REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN A TRAVÉS DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Alejandra Tafur

Bogotá D.C.

2014

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN A TRAVÉS DE PROBLEMA NO RUTINARIOS EN LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Autor: Lic. Alejandra Tafur

Directores de tesis:

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez (Ph.D.)

Mary Falk de Losada (Ph.D.)

Bogotá D.C.

2014

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre 11 de 2014

AGRADECIMIENTOS

Al compartir mi alegría por este logro alcanzado con quienes han formado parte de mi entorno laboral y de mi proceso de profesionalización, me es grato y satisfactorio expresarles cuan importantes han sido en cada uno de mis momentos que han enriquecido mi vida social y profesional.

Es para mí de manera particular, de alto sentido de gratitud reconocer la importancia y significado dejado por la Universidad Antonio Nariño y todo lo bueno que de ella recibí y por ende de sus excelentes maestros, quienes de manera muy altruista entregaron su sabiduría de forma decidida llenándome de tantos conocimientos y experiencias imperecederas, que tal vez sean las más importantes vivencias que marquen huellas imborrables en esta honrosa carrera profesional.

A la doctora María Falk de Losada, su calidez, sabiduría incomparable y aún más, su calidad humana, fueron determinantes en mi proceso; su penetrante y convincente energía y positivismo en la superación de nuestras dificultades me llevan a expresarle mi infinita gratitud y entrañable aprecio por su grandeza y sutil forma de entendernos como agentes en formación, y su ilimitada sapiencia nos dio el tinte particular para robarle parte de su ejemplo y formas particulares de ser. De igual manera, al Doctor Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, su ímpetu, dedicación, conocimientos y sentido humanista, han convertido su realidad profesional en una sabia experiencia contagiante, pues quiero manifestarle, que en mi corazón solo hay espacio para transcribirle todas las formas de gratitud y aprecio por su grandeza y dedicación en favor de mi formación, lo que ha inundado de gratitud a quienes

tuvimos la fortuna de recibir sus excelentes y formativos consejos, dándome aún más esas apropiadas herramientas para mi eficiente desempeño laboral.

A la Lic. Gloria Inés Padilla Cuesta, Rectora de mi Institución, es muy grande mi aprecio y especial gratitud, pues sin su ayuda e incondicional colaboración, al permitirme los espacios y herramientas necesarias en la complementación de mi proceso formativo, habría sido imposible alcanzar este importante logro en mi vida. Ruego a Dios, que en su Divina compensación le dé todas las bendiciones, fortaleciendo ese inmenso amor que hay en su corazón y que nos irradia a todos.

A mis amigas, con especial aprecio, expreso mi alto sentimiento de gratitud, pues su complicidad y acompañamiento en cada uno de mis momentos, fueron transmisoras de importantes impulsos y fuerzas en la superación de obstáculos y proponentes consejeras en muchas de mis decisiones, y que a la postre, se convirtieron en copartícipes de muchos de mis aciertos. Son ellas además corresponsables de mi éxito alcanzado, por lo cual solo puedo insistirles en mis fervorosos agradecimientos.

A mis estudiantes de manera particular un fraterno agradecimiento, pues siendo el eje fundamental de mi desempeño laboral, me han permitido entregar gran parte de mis experiencias formativas, para contribuir en su integralidad y construcción de su proyecto de vida. Son ellos mi fértil terreno, que me permiten cultivar esa semillita que les podría servir de base esencial al encuentro de su realización personal.

Me llevo en lo más profundo de mi corazón, de todos ustedes el amor, su ayuda, compañía y lindas experiencias, que han engrandecido mi vida y le han dado el más alto sentido a mi existencia y que se irán conmigo para siempre, pues es por ustedes que mis aspiraciones se hacen realidad.

DEDICATORIA

A quienes de manera constante, decidida y desinteresada, dieron parte de su tiempo, esfuerzos y buenos deseos, como fuentes de apoyo, inspiración y seguridad en favor de sacar adelante mis objetivos y al encuentro del éxito en mi profesionalización, dedico este importantísimo logro que me llena de orgullo y grandes satisfacciones. A ellos… Dios, mis padres, hermanos y mi novio, por entregarme esa particular fuerza e impulso incondicional durante todo este proceso que me permitió culminar exitosamente mis estudios de posgrado.

SÍNTESIS

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente en la construcción del concepto de volumen, es limitado el reconocimiento de las propiedades de las figuras planas, es escaso el dominio de las propiedades de los sólidos geométricos elementales y son insuficientes las habilidades requeridas para la manipulación, la representación y la visualización. La construcción de este concepto por su carácter abstracto, constituye todavía en la escuela, barreras en el aprendizaje. Esta investigación se dirige a favorecer la construcción de significado robusto del concepto general de volumen y el de volumen de cuerpos geométricos especiales en los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la paz mediante la elaboración de actividades conformadas por problemas no rutinarios. En el proceso de resolución de estos problemas se utiliza la metodología de Polya (1945) y la manipulación geométrica, la representación geométrica espacial y la visualización como herramienta didáctica. A través de la implementación de las actividades se favorece, la motivación, la participación, el compromiso y el interés de los estudiantes y se logra la construcción de significado robusto del concepto de volumen.

ABSTRACT

In the teaching-learning process of the geometry of space, specifically in the construction of the concept of volume, the recognition of the properties of plane figures is limited, there is little mastering of the properties of elementary geometric solids and skills required for its handling, representation and visualization are insufficient. Due the abstract nature of the concept, its construction is still a barrier for learning at school. This research is aimed at promoting the construction of robust meaning of the general concept of volume and of the concept of volume of special geometric structures through activities made of non-routine problems, in students of eighth-grade belonging to the school Nuestra Señora de la Paz. In the process of solving these problems the methodology of Polya (1945) is used, and the geometric manipulation, geometric spatial representation and visualization is used as a teaching tool. Through the implementation of these activities, the motivation, participation, commitment and interest of students is encouraged and the building of robust meaning of the concept of volume is achieved.

ÍNDICE Pág.

INTRODUCCIÓN

La formación de las nuevas generaciones es una tarea primordial del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, con el fin de mejorar la calidad de la educación, que por esta época es tema que a todos concierne. Se trata de lograr espacios propicios para fomentar y fortalecer en los jóvenes las capacidades y aptitudes necesarias para afrontar y contribuir al mejoramiento del mundo moderno en que se vive.

Significa entonces, que es en los docentes en quienes recae la mayor responsabilidad en esta formación. También les corresponde la perspectiva de contribuir al cumplimiento de estos fines, mediante la incorporación de conocimientos científicos, que propicien el desarrollo del pensamiento del escolar y de su independencia cognoscitiva.

Para lograr responsabilidad en el aprendizaje de los estudiantes, se hace necesario contar con un proceso de enseñanza-aprendizaje que tenga una elevada eficiencia en la formación de conocimientos. En este proceso se debe propiciar, que sean capaces de aplicar esos conocimientos en la solución de problemas escolares y de la vida cotidiana.

A pesar de los esfuerzos que ha realizado el país por cada región, persisten todavía deficiencias académicas en los estudiantes en algunas asignaturas de los currículos, las que han sido objetos de investigaciones. Una de las asignaturas que presenta las mayores dificultades es la matemática, específicamente el área de la geometría del espacio.

El conocimiento geométrico está presente en las diferentes esferas del hombre en la sociedad y en la naturaleza, por tal motivo juega un papel importante en la transformación de la realidad. Bajo estas condiciones es importante lograr un aprendizaje robusto y para la vida de los contenidos de la geometría del espacio desde los primeros grados y darle continuidad en el nivel secundario.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, el trabajo de la construcción del concepto de volumen es importante para lograr la transformación de esa realidad. La construcción de este concepto por su carácter abstracto, constituye todavía en las instituciones, una barrera en el aprendizaje.

En las Instituciones Educativas, la aprehensión de la geometría del espacio, específicamente el proceso de construcción del concepto de volumen, contribuye a que los estudiantes desarrollen su pensamiento geométrico. Este proceso también le permite que se preparen para mantener una actitud comprometida y responsable frente a las diversas problemáticas de la vida.

La enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio ha ocupado a los investigadores, tanto nacional como internacionalmente, en diferentes reuniones y congresos. Esta temática y en particular la construcción del concepto de volumen han sido abordadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), en los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros, es tema central de discusión.

Diversas son las investigaciones y trabajos realizados sobre esta temática en los diferentes niveles educacionales, en los que se revela que las mayores dificultades se presentan en la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos. En esta temática se destacan Flores (1991), Gutiérrez (1992), Rizo y Campistrous (1980-2007), López, (2005), Abrate et al. (2006), Kohanová, (2007), Cantoral (2008), Rojas (2009); Steinwandel, y Ludwig, (2011), y Villarroel, y Sgreccia, (2011).

Estos autores en sus trabajos reflejan que estas dificultades están dadas por la insuficiente comprensión de los conceptos geométricos (especialmente espaciales) y se manifiestan en la poca capacidad que tienen los estudiantes para transferir los conocimientos de la geometría plana hacia el espacio tridimensional y en su limitada habilidad para representar las formas espaciales en el plano. Como resultado de sus estudios proponen modelos didácticos, estrategias, metodologías, entre otras formas, para perfeccionar la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, donde se favorece la construcción del concepto de volumen.

Para tratar de mejorar esta situación, las instituciones han vuelto a incluir la geometría en sus currículos por ser ésta una herramienta en la enseñanza de las matemáticas y por sus grandes aplicaciones en otras ciencias. Aún se hace limitadamente, pues tan solo se han inmerso algunas temáticas que son abordadas en el último periodo del año lectivo o en escasamente una hora, que algunos colegios le han asignado a la semana.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la escuela actual, y específicamente la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos, no ofrecen a los estudiantes las herramientas para indagar, analizar, explorar y realizar conjeturas sobre la construcción de dicho concepto. Esta realidad está sustentada en los resultados que obtiene la investigadora con la aplicación de métodos empíricos como la observación científica, la encuesta (ver anexo 1) y la experiencia de 9 años de trabajo, donde se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Limitado reconocimiento en las propiedades de las figuras planas, necesarias para la construcción del concepto de volumen.
- Escaso reconocimiento de las propiedades de los sólidos geométricos elementales.
- Los estudiantes carecen de las habilidades de representación, visualización e imaginación espacial, necesarias para la construcción del concepto de volumen.
- El nuevo conocimiento sobre el concepto de volumen de cuerpo no se introduce a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida relacionada con la temática.

Precisamente la respuesta a esta problemática constituye la esencia de esta investigación, en la que, se plantea como **problema de investigación**: ¿cómo favorecer la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpos geométricos en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz?

En busca de dar solución al problema se toma como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la Educación Básica Secundaria.

Lo que lleva a encaminar el **objetivo general de la investigación** hacia el favorecimiento de la construcción de significado robusto del concepto general de volumen y el de volumen de cuerpos geométricos especiales en los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la paz mediante la elaboración de actividades conformadas por problemas no rutinarios.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza-aprendizaje diseñado para lograr la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica.

En aras de lograr resolver el problema planteado, se declara como **hipótesis de la investigación**: las actividades conformadas por problemas no rutinarios contextualizados, basados en la manipulación geométrica, la representación geométrica espacial y la visualización como herramienta didáctica, mejoran el proceso de enseñanza-aprendizaje con respecto de la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpos geométricos, en los estudiantes de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz.

Buscando dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis, fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica Secundaria.
2. Analizar los presupuestos psicopedagógicos y matemáticos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio,

específicamente de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica Secundaria.

3. Elaborar problemas no rutinarios para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos, en los estudiantes de la Institución Educativa colegio nuestra señora de la paz.
4. Valorar la viabilidad de la propuesta, mediante su aplicación en la práctica escolar.

Metodología de la investigación

Para llegar a la solución exitosa de la investigación, se deben combinar métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. En el trabajo se utilizarán los siguientes métodos teóricos:

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en particular de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica.

Análisis-Síntesis: presente en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del diagnóstico relacionados con la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en particular de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos, lo que permite interpretar y sintetizar los resultados, y elaborar las conclusiones y generalizaciones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La **observación científica**: para obtener información del nivel de conocimientos que poseen los estudiantes de la Educación Básica sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, en particular de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos.

Encuesta: busca obtener información de profesores y estudiantes de la Institución para conocer las dificultades acerca de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica.

Los **métodos Estadísticos Matemáticos** se utilizan para el procesamiento de la información obtenida a través de los métodos y técnicas del nivel empírico en diferentes momentos de la investigación.

Se toma como **población** los 60 estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz y la **muestra** 20 estudiantes del grupo 1, del curso escolar 2014-2015.

La **significación práctica** del presente trabajo viene dada en actividades conformadas por problemas no rutinarios, sustentados en la visualización, la manipulación y la representación geométrica espacial como herramientas didácticas para favorecer la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpos geométricos, que propicien el desarrollo de las competiciones matemáticas, en los estudiantes de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y 6 anexos. En el primer capítulo se aborda el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio y de la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos. En el segundo capítulo se asume el marco teórico de la tesis; en el capítulo 3 se proponen las actividades conformadas por problemas no rutinarios para favorecer la construcción del concepto de volumen y en el capítulo 4 se valoran los resultados.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

El limitado interés y motivación hacia el estudio de la geometría del espacio, está entre las dificultades que presenta este proceso en la escuela, a pesar de ser el contenido geométrico uno de los que más aplicaciones tienen fuera del ámbito de la matemática. En este capítulo se hace referencia a las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio y acerca del proceso de construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica en diferentes países del mundo. También se hace un breve análisis de estas temáticas en la escuela colombiana.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio en la Educación Básica

Entre 1959 y mediados de la década de los setenta en varios países del mundo, la enseñanza de la geometría del espacio se ve afectada por la tendencia denominada "Matemática Moderna", que enfatiza la algebrización por encima de la geometría. En esta etapa se limita el trabajo con la geometría elemental, particularmente la intuición espacial y la visualización.

A continuación se realiza un estudio de las investigaciones más representativas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en la Educación Básica, por algunos países y escuelas.

Gutiérrez et al. (1991) utilizaron un instrumento de evaluación como una prueba de geometría espacial que evaluó los niveles de van Hiele en los estudiantes, en tareas de geometría en tres dimensiones. Llegaron a la conclusión que la teoría de los Van Hiele debe ser adaptada a la complejidad del proceso de razonamiento humano, porque el individuo no tiene un proceso de pensamiento simple y lineal. Criterios estos compartidos por la autora de esta tesis.

Gutiérrez (1992), concede un rol importante a la manipulación física, a las operaciones con imágenes mentales y a la visualización en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. Este autor plantea que el primer intento que se conoce de aplicar los niveles vanhieleanos en la geometría del espacio aparece con Lunkenbein (1983) y Hoffer (1991), estos trabajos aplican el modelo pero de forma parcial, pues solo se refieren a los tres niveles inferiores.

En el documento de discusión para un estudio ICMI (1995), se plantea que la geometría tridimensional casi ha desaparecido o ha sido confinada a un rol marginal en el currículo de la mayoría de los países. Esto limitó el aprendizaje de la geometría del espacio en los estudiantes y por ende la intuición y visualización.

Gutiérrez (1998), presenta algunas reflexiones sobre la importancia de utilizar representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales adecuadas a los estudiantes de diferentes edades. Se analizan diversas formas usuales de representación plana de objetos de 3 dimensiones y, donde toma como base los resultados de algunas investigaciones, se describen varias dificultades observadas cuando los estudiantes dibujan o interpretan representaciones planas de sólidos, incluyéndose algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes.

En su estudio Gutiérrez (1998), hace sugerencias a los profesores acerca de la capacidad de los estudiantes de diversos grados para utilizar las distintas representaciones y plantea algunos ejercicios que pueden proponerse en aras de mejorar la habilidad para dibujar y leer representaciones planas de cuerpos espaciales. Cuestiones estas que la autora de esta tesis considera necesaria en el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente para la construcción de significado robusto del concepto de volumen.

Fernández (2005) plantea que en España *"se ha reducido la docencia de la geometría desde el nivel de secundaria. Eso complica la situación en muchas materias que se imparten en la universidad, pero (lo que es grave) es que los alumnos apenas pueden visualizar el espacio de dimensión 3, por supuesto, no saben en general resolver problemas elementales (para un alumno universitario) de Geometría Analítica, por ejemplo, trazar la perpendicular de un punto a un plano, o la distancia entre dos puntos. Aquí, se intenta ir más a una enseñanza de mucho ordenador y hacia la Matemática aplicada"*[1].

López (2005) analiza dos problemática en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio en México, las cuales están dadas por el bajo rendimiento escolar en los temas de geometría plana y la falta de materiales didácticos para apoyar a sus respectivos libros de texto en la enseñanza de dichos temas.

Según Abrate et al. (2006) plantea que algunas de las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio están dadas en que:

- Las características de las actividades de geometría que proponen los textos de Matemática que más frecuentemente utilizan los profesores de las escuelas, no

[1] Fernández, M. (2005). Texto inédito. Universidad del País Vasco. Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas. Bilbao.

necesariamente propician la adquisición de todas las habilidades geométricas espaciales establecidas en los estándares curriculares.

- El aprendizaje de la geometría del espacio se ha basado, casi exclusivamente, en un estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas.
- Los docentes desplazan paulatinamente los contenidos relativos a la geometría del espacio hacia las últimas unidades didácticas de su planificación escolar, pues en ocasiones se prescinde de su tratamiento en muchas escuelas.

La autora de esta tesis coincide con los criterios planteados y considera que el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría se afectó en la mayoría de los países del mundo producto a lo planteado por Abrate et al. (2006).

Kohanová (2007)[2] en el CERME 2007, presenta brevemente la investigación que se realizó con el fin de comprender mejor la percepción del espacio y de los objetos de los estudiantes no videntes en la educación secundaria. Tres estudiantes videntes y cuatro no videntes participaron en el experimento y los resultados de los análisis cualitativos ofrecen algunas propuestas e ideas de cómo mejorar la enseñanza de la geometría del espacio a los alumnos invidentes y deficientes visuales. Su propuesta se sustenta en el modelo de Van Hiele.

Gaudio y Gaudio (2007), con el fin de que el estudiante logre desarrollar habilidades en la construcción geométrica en tercera dimensión, consideran de trascendental relevancia, que las instituciones educativas revisen los procesos conceptuales de

[2] Department of Algebra, Geometry and Didactics of Mathematics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University, Bratislava, Slovak Republic

enseñanza. Es importante que a dichos estudiantes se les formulen aquellos conceptos estrictamente necesarios y con ello se alcance un conocimiento con significado y sentido, que les permita construir sus propios saberes pertinentes y establecer relaciones con su entorno.

Estos autores consideran determinar lo prioritario y trascendental del juego como mayor sensibilizador del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde se hace evidente la visualización, manipulación y reconocimiento de los cuerpos geométricos. Reconocen que el fortalecimiento de dichos conceptos geométricos exige iniciar trabajarlos desde el plano, en el que se hace práctico y efectivo el juego del tangram y el plegado de papel.

Se aduce que *"… se trata de presentar situaciones atractivas desde lo lúdico, cuyos aspectos didácticos promuevan la explicación y justificación de las soluciones obtenidas, para que desde la reflexión de lo trabajado, el conjunto de conceptos que se involucren sean significativos que, lejos de trabajar con contenidos aislados, tiendan a la construcción de redes conceptuales que se afirmen y se sostengan interrelacionadamente y partan de conocimientos previamente adquiridos, ya sea para su ampliación o ruptura"*[3]. Criterios estos que son compartidos por la autora de esta tesis y serán de gran utilidad en la propuesta de este trabajo.

Rojas (2009), plantea algunas dificultades que perduran en el aprendizaje de la geometría del espacio, que parten de no estimular las habilidades requeridas para la visualización, la representación y la imaginación espacial; del pobre reconocimiento

[3] Gaudio, P. y Gaudio, R. (oct, 2007). Geometría y espacio – Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales- 18-19. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/gaudio2.pdf.

de las propiedades de figuras geométricas; del empleo de métodos que acentúan la actividad reproductiva de los estudiantes. También hace referencia al poco aprovechamiento y falta de creatividad en la utilización de los medios de enseñanza, y de la poca aplicación de los conocimientos geométricos a la solución de problemas geométricos espaciales vinculados a la vida.

