadrática.
- Geometría: Áreas y ángulos. Congruencia y semejanza de triángulos. Trigonometría. Representación en el plano.
- Aplicaciones: Vectores y matrices.

Conclusiones del Capítulo 2

Se acaban de enunciar los fundamentos cognoscitivos, disciplinares y metodológicos sobre los cuales se basa la presente investigación. Con referencia a lo anterior, se realizará el diseño del modelo didáctico donde se tendrá en cuenta:

- La generación de un currículo más retador, al proponer el análisis de la matemática como ciencia y a la práctica docente como una labor de reflexión constante, de modo que se pueda describir la naturaleza del pensamiento matemático y determinar cómo se puede llevar a cabo el desarrollo del mismo en el aula de clase, de forma que sea apropiado y divertido para el estudiante.
- Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad, al considerar las repercusiones que tiene el tratar de organizar el aprendizaje y el discurso que se emplea para hacerlo, en términos de un marco de referencia que incluya un aprendizaje social.
- El papel de la historia en el proceso de formación del estudiante, al establecer que la historia de la matemática se debe emplear en el aula de clases, para generar en el estudiante un entendimiento y comprensión de conceptos complejos de un modo más adecuado.
- Las fases de comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva, propuestas en la obra de Polya (1945).
- El papel de las representaciones visuales en el aprendizaje de las matemáticas, al proponer que la visualización es la capacidad que tiene el estudiante para interpretar, usar y reflexionar sobre las imágenes que puede crear en su mente, con el propósito de representar, comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas. Todo esto con el objetivo que

el alumno avance en la comprensión de un concepto.

- El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático, al considerar a la inducción como un medio poderoso para la adquisición de conocimientos y el descubrimiento matemáticas, de modo que los estudiantes experimenten situaciones semejantes a las que debe vivir un matemático en su rol como científico.

Teniendo en cuenta los criterios antes mencionados se realizará el diseño del modelo didáctico que se quiere validar en la tesis.

CAPÍTULO 3. MODELO DIDÁCTICO

Un modelo didáctico se puede definir como un recurso para mejorar el proceso de enseñanza en el aula de clases, donde se lleva a cabo un plan estructurado para lograr configurar el currículo junto con el diseño de actividades, que permiten orientar de forma adecuada el proceso de aprendizaje en los estudiantes. Al proponer el presente modelo didáctico se consideró que no existe ninguno que posibilite la consecución de todo tipo de objetivos y que se adecúe a todas las situaciones propuestas. Sin embargo, el modelo que se propone en la investigación puede alcanzar la delimitación de algunas de las variables, y permitir una perspectiva aproximada al problema de investigación formulado, orientando estrategias para la verificación de relaciones entre dichas variables.

Realizadas las consideraciones anteriores el modelo didáctico propuesto pretende favorecer la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos, teniendo en cuenta la articulación que debe existir de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria (Gómez, 2009) y el enfoque húngaro de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que tiene énfasis en la resolución de problemas matemáticos, la creatividad y la comunicación (Matsuura, 2014).

Cabe agregar que el modelo didáctico está enmarcado en el diseño, organización y realización de diversos aspectos que buscan promover una experiencia más retadora en matemáticas (De Losada, 2011), es así cómo, al estimular el saber matemático escolar a través de diseños didácticos orientados al desarrollo del pensamiento matemático, genera en los estudiantes una apropiación de lo que hacen y a su vez los hace conscientes que no se trata de ser bueno o malo en matemáticas, sino de participar y hacer matemáticas en el aula de clases (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014).

De los anteriores planteamientos es importante señalar que el modelo didáctico está diseñado para que el entendimiento de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento matemático se retroalimenten mutuamente durante el proceso de solución de los problemas, teniendo en cuenta que sin la resolución de problemas no se podría concebir un desarrollo del pensamiento matemático y por tanto no se lograría tener una formación académica sólida (Mazarío y Sanz, 2009).

Para la elaboración del modelo didáctico se tiene en cuenta que el mismo debe ser:

- Abierto: Capaz de interactuar con el medio.
- Flexible: Capaz de adaptarse y acomodarse a diferentes situaciones dentro de un marco o estructura general.
- Dinámico: Capaz de establecer diferentes relaciones que se puedan generar.
- Aleatorio: Capaz de poder actuar con un margen de error, o de éxito aceptable, que dé confianza a la acción.

Además, debe permitir fundamentar la interacción que se establece entre docente y estudiante en el aula de clases, y a partir de ello, evaluar la efectividad del aprendizaje, teniendo en cuenta que el profesor tiene la tarea de planear, ejecutar y evaluar la propuesta didáctica formulada con base en el modelo.

El modelo alcanza una mayor connotación al ser diseñado a partir de las problemáticas existentes en la transición de la educación matemática de la escuela secundaria a la terciaria, tratando de dar una posible solución a dicha problemática, siendo así un insumo para la sociedad.

3.1. Objetivos del modelo didáctico

Los objetivos del modelo didáctico formulado se encauzan hacia los conocimientos y habilidades que poseen los estudiantes, teniendo en cuenta que existen elementos como los contenidos y las actitudes de los estudiantes que también se deben tener en cuenta. De acuerdo con Álvarez (1999)[45], actualmente la psicología, la pedagogía y la didáctica asumen tres tipos de objetivos que se deben forjar en los

[45] Álvarez, C. (1999). La Escuela en la Vida. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

estudiantes y los cuales se deben tener en cuenta en el momento de formular un modelo didáctico. Dichos objetivos se detallan a continuación:

- Los objetivos instruccionales, que se refieren al dominio del conocimiento y el desarrollo de determinadas habilidades que se desea promover en el estudiante.
- El objetivo desarrollador, que se refiere a aquellas facultades o habilidades que se deben formar en el estudiante, como resultado de la acción directa de una o varias habilidades respecto a los conocimientos adquiridos.
- Los objetivos formativos, que enfatizan el valor que tienen los contenidos, el conocimiento y las habilidades que tiene el sujeto en formación. Esta concepción es válida para el proceso de aprendizaje que se debe llevar a cabo en los adolescentes, el cual será o no significativo en la medida en que él se identifique con el contenido y el modo en que lo ponga en práctica en resolución de problemas matemáticos.

Cabe agregar que Álvarez (1999) señala que los objetivos instruccionales, desarrolladores y formativos, al interactuar entre sí, potencian un aprendizaje comprensivo de las matemáticas en los estudiantes. Por ello, sobre la base de la consideración anterior, el modelo didáctico planteado en la presente investigación debe tener en cuenta que el proponer unos objetivos formativos, implica una asociación entre los objetivos instruccionales, formativos y desarrolladores, donde es de vital importancia lograr una interacción grupal que cambie las concepciones tradicionales del aprendizaje para dar un mayor protagonismo a la solución de problemas matemáticos para el desarrollo del pensamiento y el entendimiento de la matemática elemental. Lo que se pretende en realidad es educar al estudiante desde la resolución de problemas retadores, potenciando las capacidades de los alumnos por medio de los contenidos involucrados en un currículo más retador.

Dentro de la propuesta el componente de evaluación no es convencional, porque no analiza el concepto de evaluación como un resultado, sino como todo un proceso donde el docente observa y analiza para comprobar, constatar, establecer, conjeturar, comparar, y determinar. Esto significa que la evaluación es integral pues relaciona lo instructivo y lo educativo, de modo que se reduce su papel cuantificador para incrementar su función desarrolladora. Vale la pena mencionar que los estudiantes participan activamente en el desarrollo de su pensamiento matemático y de su entendimiento de la matemática elemental, al mismo tiempo que se lleva a cabo mecanismos de rastreo y comprobación de las acciones efectuadas por ellos.

Resulta oportuno señalar que el modelo didáctico que se propone fue susceptible a modificaciones durante la investigación con el propósito de mejorarlo, se comprobó en la práctica que la secuencia de actividades fue aplicada con éxito, y funcionaron en diversas situaciones. Se obtuvo un desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes y un mejor entendimiento de la matemática elemental. Sin embargo, lo más importante del modelo es que tiene un carácter dialéctico y puede ser categorizado como un sistema abierto susceptible de agregar nuevas etapas o acciones.

3.2. Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático y el entendimiento de la matemática elemental

El propósito del presente epígrafe es la descripción del modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático y el entendimiento de la matemática elemental, en él se puntualizan las acciones a realizar por el investigador en cada una de sus fases.

La **primera fase** del modelo se denomina **planificación docente**. En esta fase el maestro debe conocer y prepararse en relación con los elementos teóricos, psicológicos, pedagógicos y epistemológicos que le permitan garantizar el entendimiento de la matemática elemental y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición de la matemática secundaria a la universitaria a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos. Es fundamental en esta etapa tener en cuenta el papel de la historia en el proceso de formación matemático de los estudiantes, como lo plantea De Guzmán, M. (2004)[46]. Es así como la historia de las matemáticas en la planificación docente cumple con tres objetivos esenciales, el primero es el de comprender los problemas del ser humano y de la humanidad, la producción de las ideas matemáticas y la comprensión de lo que le puede ocurrir a sus propios estudiantes. El segundo objetivo es el de entender mejor la construcción de las ideas, los motivos y las modificaciones que han sufrido las matemáticas, como tercer objetivo se tiene, emplear este saber cómo una guía de la pedagogía del docente. Sobre la base de las consideraciones anteriores la historia de las matemáticas se debe emplear, para el entendimiento y comprensión de conceptos complejos de un modo más adecuado.

La **segunda fase** consiste en determinar los **contenidos de la secuencia didáctica de actividades**. Es en esta fase que el maestro considera los contenidos matemáticos que se van a incluir en la secuencia didáctica de actividades, teniendo en cuenta que los mismos deben favorecer la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos. En el marco de la anterior consideración Bosch, Fonseca y Gascón (2004)[47] refieren un sentido "incompleto" de las matemáticas en la escuela secundaria, pues aparecen como un conjunto de tareas aisladas que por lo general tienen una sola técnica de solución, donde la validación de los resultados se basa más en evidencias que en una construcción formal; en ese mismo sentido a nivel universitario también se habla de incompletitud, pues existen una gran cantidad de resultados teóricos que se introducen sin conexión con los problemas y tareas que los motivan, así los nuevos conocimientos poco se relacionan con el contenido y las prácticas de la matemática de la escuela secundaria.

[46] De Guzmán, M. (2004). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Madrid: Universidad complutense de Madrid.
[47] Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon y Verschaffel (2016). Transitions in Mathematics Education. ICME – 13 Topical Surveys.

La **tercera fase** la constituye **la elaboración de la secuencia didáctica de actividades**. En esta fase el docente propone un conjunto de actividades relacionadas entre sí, que permiten abordar los elementos del objeto de estudio de la investigación. Todas estas actividades comparten un hilo conductor articulado y coherente que posibilita en los estudiantes un entendimiento de la matemática elemental y a su vez un desarrollo del pensamiento matemático. En términos generales puede decirse que **la elaboración de la secuencia didáctica de actividades** tiene como finalidad ordenar y guiar el proceso de enseñanza, para llevar a cabo una adecuada transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos.

La **cuarta fase** se dedica a la **formulación de problemas retadores**. En esta fase el maestro está en condiciones de iniciar la etapa de formación de interés cognoscitivo, trabajando a profundidad con los elementos esenciales de la solución de problemas matemáticos. Es por ello que el profesor debe plantear problemas adecuados para alcanzar los objetivos en cada una de las actividades propuestas, donde se cumpla con las condiciones necesarias para que el estudiante pueda iniciar la fase de abordaje del problema retador.

La selección realizada debe contener problemas que sean atractivos, estimulantes y llenos de interés para los estudiantes, en este mismo sentido deben promover en el estudiante procesos tales como la identificación, comparación, y modelación, todas ellas habilidades primordiales en la resolución de problemas (Mazarío y Sanz, 2009). Después de las consideraciones anteriores, es indispensable en el modelo didáctico el tratamiento que se le da a los conceptos matemáticos involucrados en la propuesta, porque a partir de ellos se pueden presentar a los estudiantes problemas con determinadas características, para poder cumplir con los propósitos de cada actividad.

Cabe señalar que, en la fase de formulación de problemas retadores se tiene en cuenta cada uno de los grandes ejes temáticos de la propuesta de la investigación, pues es de vital importancia proponer al estudiante problemas que exijan un análisis lógico dentro de un conocimiento matemático cada vez más profundo, lo que conlleva a asegurar que por sí mismos los problemas cumplen con las condiciones de motivar al estudiante, introducir nuevos contenidos y minimizar las dificultades que se presentan en la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria. Vale la pena señalar que, en esta fase del modelo didáctico la motivación es un elemento fundamental para el éxito de la propuesta, por ello los problemas presentados al estudiante deben ser retadores e interesantes y a su vez conllevar a la construcción del concepto perteneciente a la estructura teórica a trabajar.

La **quinta fase** nombrada **saberes previos**, tiene como propósito sustentar un conjunto de acciones encaminadas por el profesor para establecer el punto de partida de su trabajo en el aula de clases, todo ello a partir de la realización de una prueba de entrada, que tiene como finalidad determinar los saberes previos que tienen los estudiantes al resolver problemas de matemáticas elementales. Para el estudio de estos resultados se utiliza un conjunto de técnicas elaboradas, desarrolladas y validadas por la educación matemática.

La **sexta fase** constituye la **validación de los contenidos propuestos en la secuencia didáctica de actividades**. En esta fase se tiene en cuenta el proceso de validación de los contenidos propuestos en la secuencia didáctica de actividades de acuerdo a resultados obtenidos en la etapa de saberes previos. Es por ello que el docente debe valorar de acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba de entrada, si es necesario realizar un ajuste en los contenidos propuestos para logar en los estudiantes un entendimiento de la matemática elemental y que además se geste un desarrollo del pensamiento matemático.

La relación que se establece entre los elementos explicados en las primeras seis fases se presentan en la Figura 2.

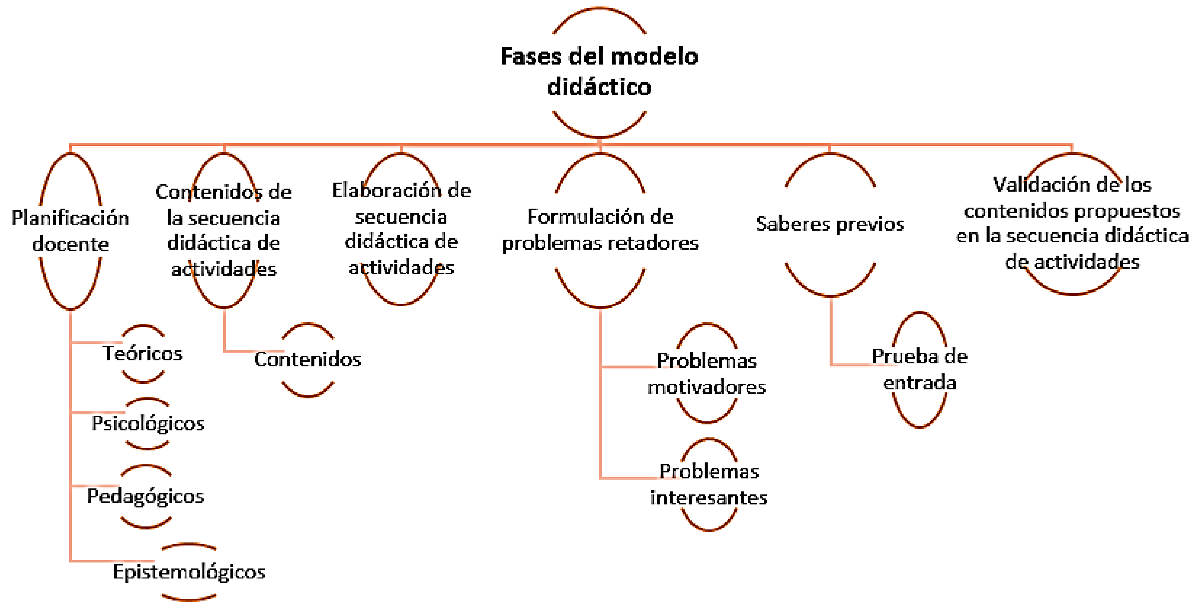


Figura 2. Primeras seis etapas del modelo para el desarrollo del pensamiento matemático y el entendimiento de la matemática elemental.

En la **séptima fase** designada como **abordaje del problema**, se quiere que el estudiante determine las partes principales del problema analizándolo bajo diversos puntos de vista (Polya, 1945), además de tomar conciencia de lo desconocido, de acuerdo con las consideraciones anteriores se puede determinar que el alumno se encuentra en la fase de abordaje cuando realizan:

- Una lectura analítica del problema.
- Logran interpretar el problema.
- Buscan las relaciones que existen entre los datos.
- Analizan si el problema formulado posee una relación directa o indirecta con los contenidos que se están impartiendo o que se han trabajado en clase.

En esta etapa es importante que el docente haga consciente al estudiante del proceso que se está llevando a cabo con él, pues al solucionar problemas retadores se tiene el propósito de mejorar ostensiblemente su entendimiento de las matemáticas elementales y simultáneamente desarrollar su pensamiento matemático. Después de las consideraciones anteriores es importante que el estudiante conozca lo que se espera de él y cuál debe ser el producto de cada una de las actividades propuestas.

Para la **octava fase** denominada **resolución del problema retador**, lo fundamental es determinar el nivel alcanzado por los estudiantes en las técnicas de solución de problemas matemáticos, pues son un elemento fundamental para determinar el nivel alcanzado en el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo de su pensamiento matemático.

En la fase de resolución del problema retador, se debe tener en cuenta la valoración crítica de los elementos que utilizan los estudiantes para abordarlos, como estructuran una posible respuesta y los esfuerzos realizados para llegar a la solución adecuada. Para esta fase se realizan pequeños grupos de estudiantes que desarrollarán las técnicas de participación social (Wenger, 1998), al favorecer los procesos de aprendizaje y obtención del conocimiento, teniendo en cuenta el significado de los objetos, la práctica, la comunidad y la identidad.

En esta fase se pueden evidenciar las siguientes etapas:

- **Generación de las ideas:** El estudiante expone sus ideas utilizando la intuición como estrategia transitoria para encontrar una posible solución al problema planteado, la generación de ideas ha de formarse paso a paso después de ensayos que puedan parecer improductivos. Luego de pasar por un período de dudas aparece una idea excepcional para resolver el problema, por ello el docente debe procurar guiar al estudiante hacia esa idea brillante, sin necesidad de imponérsela o brindársela (Polya, 1945).
- **Formulación de heurísticas y conjeturas:** En este punto se comienza a plasmar un camino adecuado para la resolución del problema, donde el estudiante emplea saberes previos, pensamiento lógico matemático, intelecto, juicios de valor, para finalmente llegar a conjeturas adecuadas que le posibiliten encontrar una solución correcta al problema. Es en esta etapa que

el estudiante es selectivo con las ideas presentadas, de modo que estructura la solución utilizando adecuadamente aspectos teóricos y formales de la matemática elemental.

- **Validación de heurísticas y conjeturas:** En esta etapa se realiza un proceso de reconsideración de la solución, pasándola por un análisis crítico y detallado que permita validar la respuesta presentada. Es importante mencionar que, en la etapa de validación de heurísticas y conjeturas, el estudiante afianza sus conocimientos y desarrolla capacidades para resolver problemas. En este propósito es importante que el maestro comprenda y haga reflexionar a sus estudiantes que ningún problema está completamente terminado, siempre va a quedar algo por hacer, así al perfeccionar la solución el estudiante logra una mejor comprensión de la solución propuesta (Polya, 1945).
- **Vinculación con otros saberes:** Esta etapa del proceso consiste en relacionar la idea final con otros saberes y con otros campos del conocimiento. Se caracteriza por ser introspectiva pues depende de la experiencia vivida por cada estudiante en la solución del problema. En consecuencia, se puede evidenciar cómo es en esta fase cuando el maestro debe sustentar bajo qué criterio se alcanzaron los objetivos propuestos en la actividad propuesta.

La **novena fase** se denomina **socialización de resultados**, en ella la totalidad de los estudiantes discuten sobre la solución del problema planteado, en ese orden de ideas cada uno de los pequeños grupos de trabajo conformados realiza una exposición de la forma en que abordó el problema y como llegó a solucionar el mismo. La socialización de resultados complementa la fase de resolución del problema retador, porque gracias a la naturaleza no trivial de los problemas retadores, los estudiantes aprenden a comunicar su pensamiento con claridad y precisión. En ese mismo sentido cuando un alumno se encuentra atascado el resto de la clase puede brindar apoyo y sugerencias de manera amistosa, como resultado el profesor crea un ambiente propicio para que los estudiantes puedan intercambiar experiencias matemáticas significativas de acuerdo con el enfoque húngaro que menciona Matsuura (2014)[48].

La forma en que se relacionan los elementos de las tres últimas fases del modelo se muestran en la Figura 3.

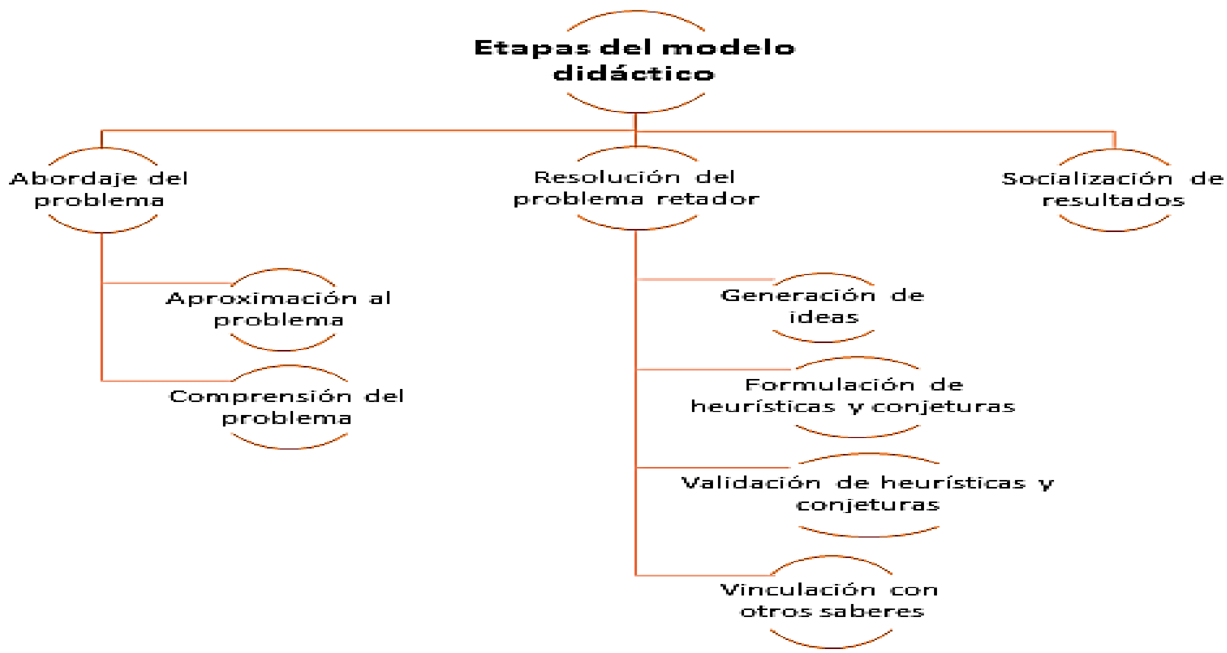


Figura 3. Etapas 7, 8 y 9 del modelo para el desarrollo del pensamiento matemático y el entendimiento de la matemática elemental.

Teniendo en cuenta el marco general del modelo didáctico propuesto en la actual investigación, la Figura 4 muestra cómo todos los elementos que constituyen la propuesta, se relacionan y retroalimentan entre sí de forma cíclica con el propósito de mejorar la propuesta continuamente.

[48] Matsuura, R. (2014). National council of teachers of mathematics. Principles to actions: ensuring mathematics success for all.

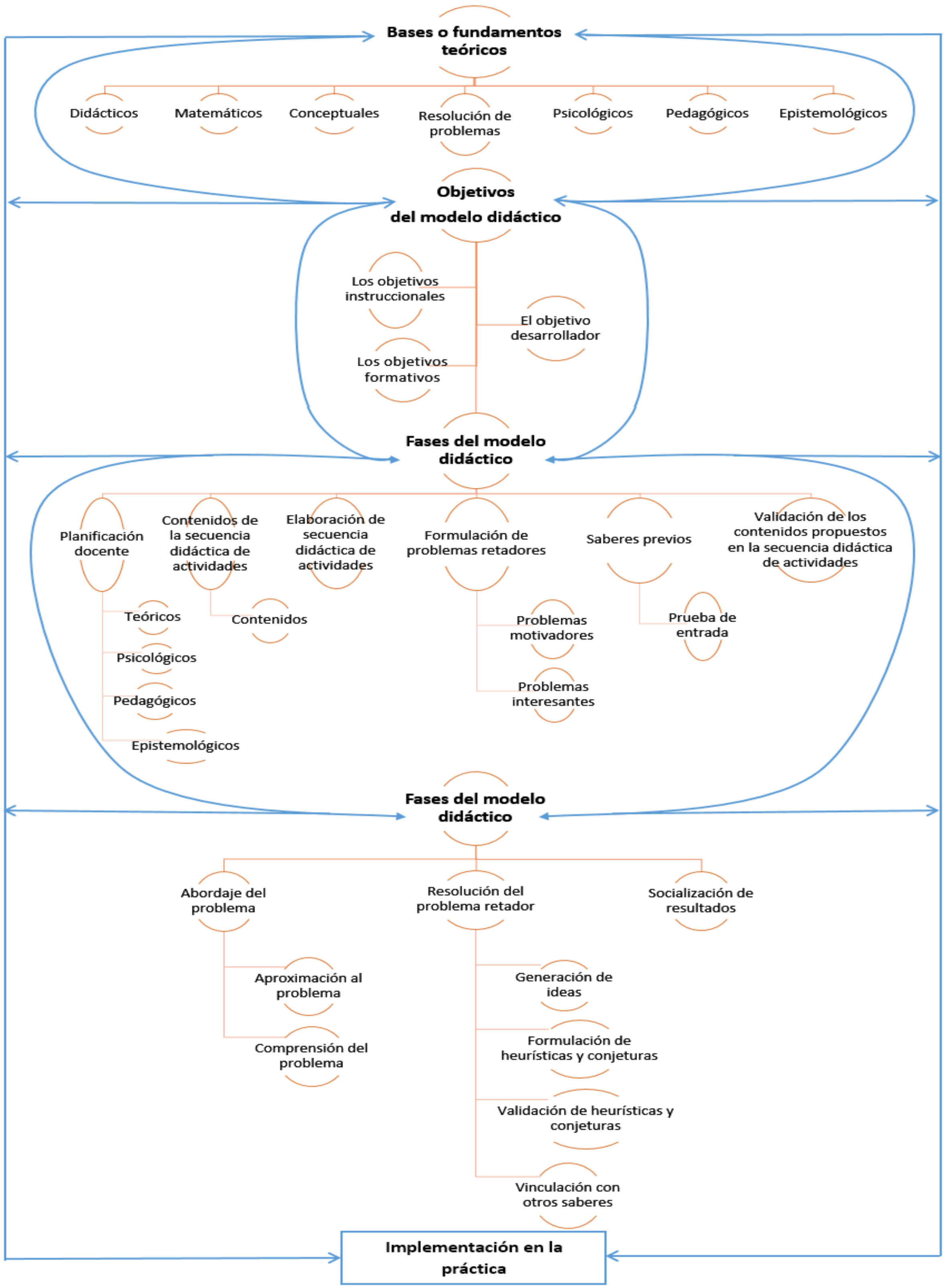


Figura 4. Modelo para el desarrollo del pensamiento matemático y el entendimiento de la matemática elemental.

Las fases del modelo permiten constatar el estado inicial de los estudiantes que inician el curso de solución de problemas matemáticos tanto del Colegio José María Carbonell como de la Universidad Antonio Nariño, para posteriormente establecer el nivel de entendimiento y desarrollo de su pensamiento matemático de los alumnos que toman el curso.

3.3. Validación del modelo didáctico.

3.3.1. Método Delphi.

El método Delphi para el procesamiento de los resultados de encuestas a expertos o usuarios en la investigación educacional, fue implementado por primera vez a comienzos de los años 50 en el Centro de Investigación estadounidense RAND Corporation por Olaf Helmer y Theodore J. Gordon, como un instrumento que intentaba predecir un posible caso de catástrofe nuclear. En este orden de ideas se puede citar Linston y Turoff (1975)[49], quienes definen la técnica Delphi como un método que consiste en la selección de un grupo de expertos a los que se les pregunta su opinión sobre aspectos referidos a un asunto particular, tratando de conseguir consenso entre ellos, pero con la máxima autonomía por parte de los participantes. Por tanto, la capacidad de predicción de método Delphi se basa en la utilización sistemática de un juicio intuitivo emitido por un grupo de expertos. En este orden de ideas, el método Delphi por medio de la interrogación a expertos con la ayuda de cuestionarios, pretende poner de manifiesto convergencias de opiniones y deducir eventuales consensos.

3.3.2. Validación del modelo didáctico a través del Método Delphi.

Mediante la aplicación del método Delphi se sometió el modelo didáctico arriba descrito al criterio académico de una comunidad científica de expertos en la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos. De esta forma se expuso el modelo a diferentes indicadores para validar el modelo didáctico presentado en la investigación. A cada uno de los

---

[49] Linstone, H., Turoff, M. (1975). The Delphi method. Techniques and applications. Addison – Wesley. p. 3.

académicos consultados se les aplicaron dos encuestas; la primera de ellas tuvo el propósito de identificar a los expertos de dicha comunidad científica que realmente proporcionen datos confiables (**Ver Anexo 1**), mientras que, en la segunda encuesta, se les mostró a los académicos el modelo didáctico propuesto en la investigación (**Ver Anexo 2**). Cabe agregar que es válida la apreciación del académico si en la primera encuesta aplicada se evidencia su dominio en la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos. Es importante tener en cuenta que las encuestas aplicadas cuentan con una serie de enunciados, y que los mismos son evaluados por medio de una escala Likert que permite establecer en qué grado los expertos consultados se encuentran de acuerdo o en desacuerdo con el enunciado dado. De este modo se puede evaluar cuantitativamente las opiniones de los expertos en el tema.

De acuerdo con las respuestas brindadas en el primer cuestionario "coeficiente de competencia de experto en relación con la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos" por el grupo de académicos encuestados, se seleccionó un grupo de 10 expertos en el tema, de los cuales ocho tienen título de Doctorado, uno título de maestría y uno título de licenciado. Las instituciones en que laboran los expertos consultados son:

- Universidad Antonio Nariño.
- Universidad de Puerto Rico.
- OBM – Olimpíadas Brasileiras De Matemática.
- Real Sociedad Matemática Española.
- Gonzaga University. USA.

Del mismo modo los cargos que desempeñan en dichas instituciones son:

- Lecturer – AT
- Miembro del Comité de Pruebas de las Olimpíadas Brasileiras de Matemática.

- Coordinador académico de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas de Venezuela.
- Miembro de la Comisión de Olimpiadas de la Real Sociedad Matemática Española.
- Docente Investigador.
- Docente.

A continuación, se muestran los enunciados y la respectiva escala Likert de la tabla de frecuencia absoluta (Tabla 2), tabla de frecuencia absoluta acumulada (Tabla 3), tabla de frecuencia relativa acumulada (Tabla 4) y por último la tabla de la función recíproca de la distribución normal (Tabla 5) donde se determinan los puntos de corte o límites utilizados por el método Delphi para determinar el grado de acuerdo o desacuerdo de los expertos consultados con relación a cada de los enunciados dados en la cuesta para la validación del modelo didáctico.

Tabla de frecuencia de valores absolutos						
Abreviaturas	Fase o Componente del Modelo Didáctico	MA	BA	A	PA	NA
F.1	Planificación docente	7	2	1	0	0
F.2	Contenidos de la secuencia didáctica de actividades	7	3	0	0	0
F.3	Elaboración de la secuencia didáctica de actividades	6	2	2	0	0
F.4	Formulación de problemas retadores	7	1	1	1	0
F.5	Saberes previos	7	2	0	0	1
F.6	Reformulación o validación de la secuencia didáctica de actividades	3	5	1	0	1
F.7	Abordaje del problema	8	2	0	0	0
F.8	Resolución del problema retador	8	2	0	0	0
F.9	Socialización de resultados	4	5	1	0	0
Tabla de frecuencia de valores absolutos						
Abreviaturas	Fase o Componente del Procedimiento Metodológico	MA	BA	A	PA	NA
P.1	Generación de las ideas	8	2	0	0	0
P.2	Formulación de heurísticas y conjeturas	9	1	0	0	0
P.3	Validación de heurísticas y conjeturas	8	2	0	0	0
P.4	Vinculación con otros saberes	6	4	0	0	0

Tabla 2. Frecuencia absoluta que muestra las respuestas brindadas por los expertos al segundo cuestionario.

Tabla de frecuencia de valores absolutos acumulados						
Abreviaturas	Fase o Componente del Modelo didáctico	MA	BA	A	PA	NA
F.1	Planificación docente	7	9	10	10	10
F.2	Contenidos de la secuencia didáctica de actividades	7	10	10	10	10
F.3	Elaboración de la secuencia didáctica de actividades	6	8	10	10	10
F.4	Formulación de problemas retadores	7	8	9	10	10
F.5	Saberes previos	7	9	9	9	10
F.6	Reformulación o validación de la secuencia didáctica de actividades	3	8	9	9	10
F.7	Abordaje del problema	8	10	10	10	10
F.8	Resolución del problema retador	8	10	10	10	10
F.9	Socialización de resultados	4	9	10	10	10
Tabla de frecuencia de valores absolutos acumulados						
Abreviaturas	Fase o Componente del Procedimiento	MA	BA	A	PA	NA
P.1	Generación de las ideas	8	10	10	10	10
P.2	Formulación de heurísticas y conjeturas	9	10	10	10	10
P.3	Validación de heurísticas y conjeturas	8	10	10	10	10
P.4	Vinculación con otros saberes	6	10	10	10	10

Tabla 3. Frecuencia absoluta acumulada que muestra las respuestas brindadas por los expertos al segundo cuestionario

Tabla de frecuencia de valores relativos acumulados						
Abreviaturas	Fase o componente del modelo didáctico	MA	BA	A	PA	NA
F.1	Planificación docente	0,7	0,9	1	1	1
F.2	Contenidos de la secuencia didáctica de actividades	0,7	1	1	1	1
F.3	Elaboración de la secuencia didáctica de actividades	0,6	0,8	1	1	1
F.4	Formulación de problemas retadores	0,7	0,8	0,9	1	1
F.5	Saberes previos	0,7	0,9	0,9	0,9	1
F.6	Reformulación o validación de la secuencia didáctica de actividades	0,3	0,8	0,9	0,9	1
F.7	Abordaje del problema	0,8	1	1	1	1
F.8	Resolución del problema retador	0,8	1	1	1	1
F.9	Socialización de resultados	0,4	0,9	1	1	1
P.1	Generación de las ideas	0,8	1	1	1	1
P.2	Formulación de heurísticas y conjeturas	0,9	1	1	1	1
P.3	Validación de heurísticas y conjeturas	0,8	1	1	1	1
P.4	Vinculación con otros saberes	0,6	1	1	1	1

Tabla 4. Frecuencia relativa acumulada que muestra las respuestas brindadas por los expertos al segundo cuestionario

Función Recíproca de la Distribución Normal y Determinación de los Puntos de Corte o Límites								
FASE	MA	BA	A	PA	NA	SUMA	PROMEDIO	NPrm - Prm
F.1	0,524	1,282	4,090	4,090	4,090	14,076	2,815	0,060
F.2	0,524	4,090	4,090	4,090	4,090	16,884	3,377	-0,502
F.3	0,253	0,842	4,090	4,090	4,090	13,365	2,673	0,202
F.4	0,524	0,842	1,282	4,090	4,090	10,828	2,166	0,709
F.5	0,524	1,282	1,282	1,282	4,090	8,459	1,692	1,183
F.6	-0,524	0,842	1,282	1,282	4,090	6,970	1,394	1,481
F.7	0,842	4,090	4,090	4,090	4,090	17,202	3,440	-0,565
F.8	0,842	4,090	4,090	4,090	4,090	17,202	3,440	-0,565
F.9	-0,253	1,282	4,090	4,090	4,090	13,298	2,660	0,215
P.1	0,842	4,090	4,090	4,090	4,090	17,202	3,440	-0,565
P.2	1,282	4,090	4,090	4,090	4,090	17,642	3,528	-0,653
P.3	0,842	4,090	4,090	4,090	4,090	17,202	3,440	-0,565
P.4	0,253	4,090	4,090	4,090	4,090	16,613	3,323	-0,448
SUMA	6,475	35,000	44,745	47,553	53,170	186,942	37,388	
PUNTOS DE CORT	0,498	2,692	3,442	3,658	4,090	14,380	÷13=	2,876
PROMEDIO DE PROM(N)						÷5 Opciones=	2,876	

Tabla 5. Función recíproca de la distribución normal donde se determinan los puntos de corte o límites utilizados por el método Delphi

De acuerdo con los resultados obtenidos en la función reciproca de la distribución normal, se elabora la gráfica que se muestra en la Figura 5.