Este autor aduce, que entre otras deficiencias se tiene el pobre desarrollo de habilidades para representar cuerpos geométricos en el plano y para la transferencia del plano al espacio y la temática está confinada a lo último en los currículos. Criterios estos que son compartidos por la autora de esta tesis y algunos fueron comprobados en la revisión de la literatura y en los resultados de los instrumentos aplicados.

Guillén (2010), en su investigación dedica su atención a la geometría espacial. Por un lado, muestra el origen y desarrollo de la geometría de los sólidos, donde precisa la observación en el proceso enseñanza-aprendizaje de los procesos matemáticos y por el otro lado, considera la representación de los sólidos y el problema de la visualización, de gran interés para los investigadores en educación matemática.

Este autor plantea que viendo la realidad actual, del limitado ejercicio del estudio de esta rama en los diferentes niveles escolares, se puede aducir que este se encuentra en la escasa preparación que tienen los docentes para la enseñanza de la geometría de los sólidos; la mayoría no se siente debidamente capacitados para orientar los procesos pertinentes a la correcta experimentación de los diferentes mecanismos de su enseñanza-aprendizaje. Además los libros no ofrecen los cambios de enfoques sugeridos en algunos currículos.

También propone fortalecer la formación estructural en los docentes de tal manera que alcancen una mayor aplicación de la creatividad y habilidad en la resolución de problemas. La autora de esta tesis es del criterio que las instituciones educativas no reflejan un mayor interés al momento de exigir una más amplia programación al respecto, y aún más, no dedican un mayor tiempo para desarrollar su programación. Es necesario un mayor aporte de las instituciones en cuanto ampliar la intensidad horaria y mejorar la dotación en las herramientas pedagógicas con lo cual facilitaría aún más la enseñanza aprendizaje en esta área.

Steinwandel y Ludwig (2011) de la University of Education Weingarten, Alemania, en el Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7), y en el ICME 12 de Korea, en su trabajo se presenta el estado actual de un estudio científico que investiga el impacto de los tres entornos de trabajo diferentes (ejemplo, el modelo real o animación interactiva por computadora) en el reconocimiento y tratamiento de las estructuras espaciales. Estos autores plantean que la literatura actual no da una imagen coherente de la cuestión. Esta incoherencia puede tener varias causas, por ejemplo, las habilidades espaciales, geométricas y aritméticas de los 242 estudiantes de grado 5-9 (10 años a 15 años de edad, estudiantes) a los cuales se le aplicó el estudio.

Villarroel y Sgreccia (2011) de la Universidad Nacional de Rosario, en la revista números publican un trabajo que propone identificar y caracterizar los materiales didácticos concretos, que pueden utilizarse en la enseñanza de los contenidos geométricos en primer año de la Educación Secundaria, y donde les interesa reconocer las habilidades geométricas que tales materiales permiten desarrollar al ser aplicados. La investigación se fundamenta teóricamente en las ideas que sustenta la Educación Matemática Realista.

Según Villarroel y Sgreccia (2011) en este estudio "… m*ediante un enfoque cualitativo de alcance exploratorio-descriptivo, se distinguen siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia, objetos del entorno real. Los mismos, dependiendo de la intencionalidad didáctica, favorecen el desarrollo de variadas habilidades geométricas"*[4]. Es criterios de la autora de esta tesis que algunos de estos materiales son propicios para la construcción del concepto de volumen en los estudiantes.

Camou (2012), considera que la representación de los objetos de tres dimensiones es el principal problema para la enseñanza de la geometría del espacio, para lo cual crea e implementa como solución el enfoque llamado *ingeniería iMAT (integrando Multirepresentaciones, Aproximaciones y Tecnología).* Este estudio se realiza en la universidad de Georgia (USA), donde se enseña experimentalmente geometría del espacio a 140 estudiantes durante dos semanas alcanzando en ellos un aprendizaje significativo. Concluye además que los dibujos planos de los objetos 3D son las representaciones más abstractas y por lo tanto deben ser precedidos por representaciones concretas, semi-concretas y semi-abstractas.

El supuesto fundamental de iMAT está en que es necesario utilizar un conjunto de representaciones, que de diferentes formas aproximan el mismo objeto geométrico, para así lograr un mejor aprendizaje de la geometría del espacio. Criterios estos que

---

[4] Villaroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Localización: Números, ISSN 0212-3096, Nº. 78 1 , p. 73-94.

son compartido por la autora de esta tesis y que considera necesario en un proceso de enseñanza aprendizaje robusto de la geometría del espacio en los estudiantes.

Lin-Jung Wu, et al. (s.f) de Taiwan, desarrollan un sistema de aprendizaje de la geometría espacial práctico para facilitar el aprendizaje en los estudiantes. El sistema tomo de Duval los cuatros elementos de aprehensión sobre la geometría: aprehensión perceptiva, aprehensión secuencial, aprehensión operativa y la aprehensión discursiva. El sistema es compatible con estudiantes del último año de secundaria en el proceso de resolución de problemas de la geometría espacial, lo que les permite manipular la práctica espacial de la geometría gráfica y desarrollar su visualización y las imágenes mentales.

A continuación se realiza un breve análisis de las discusiones sobre la geometría en algunos congresos internacionales. En el ICME 1995 se debate las “Perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI”, donde se discute sobre la identificación de los retos más importantes y las tendencias emergentes para el futuro. También se el interés por el uso de materiales didácticos (manipulables y visuales) como un recurso importante para favorecer la enseñanza de la geometría. La autora de esta tesis comparte estos criterios y los tiene en cuenta en su propuesta de actividades.

En el estudio del ICME 2001, la geometría es vista como una herramienta importante para comprensión y como la parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICMI 2008 centra la discusión en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD), según Rojas (2009) “… no obstante su utilización en la geometría del espacio limita en ocasiones la posibilidad de manipular los cuerpos geométricos y también que los estudiantes aprendan de esas vivencias"[5].

En los CERME 3, 4 y 5 se desarrollan grupos de trabajo sobre el pensamiento geométrico, específicamente en el CERME 2005, el grupo de trabajo 7 centra su discusión en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación primaria, la educación secundaria y la formación docente, en particular se cuestiona sobre el plan de estudios de geometría para los grados 5 y superiores. Esto demuestra el marcado interés de los especialistas en el tema y la importancia del contenido geométrico para la preparación de los estudiantes en la escuela.

En la literatura revisada sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, se pudo constatar la existencia de varias investigaciones sobre la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos, las cuales serán tratadas en el próximo epígrafe.

1.2. Investigaciones acerca del proceso de construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica

Investigadores de diferentes países han realizado sus estudios sobre la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica. Entre los que se destacan:

Saucedo, Carbó y Mántica. (s.f), permiten retomar la importancia que posee el realizar un estudio completo de las características fundamentales que tiene el

[5] Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científica de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y caballero", Holguín. Cuba. p.2

volumen a través de la manipulación constante de objetos de distinto material. Este trabajo se lleva a cabo mediante la realización de diversas actividades, como comparar objetos, usar diferentes unidades de medida, establecer la necesidad de una medida en particular, estimar la medida del volumen de un objeto, empaquetar, entre otras.

Estos autores reconocen la importancia de la manipulación para distinguir las distintas propiedades de los objetos. En este proceso es necesario el ejercicio práctico del estudiante, donde puede descubrir y aprender de sus propios errores e inclusive entrando en controversia entre sus compañeros. Criterios que comparte la autora de esta tesis y resalta la significatividad de la manipulación geométrica para la construcción del concepto de volumen.

Freudenthal (1983), plantea que al tratar los conceptos matemáticos y en particular el del volumen, se debe comenzar a través de un análisis fenomenológico, concluyendo que para lograr que los estudiantes formen el objeto mental volumen, es necesario trabajar las siguientes actividades:

- *"Realizar transformaciones con sólidos como modelar, verter, transformaciones de romper y rehacer, sumergir en líquidos, etc. A través de las actividades diferenciar volumen y área y volumen y capacidad.*
- *Realizar repartos equitativos de líquidos, masa, plastilina, etc. aprovechando la regularidad de ciertos cuerpos; estimando y midiendo.*
- *Comparar y reproducir sólidos, ya sea comparando bases y alturas, o por estimación, o por medición, o usando transformaciones que conserven el volumen. Se consideran también situaciones en las que hay que comparar dos*

volúmenes pero también aquellas en las que se debe realizar una reproducción de un volumen con una forma diferente.

- *Medir, ya sea por exhaución con una unidad y afinando la medición con subunidades, o por acotación entre un nivel superior e inferior, o por transformaciones de romper y rehacer, proceso por el que generalmente se deducen las fórmulas de las figuras geométricas; o por inmersión, o por medio de relaciones geométricas generales midiendo las dimensiones lineales y aplicando fórmulas para obtener la medida.*
- *Realizar construcciones: cuerpos de igual área y distinto volumen, cuerpos de igual volumen y diferentes áreas"[6].*

Es criterio de la autora de esta tesis, que haya variedad de actividades para que la comprensión del concepto de volumen sea la adecuada y lograr la construcción robusta de este concepto.

Herrera y Aguilar (s.f), plantean que en la sala de clases, a través del juego de construcciones geométricas y haciendo uso del material de apoyo, se logra una mayor comprensión de los conceptos básicos de geometría elemental 2D y 3D. La función de este material es servir como punto de transición entre la formulación abstracta de la geometría y la realidad física. Criterios que son aducidos por la autora de esta tesis y son tenidos en cuenta en las actividades.

[6] Saucedo, G. Carbó, A. y Mántica, A. (s.f). Volumen, ¿qué se necesita conocer para enseñarlo? Institución: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Recuperable el 9/12/13 en la URL: http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_22/pro_Saucedo_tra.pdf.

Chamorro y Belmonte, (1988) plantea que las dificultades en el aprendizaje de la magnitud y su medida tienen su origen en múltiples causas que van desde la confusión entre las magnitudes del peso y el volumen. Por su parte en el libro "Las magnitudes y su medida en la Educación Primaria", se plantea que *"Los errores de las mediciones indirectas asociados con el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, se pueden concretar en dificultades con el lenguaje algebraico; resolución de problemas con datos erróneos o no reales; confusión entre área y perímetro, confusión entre área y volumen"*[7]*.* La autora de esta tesis, retoma este trabajo, pues considera que en los contenidos geométricos de la Educación Primaria están las bases para construcción del concepto de volumen en los estudiantes de la Educación Básica, y es del criterio que una de las dificultades es un tratamiento no adecuado en la construcción de este concepto.

Sáiz (2003) expone algunos resultados de una investigación centrada en las concepciones de los maestros de primaria sobre el concepto de volumen y su enseñanza. La evidencia que permitió obtener una caracterización de estas concepciones consiste en transcripciones de grabaciones, en audio y video, de las sesiones de un taller de actualización sobre dicho concepto matemático y las respuestas a algunos cuestionarios aplicados a los asistentes.

Sáiz (2003) basa principalmente su marco teórico metodológico en: a) estudios acerca de concepciones de maestros, b) un análisis fenomenológico (Freudenthal, 1983) del concepto volumen, c) trabajos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto, y d) un análisis de diferentes modelos de

[7] Las magnitudes y su medida en la Educación Primaria. Recuperable el 2 de abril de 2014 en la URL: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte5.pdf

enseñanza para el volumen. También sustentó el diseño de los instrumentos de toma de datos y el escrutinio de la información obtenida.

Este autor para los resultados diseña una taxonomía de categorías de análisis que permitió analizar el discurso de los maestros. Se considera importante este artículo a pesar de no estar comprendido dentro del objeto de estudio, pues son los docentes de la primaria los encargados de darle las bases de la construcción del concepto de volumen a los niños, por tal motivo su preparación decide en las concepciones que poseen los estudiantes en grados superiores.

Castellanos (2010) considera la relevancia que tienen los juegos para alterar la forma del volumen, donde una vez construido, los estudiantes logran experimentar con las formas creadas. En su estudio valora la significación que tienen las aristas en la determinación de las figuras, pues estas últimas dependen directamente de ellas.

También da entender la importancia de la metodología participativa y dinámica con el uso del software GeoGebra, que permite lograr una mayor potencialización en los procesos de visualización y razonamiento, alcanzando el éxito en la resolución de problemas y construcciones geométricas (Castellanos, 2010). Se comparten estos criterios, pero se considera que primero se debe iniciar el trabajo con los estudiantes a través de los instrumentos y medios tradicionales manipulables y después hacer uso del software.

El Ministerio de Educación de Perú plantea que en el grado octavo el estudiante *“Interpreta, compara y justifica propiedades de formas bidimensionales y tridimensionales, las representa gráficamente y las construye a partir de la descripción de sus propiedades y relaciones de paralelismo y perpendicularidad.*

Compara, calcula y estima medidas de ángulos, superficies compuestas y volúmenes seleccionando unidades convencionales pertinentes justificando sus procedimientos"[8]*.* En el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, estas cuestiones se consideran necesarias para la construcción del concepto de volumen en la Educación básica.

A continuación se realiza un análisis de las investigaciones realizadas sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente sobre la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica en Colombia.

1.3. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente sobre la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica en Colombia

En Colombia son varios los investigadores que han abordado el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría. Entre los que se destacan: Camargo (2010), Pérez (2011), Morales y Majé (2011), Suárez (2014), entre otros.

Camargo (2010), realiza su propuesta en un curso universitario de geometría plana de un programa de formación de futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria, donde describe y analiza un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, sustentado en la comunidad de práctica de Wenger (1998). Se considera necesario trabajar desde el pregrado en la preparación del profesor de

[8] Mapas de progreso del aprendizaje. Matemática: Geometría. Ministerio de Educación de Perú. Recuperable el 2 de abril de 2014 en la URL: http://www.ipeba.gob.pe/estandares/Mapasprogreso_Matematica_Geometria.pdf

matemática en lo referido a la geometría del espacio, específicamente con la demostración, un tema casi olvidado de la matemática en la escuela.

Pérez (2011), diseña un sistema de actividades teórico-práctico, sustentado en el modelo de comunidad de práctica de Wenger (2008), donde se favorece la construcción de significado para el concepto de área de algunas figuras planas en la asignatura de Geometría de sexto grado. Pérez (2011) sugiere diseñar actividades a trabajar para que los estudiantes tengan ciertas dificultades que los motiven a esforzarse para solucionarlas, pero no del grado que produzcan frustración y abandono. La autora de esta tesis coincide con lo abordado por la investigadora, al plantear que la enseñanza de la geometría, mediante esta forma, propicia compromiso y motivación en los estudiantes, y que participen en la construcción de su propio conocimiento.

Morales y Majé (2011) en su investigación ofrecen el resultado de un análisis en torno al desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas en estudiantes de grado séptimo de la educación básica secundaria, sobre el objeto matemático cuadriláteros y el uso de la geometría dinámica. También valoran el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría y se determina el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado séptimo relacionado con los cuadriláteros.

Morales y Majé (2011) articulan su estudio a partir de la propuesta de Bishop (2005) y el modelo teórico propuesto por los esposos Van Hiele. Estos autores elaboran actividades en las que se tuvo en cuenta el contexto social y económico de la región, relacionado con el proyecto escuela y café. Este trabajo se considera una alternativa que contribuye al desarrollo del pensamiento espacial, y la superación de los fenómenos didácticos en los estudiantes.

Los estudios realizados por Camargo (2010), Morales y Majé (2011) y Pérez (2011), se refieren al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría. Estas investigaciones se tienen presente, pues este proceso es básico para la geometría del espacio, específicamente en la construcción de un significado robusto del concepto de volumen.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas se plantea que el *"tratamiento de los conceptos relativos a la medida de magnitudes compuestas a partir de las relaciones funcionales con respecto a las magnitudes fundamentales que las componen hace que conceptos como el de área, volumen,… puedan entenderse como funciones de otras magnitudes más simples"*[9]. Criterios estos que son compartidos en esta tesis.

Suárez (2014) enfoca su estudio en la geometría, específicamente en la resolución de problemas geométricos en las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, donde utiliza el error como estrategia didáctica, que permita la construcción de conocimientos significativos. Como vía de solución diseña 5 talleres de solución de problemas para el grado noveno. El Taller 4 lo dedica a Volúmenes, donde primero muestra los conceptos básicos y la construcción del volumen de un prisma a partir de cubos de una unidad.

---

[9] Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperable el 23 de abril en la URL: http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf p.70

Los problemas que propone Suárez (2014), los contextualiza a las vivencias que poseen los estudiantes, relacionada con esta temática. Desarrolla dos experiencias que resultaron significativas, en la primera de ellas se refiere a que: *"… un estudiante solicitó en cooperativa una caja en donde venían empacadas cajitas de bebidas, toma las medidas de la caja grande y otro estudiante tomó las medidas de una de las cajitas de la bebida, se hallaron los volúmenes y se comparó con el número de cajitas que deberían venir empacadas"*[10]

En la segunda experiencia *"… previamente se había solicitado a los estudiantes realizar un cubo de un decímetro de lado y a otros que llevaran una botella de un litro. Se toma uno de los cubos de un decímetro cúbico y se le pide a dos de los estudiantes que vertieran el litro de agua en el cubo, donde se hizo la relación entre las medidas de volumen y capacidad"*[11]*.* Se es del criterio que problemas como estos, donde el estudiante manipule y viva experiencias significativas propicia la construcción de significado robusto del concepto de volumen.

En la literatura revisada en Colombia son limitados los trabajos investigativos realizado sobre la construcción del concepto de volumen para los estudiantes de la Educación Básica.

Conclusiones del capítulo 1

Se valoran las principales investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente acerca de la construcción

---

[10] Suárez, A. (2014). Tipología de errores en la solución de problemas geométricos a partir de los problemas de olimpiadas. Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. p.138

[11] Suárez, A. (2014). Tipología de errores en la solución de problemas geométricos a partir de los problemas de olimpiadas. Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. p. 139

del concepto de volumen de cuerpos geométricos en la Educación Básica en diferentes países del mundo y en Colombia. Entre estos autores se tienen: Chamorro y Belmonte, (1988), Gutiérrez (1992, 1998), Sáiz (2003), Fernández (2005), Abrate et al. (2006), Kohanová (2007), Gaudio y Gaudio (2007), Rojas (2009), Castellanos (2010), Camargo (2010), Steinwandel y Ludwig (2011), Villarroel y Sgreccia (2011), Pérez (2011), Morales y Majé (2011), Camou (2012), Lin-Jung Wu, et al. (s.f).

Algunos de estos autores hacen referencia a las dificultades en el proceso de enseñanza de la geometría del espacio, conceden valor a la manipulación geométrica para el aprendizaje de los conceptos, y consideran importante el proceso de representación de cuerpos geométricos en el plano. También critican el estudio memorístico de definiciones, áreas y volúmenes, sustentan sus propuestas en el modelo de Van Hiele, y conceden un gran valor a la enseñanza de la geometría del espacio desde sus aplicaciones prácticas.

En el proceso de la enseñanza de la geometría del espacio, se puede constatar que muchas de las dificultades residen en la representación del espacio tridimensional, en uno bidimensional como la hoja de cuaderno o el tablero del salón de clases.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

"… un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento…"[12]

Pólya (1965)

Este capítulo se hace referencia al marco teórico de la tesis. En tal sentido se asume la teoría de la resolución de problemas, problemas no rutinarios o retos y su contextualización en las olimpiadas colombianas de matemática. También se aduce lo relacionado a la visualización como componente psicológico, a la manipulación y a la representación geométrica espacial en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente para la construcción del concepto de volumen. Además se aborda los referentes teóricos sobre el concepto de volumen en la Educación Básica.