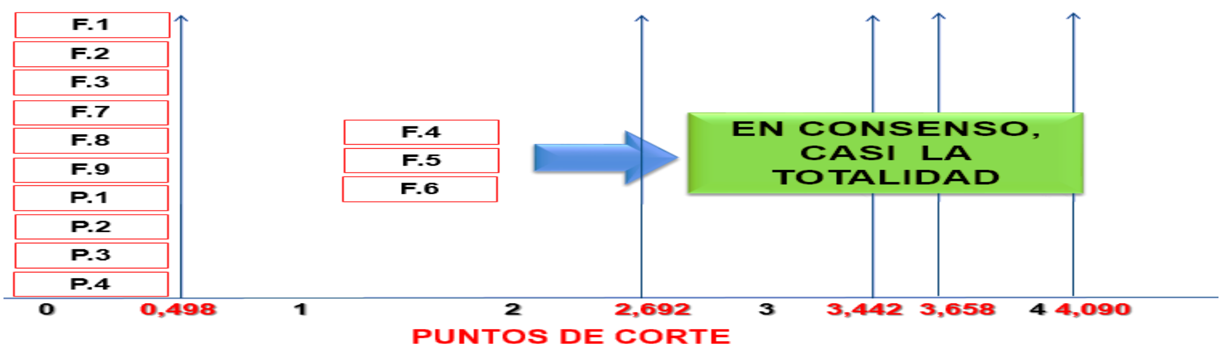


Figura 5. Distribución de valoración de los expertos.

Como resultado de aplicar el método Delphi, los expertos consultados consideran que las fases de planificación docente, contenidos de la secuencia didáctica de actividades, elaboración de la secuencia didáctica de actividades, abordaje del problema, resolución del problema retador, socialización de resultados y las etapas de generación de ideas, formulación de heurísticas y conjeturas, validación de heurísticas y conjeturas, vinculación con otros saberes, son muy adecuadas en la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos. Respecto a las fases de formulación de problemas retadores, saberes previos, validación de los contenidos propuestos en la secuencia didáctica de actividades, las consideran bastante adecuadas en la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos, por lo tanto se valida el modelo didáctico formulado en la presente investigación.

Conclusiones capítulo 3

El modelo didáctico para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos, proporciona un soporte teórico a las dificultades que presentan los estudiantes que realizan la transición de la escuela secundaria a la terciaria.

Las fases que sustentan el modelo didáctico propuesto en el presente capítulo se consideran factibles para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos, donde convergen aspectos didácticos, matemáticos, conceptuales, psicológicos, pedagógicos, epistemológicos que permiten establecer objetivos instruccionales, desarrolladores y formativos para la propuesta. Estos objetivos enmarcan las fases de planificación docente, contenidos de la secuencia didáctica de actividades, elaboración de secuencia didáctica de actividades, formulación de problemas retadores, saberes previos, validación de los contenidos propuestos en la secuencia didáctica de actividades, abordaje del problema, resolución del problema retador y socialización de resultados, donde cada una de estas fases se favorecen una a la otra y gracias al sistema de actividades compuesto por problemas retadores, favorece el proceso de entendimiento de las matemáticas elementales en los estudiantes y el desarrollo de su pensamiento matemático.

El modelo didáctico propuesto para la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos, se validó por medio del método Delphi para el procesamiento de los resultados de encuestas a expertos en investigación educacional.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo tiene como objetivo detallar la metodología empleada para el desarrollo de la presente investigación, de este modo se presenta el enfoque que se asume, la población que participó, los instrumentos diseñados para la recolección de información, así como la forma en que fue analizada.

4.1. Tipo o enfoque de investigación

La investigación es cualitativa descriptiva de tipo longitudinal ya que se observará el grupo de estudiantes en una etapa inicial, se llevará a cabo las experiencias diseñadas y posterior a esto se contrastarán los estados inicial y final.

El enfoque metodológico utilizado para realizar el análisis de los resultados obtenidos en cada una de las actividades de la secuencia didáctica es el enfoque cuantitativo, pues emplea la recolección y el análisis de datos para poder contestar el problema de investigación y probar las hipótesis establecidas previamente. Con frecuencia el enfoque cuantitativo se basa en métodos de recolección de datos sin medición numérica, así como las descripciones y las observaciones que aparecen como parte del proceso de investigación.

Este enfoque investigativo es flexible, y relaciona los eventos que se presentan y su interpretación, también tiene en cuenta las respuestas dadas por los participantes en la investigación y el desarrollo de la teoría tenida en cuenta. Su principal propósito consiste en reconstruir la realidad, tal y como la observan los actores de un sistema social, como el que se encuentra en el aula de clases, es importante resaltar que es un enfoque holista, debido a que se precia de considerar el todo, sin reducirlo al estudio de sus partes.

En este orden de ideas se puede citar a Grinnell (1997), quien sugiere que el enfoque cuantitativo utiliza cinco fases relacionadas (ver Figura 6) entre sí:

- *Observación y evaluación de fenómenos.*

- *Establecer suposiciones o ideas como consecuencia de la observación y evaluación realizadas.*
- *Probar y demostrar el grado en que las suposiciones o ideas tienen fundamento.*
- *Revisar tales suposiciones o ideas sobre la base de las pruebas o del análisis.*
- *Proponer nuevas observaciones y evaluaciones para esclarecer, modificar, cimentar y/o fundamentar las suposiciones e ideas; o incluso para generar otras.*[50]

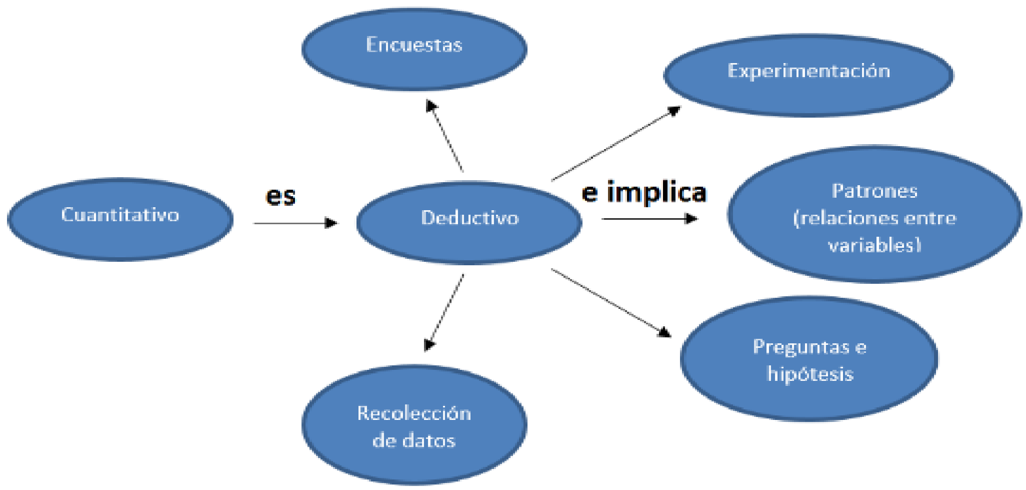


Figura 6. Fases del enfoque cuantitativo propuesto por Grinnell, R. (1997).

En el estudio también se involucra la investigación acción, dado que los resultados y percepciones ganadas desde la investigación, no sólo tienen importancia teórica para el avance del conocimiento en el campo educativo, sino que también conducen a mejorar las prácticas pedagógicas, durante y después del proceso de investigación. Acorde con la investigación acción, el investigador no es considerado un experto externo que realiza una investigación con un grupo de personas, sino un coinvestigador que investiga para que la gente interesada en los problemas prácticos educativos mejore la realidad formativa de los estudiantes.

[50] Grinnell, R. (1997). Social work research and evaluation: Quantitative and qualitative approaches. E. E. Peacock Publishers. Itasca, Illinois.

Por ser una investigación de carácter social no asume los resultados desde la óptica de los enunciados propuestos por el investigador, basadas en respuestas correctas o equivocadas para problema de investigación, por el contrario, involucra soluciones basadas sobre los puntos de vista e interpretaciones de las personas involucradas en la investigación. En conclusión, se busca actuar como agentes de cambio críticos y autocríticos de las prácticas pedagógicas en la educación matemática lo que posibilita transformar y mejorar la transición de la escuela secundaria a la universitaria.

4.1.2. Alcance del estudio

Se pretende favorecer el entendimiento en matemáticas elementales y desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad a través de la solución de problemas retadores.

4.2. Participantes

El estudio se realizó con dos grupos de estudiantes diferentes, el primero de ellos estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell y el segundo, con estudiantes de la Universidad Antonio Nariño. En el curso de grado once participaron veintiún estudiantes, trece hombres y nueve mujeres, en la cátedra de solución de problemas participaron veintinueve estudiantes, veintiún hombres y ocho mujeres, quienes durante el segundo semestre de 2016 estaban cursando el primer semestre de diversas facultades de ingeniería en la Universidad Antonio Nariño.

4.3. Diseño metodológico

Las actividades que se llevarán a cabo son las siguientes:

1. Búsqueda de investigaciones relacionadas con el problema formulado en la descripción del problema.
2. Triangulación teórica entre los modelos teóricos de resolución de problemas, heurística y pensamiento matemático como eje integrador para la generación de un currículo más retador.

3. Diseño de actividades.

Con referencia a lo anterior se presenta el diseño de clases, en el cual se proyecta la participación de los estudiantes con baterías de problemas que contienen problemas retadores en matemáticas elementales en los cuales se determinan los temas específicos que se abordan y sus objetivos.

4.4. Diseño de clases

En este apartado se muestra cómo se realizará la implementación del curso de solución de problemas matemáticos del grado once en la Institución Educativa Distrital José María Carbonell y en la Universidad Antonio Nariño a partir de la elaboración de un sistema de actividades.

Para el diseño de las actividades se tienen en cuenta los planteamientos formulados por el panel de expertos del estudio ICME 13 denominado *"Transitions in Mathematics Education"*[51], en relación con las transiciones que se dan entre la escuela secundaria y la del nivel terciario. De este modo para el diseño del curso de solución de problemas para estudiantes de grado onceno, se tuvo en cuenta que las matemáticas en secundaria hacen hincapié en la producción de resultados y un aspecto más práctico de la actividad matemática, donde los axiomas, definiciones y pruebas se utilizan más para embellecer la clase de matemática que con un sentido práctico, mientras que para el diseño del curso de solución de problemas universitario, se tuvo en cuenta la organización teórica de los contenidos matemáticos, el reconocimiento de fundamentos del conocimiento, el trabajo con teoremas y demostraciones. No obstante, lo que se quiere en realidad es minimizar el sentido incompleto de las matemáticas en la escuela secundaria, teniendo en cuenta que aparecen como un conjunto de tareas aisladas que tienen una sola técnica de solución, donde la validación de los resultados se basa más en evidencias que en una construcción formal, al igual que la incompletitud que se da a nivel universitario al introducir resultados teóricos sin conexión con los problemas y tareas que los motivan, así la necesidad de nuevos

[51] Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon y Verschaffel (2016). Transitions in Mathematics Education. ICME – 13 Topical Surveys.

conocimientos está relacionada en raras ocasiones con el contenido y las prácticas de la matemática de la escuela secundaria (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

Es así como la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria se considera como una transición crítica, de acuerdo con el planteamiento que realiza Yerushalmy, M. (2005)[52], pues en ella se involucra un notable cambio en la forma de pensar del estudiante. Esta transición es también considerada crítica, pues conlleva a obstáculos epistemológicos y una discontinuidad entre los contenidos que se trabajan en la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario. Por ello la secuencia de actividades se centra en cuatro ramas de la matemática elemental las cuales son la teoría de números, la combinatoria, el álgebra y la geometría, que son contenidos genéricos que se abordan en las matemáticas a nivel de educación superior.

Por las consideraciones anteriores, para el diseño de las clases se tiene en cuenta como el estudiante debe mejorar sustancialmente las herramientas que utiliza en la solución de problemas matemáticos, como por ejemplo el lenguaje verbal, la semiótica y las representaciones involucradas en las soluciones que presenta.

Realizadas las consideraciones anteriores, es importante destacar que en el diseño de las actividades se tuvo en cuenta que la transición que realizan los estudiantes es de carácter cognitivo, por ello se utilizaron diferentes marcos teóricos para su elaboración. Con referencia a lo anterior el panel de expertos que trabajó el tema en el ICME 13, establece que las transiciones que se dan deben ser de carácter general y no particulares, como por ejemplo la transición de la aritmética al álgebra.

Puntualmente cada una de las actividades se enmarcó dentro de dos preguntas que caracterizan el diseño de las clases en los cursos de solución de problemas matemáticos, las preguntas abordan las

[52] Yerushalmy, M. (2005). Challenging known transitions: Learning and teaching algebra with technology. For the Learning of Mathematics. p. 37–42.

características propias del área de matemáticas y las prácticas pertinentes que se deben dar en cada grupo, las cuales son:

- ¿Cuáles son esas características?
- ¿Cuáles son las similitudes (continuidad) y diferencias (discontinuidad) entre las matemáticas y las prácticas de los distintos grupos?

Por ello se evidencia como las temáticas de cada curso guardan alguna relación sin que deban ser las mismas, lo que también ocurre con los problemas formulados. De este modo con la implementación de la secuencia didáctica de actividades se trata de develar las respuestas a las interrogantes que plantean el panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática.

Dentro del marco teórico y el modelo didáctico se evidencia que el trabajo en grupo es un aspecto fundamental para el desarrollo de la propuesta, esta condición se tuvo en cuenta para el diseño de las clases y las actividades, que fueron basadas en las comunidades de práctica de Wenger (1998)[53]. Según se ha citado el autor de esta teoría, propone que el aprendizaje tiene lugar a través de las interacciones que se dan al interior de una comunidad que comparte una práctica común, donde también se lleva a cabo una evolución en la participación como miembro de la comunidad.

Esta teoría es confirmada por Biza, Jaworski y Hemmi (2014)[54], cuando afirman que los estudiantes del primer año de universidad, participan en comunidades de pregrado que tienen sus propias reglas para el estudio y la comunicación sobre las matemáticas. En ese mismo sentido Biza, Jaworski y Hemmi (2014) indican que el proceso de transición hace correspondencia con el proceso de convertirse en miembro de una comunidad y a su vez del proceso de aprendizaje que se lleva a cabo en ella. Desde la propuesta

---

[53] Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge: The press syndicate of the university or Cambridge.

[54] Biza, I., Jaworski, B., y Hemmi, K. (2014). Communities in university mathematics. Research in mathematics education. p. 161 – 176.

científica de este grupo de autores, un estudiante puede pertenecer simultáneamente a dos comunidades distintas, por ello la importancia de formular un diseño de clases que involucre conceptualmente los saberes necesarios que requieren los estudiantes de la escuela secundaria para ingresar a la universidad. Es importante mencionar que lo que se quiere en el diseño del curso en general es superar los obstáculos epistemológicos que menciona Sierpinska (1990)[55] ya que dichos obstáculos conducen a una discontinuidad en el aprendizaje de las matemáticas. Por ello se quiere romper este paradigma en el momento que los estudiantes resuelven problemas retadores que generen un entendimiento de las matemáticas elementales y a su vez generen un desarrollo del pensamiento matemático.

Como principal consideración para el diseño del curso se consideró la doble discontinuidad que mencionan Winsløw, C., & Grønbæck, N. (2014)[56] que se resume en:

- El contexto institucional (universidad vs escuela)
- La diferencia en el papel del estudiante dentro de la institución (un estudiante de universidad vs un estudiante de la escuela secundaria)
- Y la diferencia en el contenido matemático (científico vs elemental).

Como apreciación final es importante mencionar que el hecho de tomar contenidos de la matemática elemental, se ajusta a los lineamientos que proponen el panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga el tema de transiciones en matemáticas en los niveles de educación escolar y superior. Cabe agregar que el panel de expertos afirma que, al construir conceptos robustos en matemáticas elementales en un nivel avanzado, se logra romper la discontinuidad que se presenta en la matemática de la escuela secundaria a la universitaria.

[55] Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the learning of mathematics. p. 24 – 36.
[56] Winsløw, C., & Grønbæck, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. Recherches en Didactique des Mathématiques. P. 59 – 86.

4.4.1. Curso de solución de problemas matemáticos grado once.

Diseño de clases colegio

A continuación, se muestra cómo se implementa el curso de solución de problemas matemáticos en el Colegio José María Carbonell, interviniendo al grupo de estudiantes con la secuencia didáctica de actividades que se plantea en la presente tesis. Hechas las consideraciones anteriores, se propone una prueba de entrada para establecer los saberes previos que tienen los estudiantes en relación con la teoría de números, el álgebra, la geometría y la combinatoria; esta prueba servirá para contrastar el estado inicial de los estudiantes, comparado con el nivel de entendimiento en matemáticas elementales y desarrollo de pensamiento matemático que muestren al finalizar la secuencia didáctica que propone el investigador.

Temática: Prueba de entrada

Temas específicos

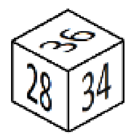
- Teoría de números
- Álgebra
- Geometría
- Combinatoria

Objetivos

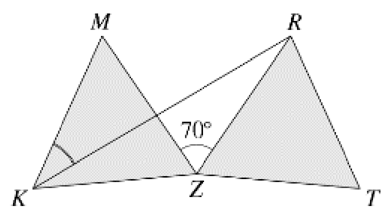
- Realizar un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en relación con preguntas fundamentadas en matemáticas elementales.
- Valorar el nivel de preparación de los estudiantes para enfrentarse a los objetivos de la investigación que se está realizando.

PRUEBA DE ENTRADA

1. Los números en las seis caras del cubo mostrado en la figura son enteros pares consecutivos. Si las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales, encuentre la suma de todos los seis números de este cubo.



2. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?
3. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$.



4. Para números reales x y y, se define $x♠y = (x + y)(x - y)$. ¿Cuál es el valor de $3♠(4♠5)$?

La primera actividad de la secuencia didáctica formulada para los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell, se propone debido al bajo rendimiento mostrado en la prueba de entrada. Con referencia a lo anterior el panel de expertos dentro del congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, señala que las dificultades que presentan los estudiantes que realizan la transición de la educación secundaria a la universitaria, se atribuye principalmente a las características pedagógicas y escolares de las escuelas secundarias, más allá de la disciplina que se imparta. Por tanto, las propuestas que se realicen para afrontar la brecha que existe entre escuela y universidad deben tener un alto cuestionamiento de sus prácticas pedagógicas y tratar de vincularlas a las exigencias de la educación superior. De hecho, muchas de las propuestas para mejorar la transición de la escuela secundaria a la universidad, deben centrarse en mejorar el entendimiento en las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento matemático, generando un cambio conceptual en el estudiante que ingresa a la universidad como lo sugiere Carey (2009)[57] . Por los argumentos que se acaban de exponer la primera actividad está relacionada con números enteros, racionales e irracionales.

Temática: Números

Temas específicos

- Números enteros.
- Operaciones básicas con números enteros.
- Números racionales e irracionales.
- Operaciones básicas con números racionales e irracionales.

Objetivos:

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren el trabajo con números enteros y reales.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos de los números enteros a los números reales.

[57] Carey, S. (2009). Los orígenes de los conceptos. Oxford, Oxford University Press.

Batería de problemas actividad de números

1. En cierta isla, los habitantes son de dos tipos: los honestos, que siempre dicen la verdad, y los mentirosos, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidas Ana, Berta y Claudia, tres habitantes de la isla. Ana dice: Las tres somos mentirosas. Berta dice: Las tres somos honestas. Claudia permanece callada. ¿Qué es cada una de ellas?
2. El año pasado 100 gatos adultos, de los cuales la mitad eran gatas, fueron llevados al refugio de villa chica. La mitad de las gatas adultas estaban acompañadas por una camada de gatitos. El número promedio de gatitos por camada era 4. ¿Cuál fue el número total entre gatos adultos y gatitos recibidos por el refugio el año pasado?
3. En un hotel de San Gil hay 120 personas distribuidas entre la recepción, el bar, el comedor y el salón de reuniones. La cantidad de personas que hay en el bar es un quinto de la que hay en el comedor, y en la recepción hay un octavo de las que hay en el salón.

   Al pasar diez personas del comedor al salón y seis del bar a la recepción, en la recepción hay un sexto de las que quedan en el comedor. ¿Cuántas personas había inicialmente en la sala de reuniones?
4. Si un número tiene 1008 dígitos y el producto de ellos es 3^{2016}, halle la suma de dichos dígitos.
5. De las siguientes identidades, son verdaderas:

   A) $a(x-y) = ax - ay$

   B) $a^{x-y} = a^x - a^y$

   C) $\log(x-y) = \log x - \log y$

   D) $\frac{\log x}{\log y} = \log x - \log y$

   E) $a(xy) = (ax)(ay)$

   Argumente su respuesta

6. Si $log_{10}(3) = X$, $log_{10}(9) = Y$ y $log_{10}(81) = Z$, calcular el valor de:

$$\frac{X}{Y} + \frac{Y}{Z} + \frac{Z}{X}$$

Temática: Teoría de números

En el orden de las ideas anteriores el panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, hacen referencia a los obstáculos epistemológicos que muestran los estudiantes que realizan la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria, donde se muestra en diversas investigaciones cómo los obstáculos epistemológicos son inevitables en el aprendizaje de las matemáticas y visibles a través de las inadecuadas interpretaciones y falta de sensibilidad que muestran los estudiantes respecto a las propiedades de los números, en particular los enteros. Con referencia a lo anterior se plantea la siguiente actividad, con el propósito de superar dichos obstáculos epistemológicos, mejorando el entendimiento de los conceptos que aborda la teoría de números y a su vez logre desarrollar en los estudiantes de grado onceno su pensamiento matemático.

Temas específicos

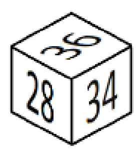
- Aritmética modular.
- Números primos.
- Números compuestos.
- Criterios de divisibilidad.
- Descomposición en factores primos.
- Mínimo común múltiplo.
- Máximo común divisor.

Objetivos:

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren la teoría de números.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos de la teoría de números.

Batería de problemas actividad teoría de números

1. Los números en las seis caras del cubo mostrado en la figura son enteros pares consecutivos. Si las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales, encuentre la suma de todos los seis números de este cubo.



2. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden escribir como la suma de tres números de 2 dígitos (no necesariamente distintos)?
3. Un número es menor que 2008. Es impar, deja residuo 2 cuando se divide por 3 y residuo 4 cuando se divide por 5. ¿Cuál es la suma de los dígitos del mayor de todos los números que cumplen estas condiciones?
4. Tres números p, q y r son todos números primos menores que 50 con la propiedad que $p + q = r$. ¿Cuántos valores de r son posibles?

5. Definimos una nueva operación en números reales mediante la fórmula $a * b = \frac{2a-b}{3}$. Si $(x * x) * 7 = x$, calcule el valor de x.
6. Se denota con $P(n)$ y con $S(n)$ el producto y la suma, respectivamente, de los dígitos de un entero positivo n. Por ejemplo $P(25) = 10$ y $S(25) = 7$. Si n es un número entero de dos dígitos y $P(n) + S(n) = n$, ¿cuál es el dígito de las unidades de n?
7. Una banda musical está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de las que había en el cuadrado. ¿Cuántos músicos tiene la banda?
8. En cada planeta en un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que, si la cantidad de planetas es impar, entonces siempre hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

Temática: Combinatoria

El panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en matemáticas en los niveles de educación escolar y superior, señala que la combinatoria es un componente fundamental para el desarrollo del pensamiento formal del alumno, en ese mismo sentido, los estudios realizados en matemática discreta muestran que el estudiante debe vincular progresivamente esquemas intuitivos que terminen siendo aproximaciones a las ideas normativas, con el objetivo de ir aproximando a los alumnos al concepto que se desea que construyan. Después de lo anteriormente expuesto, se resalta la importancia para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria, que tenga en cuenta estos antecedentes, de modo que los estudiantes puedan pasar de tener un pensamiento intuitivo a un pensamiento formal. En el orden de las ideas anteriores, dentro de la secuencia didáctica de actividades se incluye el análisis combinatorio, sin desconocer, la importancia del entendimiento que se genera en el estudiante a partir de los procedimientos sistemáticos que debe construir a partir de problemas retadores que involucren este contenido, lo que a su vez conlleva a que desarrolle su pensamiento matemático.

Temas específicos

- Principios básicos de conteo.
- Combinación de elementos.
- Variaciones simples.

Objetivos:

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos del análisis combinatorio de elementos.

Batería de problemas actividad combinatoria

1. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?
2. Un lenguaje tiene alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales, pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.
   - ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?

- Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

3. Alrededor de una mesa están sentadas 10 personas. ¿De cuántas maneras se puede escoger una comisión de tres de ellas, con la condición de que no contenga ningún par de vecinos de mesa?
4. Los seis miembros de una familia están reunidos esperando el año nuevo. Cuando el reloj dé las 12 campanadas cada uno de ellos dará dos abrazos, cada uno a una persona distinta. ¿De cuántas maneras diferentes pueden hacer esto?
5. Paola, Laura, Carmen, Daniel, Carlos y Gerardo tienen WhatsApp. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos WhatsApp entre sí, ninguno de ellos tiene un amigo WhatsApp fuera de este grupo. Cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos en WhatsApp. ¿De cuantas maneras diferentes puede pasar que este grupo de personas sean amigos WhatsApp?

Temática: Álgebra

El panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, plantea como el álgebra ha sido durante mucho tiempo el tema de transición por excelencia, que marca la frontera entre la educación secundaria y la universitaria, de esta forma el álgebra intenta difuminar la frontera que existen entre los contenidos y conceptos que se trabajan tanto en la escuela secundaria como en educación superior. Efectuadas las consideraciones anteriores, es comprensible la importancia del álgebra en la transición de la educación media a la del nivel terciario, por ello se propone una actividad dentro de la secuencia didáctica para el curso de solución de problemas matemáticos del Colegio José María Carbonell, con el propósito de favorecer el entendimiento de los estudiantes en otros campos de la matemática como lo son la geometría, el cálculo, las ecuaciones diferenciales, el álgebra lineal entre muchas otras que se orientan a nivel universitario (Carraher y Schliemann, 2014)[58]. Como ya se ha aclarado, es imprescindible que el álgebra se tenga en cuenta dentro del marco de crear un currículo más retador en las matemáticas escolares.

Temas específicos

- Sistemas de ecuaciones.
- Técnicas de factorización.
- Operaciones entre expresiones algebraicas.
- Potenciación.

Objetivos

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren álgebra.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Reforzar conceptos vistos en la educación media, a través de la resolución de problemas retadores algebraicos.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos del álgebra.

[58] Carraher, D. y Schliemann, A. (2014). Early algebra teaching and learning. Encyclopedia of mathematics education. Springer, 1993 – 196.

Batería de problemas actividad álgebra

1. Para números reales x y y, se define $x\spadesuit y = (x+y)(x-y)$. ¿Cuál es el valor de $3\spadesuit(4\spadesuit 5)$?
2. Las ecuaciones $2x+7=3$ y $bx-10=-2$ tienen la misma solución x. ¿Cuál es el valor de b?
3. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x(x^2-3x+2)(x-4)=0$?
4. Si -3 es una raíz del polinomio $-3x^3-9x^2+kx+12$, halle las otras dos raíces de este polinomio.
5. Los valores de y que satisfacen las ecuaciones

   $$2x^2+6x+5y+1=0 \quad \text{y} \quad 2x+y+3=0,$$

   se encuentran solucionando:

   a) $y^2+14y-7=0$

   b) $y^2+8y+1=0$

   c) $y^2+10y-7=0$

   d) $y^2+y-12=0$

   Argumente su respuesta
6. Si $4^x=16^{y+2}$ y $9^{x-9}=27^y$, calcule la suma de los dígitos de $x-y$.

Temática: Geometría

La geometría es el otro dominio abordado por el panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, pues investigaciones desarrolladas en torno a esta área del conocimiento matemático muestran el impacto de las discontinuidades en el currículo que se imparte a nivel secundario y terciario que genera una dificultad notoria en el proceso de transición de la escuela a la universidad, como lo señalan Sdrolias y Triandafillidis (2008)[59]. Hecha la observación anterior se

[59] Sdrolias, K. y Triandafillidis, A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics". Educational studies in mathematics. p. 159 – 169.

evidencia la importancia de desarrollar en los estudiantes procesos matemáticos como la visualización[60] y el sentido espacial, que contribuyen a la formación de conceptos robustos y formales en geometría.

La actividad que se muestra a continuación en términos generales, quiere cambiar la percepción por parte de los estudiantes del Colegio José María Carbonell respecto a la utilidad de la geometría en la vida cotidiana, teniendo en cuenta dos puntos clave para lograrlo. El primero de ellos consiste en que encuentren un gusto por esta disciplina y el segundo que vean su utilidad, teniendo en cuenta los señalamientos que hacen Sdrolias y Triandafillidis (2008)[61] en su investigación.

Temas específicos

- Áreas y ángulos.
- Congruencia y semejanza de triángulos.
- Trigonometría.

Objetivos

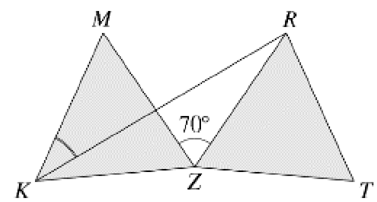
- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren geometría.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.

[60] Arcavi, A. (2003*). The Role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 215 – 241.
[61] Sdrolias, K. y Triandafillidis, A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics". Educational studies in mathematics. p. 159 – 169.

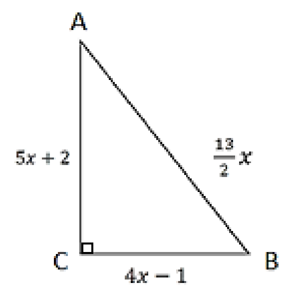
- Reforzar conceptos vistos en la educación media, a través de la resolución de problemas retadores en geometría.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos de la geometría.

Batería de problemas actividad geometría

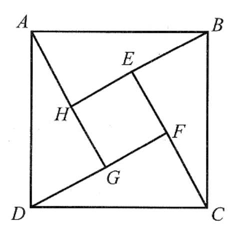
1. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$.



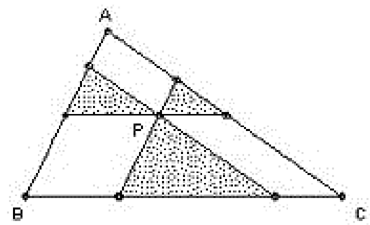
2. Consideremos un triángulo que tenga un lado de longitud 10 y que la altura sobre esa base mide 3. Si a la altura le sumamos 2 ¿cuánto hay que quitarle a la base para que el área del nuevo triángulo sea la mitad del área del triángulo original?
3. Calcular el área del triángulo rectángulo con ángulo recto en C que se muestra a continuación



4. El cuadrado $EFGH$ está dentro del cuadrado $ABCD$ ubicado de tal forma que cada lado de EFGH al ser extendido pasa por uno de los vértices de $ABCD$. Cada lado del cuadrado $ABCD$ mide $\sqrt{50}$, E esta entre B y H, y $BE = 1$. ¿Cuál es el área del cuadrado $EFGH$?



5. P es un punto dentro del ΔABC. Se trazan segmentos paralelos a los lados del triángulo que pasen por el punto P. Las áreas de los triángulos resultantes con vértice en P son 4, 9 y 49. ¿Cuál es el área del ΔABC?



6. Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un hexágono regular. Si el área del hexágono es $2016\ cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo?

4.4.2. Curso de solución de problemas matemáticos a nivel Universitario.

Diseño de clases de la universidad

A continuación, aparecen los problemas que se implementaron en el curso de solución de problemas matemáticos de la Universidad Antonio Nariño.

Se propone una prueba de entrada para establecer los saberes previos que tienen los estudiantes en relación con la teoría de números, el álgebra, la geometría y la combinatoria. Esta prueba servirá para contrastar el estado inicial de los estudiantes, comparado con el nivel de entendimiento en matemáticas elementales y desarrollo de pensamiento matemático que muestren al finalizar la secuencia didáctica que propone el investigador.

Temática: Prueba de entrada

Temas específicos

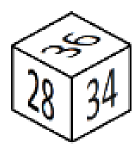
- Teoría de números
- Álgebra
- Geometría
- Combinatoria

Objetivos

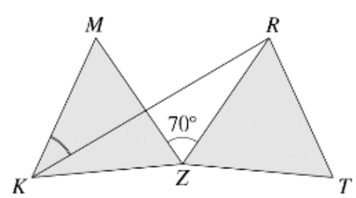
- Realizar un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en relación con preguntas fundamentadas en matemáticas elementales.
- Valorar el nivel de preparación de los estudiantes para enfrentarse a los objetivos de la investigación que se está realizando.

PRUEBA DE ENTRADA

1. Los números en las seis caras del cubo mostrado en la figura son enteros pares consecutivos. Si las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales, encuentre la suma de todos los seis números de este cubo.



2. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?
3. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$.



4. Para números reales x y y, se define $x♠y = (x + y)(x - y)$. ¿Cuál es el valor de $3♠(4♠5)$?

Temática: Teoría de números

Sobre la base de las consideraciones anteriores el panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, advierte sobre a los obstáculos epistemológicos que muestran los estudiantes que realizan la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria, ya que se muestra en diversas investigaciones cómo los obstáculos epistemológicos son inevitables en el aprendizaje de las matemáticas y visibles a través de las inadecuadas interpretaciones y falta de sensibilidad que muestran los estudiantes respecto a las propiedades de los números, en particular los enteros. Por las consideraciones anteriores se plantea la siguiente actividad, con el propósito de superar dichos obstáculos epistemológicos, mejorando el entendimiento de los conceptos que aborda la teoría de números y que a su vez desarrollar en los estudiantes de primer año de la educación superior su pensamiento matemático.