2.1. Resolución de problemas

La gran brecha entre enseñar a los estudiantes a resolver ejercicios y solucionar problemas, especialmente los matemáticos, presente aún hoy día en las aulas y a pesar de los intentos de las mejoras curriculares, ha sido analizada desde diferentes

[12] DivulgaMAT. Citas Matemáticas. Recuperable el 3 de abril de 2014 de la URL: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent&section=16&category=110&ordering=1&limitstart=50&limit=10&Itemid=67

perspectivas, donde se proponen diferentes componentes, procesos e interrelaciones entre ellos. La resolución de problemas, asociado a la rama de las Matemáticas que se conoce como Geometría de los cuerpos sólidos, o también conocida como geometría espacial, constituye un verdadero reto para los estudiantes y un dilema para los profesores al inducir a los estudiantes a su comprensión.

Cuando se habla de problemas, o situaciones problemas el profesor no debe referirse a la versión de los ejercicios con texto, en los cuales no se crea un reto a los estudiantes al facilitarles todos los datos. Por el contrario, se debe usar este término para acotar situaciones verdaderamente complejas, capaces y encargadas de potenciar el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, de proporcionar modos de actuación y pensar para enfrentar los retos de la vida y de la ciencia. Situaciones de este carácter, son difíciles de encontrar en la práctica diaria en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, en los grados octavo y noveno de los colegios de enseñanza básica en Colombia.

Por todo esto, desde hace tiempo y hasta nuestros días cobra tal importancia la resolución de problemas, la cual se ha convertido en toda una teoría, muy estudiada e investigada por educadores, psicólogos y otros especialistas de áreas afines con la enseñanza. Existe un gran debate sobre qué estrategias son más importantes durante la resolución de problemas, si las estrategias generales o las del área específica, pero, al revisar la literatura, se puede observar que no hay un acuerdo generalizado respecto a cuáles son de un tipo y de otro.

Entre los defensores de la importancia del conocimiento especializado del contenido, o como también es nombrado conocimiento de dominio específico sobre las maniobras de resolución de problemas en Matemáticas, se destacan los psicólogos australianos Owen y Sweller (1989). Estos autores aluden a las investigaciones desarrolladas en Psicología cognitiva, e insisten en que "*… el dominio en un área específica, como las Matemáticas, está caracterizado por la posesión de un gran cuerpo de conocimiento específico del dominio…*"[13] y que la diferencia fundamental entre estudiantes versados y novicios está en una mejor interpretación y empoderamiento de esquemas de dominio específico.

El concepto de problema puede ser definido como dificultad programada, previa o espontánea, con elementos incógnitos para el sujeto, pero capaz de estimular la realización de actos sucesivos y ordenados para hallarle solución. Un problema matemático puede ser definido de manera informal como una situación matemática en la que hay un objetivo a conseguir superando una serie de obstáculos, donde el sujeto que afronta las condiciones a solucionar no conoce los procedimientos o algoritmos matemáticos y de otras ramas afines que le permiten alcanzar su meta.

La definición de problema ha sido abordada por diferentes investigadores, entre los que se destacan: Polya (1965), Fridman (1972), Martínez (1981), Majmutov (1983), Rohn (1984), Schoenfeld (1985), Mayer (1986), Sanchez (1994), Garret (1995), Inglés y de Halford (1995), Labarrere (1996), Campistrous y Rizo (1996), Álvarez (1996), Lester y Kehle (2003), Lesh y de Zawojewski (2007), Inglés et al. (2008), Sriraman y Engish (2010), entre otros.

[13] Owen y Sweller (1989). Tomado de la Tesis para optar al grado de doctor .Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Madrid 2005. p. 326

A pesar de ser uno de los más grandes exponentes, defensores y el padre de las teorías modernas de la resolución de problemas Pólya (1945)[14], no expresa su definición de este concepto cuando escribe su libro “How to solve it” en 1945, con el cual se inaugura la época dorada de la heurística moderna. En esta obra Pólya (1945) proporciona información completa y correcta sobre la resolución de problemas utilizando la heurística moderna. El autor cubre los métodos clásicos de optimización, incluyendo programación dinámica, el método simplex, y técnicas de gradiente, entre otras estrategias de soluciones.

Pólya en una publicación del Mathematical discovery (1962-65) elaboró un análisis de los procesos que intermedian en la resolución de problemas. En esta investigación se afirma que resolver un problema significa investigar de forma reflexiva y bien ejecutada, un grupo de acciones paso a paso apropiadas para lograr una meta visiblemente concebida pero inalcanzable de manera inmediata.

Ball (s.f) caracteriza el concepto de problema como aquella situación que demanda la realización de determinadas acciones prácticas o mentales encaminadas a transformar dicha situación. Labarrere (1996), resume acertadamente el consenso entre las definiciones consultadas al aducir que “…u*n problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades, de y entre los objetos que no son accesibles directa e inmediatamente a la persona”*[15]*, o sea,* un reto en el que

[14] George Pólya (13/12/1887 – 7/09/1985). Matemático húngaro cuyo verdadero nombre es Pólya György, hizo contribuciones fundamentales a la combinatoria, teoría de números, análisis numérico y teoría de la probabilidad. También es conocido por su trabajo en la heurística y la Educación Matemática.

[15] Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. p. 6

hay algo incógnito, enigmático, oculto para los individuos, los cuales se esfuerzan por descubrir y hallar.

Delgado (1998) define el término problema como: "…s*ituación verdaderamente problémica para el resolutor, para la cual, teniendo conciencia de ella, no conoce una vía de solución…*"[16].

Por su parte Alonso (2001), enfoca el problema matemático desde el punto de vista de la información y estructura del problema y cómo el estudiante se lo representa y resuelve. Al respecto plantea su concepción de problema matemático como *"Una situación Matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias"*[17]

De las anteriores definiciones, se concluye que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

- Aceptación: se ha de motivar a los individuos involucrados en hallar la solución a las incógnitas y llevarlos a que sea aceptado el reto y con ello crear un compromiso personal y formal a la conclusión de la actividad.

[16] Delgado, R. (1998). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas. Tesis de Doctorado, La Habana.p.2

[17] Alonso, I. (2001). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Resumen de Tesis de Doctorado, Santiago de Cuba. p.13.

- Bloqueo: cuando los intentos iniciales e inmediatos de resolución no sean exitosos y si las estrategias frecuentes de abordar el planteamiento no funcionan.
- Exploración: el compromiso aceptado por los individuos lleva a la búsqueda e indagación de nuevos algoritmos y estrategias para abordar la actividad y se lleva a su resolución.

Por tanto, un problema sería un enigma o situación difícil a la que no es posible responder o tener un resultado conocido con anterioridad. En su resolución se necesita traer al escenario conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos, además tiene que ser una cuestión que interese, que provoque los deseos de resolverla, una tarea a la que se esté dispuesto a dedicarle tiempo y esfuerzos. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelta, proporciona una sensación considerable de placer, e incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, también en el proceso de búsqueda, en los avances que se van realizando, se encuentra la satisfacción (Escudero, 1999).

Por su parte Krulik y Rudnik (1980), plantean una definición, la cual tiene puntos de contacto comunes con la aportada por Pólya. Estos autores afirman que: "…*un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma...*"[18]. Esta definición es la que se asume en esta tesis.

[18] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . pág. 4.

En cuanto a la clasificación de los problemas, en las diferentes fuentes consultadas, ésta se realiza atendiendo a diversos criterios. Estos criterios están dados en campo disciplinario, tipo de tarea, naturaleza del enunciado, entre otras, pero siempre apuntando a diferentes tipos de problemas que por tanto deben enfrentarse de distintas maneras.

Borasi (1986), es pionera en los nuevos métodos para la instrucción de las Matemáticas, posee intenciones en aclarar la noción de problema y un marcado interés en mejorar la enseñanza e instrucción de la resolución de problemas. Esta autora se vale de los siguientes elementos estructurales para una genealogía de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cual se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema, exposición explícita de la actividad a realizar.
- El conjunto de soluciones que se consideran válidas para resolver las interrogantes del problema.
- Los posibles algoritmos que podrían ser empleados para hallar la solución de la situación problema.

La clasificación de problemas de Borasi (1986), se pueden resumir en la tabla 1.

Tabla 1. Clasificación de los problemas según R. Borasi.

TIPO	CONTEXTO	FORMULACIÓN	SOLUCIONES	MÉTODO
Ejercicio	Inexistente	Única y explicita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Problema de Texto	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Puzzle	Explícito en el Texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo. Acto de ingenio
Prueba de una Conjetura	En el texto y sólo de forma parcial	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos
Problemas de la vida real	Sólo de forma parcial en el texto	Parcialmente dada. Algunas alternativas posibles	Muchas posibles, de forma aproximada	Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo
Situación problemática	Sólo parcial en el texto	Implícita, se sugieren varias, problemática	Varias. Puede darse una explícita	Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema
Situación	Sólo parcial en el texto	Inexistente, ni siquiera implícita	Creación del problema	Formulación del problema

Entre las variadas opiniones y puntos de vista posibles (Jungk (1979), Labarrere (1987), Carballal y Díaz (1990), y otros), sucede que muchas veces conviene clasificar a los problemas por la naturaleza de la solución en “abiertos” y “cerrados” (Garret, 1995). Se consideran problemas cerrados aquellos donde solo es posible una única solución, son generalmente problemas objetivos, donde la mayoría de las ocasiones se puede verificar y hallar un método o procedimiento que permita encontrar la respuesta o requieren de un conocimiento del área específico.

Los problemas abiertos son aquellos que tienen varias posibles vías de solución, son subjetivos, sólo se puede hallar su mejor respuesta. Las pautas e impulsos heurísticos pueden guiar la resolución y requieren de un amplio nivel de información del área y de otras afines.

Diferentes investigadores han abordado la resolución de problemas Polya (1965), Brenes y Murillo (1994), Restle y Davis (1962), Fridman (1991), Ballester, et al. (1992), Brenes y Murillo (1994), Schoenfeld (1994), Lesh y Zawojewski (2007), entre otros. Polya (1965) por su parte, asevera que: "... *resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados*"[19].

Carr (1989), amplía el ya polémico concepto, con un toque interesante al afirmar que resolver un problema es "…*el proceso de aplicar el conocimiento previamente adquirido a las situaciones nuevas y no familiares…*"[20]. Este autor coincide en que el individuo resolutor encargado debe disponer de las herramientas necesarias para resolver el problema, pero no deben tratarse de problemas que simplemente mecanicen un conocimiento adquirido. Estos problemas deben implicar una transferencia del conocimiento a situaciones similares o equivalentes.

Según Puig (1996), por el proceso de resolución de problemas se entiende *"…la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea…*"[21]. A partir de lo anterior, se debe considerar que en el proceso de resolución de problemas, es posible que el individuo que se enfrenta al problema, transforme el problema en otro a través de un

[19] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.
[20] Carr (1989). p. 471. Tomado de Barroso, J. J., & Ortiz, I. R. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, *342*, 257-286.
[21] (Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. España. Editorial Comares. p.34).

cambio de registro, la simplificación del problema original, un caso particular o un problema general. Esto hace parte de lo que Pólya (1945) llama pautas heurísticas.

Transformar el problema en otro, es lo que Puig (1996) llama herramientas heurísticas. Las herramientas heurísticas y la búsqueda en fuentes de información está clasificado como estrategias de resolución (Santos, 2007). Ahora bien, en el proceso de resolución de problemas, el pensamiento matemático es entendido como "… *un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión…*"[22].

Es conveniente se enfatice, según refieren Gil et al (1992), a algunos autores que han tratado el tema de la resolución de problemas e insisten justamente en el hecho de que la existencia de dificultades no es una característica intrínseca de una situación, y que depende también de los conocimientos, experiencias y otras.

Orton (1996), expresa que la resolución de problemas "… *se concibe como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva*…"[23].

---

[22]Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1982). Pensar matemáticamente. España. Editorial Labor S.A. p. 167

[23] Orton, A. (1996). Tomado de Barroso, J. y Ortiz, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. Revista de Educación, 342. pp. 257-286. p.51.

Por su parte Delgado (1998), considera la resolución de problemas como una destreza Matemática y señala que resolver: "...*es encontrar un método o vía de solución que conduzca a la solución de un problema…*"[24].

Según Llivina (1999), *"…la resolución de problemas matemáticos es una capacidad específica que se desarrolla a través del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática y que se configura en la personalidad del individuo al sistematizar, con determinada calidad y haciendo uso de la metacognición, acciones y conocimientos que participan en la resolución de estos problemas…"*[25]*.* A pesar que con esta definición de Llivina (1999) se modernizan y amplían muchas de las definiciones de autores previos, al incluir los aspectos sociológicos, psicológicos y procesos del conocimiento, al mismo tiempo se limita, esquematiza y acorta, la resolución de problemas matemáticos en las Matemáticas. Este autor no tiene en cuenta que muchas estrategias usadas no surgieron en este campo, se restringe al resolutor novel de problemas matemáticos.

En esta tesis se asume la definición dada por Polya (1965), pero se entiende que es pertinente a los objetivos de la tesis, las ideas planteadas por Arenas (2009). Este autor considera la resolución de problemas, como el resultado de la ejecución de un conjunto de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite llegar a una meta, mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad o análisis previos, sobre una situación o problema planteado,

---

[24] Delgado, R. (1998). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas. Tesis de Doctorado, La Habana.p.69

[25] Llivina, M.J. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. Tesis de Doctorado, La Habana.

el cual cobra relativa importancia, pues se constituye en la base que garantiza la consecución de un resultado correcto, analítico y matemático.

Según Cortés y Galindo (2007) *"… la resolución de problemas consiste en hallar una respuesta adecuada a las exigencias planteadas, pero realmente la solución de un problema no debe verse como un logro final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental, debe implicar un análisis de la situación ante la cual se halla, en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades, en la puesta en práctica de métodos de solución, entre otros"*[26]. Estos criterios serán considerado en la resolución de los problemas que se proponen en esta tesis.

Al abordar el tema de la resolución de problemas matemáticos en los diferentes niveles educativos y en especial en lo concerniente a la geometría del espacio conviene conocer los pasos que debe interiorizar o concientizar y seguir un estudiante de forma autónoma en el momento de resolver un problema. Es necesario comprender que el simple hecho de seguir estas instrucciones no asegura que el estudiante aprenda a resolver problemas matemáticos con éxito. En este proceso es significativo que el docente posea una adecuada metodología a implementar, donde le muestre el camino a sus estudiantes y también conlleve a razonar e innovar soluciones óptimas en la resolución de problemas, que los ayude a desarrollar estrategias de razonamiento lógico.

[26] Cortés, M. y Galindo, N. (2007). El modelo de Pólya centrado en resolución de problemas en la interpretación y manejo de la integral definida. Universidad de la Salle. Recuperable el 5 de octubre de 2014 de la URL: *http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/10185/1552/1/TM85.07%20C818m.pdf*

Con Pólya (1945), se puede decir que nace una nueva doctrina en la resolución de problemas, a partir del momento en que sale a la luz su libro *How to solve it*, comienza una nueva época para los estudiosos de esta rama de la enseñanza. Pólya (1945), es pionero en esgrimir la idea de un resolutor ideal, describe el proceso de resolución de problemas como fases de todo un proceso de raciocinio, y a partir de este momento se remonta a la heurística, como un factor de gran importancia en la enseñanza de las ciencias.

El modelo teórico desarrollado por Pólya (1945), incluye un repertorio de heurística que agrupa las estrategias, las pautas, los procesos generales, los impulsos del subconsciente, los métodos de demostración, las emociones, entre otros factores que intervienen en la resolución de problemas. Pólya (1945) hace un gran énfasis en el razonamiento heurístico que aunque de poco rigor científico en ese momento, es un método muy plausible para la resolución de problemas.

En los problemas no es evidente la ruta a seguir; incluso se pueden hallar varias y desde luego no es una situación que haya sido codificada ni enseñada previamente. En este proceso hay que agrupar los conocimientos dispersos presentes en el cerebro, se deben relacionar saberes procedentes de campos diferentes, toca afinar y poner a punto relaciones nuevas.

El reconocimiento y la importancia que se le atribuye a la actividad de resolver problemas, devenida en toda una teoría, ha originado disímiles propuestas sobre su enseñanza, distinguiendo diversas fases en el proceso de su resolución. Investigadores como Dewey (1933), Pólya (1945), Schoenfeld (1985), Fridman (1991), Maza (1991), Guzmán (1994) han aportado estrategias o fases para la resolución de problemas. En esta tesis se asume el modelo propuesto por Pólya (1945), el cual tiene las siguientes fases: (Ver figura 1)

- Orientación hacia el problema.
- Trabajo en el problema.
- Solución del problema.
- Evaluación de la solución y de la vía.

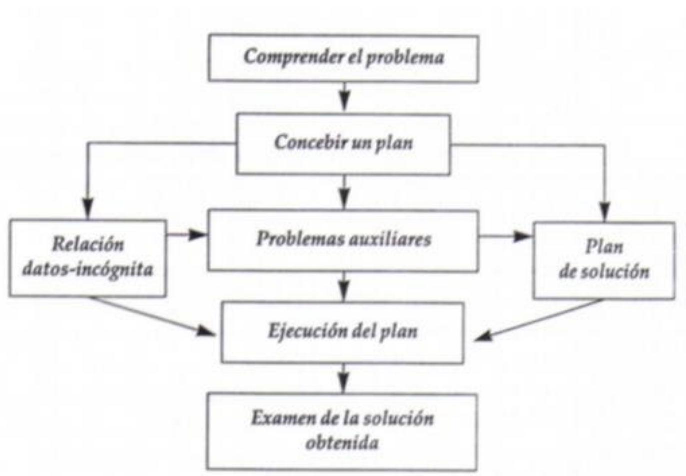


Figura 1. Estrategia de Pólya para la resolución de problemas

Paso 1. Orientación hacia el problema.

Es trascendental y de vital importancia el entendimiento de la problemática a resolver para avanzar hacia su solución, por lo cual se recomienda comenzar con una lectura progresiva del problema, donde se debe hacer una parada en cada unidad de información relevante que se haya descubierto, entendiendo que toda la información no está expresada de forma explícita. Durante esta lectura se hacen preguntas en busca de la comprensión de la situación, se solucionan las dudas que se posean con el vocabulario y la lectura se repite hasta tanto haya una comprensión total del texto. A continuación se formulan algunas de las preguntas a realizar:

1. ¿Se entiende todo lo que dice? Se pretende comprender e interiorizar el significado justo, exacto de las palabras clave que aparecen en los enunciados: añadir, sumar, aumentar y crecer. También multiplicar por, quitar, decrecer, restar, dividir por, el doble, la mitad, el cuadrado, el triplo, la tercera parte, el cubo, entre otros.

2. ¿Se puede reformular el problema con propias sus palabras? Plantearse la problemática o la reformulación con palabras propias y propios pensamientos, hace ser conscientes del contenido del problema.

3. ¿Se distingue cuáles son los datos explícitos e implícitos en el problema? ¿Hay suficiente información para hallar la solución? ¿Se tiene toda la información que se necesita para hallar la solución? Llegados a este punto es necesario entender que hay datos que explícitamente no se indican, pero que encierran mucha información.

4. ¿Sabe a qué metas se quiere llegar? ¿Cuál es el enigma o el valor que se quiere hallar/calcular? ¿Cuál es en si el problema? Es fundamental fijarse un objetivo a la hora de solucionar un problema, pues en función de él estarán basadas todas las acciones tomadas para llegar a la solución.

5. ¿Hay información expresada de manera extraña? Se suele estar acostumbrados a que en el enunciado del problema esté indicado u oculto de forma implícita, todo lo que se necesita para resolver el problema, pocas veces se cumple esto

en la realidad, y en varias ocasiones se debe seleccionar mensajes relevantes entre una gran diversidad de pistas, en muchos casos se tiene que encontrar las informaciones precisas, las cuales no siempre suelen estar en el enunciado de la actividad.

6. ¿Es este problema similar o equivalente a algún otro que hayas realizado antes? De esta fase de análisis del problema planteado resultan o se puede señalar las siguientes pautas heurísticas: ¿Cuáles son los elementos del problema que más han llamado la atención? ¿Se han comprendido todas las palabras del enunciado del problema? ¿Se pueden relacionar con algún concepto, disciplina, experiencia, situación o problema anterior? ¿Se puede expresar de qué trata el problema? ¿Se debe repetir la lectura del enunciado del problema para comprenderlo? ¿Se pueden precisar los elementos del mismo que generan dificultad en su comprensión? ¿Qué se pide hallar? ¿Se trata de obtener una cosa o varias? ¿Qué datos se pueden extraer del problema? ¿Se considera que los datos del problema son suficientes para resolverlo? ¿Se está de acuerdo con los que se ha manejado en alguna experiencia previa? ¿Existe alguna relación entre estos datos? ¿Se pueden representar estos datos o la situación que se presenta a través de un gráfico, tabla, entre otras, que ayude a resolverlo? ¿Se considera que se necesita para resolver el problema algún dato que no aparece en el mismo? ¿Qué conocimientos matemáticos o de otras disciplinas se consideran convenientes para resolver el problema? ¿Se conoce algún algoritmo o estrategia para resolver el problema? Por último, se les puede

solicitar a los estudiantes que escriban de otra forma el problema, para facilitar el que pueda ser comprendido.

Paso 2. Trabajo en el problema.

A pesar que Pólya (1945) sugiere varios impulsos heurísticos o recursos del razonamiento, se abordará solo algunos de ellos[27]. En esta fase se pueden usar alguna de las siguientes estrategias[28]:

- Ensayo y error (Conjeturar y probar la conjetura): esta estrategia consiste en elegir soluciones u operaciones al azar y aplicar las condiciones del problema a esos resultados u operaciones hasta encontrar el objetivo o hasta comprobar que eso no es posible. Después de los primeros ensayos ya no se eligen opciones al azar sino tomando en consideración los ensayos ya realizados.
- Usar variables: para relacionar algebraicamente los datos con las condiciones del problema, primero hay que nombrar con letras cada uno de los números desconocidos y en seguida expresar las condiciones enunciadas en el problema mediante operaciones, las que deben conducir a escribir la expresión algebraica que se desea.
- Buscar un patrón, o una regularidad: esta estrategia empieza por considerar algunos casos particulares o iniciales y, a partir de ellos, buscar una solución general que sirva para todos los casos. Es muy útil cuando el problema

[27] Se plantean alrededor de 19 estrategias o acciones del razonamiento para resolver problemas, recomendamos la lectura de libro How to solve it, para profundizar en las que no se han tratado en este apartado.

[28] Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final, muchas veces este artificio no es un procedimiento establecido, y surge espontáneamente como recurso para llegar a la solución.

presenta secuencias de números o figuras. Lo que se hace, en estos casos, es usar el razonamiento inductivo para llegar a una generalización.

- Imaginar el problema resuelto: en los problemas de construcciones geométricas es muy útil suponer el problema resuelto. Para ello se traza una figura aproximada a la que se desea. De las relaciones observadas en esta figura se debe desprender el procedimiento para resolver el problema.
- Resolver un problema similar más simple o un problema equivalente: para obtener la solución de un problema muchas veces es útil resolver primero el mismo problema con datos más sencillos y a continuación, aplicar el mismo método en la solución del problema planteado que posee cierto nivel de complejidad.
- Hacer un diagrama, una figura, un esquema: en algunos problemas se puede llegar fácilmente a la solución si se realiza un dibujo, esquema o diagrama; es decir, si se halla la representación adecuada. Esto ocurre porque el estudiante se apropia con mayor facilidad del contenido geométrico con el apoyo de representaciones realizadas con lápiz, de construcciones con diversos materiales e imágenes, que con el de palabras, números o símbolos.
- Trabajar hacia atrás: esta es una estrategia que en el momento de resolución se comienza por la tesis o sus datos finales, realizando las operaciones, hasta llegar a la hipótesis o datos originales.

Después de examinar el problema brotan las siguientes consideraciones o impulsos heurísticos de la fase ¿Considera que pueden ser resueltos? ¿Usted ha resuelto este problema o alguno muy similar con anterioridad? Si la respuesta positiva se puede realizar las siguientes preguntas ¿Qué relación se puede establecer entre ellos? ¿Cuáles son los elementos que los diferencian? ¿Puede facilitar o servir esta relación para resolverlo? ¿Se puede auxiliar en los mismos razonamientos o se necesita considerar algún cambio para obtener su solución?

En caso de ser diferentes, entonces debe considerar: volver sobre los pasos a las preguntas iniciales y, continuar con las valoraciones siguientes. De las partes que se consideran más fáciles, ¿se podría resolver alguna parte intermedia, u otra parte?, a continuación se trata de representar una situación similar a la del problema para posibilitar que pueda surgir alguna idea de solución o si es posible de expresar cuantitativamente, donde es importante retomar las ideas gráficas.

Todos estos elementos analizados con profundidad, en ocasiones pueden sugerir un camino de solución. ¿Se conoce algún teorema, corolario, fórmula, propiedad, algoritmo que relacione todos los datos? También es necesario recorrer las ideas del problema retrospectivamente, suprimir lo que parezca innecesario a los datos, en busca de alguna idea.

Si se llega a concluir que no se puede resolver el problema, entonces se cuestiona: se puede probar un nuevo intento de resolución, concluyendo que los datos o situación del problema son contradictorios, carentes de sentido o difíciles de comprender. En resumen, está fuera de las posibilidades de resolverlo. Entonces, agotados estos recursos, se debe recurrir a algún compañero, al libro de texto o al profesor en busca de orientación. En estos casos es recomendable que se comparen las limitaciones que se presentaron, con las ideas que se incorporen a partir de las sugerencias que se plantearon.

Paso 3. Solución del problema.

- Efectuar la o las estrategias que han sido escogidas hasta solucionar completamente el problema o hasta que se alcance un punto en la solución del problema, que sugiera tomar un nuevo rumbo.
- Asignar un tiempo razonable para hallar la solución de la situación problémica. Si no se tiene éxito solicitar una explicación o hacer una pausa en la actividad por unos momentos.
- No tener duda o pereza de volver a empezar. Suele suceder que un reinicio fresco o una nueva táctica conduzcan al éxito de la tarea.

Los posibles razonamientos heurísticos o pautas que se deben tener en cuenta o pueden surgir durante la fase de ejecución del plan son: antes de iniciar la resolución del problema, revisar nuevamente los datos, las unidades en que están expresados, los conceptos, ideas, estrategias, el modelo que se aplicará y tratar de superar las dificultades que puedan aparecer.

Si en el proceso de resolución aparecen dificultades insalvables para el conocimiento, regresar al principio de la situación, rectificar los posibles errores e intentar nuevamente, valorar otras vías de solución, o si se requiere de algún otro dato adicional para continuar. Si se considera terminada la tarea de hallar la solución al problema, se debe revisar nuevamente todos los elementos tomados en consideración para obtener la solución, antes que se pase a validar la respuesta obtenida.

Según Dante (2002), "… e*l énfasis que debe ser dado aquí es a la habilidad del estudiante en ejecutar el plan trazado y no a los cálculos en sí. Hay una tendencia muy fuerte, que debemos evitar, de reducir todo el proceso de resolución de problemas a los simples cálculos que llevan a las respuestas correctas…*"[29].

Paso 4. Evaluación de la solución y de la vía.

En esta fase se puede realizar a los estudiantes las siguientes preguntas: ¿es la solución correcta?, ¿la respuesta satisface lo establecido en el problema?, ¿se advierte una solución más sencilla?, ¿se puede ver cómo extender la solución a un caso general?

En esta última fase es importante comprobar y examinar a fondo la vía de solución hallada: verificar los cálculos, los razonamientos realizados y que realmente la solución hallada corresponda al problema en cuestión e intentar resolverlo de una forma más sencilla.

Una vez que se considera concluido el problema y hallada la solución no se debe plantear definitivamente que todo está correcto. Se debe realizar un recorrido por todo el proceso una vez más, y asegurar paso a paso de que no se han cometido errores. Se recomienda reescribir ordenadamente y con claridad todo el proceso de resolución seguido, se destacan aquellas conclusiones parciales, descubrimientos o aclaraciones que se consideran más importantes. Desde una nueva visión del enunciado se comprueba una vez más que la respuesta obtenida es la que se pide, para esto:

[29] Dante, L. (2002). Tomado del blog del área de formación inicial docente. Recuperable el 24/02/14 en la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/edu.

- Se hará una valoración acerca la solución: la solución del problema es lógicamente posible, es decir, si tiene sentido en el contexto del problema.
- Se adicionará a la solución del problema una breve explicación literal que indique lo hallado y la forma en que hicieron los hallazgos.
- Se valorarán otros posibles resultados o soluciones.
- Se reflexionará si se puede resolver de otra forma o si se puede generalizar el método de solución.
- Se hará un intento de explicar el problema y la vía de solución a los demás estudiantes.
- Se empleará esta experiencia y el razonamiento seguido, así como los conocimientos aprendidos en la formulación y solución de nuevos problemas.

Entre los impulsos heurísticos más comunes en las fases de la resolución de problemas de las diferentes metodologías se puede observar: ¿se puede verificar el resultado? ¿Se puede verificar el razonamiento seleccionado? ¿Parece lógica la solución encontrada? ¿Se puede hallar otra solución? ¿Es posible transformar el problema resuelto en otro similar? ¿Se puede resolver de otra manera o usando otras vías? ¿Se puede generalizar el resultado hallado? ¿Es posible plantear el mismo problema con datos más generales o de una forma más abstracta?

Estos impulsos heurísticos pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan hallar la solución, es conveniente notar que no todos sirven para la resolución de todos los problemas. Los impulsos forman un conjunto de posibilidades entre las que se puede elegir aquellas que se adaptan a cada problemática, tampoco se pretende enfrentarse a la resolución de problemas con una lista de sugerencias heurísticas en la mano, lo interesante es interiorizar estas para que surjan de manera espontánea durante el proceso.

La teoría de la resolución de problemas constituye uno de los sustento de esta tesis, pues se tiene en cuenta en el desarrollo de las actividades conformadas por problemas no rutinarios, para favorecer la construcción del concepto de volumen de cuerpos, en los estudiantes de octavo grado.

2.1.1. Problemas no rutinarios o retos

"La creatividad es el proceso de ser sensible a los problemas, a las deficiencias, a las lagunas del conocimiento, a los elementos pasados por alto, a las faltas de armonía, etc.: de reunir una información válida; de definir las dificultades e identificar el elemento no válido; de buscar soluciones; de hacer suposiciones o formular hipótesis sobre las deficiencias; de examinar y comprobar dichas hipótesis y modificarlas si es preciso, perfeccionándolas y finalmente comunicar los resultados"[30]

La resolución de problemas ha sido juzgada de diferentes formas en la enseñanza de las Matemáticas, no obstante, las diversas actitudes concuerdan en que la resolución de problemas adquiere su relevancia en la idea de equiparar el trabajo matemático y los procesos de desarrollo de esta rama del conocimiento, al aprendizaje o construcción del pensamiento matemático en la academia. Este punto de vista busca relacionar de manera emotiva y estrecha a los estudiantes con la actividad Matemática para desarrollar los procesos del pensamiento que ésta implica y dotar de sentido y significado el aprendizaje de la misma.

[30] Torrance, E. y Myers, R. (1970). "Creative Learning and Teaching". Dodd, Mead y Company. Inc., USA. Traducción Española: "La Enseñanza Creativa". Educación Abierta, Santillana. Aula XXI. Madrid. (1976).

A pesar que algunos investigadores afirman que la frase problema no rutinario es una redundancia, basados en que un problema conlleva intrínsecamente una solución establecida en ciertas acciones de razonamiento que no se repiten de manera frecuente, se decide a partir de las teorías del umbral de dificultad individual y la no apropiación o conocimiento por parte del resolutor de la situación abordar una definición de problema no rutinario.

En la Formación Inicial Docente[31] se plantea que un problema es no rutinario cuando exige cierto grado de creación y originalidad por parte del estudiante, pues el educando no conoce de manera previa la solución o un método para solucionarlo. La resolución de un problema no rutinario exige un verdadero esfuerzo, pero no lo hará si no tiene razones para ello.

Un problema no rutinario:

- Deberá tener un sentido y un propósito, desde el punto de vista del resolutor, por eso es necesario que sea parte de las realidades concretas de los individuos, deberá estar relacionado, de modo natural, con objetos de la vida real o situaciones familiares.
- Deberán tener un nivel de complejidad superior pero acorde a los conocimientos y al grado de los estudiantes, además de una función clara del porqué de la misma.
- Deberá servir a una finalidad comprensible para él, integrando valores sociales, culturales y sociopolíticos acordes con el entorno y contexto de la actividad.

[31] Formación Inicial Docente. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. Recuperable el 21 de febrero de 2014 en la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf

Estas situaciones contribuyen a fomentar ambientes pedagógicos cualitativamente diferentes, en ellos, los estudiantes hacen conjeturas, investigan y exploran ideas, prueban estrategias, discutiendo y cuestionando su propio razonamiento y el de los demás, en grupos pequeños y en ocasiones con todos los estudiantes del curso.

Si bien, el tratamiento y la resolución de problemas en las clases de Matemáticas no garantiza la efectividad de los procesos de enseñanza, estimular este interés, es el propósito que subyace al trabajo con problemas reto en el salón de clases. Es muy conocido que los problemas retadores animan al estudiante a pensar con autonomía, a analizar, a debatir, a razonar y a exponer su razonamiento. Cuando el estudiante emprende el desafío de pensar y razonar en Matemática, y de comunicar los resultados de su pensamiento por escrito u oralmente, enfrenta a la vez la necesidad de expresar sus ideas de manera clara y convincente. Esta comunicación posee ciertas ventajas y es valiosa en el proceso, tanto para el estudiante como para el grupo donde se desarrolla la actividad, los demás integrantes del colectivo asimilan de los métodos y estrategias empleadas por el resolutor.

Los problemas retadores exigen de los individuos la unión de conceptos relacionados, el establecimiento de enlaces con otras áreas de la Matemática. Con estos problemas se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de esta ciencia o de alguna rama en particular, sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de las Matemáticas superiores.

Los problemas retadores no solo examinan y ponen a prueba de manera directa el conocimiento o las destrezas, y el razonamiento matemático de los estudiantes, sino además la habilidad de encarar retos más usuales en la vida diaria, favorecen el desarrollo del razonamiento lógico y la capacidad de manejar situaciones inesperadas. Trabajar con problemas retadores, permite que tanto el estudiante como el profesor puedan apreciar sus logros y juzguen su práctica desde una perspectiva local, nacional y global.

Basada en la extensa investigación realizada sobre el tema, la escasa literatura especializada que aborda y caracteriza de manera explicativa y clara, este concepto y la delgada línea que existe entre la comprensión de problema no rutinario y problema reto, a pesar de ser estos términos ampliamente utilizados en muchas de las áreas del saber, se expresa a continuación una caracterización de problemas reto o retadores.

Pérez (2004), plantea que *"Los problemas retadores son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento."*[32]

Por otra parte "*Los problemas retadores exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior"*[33]. Estos son criterios que son compartidos por la autora de esta investigación.

En los problemas los métodos de solución necesitan de un nivel superior de interiorización y comprensión de conceptos, ideas matemáticas; los individuos

[32] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[33] ibidem

involucrados deben contar no solo con conocimientos específicos del dominio de solución, sino amplios conocimientos de dominios afines, un nivel de razonamiento elevado, gran capacidad de generalización y abstracción y sobre todo una experiencia y adiestramiento en su solución.

Los problemas reto son potenciadores del pensamiento en los estudiantes y sobre todo una gran fuente de motivación en aquellos que muestran un talento especial, fortaleciendo la voluntad de llegar a la solución con la aceptación del desafío, el manejo de la frustración en situaciones en que no pueda hallarse la solución a pesar de los intentos.

2.1.2. La resolución de problemas en las olimpiadas colombianas de matemática

Las Olimpiadas de Matemáticas son universalmente conocidas, tanto en la comunidad de matemáticos como en la comunidad en general. Es importante reconocer que gracias a estos eventos sale a relucir el poder creativo y la solidez del pensamiento matemático de los estudiantes, así como la confianza y su capacidad de resolver problemas de singular dificultad y naturaleza.

Los eventos nacionales e internacionales de competiciones Matemática conforman un programa de justo enriquecimiento de la instrucción de la Matemática, comprende actividades a distintos niveles y de diverso entorno que permiten a cada estudiante buscar su óptimo nivel de actuación en Matemática.

Las olimpiadas colombianas de Matemáticas son un programa con más de 25 años de existencia que buscan ser un soporte para el profesor en su pesquisa de la exquisitez y la excelencia en el salón de clase. Algunos programas abarcan actividades investigativas en el marco de solución de problemas que requieren varias días, semanas o meses de consagración, reflexión y razonamiento por parte del estudiante.

Las olimpiadas colombianas de Matemática les abren las puertas a los estudiantes y profesores a un mundo más allá de las pretensiones de ejercicios repetitivos de los cuales están llenos los libros de textos de los diferentes grados, donde se mecaniza un resultado por la repetición, y se crean hábitos no correctos en los educandos al no interiorizar y analizar las situaciones que se presentan. Cada reto expresado como un problema matemático acerca al estudiante a un nivel superior de raciocinio, investigación, conjeturas, comprobaciones y demostraciones.

Los problemas seleccionados para los concursos de Olimpiadas de Matemáticas abren las puertas "… *al estudiante para razonar, investigar, conjeturar, comprobar y demostrar,…*"[34] Estos problemas abarcan diferentes temáticas de la matemática escolar: aritmética, álgebra, geometría, combinatoria, estadística y probabilidad. En esta tesis se abordaran problemas de geometría, específicamente sobre la construcción del concepto de volumen.

Los problemas, celosamente seleccionados para los concursos que tienen lugar durante la realización de estos eventos, dejan una enorme huella sobre el progreso intelectual de cada estudiante. También demandan una apropiada preparación académica para manejarlos con esa exquisita e increíble combinación de gozo e infortunio que impulsa a cada uno a realizar y dar lo mejor con cada esfuerzo.

[34] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

A continuación se presentan los objetivos de las olimpiadas colombianas de Matemática.

- *“Proponer ante la comunidad estudiantil metas consecuentes con la búsqueda de la excelencia académica en matemáticas.*
- *Impulsar la investigación y el pensamiento creativo de los estudiantes del país dentro del marco de sus estudios, desde la escuela primaria hasta los universitarios.*
- *Identificar estudiantes con especial interés y capacidad en Matemáticas para brindarles orientación y apoyo en sus estudios.*
- *Formar líderes de la comunidad científica colombiana*[35]*.*

Las orientaciones actuales de las olimpiadas colombianas de Matemáticas, ofrecen oportunidades para lograr una preparación adecuada en los concursantes: asesorías, publicaciones y otros materiales para sustentar cursos regulares y dinamismos de clubes científicos en cada comunidad e institución educativa del país. También se brindan problemas de variados niveles de complejidad en las diferentes competitividades; se puede decir que existe una experiencia olímpica esperando por cada estudiante o grupo.

En Colombia y en particular la Universidad Antonio Nariño, le dan significación a la motivación, desarrollo y la importancia de formar y promover en los jóvenes el interés por las participar en las Olimpiadas de Matemáticas, por estos motivos se han creado

[35] Tomado de la Universidad Antonio Nariño. (2012). www.uan.edu.co. Recuperado el 15 de 08 de 2013 de la URL: http://olimpia.uan.edu.co/olimpiadas/public/frameset.jsp.

centros para promover y detectar estudiantes y jóvenes con talento para esta rama de las ciencias.

2.2. El trabajo con concepto

Del latín *conceptus,* los conceptos son construcciones o representaciones mentales, ideas abstractas, de lo que nos rodea y podemos apreciar, por medio de las cuales se pueden apreciar las experiencias que emergen de la interacción con el entorno circundante, se define el mundo en el que nos encontramos y el que nos rodea.