Temas específicos

- Aritmética modular.
- Números primos.
- Números compuestos.
- Criterios de divisibilidad.
- Descomposición en factores primos.
- Mínimo común múltiplo.
- Máximo común divisor.

Objetivos:

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.

- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren la teoría de números.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos de la teoría de números.

Batería de problemas actividad teoría de números

1. Una banda musical está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de las que había en el cuadrado. ¿Cuántos músicos tiene la banda?
2. Un número UAN es aquél que es igual al producto de sus divisores propios (divisores positivos excluyendo al 1 y al mismo número).
   - Encuentre la suma de los 15 primeros números UAN.
   - Halle una forma general para encontrarlos.
3. ¿Cuántas parejas ordenadas (a, b) cumplen $m.c.m\,(a, b) = 1.000$?
4. Si $m.c.m\,(a, b) = 1.000$

   $m.c.m\,(b, c) = 2.000$

   $m.c.m\,(c, a) = 2.000$

   ¿Qué valores puede tomar *c*?

5. Cuantas triplas ordenadas (a, b, c) cumplen:

   $m.c.m\,(a, b) = 1.000$

$m.c.m\ (b, c)\ =\ 2.000$

$m.c.m\ (c, a)\ =\ 2.000$

6. Hallar todos los pares ordenados (m, n) de números enteros positivos que satisfacen $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$.
7. Definamos una sucesión de números enteros de la siguiente manera: $a_1 = a_2 = 1008$ y para $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Calcule la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2017}$.
8. En cada planeta en un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que, si la cantidad de planetas es impar, entonces siempre hay por lo menos un planeta al que nadie observa.
9. Sea n un entero positivo mayor que 1. Sea k el número de factores primos distintos de n.
   - Demuestre que $n \geq 2^k$.
   - Demuestre que $\log n \geq k \cdot \log 2$.

Temática: Combinatoria

El panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en matemáticas en los niveles de educación escolar y superior, hace referencia a que la combinatoria es un componente fundamental para el desarrollo del pensamiento formal en el estudiante. En ese mismo sentido, los estudios realizados en matemática discreta muestran que el estudiante debe vincular progresivamente esquemas intuitivos que terminen siendo aproximaciones a las ideas normativas, con el objetivo de ir aproximando a los alumnos al concepto que se desea que construyan. En los marcos de las observaciones anteriores es de vital importancia que la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria, tenga en cuenta estos antecedentes, de modo que los estudiantes puedan pasar de tener un pensamiento intuitivo a un pensamiento formal. Teniendo en cuenta el anterior planteamiento, dentro de la secuencia didáctica de actividades se incluye el análisis combinatorio, sin desconocer, la importancia del entendimiento que se genera en el estudiante a partir de los procedimientos sistemáticos que debe construir a partir de problemas retadores que involucren este contenido, lo que a su vez conlleva a que desarrolle su pensamiento matemático.

Temas específicos

- Principios básicos de conteo.
- Combinación de elementos.
- Variaciones simples.

Objetivos:

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren las diversas formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto, formándolas y calculando su número.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos del análisis combinatorio de elementos.

Batería de problemas actividad combinatoria

1. En una circunferencia se marcan 8 puntos. Pruebe que el número de triángulos que se pueden formar con vértices en esos puntos es igual al número de pentágonos que se pueden formar con vértices en esos puntos.

2. Un lenguaje tiene alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales, pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.
    - ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?
    - Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?
3. Alrededor de una mesa están sentadas 10 personas. ¿De cuántas maneras se puede escoger una comisión de tres de ellas, con la condición de que no contenga ningún par de vecinos de mesa?
4. Paola, Laura, Carmen, Daniel, Carlos y Gerardo tienen WhatsApp. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos WhatsApp entre sí, ninguno de ellos tiene un amigo WhatsApp fuera de este grupo. Cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos en WhatsApp. ¿De cuantas maneras diferentes puede pasar que este grupo de personas sean amigos WhatsApp?
5. Los alumnos de una clase desean nombrar una comisión de tres de ellos para organizar una fiesta. Si la comisión puede nombrarse de 816 maneras, ¿cuántos alumnos hay en la clase?
6. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres elementos diferentes del conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$, de tal manera que su suma sea un número par?

Temática: Álgebra

El panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, plantea como el álgebra ha sido durante mucho tiempo el tema de transición por excelencia, que marca la frontera entre la educación secundaria y la universitaria, de esta forma el álgebra intenta difuminar la frontera que existe entre los contenidos y conceptos que se trabajan tanto en la escuela secundaria como en la educación superior. Por ello se le da la trascendencia que se merece a esta rama de las matemáticas, incorporando una actividad dentro de la secuencia didáctica propuesta para el curso de solución de problemas matemáticos de la Universidad Antonio Nariño, con el propósito de favorecer el entendimiento de otros campos de la matemática como lo son la geometría, el cálculo, las ecuaciones diferenciales y el álgebra lineal, entre muchas otras que tendrán que abordar en cursos posteriores del programa de pregrado al que pertenecen, como lo plantean Carraher y Schliemann (2014)[62].

Temas específicos

- Sistemas de ecuaciones.
- Técnicas de factorización.
- Ecuación cuadrática.
- Operaciones entre expresiones algebraicas.
- Potenciación.

Objetivos

- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren álgebra.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Reforzar conceptos vistos en la educación media, a través de la resolución de problemas algebraicos retadores.

[62] Carraher, D. y Schliemann, A. (2014). Early algebra teaching and learning. Encyclopedia of mathematics education. p. 1993 – 196. Springer.

- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos del álgebra.

Batería de problemas actividad álgebra

1. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$?
2. Si -3 es una raíz del polinomio $-3x^3 - 9x^2 + kx + 12$, halle las otras dos raíces de este polinomio.
3. Si $4^x = 16^{y+2}$ y $9^{x-9} = 27^y$, calcule la suma de los dígitos de $x - y$.
4. Hay dos valores de a para los cuales la ecuación $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ tiene solamente una solución para x. ¿Cuál es la suma de estos dos valores de a?
5. Los valores de y que satisfacen las ecuaciones

   $$2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + y + 3 = 0,$$

   se encuentran solucionando:

   a) $y^2 + 14y - 7 = 0$

   b) $y^2 + 8y + 1 = 0$

   c) $y^2 + 10y - 7 = 0$

   d) $y^2 + y - 12 = 0$

   Argumente su respuesta
6. Ricardo escribe el polinomio $2x^2 + 3x + 2$ en un papel y calcula sus dos raíces. Rafael reemplaza la x en el polinomio $2x^2 - x + 1$ por la primera raíz que le dice Ricardo y escribe el resultado. Luego hace lo mismo con la segunda raíz. ¿Cuánto es la suma de los números escritos por Rafael?
7. Si $\frac{a+b}{\mathrm{b+c}} = \frac{c+d}{\mathrm{d+a}}$, y $a \neq c$, demuestre que $a + b + c + d = 0$.
8. Si las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, son r y s, demuestre que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + ac = 0$ son $ar - b$ y $as - b$.

Temática: Geometría

La geometría es el otro dominio que es abordado por el panel de expertos en el congreso ICME 13 que investiga las transiciones en educación matemática, pues investigaciones desarrolladas en torno a esta área del conocimiento matemático muestran el impacto de las discontinuidades en el currículo que se imparte a nivel secundario y terciario, como lo señalan Sdrolias y Triandafillidis (2008)[63], lo que genera una dificultad notoria en el proceso de transición de la escuela secundaria a la universidad. Por ello es importante desarrollar en los estudiantes procesos matemáticos como la visualización[64] y el sentido espacial que contribuyen a la formación de conceptos robustos y formales en geometría.

La propuesta de la actividad que se muestra a continuación, quiere en términos generales cambiar la percepción por parte de los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño, respecto a la utilidad de la geometría en la vida cotidiana y cómo se encuentra relacionada con otras cátedras que deben cursar en su proceso de formación profesional teniendo en cuenta dos puntos clave para lograrlo. El primero de ellos consiste en que encuentren un gusto por esta disciplina y el segundo que vean su utilidad teniendo en cuenta los señalamientos que hacen Sdrolias y Triandafillidis (2008)[65] en su investigación.

Temas específicos

- Áreas y ángulos.
- Congruencia y semejanza de triángulos.
- Trigonometría.

---

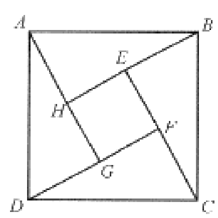
[63] Sdrolias, K. y Triandafillidis, A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a “chain of school mathematics”. Educational studies in mathematics. p. 159 – 169.
[64] Arcavi, A. (2003*). The Role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 215 – 241.
[65] Sdrolias, K. y Triandafillidis, A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a “chain of school mathematics”. Educational studies in mathematics. p. 159 – 169.

Objetivos

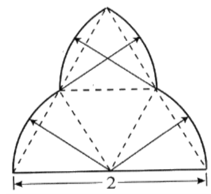
- Analizar la repercusión que tiene en los estudiantes la resolución de problemas retadores, como estrategia metodológica para dinamizar el desarrollo del pensamiento matemático.
- Motivar al estudiante hacia la actividad matemática, a través de la resolución de problemas que involucren geometría.
- Efectuar un cambio en las estructuras conceptuales de los estudiantes.
- Contribuir a la transición de la matemática escolar a la universitaria, a través de la solución de problemas retadores.
- Reforzar conceptos vistos en la educación media, a través de la resolución de problemas retadores en geometría.
- Desarrollar en los estudiantes conceptos robustos de la geometría.

Batería de problemas actividad geometría

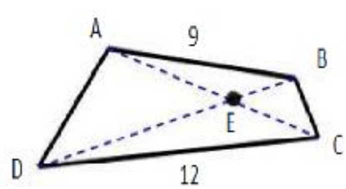
1. Un terreno en forma rectangular cuyas longitudes de lado son enteras, tiene un perímetro de 3996 metros. Si el campo es dividido en 1998 partes iguales, el área de cada parte es entera. Determinar las dimensiones del terreno.
2. El cuadrado $EFGH$ está dentro del cuadrado $ABCD$ ubicado de tal forma que cada lado de EFGH al ser extendido pasa por uno de los vértices de $ABCD$. Cada lado del cuadrado $ABCD$ mide $\sqrt{50}$, E esta entre B y H, y $BE = 1$. ¿Cuál es el área del cuadrado $EFGH$?



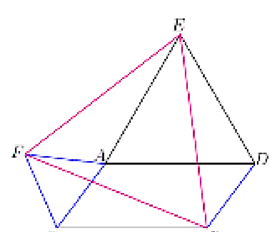
3. La gráfica muestra la figura denominada trébol que se construye dibujando sectores circulares alrededor de los lados de triángulos equiláteros congruentes. ¿Cuál es el área de un trébol cuya base horizontal mide 2cm?



4. Cada lado de un triángulo ABC mide ℓ cm. Sea D el pie de la perpendicular desde A hasta BC. Sea E un punto en AD tal que $AE = \frac{1}{3}AD$. Calcule el área del cuadrilátero $[ABEC]$.
5. En el triángulo ABC se toman un punto D en el lado AB y un punto E en el lado AC, de modo que el segmento DE divide el triángulo ABC en dos partes de igual área (el triángulo ADE y el cuadrilátero $BCED$). Si $AD = 3$ cm, $DB = 2$ cm y $AC = 6$ cm, ¿cuál es la medida del segmento AE?
6. El cuadrilátero convexo $ABCD$ es tal que $AB = 9$ y $CD = 12$. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en E, $AC = 14$, y el ΔAED y el ΔBEC tienen áreas iguales. ¿Cuál es la longitud de AE?

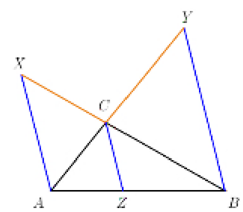


7. En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros ΔABF y ΔADE, respectivamente. Demuestre que el triángulo ΔFCE es equilátero.



8. Sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo ΔABC. Una línea a través de A paralela a CZ interseca a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Demuestre que

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$$



Conclusiones capítulo 4

En este capítulo se desarrollaron dos aspectos importantes para la actual investigación, el primero de ellos corresponde al carácter cualitativo de la investigación, donde se tiene en cuenta las directrices de la investigación acción. Es evidente entonces como se plantean diferentes métodos teóricos y empíricos para alcanzar los resultados deseados, los cuales constituyen un espacio conceptual que facilitan la organización y comprensión del problema de investigación. El segundo aspecto se trabajó a partir del modelo didáctico propuesto, de modo que las clases se desarrollaran mediante la implementación de un sistema de actividades para los dos cursos de solución de problemas matemáticos.

Como se puede evidenciar el diseño general de las actividades estuvo fuertemente influenciado por las investigaciones que desarrollaron el panel de expertos que participo en el congreso ICME 13, resaltando dentro de muchos otros aspectos la diferencia cualitativa que se da entre la matemática de escuela secundaria caracterizada por ser “elemental” y la de la universidad influenciada por un carácter “más formal” de la matemática como lo indican Bosch, Fonseca y Gascón (2004)[66]. En síntesis, teniendo en cuenta todos los argumentos acabados de señalar se evidencian la importancia y actualidad de problemática de la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad.

[66] Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon y Verschaffel (2016). Transitions in Mathematics Education. ICME – 13 Topical Surveys.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES Y DE LOS RESULTADOS DE SU APLICACIÓN A LA MUESTRA SELECCIONADA

Acorde con el enfoque cuantitativo propuesto previamente para realizar el análisis de los resultados obtenidos en cada una de las actividades de la secuencia didáctica, se realizará la recolección y el análisis de las respuestas obtenidas para poder contestar el problema de investigación y probar las hipótesis establecidas previamente. El análisis didáctico de las repuestas dadas a los problemas formulados a los estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y universidad, permitirá caracterizar el nivel de entendimiento en matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento.

5.1. Análisis de los resultados de las actividades encaminadas a favorecer la relación entre entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad en grado once

El presente epígrafe describe el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes del Colegio José María Carbonell, que cursaron la clase de solución de problemas matemáticos.

5.1.1. Análisis prueba de entrada de los estudiantes de grado once

Acorde con el modelo didáctico de investigación, se realiza la prueba de entrada perteneciente a la fase de saberes previos. En esta prueba se dio un hecho particular el cual consistió en que ningún estudiante de grado once respondió acertadamente a las cuatro preguntas formuladas. Sin embargo, se realiza un análisis de las principales dificultades que tuvieron los estudiantes en la prueba de entrada.

Para la primera pregunta, se les presentaba a los estudiantes un cubo donde podían apreciar tres de sus caras, en ellas se encontraban dibujados los números $28, 34$ y 36, de este modo debían determinar los números que tenían dibujados las tres caras del cubo que no se podían apreciar. Para resolver el problema debían partir de dos condiciones, la primera es que las seis caras del cubo tienen dibujados números enteros pares consecutivos y la segunda consiste en que las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales.

De acuerdo con el modelo didáctico propuesto, los estudiantes presentan dificultades en una de las primeras etapas que es la fase de abordaje; esta afirmación se hace debido a que muchos de ellos no tienen la capacidad de interpretar la información presentada en el problema. Prueba de ello consiste en las respuestas de los estudiantes, pues en su mayoría proponen como solución, que las caras ocultas deben tener los mismos números que se les presentaron, es decir los números $28, 34$ y 36. La apreciación del autor es que los estudiantes no tienen la capacidad interpretar el problema ni la información suministrada en él, como se muestra en la Figura 7.

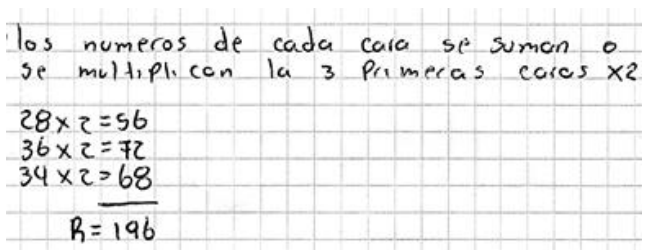


Figura 7. Respuesta al primer problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell.

En la segunda pregunta, nuevamente los estudiantes tienen dificultades en la fase de abordaje del problema, pues algunos de ellos no identifican con claridad cuáles son los números pares e impares, y para este problema se les solicita a los estudiantes que deben determinar cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras. Con referencia a lo anterior los estudiantes logran identificar algunos casos particulares que cumplen con la condición dada, como se puede apreciar en la Figura 8.

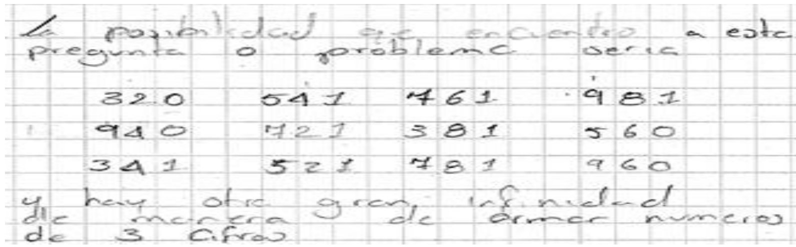


Figura 8. Respuesta al segundo problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell.

Llegando a la conclusión que existen muchos o infinitos números que cumplen con las condiciones del problema.

Para la tercera pregunta, se les presenta a los estudiantes una construcción geométrica, la misma está elaborada a partir de dos triángulos equiláteros congruentes entre sí, que forman entre sí un ángulo de $70°$. En términos generales a los estudiantes se les dificultó aún más este problema que los dos problemas anteriores, pues no manejaban el concepto de triángulo equilátero ni el de congruencia. Se llegó a tal punto que algunos de ellos no recordaban ni siquiera conceptos tan básicos como saber que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°. En la Figura 9 se muestra la respuesta de uno de los pocos estudiantes que se atrevieron a solucionar el problema propuesto.

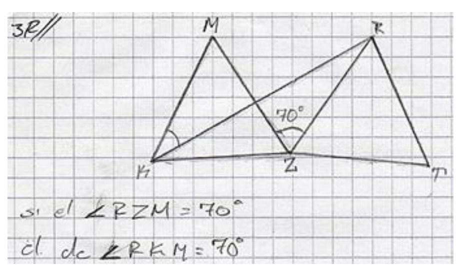


Figura 9. Respuesta al tercer problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell.

En el cuarto problema se les presenta a los estudiantes la expresión $x♠y = (x + y)(x - y)$, la misma no es comprensible para la mayoría de los estudiantes, por ello se les dificulta iniciar la fase de abordaje del problema. Sin embargo, algunos de los estudiantes infieren que la figura pica corresponde al signo positivo o al signo negativo, por tanto proponen como solución la siguiente expresión $3 + (4 - 5)$, obteniendo como resultado final 2. A continuación, se presenta la respuesta (ver Figura 10) de uno de los estudiantes de grado 11.

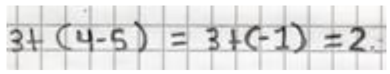


Figura 10. Respuesta al cuarto problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell.

Teniendo en cuenta las dificultades mostradas por los estudiantes en la prueba de entrada, se concluye que ellos carecen de conocimientos básicos en matemáticas elementales. Además, se les dificulta la comprensión de los problemas presentados, debido a que no manejan conceptos relacionados con teoría de números, análisis combinatorio, álgebra y geometría. De acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando se puede establecer que no logran estructurar ideas adecuadas para llegar a la solución de los problemas planteados, debido al bajo nivel mostrado en los resultados de la prueba de entrada. Por tal motivo se hace necesaria una reestructuración de la secuencia didáctica de actividades, en el sentido que se tenía previsto comenzar con la actividad de teoría de números. Sin embargo, se inicia con la actividad denominada números que tiene como propósito que los estudiantes se familiaricen con la resolución de problemas retadores y además tengan las bases necesarias para el trabajo que deben desarrollar en las actividades de teoría de números, álgebra y geometría.

Resulta oportuno mencionar que para la solución de los problemas matemáticos propuestos en la secuencia de actividades los estudiantes conformaron seis grupos de trabajo.

5.1.2. Análisis primera actividad: Números

Para esta actividad es importante que los estudiantes comiencen a afianzar sus conocimientos en matemática elemental, haciendo un breve recorrido desde el trabajo con los números enteros hasta los reales, de modo que se realicen operaciones básicas con ellos. Es importante resaltar que se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos para los estudiantes en relación con los objetivos de la investigación.

Para la tercera situación presentada los grupos de trabajo debían distribuir 120 personas que se encontraban en la recepción de un hotel, de tal modo que la cantidad de personas que hay en el bar sea un quinto de las que hay en el comedor, y en la recepción debía haber un octavo de las que había en el salón, Además debían cumplir con la condición que al pasar diez personas del comedor al salón y seis del bar a la recepción, en la recepción debía haber un sexto de las que quedan en el comedor. De tal modo que tenían que establecer ¿cuántas personas había inicialmente en la sala de reuniones?

Para la fase de abordaje del problema fue necesario explicarles a algunos de los estudiantes a que hacía referencia determinar la quinta parte de un número y como se calculaba, luego de dicha aclaración los estudiantes comenzaron la fase de resolución del problema donde pudieron establecer que, por tratarse de personas, el residuo debía ser cero al tratar de obtener la quinta parte y análogamente la octava parte de la población de huéspedes. Inicialmente la mayoría de los grupos comenzaron a distribuir las 120 personas al tanteo de tal modo que la cantidad de personas que hubiese en el bar fuese un quinto de la que hay en el comedor, y en la recepción estuvieran un octavo de las personas que había en el salón.

Después de las consideraciones anteriores validaron que las cifras obtenidas como solución para la primera parte del problema se ajustaran a la segunda parte del enunciado, de modo que al pasar diez personas del comedor al salón y seis del bar a la recepción, en la recepción debía haber un sexto de las que quedan en el comedor, de este modo se dan cuenta que las cifras obtenidas inicialmente no concuerdan con el segundo requerimiento. Es en este preciso momento donde comienzan a enfrentarse con el reto matemático, pues deben hacer que la respuesta dada cumpla con todas las condiciones del problema, es entonces cuando los estudiantes comienzan a reestructurar sus ideas y se dan cuenta que es necesario emplear una heurística diferente a la utilizada inicialmente. Después de esto comienzan a discernir, hacer conjeturas, a emplear estrategias de solución que los lleven a la solución correcta del problema, llegando a la conclusión que para la cumplir con todas las condiciones del problema debe haber 4 personas en la recepción, 14 en el bar, 70 en el comedor y 32 en el salón de reuniones.

La apreciación del autor es que, por las heurísticas utilizadas por los estudiantes se puede establecer que tienen un mayor entendimiento de las matemáticas elementales en relación con las operaciones básicas con números enteros. Evidencia de ello se muestra en la Figura 12.

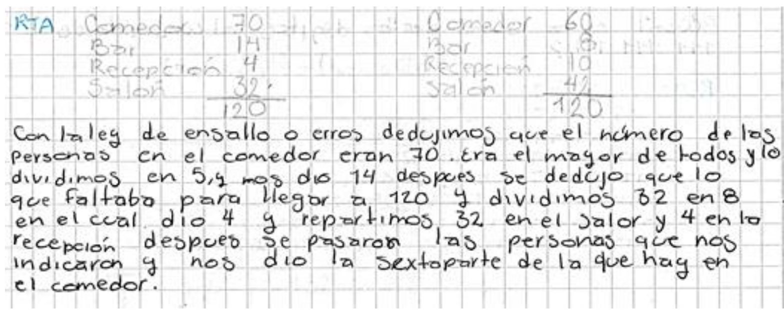


Figura 12. Respuesta al tercer problema de la actividad de números realizada por el grupo 2. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

De este modo todos los grupos logran llegar a la respuesta correcta; sin embargo hay que precisar que al grupo 4 le costó más esfuerzo la fase de abordaje que a los demás equipos de trabajo.

- Este problema lo resolvieron correctamente los seis grupos conformados.

Como apreciación del investigador, se puede evidenciar que el trabajo realizado por los estudiantes con los tres primeros problemas mejoró ostensiblemente su desempeño en las fases de abordaje y resolución del problema retador que se mencionan en el modelo didáctico de la presente tesis.

El sexto problema según el criterio del investigador, es tal vez el más rico de la actividad de números, pues propicia una relación dinámica y positiva entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de grado once. Este problema plantea que si $log_{10}(3) = X$, $log_{10}(9) = Y$ y $log_{10}(81) = Z$, deben calcular el valor de la suma $\frac{X}{Y} + \frac{Y}{Z} + \frac{Z}{X}$. Para la fase de abordaje del problema ya tienen saberes previos en relación con las propiedades de la logaritmación motivo por el cual no se les dificulta la comprensión de la situación presentada, lo que evidencia un entendimiento de conceptos de la matemática elemental como números reales, operaciones con números reales, propiedades de los logaritmos entre otros. En relación con la fase de resolución del problema, el reto se encuentra en utilizar los dichos conocimientos para lograr establecer el resultado de sumar $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}$, para lo cual emplean una heurística brillante que consiste en expresar todos los logaritmos en una misma base, luego pasan a reemplazarlos en la expresión $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}$. Esta estrategia les permite comenzar a simplificar expresiones equivalentes tanto en el numerador como en el denominador de cada fracción, lo que los lleva a obtener los números racionales $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{4}{1}$ que al ser sumados dan como resultado 5.

De acuerdo con el criterio del autor este problema permite evidenciar el entendimiento en matemáticas elementales al aplicar las propiedades de los logaritmos en el contexto de establecer el resultado de la suma de $\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}$, respecto al desarrollo del pensamiento matemático se muestra claramente el utilizar la heurística de expresar todos los logaritmos en una misma base para llegar a la respuesta adecuada del problema, como se puede observar en la Figura 15.

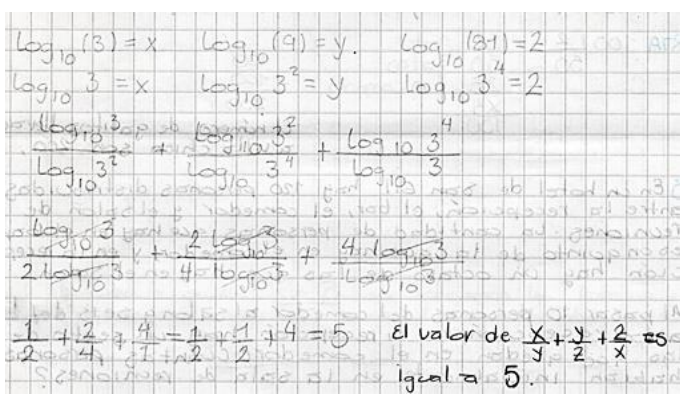


Figura 15. Respuesta al sexto problema de la actividad de números realizada por el grupo 2. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo resolvieron correctamente los grupos 2, 4, 5 y 6.

5.1.3. Análisis segunda actividad: Teoría de números

En la segunda actividad, se pretende que los estudiantes afiancen sus conocimientos a partir del trabajo con la teoría de números, donde se trabajan conceptos relacionados con aritmética modular, números primos, números compuestos, criterios de divisibilidad, descomposición en factores primos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor entre muchos otros que abordan los problemas planteados. De este modo se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos, ya que en su solución se puede apreciar un entendimiento de la matemática elemental por parte de los estudiantes.

El primer problema ya se les había planteado a los estudiantes en la prueba de entrada, en él se les muestra un cubo en el cual se pueden apreciar tres caras con los números 28, 34 y 36 inscritas en ellas, en el planteamiento del problema se les indica que los números en las seis caras del cubo mostrado son enteros pares consecutivos. Con referencia a lo anterior se debe tener en cuenta que las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales y deben encontrar la suma de los seis números que componen el cubo.

A diferencia de las dificultades presentadas en la fase de abordaje durante la prueba de entrada, los estudiantes logran interpretar con mayor facilidad el problema, de este modo en la fase de resolución del problema retador los estudiantes muestran un entendimiento de las operaciones básicas que deben realizar para llegar a la respuesta correcta del problema, como se muestra en la Figura 17.

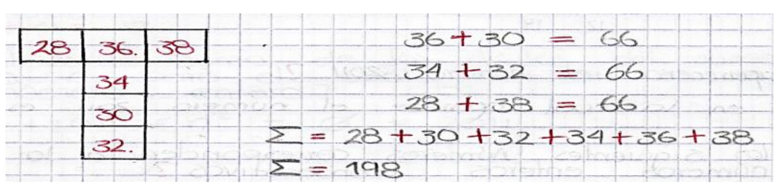


Figura 17. Respuesta al primer problema de la actividad de teoría de números realizada por el grupo 1. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

Del mismo modo se puede apreciar como muestran un entendimiento de la matemática, al conjeturar que las únicas posibilidades que existen para que las seis caras del cubo sean números enteros consecutivos son: $26, 28, 30, 32\ 34, 36$ o $28, 30, 32, 34, 36, 38$. De este modo, si las sumas de las caras opuestas son iguales, el número más grande estará en el lado opuesto de la cara del cubo con el número menor y así sucesivamente, es así como el primer caso presentado no es posible. Por ello el segundo caso es el correcto, siendo la respuesta correcta $28 +\ 30 + 32 +\ 34 +\ 36 +\ 38 = 198$. Dicha heurística se encuentra inmersa en la repuesta dada por el grupo 5, como se muestra en la Figura 18.

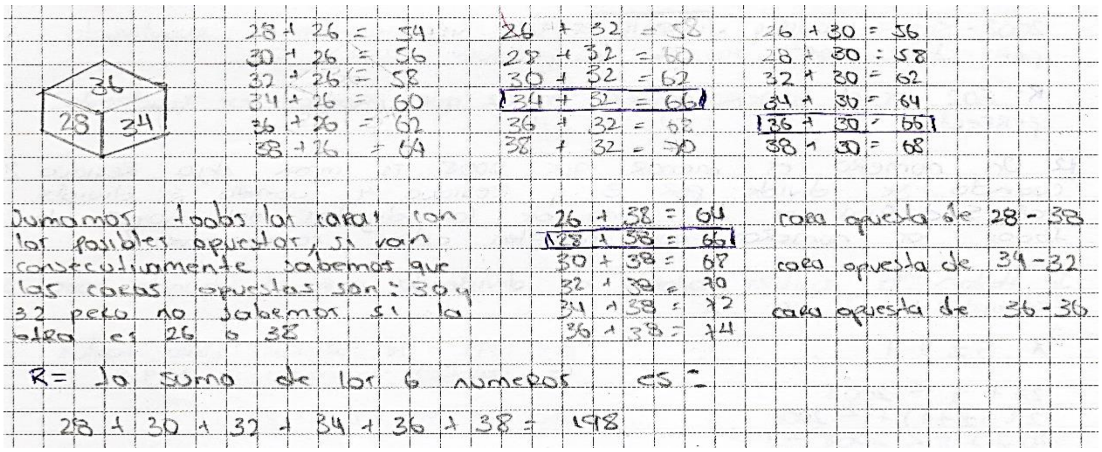


Figura 18. Respuesta al primer problema de la actividad de teoría de números realizada por el grupo 5. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo lograron resolver de forma correcta todos los grupos.

En el cuarto problema, se les muestra a los estudiantes que dados tres números p, q y r primos menores que 50 con la propiedad que $p + q = r$, indiquen cuantos valores de r son posibles.

En la fase de abordaje los estudiantes deben trabajar con las variables p, q y r, que cumplen con la condición de ser números primos, la interpretación del problema no les cuesta dificultad, gracias a los problemas que habían resuelto previamente en la actividad de números, donde habían abordado situaciones que involucran un contexto abstracto para ellos. En este orden de ideas prosiguen con la fase de resolución del problema retador, de modo que establecen que los números primos menores que 50 son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$ y 47, es así como llegan a la conclusión que la suma de dos números impares cualquiera será siempre un número par y que el único par primo es el número 2. De acuerdo con la heurística empleada (Figura 19) se puede evidenciar como logran una mayor comprensión del concepto de número primo y la relevancia que tiene en las matemáticas.

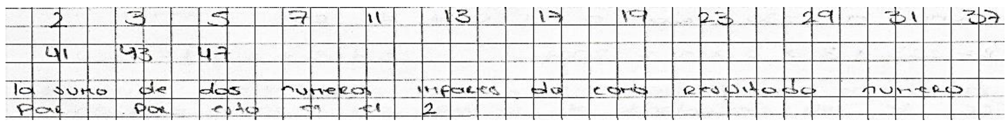


Figura 19. Respuesta al cuarto problema de la actividad de teoría de números realizada por el grupo 5. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

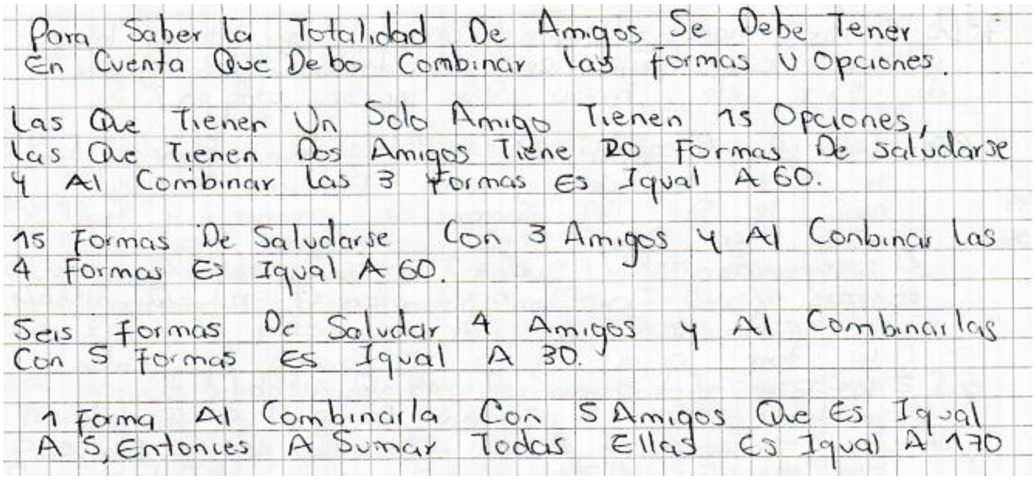
- Este problema lo resolvieron de forma correcta los grupos 1, 2, 4 y 5.

5.1.4. Análisis tercera actividad: Combinatoria

Para la tercera actividad, se procura que los estudiantes afiancen los conocimientos que poseen en principios básicos de conteo, combinación de elementos y variaciones simples, todo ello a partir del trabajo con problemas retadores que involucren estas temáticas entre muchas otras. De este modo se realizará el análisis del problema más significativo, donde se aprecie un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

Para el quinto problema formulado se les da a los estudiantes el nombre de seis personas que tienen WhatsApp, luego se les dice que algunos de ellos, pero no todos, son amigos WhatsApp entre sí, de esta forma deben tener en cuenta dos condiciones, la primera de ellas es que ninguno de ellos tiene un amigo WhatsApp fuera de este grupo y la segunda consiste en que cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos en WhatsApp. Al final se les solicita que encuentren el número de formas en que este grupo de personas puedan ser amigos WhatsApp.

En la fase de abordaje del problema tuvieron dificultades todos los grupos para lograr entender la situación presentada. En este mismo en la fase de resolución, la mayoría de los estudiantes utilizaron la heurística de realizar las posibles combinaciones de amigos WhatsApp con uno, dos, tres, cuatro y cinco personas, de este modo deducen que, para llegar a la solución adecuada del problema, deben tener en cuenta el número de posibles formas en que pueden ser amigos en relación con el número de personas que conozcan, sobre la base de las consideraciones anteriores optimizan el procedimiento para llegar a la solución del problema como puede apreciarse en la Figura.


Para Saber la Totalidad De Amigos Se Debe Tener En Cuenta Que Debo Combinar las formas u Opciones.

Las Que Tienen Un Solo Amigo Tienen 15 Opciones, las Que Tienen Dos Amigos Tiene 20 Formas De saludarse y Al Combinar las 3 formas Es Igual A 60.

15 Formas De Saludarse Con 3 Amigos y Al Conbinar las 4 Formas Es Igual A 60.

Seis formas De Saludar 4 Amigos y Al Combinarlas Con 5 formas Es Igual A 30.

1 Forma Al Combinarla Con 5 Amigos Que Es Igual A 5, Entonces A Sumar Todas Ellas Es Igual A 170

Figura 20. Respuesta al quinto problema de la actividad de combinatoria realizada por el grupo 1. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo resolvieron de forma correcta los grupos 1, 2, 4 y 5.

Las apreciaciones del autor frente a los procedimientos efectuados por los estudiantes es que muestran un entendimiento de los conceptos relacionados con análisis combinatorio al realizar las posibles combinaciones de amigos WhatsApp con uno, dos, tres, cuatro y cinco personas y a su vez se evidencia un desarrollado en el pensamiento matemático al tener que establecer cómo el número de posibles formas en que pueden ser amigos WhatsApp se puede optimizar al tener en cuenta el principio de la multiplicación.

5.1.5. Análisis cuarta actividad: Álgebra

Para la cuarta actividad, se tiene como finalidad mejorar el entendimiento de los estudiantes en relación con el álgebra y gracias a la solución de problemas retadores se logra simultáneamente desarrollar su pensamiento matemático. Los conceptos que se van a abordar en el desarrollo de la actividad están relacionados con sistemas de ecuaciones, técnicas de factorización, operaciones entre expresiones algebraicas y potenciación, entre otros, es así como se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos, puesto que en sus soluciones se aprecian un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

El segundo problema de la actividad de álgebra, muestra las ecuaciones $2x + 7 = 3$ y $bx - 10 = -2$, se indica al estudiante que las dos ecuaciones tienen la misma solución x, y se les pide determinar cuál es el valor de b.

Para la fase de abordaje del problema, a los grupos de trabajo se les complica inicialmente la interpretación del mismo, pero luego de la discusión en los equipos conformados deducen qué significa el que las dos ecuaciones tienen la misma solución. En ese punto comienzan la fase de resolución del problema donde encuentran el reto de establecer el valor numérico de la incógnita b, para ello utilizan la siguiente heurística: primero despejan x de la primera ecuación, obteniendo como resultado $x = -2$, luego despejan la segunda ecuación en términos de $bx = -2 + 10$ y por último reemplazan a x por -2, llegando a la conclusión que $b = -4$. El método utilizado por los grupos para llegar a la solución del problema muestra un entendimiento del despeje de ecuaciones y además la interpretación de la letra como incógnita en álgebra (ver Figura 21).

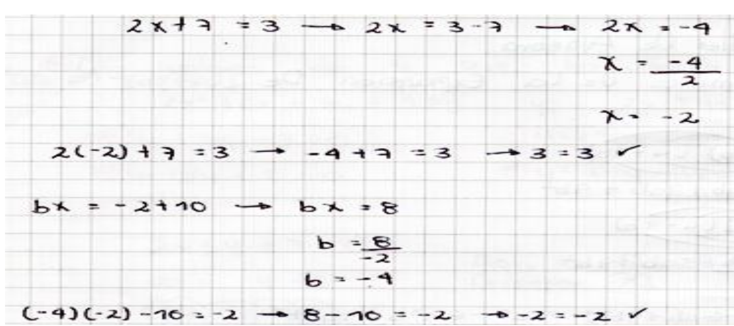


Figura 21. Respuesta al segundo problema de la actividad de álgebra realizada por el grupo 4. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema tan solo no pudo ser resuelto adecuadamente por el grupo 1.

Para el tercer problema, se le pide a los estudiantes que hallen las raíces de la ecuación $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$.

La fase de abordaje del problema no les costó mucha dificultad a los estudiantes, gracias a la adecuada interpretación que tienen del teorema del factor nulo utilizado en álgebra, ya estando en la fase de resolución del problema retador, los estudiantes utilizan el teorema antes mencionado para hallar las raíces de la ecuación $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$, por lo que concluyen que $x = 0$, $x = 4$ ó $x^2 - 3x + 2 = 0$, y de la última expresión deducen a partir de la utilización de la ecuación cuadrática que $x = 1$ ó $x = 2$. Con referencia a lo anterior se observa un entendimiento de teoremas básicos utilizados en álgebra y puestos en práctica en la solución de problemas matemáticos como lo muestra la Figura 22.

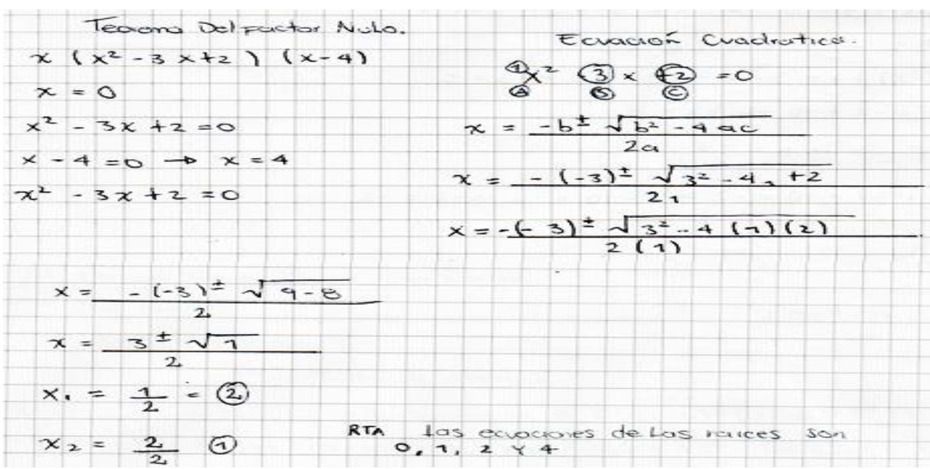


Figura 22. Respuesta al tercer problema de la actividad de álgebra realizada por el grupo 6. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo resolvieron de forma correcta todos los equipos de trabajo.

En el quinto problema planteado a los estudiantes de grado once, les pide que hallen los valores de y que satisfacen las ecuaciones $2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0$ y $2x + y + 3 = 0$, donde el valor de y se encuentra solucionando una de las siguientes ecuaciones cuadráticas $y^2 + 14y - 7 = 0$, $y^2 + 8y + 1 = 0$, $y^2 + 10y - 7 = 0$ y $y^2 + y - 12 = 0$, de modo que deben argumentar la respuesta dada. El grado de complejidad de este problema para los estudiantes, no hace que se les dificulte la fase de abordaje, gracias al trabajo que se ha venido desarrollado dentro de las comunidades de práctica. Con respecto a la fase de resolución del problema, el reto se encuentra en determinar cuál de las cuatro opciones presentadas, satisface simultáneamente las ecuaciones $2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0$ y $2x + y + 3 = 0$. Para ello utilizan la siguiente heurística: primero despejan x en la segunda ecuación $x = \frac{-y-3}{2}$, a continuación reemplazan x en la primera ecuación $2\left(\frac{-y-3}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{-y-3}{2}\right) + 5y + 1 = 0$, y luego de realizar procedimientos algebraicos obtienen que $y^2 + 10y - 7 = 0$. Por las consideraciones anteriores se puede observar claramente como el uso de procedimientos tales como el despeje de ecuaciones y la interpretación del concepto de raíz de una ecuación expresada en términos de otra ecuación, evidencia el notable desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos al emplear este tipo de heurísticas y conjeturas en la solución de problemas algebraicos, como se evidencia en la Figura 23.

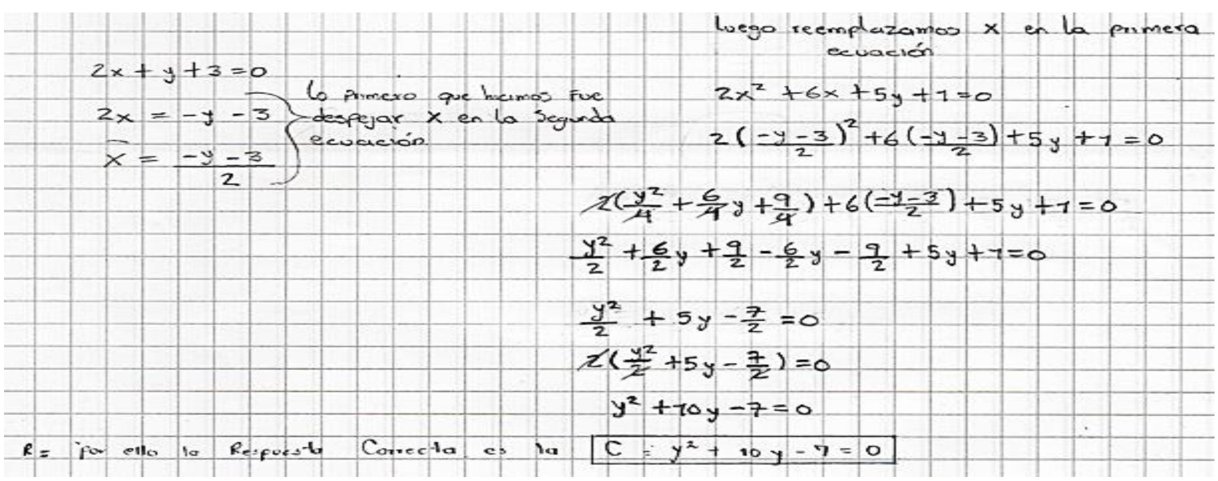


Figura 23. Respuesta al quinto problema de la actividad de álgebra realizada por el grupo 3. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo resolvieron de forma correcta todos grupos.

5.1.6. Análisis quinta actividad: Geometría

En la última actividad de la secuencia didáctica, se parte del hecho de que los estudiantes deben construir un conocimiento robusto en geometría a partir del trabajo desarrollado con problemas no rutinarios involucrando esta rama de la matemática. Algunos de los conceptos inmersos dentro de los problemas propuestos incluyen áreas y ángulos, congruencia y semejanza de triángulos, y trigonometría. A continuación, se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos, ya que en su solución se aprecian un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

En el tercer problema se les pide a los estudiantes que calculen el área del triángulo rectángulo, cuyos catetos miden $5x + 2$, $4x - 1$ y $\frac{13}{2}x$ respectivamente.

La fase de abordaje del problema no les cuesta dificultad a los estudiantes gracias al trabajo realizado en la actividad de álgebra, teniendo en cuenta que el triángulo dado es un triángulo rectángulo y que para poder determinar el área del triángulo deben determinar el valor de la incógnita x. Gracias a la comprensión de la situación planteada, los estudiantes pasan a la fase de resolución del problema, donde se encuentran con el reto de determinar el valor numérico de la incógnita x. Para ello utilizan la siguiente heurística:

- Inicialmente emplean el teorema de Pitágoras, obtenido la ecuación $(5x + 2)^2 + (4x - 1)^2 = \left(\frac{13x}{2}\right)^2$.
- Luego realizan un trabajo algebraico donde obtienen

$$25x^2 + 20x + 4 + 16x^2 - 8x + 1 = \frac{169x^2}{4}$$

$$41x^2 + 12x + 5 = \frac{169x^2}{4}$$

$$164x^2 + 48x + 20 = 169x^2$$

$$-5x^2 + 48x + 20 = 0$$

$$5x^2 - 48x - 20 = 0$$

- Al tener una ecuación de segundo grado emplean la fórmula para hallar las raíces

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4 * (-20) * 5}}{2 * 5} = \frac{48 \pm \sqrt{2.304 + 400}}{10} = \frac{48 \pm 52}{10}$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -\frac{2}{5}$$

- Como $x > 0$, por tratarse de una magnitud toman x_1 y hallan el área del triángulo.

$$\Delta ABC = \frac{b * h}{2} = \frac{(4 * 10 * -1)(5 * 10 + 2)}{2} = \frac{39 * 52}{2} = 1.014$$

Como criterio del autor se establece, que los estudiantes al efectuar este tipo de heurísticas donde emplean despeje de ecuaciones y además utilizan de la ecuación cuadrática, es muestra de un entendimiento del algebra elemental y a su vez se puede evidenciar un desarrollo del pensamiento matemático, al utilizar este tipo de técnicas en otro campo de la matemática como lo es la geometría (ver Figura 24).

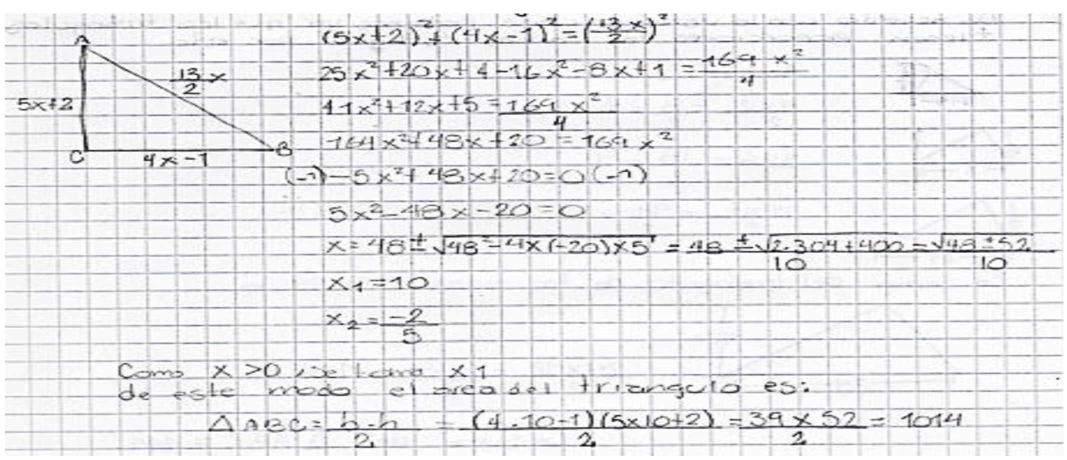


Figura 24. Respuesta al tercer problema de la actividad de geometría realizada por el grupo 2. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo resolvieron de forma acertada todos los grupos de trabajo.

Para el quinto problema se les presenta a los estudiantes una construcción geométrica que cumple con las siguientes condiciones: P es un punto dentro del ΔABC, se trazan segmentos paralelos a los lados del triángulo que pasen por el punto P. De este modo las áreas de los triángulos resultantes con vértice en P son 4, 9 y 49, de acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando el estudiante debe terminar cuál es el área del ΔABC.

Es importante resaltar que, para iniciar la fase de abordaje del problema fue fundamental la visualización[67] pues contribuye en la comprensión de la situación presentada, durante la fase de resolución fue esencial la construcción geométrica presentada, pues gracias a la visualización los estudiantes formulan heurísticas adecuadas para la solución del problema planteado. En este orden de ideas los estudiantes logran conjeturar que los triángulos con vértice en P guardan las siguientes proporciones entre sus áreas $4: 9: 49$, esta deducción los lleva a establecer que se guardan estas mismas proporciones en relación con la magnitud de la base y la altura de los triángulos con vértice en P, lo que los lleva a establecer que las alturas de los tres triángulos con vértice P son 2, 3 y 7 respectivamente. Luego utilizan la visualización para establecer que el triángulo más pequeño con vértice en P, encaja en la parte superior del triángulo ΔABC, llegando a la conclusión que el triángulo ΔABC tiene una altura de 12 y una base de 24 por lo que su área es de 144. La apreciación del autor es que la heurística utilizada para llegar a la solución del problema, muestra claramente como los estudiantes tienen un entendimiento de conceptos matemáticos elementales como proporcionalidad, que lo utilizan adecuadamente para establecer el área de los triángulos y así poder determinar la altura de dichos triángulos, lo que muestra un desarrollo de su pensamiento matemático gracias a la solución de problemas geométricos (ver Figura 25).

[67] Arcavi, A. (2003*). The Role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 215 – 241.

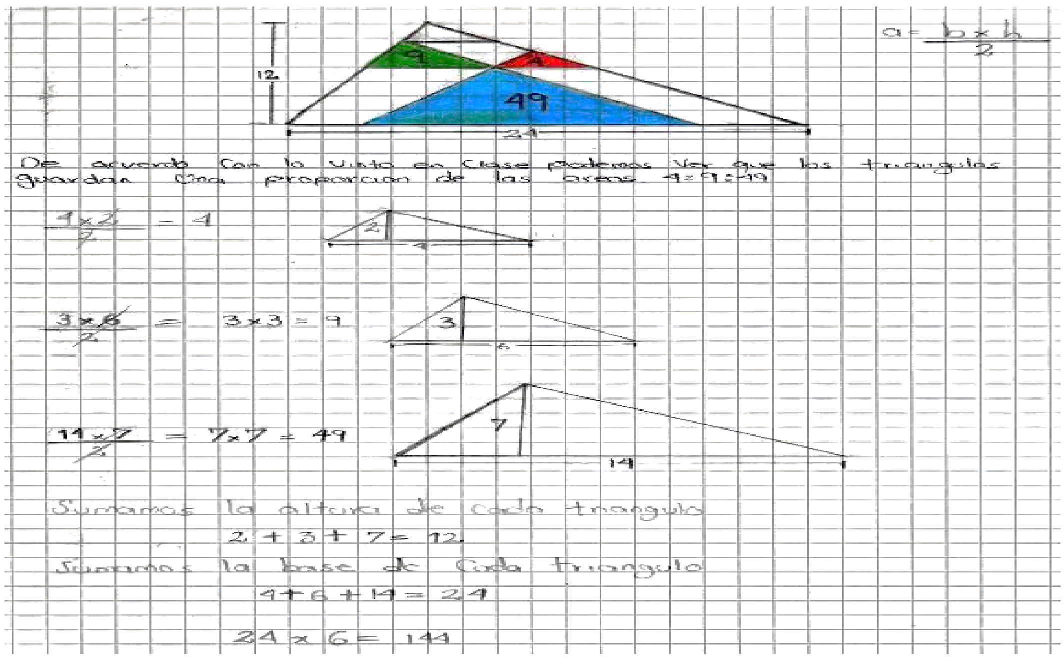


Figura 25. Respuesta al quinto problema de la actividad de geometría realizada por el grupo 4. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

- Este problema lo resolvieron de forma correcta los grupos 1, 2, 4, 5 y 6.

Es importante mencionar que, para las cuatro actividades propuestas el proceso de validación se llevó a cabo al interior de las comunidades de práctica, donde los estudiantes no quedaban satisfechos con la respuesta dada hasta que todos los integrantes del grupo no estuvieran totalmente convencidos que fuera la correcta. Del mismo modo al culminar cada actividad, se llevaba a cabo la fase de socialización donde cada grupo seleccionaba uno o varios problemas para exponer frente a toda la clase. Así pues, los estudiantes tuvieron la posibilidad de apreciar las heurísticas utilizadas por sus demás compañeros de clase y realizar nuevamente una fase de validación gracias a los aportes de todos los equipos de trabajo, como se muestra en la Figura 26.

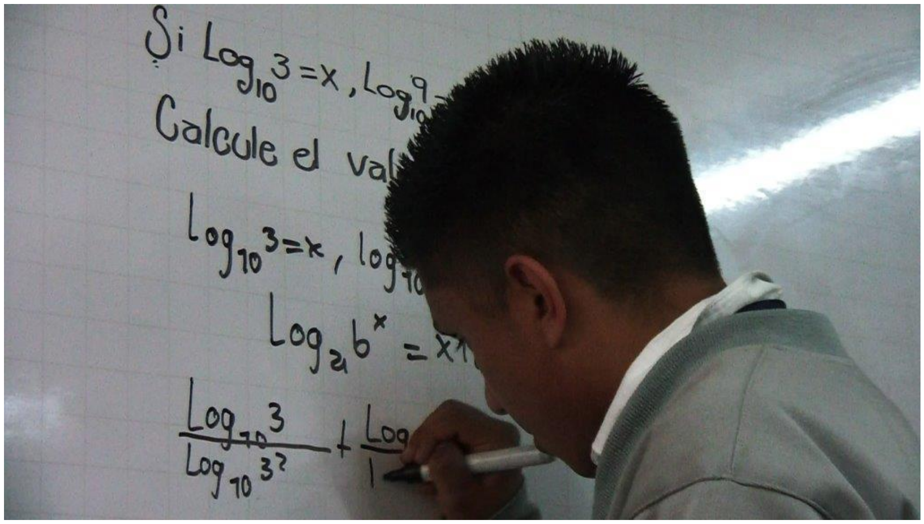


Figura 26. Fase de socialización realizada por el grupo 2. Colegio José María Carbonell – Estudiantes de grado once.

5.2. Análisis de los resultados de las actividades encaminadas a favorecer la relación entre entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad con estudiantes de pregrado.

El presente epígrafe describe el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que cursaron la cátedra de solución de problemas matemáticos.

5.2.1. Análisis prueba de entrada de los estudiantes de pregrado

Acorde con el modelo didáctico de investigación, se realiza la prueba de entrada perteneciente a la fase de saberes previos, de este modo se realiza un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes.

Para la primera pregunta, se les presentaba a los estudiantes un cubo donde podían apreciar tres de sus caras, en ellas se encontraban dibujados los números $28, 34$ y 36, precisando entonces que debían determinar los números que tenían dibujados las tres caras del cubo que no se podían observar, partiendo de dos condiciones, la primera de las cuales es que las seis caras del cubo tienen dibujados números enteros pares consecutivos, la segunda consiste en que las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales.

De acuerdo con el modelo didáctico propuesto, algunos estudiantes presentan dificultades durante la fase de abordaje. Esta afirmación se realiza debido a que muchos no tienen la capacidad de interpretar el contexto del problema; prueba de ello se encuentra en las respuestas dadas por los estudiantes durante la fase de solución del problema. Vale la pena agregar que 8 de los 29 estudiantes respondieron de forma adecuada, como se muestra en la Figura 27.

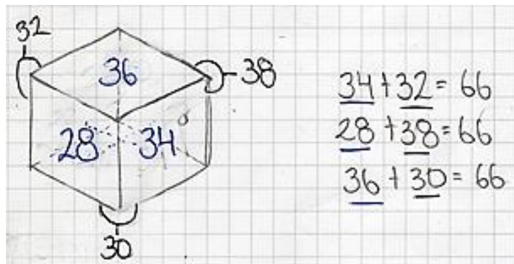


Figura 27. Respuesta al primer problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de primer año de la Universidad Antonio Nariño.

En la segunda pregunta, la mayoría de estudiantes no tiene dificultades con la fase de abordaje del problema, sin embargo, en relación con la fase de resolución, todos los estudiantes lo hicieron de modo erróneo. Esta afirmación se hace debido a que ninguno de los estudiantes que presentó la prueba, pudo establecer cuántos números de tres cifras podían escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras. Así pues, durante la fase de resolución intentan determinar la cantidad de números que cumplen con las condiciones problema de manera equivoca, como se aprecia en la Figura 28.

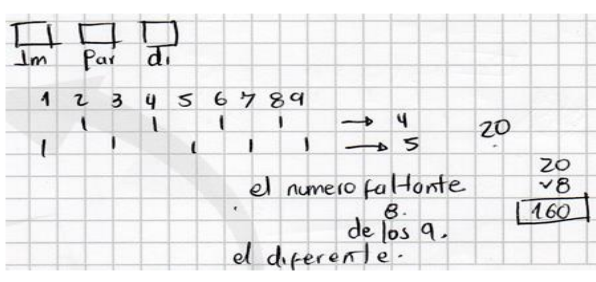


Figura 28. Respuesta al segundo problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de primer año de la Universidad Antonio Nariño.

Para la tercera pregunta, se les presenta a los estudiantes una construcción geométrica, la misma está elaborada a partir de dos triángulos equiláteros congruentes entre sí, que forman un ángulo de $70°$. En términos generales a muchos de los estudiantes se les dificultó aún más interpretar este problema, que los dos anteriores, pues muchos de ellos dejan el espacio en blanco en la prueba. En relación con la fase de resolución del problema, se puede agregar que 3 de los 29 estudiantes contestan acertadamente la pregunta (ver Figura 29).

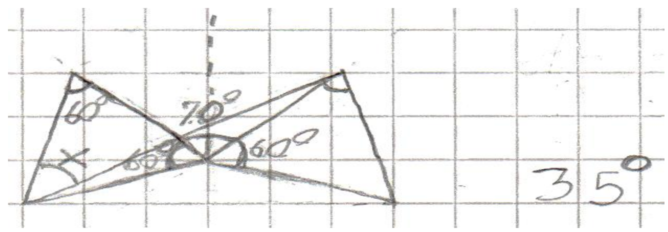


Figura 29. Respuesta al tercer problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de primer año de la Universidad Antonio Nariño.

En el cuarto problema se les presenta a los estudiantes la expresión $x♠y = (x + y)(x - y)$; la misma no es comprensible para la mayoría de los estudiantes, por ello se les dificulta iniciar la fase de abordaje del problema, sin embargo, muchos de ellos se atreven a realizar la fase de resolución del problema de modo que sólo 1 de los 29 estudiantes que presentaron la prueba, contesta acertadamente la pregunta. A continuación, se muestra en la Figura 30 la respuesta del estudiante que contestó de adecuadamente el problema.

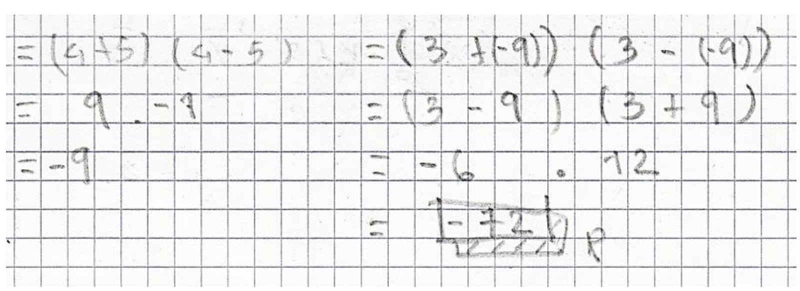


Figura 30. Respuesta al cuarto problema de la prueba de entrada aplicada a los estudiantes de primer año de la Universidad Antonio Nariño.

Teniendo en cuenta las dificultades mostradas por los estudiantes, se llega a la conclusión que muchos de ellos carecen de conocimientos básicos en matemáticas elementales, además, se les dificulta la fase de abordaje en los problemas presentados, debido a no manejar conceptos relacionados con teoría de números, análisis combinatorio, álgebra y geometría. Después de las consideraciones anteriores se puede llegar a la conclusión que no logren estructurar ideas adecuadas para llegar a la solución de los problemas planteados. Sin embargo, de acuerdo con la apreciación del autor se puede iniciar con este grupo de estudiantes la actividad de teoría de números, pues a pesar del bajo nivel en la prueba de entrada, muestran en sus respuestas un nivel aceptable de manejo numérico.

Para la implementación de las actividades, los estudiantes conformaron nueve grupos de trabajo.

5.2.2. Análisis primera actividad: Teoría de números

En la primera actividad, se pretende que los estudiantes afiancen sus conocimientos a partir del trabajo con la teoría de números, donde se estudian conceptos relacionados con aritmética modular, números primos, números compuestos, criterios de divisibilidad, descomposición en factores primos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor entre muchos otros que abordan los problemas planteados. De este modo se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos y en cuyas soluciones se aprecian un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

En el segundo problema se indica a los estudiantes que un número UAN es aquél que es igual al producto de sus divisores propios (divisores positivos excluyendo al 1 y al mismo número), de este modo deben encontrar la suma de los 15 primeros números UAN y además determinar una forma general para hallarlos. Gracias al trabajo desarrollado por los estudiantes con el primer problema de la actividad, inician la fase de abordaje adecuadamente, pues comprenden fácilmente el enunciado del problema. Durante la fase de resolución del problema, los estudiantes establecen que los 15 primeros números UAN son: 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39 y 46, cuya suma es igual a 374. Como se muestra en la Figura 31.

Figura 31. Respuesta al segundo problema de la actividad de teoría de números realizada por el grupo 2. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

A continuación, se enfrentan con el reto de establecer una forma general para hallar los números UAN, es así como logran conjeturar que un número UAN solo tiene 4 divisores y que existen dos formas generales de encontrarlos:

- $a * b$ siendo a y b números primos.
- $a * a^2$ siendo a número primo.

La heurística utilizada para llegar a esta conjetura se muestra en la Figura 32.

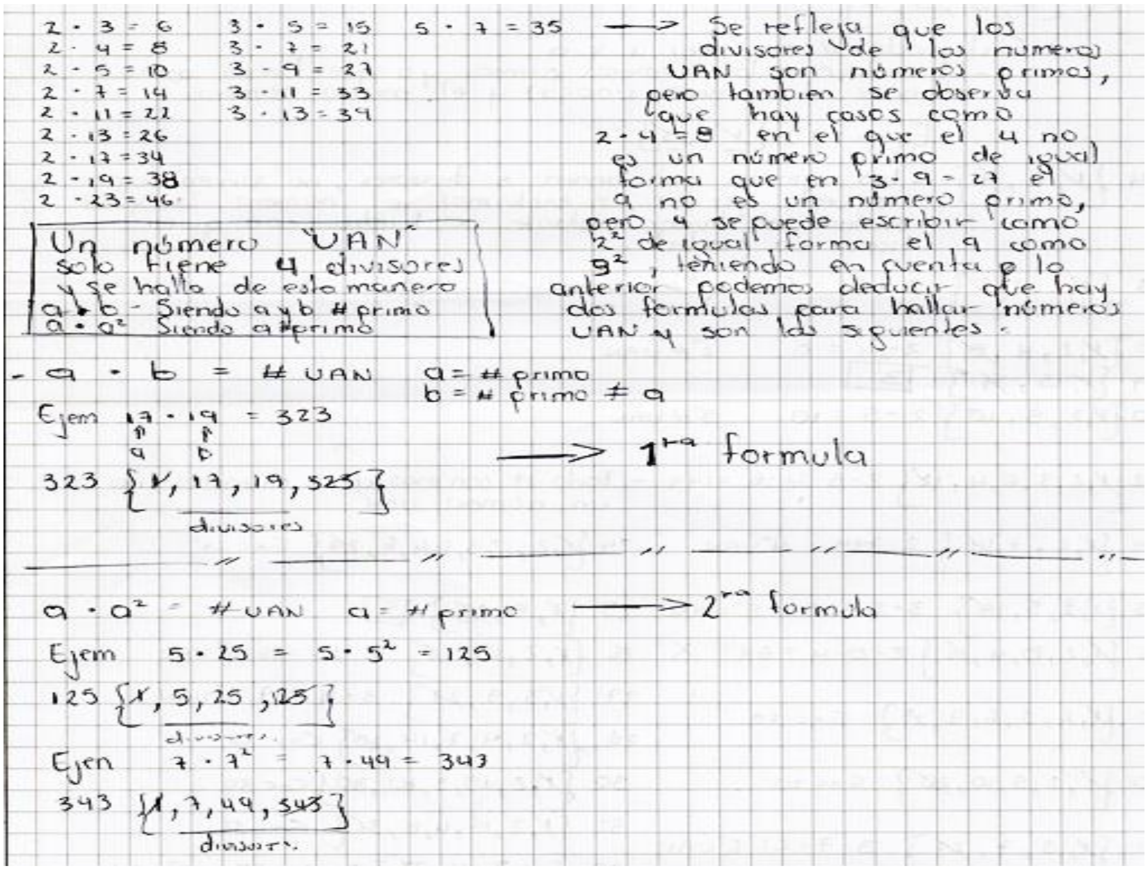


Figura 32. Respuesta al segundo problema de la actividad de teoría de números realizada por el grupo 2. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

De acuerdo con la heurística que se acaba de mostrar, se evidencia cómo los estudiantes para encontrar los números UAN muestran un entendimiento de los criterios de divisibilidad. Sin embargo, donde se puede apreciar un desarrollo de pensamiento matemático es en la conjetura que realizan para generalizar la fórmula que les permiten hallar cualquier número UAN.

- A excepción del grupo 7, los equipos de trabajo identificaron de forma correcta los 15 primeros números UAN, en relación con la forma general para hallarlos los grupos 2, 3 y 5 cumplieron con esta tarea.

En el tercer problema se les cuestiona a los estudiantes respecto al número de parejas ordenadas (a, b) que cumplen con $m.c.m\,(a, b) = 1000$, durante la fase de abordaje les costó un poco de dificultad a los estudiantes la semiótica involucrada en el contexto del problema, pero luego de una breve orientación del docente, interpretaron de forma adecuada el problema. Sobre la base de las consideraciones anteriores iniciaron la fase de solución del problema, de modo que el reto lo encontraron al tratar de determinar la cantidad de parejas que cumplían con que su $m.c.m\,(a, b) = 1000$, de este modo comenzaron a establecer que la cantidad de parejas que cumplían con la condición dada era 49, llegando a conjeturar que todos los números que componen dichas parejas, hacen parte de la descomposición en factores primos del número 1.000.

Bajo el criterio del autor la descomposición en factores primos para determinar el mínimo común múltiplo entre dos números es muestra del entendimiento de conceptos básicos relacionados con la teoría de números. Además, llegar a la conclusión que todos los números que aparecen en la descomposición en factores primos del 1000, permite determinar el número de parejas que cumplen con las condiciones del problema, muestra un desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes gracias a la solución de problemas relacionados con la teoría de números (ver Figura 33).