Putnam (1975) acota sobre la definición de concepto: *"…estas construcciones surgen por medio de la integración en clases o categorías, que agrupan nuestros nuevos conocimientos y nuestras nuevas experiencias con los conocimientos y experiencias almacenados en la memoria…"*[36]. Por concepto se entiende el reflejo de una clase de individuos, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes.

La comprensión de los conceptos matemáticos asociados es esencial para lograr un aprendizaje robusto del contenido geométrico, en particular de la construcción del concepto de volumen. Esto está dado en que:

- Es fundamental para la comprensión de relaciones matemáticas.
- Es premisa para el desarrollo de la capacidad de aplicar lo aprendido de forma segura y creativa.
- Es esencial para el adiestramiento lógico lingüístico.

[36] Putnam, H. (1975), The meaning of "meaning" , en *Mind, Language and Reality*, Cambridge University Press p. 218-227.

- Permite la trasmisión de importantes nociones referentes a la teoría del conocimiento y el desarrollo de numerosas propiedades del carácter.

Los conceptos se caracterizan por su contenido y extensión. El contenido de un concepto abarca todas las características esenciales comunes a los objetos considerados y que han sido tomados para la formación de clases. La extensión de un concepto comprende a todos los objetos que pertenecen al concepto de acuerdo con su contenido.

A continuación se hace referencia al concepto de volumen, que constituye la base para el contenido temático en octavo grado.

2.2.1. Referentes teóricos sobre el concepto de volumen

El concepto de volumen es tratado desde diferentes aristas, pues:

- Se puede definir el concepto de volumen como una magnitud escalar, definida como la extensión en tres dimensiones de una región del espacio, una magnitud derivada de la longitud, ya que se halla multiplicando la longitud, el ancho y la altura.
- Matemáticamente hablando, el volumen de una región del espacio euclídeo, o espacio tridimensional, cumple con los cinco axiomas de Euclides: es la cantidad de espacio tridimensional obtenida por triple integración del elemento diferencial de volumen extendida a dicho dominio.
- Explicado desde la Física, resulta de la relación entre masa y densidad ya que la densidad misma se define como el cociente entre la masa y el volumen.

Resulta interesante resaltar también que, como magnitud física, se reconocen tres clases de unidades de volumen**:** las de volumen sólido (se utilizan para medir el volumen de un cuerpo por medio de unidades de longitud que se elevan a la tercera potencia), las unidades de volumen líquido (desarrolladas para establecer el volumen que ocupa un líquido contenido dentro de un recipiente) y las unidades de volumen de árido o unidades de capacidad (las cuales permiten calcular el volumen que ocupan las cosechas que se almacenan en silos y graneros).

En el sistema internacional de unidades, medida que se utiliza para medir el volumen es el metro cúbico (m^3), la cual es equivalente al espacio que ocupa un cubo cuyos lados miden 1 metro (m). Es importante desarrollar con los estudiantes actividades experimentales donde ellos manipulen y observen la relación entre las medidas de capacidad y volumen. En este caso se toma un recipiente que contiene un litro de algún líquido y éste se vierte en un cubo de arista 1 dm, el líquido ocupará exactamente el espacio del recipiente cúbico (Ver figura 2).

$1\ litro = 1dm^3$

1 *litro*

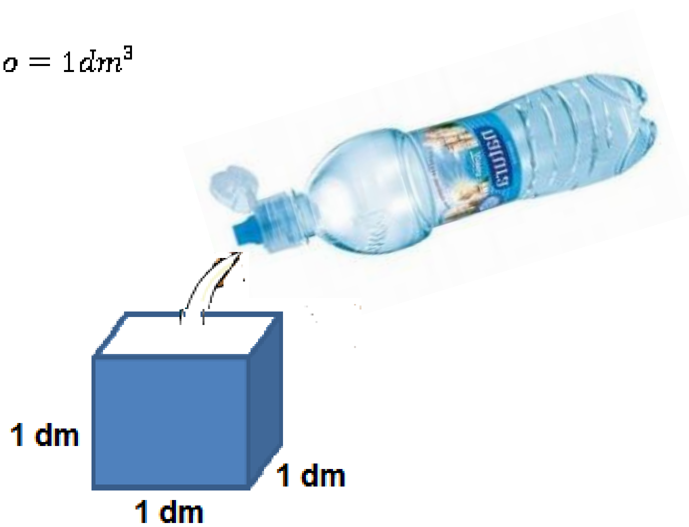


Figura 2. Relación entre las medidas de capacidad y volumen

2.2.2. Contenido teórico sobre los cuerpos geométricos abordados en el grado octavo

Después de un estudio del espacio bidimensional en cursos anteriores, se define de manera sencilla a los estudiantes, el espacio tridimensional como aquel espacio en el cual se tiene libertad de generar figuras con tres dimensiones de movimiento, alto, largo y ancho y el cual se llama en lo sucesivo el espacio. Para un mayor esclarecimiento sobre este tema, se usará inicialmente una esquina del aula y se realizará una analogía con el origen de coordenadas, además se explicará, que en este espacio es donde tienen lugar los cuerpos sólidos.

Antes de pasar a la construcción de las figuras tridimensionales que se tratarán en el curso de geometría del espacio, se comienza con concepto de un sólido o cuerpo geométrico como también suele encontrarse en la literatura revisada.

Un sólido o cuerpo geométrico es una figura geométrica que tiene tres dimensiones (largo, ancho y altura), ocupa lugar en el espacio tridimensional y por lo tanto tiene un volumen. Estos cuerpos geométricos pueden ser agrupados de dos categorías: poliedros y cuerpos redondos. Los poliedros son cuerpos geométricos formados por muchas caras y cuentan con los siguientes elementos: caras (superficies planas que se intersectan entre sí), aristas (la intersección de dos caras) y los vértices (donde se intersectan tres o más aristas). Los cuerpos redondos son sólidos que tienen superficies curvas.

Para la construcción de los cuerpos geométricos que se estudiaran en el curso se parte del desarrollo de los mismos en el plano y luego se convierten en figuras tridimensionales, a pesar que en la explicación aportada en este apartado se parte del cuerpo geométrico, se explica sus propiedades y a continuación se terminará con el desarrollo. En cada caso se aportan ejemplos en la vida real donde se pueden encontrar estas figuras en construcciones, y otros objetos.

Los poliedros regulares (Ver Figura 3), también llamados sólidos platónicos, pues Platón es quien primero hace mención a ellos, cuando intenta describir la naturaleza que compone a los cuatro principales elementos (tierra, fuego, viento y agua), aunque Proclo y otras fuentes, le atribuyen su descubrimiento a Pitágoras, Tetraedro un matemático ateniense contemporáneo con Platón, es quien da una explicación y descripción matemática de ellos y de quien también se conoce la primera prueba de que no existen otros poliedros regulares convexos. Estos sólidos platónicos cumplen con el Teorema de los poliedros de Euler. De todos ellos se hará un énfasis especial en el cubo.

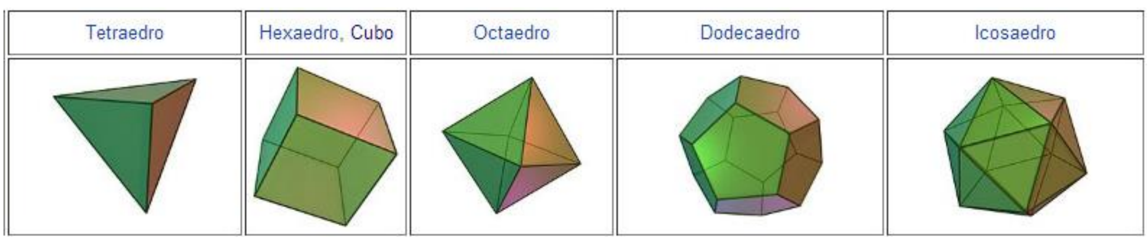


Figura 3. Los cinco sólidos platónicos

El Cubo, es una figura espacial desde tiempos remotos y en diferentes culturas, ha sido la figura geométrica más utilizada para dar forma a los dados utilizados en innumerables juegos. Su desarrollo se muestra en la Figura 4.

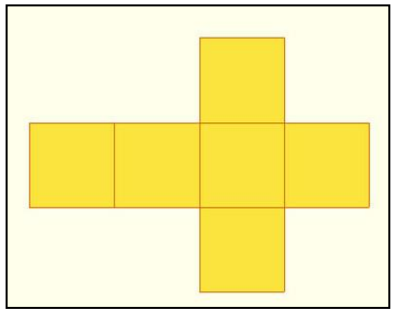


Figura 4. Desarrollo en el plano de un cubo

Este cuerpo es un poliedro o hexaedro regular formado por seis caras cuadradas congruentes, también puede ser clasificado como un paralelepípedo, o un prisma de base cuadrangular y altura equivalente a uno de los lados (ver figura 5).

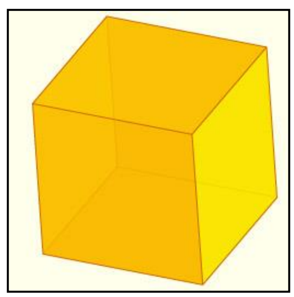


Figura 5. Representación espacial del cubo

El volumen de este cuerpo geométrico está dado por el área de la base por la altura, pues al coincidir la altura con los lados del cuadrado que forma la base de este sólido queda la fórmula: $V= a \cdot a \cdot a= a^3$.

A partir del desarrollo en el plano del cubo, se deduce el área de la superficie del mismo, como la suma de los 6 cuadrados que la forman: $A_T= 6 \cdot a^2$, donde a es la longitud de los lados.

Los poliedros irregulares son cuerpos geométricos llamados así por tener caras y ángulos desiguales, en esta clasificación se incluyen a los prismas regulares, y a las pirámides entre otros cuerpos geométricos.

El prisma regular recto: es un poliedro que tiene dos bases (caras) paralelas congruentes, los lados de las bases son llamadas aristas de la base y las demás caras están formadas por rectángulos, y estos lados son llamados aristas laterales (ver Figura 6).

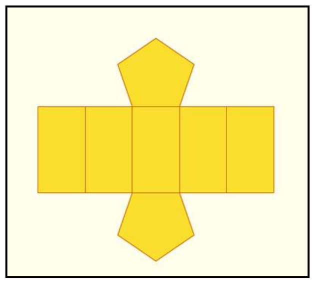


Figura 6. Desarrollo del prisma recto

Se debe aclarar a los estudiantes que aunque se generaliza usando un cuadrado como base, puede ser cualquier polígono regular: cuadrado, pentágono, hexágono, octágono, etc. En un prisma recto pueden ser identificados los siguientes elementos (ver Figura 7).

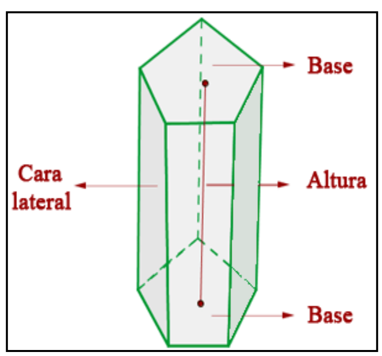


Figura 7. Elementos de un prisma recto

Cara lateral: el número de caras laterales, esta dada por la cantidad de lados del polígono de la base, es un rectángulo donde uno de los lados coincide con uno de los lados de la base y el otro lado con la altura del prisma, es importante decir que en este tipo de prismas las caras laterales son congruentes.

Altura: es la distancia que existen entre las dos caras bases del cuerpo geométrico.

Base: la base de un prisma regular recto es un polígono regular y es congruente y paralelo a otro idéntico.

De este desarrollo de un prisma recto se infiere que el área de la superficie se puede hallar: $A_T = 2A_B + n \cdot a \cdot h$, n es la cantidad de lados del polígono de la base, a es la longitud del lado del polígono regular y h es la altura del prisma. El volumen de un prisma recto puede ser computado como: $V = A_B \cdot h$, donde h es la altura del prisma.

Los prismas irregulares (ver Figura 8) son en esencia muy parecidos, a la hora de calcular las áreas de sus superficies, pero las fórmulas para calcular el área de sus superficies no pueden ser generalizadas. La principal diferencia entre ellos con respecto al prisma regular, es que los polígonos que forman las bases pueden ser polígonos cóncavos, o polígonos convexos y es necesario hacer un análisis de cada uno de los lados de estas bases, aunque la forma de hallar el volumen si coincida (ver Figura 9).

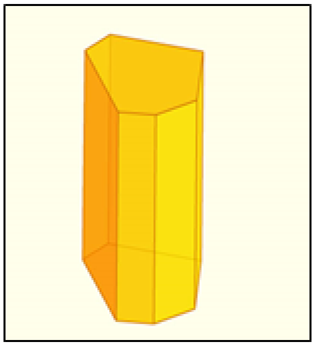


Figura 8. Prisma recto irregular

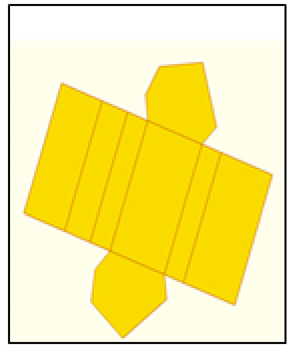


Figura 9. Desarrollo en el plano de un polígono irregular recto

La pirámide: es un cuerpo geométrico de los más conocidos y utilizados desde los comienzos de la civilización humana, llega a nuestros días como uno de los principales legados arquitectónicos de los egipcios (ver Figura 10).

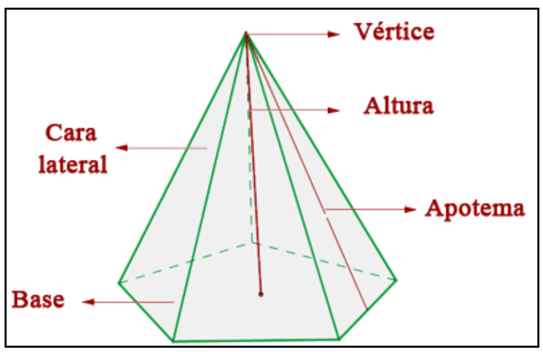


Figura 10. Pirámide recta y sus elementos

La pirámide puede ser definida como un poliedro limitado por un polígono de la base, cuyas caras laterales formadas por triángulos confluyen en un punto llamado cúspide, ápice o vértice de la pirámide. Existen varios tipos de pirámides dadas por el polígono que forma la base y por la recta que va desde el centro de la base hasta el ápice de la misma:

- Pirámide recta: todas sus caras laterales forman triángulos isósceles y la recta que pasa por el ápice es perpendicular a su circuncentro.

- Pirámide oblicua: no todas sus caras son triángulos isósceles.
- Pirámide regular: su base está formada por un polígono regular y es también considerada una pirámide recta.
- Pirámide convexa: su base está formada por un polígono convexo.
- Pirámide cóncava: su base está constituida por un polígono cóncavo.

Elementos que conforman a una pirámide:

Cara lateral: un triángulo, en el caso de las pirámides rectas es isósceles.

Apotema: segmento perpendicular trazado desde el centro de la base a cualquier lado.

Altura: perpendicular trazada desde el vértice de la pirámide hasta el circuncentro de la base.

Vértice: punto a donde confluyen todas las caras laterales.

Base: polígono que limita a este poliedro.

El volumen de una pirámide recta se puede calcular a través siguiente fórmula: V= $\frac{A_B\ .\ h}{3}$. Para hacer un análisis del área de la superficie de una pirámide se debe tener en cuenta el tipo de polígono que da origen a su base.

El cono desde tiempos antiguos ocupó los lugares más elevados de iglesias y castillos, muchas veces formaba parte del techo de las torres (ver Figura 11). A este cuerpo geométrico también suele llamarse sólido en revolución, y se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos, al círculo formado por uno de los catetos se la llama base y al punto formado por la confluencia de las generatrices se le llama vértice.

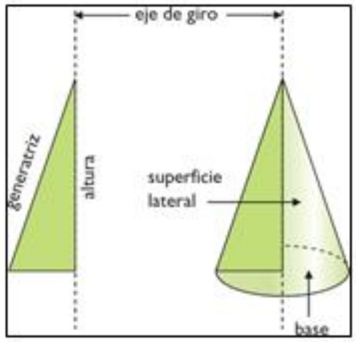


Figura 11. El cono recto y sus elementos

En el cono se pueden identificar los siguientes elementos: altura del cono, la cual se denota de manera general como (h), las generatrices del cono (g) y el radio de la circunferencia de la base que se denota como (r). La fórmula para el cálculo de volumen es: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

El desarrollo de un cono recto geométrico es un sector circular delimitado por dos generatrices, siendo la medida de la parte curva la longitud de la circunferencia de la base (Ver Figura 12). El área total de la superficie del cono recto se halla a través de las siguiente fórmula $A_T = \pi . r^2 + \pi \cdot r \cdot g$, donde r es el radio de la circunferencia de la base, y g es la medida de la longitud de la generatriz del cono recto y la generatriz del cono recto se calcula mediante la fórmula g= $\sqrt{h^2 + r^2}$.

Figura 12. Desarrollo en el plano de un cono recto.

Otro de los cuerpos geométricos ampliamente usado desde tiempo antiguos es el cilindro (Ver Figura 13), sus aplicaciones se inician en la arquitectura, con la construcción de las columnas de los templos y primeras edificaciones antiguas creadas por el hombre.

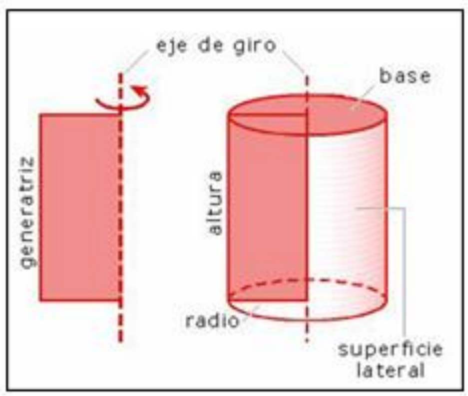


Figura 13. El cilindro recto y sus elementos

Existen varias definiciones de este cuerpo redondo, una de ella es como un sólido en revolución generado por un rectángulo que gira sobre uno de sus lados. Existe otra definición de mayor rigor matemático que define a un cilindro como una superficie de las denominadas cuádricas, formada por el desplazamiento paralelo de una recta o generatriz a lo largo de una curva plana, la cual puede ser cerrada o abierta, y se denominada directriz del cilindro recto.

En dependencia de la perpendicularidad del eje del cilindro este puede ser clasificado en cilindro recto, si el eje es perpendicular a la base o cilindro oblicuo si el eje no es perpendicular.

El volumen de un cilindro recto puede ser calculado siguiendo la siguiente fórmula $V= \pi.\ r^2.h$, donde h es la generatriz del cuerpo en revolución o la altura del cilindro. El desarrollo de un cilindro recto en un plano es un rectángulo, donde la base del rectángulo coincide con la longitud de la circunferencia y la altura es igual a la altura del cilindro, y dos círculos congruentes que son las bases del cilindro (ver Figura 14).

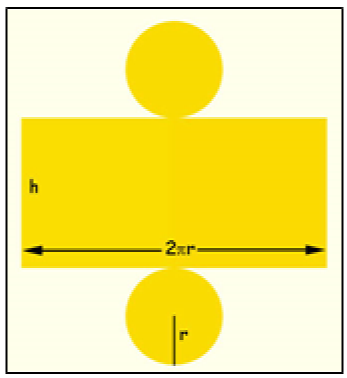


Figura 14. Desarrollo del cilindro recto en el plano.

Con este desarrollo se puede inferir que el área lateral de un cilindro puede ser calculado como el área de un rectángulo, que tiene por un lado la altura del cilindro, y por el otro lado la longitud de la circunferencia que tiene como base, y su área total como la suma del área lateral y el área de las dos círculos que forman las bases. Entonces resulta que el $A_{L=\ 2}\cdot\pi\cdot r\cdot h$, por lo tanto el $A_{T=\ 2}\cdot\pi\cdot r\cdot h + 2\cdot\pi\cdot r^2 = 2\cdot\pi\cdot r\cdot(h + r)$.