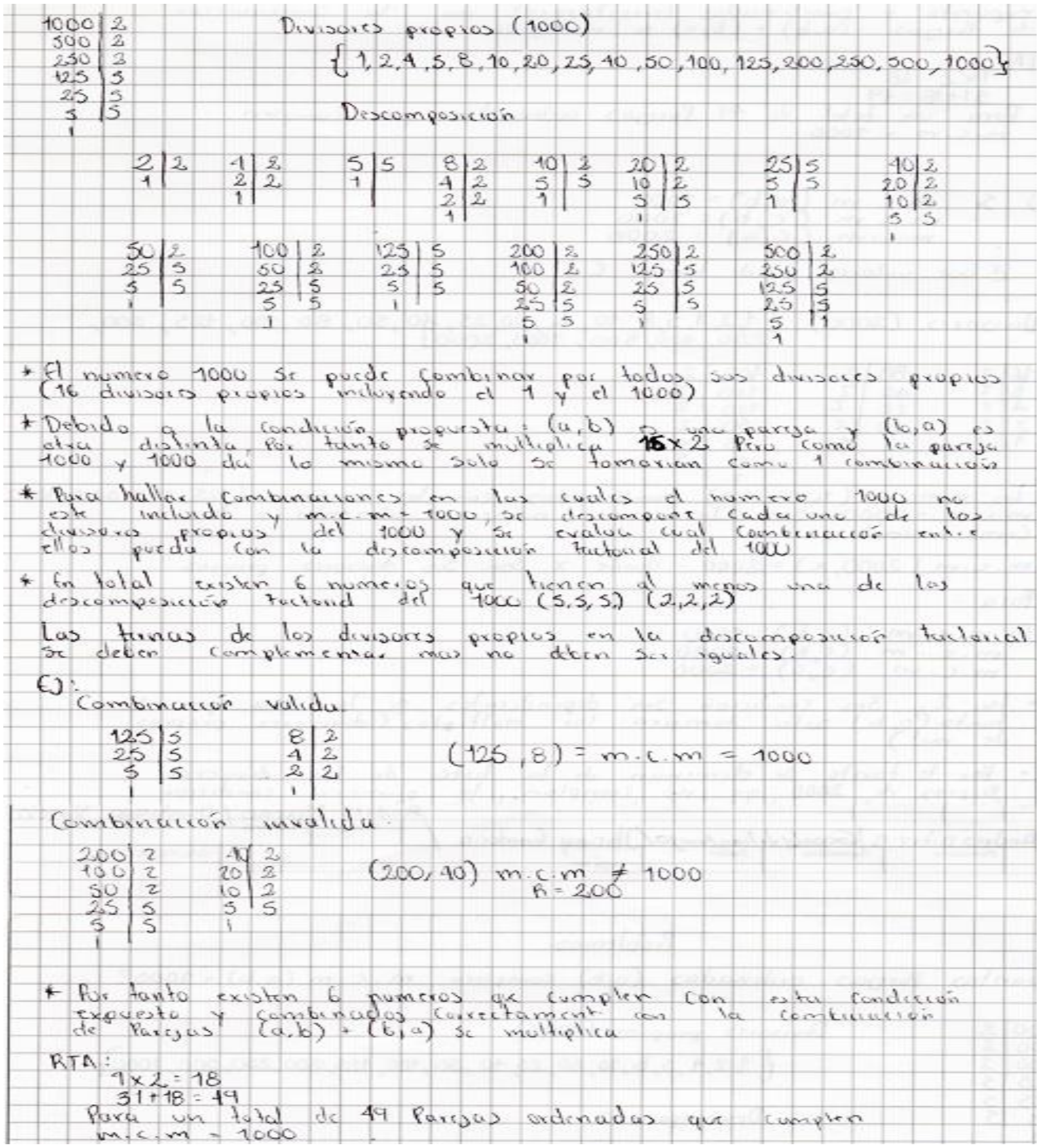

Divisores propios (1000)
{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000}
Descomposición
* El numero 1000 se puede combinar por todos sus divisores propios (16 divisores propios incluyendo el 1 y el 1000)
* Debido a la condición propuesta (a,b) es una pareja y (b,a) es otra distinta por tanto se multiplica 16 x 2 Pero como la pareja 1000 y 1000 da lo mismo solo se tomarian como 1 combinación
* Para hallar combinaciones en las cuales el numero 1000 no este incluido y m.c.m = 1000, se descompone cada uno de los divisores propios del 1000 y se evalua cual combinación entre ellos pueda con la descomposición factorial del 1000
* En total existen 6 numeros que tienen al menos una de las descomposición factorial del 1000 (5,5,5) (2,2,2)
Las ternas de los divisores propios en la descomposición factorial se deben complementar mas no deben ser iguales.
Ej:
Combinación valida
(125, 8) = m.c.m = 1000
Combinación invalida
(200, 40) m.c.m ≠ 1000
R = 200
* Por tanto existen 6 numeros que cumplen con esta condición expuesta y combinados correctamente con la combinación de parejas (a,b) + (b,a) se multiplica
RTA:
9 x 2 = 18
31 + 18 = 49
Para un total de 49 parejas ordenadas que cumplen m.c.m = 1000

Figura 33. Respuesta al tercer problema de la actividad de teoría de números realizada por el grupo 2. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

- No lograron llegar a la solución los grupos 4 y 7.

5.2.3. Análisis segunda actividad: Combinatoria

Para la segunda actividad, se procura que los estudiantes afiancen los conocimientos que poseen en principios básicos de conteo, combinación de elementos y variaciones simples, todo ello a partir del trabajo con problemas retadores que involucren estas temáticas entre muchas otras. De este modo se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos, ya que en sus soluciones se aprecian un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

En el segundo problema se le presenta al estudiante, un lenguaje que tiene las siguientes letras del alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales, pero sólo 12 consonantes) las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas, por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son. En el marco de las condiciones anteriores los alumnos deben determinar cuántas palabras hay en ese lenguaje. Además, se les presenta una segunda situación donde se les señala que, si se escribiera un diccionario de ese lenguaje en dos tomos en orden alfabético y de manera que cada tomo contuviera la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Para la fase de abordaje los estudiantes no tienen ningún problema con la comprensión del mismo, gracias al trabajo realizado con la primera situación presentada en la actividad. Respecto a la fase de resolución, los estudiantes se enfrentan con el reto de determinar la cantidad de palabras que hay en el lenguaje y el orden alfabético en que ellas aparecen. De este modo emergen dentro de las comunidades de práctica distintas heurísticas para hallar la solución al problema. Sin embargo, en el momento de realizar las distintas combinaciones posibles, los grupos de trabajo llegaron a conjeturas para simplificar los procedimientos realizados, como por ejemplo para determinar la cantidad de palabras que comienzan y terminan en vocal utilizan el principio de multiplicación $5 * 12 * 5 = 300$. Sobre la base de las consideraciones anteriores establecen que el número de palabras que inician y terminan en consonante lo hallan por medio del producto $12 * 5 * 12 = 720$, para finalizar encuentran la cantidad de palabras que existen en el lenguaje sumando los dos resultados obtenidos $300 + 720 = 1.020$.

En el orden de las ideas anteriores, la apreciación del autor es que se evidencia un entendimiento del análisis combinatorio elemental por parte del estudiante al poder establecer a partir del principio del producto; la cantidad de combinaciones de elementos posibles y posterior a esto al conjeturar que dichos resultados se debían sumar afirman el criterio del investigador (ver Figura 34).

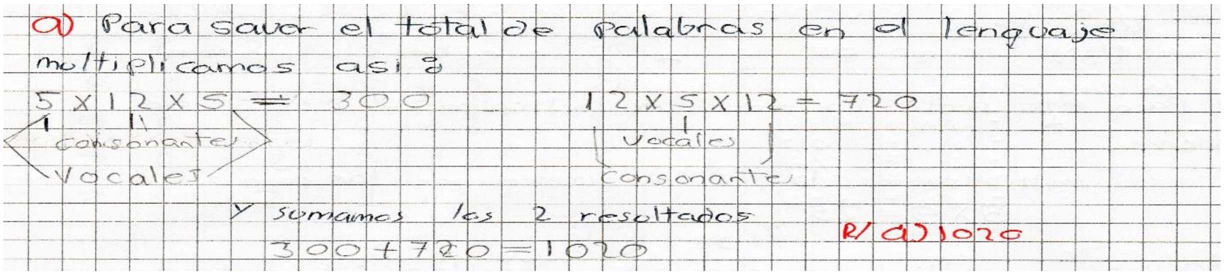


Figura 34. Respuesta al segundo problema de la actividad de combinatoria realizada por el grupo 8. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

- Todos los grupos llegaron a la solución acertada del problema.

En relación a la segunda parte del problema, se debe tener en cuenta la respuesta que se acaba de hallar, para la fase de resolución del problema retador los estudiantes dividen las 1.020 palabras que encontraron en dos. Luego organizan en orden alfabético las letras que conforman el vocabulario y llegan a la conjetura que el segundo tomo del diccionario inicia con la palabra LIM, como lo muestra la Figura 35.

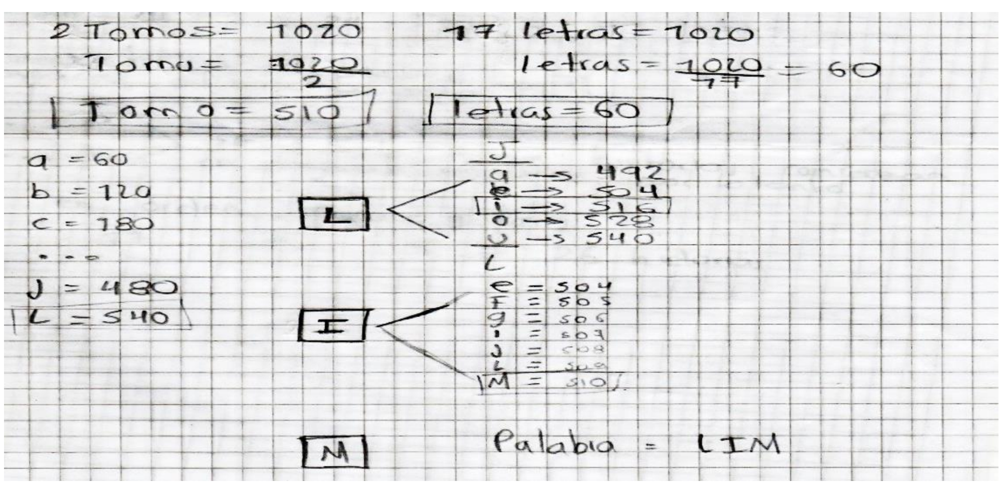


Figura 35. Respuesta al tercer problema de la actividad de combinatoria realizada por el grupo 9. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

- Todos los grupos contestaron de forma correcta el problema.

Para el cuarto problema se les da el nombre de seis personas que tienen WhatsApp, luego se les indica que algunos de ellos, pero no todos, son amigos WhatsApp entre sí; además deben tener en cuenta dos condiciones, la primera de ellas es que ninguno de ellos tiene un amigo WhatsApp fuera de este grupo y la segunda consiste en que cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos en WhatsApp. Al final se les pide que encuentren el número de formas en que este grupo de personas puedan ser amigos WhatsApp.

La fase de abordaje les costó un poco de dificultad a todos los grupos, por ello debieron en más de una oportunidad realizar una lectura minuciosa del problema para lograr entenderlo. Durante la fase de resolución, la mayoría de los estudiantes utilizó la heurística de determinar las posibles combinaciones con uno, dos, tres, cuatro y cinco amigos, y de este modo llegan a conjeturar que este procedimiento se puede optimizar si utilizan la ecuación correspondiente a la combinatoria de elementos, teniendo en cuenta las condiciones del problema presentado.

Las apreciaciones del autor frente a los procedimientos efectuados por los estudiantes es que muestran un entendimiento de los conceptos relacionados con análisis combinatorio al realizar las posibles combinaciones de amigos WhatsApp con uno, dos, tres, cuatro y cinco personas, y a su vez se evidencia un desarrollado en el pensamiento matemático al establecer cómo el número de posibles formas en que pueden ser amigos WhatsApp se puede optimizar al emplear adecuadamente y de acuerdo con las condiciones del problema el algoritmo de la combinatoria (ver Figura 36).

Figura 36. Respuesta al cuarto problema de la actividad de combinatoria realizada por el grupo 6. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

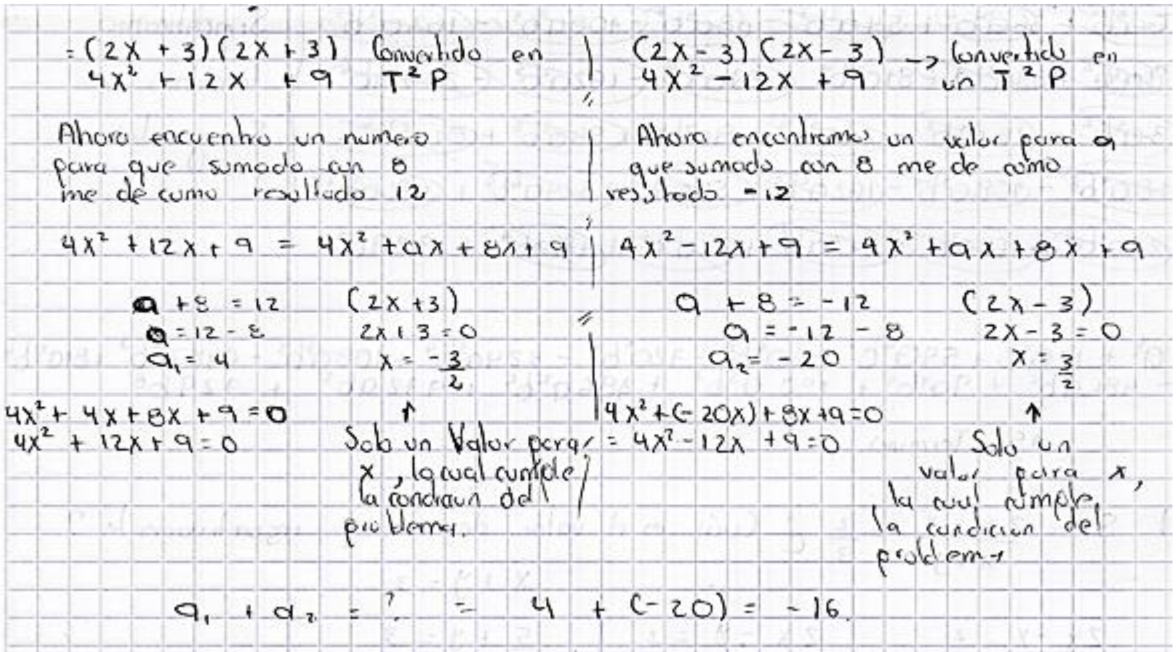
5.2.4. Análisis tercera actividad: Álgebra

En la tercera actividad, se tiene como finalidad mejorar el entendimiento de los estudiantes en relación con el álgebra y, gracias a solución de problemas retadores, lograr simultáneamente desarrollar su pensamiento matemático. Los conceptos que se van a abordar en el desarrollo de la actividad están relacionados con sistemas de ecuaciones, técnicas de factorización, operaciones entre expresiones algebraicas y potenciación entre otros. Es así como se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos y en cuyas soluciones se aprecian un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

En la cuarto problema de la actividad, se les indica a los estudiantes que hay dos valores de a para los cuales la ecuación $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ tiene solamente una solución para x, bajo la condición dada deben determinar cuál es la suma de estos dos valores de a.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, los estudiantes inician la fase de abordaje en la cual emergen muchas interpretaciones del problema; por ello es trascendental la orientación que da el docente para que las comunidades de aprendizaje realicen una comprensión adecuada del problema. En la fase de resolución del problema retador los estudiantes establecen que la ecuación tiene sólo una solución, si el polinomio es el cuadrado de un binomio con término lineal $\pm\sqrt{4x^2} = \pm 2x$ y término constante $\pm\sqrt{9} = \pm 3$, dado que $(2x \pm 3)^2$ tiene un término lineal $\pm 12x$, se sigue que $a + 8 = \pm 12$, luego, a puede ser -20 ó 4, y la suma de estos valores es -16.

De acuerdo con el criterio del autor, la heurística utilizada muestra un entendimiento en álgebra elemental por parte de los estudiantes, al tener la capacidad de determinar las raíces de la ecuación, como se muestra en la Figura 37.



$= (2x+3)(2x+3)$ Convertido en
$4x^2 + 12x + 9$ T^2P

Ahora encuentro un numero para que sumado con 8 me de como resultado 12

$4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 + ax + 8x + 9$

$a + 8 = 12$
$a = 12 - 8$
$a_1 = 4$

$(2x+3)$
$2x + 3 = 0$
$x = -\frac{3}{2}$

$4x^2 + 4x + 8x + 9 = 0$
$4x^2 + 12x + 9 = 0$

Solo un Valor para x, la cual cumple la condicion del problema.

$(2x-3)(2x-3) \rightarrow$ Convertido en un T^2P
$4x^2 - 12x + 9$

Ahora encontramos un valor para a que sumado con 8 me de como resultado -12

$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + ax + 8x + 9$

$a + 8 = -12$
$a = -12 - 8$
$a_2 = -20$

$(2x-3)$
$2x - 3 = 0$
$x = \frac{3}{2}$

$4x^2 + (-20x) + 8x + 9 = 0$
$= 4x^2 - 12x + 9 = 0$

Solo un valor para x, la cual cumple la condicion del problema

$a_1 + a_2 = ? = 4 + (-20) = -16$

Figura 37. Respuesta al cuarto problema de la actividad de álgebra realizada por el grupo 2. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

- Todos los grupos conformados lograron llegar a la respuesta correcta.

En el sexto problema se les plantea a los estudiantes que Ricardo escribe la ecuación $2x^2 + 3x + 2 = 0$ en un papel y calcula sus dos raíces, Rafael reemplaza la x en el polinomio $2x^2 - x + 1$ por la primera raíz que le dice Ricardo y escribe el resultado, luego hace lo mismo con la segunda raíz. Así pues, deben determinar cuál es el valor de la suma de los valores escritos por Rafael.

Para la fase de abordaje del problema, no les resultó difícil su interpretación, sin embargo, en la fase de resolución del problema fue todo un reto para los estudiantes llegar a una heurística adecuada que les permitiera lograr llegar a la solución del problema. Este hecho se presentó debido al desconocimiento por parte de los estudiantes de las relaciones de Cardano – Vieta, por esta particularidad fue necesario que el docente orientara a los estudiantes para que indagaran respecto a que si existía alguna teoría que relacionara las raíces de un polinomio con los coeficientes del mismo. Bajo esta indicación los estudiantes lograron establecer que si las raíces del primer polinomio son r_1 y r_2, se tiene que $r_1 + r_2 = -\frac{3}{2}$ y $r_1 *$

$r_2 = 1$, llegando a la heurística para resolver el problema en términos de que el resultado de la suma de los números de Ricardo es $2{r_1}^2 - r_1 + 1 + 2{r_2}^2 - r_2 + 1 = 2({r_1}^2 + {r_2}^2) - (r_1 + r_2) + 2 = 2(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 * r_2 - (r_1 + r_2) + 2 = 2\frac{9}{4} - 4 + \frac{3}{2} + 2 = 4$. Simplificando el proceso que se muestra en las respuestas del grupo 3 (ver Figura 38).

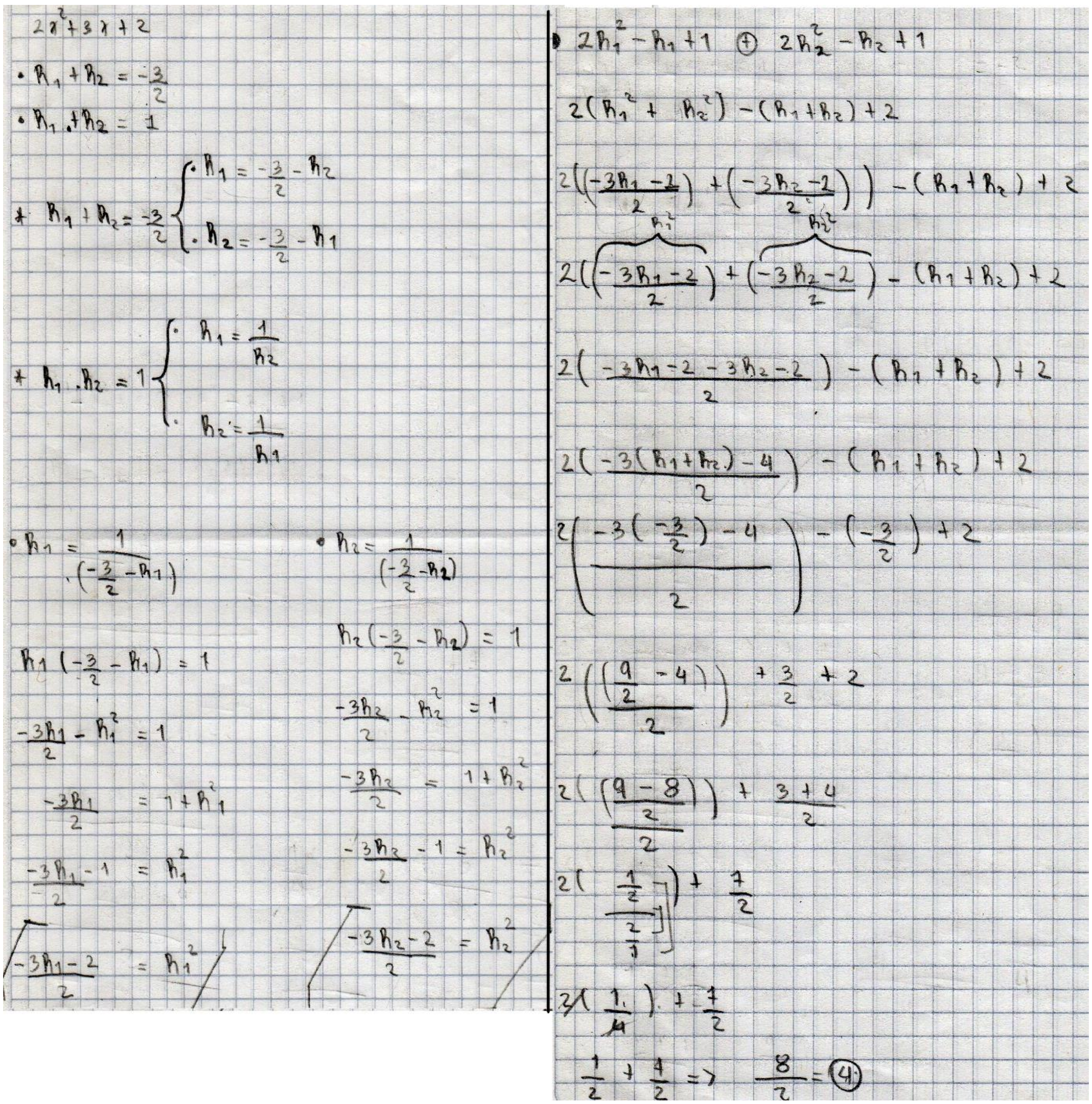


Figura 38. Respuesta al séptimo problema de la actividad de álgebra realizada por el grupo 3. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

La respuesta del grupo 2 que se puede observar en la Figura 39.

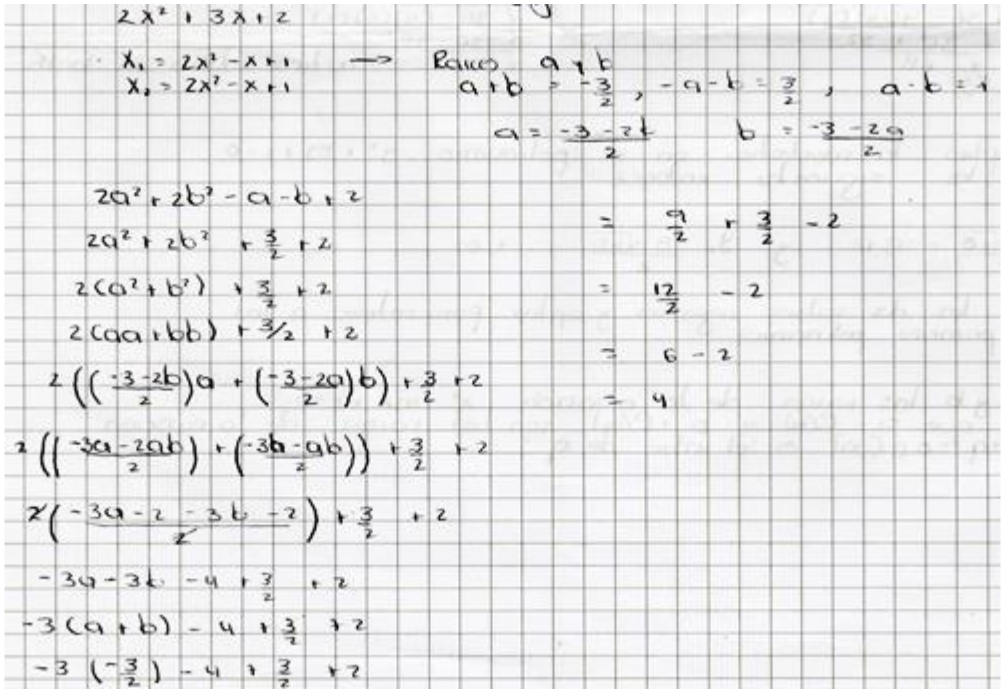


Figura 39. Respuesta al séptimo problema de la actividad de álgebra realizada por el grupo 2. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

La apreciación del autor es que estas dos soluciones además de revelar la belleza del álgebra en la solución de problemas retadores, también es muestra de un nivel alto de entendimiento del algebra básica por parte de los estudiantes, al poder aplicar procedimientos algebraicos y algorítmicos. Como resultado de todo el proceso se observa un desarrollo del pensamiento matemático en los alumnos gracias a la solución de problemas algebraicos.

- Este problema lo resolvieron de forma adecuada los grupos 2, 3 y 6.

5.2.5. Análisis cuarta actividad: Geometría

Para la última actividad de la secuencia didáctica, se parte del hecho de que los estudiantes deben construir un conocimiento robusto en geometría a partir del trabajo desarrollado con problemas no rutinarios concernientes a esta rama de la matemática. Algunos de los conceptos inmersos dentro de los problemas propuestos comprenden conceptos de áreas y ángulos, congruencia y semejanza de triángulos, y trigonometría. A continuación, se realizará el análisis de los problemas que fueron más significativos y en cuya solución se aprecian un entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

En el tercer problema de la actividad se les muestra a los estudiantes la gráfica de una figura denominada trébol, que se construye dibujando sectores circulares alrededor de los lados de triángulos equiláteros congruentes; bajo las condiciones anteriores los alumnos deben determinar cuál es el área de un trébol cuya base horizontal mide 2 cm.

Para la fase de abordaje los estudiantes se apoyan en la visualización[68], este recurso junto con el trabajo que han realizado con los dos primeros problemas de la secuencia didáctica de actividades, hacen que los estudiantes tengan un mayor entendimiento de la situación que se les presenta. En relación con la fase de resolución del problema, inicialmente los estudiantes visualizan a partir de la construcción geométrica presentada, como pueden formar una circunferencia con diámetro 1, a continuación, hallan el área de dicha circunferencia $área\ circunferencia = r^2 * \pi = 1^2 * 3{,}1416 = 3{,}1416.$ Después de lo anteriormente expuesto calculan la altura del triángulo compuesto por los cuatro triángulos equiláteros congruentes que conforman el trébol, llegando a establecer por medio del teorema de Pitágoras que su altura es $h^2 = c^2 - h^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, así $h = \sqrt{3} = 1{,}732$. Teniendo esta información, hallan el área del triángulo compuesto por los cuatro triángulos equiláteros $área\varDelta mayor = \frac{b*h}{2} = \frac{2*1{,}732}{2} = 1{,}732$, como inicialmente asumen que a partir del trébol se puede construir una circunferencia, en la cual se encuentra circunscrita un hexágono compuesto por seis triángulos equiláteros congruentes, el área de la circunferencia también la dividen en 6 partes

[68] Arcavi, A. (2003*). The Role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational studies in mathematics, 215 – 241.

$\frac{área\ circunferencia}{6} = \frac{3,1616}{6} = 0,5235$. La heurística que utilizan para poder determinar el área del trébol, es dividir en cuatro el área del triángulo compuesto por los triángulos equiláteros congruentes $\frac{área}{4} \Delta = \frac{1,732}{4} = 0,433$. Esta medida corresponde a uno de los triángulos rectángulos que conforman el trébol, a partir de la hipótesis de construir una circunferencia en la cual se encuentra circunscrita un hexágono compuesto por seis triángulos equiláteros congruentes y sabiendo que la magnitud del área obtenida anteriormente corresponde a un solo triángulo, realizan la siguiente operación $0,433 * 6 = 2,598$ con el propósito de determinar el área del hexágono inscrito dentro de la circunferencia de diámetro 1. Prosiguen restando el área del hexágono al área de la circunferencia, obteniendo $3,1416 - 2,598 = 0,54$, a continuación dividen la magnitud encontrada en seis partes iguales, pues al tener, el hexágono circunscrito dentro de la circunferencia de diámetro 1, tiene seis regiones que quedan al inscribir una figura dentro de la otra; la medida del cada una de esas regiones es $\frac{0,54}{6} = 0,096$. Para finalizar como la figura del trébol contiene cuatro regiones de las que se acabaron de hallar su área $0,096 * 4 = 0,3624$, esta magnitud se suma con el área del triángulo compuesto por los cuatro triángulos equiláteros congruentes, de donde se obtiene que $1,732 + 0,3624 = 2,0944$, que es el área del trébol. Según la apreciación del autor toda la heurística llevada a cabo por los estudiantes describe claramente cómo los estudiantes tienen un entendimiento de la geometría elemental, que al ponerla en práctica en la solución de un problema retador y llegar a la solución adecuada muestra un desarrollo significativamente alto de pensamiento matemático en relación con los resultados obtenidos en la prueba de entrada. A continuación, la Figura 40 muestra la solución que se acaba de mencionar.

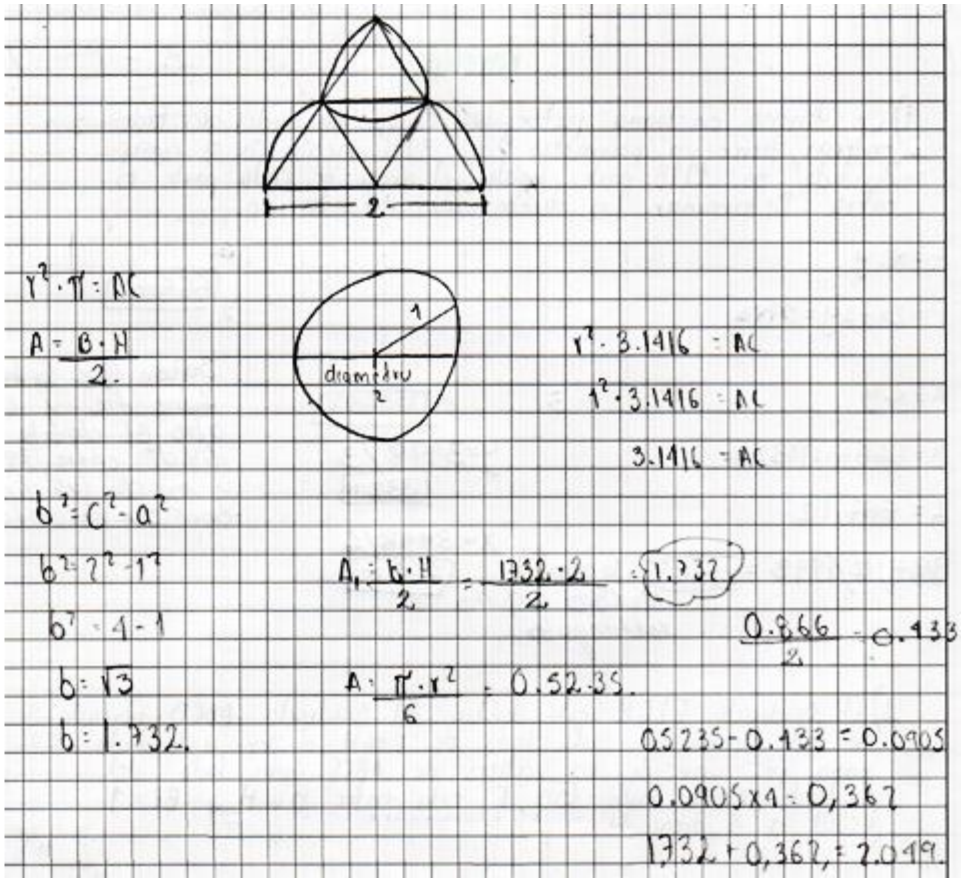


Figura 40. Respuesta al tercer problema de la actividad de geometría realizada por el grupo 4. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

Es importante señalar que esta no fue la única heurística utilizada para llegar a la solución del problema, pero sí fue una que no consideró el autor de la investigación, por eso se referencia.

- El único grupo que no logró llegar a la solución fue el 5.

El octavo problema muestra a los estudiantes la siguiente situación: sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo ΔABC, una línea a través de A paralela a CZ interseca a BC en X, una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Sobre la base de las consideraciones anteriores se les pide a los estudiantes que demuestren que $\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$.

Para la fase de abordaje del problema la mayoría de los grupos no logró interpretar la situación presentada, debido aparentemente a que hasta el momento siempre se les había presentado la construcción geométrica correspondiente al problema que debían resolver. Luego de la orientación del docente, los estudiantes consiguieron realizar la construcción geométrica correspondiente al enunciado del problema. A partir de la figura y utilizando la visualización, lograron conseguir una buena interpretación del problema, lo que a su vez les permitió pasar a la fase de resolución. El reto de los estudiantes consistió en encontrar un método para demostrar la igualdad $\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$. Después de las consideraciones anteriores se presenta la heurística utilizada por el grupo 6 para realizar la demostración; el proceso realizado por esta comunidad de práctica se simplifica con relación a los procedimientos realizados por los estudiantes. Inicialmente reescriben la expresión que se quiere demostrar como $\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = 1$, se tiene de antemano que ΔBCZ es semejante a ΔBXA, de esto se obtiene que $\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}$, de manera análoga, de la semejanza que se tiene entre los triángulos ΔACZ y ΔAYB, se tiene que $\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}$. Sumando las dos expresiones obtenidas se tiene que $\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ}{AB} + \frac{AZ}{AB} = \frac{AZ+ZB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$, quedando demostrada la expresión. La apreciación del autor de la presente tesis al respecto es que es evidente como el último problema implicaba que los estudiantes realizaran un argumento deductivo con el propósito de demostrar la igualdad $\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$, lo que es una muestra fehaciente del entendimiento por parte del estudiante no sólo de la geometría, sino en general de la matemática elemental, por los procedimientos mostrados para llegar a la respuesta. Es también evidente un significativo desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (ver Figura 41).

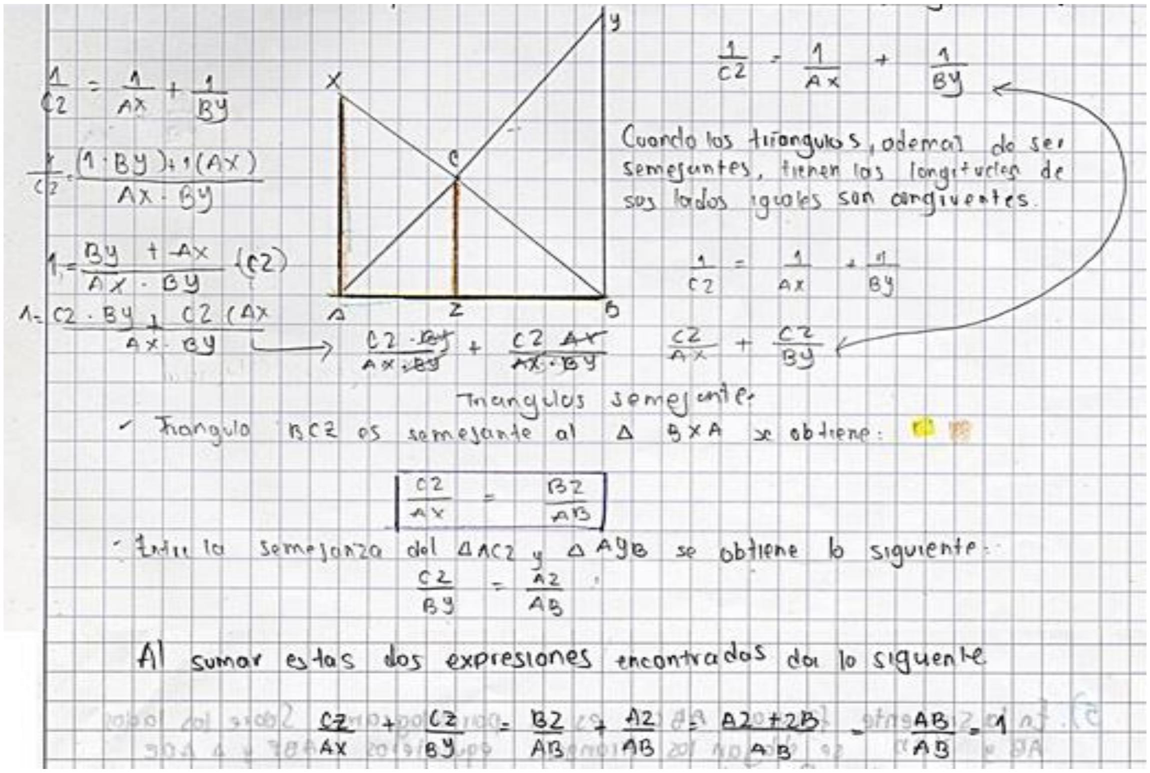


Figura 41. Respuesta al undécimo problema de la actividad de geometría realizada por el grupo 6. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

- El problema lo respondieron correctamente los grupos 1, 2, 5, 6 y 9.