La esfera: este cuerpo puede ser definido como un sólido geométrico cerrado perfectamente simétrico, el cual no contiene ni aristas ni lados y donde todos los puntos de su superficie están equidistantes de un punto interno, llamado centro (ver

Figura 15). La esfera, es definida por Euclides como superficie de revolución que se genera haciendo girar una superficie semicircular alrededor de su diámetro (Euclides, L. XI, def. 14).

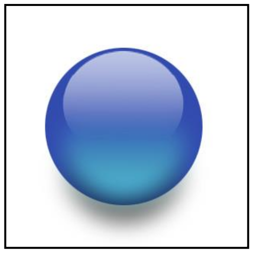


Figura 15. La esfera

Entre los elementos notables a señalar en una esfera se encuentran: cuerda, polo, diámetro, centro y radio (Ver Figura 16).

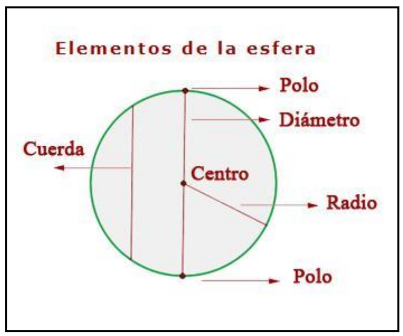


Figura 16. Elementos de una esfera

Centro: punto interior que equidista de cualquier punto de la superficie de la esfera.

Radio: distancia del centro a un punto de la superficie de la esfera.

Cuerda: segmento que une dos puntos de la superficie esférica.

Diámetro: cuerda que pasa por el centro.

Polos: son los puntos del eje de giro que quedan sobre la superficie esférica.

El volumen de la esfera puede ser calculado de la siguiente manera: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Es interesante hacer notar a los estudiantes, que no siempre estos cuerpos geométricos, aparecen en la naturaleza o en problemas de geometría del espacio de manera ideal o “pura”, en un sinnúmero de ocasiones sucede que se encuentran en composiciones complejas, o con ciertas modificaciones que hace un poco más complejo hallar sus respectivas áreas de sus superficies y volúmenes, o en algunos casos verdaderos retos al ingenio de los estudiantes (ver Figura 17).

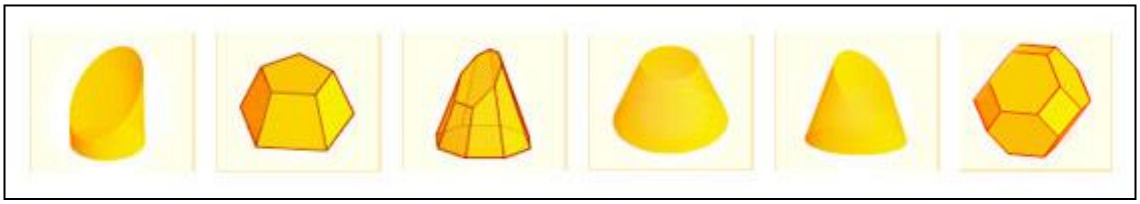


Figura 17. Otros posibles cuerpos geométricos generados por truncamiento

Es importante aclarar diferencias que existen entre varios conceptos que son utilizados indistintamente por estudiantes y docentes para expresar el volumen de cuerpos sólidos, debido a complicaciones lingüísticas o a erróneas representaciones mentales formadas en nuestra interacción con el mundo circundante. La capacidad y el volumen, a pesar que en innumerables ocasiones se suelen encontrar en la literatura usados indistintamente y ser términos equivalentes, no son iguales. Se define la capacidad de un cuerpo geométrico, o especie de recipiente como la propiedad de contener otros elementos dentro de sus límites geométricos. La capacidad es la propiedad que se refiere al volumen de espacio vacío de un cuerpo que es suficiente para contener a otros cuerpos u otros elementos.

La diferencia fundamental entre volumen y capacidad se puede observar de una manera muy intuitiva, de la siguiente forma: volumen hace referencia al espacio que ocupa un objeto y capacidad al espacio que contiene. Cuando se lleva al campo de las medidas estas dos magnitudes, calcular el volumen de un cuerpo es medir cuánto ocupa en el espacio y calcular su capacidad es medir cuánto cabe en él.

Para realizar correctamente la resolución de problemas de geometría del espacio, se necesita de una adecuada representación geométrica espacial por parte de los estudiantes, temática que se aborda con profundidad en el próximo epígrafe.

2.3. La representación geométrica espacial en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio en la Educación Básica

Se llaman representaciones "… *a las imágenes concretas de los objetos y fenómenos del mundo externo y sus propiedades que surgen en la conciencia del hombre*"[37]

Las representaciones, tal como lo señalan Castro y Castro (1993), son las notaciones simbólicas o gráficas mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. Entre las representaciones, se diferencian las internas (mentales) y las externas. Las representaciones mentales actúan como la interiorización de las representaciones externas. A su vez, las representaciones externas, son las formas a través de las cuales los sujetos hacen visibles las imágenes mentales.

Estas imágenes llegan a cobrar significado a través del lenguaje. En el significado de las representaciones, está contenido el contexto idiomático, la forma ideal de existencia del mundo de los objetos, sus propiedades y relaciones identificadas por la práctica social, elaboradas históricamente y transmitidos en el proceso de comunicación.

[37] Colectivo de autores. (1988). Psicología. Libro de textos. La Habana: Pueblo y Educación, p. 71.

En Matemáticas, las representaciones están asociadas a los signos, símbolos, formas y expresiones usuales de esta disciplina. Castro y Castro (1993), afirman que para deliberar y concluir sobre las ideas matemáticas es necesario hacer una representación interna de la misma forma que mantenga posibilidad de manipular tales representaciones. Los signos, gráficos o notaciones, con soporte físico externo, que se usa para la representación tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza, lo que hace necesario distinguir entre representaciones externas e internas.

Ballester et al. (1992), consideran que la representación geométrica espacial "*… permite realizar una modelación de la realidad objetiva ya sea en la mente del individuo o materializada a través del dibujo o en objetos construidos, para destacar relaciones de posición, de orden, de tamaño, de continuidad, de igualdad y otras; así como movimientos de cuerpos en el espacio*"[38]. En la resolución de problemas no rutinarios o retos sobre la construcción del concepto de volumen, se consideran necesarias las características de la representación geométrica espacial, estas son:

- *"Son imágenes de las figuras y cuerpos geométricos que se conservan en la conciencia del hombre estando ausentes, es decir cuando esos objetos y fenómenos no actúan directamente sobre los órganos de los sentidos. Por tal motivo, pueden ser reproducidas sin la presencia de las figuras u objetos.*
- *Su variabilidad, pues en ellos cambian con facilidad el color, la forma, el tamaño del cuerpo o figura geométrica imaginada.*

[38] Ballester, S. y et al. (1992b). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo II. La Habana: Pueblo y Educación, p. 192.

- *Son imágenes generalizadas, donde se presentan las particularidades similares de muchos objetos análogos de la clase dada. Por ejemplo, cuando es necesario imaginar un prisma de base cuadrada y no un prisma general, en nuestra imaginación representamos las particularidades características de todos los prismas de base cuadrada, sus bases son cuadrados: sus caras laterales son rectángulos, etc.*
- *Son imágenes palpables de los objetos y figuras geométricas.*
- *Son un reflejo sensible de la realidad, pues brindan un conocimiento de las propiedades externas de las figuras y cuerpos geométricos percibidos, así como sus relaciones.*
- *Se representa lo que posee una utilidad, un significado geométrico, una objetividad para el alumno en forma íntegra"[39]. (p. 97)*

Existen dos niveles de representación de un cuerpo geométrico: las formas de representación próxima a los cuerpos geométricos reales y las formas de representación más alejadas de los cuerpos geométricos reales, representaciones bidimensionales (Parzysz 1988; Citado por Gutiérrez, 1998).

La representación geométrica espacial es importante para la construcción del concepto de volumen, dado que se trata de pasar de cuerpo que se encuentran en tres dimensiones a sus representaciones en el plano.

[39] Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científica de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y caballero", Holguín. Cuba.

2.4. La manipulación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente para la construcción del concepto de volumen en la Educación Básica

La manipulación puede ser definida como un grupo de acciones o procedimientos que utilizados correctamente potencia en los individuos la interacción con modelos virtuales o situaciones de la vida real. Este proceso permite la modificación de eventos, cuerpos geométricos y otros elementos, para aprender las características principales de un fenómeno social, físico o de otra naturaleza, y para estudiar aquellas propiedades que a pesar de las acciones realizadas sobre ellas permanecen invariables, le dan identidad y permiten representarlo.

La primera mención de la manipulación geométrica en la enseñanza de la Matemáticas, se remite a doscientos años atrás, con Federico Froebel, un pedagogo alemán, además creador de los kidergartens. Este autor a través de la observación comprendió como los niños mediante el juego socializaban y así notó como a través de ciertas estrategias de 20 obsequios y ocupaciones se podía influir en la enseñanza de las futuras generaciones desde las primeras etapas de la vida.

En sus estrategias los obsequios tenían como objetivo enseñarles el conocimiento de figuras geométricas, las diferencias entre los tamaños, los colores y las formas. Estos obsequios eran elaborados casi siempre en madera, arcilla y papel; las ocupaciones que manejaba Froebel eran casi por lo general finas y necesitaban del intelecto de los estudiantes. Entre ellas estaban la costura, el tejido con las cuales no solo Froebel buscaba relacionarlos con las costumbres, sino también con la manipulación de diferentes elementos, apreciar la textura, las formas de manipular los diferentes materiales y elementos implicados en estas actividades.

En Matemáticas se habla muchas veces de manipulaciones rutinarias, refiriéndose a aquellos procesos que pueden realizarse con una atención mínima, casi automáticos, liberando la atención y concentración de los individuos para el aprendizaje de nuevos conceptos e ideas.

La manipulación geométrica es considerada un conjunto de procedimientos y acciones que involucran a los estudiantes en acciones donde se debe interactuar con cuerpos geométricos: modificar, tocar, operar, maniobrar y modelar construcciones geométricas reales o virtuales. Este proceso propicia aprender características que solamente pueden ser apreciadas cuando se acciona sobre estos cuerpos geométricos, y les permite a los estudiantes interiorizar detalles por la aproximación a estos objetos.

Actualmente el empleo de las TIC ha potencializado el uso de la manipulación sobre los medios tradicionalistas, sustituyendo a estos en muchos salones de clases. La existencia de varios software especializados, enfocados a la enseñanza de la geometría del espacio, ha desplazado a aquellos medios empleados de manera tradicional que no cumplan con el dinamismo que la actividad requiere en los tiempos actuales. La autora de esta tesis considera que ambas formas son importantes y que el proceso se debe iniciar con los medios tradicionales, a continuación la utilización de los SGD y algunos momentos combinarse.

En la enseñanza de la Matemática en nuestros días, se tiene la posibilidad de usar múltiples ayudas, las cuales por su naturaleza pueden ser agrupadas en físicas (objetos y materiales para la creación de representaciones de esos objetos), donde los estudiantes tienen la posibilidad de palpar y tocar, para experimentar los conceptos matemáticos. La otra forma son los ambientes virtuales en los cuales a través de software especializado se recrean ciertas situaciones con la posibilidad de interactuar con ellos.

Estas ayudas, si están bien diseñadas sean virtuales o físicas tienen la gran utilidad de conectar a los estudiantes con las representaciones de los conceptos e ideas matemáticas relacionadas. También se dirige a fortalecer y conceptualizar problemas y relaciones sobre los cuales pueden pensar, reflexionar y resolver.

A través de estas herramientas se puede alcanzar manipulaciones geométricas por medio de las cuales los estudiantes logran un mayor nivel de comprensión y crean entornos geométricos beneficiosos. Estas manipulaciones le permitirle a los estudiantes un mayor nivel de motivación al ser más reales que los tradicionales ejercicios de lápiz y papel, desarrolla en los estudiantes la posibilidad de crear modelos manipulables y modificables, también le propicia expresar estas acciones de manera algebraica.

La manipulación de estas herramientas en proceso de enseñanza aprendizaje induce a la creación de vínculos entre lo real y lo concreto y el simbolismo matemático. También promueve el cambio, y los procesos de composición y descomposición de formas con un menor esfuerzo, pero a la vez potenciando el pensamiento matemático al proveer de un extenso conjunto de herramientas, para visualizar los efectos de expresiones matemáticas o de exploración de los cambios en las relaciones matemáticas de las expresiones que les dan origen.

Muchas investigaciones en curso en Asia, Europa, América del Norte, se basan en el uso de computadores para estimular las manipulaciones espaciales por parte de los estudiantes, unas veces usando software especializados para fines donde se crean situaciones y composiciones que deben ser manipuladas. Entre estas manipulaciones se tienen cambios de formas, rotación, otras partiendo de juegos de estrategias y simulación donde los estudiantes deben experimentar, asumir roles, modificar condiciones, tomar decisiones importantes para lograr niveles de satisfacción y de comodidad.

La manipulación geométrica permite:

- *"Modelar tanto objetos geométricos reales, como objetos geométricos virtuales.*
- *Buscar características y propiedades de las figuras geométricas que pueden ser percibidas únicamente cuando se manipula con ellos. De esta forma el alumno se fija más en ciertos elementos de los cuerpos geométricos que pasarían inadvertidos en una percepción exclusivamente visual.*
- *Ayudar a concentrarse en una parte más reducida de la percepción y, de esta manera, a conocer las particularidades, los detalles y analizar los cambios que se producen en los cuerpos geométricos"*[40]*.*

La manipulación geométrica en el proceso de construcción del concepto de volumen es esencial, pues la composición y descomposición de cuerpos geométricos, ayuda al estudiante a crear un aprendizaje robusto de este concepto.

---

[40] Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científica de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y caballero", Holguín. Cuba, p. 48.

2.5. La visualización en el proceso construcción del concepto de volumen en la Educación Básica

El desarrollo de la visualización juega un papel importante y central en el aprendizaje de la geometría del espacio, y no una actividad recreativa como suelen pensar algunos docentes. Es necesario hacer un llamado a los profesores de Matemáticas para incorporar, promover y desarrollar el proceso de visualización en la escuela con los estudiantes.

La visualización es un “elemento importante” que está siendo descuidado en la enseñanza, si se quiere lograr que los estudiantes aprendan geometría del espacio, definitivamente tienen que desarrollar la habilidad de visualizar. Pero la visualización no se práctica en la escuela solamente, es decir, es una habilidad que tiene que ser entrenada y desarrollada a lo largo de la vida de un estudiante, de ser posible desde sus primeros años.

Es importante anotar, que se debe hacer una diferenciación entre ver y visualizar, de tal manera que el ver se reduce a una capacidad fisiológica, mientras que la visualización es una actividad cognoscitiva, inherente al ser humano, vinculada con la cultura del sujeto: historia, ideología, tradiciones, costumbres, valores, entre otras.

Una gran parte de las investigaciones que se realizan hoy en día en Matemática Educativa o Didáctica de las Matemáticas, así como en otras disciplinas científicas, están centradas en el tema de la visualización. En la enseñanza de la geometría del espacio en particular, investigaciones realizadas en este campo, reportan sobre el aporte de la visualización en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, mediante el análisis e interpretación de diferentes formas de representación. La mayoría de las investigaciones realizadas sobre el tema se centran en el estudio de los problemas y la descripción de procesos de educación en la escuela secundaria, relacionados con aspectos específicos de la visualización espacial.

De manera muy inconsecuente se puede definir la visualización como la acción de generar, formarse o hacer comprensible en el pensamiento la imagen o esquema de una cosa que no se tiene a la vista o delante, o de un concepto abstracto, o datos. Existen varios tipos de visualización que aunque no son únicamente aplicadas en el radio de acción de las Matemáticas pueden ser utilizadas de manera efectiva para lograr resultados positivos en la resolución de problemas en geometría.

La visualización científica, se dedica a la metamorfosis de los datos científicos, pero abstractos, en imágenes. Ejemplos de estas visualizaciones son los dibujos de diagramas para representar funciones matemáticas o gráficos 3D para visualizar el interior de un hombre, o simular procesos difíciles de modelar en laboratorios o de apreciar en la vida real.

La visualización creativa es una técnica psíquica para alcanzar una posición emocional deseada a través de figurarse o recrearse una imagen agradable concreta. Por ejemplo, muchos deportistas y músicos, se estimulan imaginando la ejecución perfecta de sus movimientos y muchas personas mentalizan una estado positivo y relajante, tranquilizador o triunfador al que quiere llegar, para enfocarse al logro de este.

Según Hitt (2002), "… *la visualización Matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la* *respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado…*”[41].

Mientras que Cantoral et al (2000), en su obra “Desarrollo del pensamiento matemático” relatan que: *“...se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico…*”[42].

Arcavi y Hadas (1998), cuando definen la visualización generalmente se refieren a la destreza para representar, trasfigurar, crear, significar, evidenciar y reflejar sobre información visual.

Para Encarnación y Castro (1997), el término visualización se utiliza, por lo general, con referencia a figuras o representaciones gráficas ya sean en el exterior o en el interior, es decir, sobre soporte físico: papel, pantalla, entre otros, o en el pensamiento. Consideran además que el pensamiento visual está estrechamente unido a la capacidad de formar imágenes mentales y a la habilidad para visualizar cualquier otro concepto matemático, o problema, donde se requiere además de la destreza de interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente, y la pericia para expresarla sobre un soporte material.

En general y desde el punto de vista teórico del proceso de razonamiento/conocimiento, queda claro que la visualización matemática tiene

[41] Hitt F. (Editor, 2002a). Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

[42] Cantoral, R. et al.(2000). Desarrollo del Pensamiento matemático. México. Editorial Trillas. p. 146.

inmensas y reales posibilidades de transformarse en pensamiento abstracto o comprensión teórico matemática. Diversos investigadores han comprobado prácticamente este hecho, y sus recomendaciones señalan las bondades que su uso persistente en la enseñanza de la geometría del espacio podría constituir para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes.

La visualización matemática a la vez que induce a la realización de generalizaciones puede facilitar la comprensión de las reflexiones y consideraciones que permitan sustentar como válidas dichas generalizaciones. Sin embargo, no se debe entender que cualquier forma de visualización tiene garantizada su mutación en pensamiento abstracto, pues suele ocurrir que en algunas ocasiones las generalizaciones que se provocan corren en direcciones diferentes con respecto a las concepciones teóricas. Por ello se hace inevitable el diseño del proyecto y la validación de las distintas formas de visualización idóneas para ser usadas en la enseñanza de la geometría del espacio.

Desde el punto de vista de la psicología evolutiva, (Vigotsky, 1999), precisa que el pensamiento considerado abstracción pura, necesita de un medio material para hacerse concreto, de expresarse y sea posible su comunicación. El medio material por el cual puede ser expresado el pensamiento es el lenguaje en sus diversos tipos entre ellos, el gestual, los sonidos, los signos, el pictórico, el figurativo (de imágenes diagramas o figuras), el simbólico y el de las palabras.

Aun cuando en su desarrollo ontogenético, el pensamiento y el lenguaje provienen de distintas cepas genéticas, en un momento determinado estas dos directrices confluyen y entonces el pensamiento se torna verbal y el lenguaje racional. Este carácter verbal del pensamiento es la más avanzada. Guétmanova (1989), le llama pensamiento abstracto, y desde el punto de vista de la lógica lo reconoce como medio en el proceso de conocimiento, en sus formas esenciales: el concepto, el juicio y el razonamiento.

En esta tesis se asume lo dicho por Zimmermann y Cunningham (1991) al considerar que "... *la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática*"[43]. Estos autores consideran a la visualización en el plano externo como ilustración y en el plano interno como producto de la imaginación del hombre, estas cuestiones son importantes para la construcción del concepto de volumen.

La visualización espacial es una de las maneras en las que se manifiesta la visualización matemática, según Gutiérrez (1992), la visualización espacial ha sido investigada por varios autores como Bishop (1980, 1983, 1989), Bishop & Nickson (1983), Gaulin (1985), Gaulin & Puchalska (1987), Hoffer (1981, 1987, 1988) y Presmeg (1986), los cuales han realizado importantes aportes.