Es importante mencionar para las cinco actividades propuestas, el proceso de validación se llevó a cabo al interior de las comunidades de práctica, donde los estudiantes no quedaban satisfechos con la respuesta dada hasta que todos los integrantes del grupo no estuvieran totalmente convencidos que fuera la correcta.

Del mismo modo al culminar cada actividad, se llevaba a cabo la fase de socialización donde cada grupo seleccionaba uno o varios problemas para exponer frente a toda la clase. Así pues, los estudiantes tienen la posibilidad de apreciar las heurísticas utilizadas por sus demás compañeros de clase y realizar nuevamente una fase de validación gracias a los aportes de todos los equipos de trabajo, como se evidencia en la Figura 42.

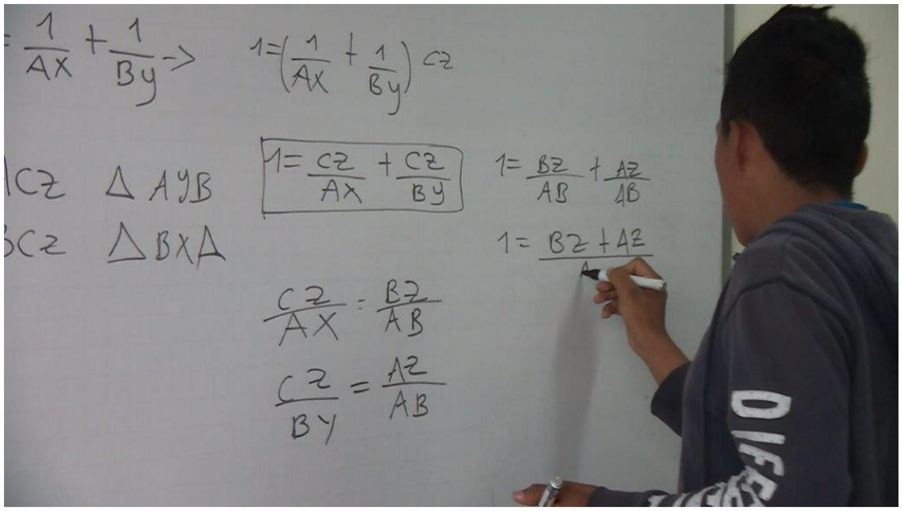


Figura 42. Fase de socialización realizada por el grupo 3. Universidad Antonio Nariño – Estudiantes de primer año.

Conclusiones capítulo 5

En el presente capítulo se realizó una descripción de la implementación de la secuencia de actividades y el análisis de las respuestas que dan los estudiantes a las preguntas más representativas. Estas preguntas fueron seleccionadas en términos de que evidencian la relación directa que se presenta entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante que soluciona problemas matemáticos retadores; de este modo es evidente ver como se concreta el modelo didáctico en el sistema de actividades.

Muestra de ello se observa claramente en la forma en que los estudiantes inician con la fase de abordaje, donde muestran que realizan una lectura analítica del problema, interpretan el problema, buscan las relaciones que existen entre los datos y finalmente analizan si el problema formulado posee una relación directa o indirecta con los contenidos que se están impartiendo o que se han trabajado en clase. A continuación, prosiguen con la fase de resolución del problema retador donde se evidencia la generación de ideas, la formulación de heurísticas y conjeturas, la validación de heurísticas y conjeturas propuestas, y finalmente realizan la vinculación con otros saberes. Para culminar, en las comunidades de práctica se realiza la socialización de resultados donde se discute sobre la solución al problema planteado.

CAPÍTULO 6. TRANSICIÓN DE LA MATEMÁTICA DE LA ESCUELA SECUNDARIA A LA DE LA UNIVERSIDAD.

El presente capitulo tiene como finalidad describir los cambios positivos en los estudiantes que participaron del curso de solución de problemas.

6.1. Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos.

A continuación, se muestra los cambios positivos en los estudiantes que participaron del curso de solución de problemas matemáticos de la Institución Educativa Distrital José María Carbonell y de la Universidad Antonio Nariño, con el objetivo de validar la propuesta presentada en la actual investigación.

6.1.1. Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos en los estudiantes de la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

Con el objetivo de establecer los cambios positivos en los alumnos de la Institución Educativa Distrital José María Carbonell que participaron del curso de solución de problemas matemáticos, se comparó el promedio que obtuvieron en las pruebas Saber 11 en matemáticas, con el promedio de años anteriores en la misma área, como se muestra en la Figura 43.

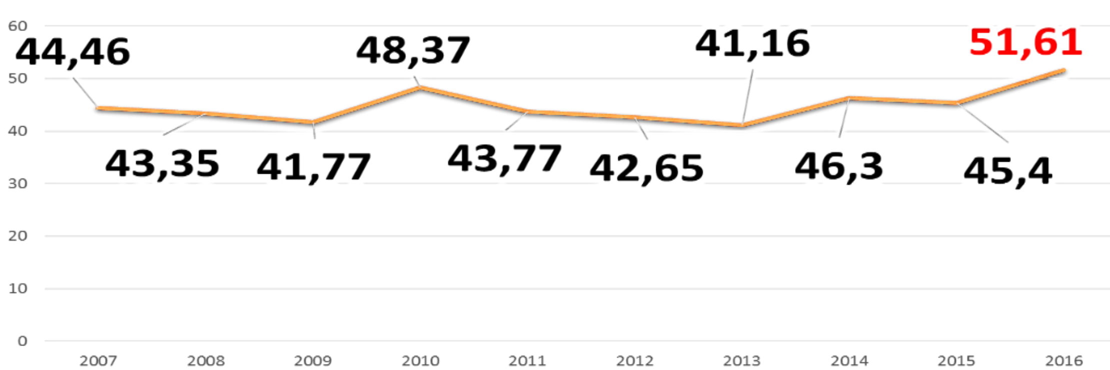


Figura 43. Histórico del promedio de las pruebas Saber 11 en el área de matemáticas de los años 2007 a 2016 en la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

Como se puede observar en la Figura 43, el promedio del desempeño en las pruebas Saber 11 de los estudiantes de grado once que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos fue de 51,61 puntos en el área de matemáticas, lo que representa un aumento en un 13,67% respecto al año anterior, además fue el puntaje más alto registrado en los últimos diez años en la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

Adicionalmente para constatar que hubo un cambio positivo en los estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos de grado onceno, se diseñó una encuesta de satisfacción (**ver Anexo 3**) con el propósito de comparar su actitud hacia las matemáticas con las que muestran sus compañeros actuales en las instituciones educativas en que se encuentran inscritos.

La encuesta se aplicó a quince de los veintiuno estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos de grado once, pues sólo ellos continuaron sus estudios a nivel de educación tecnológica o superior en diferentes instituciones donde toman cursos relacionados con el área de matemáticas. Respecto al marco general de la encuesta de satisfacción, la misma cuenta con una serie de enunciados en los cuales los estudiantes consultados deben establecer en qué grado se encuentran de acuerdo o en desacuerdo con dicho enunciado, los mismos cuentan con una escala Likert que permite evaluar cuantitativamente sus opiniones, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.

	Escala Likert	Totalmente en Desacuerdo	En desacuerdo	Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí	F. Absoluta	0	0	0	3	12
	F. Relativa	0%	0%	0%	20%	80%
He encontrado el curso de solución de problemas matemáticos intelectualmente estimulante	F. Absoluta	0	0	0	1	14
	F. Relativa	0%	0%	0%	6,66%	93,30%
Mi interés por las matemáticas ha aumentado luego de cursar la cátedra de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	2	13
	F. Relativa	0%	0%	0%	13,33%	86,66%
El curso de solución de problemas matemáticos me ha motivado a ampliar mis conocimientos en matemáticas fuera de clase	F. Absoluta	0	0	1	3	11
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	20%	73,33%
Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas gracias al curso de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	4	11
	F. Relativa	0%	0%	0%	26,66%	73,33%
El curso de solución de problemas matemáticos estimuló mi deseo de llegar lo más lejos posible en mis intereses académicos	F. Absoluta	0	0	1	5	9
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	33,33%	60%
Recomendaría el curso de solución de problemas matemáticos a estudiantes de otras universidades	F. Absoluta	0	0	0	3	12
	F. Relativa	0%	0%	0%	20%	80%
Resolver problemas matemáticos o en otras áreas relacionadas es placentero para mi	F. Absoluta	0	0	2	5	8
	F. Relativa	0%	0%	13,33%	33,33%	66,66%
Utilizar las matemáticas en otras cátedras es satisfactorio para mi	F. Absoluta	0	0	1	4	10
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	26,66%	66,66%
Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios	F. Absoluta	0	0	0	6	9
	F. Relativa	0%	0%	0%	40%	60%
Espero utilizar habitualmente la matemática en mi vida como futuro profesional	F. Absoluta	0	0	0	0	15
	F. Relativa	0%	0%	0%	0%	100%
Me gustaría como futuro profesional tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar matemáticas	F. Absoluta	0	0	1	5	9
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	33,33%	60%
Me siento mejor preparado que mis compañeros de clase en las asignaturas relacionadas con matemáticas	F. Absoluta	0	0	1	7	7
	F. Relativa	0%	0%	6,66%	46,66%	46,66%
Mi desempeño académico en las áreas del conocimiento relacionadas con matemáticas son mejores que las de mi compañeros de clase	F. Absoluta	0	0	3	9	3
	F. Relativa	0%	0%	20%	20%	20%

Tabla 6. Tabulación encuesta de satisfacción aplicada a estudiantes de grado once de la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la encuesta de satisfacción, se pudo constatar como los quince estudiantes que continuaron sus estudios a nivel de educación tecnóloga o superior de la Institución Educativa José María Carbonell, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas de acuerdo con las respuestas brindadas. Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede afirmar que los estudiantes de grado once que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos, donde se implementó el modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento, permitió una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario.

6.1.2. Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos en los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño.

Con el propósito de determinar los cambios positivos de los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que participaron de la cátedra de solución de problemas matemáticos, se comparó el promedio de notas finales obtenido en los cursos de Solución de Problemas Matemáticos, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, con otros grupos de estudiantes.

A continuación, se muestra el promedio de notas finales (Figura 44) de los alumnos que participaron en el estudio realizado en la presente investigación y se contrastan con el promedio de notas obtenidos por cuatro grupos de estudiantes de la sede sur de la Universidad Antonio Nariño que cursaban simultáneamente la cátedra de solución de problemas matemáticos con otras propuestas de trabajo en clase, pero los mismos contenidos.

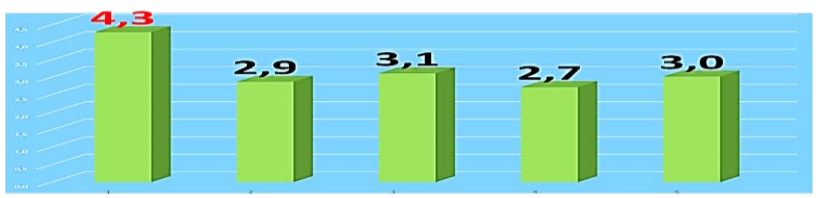


Figura 44. Promedio de notas definitivas de los cursos de solución de problemas matemáticos 2016 – 2 sede sur Universidad Antonio Nariño.

En la Figura 44 el primer promedio que aparece corresponde a las notas definitivas obtenidas por los estudiantes que estudiaron bajo la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación; se observa cómo este promedio es mayor al promedio de notas obtenido por los cuatro grupos de estudiantes que cursaban simultáneamente la misma asignatura en la sede sur de la Universidad Antonio Nariño. Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede inferir que el curso de solución de problemas matemáticos al incorporar una secuencia didáctica de actividades conformada por problemas atractivos, estimulantes y llenos de interés (Mazarío y Sanz 2009), promueve una motivación intrínseca (Middleton, 1995) en los estudiantes, obteniendo un mejor rendimiento académico en comparación con otros alumnos.

Después de lo anteriormente expuesto, en la Figura 45 se muestra el promedio de notas finales en el curso de Cálculo Diferencial de los alumnos que participaron en el estudio realizado en la presente investigación y se contrastan con el promedio de notas obtenidas por los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que cursaban simultáneamente la cátedra de solución de problemas matemáticos con otras propuestas de trabajo en clase, pero con los mismos contenidos.

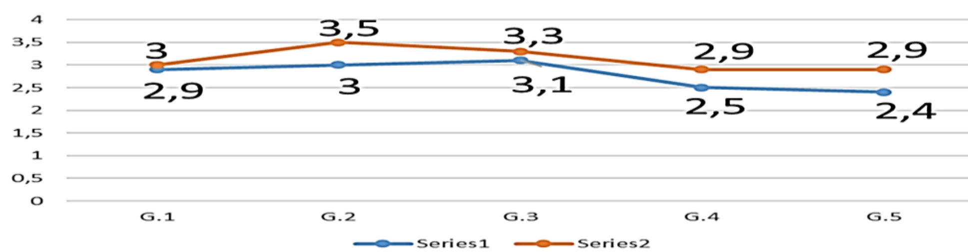


Figura 45. Promedio de notas definitivas de los cursos de Cálculo Diferencial 2016 – 2 sede sur Universidad Antonio Nariño.

Cómo puede apreciarse en la Figura 45, la serie 2 corresponde al promedio de notas definitivas obtenidas por los estudiantes inscritos en los cursos de Cálculo Diferencial que estudiaron bajo la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación. Se puede observar cómo este promedio es mayor al promedio de notas obtenido por sus compañeros de clase (serie 1) en los cinco cursos de Cálculo Diferencial que se orientaron en la sede sur de la Universidad Antonio Nariño. Hechas las consideraciones anteriores se puede deducir que el curso de solución de problemas matemáticos que se plantea en la actual investigación propicia en el estudiante el desarrollo de actitudes relacionadas con hábitos de trabajo, curiosidad e interés por investigar y resolver problemas, donde intervienen la creatividad, la formulación de conjeturas, la flexibilidad para modificar o cambiar su propio punto de vista y, lo más importante, la autonomía intelectual para abordar situaciones nuevas con la confianza de aprender (Gómez, 2009), lo que se deriva en un mejor rendimiento académico en cursos de matemáticas a nivel de educación superior.

Dadas las condiciones que anteceden, en la Figura 46 se puede apreciar el promedio de notas definitivas de la cátedra Cálculo Integral de los estudiantes que participaron en el estudio realizado en la presente investigación y se contrastan con el promedio de notas obtenidas por sus compañeros de clase en la Universidad Antonio Nariño, teniendo en cuenta que esta asignatura la cursaron en el período académico posterior al curso de Cálculo Diferencial.

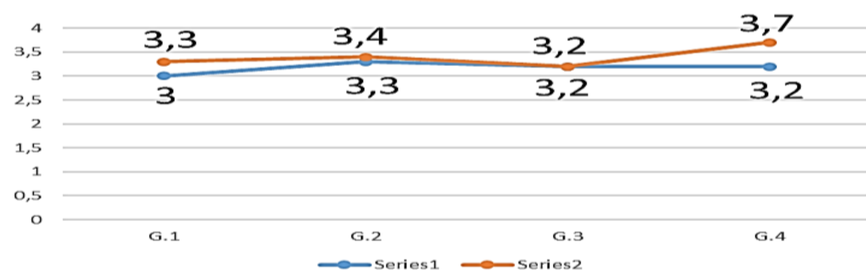


Figura 46. Promedio de notas definitivas de los cursos de Cálculo Integral 2017 – 1 sede sur Universidad Antonio Nariño.

Tal como se observa en la Figura 46, la serie 2 corresponde al promedio de notas definitivas obtenidas por los estudiantes inscritos en los cursos de Cálculo Integral que estudiaron con la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación. Puede observarse cómo este promedio es mayor o igual al promedio de notas obtenido por sus compañeros de clase (serie 1) en los cuatro cursos de Cálculo Integral que se orientaron en la sede sur de la Universidad Antonio Nariño. Es importante mencionar que del 18,51% de alumnos que reprobaron esta cátedra, ninguno de ellos pertenecía al grupo de estudiantes que participaron en el estudio realizado en la presente investigación.

Adicionalmente para constatar que hubo un cambio positivo en los estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos universitario, se diseñó una encuesta de satisfacción (**ver Anexo 3**) con el propósito de comparar su actitud hacia las matemáticas con las que muestran sus compañeros en la Universidad Antonio Nariño.

La encuesta se aplicó a veintitrés de los veintinueve estudiantes que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos a nivel terciario, pues sólo ellos continuaron sus estudios en la Universidad Antonio Nariño. En la actualidad toman las siguientes clases de matemáticas: Cálculo Integral (4 alumnos), Álgebra Lineal (6 alumnos), Ecuaciones Diferenciales (1 alumno) y Cálculo Multivariado (14 alumnos), es importante tener en cuenta que algunos de ellos toman dos cursos simultáneamente. Respecto al marco general de la encuesta de satisfacción, la misma cuenta con una serie de enunciados en los cuales los estudiantes consultados deben establecer en qué grado se encuentran de acuerdo o en desacuerdo con dicho enunciado, los mismos cuentan con una escala Likert que permite evaluar cuantitativamente sus opiniones, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 7.

	Escala Likert	Totalmente en Desacuerdo	En desacuerdo	Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí	F. Absoluta	0	0	0	2	21
	F. Relativa	0%	0%	0%	8,69%	91,30%
He encontrado el curso de solución de problemas matemáticos intelectualmente estimulante	F. Absoluta	0	0	0	0	23
	F. Relativa	0%	0%	0%	0%	100%
Mi interés por las matemáticas ha aumentado luego de cursar la cátedra de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	1	22
	F. Relativa	0%	0%	0%	4,34%	95,65%
El curso de solución de problemas matemáticos me ha motivado a ampliar mis conocimientos en matemáticas fuera de clase	F. Absoluta	0	0	0	5	18
	F. Relativa	0%	0%	0%	21,73%	78,26%
Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas gracias al curso de solución de problemas matemáticos	F. Absoluta	0	0	0	5	18
	F. Relativa	0%	0%	0%	21,73%	78,26%
El curso de solución de problemas matemáticos estimuló mi deseo de llegar lo más lejos posible en mis intereses académicos	F. Absoluta	0	0	0	2	21
	F. Relativa	0%	0%	0%	8,69%	91,30%
Recomendaría el curso de solución de problemas matemáticos a estudiantes de otras universidades	F. Absoluta	0	0	0	1	22
	F. Relativa	0%	0%	0%	4,34%	95,65%
Resolver problemas matemáticos o en otras áreas relacionadas es placentero para mí	F. Absoluta	0	0	2	5	8
	F. Relativa	0%	0%	8,69%	21,73%	69,56%
Utilizar las matemáticas en otras cátedras es satisfactorio para mi	F. Absoluta	0	0	0	3	20
	F. Relativa	0%	0%	0%	13,04%	86,95%
Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios	F. Absoluta	0	0	4	8	11
	F. Relativa	0%	0%	17,39%	34,78%	47,82%
Espero utilizar habitualmente la matemática en mi vida como futuro profesional	F. Absoluta	0	0	0	0	23
	F. Relativa	0%	0%	0%	0%	100%
Me gustaría como futuro profesional tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar matemáticas	F. Absoluta	0	0	0	3	20
	F. Relativa	0%	0%	0%	13,04%	86,95%
Me siento mejor preparado que mis compañeros de clase en las asignaturas relacionadas con matemáticas	F. Absoluta	0	0	4	10	9
	F. Relativa	0%	0%	17,39%	43,47%	39,13%
Mi desempeño académico en las áreas del conocimiento relacionadas con matemáticas son mejores que las de mi compañeros de clase	F. Absoluta	0	0	3	11	9
	F. Relativa	0%	0%	13,04%	47,82%	39,13%

Tabla 7. Tabulación encuesta de satisfacción aplicada a estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la encuesta de satisfacción, se pudo constatar como los veintitrés estudiantes que continuaron sus estudios en la Universidad Antonio Nariño, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas de acuerdo con las respuestas brindadas. Sobre la base de las consideraciones anteriores se puede afirmar que los universitarios que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos, donde se implementó el modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento, permitió una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la del nivel terciario.

Conclusiones capítulo 6

En el presente capítulo se realizó una validación respecto a los contenidos y el sistema de actividades que debería tener un curso de solución de problemas, de tal manera que se pueda establecer una relación dinámica y positiva entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad.

CONCLUSIONES

La investigación, respecto a la transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas, permitió comprobar la hipótesis de la investigación realizada y brindar respuestas a los objetivos propuestos. Los resultados obtenidos permiten destacar algunas conclusiones, los cuales se muestran a continuación.

El modelo didáctico para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos, proporciona un soporte teórico y metodológico al tratamiento de los problemas matemáticos, que posibilita un método para abordar la problemática que se presenta en los estudiantes que realizan la transición de la escuela secundaria a la universitaria en correspondencia con los objetivos generales y específicos formulados en la presente tesis.

Las fases que sustentan el modelo didáctico formulado en la presente investigación fueron validadas por un grupo de expertos, quienes las consideran factibles para la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos, en las que convergen aspectos cognitivos, epistemológicos y psicológicos, en medio de técnicas y estrategias de trabajo grupales e individuales cumpliendo con los objetivos formativos que se proponen en correspondencia con los tipos de problemas, su contextualización y el desarrollo conceptual respecto a las matemáticas elementales.

Los resultados prácticos experimentales obtenidos en la investigación desarrollada corroboran la validez de las bases teóricas desarrolladas y su aplicabilidad en la escuela secundaria y universitaria al conseguir:

- Disminuir la brecha que existe entre los niveles de educación media y superior, al intentar realizar una aproximación entre las prácticas pedagógicas de la escuela secundaria y vincularlas a las exigencias de la educación superior a través de la solución de problemas matemáticos, lo que promueve una relación dinámica y positiva entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.

- Mejorar el proceso de aprendizaje en el área de matemáticas de la escuela secundaria y de la universidad, al superar los obstáculos epistemológicos que muestran los estudiantes respecto a la inadecuada interpretación de las propiedades de los números, en particular los enteros.
- Un desarrollo del pensamiento formal en el estudiante por medio del análisis combinatorio, al vincular progresivamente esquemas intuitivos que terminen siendo aproximaciones a las ideas normativas, de modo que el alumno se aproxime al concepto que se desea que construya a través de la solución de problemas.
- Difuminar la frontera que existe entre los contenidos y los conceptos que se trabajan en la escuela secundaria como en educación superior, por medio de la resolución de problemas algebraicos, que ha sido durante mucho tiempo el tema de transición por excelencia utilizado por los investigadores en educación matemática a nivel mundial.
- Propiciar en los estudiantes la construcción de conceptos robustos y formales en geometría, los cuales disminuyen las discontinuidades en el currículo que se imparte a nivel secundario y terciario. Sobre la base de las consideraciones anteriores se promueve en el alumno procesos matemáticos como la visualización y el sentido espacial.

De acuerdo a las heurísticas utilizadas por los estudiantes en la solución de problemas matemáticos, se puede establecer que se generó un mayor entendimiento de las matemáticas elementales al:

- Efectuar operaciones básicas con números enteros.
- Aplicar propiedades de los logaritmos.
- Mostrar comprensión del concepto de número primo y posteriormente aplicarlo en la solución de problemas relacionados con la teoría de números.

- Evidenciar entendimiento de conceptos relacionados con análisis combinatorio y ponerlos en práctica en la solución de problemas que involucran esta disciplina.
- Demostrar dominio y entendimiento de algunos teoremas básicos del álgebra elemental.
- Determinar las raíces de una ecuación.
- Realizar despeje de ecuaciones y utilizar la ecuación cuadrática para resolver problemas algebraicos.
- Utilizar la visualización como estrategia para resolver problemas geométricos.

Con referencia a lo anterior, los estudiantes también mostraron avances significativos respecto al desarrollo de su pensamiento matemático al:

- Utilizar heurísticas que los llevaron a expresar logaritmos en una misma base para resolver problemas numéricos.
- Establecer cómo el número de posibles formas en que pueden combinar elementos se puede optimizar al incorporar el principio de la multiplicación en el análisis combinatorio.
- Usar procedimientos como el despeje de ecuaciones e interpretación del concepto de raíz de una ecuación cuadrática expresada en términos de otra ecuación.
- Despejar ecuaciones y además utilizar la ecuación cuadrática en otros campos de la matemática como la geometría
- Utilizar conjeturas para establecer generalizaciones.
- Emplear el pensamiento deductivo para efectuar demostraciones.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, el diseño de una secuencia de actividades conformadas por problemas retadores y al modelo didáctico presentado en la investigación, se logró dinamizar un ciclo virtuoso entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad.

El álgebra, la teoría de números, la combinatoria, y la geometría promueven una mejor comprensión de la matemática elemental en el estudiante, que gracias a la resolución de problemas no rutinarios genera un desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante. Por lo expuesto anteriormente se promueve en el estudiante el razonamiento, la formulación de conjeturas y la verificación de generalizaciones.

La teoría de números por ser el área de matemáticas que estudia las propiedades y relaciones de los números enteros, posibilita que los estudiantes puedan enfrentarse a problemas retadores relacionados con esta rama de las matemáticas de forma asertiva. Esta afirmación se realiza pues ellos demuestran en la fase de abordaje un nivel de comprensión alto en relación con el problema planteado, lo que a su vez conlleva a que muestren un gusto y motivación especial durante la fase de desarrollo del problema retador. Por ello según el criterio del autor se llega a la conclusión que la teoría de números debería ser la primera temática en trabajarse durante los cursos de solución de problemas matemáticos que pretendan realizar una transición entre la matemática de escuela secundaria y la de nivel terciario.

Los estudiantes pueden evidenciar como mientras la intuición los lleva por cierto camino, el arte del descubrimiento, el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático que se genera a través de la solución de problemas retadores en matemáticas elementales muestra una base teórica que soporta y engrandece su formación académica.

Partiendo del significado de los objetos, la práctica, la comunidad y la identidad, que propone Wenger, E., se evidencia como los integrantes de los cursos de solución de problemas matemáticos del Colegio José María Carbonell y de la Universidad Antonio Nariño, tienen un mejor entendimiento de la matemática elemental y un desarrollo del pensamiento matemático gracias al inevitable proceso de participación social en el aula de clases.

Gracias al diseño y desarrollo de un currículo matemático más retador como se propone en los cursos de solución de problemas matemáticos, se permite que el profesor analice su práctica docente de una forma más profunda, dejando de lado sus propios prejuicios. Es así como el autor de la presente tesis encontró una línea de investigación y desarrollo enmarcada en el diseño, organización y realización de diversos aspectos de la educación matemática que buscan promover una experiencia más retadora en matemáticas, logrando describir la naturaleza del pensamiento matemático y encontrando en la clase de solución de problemas matemáticos un camino para desarrollar esta teoría.

La transición que experimentan los estudiantes de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria es considerada por muchos autores como una transición crítica, que conlleva a obstáculos epistemológicos y a una discontinuidad en los contenidos que se trabajan en la escuela secundaria y en el nivel terciario. Si bien estudios como el ICME 13 han resaltado la importancia de encontrar posibles soluciones a esta problemática, en Colombia existen pocas investigaciones sobre la transición de la matemática de la escuela secundaria a la universitaria.

El promedio del desempeño en las pruebas Saber 11 de los estudiantes de grado once que tomaron el curso de solución de problemas matemáticos presentado en la actual investigación, además de tener un aumento significativo respecto al promedio del año anterior, fue el puntaje más alto registrado en los últimos diez años en la Institución Educativa Distrital José María Carbonell.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la encuesta de satisfacción, se pudo constatar como los estudiantes de grado once de la Institución Educativa José María Carbonell que continuaron sus estudios a nivel de educación tecnóloga o superior, mostraron una actitud positiva hacia las matemáticas luego de haber tomado el curso de solución de problemas matemáticos en el que se implementó el modelo didáctico para favorecer el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento matemático, lo que les permitió una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la de la universidad.

Los estudiantes que estudiaron bajo la propuesta didáctica que se presenta en la actual investigación, obtuvieron un promedio de notas significativamente más alto en la catedra solución de problemas matemáticos que los otros cuatro grupos de estudiantes que cursaban simultáneamente la misma asignatura en la Universidad Antonio Nariño. Significa entonces que la incorporación de una secuencia didáctica de actividades conformada por problemas atractivos, estimulantes y llenos de interés, suscita una motivación intrínseca que promueve el aprendizaje en los estudiantes, obteniendo un mejor rendimiento académico en comparación con otros alumnos.

El promedio de notas definitivas obtenidas por los estudiantes inscritos en los cursos de Cálculo Diferencial y Calculo Integral que participaron en la propuesta didáctica que se presenta en la actual tesis, fue mayor o igual al promedio de notas obtenido por sus compañeros de clase en la Universidad Antonio Nariño. Es evidente entonces como el curso de solución de problemas matemáticos que se plantea en la actual investigación, desarrolla en el alumno actitudes relacionadas con hábitos de trabajo, curiosidad, interés por investigar y resolver problemas donde intervienen la creatividad, la formulación de conjeturas, la flexibilidad para modificar su propio punto de vista y de este modo obtener una autonomía intelectual para abordar situaciones nuevas con la confianza de aprender. Sobre la base de las consideraciones se puede concluir que el desarrollar una forma flexible e independiente de pensar permite a los estudiantes aprender otros dominios de las matemáticas con relativa facilidad, fomentando así un mejor rendimiento académico en cursos de matemáticas a nivel de educación superior.

Los resultados arrojados por la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño que continuaron sus estudios de pregrado, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas, gracias al modelo didáctico que promueve el entendimiento de las matemáticas elementales y el desarrollo del pensamiento y que se aplicó en el curso de solución de problemas matemáticos, lo que les permitió tener una adecuada transición entre la matemática de la escuela secundaria y la de la universidad.

RECOMENDACIONES

La implementación del curso de solución de problemas matemáticos sustentada en el modelo didáctico que fortalece el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad, en los estudiantes de grado once del Colegio José María Carbonell y de la facultad de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, en el marco de la investigación realizada en la presente tesis requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones.

- Profundizar en la aplicación de la propuesta didáctica a otros cursos de la educación básica y media en Colombia.
- Divulgar los resultados obtenidos en la investigación a los docentes de las instituciones educativas donde se llevó a cabo el estudio, en relación con la metodología y la secuencia didáctica de actividades empleadas en el curso de solución de problemas matemáticos.
- Institucionalizar el modelo didáctico junto con su respectiva secuencia de actividades en los cursos de solución de problemas matemáticos de la Universidad Antonio Nariño.
- Continuar la investigación en la Universidad Antonio Nariño para indagar sobre los posibles efectos positivos que esta forma de enseñar las matemáticas tendría en cursos posteriores al de resolución de problemas matemáticos.
- Realizar nuevas investigaciones, desarrolladas por la comunidad científica dedicada a trabajar en el área de educación matemática en Colombia, que contribuyan a mejorar el proceso de transición que realizan miles de estudiantes que llegan a la universidad anualmente.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

1. Álvarez, C. (1999). La Escuela en la Vida. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
2. Ames, C. (1992). Classrooms: goals, structures, and student motivation. *Journal of educational psychology*.
3. Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational studies in mathematics. p. 215 – 241.
4. Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire/supérieur ¿que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine?. Trabajo presentado en el primer congreso franco – canadiense de Ciencias Matemáticas, Toulouse, Francia.
5. Artigue, M., Batanero, C., y P. Kent (2007). Mathematics thinking and learning at post – secondary level. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, Greenwich, Connecticut, Information Age Publishing. p. 1011 – 1049.
6. Barrera, F. y Reyes, A. (2009). *Learning mathematics with understanding*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Revista Electrónica de Investigación Educativa. Vol. 2, No. 3.
7. Barwise, J. y Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. Visualization in teaching and learning mathematics. Mathematical Association of America, Washington. p. 9 – 24.
8. Bergeron, J. y Herscovics, N. (1990). *Psychological aspects of learning early arithmetic*. Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge University Press. Cambridge, England.
9. Bernard, L. (2012). *Articulation issues: high school to college mathematics*. Arkansas: Universidad de Arkansas. Recuperado el 18 marzo de 2014 en el URL: http://www2.kenyon.edu/Depts/Math/schumacherc/public_html/Professional/CUPM/2015Guide/ArticulationFinal.pdf

10. Biehler, R., Fischer, P., Hochmuth, R., & Wassong, T. (2011). Designing and evaluating blended learning bridging courses in mathematics. In Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. p. 1971 – 1980.
11. Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares*. Recherches en Didactique des Mathématiques. p. 205 – 250.
12. Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2014). *Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático*.
13. Carpenter, T., Corbitt, M., Kepner, H., Lindquist, M., y Reys, R. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the national assessment of educational progress*. The University of Michigan. National Council of Teachers of Mathematics.
14. Carraher, D. y Schliemann, A. (2014). Early algebra teaching and learning. Encyclopedia of mathematics education. Springer. p. 1993 – 196.
15. Chacón, M. Farías, S. González, V. y Poco, A. (2009). Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas. Memorias del 10° Simposio de Educación Matemática. Edumat, Buenos Aires.
16. Chi, M. Feltovich, P. & Glaser R. (1982). Chi, M. T. H., Feltovich, P. S. y Glasser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. Recuperado el 16 de mayo de 2015 en el URL: https://pdfs.semanticscholar.org/16ef/4cc3a80ee7ba8f59e0a55b2ef134c31e18b3.pdf
17. Clements, D. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach*. Studies in Mathematical Thinking and Learning Series. Routledge, Vol. 1.

18. COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA (1990). Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. Cambridge, Cambridge University Press. p. 1 – 13.
19. COMISIÓN INTERNACIONAL DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA. (2006) Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula.
20. De Guzmán, O. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Ciencias Matemáticas.
21. Dossey, J., Mullis, I., Lindquist, M., y Chambers, D. (1988). *Are we measuring up? Trends and Achievement Based on the 1986 National Assessment*. National Assessment of Educational Progress. Princeton, New Jersey.
22. Dreyfus, T. (1999). Why Johny can't prove. Educational Studies in Mathematics. No. 38, 85 – 109.
23. Fischbein, E. (1990). Introduction. Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education. Cambridge, Cambridge University Press. p. 1 – 13.
24. Gomez, I. (2009). *Mathematical attitudes: proposals for the transition from high school to university*. Educación Matemática, Grupo Santillana México, Distrito Federal, México. Vol. 21, No. 3. p. 5 – 32.
25. Grinnell, R. (1997). Social work research and evaluation: Quantitative and qualitative approaches. E. E. Peacock Publishers. Itasca, Illinois.
26. Gueudet, Bosch, Disessa, Kwon y Verschaffel (2016). Transitions in Mathematics Education. ICME – 13 Topical Surveys.
27. Gueudet, G. (2004). Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 24, No. 1. p. 81 – 114.

28. Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary – tertiary transition. Educational Studies in Mathematics. p. 237 – 254.
29. Hernández, H. (1990). Saltar a la vista lo evidente. Revista Cubana de Educación Superior, Vol. 10, No 1. Ciudad de La Habana, Cuba.
30. Hoyles, C., Newman, K., y Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 32, No. 2. p. 829 – 845.
31. Iannone, P., y Nardi, E. (2007). The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production: Mathematicians' perspectives. Proceedings of the Fifth Congress of European Society for Research in Mathematics Education. Larnaca, Chipre.
32. Isoda, M. y Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking how to develop it in the classroom*. Monographs on Lesson Study for Teaching Mathematics and Sciences. Vol. 1.
33. Kayander, A., & Lovric, M. (2005). *Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. p. 149 – 160.
34. Kloosterman, P. (1988). Self – confidence and motivation in mathematics. *Journal of educational psychology*. National council of teachers of mathematics.
35. Krulik, S. & Rudnick, J. (1987). Problem solving: A handbook for teachers. Allyn and Bacon, Boston.
36. Labarrere, A. (1988). Bases Psicológicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
37. Lepper, M. (1988). *Motivational considerations in the study of instruction*. Cognition and instruction. Taylor & Francis.
38. Losada, M, F. (2001). *Boletín de la asociación matemática venezolana. Vol. VII*, No. 1.

39. Losada, M, F. (2011). *Paradoja: el papel que puede jugar en refinar las metas de la educación matemática*. XVIII Congreso nacional de matemáticas.

40. Losada, M, F. (2011). *Retos matemáticos: una agenda para investigación y acción*. XXIV Coloquio distrital de matemáticas y estadística.

41. Losada, M, F. (2015). Seminario III: relaciones entre el pensamiento matemático y la educación matemática.

42. Maher, C. y Martino, A. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5 – year case study. *Journal for research in mathematics education.*

43. Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (2010). Thinking mathematically. University of Oxford. Pearson.

44. Mason, J., Graham, A. y Johnston – Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London, Paul Chapman Publishing.

45. Matsuura, R. (2014). *Principles to actions: ensuring mathematics success for all*. National council of teachers of mathematics.

46. Mazarío, I. y Sanz, T. (2009). Reflexiones sobre un tema polémico; la resolución de problemas. Universidad de Matanzas. Editorial Universitaria, Cuba. p. 16 – 19.

47. Middleton, J. A. (1995). A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom: a personal constructs approach. *Journal for research in mathematics education*.

48. Middleton, J. y Spanias, P. (1999). Motivation for achievement in mathematics: findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for research in mathematics education*. Vol. 30, No. 1. p. 65 – 88.

49. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics.

50. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003). Principios y estándares para la educación matemática. p. 60.
51. Newell, A. y Simon, H. (1972). Human problem solving. Carnegie Mellon University. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
52. Pea, R. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. Cognitive Science and Mathematics Education. Erlbaum, Hillsdale. p. 89 – 122.
53. Poincaré, H. (1902). Science and hipótesis. New York, Dover.
54. Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton. Princeton University press. Princeton, New Jersey.
55. Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecno S. A. p. 26 – 125.
56. Polya, G. (1972). Mathematical discovery: on understanding, Learning and teaching problem solving. University of Michigan. Wiley, California.
57. Pozo, J. y Pérez, M. (2009). Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias. Ediciones Morata, Madrid. Psychology, 80. p. 345 – 351.
58. Puig, L. (1995). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Editorial Comares.
59. Saiz, C. (2008). *Enseñar a pensar. Psicología del pensamiento*. Madrid: alianza editorial.
60. Santos, L. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Centro de investigación y de estudios avanzados IPN. Capítulo 6.
61. Santos, M. y Barrera, F. (2007). *Contrasting and looking into some mathematics education frameworks*. The mathematics educator.
62. Sdrolias, K. y Triandafillidis, A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics". Educational studies in mathematics. p. 159 – 169.

63. Serrano, L., Bosch, M., y Gascón, J. (2007). Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer ciclo universitario. Sociedad, escuela y matemática: aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Publicaciones de la Universidad de Jaén, Jaén. p. 757 – 766.
64. Shaughnessy, M. (2011). *National council of teachers of mathematics*.
65. Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the learning of mathematics. p. 24 – 36.
66. Sierpińska, A., Bobos, G., & Knipping, C. (2008). Sources of students' frustration in pre university level, prerequisite mathematics courses. Instructional Science. p. 289 – 320.
67. Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
68. Thomas, M., De Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). *Key mathematical concepts in the transition from secondary to university*. The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, New York. p. 265 – 284.
69. Universidad Antonio Nariño (2010). Olimpiadas colombianas de matemáticas.
70. Universidad Antonio Nariño (2011). Olimpiadas colombianas de matemáticas.
71. Universidad Antonio Nariño, (2015). Plan de estudios ingeniería mecánica.
72. Wagner, J. (2006). Transfer in pieces. Cognition and instruction. p. 1 – 71.
73. Waring, S., Orton, A. y Roper, T. (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. p. 192 – 206.
74. Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Cambridge: The press syndicate of the University or Cambridge.
75. Whitehead. (1911). An introduction to mathematics. Oxford: Oxford University. p. 4.
76. Wood, T. (2001), The secondary – tertiary interface. The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. p. 87 – 98.

77. Yerushalmy, M. (2005). Challenging known transitions: Learning and teaching algebra with technology. For the Learning of Mathematics. p. 37–42.

78. Zimmermann y Cunningham (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical association of America. p. 1 – 8.

79. Linstone, H., Turoff, M. (1975). The Delphi method. Techniques and applications. Addison – Wesley. p. 3.

ANEXOS.

Anexo 1. Encuesta para determinar el coeficiente de competencia del experto.

Nombre y apellidos: ____.

Estimado profesor, usted ha sido seleccionado como experto para ser consultado respecto al grado de relevancia de un modelo didáctico que pretende favorecer la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos retadores.

Como parte del método empírico de investigación *"consulta a expertos"*, con la finalidad de reforzar la validez del resultado de la consulta que deseamos hacerle, nos gustaría que primero respondiese de la forma más objetiva posible las siguientes preguntas.

1. Marque con una cruz (X), en la tabla siguiente, el valor que se corresponde con el grado de conocimientos que usted posee sobre el tema: **"LA TRANSICIÓN DE LA ESCUELA SECUNDARIA A LA UNIVERSITARIA A TRAVÉS DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS"**.
   Considere que la escala que le presentamos es ascendente, es decir, el conocimiento sobre el tema referido va creciendo desde 0 hasta 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Realice una autovaloración del grado de influencia que cada una de las fuentes que le presentamos a continuación, ha tenido en su conocimiento y criterio sobre la **"LA TRANSICIÓN DE LA ESCUELA SECUNDARIA A LA UNIVERSITARIA A TRAVÉS DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS"**.
   Marque con una cruz (X), según corresponda, en **A** (alto), **M** (medio) o **B** (bajo).

Fuentes de argumentación	**Grado de influencia de cada una de las fuentes**		
	A(alto)	**M**(medio)	**B**(bajo)
Análisis teóricos realizados por usted.			
Su experiencia obtenida.			
Trabajo de autores nacionales.			
Trabajo de autores extranjeros.			
Su propio conocimiento del estado del problema.			
Su intuición.			

Muchas gracias.

Anexo 2. Encuesta a los expertos para determinar la concordancia de los aspectos que se someten a su consideración

A continuación, se muestra a los académicos seleccionados el modelo didáctico y la secuencia de actividades que aparecen en los capítulos 3 y 4 de la presente investigación.

En este momento se solicita su valiosa colaboración respondiendo la encuesta.

INDICACIONES PARA DILIGENCIAR LA ENCUESTA:

Su opinión con relación a los aspectos siguientes es de suma importancia:

- Grado de relevancia de las fases y componentes del modelo didáctico para favorecer la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos.
- Sugerencias de cambios de denominación de las fases y componentes propuestos, cuyo grado de relevancia, se somete a su consideración.

A continuación, presentamos dos tablas que contienen las fases y componentes del modelo y del procedimiento didáctico descritos anteriormente para que las califique. A la derecha aparece la escala:

MA: Muy adecuado.**BA:** Bastante adecuado. **A:** Adecuado.**PA:** Poco adecuado. **NA:** No adecuado.

1. Marque con una cruz (X) en la celda que corresponda el grado de relevancia que usted considere en cada fase y componente de la propuesta del modelo y procedimiento didáctico. Se le agradece de antemano el esfuerzo para responder la presente encuesta, con la mayor fidelidad posible a su manera de pensar.

Fase o componente del modelo didáctico	MA	BA	A	PA	NA
Planificación docente					
Contenidos de la secuencia didáctica de actividades					
Elaboración de la secuencia didáctica de actividades					
Formulación de problemas retadores					
Saberes previos					
Validación de los contenidos propuestos en la secuencia didáctica de actividades					
Abordaje del problema					
Resolución del problema retador					
Socialización de resultados					
Fase o componente del procedimiento	**MA**	**BA**	**A**	**PA**	**NA**
Generación de las ideas					
Formulación de heurísticas y conjeturas					
Validación de heurísticas y conjeturas					
Vinculación con otros saberes					

2. Si su respuesta fue marcada **PA** o **NA**, entonces escriba a continuación que fase o componente considera que deben ser incluidos o eliminados en esta propuesta:

Fase o componentes que se proponen ser incluidos	Fase o componentes que se proponen ser eliminados

3. Si su respuesta fue marcada **A,** entonces señale a continuación, si considera que el nombre de alguno de las fases o componentes de la propuesta, debe ser cambiado:

La fase o componente aparece como	La fase o componente debe ser cambiado por

Otra sugerencia que usted desee hacer sobre la propuesta del modelo y/o procedimiento para favorecer la transición de la escuela secundaria a la universitaria a través de la solución de problemas matemáticos.

____

____

____

____

Anexo 3. Encuesta de satisfacción

CURSO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
ENCUESTA DE SATISFACCIÓN

Agradezco de antemano su valiosa participación, motivación e interés en cada una de las actividades que se realizaron para mejorar el proceso de transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos. En aras de conocer cómo valoran los estudiantes este tipo de acciones pedagógicas, lo invito a responder la siguiente encuesta. Su opinión es muy importante.

En el siguiente cuestionario encontrará una serie de afirmaciones relacionadas con la cátedra de solución de problemas matemáticos. Estas han sido elaboradas de forma que le permitan indicar hasta qué punto está de acuerdo o en desacuerdo con las ideas ahí expresadas.

Seleccione la opción con la cual se identifique y marque con una equis (X), según el grado de acuerdo o desacuerdo con la afirmación correspondiente, de acuerdo con la siguiente clasificación:

1. Totalmente en Desacuerdo.
2. En desacuerdo.
3. Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo.
4. De acuerdo.
5. Totalmente de acuerdo.

	1	2	3	4	5
Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí					
He encontrado el curso de solución de problemas matemáticos intelectualmente estimulante					
Mi interés por las matemáticas ha aumentado luego de cursar la cátedra de solución de problemas matemáticos					
El curso de solución de problemas matemáticos me ha motivado a ampliar mis conocimientos en matemáticas fuera de clase					
Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas gracias al curso de solución de problemas matemáticos					
El curso de solución de problemas matemáticos estimulo mi deseo de llegar lo más lejos posible en mis intereses académicos					
Recomendaría el curso de solución de problemas matemáticos a estudiantes de otras universidades					
Resolver problemas matemáticos u en otras áreas relacionadas es placentero para mi					
Utilizar las matemáticas en otras cátedras es satisfactorio para mi					
Si tuviera la oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios					
Espero utilizar habitualmente la matemática en mi vida como futuro profesional					
Me gustaría como futuro profesional tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar matemáticas					
Me siento mejor preparado que mis compañeros de clase en las asignaturas relacionadas con matemáticas					
Mi desempeño académico en las áreas del conocimiento relacionadas con matemáticas son mejores que las de mi compañeros de clase					

Anexo 4. Consentimiento informado estudiantes grado onceno

INFORMACIÓN PARA ESTUDIANTES DEL CURSO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Apreciado estudiante, el proyecto de investigación "Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos", es conducido por Renne Andrés Peña, estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en el marco del desarrollo de su tesis doctoral. Uno de los objetivos generales propuestos en dicho estudio es "Determinar los contenidos y el sistema de actividades que debería tener un curso de solución de problemas, de tal manera que se pueda establecer una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad". Teniendo en cuenta que la asignatura que usted va a cursar es "Solución de Problemas Matemáticos" se solicita su valiosa colaboración.

Si usted accede a participar, se le pedirá a lo largo del semestre, además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, responder algunos instrumentos y encuestas de satisfacción que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las clases serán gravadas en audio y video, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que ha expresado.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Sus respuestas a los instrumentos y a las entrevistas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación en él. También, puede retirarse en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parece incómodas, tiene derecho de informarlo al investigador, incluso puede no responderlas. Agradecemos su sincera participación.

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Yo ______________________________ padre de familia del estudiante ____________________________ del Colegio José María Carbonell, identificado con tarjeta de identidad _____________ acepto participar voluntariamente en el estudio "Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos", conducido por Renne Andrés Peña.

Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es "Determinar los contenidos y el sistema de actividades que debería tener un curso de solución de problemas, de tal manera que se pueda establecer una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad". También me han informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, debo responder algunos instrumentos y encuestas de satisfacción que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez; y que las clases serán grabadas en audio en audio y video.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Renne Andrés Peña a través del correo rennepena@uan.edu.co

En constancia firmo a los ____ días del mes de _______________ de 2016.

_________________________________ FIRMA

Anexo 5. Consentimiento informado estudiantes de pregrado

INFORMACIÓN PARA ESTUDIANTES DEL CURSO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Apreciado estudiante, el proyecto de investigación "transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos", es conducido por Renne Andrés Peña, estudiante de Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, en el marco del desarrollo de su tesis doctoral.

Uno de los objetivos generales propuestos en dicho estudio es "Determinar los contenidos y el sistema de actividades que debería tener un curso de solución de problemas, de tal manera que se pueda establecer una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad". Teniendo en cuenta que la cátedra que usted va a cursar es "Solución de problemas matemáticos" se solicita su valiosa colaboración.

Si usted accede a participar, se le pedirá a lo largo del semestre, además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, responder algunos instrumentos y encuestas de satisfacción que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez. Las clases serán gravadas en audio y video, de manera que el investigador pueda después trascribir las ideas que ha expresado.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Sus respuestas a los instrumentos y a las entrevistas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación en él. También, puede retirarse en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parece incómodas, tiene derecho de informarlo al investigador, incluso puede no responderlas. Agradecemos su sincera participación.

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE ESTUDIANTES PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

Yo ____ estudiante de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, identificado con el código _________________ acepto participar voluntariamente en el estudio "Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos", conducido por Renne Andrés Peña.

Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es "Determinar los contenidos y el sistema de actividades que debería tener un curso de solución de problemas, de tal manera que se pueda establecer una relación entre el entendimiento y el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes que realizan la transición entre la escuela secundaria y la universidad". También me han informado que además de cumplir con los requisitos establecidos en el curso, debo responder algunos instrumentos y encuestas de satisfacción que tomarán aproximadamente 15 minutos cada vez; y que las clases serán grabadas en audio en audio y video.

Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que puedo retirarme si es mi deseo sin que ello me perjudique en ninguna forma.

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Renne Andrés Peña a través del correo rennepena@uan.edu.co

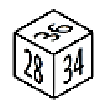
En constancia firmo a los ____ días del mes de _______________ de 2016.

____ FIRMA

Anexo 6. Soluciones de los problemas planteados en las actividades desarrolladas en el curso solución de problemas matemáticos de grado once.

Soluciones prueba de entrada

1. Los números en las seis caras del cubo mostrado en la figura son enteros pares consecutivos. Si las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales, encuentre la suma de todos los seis números de este cubo.[69]



Solución

Como los seis números en las caras de los cubos son números enteros consecutivos, las únicas posibilidades son

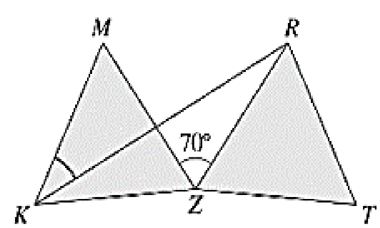
$26, 28, 30, 34, 36$ con suma 186, y $28, 30, 32, 34, 36, 38$ con suma 198.
Si las sumas de las caras opuestas son iguales, el número más grande estará en el lado opuesto del menor y el segundo más grande en el lado opuesto del quinto.
Del diagrama, 28 no es opuesto a 34, por lo tanto el primer caso no es posible. El segundo caso es posible.

2. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?

Solución

En este problema la primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes $(1, 3, 5, 7$ ó $9)$. Una vez seleccionada la primera, la segunda cifra puede ser tomarse de 5 formas distintas $(0, 2, 4, 6, 8)$ y la tercera de modo que sea cualquier digito excepto el escogido en primer lugar y segundo lugar, es decir hay 8 maneras de seleccionar la tercera cifra. Por el principio del producto la respuesta correcta es $5 * 5 * 8 = 200$.

3. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$.[70]



Solución

$\angle KZR = 60° + 70° = 130°$, y como KZM es isósceles se tiene $\angle ZKR = \frac{(180°-130°)}{2} = 25°$ y finalmente $\angle RKM = \angle ZKM - \angle ZKR = 60° - 25° = 35°$.

4. Para números reales x y y, se define $x♠y = (x+y)(x-y)$. ¿Cuál es el valor de $3♠(4♠5)$?[71]

Solución

Si $4♠5 = (4+5)(4-5) = -9$, entonces se tiene que
$3♠(4♠5) = 3♠(-9) = \big(3 + (-9)\big)\big(3 - (-9)\big) = (-6)(12) = -72$

---

[69] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2012, página 10 – problema 13.
[70] Tomado de Olimpíada Juvenil de Matemáticas 2013, página 20 – problema 11.
[71] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2010, página 21 – problema 2.

Soluciones batería de problemas actividad números

1. En cierta isla, los habitantes son de dos tipos: los honestos, que siempre dicen la verdad, y los mentirosos, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidas Ana, Berta y Claudia, tres habitantes de la isla. Ana dice: Las tres somos mentirosas. Berta dice: Las tres somos honestas. Claudia permanece callada. ¿Qué es cada una de ellas?

Solución.

Si Ana fuese honesta, entonces las tres serían mentirosas, incluida Ana y esto es una contradicción. Luego, Ana es mentirosa. Berta también es mentirosa, ya que como al menos Ana es embustera no es verdad que las tres sean honestas. Finalmente, Claudia debe ser honesta, ya que, si fuese mentirosa, las tres lo serían, y Ana habría dicho la verdad.

2. El año pasado 100 gatos adultos, de los cuales la mitad eran gatas, fueron llevados al refugio de villa chica. La mitad de las gatas adultas estaban acompañadas por una camada de gatitos. El número promedio de gatitos por camada era 4. ¿Cuál fue el número total entre gatos adultos y gatitos recibidos por el refugio el año pasado?[72]

Solución

El número de gatas adultas era 50, y 25 de éstas estaban acompañadas cada una por un promedio de 4 gatitos. Por lo tanto, el número total de gatitos era $25 * 4 = 100$, y el número total de gatos adultos y gatitos era $100 + 100 = 200$.

3. En un hotel de San Gil hay 120 personas distribuidas entre la recepción, el bar, el comedor y el salón de reuniones. La cantidad de personas que hay en el bar es un quinto de la que hay en el comedor, y en la recepción hay un octavo de las que hay en el salón. Al pasar diez personas del comedor al salón y seis del bar a la recepción, en la recepción hay un sexto de las que quedan en el comedor. ¿Cuántas personas había inicialmente en la sala de reuniones?[74]

Solución

Sean r, b, c y s el número de personas que había inicialmente en la recepción, el bar, el comedor y la sala de reuniones, respectivamente. Se tiene que $r = \frac{s}{8}$, y $\frac{c}{5}$. Al pasar las personas del comedor a la sala, y del bar a la recepción, se tiene que $r + 6 = \frac{c-10}{6}$, entonces $r = \frac{c-46}{6}$. Por lo tanto, en la sala había inicialmente $s = 8r = \frac{8(c-46)}{6}$ personas.

$$r + b + c + s = 120$$
$$\frac{c-46}{6} + \frac{c}{5} + c + \frac{8(c-46)}{6} = 120$$
$$\frac{9(c-46)}{6} + \frac{c}{5} + c = 120$$
$$15(c-46) + 2c + 10c = 1.200$$
$$15c + 2c + 10c = 1.200 + 690$$
$$c = \frac{1.890}{27}$$
$$c = 70$$

En la sala de reuniones había $\frac{8(70-46)}{6} = 32$ personas inicialmente.

4. Si un número tiene 1008 dígitos y el producto de ellos es 3^{2016}, halle la suma de dichos dígitos.

Solución.

$3^{2016} = 9^{1008}3$, por tanto, todos los dígitos son iguales a 9 y la suma pedida es $9 \cdot 1008 = 9072$.

5. De las siguientes identidades, son verdaderas:
   A) $a(x-y) = ax - ay$
   B) $a^{x-y} = a^x - a^y$
   C) $\log(x-y) = \log x - \log y$
   D) $\frac{\log x}{\log y} = \log x - \log y$
   E) $a(xy) = (ax)(ay)$
   Argumente su respuesta[74]

Solución

La primera es la ley distributiva, el resto de identidades son falsas, por ejemplo para $a = 2$ y $x = y$ no se tiene igualdad en ii, iv y v. Si iii fuera cierta entonces se tendría que $\log x - \log y = \frac{\log x}{\log y} = \log(x-y)$ y entonces, puesto que la función logaritmo es inyectiva, se tendría $\frac{x}{y} = x - y$ y esta es igualmente falsa. Por tanto solo i es verdadera.

---

[72] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2012, página 17 – problema 3.

[73] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2009, página 16 – problema 3.

[74] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2012, página 17 – problema 4.

Soluciones batería de problemas actividad teoría de números

1. Los números en las seis caras del cubo mostrado en la figura son enteros pares consecutivos. Si las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales, encuentre la suma de todos los seis números de este cubo.[76]

Solución
Como los seis números en las caras de los cubos son números enteros consecutivos, las únicas posibilidades son

$26, 28, 30, 34, 36$ con suma 186, y $28, 30, 32, 34, 36, 38$ con suma 198.
Si las sumas de las caras opuestas son iguales, el número más grande estará en el lado opuesto del menor y el segundo más grande en el lado opuesto del quinto.
Del diagrama, 28 no es opuesto a 34, por lo tanto el primer caso no es posible. El segundo caso es posible.

2. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden escribir como la suma de tres números de 2 dígitos (no necesariamente distintos)?[77]

Solución
El mayor número de dos dígitos es 99, por lo tanto el mayor número de 3 dígitos que puede ser escrito como la suma de tres números de dos dígitos es $99 + 99 + 99 = 297$.
El menor número de 3 dígitos es 100, el cual puede ser escrito como la suma de tres números de dos dígitos. Por ejemplo, $100 = 70 + 20 + 10$. Por lo tanto hay $297 - 99 = 198$ números que cumplen con lo requerido.

3. Un número es menor que 2008. Es impar, deja residuo 2 cuando se divide por 3 y residuo 4 cuando se divide por 5. ¿Cuál es la suma de los dígitos del mayor de todos los números que cumplen estas condiciones?[78]

Solución
Sea x el número. Las condiciones dadas nos dicen que $x + 1$ es divisible por $2, 3$ y 5. Por lo tanto es divisible por 30.
El mayor múltiplo de 30 que es ≤ 2.008 es 1.980, por lo tanto 1.979 es el número buscado, y la suma de los dígitos es 26.

4. Tres números p, q y r son todos números primos menores que 50 con la propiedad que $p + q = r$. ¿Cuántos valores de r son posibles?[79]

Solución
Los primos menores que 50 son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$ y 47.
La suma de dos primos impares cualquiera será par y por lo tanto no será un número primo.
Entonces uno de los primos es par y por ende es 2.

5. Definimos una nueva operación en números reales mediante la fórmula $a * b = \frac{2a-b}{3}$. Si $(x * x) * 7 = x$, calcule el valor de x.

Solución
Aplicando la definición de la operación $*$ y calculando tenemos la ecuación $\frac{2x-21}{9} = 7$, de donde, $x = 42$.

6. Se denota con $P(n)$ y con $S(n)$ el producto y la suma, respectivamente, de los dígitos de un entero positivo n. Por ejemplo $P(25) = 10$ y $S(25) = 7$. Si n es un número entero de dos dígitos y $P(n) + S(n) = n$, ¿cuál es el dígito de las unidades de n?

Solución.
Como n tiene solo dos dígitos, entonces $n = 10a + b$ y $a \neq 0$. Por definición $P(n) = a \cdot b$ y $S(n) = a + b$ y además sabemos que $P(n) + S(n) = n$, entonces tenemos la ecuación $ab + a + b = 10 \cdot a + b$, la cual es equivalente a $a \cdot b = 9 \cdot b$. Cómo $a \neq 0$ tenemos, $b = 9$.

---

[75] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2012, página 10 – problema 13.
[76] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2012, página 12 – problema 23.
[77] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2009, página 10 – problema 18.
[78] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2009, página 10 – problema 20.
[79] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2009, página 10 – problema 20.

7. Una banda musical está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de las que había en el cuadrado. ¿Cuántos músicos tiene la banda?

Solución.

Llamemos n la cantidad de filas en el cuadrado, entonces hay n^2 músicos en la banda. Por otra parte, al agruparse de forma rectangular, hay $n+5$ columnas y m filas, de tal manera que $n^2 = (n+5)m$, por tanto, $n+5$ divide a n^2. Como $\frac{n^2}{n+5} = n - 5 + \frac{25}{n+5}$, al ser $\frac{n^2}{n+5}$ un entero, concluimos que $\frac{25}{n+5}$ también es entero, pero esto solo es posible si $n = 0$ o $n = 20$. Como n es positivo es positivo, entonces $n = 20$ y el número de músicos de la banda es 400.

8. En cada planeta en un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que, si la cantidad de planetas es impar, entonces siempre hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

Solución

Quitemos del grupo de planetas aquellos que se observan mutuamente, esto es un número par de planetas y como el total de planetas es impar, queda un número impar de ellos que no se observan mutuamente. Pero si este número es tres o mayor, entonces siempre habrá un par de ellos que se observan mutuamente, pues si tenemos tres planetas A, B y C y como las distancias son distintas dos a dos, entonces, sin pérdida de generalidad tendremos que $d(A,B) < d(A,C)$ y entonces A observa a B. Luego como no se observan mutuamente B observa a C, es decir $d(B,C) < d(B,A) = d(A,B) < d(A,C)$, pero entonces C observa a A. Por tanto, al quitar todos los que se observan mutuamente, siempre quedará uno solo y éste observará a otro de los planetas eliminados, pero nadie lo observa a él. Además, el análisis de tres planetas nos indica que siempre habrá planetas que se observen mutuamente, así que el análisis es completo.

Soluciones batería de problemas actividad combinatoria

1. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?

Solución

En este problema la primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes $(1, 3, 5, 7 \text{ ó } 9)$. Una vez seleccionada la primera, la segunda cifra puede ser tomarse de 5 formas distintas $(0, 2, 4, 6, 8)$ y la tercera de modo que sea cualquier digito excepto el escogido en primer lugar y segundo lugar, es decir hay 8 maneras de seleccionar la tercera cifra. Por el principio del producto la respuesta correcta es $5 * 5 * 8 = 200$.

2. Un lenguaje tiene alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales, pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.
   - ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?

Solución

Hay dos clases de palabras: las del tipo vocal – consonante – vocal y las del tipo consonante – vocal – consonante. Las del primer tipo son $5 * 12 * 5 = 300$, ya que la primera vocal se puede escoger de 5 maneras, la consonante de 12 maneras y la segunda vocal de 5 maneras, del mismo modo las palabras del segundo tipo son $12 * 5 * 12 = 720$. por tanto, en total hay $300 + 720 = 1020$ palabras.

   - Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Solución

Para cada letra hay 60 palabras que comienzan por ella, y como la letra del medio es la L, la respuesta será la palabra 31 que comience con L. Hay 12 palabras que comienzan con LA, 5 con LB y 5 con LD. Entonces LIM es la respuesta correcta.

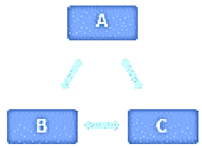
3. Alrededor de una mesa están sentadas 10 personas. ¿De cuántas maneras se puede escoger una comisión de tres de ellas, con la condición de que no contenga ningún par de vecinos de mesa?

Solución.

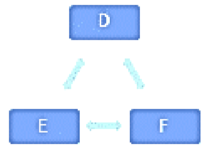
Hay $\binom{10}{3} = 120$ maneras de escoger tres personas de las diez que hay en la mesa. De ellas hay 10 formadas por 3 personas consecutivas en la mesa y $10\,x\,6 = 60$ formadas por dos personas vecinas y una no vecina. La respuesta es entonces $120 - 70 = 50$.

4. Los seis miembros de una familia están reunidos esperando el año nuevo. Cuando el reloj dé las 12 campanadas cada uno de ellos dará dos abrazos, cada uno a una persona distinta. ¿De cuántas maneras diferentes pueden hacer esto?[80]

[80] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Superior 2012, página 13 – problema 29.

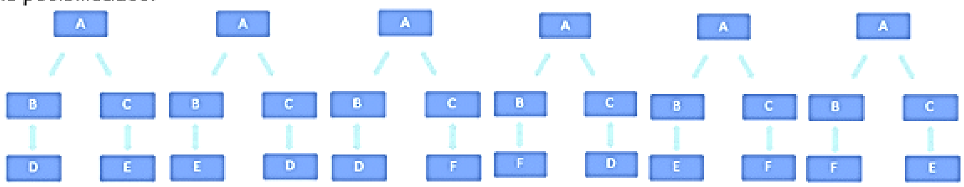


en este caso



es forzado

Hay otras seis posibilidades:



Dando siete en total.
Por lo tanto, el número de maneras en que puede ser hecho es $10 * 7 = 70$.

5. Paola, Laura, Carmen, Daniel, Carlos y Gerardo, tienen WhatsApp. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos WhatsApp entre sí, ninguno de ellos tiene un amigo WhatsApp fuera de este grupo. Cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos en WhatsApp. ¿De cuantas maneras diferentes puede pasar que este grupo de personas sean amigos WhatsApp?

Solución
Esta situación puede ser modelada por un grafo que tiene estas seis personas como vértices, en el cual dos vertices estan unidos por un arco si y sólo si las personas correspondientes son amigos en WhatsApp. Sea n el número de amigos que tiene cada persona; entonces $1 \leq n \leq 4$. Si $n = 1$, entonces el grafo consiste de tres arcos que no comparten extremos. Hay 5 elecciones para la amiga Paola y entonces 3 maneras de particionar las 4 personas restantes en 2 pares de amigos, por un total de $5 * 3 = 15$ posibilidades. El caso $n = 4$ es complementario, con la no amistad jugando el papel de amistad, por lo tanto hay también 15 posibilidades en este caso.

Para $n = 2$, el grafo debe consistir de ciclos, y las únicas dos posibilidades son dos triángulos (3 – ciclos) y un hexagono (6 – ciclos). En el primer caso hay $\binom{5}{2} = 10$ maneras de elegir dos amigos para Paola y esa elección determina unívocamente los triángulos. En el ultimo caso, cada permutación de los seis vertices determinan un hexágono, pero cada hexagono se cuenta $6 * 2 = 12$ veces, debido a que el hexágono puede comenzar en cualquier vértice y puede ser recorrido en cualquier dirección. Esto da $\frac{6!}{12} = 60$ hexagonos. Para un total de $10 + 60 = 70$ posibilidades. En el caso complementario $n = 3$ da 70 más. El total es, por lo tanto, $15 + 15 + 70 + 70 = 170$.

Soluciones batería de problemas actividad álgebra

1. Para números reales x y y, se define $x♠y = (x + y)(x - y)$. ¿Cuál es el valor de $3♠(4♠5)$?[81]

Solución
Si $4♠5 = (4 + 5)(4 - 5) = -9$, entonces se tiene que
$3♠(4♠5) = 3♠(-9) = \big(3 + (-9)\big)\big(3 - (-9)\big) = (-6)(12) = -72$

2. Las ecuaciones $2x + 7 = 3$ y $bx - 10 = -2$ tienen la misma solución x. ¿Cuál es el valor de b?[82]

Solución
Dado que $2x + 7 = 3$ se tiene $x = -2$. Por tanto:
$$-2 = bx - 10 = -2b - 10$$
Entonces
$$2b = -8, \text{ y } b = -4.$$

[81] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2010, página 21 – problema 2.
[82] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2005, página 15 – problema 3.
[83] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2009, página 16 – problema 7.

3. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$?[83]

Solución

Si $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$, se debe tener que $x = 0$, $x = 4$ ó $(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(x - 2) = 0$, y de esta última se deduce que $x = 1$ ó $x = 2$. Por lo tanto los posibles valores de x son 0, 1, 2 y 4.

4. Si -3 es una raíz del polinomio $-3x^3 - 9x^2 + kx + 12$, halle las otras dos raíces de este polinomio.

Solución.

Sustituyendo $x = -3$ en $-3x^3 - 9x^2 + kx + 12$, tenemos $81 - 81 - 3k + 12 = 0$, entonces $k = 4$ y el polinomio es $-3x^3 - 9x^2 + 4x + 12$. Al dividirlo entre $x + 3$ nos queda $-3x^2 + 4$, es decir $-3x^3 - 9x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(-3x^2 + 4)$, en consecuencia las otras dos raíces son las soluciones de la ecuación $-3x^2 + 4 = 0$, o bien $3x^2 - 4 = 0$ y ellas son $\mp\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. Los valores de y que satisfacen las ecuaciones

$$2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \text{ y } 2x + y + 3 = 0,$$

se encuentran solucionando:

a) $y^2 + 14y - 7 = 0$
b) $y^2 + 8y + 1 = 0$
c) $y^2 + 10y - 7 = 0$
d) $y^2 + y - 12 = 0$

Argumente su respuesta[84]

Solución

De la segunda ecuación se tiene $x = \frac{-y-3}{2}$, y reemplazando en la primera ecuación: $2\left(\frac{-y-3}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{-y-3}{2}\right) + 5y + 1 = 0$, de donde la ecuación que se obtiene es $y^2 + 10y - 7 = 0$. Es decir que la respuesta correcta se obtiene solucionando la ecuación de la opción C.

6. Si $4^x = 16^{y+2}$ y $9^{x-9} = 27^y$, calcule la suma de los dígitos de $x - y$.

Solución.

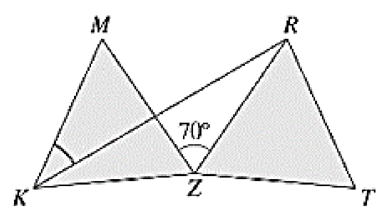
La primera ecuación es equivalente a $2^{2x} = 2^{4(y+2)}$, por tanto, $2x = 4y + 8$. La segunda ecuación es equivalente a $3^{2(x-9)} = 3^{3y}$, por tanto, $2x - 18 = 3y$. Para hallar x e y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$2x - 4y = 8$$
$$2x - 3y = 18.$$

Las soluciones son $x = 24, y = 10$. Por tanto, $x - y = 14$ y la suma de sus de sus dígitos es 5.

Soluciones batería de problemas actividad geometría

1. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$.[85]



Solución

$\angle KZR = 60° + 70° = 130°$, y como KZM es isósceles se tiene $\angle ZKR = \frac{(180°-130°)}{2} = 25°$ y finalmente $\angle RKM = \angle ZKM - \angle ZKR = 60° - 25° = 35°$.

2. Consideremos un triángulo que tenga un lado de longitud 10 y que la altura sobre esa base mide 3. Si a la altura le sumamos 2 ¿cuánto hay que quitarle a la base para que el área del nuevo triángulo sea la mitad del área del triángulo original?

[84] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Superior 2009, página 17 – problema 7.
[85] Tomado de Olimpíada Juvenil de Matemáticas 2013, página 20 – problema 11.