Gutiérrez (1992) define la visualización espacial como "[...] *un conjunto de destrezas, predominantemente mentales, que permite actuar a los individuos en el contexto de las representaciones gráficas matemáticas, tomando este contexto en un sentido*

[43] Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1990). Visualization in Teaching and Learning. Mathematics, MAA Notes Number 19. USA, Mathematical Association of America.

amplio, que abarca las representaciones usuales de los diferentes campos matemáticos…"[44]. Criterios estos que son considerados en esta tesis.

Guzmán (1991) caracteriza a la visualización en el contexto escolar a través de las siguientes valoraciones:

- Es la base de la que surgen los conceptos y métodos del campo geométrico.
- Estimula el interés hacia problemas relacionados con los objetos de la teoría geométrica espacial.
- Sugiere las relaciones existentes, capaces de conducir de forma confiable hacia la resolución de los problemas geométricos y hacia la construcción de la teoría geométrica del espacio.
- Una potente ayuda para la retención de forma única y resumida de los contextos del aula y de la vida que surgen recurrentemente en el trabajo geométrico.
- El medio o vehículo más eficaz para la transferencia rápida de las ideas geométrica espaciales.
- Poderoso soporte en la actividad subconsciente en torno a los problemas geométricos espaciales.

Majmutov (1983), distingue ocho formas de visualización y las resume en el contexto geométrico de la siguiente manera:

- La visualización es un medio de ilustración de figuras geométricas.

[44] Gutiérrez, Á. (1992). La enseñanza de la Geometría de los Sólidos en la EGB. Memoria final del proyecto de investigación. Formato pdf. Valencia, p. 219.

- La visualización es un medio de soporte y de gran ayuda en la resolución de problemas geométricos.
- La visualización refuerza los conocimientos y conceptos geométricos.

Estas tres formas de concebir la visualización son necesarias para la construcción del concepto robusto de volumen y se retoman en las actividades conformadas por problemas no rutinarios.

Conclusiones del capítulo 2

Se abordan los principales autores que han trabajado la teoría de la resolución de problemas, se precisan algunas definiciones y se asume como estrategia de resolución de problema la propuesta por Polya (1945), donde se concretan en cada una de ella las acciones que se pueden desarrollar.

Algunas razones confirman la necesidad de la enseñanza de la resolución de problemas, como una prioridad en la enseñanza de la geometría del espacio, específicamente para la construcción del concepto de volumen, entre las cuales se destacan:

- La resolución de problemas geométricos espaciales, implica poner un mayor énfasis en el desarrollo del aprendizaje y el razonamiento, que en la memorización de los conceptos, con lo que se logra que los estudiantes piensen de manera evolutiva, productiva y creativa.
- La resolución de problemas es un medio de instrucción y refuerzo para la enseñanza aprendizaje de los contenidos de la geometría del espacio en el contexto del aula y fuera de este. Les ofrece a los estudiantes la oportunidad de involucrarse con la construcción del concepto de volumen y su relación con el

mundo que les rodea. También le permite que se apropien, que se incrementen y fortalezcan los conocimientos geométricos espaciales.

- Solucionar problemas no solo ayuda, desarrolla y potencia en los estudiantes hábitos de colaboración, organización, trabajo, autoevaluación, perseverancia, inspira confianza en sus posibilidades, sino que se equipan con estrategias para resolver problemas aplicables en el enfrentamiento a situaciones de la vida real.
- Propicia la participación de los estudiantes en su propio aprendizaje, y hace que las clases de geometría del espacio sean interesantes, motivadoras y desafiantes.

La manipulación geométrica y la representación geométrica espacial, son imprescindibles para el trabajo con la geometría del espacio, pues son procesos básicos que se dirigen a propician la representación de cuerpos tridimensionales al plano y viceversa (Transferencia de 3D a 2D y de 2D a 3D). Estos procesos favorecen la construcción de significado robusto del concepto de volumen.

Se aducen los presupuestos de Zimmermann y Cunningham (1991) sobre la visualización, pues consideran que es en el plano externo una ilustración y en el plano interno un resultado de la imaginación del estudiante. Particularmente para el trabajo con la geometría del espacio se asume lo planteado por Gutiérrez (1992) sobre visualización espacial. Este proceso propicia la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpo geométrico.

CAPITULO 3. DISEÑO DE ACTIVIDADES

El proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, en particular el concepto de volumen está presente en la mayoría de los currículos. Este proceso debe estructurarse hacia la búsqueda activa del contenido geométrico por los estudiantes, a partir de los conocimientos existentes y de las experiencias en la vida relacionada con la temática, objetivo hacia el cual se dirigen las seis actividades diseñadas en este capítulo. También se hace referencia al marco teórico asumido en el contexto de la estructura de las actividades.

3.1. El marco teórico en el contexto de la estructura de las actividades

Las actividades que se proponen propician la experimentación, la exploración y la búsqueda de la construcción del concepto de volumen, donde se estimula y se desarrolla el pensamiento geométrico espacial en los estudiantes. En ese trabajo investigativo se proponen seis actividades conformadas por problemas no rutinarios, las cuales son contentiva del marco teórico asumido, pues estas se basan en:

Contenido geométrico: hace referencia a las temáticas relacionada con la construcción del concepto de volumen en el grado octavo, donde se tiene en cuenta los estándares curriculares.

Resolución de problemas: se asumen los referentes teóricos, definición de problemas y estrategia o fases para su resolución. Se concibe que un problema está determinado por una problemática donde existan condiciones iniciales o finales, la vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida, el estudiante debe estar motivado y poseer los elementos necesarios para realizar la transformación. En esta concepción los problemas llevan al estudiante a pensar, a indagar, a explorar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento. En la metodología a trabajar se asume los cuatro pasos para la resolución de problemas según Polya (1965) y que constituye el marco de referencia con el que se busca desarrollar un conjunto de actividades encaminadas a favorecer el desarrollo de destrezas cognitivas, que permitan la construcción del concepto robusto de volumen en los estudiantes.

Cada actividad cuenta con cinco o más problemas, y las sugerencias metodológicas están acordes a los impulsos heurísticos, aporte fundamental de la metodología de Polya (1965), para la resolución de problemas. En la resolución de problemas para la construcción del concepto de volumen, se reconoce a la heurística como elemento dinamizador y recursivo para la habilidad mental, en la aplicación de procesos coherentes y seguimiento de caminos rigurosos. En este proceso se logra de manera eficaz y eficiente la resolución de los problemas, sin tener en cuenta la dimensión o el grado de dificultad que presente, de ahí entonces que, *"… un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento".*[45]

Manipulación geométrica: considerada como un conjunto de procedimientos y operaciones que involucran a los estudiantes en acciones donde se debe interactuar con figuras y cuerpos geométricos reales o virtuales. Este proceso es significativo

---

[45] Agudelo G., Bedoya V. y Restrepo A. (2008). Método heurístico en la solución de problemas matemáticos. Universidad tecnológica de Pereira.

para la construcción del concepto de volumen mediante la composición y descomposición de cuerpos.

Representación geométrica espacial: es una modelación de la realidad objetiva ya sea en la mente del individuo o materializada a través del dibujo o en objetos construidos (Ballester et al., 1992). En la representación geométrica se favorece y se da la construcción del concepto de volumen en los estudiantes.

Visualización: es el proceso de formar imágenes y utilizarlas de forma efectiva para el descubrimiento, la comprensión, interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos y sus interrelaciones en la geometría del espacio. Este proceso ayuda a concretar la construcción del concepto de volumen en los estudiantes.

La relación entre estos cinco componentes: contenido geométrico, resolución de problemas, manipulación geométrica, representación geométrica espacial y la visualización (Ver figura 18), es propicia para desarrollar un proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente de la construcción del concepto de volumen de una forma activa. En este proceso el estudiante es participe de la construcción de su propio conocimiento geométrico.

Las actividades son diseñadas de acuerdo con el contenido geométrico abordado en el grado octavo, base para la construcción del concepto de volumen, y se materializa a través de la resolución de problemas geométricos. Para lograr el éxito en el desarrollo de estas actividades es esencial hacer énfasis en la manipulación geométrica, la visualización y la representación geométrica espacial.

En cada una de las actividades conformadas por problemas no rutinarios se reflejan estos componentes. La interrelación entre éstos genera un proceso robusto sobre la construcción del concepto de volumen en los estudiantes de la Educación Básica.

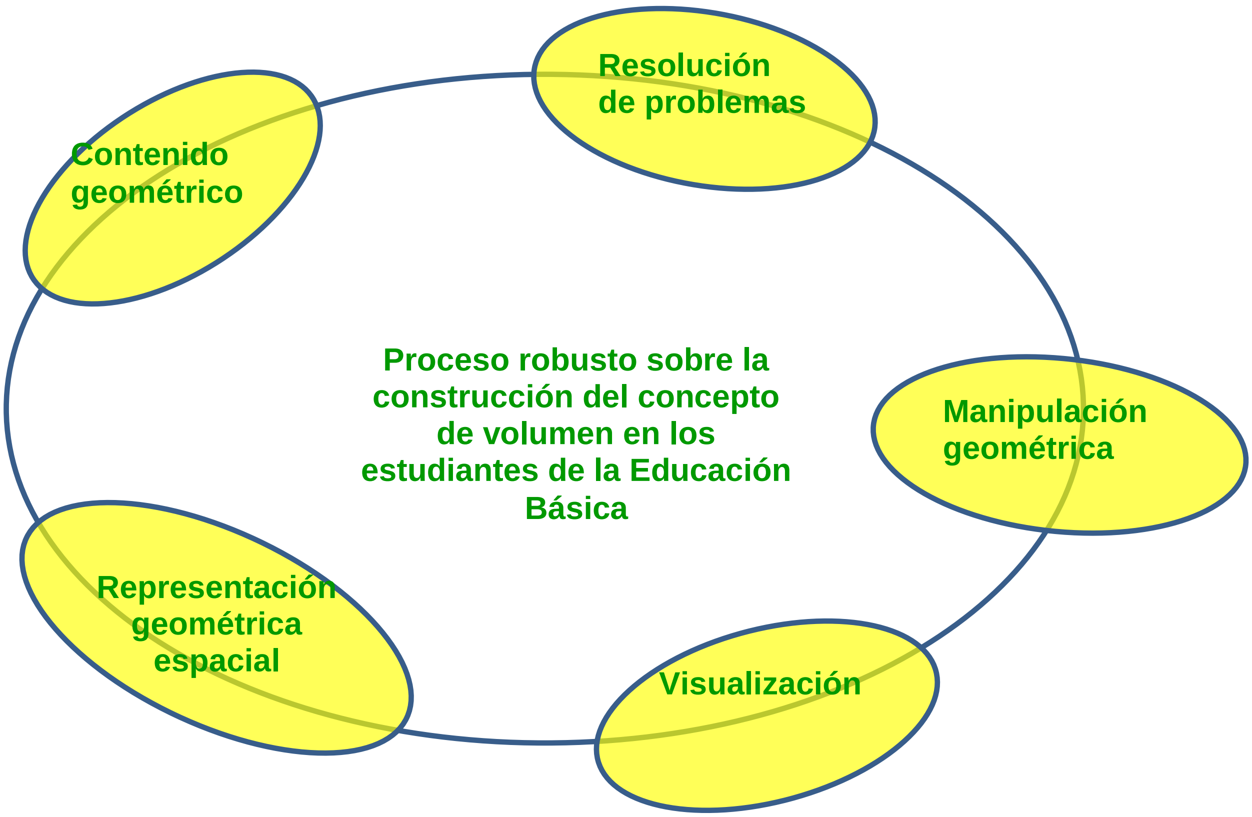


Figura 18. Relación entre las actividades y el marco teórico

El diseño de las 5 primeras actividades a implementar, se estructurada de la siguiente manera: **a.** tema; **b.** objetivo; **c.** desarrollo de las actividades; **d.** materiales y medios a utilizar y **e.** sugerencias metodológicas.

Con miras a confirmar si los estudiantes logran apropiarse de la metodología basada en la resolución de problemas, y así construir el concepto de volumen, se han propuesto las siguientes actividades: composición y descomposición de cuerpos, empaques, volumen y capacidad, ¡A experimentar se ha dicho!, el reto y una feria final titulada “construyendo el concepto de volumen”. En esta última actividad se expondrá cada una de las actividades trabajadas con el fin de socializarlas y motivar a los grados sexto y séptimo, de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz.

El material que se utiliza en la actividad de composición y descomposición es de madera, en la de volumen y capacidad recipiente, jeringa, probeta, piedra y algunos productos agrícolas, mientras que en la de ¡A experimentar se ha dicho! Se requiere de prismas, pirámides, cilindros, esferas y conos en acrílico. En las actividades de empaque y el reto no se requiere de materiales y en la feria se emplean todos los descritos antes.

3.2. Actividades formadas por problemas no rutinarios

Seguidamente se expone en detalle la estructura y el desarrollo de cada una de las actividades, las cuales están formadas por problemas no rutinarios.

3.2.1 Actividad 1: Composición y descomposición de cuerpos

Objetivo: Construir significado para el concepto de volumen por medio de la composición y descomposición de cuerpos, estableciendo la relación entre ellos por diferentes medios, incluyendo por medio de la creación de nuevos cuerpos geométricos.

Desarrollo de la actividad:

1. Construye con los cubitos dados 6 figuras diferentes.

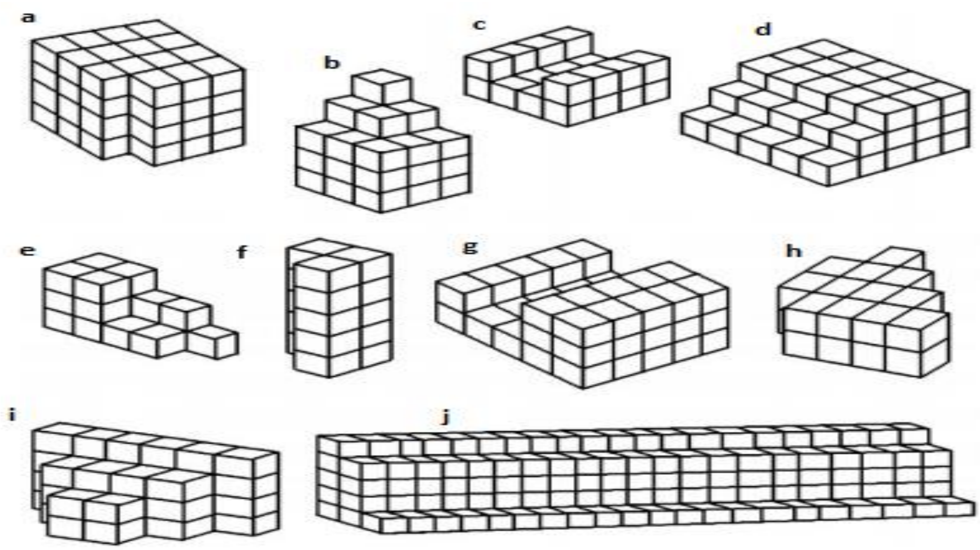
a. ¿Cuántos cubitos conforman cada figura que construiste?

b. ¿Influye la forma de la figura en el total de cubitos que la componen? Justifica tu respuesta.

- Toma ahora 24 cubitos de los dados en el numeral uno, y empleando siempre la totalidad de éstos forma 4 figuras distintas.

   a. ¿Influye la forma de la figura en el total de cubitos que la componen? Justifica tu respuesta.

2. Observa los siguientes sólidos e indica el número de cubitos presentes en cada uno de ellos.



[46]

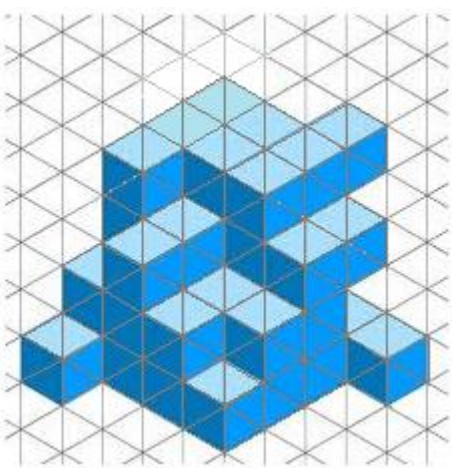
3. Observa los siguientes cuerpos y contesta:

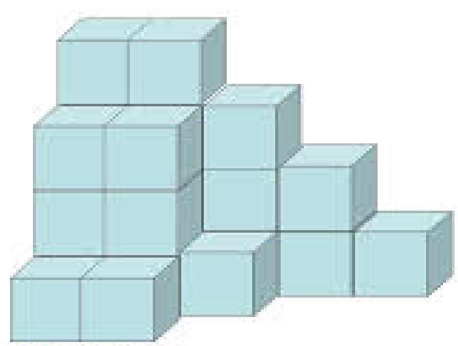
   a. ¿Cuántos cubitos se ven?

   b. ¿Cuántos cubitos hay ocultos?

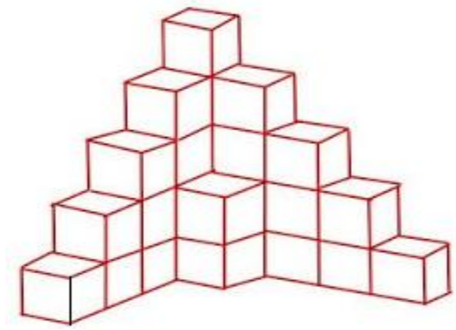
   c. ¿Cuántos cubitos hay en total?

   d. ¿Cuántos cubitos faltan para completar el cubo grande de arista 5 unidades?



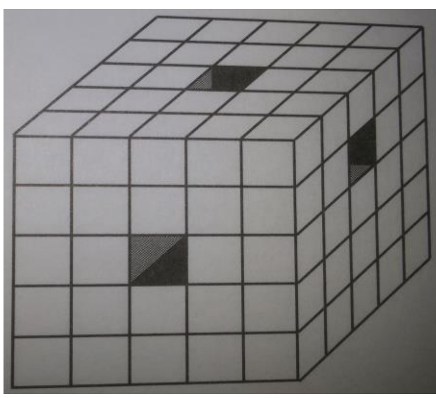


[46] Camacho, Á. Et. Al. La medida en la educación primaria. Recuperable el 26/06/14 en la URL: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte4.pdf. Pag. 183.



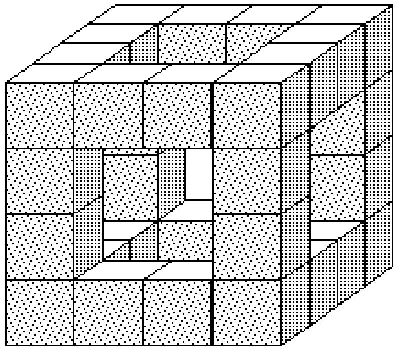
4. Las siguientes estructuras se han formado con pequeños cubos de igual tamaño.

a. ¿Con cuántos cubos se ha formado la estructura si se han quitado las columnas centrales?[47]

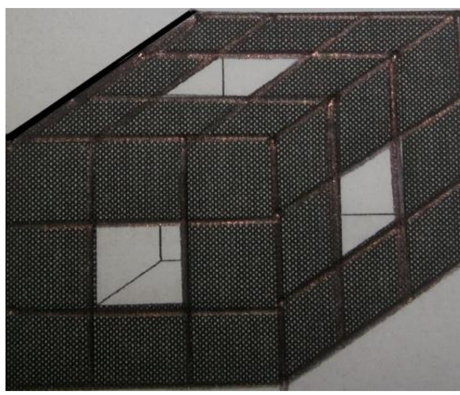
[48]

b. ¿Cuántos cubos le han quitado a la estructura?

[47] Tomado de Jaime, F. y David, M. (1999). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1995-1999. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Universidad Antonio Nariño.
[48] Tomado de Jaime, F. y David, M. (1999). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1995-1999. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Universidad Antonio Nariño.