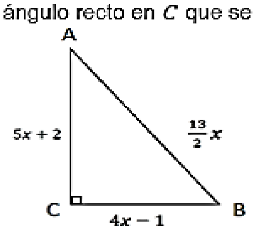
Solución.

El área del triángulo original es $\frac{10x3}{2} = 15$. Ahora construimos un nuevo triángulo cuya altura sea 5 y la base sobre la cual se considera esa altura mida $10 - x$. Entonces el área de este triángulo sería $\frac{5(10-x)}{2}$. Como queremos que el área sea la mitad de la del primer triángulo tenemos la ecuación:

$$\frac{5(10-x)}{2} = \frac{15}{2}$$

Por tanto, $x = 7$.

3. Calcular el área del triángulo rectángulo con ángulo recto en C que se muestra a continuación



Solución

Por teorema de Pitágoras

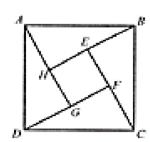
$$(5x+2)^2 + (4x-1)^2 = \left(\frac{13x}{2}\right)^2$$
$$25x^2 + 20x + 4 - 16x^2 - 8x + 1 = \frac{169x^2}{4}$$
$$41x^2 + 12x + 5 = \frac{169x^2}{4}$$
$$164x^2 + 48x + 20 = 169x^2$$
$$-5x^2 + 48x + 20 = 0$$
$$5x^2 - 48x - 20 = 0$$
$$x = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4*(-20)*5}}{2*5} = \frac{48 \pm \sqrt{2.304 + 400}}{10} = \frac{48 \pm 52}{10}$$
$$x_1 = 10$$
$$x_2 = -\frac{2}{5}$$

Como $x > 0$, se toma x_1.

De este modo el área del triángulo es:

$$\Delta ABC = \frac{b*h}{2} = \frac{(4*10*-1)(5*10+2)}{2} = \frac{39*52}{2} = 1.014$$

4. El cuadrado $EFGH$ está dentro del cuadrado $ABCD$ ubicado de tal forma que cada lado de EFGH al ser extendido pasa por uno de los vértices de $ABCD$. Cada lado del cuadrado $ABCD$ mide $\sqrt{50}$, E esta entre B y H, y $BE = 1$. ¿Cuál es el área del cuadrado $EFGH$?[86]

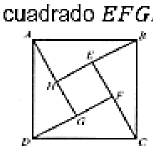


Solución

La simetría de la figura implica que ΔABH, ΔBCE, ΔCDF Y ΔDAG son triángulos rectángulos congruentes. Por tanto

$$BH = CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{50-1} = 7$$

Y $EH = BH - BE = 7 - 1 = 6$. De esta forma el cuadrado $EFGH$ tiene por área $6^2 = 36$.

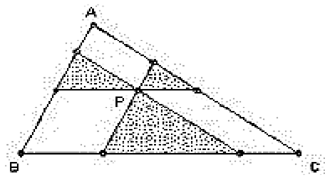


Una solución alternativa puede ser tomar con en la primera solución, $BH = 7$. Ahora nótese que ΔABH, ΔBCE, ΔCDF Y ΔDAG son triángulos rectángulos congruentes, así que

$Área\ (EFGH) = Área\ (ABCD) - 4Área(\Delta ABH) = 50 - 4\left(\frac{1}{2}*1*7\right) = 36$

[86] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2005, página 16 – problema 8.

5. P es un punto dentro del ΔABC. Se trazan segmentos paralelos a los lados del triángulo que pasen por el punto P. Las áreas de los triángulos resultantes con vértice en P tiene áreas de 4, 9 y 49. ¿Cuál es el área del ΔABC?



Solución
Teniendo en cuenta la proporción de los lados entre los triángulos. Tienen proporciones de $2:3:7$.
Ahora BC se compone de 3 segmentos, el lado del triángulo sombreado y otros dos segmentos que son del mismo tamaño que los lados de los triángulos sombreados. Así que si el triángulo sombreado toca a BC y tiene como área 49, entonces $BC = 1 + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$ veces el lado del lado del triángulo adyacente, porque el área del $\Delta ABC = \left(\frac{12}{7}\right)^2 * 49 = 144$.

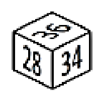
6. Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un hexágono regular. Si el área del hexágono es $2016\ cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo?

Solución.
Llamemos ℓ el lado del hexágono. Entonces su perímetro es 6ℓ. Como el triángulo equilátero tiene el mismo perímetro, entonces su lado es igual a 2ℓ. Si trazamos todas las diagonales del hexágono, vemos que este queda dividido en 6 triángulos equiláteros de lado ℓ. Si ahora trazamos los puntos medios de los lados del triángulo equilátero original y los unimos, este queda dividido en 4 triángulos equiláteros de lado ℓ. Luego el área del triángulo es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de la del hexágono, es decir $\frac{2}{3}2016 = 1334cm^2$.

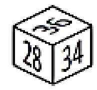
Anexo 6. Soluciones de los problemas planteados en las actividades desarrolladas en el curso solución de problemas matemáticos Universidad Antonio Nariño.

Soluciones prueba de entrada

1. Los números en las seis caras del cubo mostrado en la figura son enteros pares consecutivos. Si las sumas de los números en cada uno de los tres pares de caras opuestas son iguales, encuentre la suma de todos los seis números de este cubo.[87]



Solución
Como los seis números en las caras de los cubos son números enteros consecutivos, las únicas posibilidades son



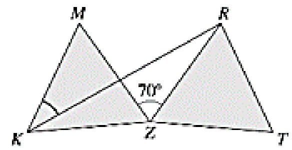
$26, 28, 30, 34, 36$ con suma 186, y $28, 30, 32, 34, 36, 38$ con suma 198.
Si las sumas de las caras opuestas son iguales, el número más grande estará en el lado opuesto del menor y el segundo más grande en el lado opuesto del quinto.
Del diagrama, 28 no es opuesto a 34, por lo tanto el primer caso no es posible. El segundo caso es posible.

2. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?

Solución
En este problema la primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes $(1, 3, 5, 7$ ó $9)$. Una vez seleccionada la primera, la segunda cifra puede ser tomarse de 5 formas distintas $(0, 2, 4, 6, 8)$ y la tercera de modo que sea cualquier digito excepto el escogido en primer lugar y segundo lugar, es decir hay 8 maneras de seleccionar la tercera cifra. Por el principio del producto la respuesta correcta es $5 * 5 * 8 = 200$.

[87] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2012, página 10 – problema 13.

3. Los triángulos KZM y RZT son equiláteros y congruentes, y $\angle RZM = 70°$. Determine la medida del ángulo $\angle RKM$. [88]



Solución

$\angle KZR = 60° + 70° = 130°$, y como KZM es isósceles se tiene $\angle ZKR = \frac{(180°-130°)}{2} = 25°$ y finalmente $\angle RKM = \angle ZKM - \angle ZKR = 60° - 25° = 35°$.

4. Para números reales x y y, se define $x \spadesuit y = (x+y)(x-y)$. ¿Cuál es el valor de $3\spadesuit(4\spadesuit 5)$?[89]

Solución

Si $4\spadesuit 5 = (4+5)(4-5) = -9$, entonces se tiene que
$3\spadesuit(4\spadesuit 5) = 3\spadesuit(-9) = \big(3+(-9)\big)\big(3-(-9)\big) = (-6)(12) = -72$

Soluciones batería de problemas actividad teoría de números

1. Una banda musical está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de las que había en el cuadrado. ¿Cuántos músicos tiene la banda?

Solución.

Llamemos n la cantidad de filas en el cuadrado, entonces hay n^2músicos en la banda. Por otra parte, al agruparse de forma rectangular, hay $n+5$ columnas y m filas, de tal manera que $n^2 = (n+5)m$, por tanto, $n+5$ divide a n^2. Como $\frac{n^2}{n+5} = n - 5 + \frac{25}{n+5}$, al ser $\frac{n^2}{n+5}$ un entero, concluimos que $\frac{25}{n+5}$ también es entero, pero esto solo es posible si $n = 0$ o $n = 20$. Como n es positivo es positivo, entonces $n = 20$ y el número de músicos de la banda es 400.

2. Un número UAN es aquel que es igual al producto de sus divisores propios (divisores positivos excluyendo al 1 y al mismo número).
   - Encuentre la suma de los 15 primeros números UAN.
   - Halle una forma general para encontrarlos.

Solución

Sea $p\ (n)$ el producto de los distintos divisores propios de n. Un número n es UAN en uno de dos casos:

1. Tiene exactamente dos divisores primarios distintos.
   Si dejamos que $n = pq$ donde p, q sean los factores primos, entonces sus divisores propios son p y q y $p\ (n) = p * q = n$.
2. Es el cubo de un número primo.
   Si dejamos $n = p^3$ con p primo, entonces sus divisores propios son p y p^2, y $p(n) = p * p^2 = n$.

Ahora se demuestra que los anteriores casos son únicos posibles. Supongamos que existe otro número UAN que no se encuentra en una de estas dos categorías. Entonces podemos expresarlo en la forma $n = p * q * r$ (con p, q primos y $r > 1$) o $n = p^e$ (con $e \neq 3$).

En el primer caso, basta con señalar que $p(n) \geq (pr) * (qr) = pqr^2 > pqr = n$. En el último caso, entonces $p(n) = 1 * p * p^2 * ** p^e = p^{e(e+1)/2}$. Para $p(n) = n$, necesitamos $p^{e(e+1)/2} = p^e \Rightarrow e^2 + e = 2e \Rightarrow e = 0{,}3$ (el caso e $= 0 \Rightarrow n = 1$ no funciona).

Por lo tanto, al usar la generalización se tiene que los quince primeros números UAN son:

$$2*3 = 6, 2*2^2 = 8, 2*5 = 10, 2*7 = 14, 3*5 = 15, 3*7 = 21, 2*11 = 22, 2*13 = 26, 3*3^3 = 27, 3*11 = 33, 2*17 = 34, 5*7 = 35, 2*19 = 38, 3*13 = 39, 2*23 = 46$$

Sumando los primeros 15 números UAN el resultado es 374.

[88] Tomado de Olimpíada Juvenil de Matemáticas 2013, página 20 – problema 11.

[89] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2010, página 21 – problema 2.

3. ¿Cuántas parejas ordenadas (a, b) cumplen $m.c.m\ (a, b)\ =\ 1.000$?

Solución

Se pueden hallar todas las posibles parejas que cumplen con la condición $m.c.m\ (a, b)\ =\ 1.000$ al tener en cuenta la descomposición en factorial de 1.000.

$$1.000 = 2 * 2 * 2 * 5 * 5 * 5 = 2^3 * 5^3$$

Por tanto todas las posibles parejas que cumplen con la condición $m.c.m\ (a, b)\ =\ 1.000$ deben ser de la forma $(1.000,$ $2^n * 5^m)$ y $(2^n * 5^m, 1.000)$ con $0 \leq n \leq 3$ y $0 \leq m \leq 3$. De este modo se tienen en total 49 parejas que cumplen con la condición dada.

4. Si $m.c.m\ (a, b)\ =\ 1.000$
   $m.c.m\ (b, c)\ =\ 2.000$
   $m.c.m\ (c, a)\ =\ 2.000$
   ¿Qué valores puede tomar c?

Solución

Es evidente que debemos tener en cuenta que $a\ =\ 2^j * 5^k, b = 2^m * 5^n$, y $c = 2^p * 5^q$ para algunos números enteros no negativos j, k, m, n, p, q. Tratando primero con las potencias de 2: de acuerdo con las condiciones dadas se tiene, $m.c.m\ (j, m) = 3\ , m.c.m\ (m, p) =\ m.c.m\ (p, j)\ =\ 4$. Por lo tanto, debemos tener en cuenta que $p\ =\ 4$ y al menos uno de los dos valores m, j es igual a 3.

Ahora, para las potencias de 5: tenemos que $m.c.m\ (k, n) = m.c.m\ (n, q) = m.c.m\ (q, k) =\ 3$. Por lo tanto, al menos dos de los valores de k, n, q deben ser iguales a 3, y el otro puede tomar cualquier valor entre 0 y 3.

Acorde con lo anterior, los valores que puede tomar C son: $16, 80, 400, 2.000$.

5. Cuantas triplas ordenadas (a, b, c) cumplen:

$$m.c.m\ (a, b)\ =\ 1.000$$
$$m.c.m\ (b, c)\ =\ 2.000$$
$$m.c.m\ (c, a)\ =\ 2.000$$

Solución

Es evidente que debemos tener en cuenta que $a\ =\ 2^j * 5^k, b = 2^m * 5^n$, y $c = 2^p * 5^q$ para algunos números enteros no negativos j, k, m, n, p, q. Tratando primero con las potencias de 2: de acuerdo con las condiciones dadas se tiene, $m.c.m\ (j, m) = 3\ , m.c.m\ (m, p) =\ m.c.m\ (p, j)\ =\ 4$. Por lo tanto, debemos tener en cuenta que $p\ =\ 4$ y al menos uno de los dos valores m, j es igual a 3. Esto da 7 posibles triplas:

$$(j, m, p): (0, 3, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 4), (3, 2, 4), (3, 1, 4)\ y\ (3, 0, 4).$$

Ahora, para las potencias de 5: tenemos que $m.c.m\ (k, n) = m.c.m\ (n, q) = m.c.m\ (q, k) =\ 3$. Por lo tanto, al menos dos de los valores de k, n, q deben ser iguales a 3, y el otro puede tomar cualquier valor entre 0 y 3. Esto nos da un total de 10 posibles triplas: $(3, 3, 3)$ y tres posibilidades de cada una de las formas $(3, 3, n)$, $(3, n, 3)$ y $(n, 3, 3)$.

Puesto que los exponentes de 2 y 5 deben satisfacer estas condiciones de forma independiente, tenemos un total de $7 * 10 = 70$ posibles triplas válidas.

6. Hallar todos los pares ordenados (m, n) de números enteros positivos que satisfacen $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n -\ 1$.

Solución.

Son los pares ordenados de la forma $(n + 2, n)$ con $n\ \geq\ 1$ o de manera equivalente los pares $(m, m - 2)$, para $m\ \ \geq 3$. Para ver esto basta observar que $(n + 2)^2 - 3(n + 2) + 1 = n^2 + n + 1$ o de manera equivalente observar que $(m - 2)^2 + (m - 2) - 1 = m^2 - 3m +\ 1$. Las condiciones $n \geq 1$ y $m\ \ \geq 3$, garantizan que siempre tengamos enteros positivos.

7. Definamos una sucesión de números enteros de la siguiente manera: $a_1 = a_2 = 1008$ y para $n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Calcule la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2017}$.

Solución.

Al calcular los primeros valores de la sucesión se observa que ella es periódica de periodo 6, $a_1 = a_2 = 1008$, $a_3 = 0$, $a_4 = a_5 = -1008$, y se vuelve a repetir, así pues tenemos la sucesión

$$1008, 1008, 0, -1008, -1008, 0, 1008, 1008, \ldots$$

Además $2016 = 6\ x\ 336$, $2017 = 6\ x\ 336 + 1$ y la suma de los términos de cada período es igual a 0, así que la suma pedida es 1008.

8. En cada planeta en un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que, si la cantidad de planetas es impar, entonces siempre hay por lo menos un planeta al que nadie observa.

Solución

Quitemos del grupo de planetas aquellos que se observan mutuamente, esto es un número par de planetas y como el total de planetas es impar, queda un número impar de ellos que no se observan mutuamente. Pero si este número es tres o mayor, entonces siempre habrá un par de ellos que se observan mutuamente, pues si tenemos tres planetas A, B y C y como las distancias son distintas dos a dos, entonces, sin pérdida de generalidad tendremos que $d(A, B) < d(A, C)$ y entonces A observa a B. Luego como no se observan mutuamente B observa a C, es decir $d(B, C) < d(B, A)\ =\ d(A, B) < d(A, C)$, pero entonces C observa a A. Por tanto, al quitar todos los que se observan mutuamente, siempre quedará uno solo y éste observará a otro de los planetas eliminados, pero nadie lo observa a él. Además, el análisis de tres planetas nos indica que siempre habrá planetas que se observen mutuamente, así que el análisis es completo.

9. Sea n un entero positivo mayor que 1. Sea k el número de factores primos distintos de n.
   - Demuestre que $n \geq 2^k$.
   - Demuestre que $\log n \geq k \cdot \log 2$.

Solución.
Para la primera parte factorizamos el número n en producto de potencias de sus factores primos distintos, así que si ellos son $p_1, p_2, \ldots, p_k$ queda entonces que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, con cada $\alpha_i \geq 1$.
Entonces $n \geq 2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \geq 2^k$.

Soluciones batería de problemas actividad combinatoria

1. En una circunferencia se marcan 8 puntos. Pruebe que el número de triángulos que se pueden formar con vértices en esos puntos es igual al número de pentágonos que se pueden formar con vértices en esos puntos.

Solución
Si a cada triángulo con vértices en 3 de los 8 puntos se le hace corresponder el pentágono cuyos vértices son los 5 puntos restantes, se tiene una biyección.

2. Un lenguaje tiene alfabeto ABDEFGIJLMNOPRSTU (5 vocales, pero sólo 12 consonantes). Las palabras se forman con tres letras, sin que aparezcan dos vocales o dos consonantes consecutivas. Por ejemplo: PAS, INA, LUL y ONO son palabras, pero TRI, AAN, MIA y UGG no lo son.
   - ¿Cuántas palabras hay en ese lenguaje?

Solución
Hay dos clases de palabras: las del tipo vocal – consonante – vocal y las del tipo consonante – vocal – consonante. Las del primer tipo son $5 * 12 * 5 = 300$, ya que la primera vocal se puede escoger de 5 maneras, la consonante de 12 maneras y la segunda vocal de 5 maneras, del mismo modo las palabras del segundo tipo son $12 * 5 * 12 = 720$. por tanto, en total hay $300 + 720 = 1020$ palabras.

   - Si se escribe un diccionario de ese lenguaje en dos tomos, en orden alfabético y de manera que cada tomo contenga la misma cantidad de palabras, ¿cuál será la primera palabra del segundo tomo?

Solución
Para cada letra hay 60 palabras que comienzan por ella, y como la letra del medio es la L, la respuesta será la palabra 31 que comience con L. Hay 12 palabras que comienzan con LA, 5 con LB y 5 con LD. Entonces LIM es la respuesta correcta.

3. Alrededor de una mesa están sentadas 10 personas. ¿De cuántas maneras se puede escoger una comisión de tres de ellas, con la condición de que no contenga ningún par de vecinos de mesa?

Solución.
Hay $\binom{10}{3} = 120$ maneras de escoger tres personas de las diez que hay en la mesa. De ellas hay 10 formadas por 3 personas consecutivas en la mesa y $10 \, x \, 6 = 60$ formadas por dos personas vecinas y una no vecina. La respuesta es entonces $120 - 70 = 50$.

4. Paola, Laura, Carmen, Daniel, Carlos y Gerardo, tienen WhatsApp. Algunos de ellos, pero no todos, son amigos WhatsApp entre sí, ninguno de ellos tiene un amigo WhatsApp fuera de este grupo. Cada uno de ellos tiene el mismo número de amigos en WhatsApp. ¿De cuantas maneras diferentes puede pasar que este grupo de personas sean amigos WhatsApp?

Solución
Esta situación puede ser modelada por un grafo que tiene estas seis personas como vértices, en el cual dos vertices estan unidos por un arco si y sólo si las personas correspondientes son amigos en WhatsApp. Sea n el número de amigos que tiene cada persona; entonces $1 \leq n \leq 4$. Si $n = 1$, entonces el grafo consiste de tres arcos que no comparten extremos. Hay 5 elecciones para la amiga Paola y entonces 3 maneras de particionar las 4 personas restantes en 2 pares de amigos, por un total de $5 * 3 = 15$ posibilidades. El caso $n = 4$ es complementario, con la no amistad jugando el papel de amistad, por lo tanto hay también 15 posibilidades en este caso.
Para $n = 2$, el grafo debe consistir de ciclos, y las únicas dos posibilidades son dos triángulos (3 – ciclos) y un hexagono (6 – ciclos). En el primer caso hay $\binom{5}{2} = 10$ maneras de elegir dos amigos para Paola y esa elección determina unívocamente los triángulos. En el ultimo caso, cada permutación de los seis vertices determinan un hexágono, pero cada hexagono se cuenta $6 * 2 = 12$ veces, debido a que el hexágono puede comenzar en cualquier vértice y puede ser recorrido en cualquier dirección. Esto da $\frac{6!}{12} = 60$ hexagonos. Para un total de $10 + 60 = 70$ posibilidades. En el caso complementario $n = 3$ da 70 más. El total es, por lo tanto, $15 + 15 + 70 + 70 = 170$.

5. Los alumnos de una clase desean nombrar una comisión de tres de ellos para organizar una fiesta. Si la comisión puede nombrarse de 816 maneras, ¿cuántos alumnos hay en la clase?

Solución

Si hay n alumnos, entonces $\binom{n}{3} = 816$, es decir $n(n-1)(n-2) = 816 * 6 = 4896$. El valor de n se puede hallar por tanteo: $10 * 9 * 8 = 720$ es muy pequeño, $20 * 19 * 18 = 6840$ muy grande, $16 * 15 * 14 = 3360$ pequeño, $18 * 17 * 16 = 4896$ exacto, luego la respuesta es 18.

Una solución más técnica se logra observando que $816 = 2?^4 * 3 * 17$, luego uno de los tres números $n, n-1, n-2$ es divisible entre 17, más aún es igual a 17, pues si fuese 34 o mayor, el producto $n(n-1)(n-2)$ sería mucho más grande que $816 * 6$. Como los otros dos solo pueden tener a 2 y 3 como factores primos, podemos descartar al 15 y al 19 y los tres números son, $16{,}17$ y 18 y entonces $n = 18$.

6. ¿De cuantas maneras se pueden escoger tres elementos diferentes del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, de tal manera que su suma sea un número par?

Solución.

El conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ tiene 10 números pares y 10 números impares. Para que la suma de tres números diferentes sea par, debe ocurrir que o bien los tres son pares o dos son impares y uno par. En el primer caso, la cantidad de escogencias viene dada por el número $\binom{10}{3} = 120$, mientras que dos impares y uno par se pueden escoger de $\binom{10}{2}\binom{10}{1} = 450$ maneras, así pues en total hay $120 + 450 = 570$ maneras distintas de elegir los tres números para que la suma sea par.

Soluciones batería de problemas actividad álgebra

1. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$?[90]

Solución

Si $x(x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0$, se debe tener que $x = 0$, $x = 4$ ó $(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(x - 2) = 0$, y de esta última se deduce que $x = 1$ ó $x = 2$. Por lo tanto los posibles valores de x son 0, 1, 2 y 4.

2. Si -3 es una raíz del polinomio $-3x^3 - 9x^2 + kx + 12$, halle las otras dos raíces de este polinomio.

Solución.

Sustituyendo $x = -3$ en $-3x^3 - 9x^2 + kx + 12$, tenemos $81 - 81 - 3k + 12 = 0$, entonces $k = 4$ y el polinomio es $-3x^3 - 9x^2 + 4x + 12$. Al dividirlo entre $x + 3$ nos queda $-3x^2 + 4$, es decir $-3x^3 - 9x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(-3x^2 + 4)$, en consecuencia las otras dos raíces son las soluciones de la ecuación $-3x^2 + 4 = 0$, o bien $3x^2 - 4 = 0$ y ellas son $\mp\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Si $4^x = 16^{y+2}$ y $9^{x-9} = 27^y$, calcule la suma de los dígitos de $x - y$.

Solución.

La primera ecuación es equivalente a $2^{2x} = 2^{4(y+2)}$, por tanto, $2x = 4y + 8$. La segunda ecuación es equivalente a $3^{2(x-9)} = 3^{3y}$, por tanto, $2x - 18 = 3y$. Para hallar x e y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$2x - 4y = 8$$
$$2x - 3y = 18.$$

Las soluciones son $x = 24$, $y = 10$. Por tanto, $x - y = 14$ y la suma de sus de sus dígitos es 5.

4. Hay dos valores de a para los cuales la ecuación $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ tiene solamente una solución para x. ¿Cuál es la suma de estos dos valores de a?

Solución

De la fórmula para determinar las raíces de la ecuación cuadrática se tiene

$$x = \frac{-(a+8) \pm \sqrt{(a+8)^2 - 4 * 4 * 9}}{2 * 4}$$

La ecuación tiene solución única cuando el discriminante, $(a + 8)^2 - 144$ es cero. Esto implica que $a = -20$ ó $a = 4$, y la suma es igual a -16.

[90] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2009, página 16 – problema 7.

5. Los valores de y que satisfacen las ecuaciones

$$2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \text{ y } 2x + y + 3 = 0$$

se encuentran solucionando:

a) $y^2 + 14y - 7 = 0$
b) $y^2 + 8y + 1 = 0$
c) $y^2 + 10y - 7 = 0$
d) $y^2 + y - 12 = 0$

Argumente su respuesta[91]

Solución

De la segunda ecuación se tiene $x = \frac{-y-3}{2}$, y reemplazando en la primera ecuación: $2\left(\frac{-y-3}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{-y-3}{2}\right) + 5y + 1 = 0$, de donde la ecuación que se obtiene es $y^2 + 10y - 7 = 0$. Es decir que la respuesta correcta se obtiene solucionando la ecuación de la opción C.

6. Ricardo escribe el polinomio $2x^2 + 3x + 2$ en un papel y calcula sus dos raíces. Rafael reemplaza la x en el polinomio $2x^2 - x + 1$ por la primera raíz que le dice Ricardo y escribe el resultado. Luego hace lo mismo con la segunda raíz. ¿Cuánto la suma de los números escritos por Rafael?[92]

Solución

Si las raíces del primer polinomio son r_1 y r_2, las relaciones de Vieta indican

$$r_1 + r_2 = -\frac{3}{2}$$
$$r_1 * r_2 = 1$$

Por lo cual, el resultado de la suma de los números de Ricardo es:

$$2{r_1}^2 - r_1 + 1 + 2{r_2}^2 - r_2 + 1 = 2({r_1}^2 + {r_2}^2) - (r_1 + r_2) + 2$$
$$= 2(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 * r_2 - (r_1 + r_2) + 2$$
$$= 2\frac{9}{4} - 4 + \frac{3}{2} + 2$$
$$= 4$$

7. Si $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$, y $a \neq c$, demuestre que $a + b + c + d = 0$.

Solución.

De $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ tenemos que $(a+b)(d+a) = (b+c)(c+d)$. Multiplicando y simplificando tenemos que $(a+c)(b+d) = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$. Como $a \neq c$, entonces $c - a \neq 0$ y entonces $c + a = -(b+d)$, o bien, $a + b + c + d = 0$.

8. Si las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, son r y s, demuestre que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + ac = 0$ son $ar - b$ y $as - b$.

Solución.

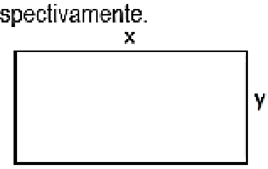
Por Vieta, $r + s = \frac{b}{a}$ y $rs = \frac{c}{a}$. Por otra parte, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + ac = 0$ son los números u y v, tales que $u + v = -b$ y $uv = ac$. Pero $(ar - b) + (as - b) = -b$ y $(ar - b)(as - b) = ac$. Por tanto, efectivamente las raíces son $ar - b$ y $as - b$.

Soluciones batería de problemas actividad geometría

1. Un terreno en forma rectangular cuyas longitudes de lado son enteras, tiene un perímetro de 3996 metros. Si el campo es dividido en 1998 partes iguales, el área de cada parte es entera. Determinar las dimensiones del terreno.

Solución

Sean x y y la base y la altura del rectángulo respectivamente.



Estos cumplen con $2x + 2y = 3.996$, $x + y = 1.998$ y $x * y = 1998k$.
Donde k representa el área de parte.

[91] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Superior 2009, página 17 – problema 7.
[92] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Superior 2012, página 16 – problema 5.

Es necesario encontrar dos números que sumen 1.998 y que al multiplicarlos generen un múltiplo de este.
La descomposición factorial de 1.998 es:

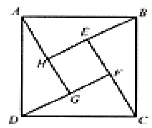
$$1.998 = 2 * 3 * 3 * 3 * 37$$

De tal modo que los valores de x y y deberían tener al menos uno de ellos como factores. A estos números por tanto los números que cumplen con esta condición son 666 y 1.337 como se muestra a continuación.

$$666 = 2 * 3 * 3 * 37$$
$$1.332 = 2 * 2 * 3 * 3 * 37$$

De este modo se cumple con las condiciones del problema al tener $666 + 1.332 = 1.998$.

2. El cuadrado $EFGH$ está dentro del cuadrado $ABCD$ ubicado de tal forma que cada lado de EFGH al ser extendido pasa por uno de los vértices de $ABCD$. Cada lado del cuadrado $ABCD$ mide $\sqrt{50}$, E esta entre B y H, y $BE = 1$. ¿Cuál es el área del cuadrado $EFGH$?[93]

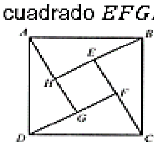


Solución

La simetría de la figura implica que ΔABH, ΔBCE, ΔCDF Y ΔDAG son triángulos rectángulos congruentes. Por tanto

$$BH = CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{50 - 1} = 7$$

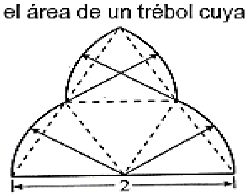
Y $EH = BH - BE = 7 - 1 = 6$. De esta forma el cuadrado $EFGH$ tiene por área $6^2 = 36$.



Una solución alternativa puede ser tomar con en la primera solución, $BH = 7$. Ahora nótese que ΔABH, ΔBCE, ΔCDF y ΔDAG son triángulos rectángulos congruentes, así que

$$\acute{A}rea\ (EFGH) = \acute{A}rea\ (ABCD) - 4\acute{A}rea(\Delta ABH) = 50 - 4\left(\frac{1}{2} * 1 * 7\right) = 36$$

3. La gráfica muestra la figura denominada trébol y se construye dibujando sectores circulares alrededor de los lados de triángulos equiláteros congruentes. ¿Cuál es el área de un trébol cuya base horizontal mide 2cm?[94]

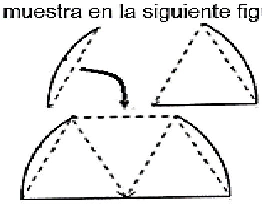


Solución

El trébol se construye con 4 triángulos equiláteros y cuatro segmentos circulares como se muestra en la figura. Estos pueden ser combinados para formar cuatro sectores circulares de $60°$. Dado que el radio del círculo es 1, el área del trébol es

$$\frac{4}{6}(\pi * 1^2) = \frac{2}{3}\pi$$

Una posible alternativa de solución es la que se muestra en la siguiente figura



Donde uno de los sectores de la partición superior del trébol es movida encima del triángulo equilátero medio en la base, esto muestra que el área del trébol es $\frac{4}{3}$ del área del semicírculo de radio 1, esto es, $\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\pi = \frac{2}{3}\pi$.

4. Cada lado de un triángulo ABC mide ℓ cm. Sea D el pie de la perpendicular desde A hasta BC. Sea E un punto en AD tal que $AE = \frac{1}{3}AD$. Calcule el área del cuadrilátero $[ABEC]$.

Solución.

La altura AD del triángulo equilátero ABC mide $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Entonces el área del triángulo BEC es igual a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{6}$. Por tanto,
$[ABEC] = [ABC] - [BEC] = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{6} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{12}$

[93] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2005, página 16 – problema 8.
[94] Tomado de Olimpíadas de Matemáticas Nivel Intermedio 2005, página 17 – problema 12.

5. En el triángulo ABC se toman un punto D en el lado AB y un punto E en el lado AC, de modo que el segmento DE divide el triángulo ABC en dos partes de igual área (el triángulo ADE y el cuadrilátero $BCED$. Si $AD = 3$ cm, $DB = 2$ cm y $AC = 6$ cm, ¿cuál es la medida del segmento AE?

Solución.

Los triángulos ABC y ADC con bases AB y AD tienen la misma altura h desde el vértice C, luego sus áreas son $[ABC] = \frac{AB*h}{2} = \frac{5h}{2}$ y $[ADC] = \frac{AD*h}{2} = \frac{3h}{2}$, de donde $\frac{[ABC]}{[ADC]} = \frac{5}{3}$.

Análogamente $\frac{[AED]}{[ADC]} = \frac{AE}{AC}\,\frac{AE}{6}$. Por tanto, $\frac{[AED]}{[ABC]} = \frac{AE}{10}$. Pero como el triángulo original quedó dividido en dos partes de igual área, una de ellas el triángulo AED, entonces $\frac{[AED]}{[ABC]} = \frac{1}{2}$

En consecuencia $\frac{AE}{10} = \frac{1}{2}$ de donde $AE = 5$ cm.

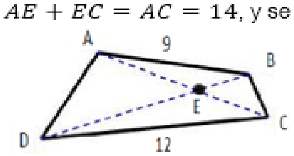
6. En el cuadrilátero convexo $ABCD$ es tal que $AB = 9$ y $CD = 12$. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en E, $AC = 14$, y el ΔAED y el ΔBEC tienen áreas iguales. ¿Cuál es la longitud de AE?

Solución

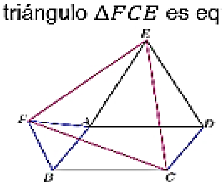
Ya que el ΔAED y el ΔBEC tiene áreas iguales, también las tienen el ΔACD y el ΔBCD. El lado $\overline{CD}$ es común al ΔACD y el ΔBCD, de donde las alturas desde A y B a $\overline{CD}$ tienen la misma longitud. Por lo tanto $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, y se sigue que el ΔABE es semejante al ΔCDE con razón de semejanza

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Sean $AE = 3x$ y $EC = 4x$. Entonces $7x = AE + EC = AC = 14$, y se sigue que $x = 2$, y $AE = 3x = 6$.



7. En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros ΔABF y ΔADE, respectivamente. Demuestre que el triángulo ΔFCE es equilátero.[95]

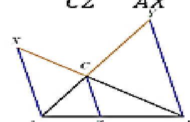


Solución

De acuerdo con la gráfica anterior se tiene que $\angle FAE + 120° + \angle BAD = 360°$, entonces $\angle FAE = 240° - \angle BAD = 180° - \angle BAD + 60°$. Como $\angle FBC = 180° - \angle BAD + 60°$, entonces $\angle FAE = \angle FBC$. Además, tenemos que $FA = FB$ y $AE = BC$, esto implica que el ΔFAE es congruente al triángulo ΔFBC y por lo tanto $FE = FC$. De manera análoga podemos demostrar que $EC = FE$ y así se concluye que el triángulo ΔFEC es equilátero.

8. Sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo ΔABC. Una línea a través de A paralela a CZ interseca a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Demuestre que

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$$[96]



Solución

Se reescribe la expresión que se quiere demostrar como

$$1 = \frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY}$$

Se tiene que ΔBCZ es semejante a ΔBXA, de esto se obtiene

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}$$

De manera análoga, de la semejanza de los triángulos ΔACZ y ΔAYB, tenemos que

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}$$

Sumando estas dos expresiones que se han obtenido se tiene que

$$\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ}{AB} + \frac{AZ}{AB} = \frac{AZ + ZB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

---

[95] Tomado de Geometría de Matemáticas 2008, p. 19 problema 1.4.2.

[96] Tomado de Geometría de Matemáticas 2008, p. 19 problema 1.4.3.