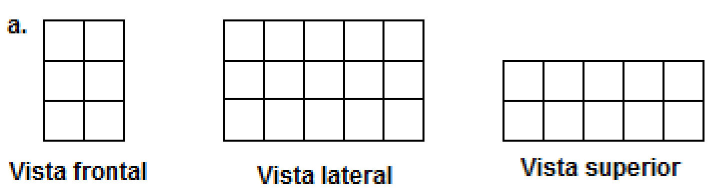


c. ¿Cuántos cubos le sacaron a la estructura?


[49]

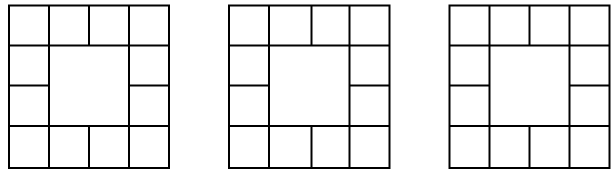
5. Un fotógrafo aficionado retrata las vistas frontal, lateral y superior de diferentes figuras construidas con cubos idénticos.

Ayúdale al fotógrafo a reconstruir las figuras (represéntalas), y determina ¿cuál es el número de cubos que contiene cada una de ellas?



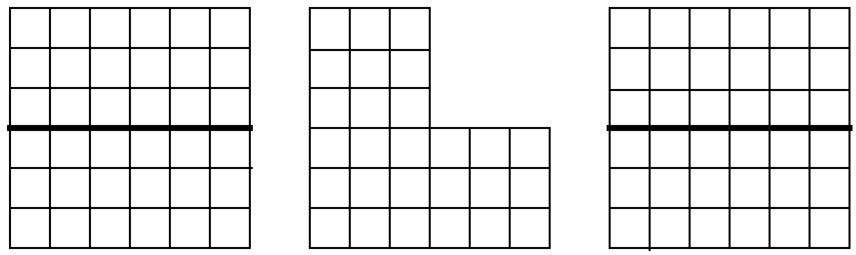
[49] Tomado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

b.



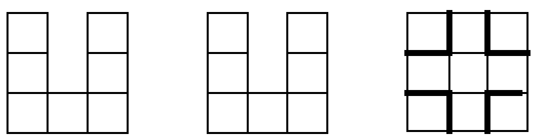
Vista frontal | Vista lateral | Vista superior

c.



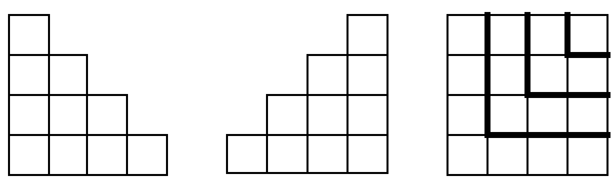
Vista frontal | Vista lateral | Vista superior

d.



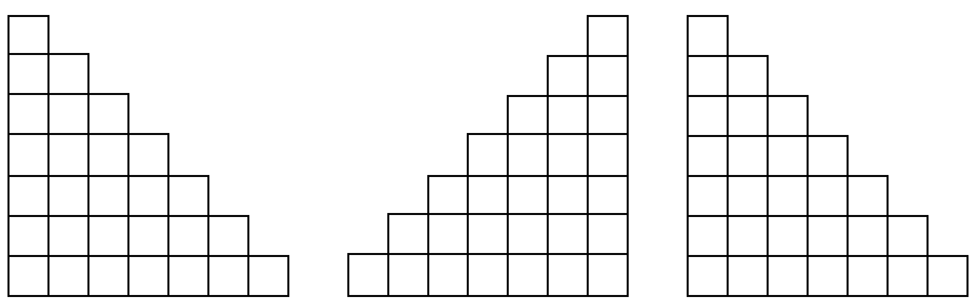
Vista frontal | Vista lateral | Vista superior

e.



Vista frontal | Vista lateral | Vista superior

f.



Vista frontal | Vista lateral | Vista superior

Nota: Las vistas que tienen líneas gruesas y en negrilla indican los niveles de la figura.

Materiales y medios a utilizar: para esta actividad se le entregan 64 cubos, guía de la actividad.

Sugerencias metodológicas: en un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad. Se realiza un trabajo individual de tal modo que cada uno, especifica la forma en la que abordó los cuatro pasos (comprender el problema, trabajar en el problema, solucionar el problema y mirar hacia atrás) descritos en la metodología a trabajar, basada en la resolución de problemas según Polya, la cual propicia hallar solución a cada problema planteado.

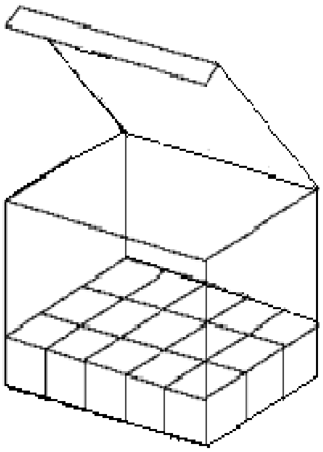
Luego del aporte individual que se genere en el primer momento, los estudiantes pasarán a un segundo, para socializar las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de cada uno de sus integrantes. El docente constantemente pasa por los puestos de trabajo en diferentes momentos e intervendrá cuando sea requerido. El método utilizado durante el desarrollo de la actividad es preferiblemente el trabajo individual.

3.2.2. Actividad 2: Empaques

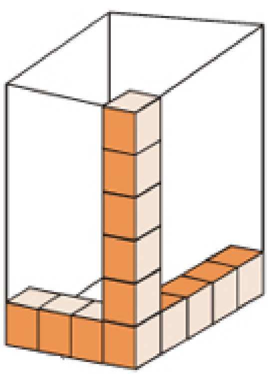
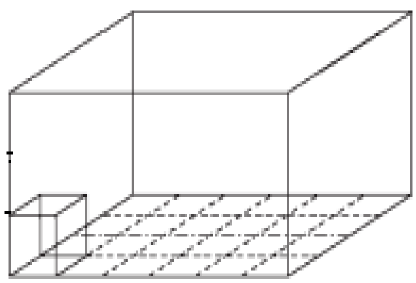
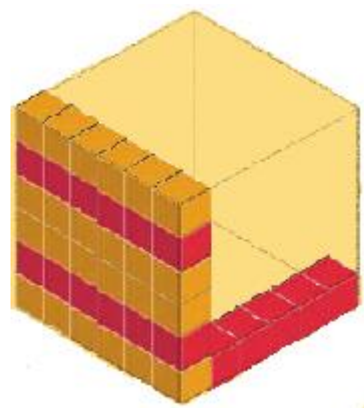
Objetivo: calcular el volumen mediante el empaque o embalaje de cuerpos.

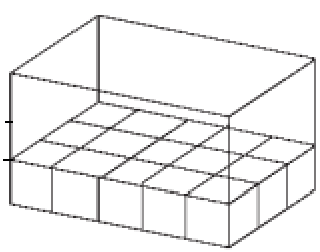
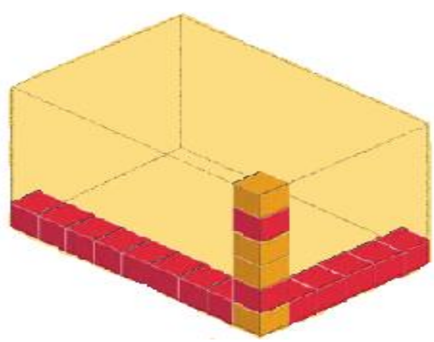
Desarrollo de la actividad:

1. En la siguiente caja caben 4 capas de cubos. ¿Cuántos necesitarías para llenarla?

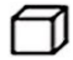
[50]

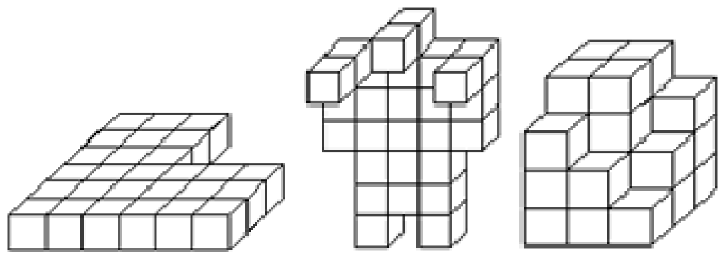
- ***¿Cuántos cubos en total necesitarás para llenar estas otras cajas?***

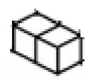




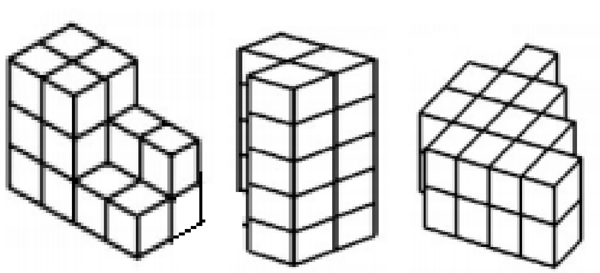



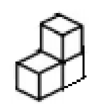
[50] Camacho, Á. Et. Al. (S.f) La medida en la educación primaria. Recuperable el 26/06/14 en la URL: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte4.pdf. Pag. 189.

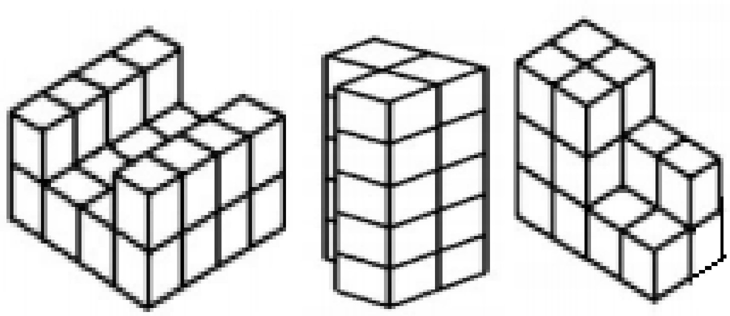
2. ¿Cuántas veces está contenido el cubo  en cada uno de los siguientes cuerpos construidos con pequeños cubos pegados por una o varias de sus caras?



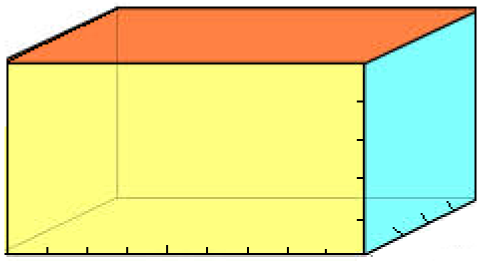
Ahora prueba cuántas veces está el prisma  en las siguientes figuras.

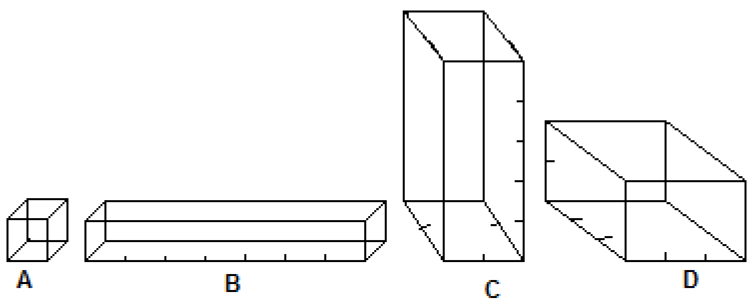


¿Cuál sería el mayor número de veces que se encuentra el cuerpo compuesto  en los siguientes sólidos?



3. Lola desea guardar en el recipiente de dimensiones indicadas en sus lados fichas A, B, C y D respectivamente.





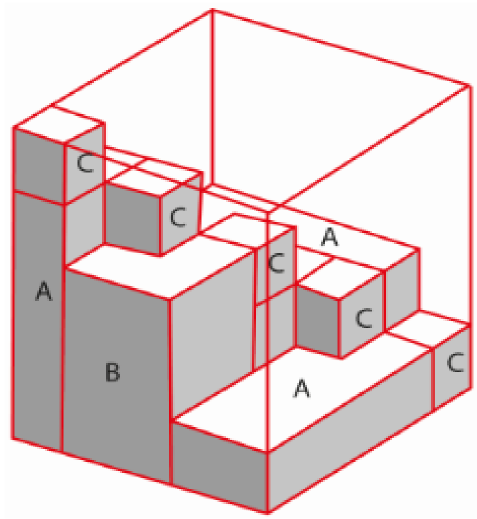
   a. ¿Cuál es la máxima cantidad de fichas **A**, **B**, **C, D** que se pueden guardar en el recipiente?

   b. ¿Qué cantidad de fichas **A** y **C** se requieren para llenar el recipiente?

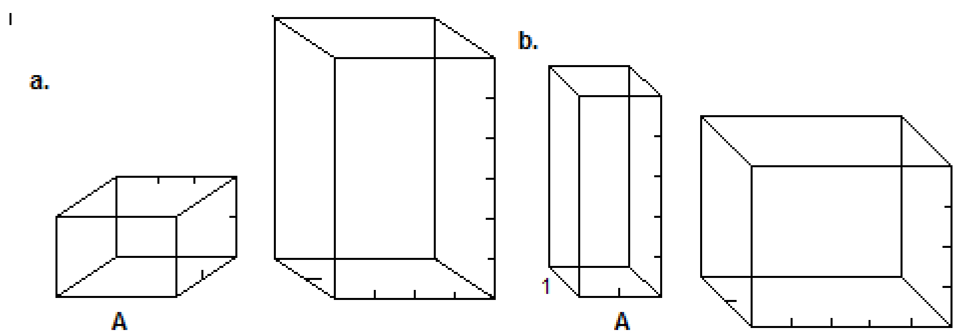
   c. ¿Con cuántas fichas **B** y **D** lleno el recipiente?

4. Una mamá le ha encomendado a su hijo Mateo la tarea de acabar de llenar la caja con bloques **A**, **B** y **C** idénticos a los que allí aparecen.

- ¿Cuál es la cantidad máxima de bloques **A**, **B** y **C** que necesita Mateo para cumplir con la tarea?



5. ¿Cuántas copias de la caja **A** pueden empacarse en la caja grande?



6. Juan compra un reloj como regalo para el día del padre, Si en la papelería solo venden cajitas de las siguientes dimensiones. ¿Cómo acomodarías el reloj para que quepa en la caja de regalo?

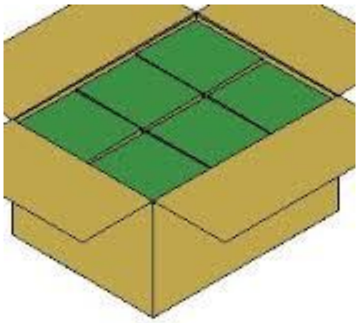
reloj en su empaque

10 x 2 x 6

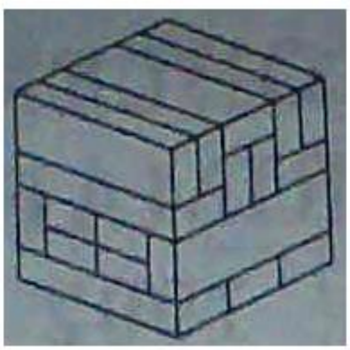
caja de regalo

6 x 5 x 4

7. Si la caja contiene 12 cubos, cada uno de 2 cm de lado, ¿Cuál es la altura de la caja?, ¿Cuánto mide el ancho de la caja?



8. El constructor de una obra almacena tal como lo muestra la figura cierta cantidad de bloques rectangulares idénticos.


[51]

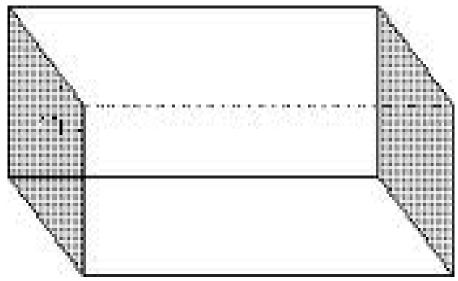
   a. ¿Cuántos bloques contiene el cubo?

   b. Si el cubo tiene 6 cm de arista (o lado de las caras), ¿cuáles serían las dimensiones de cada bloque?

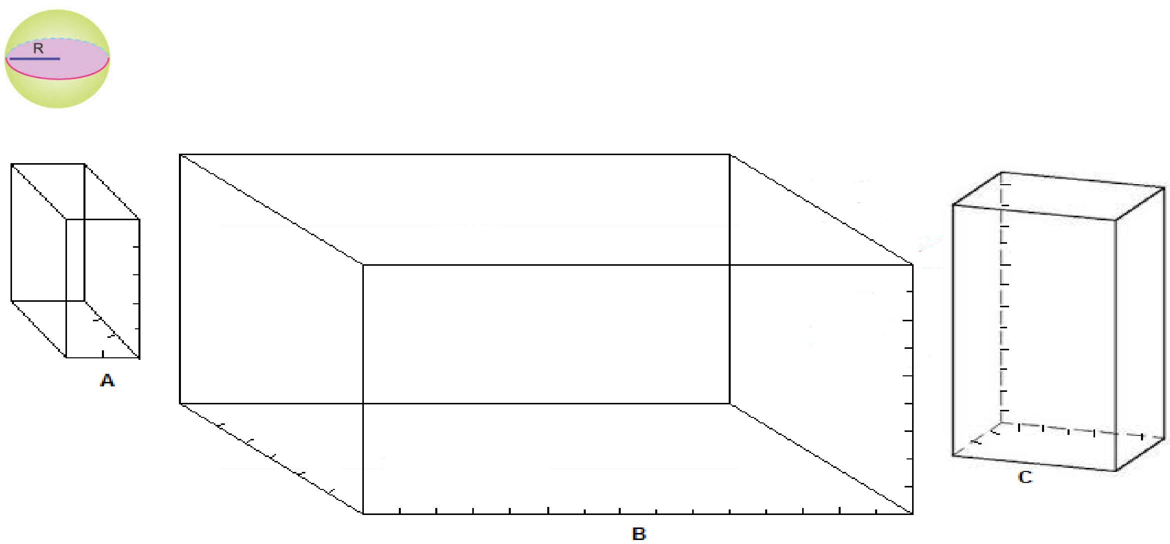
9. Juana tiene 105 cubos iguales, cada uno de un centímetro de arista o lado. Los pega juntos para formar un sólido rectangular, como el de la figura. Si el

[51] Tomado de Jaime, F. (1994). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 1990-1994. Universidad Antonio Nariño.

perímetro de la base del sólido rectangular es 20 cm, ¿Cuál es la altura del sólido?[52]



10. Ayúdale a Juanito a encontrar el embalaje correcto, si desea que, cuando en la caja se empaquen 30 esferas de radio 1.5u, no cabe ni una esfera más en ella.



Materiales y medios a utilizar: para el desarrollo de esta actividad se le entrega a cada estudiante la guía de trabajo.

Sugerencias metodológicas: en un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad, donde se realizará un trabajo individual. En un segundo momento se socializan las respuestas, donde cada uno contribuya a la

[52] Tomado y modificado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de cada uno de sus integrantes. Durante el desarrollo de la actividad la evaluación es sistemática y a través de la observación del desempeño de los estudiantes.

3.2.3. Actividad 3: Volumen y Capacidad

Objetivo: Medir el volumen de cuerpos irregulares a partir de la relación existente entre volumen y capacidad y las medidas de capacidad de un cuerpo.

Desarrollo de la actividad:

1. Vierta en la probeta, 200 ml de agua y contesta:
   a. ¿A cuánto corresponde el volumen del agua depositada?
   b. ¿Qué sucede al introducir una piedra en la probeta? ¿Qué significa eso?
   c. ¿Cómo se hallaría el volumen de la piedra? Describe el proceso.
2. Tomar una caja en forma de prisma rectangular y vertir en él, el agua que se desee sin que ésta exceda la mitad del recipiente y contestar:
   a. ¿Cuál es el volumen del agua depositada en el recipiente?
   b. ¿Qué sucede al introducir una piedra en el recipiente? ¿Qué significa eso?
   c. ¿Cómo se hallaría el volumen de la piedra? Describe el proceso.
3. Dados el agua, un recipiente, una jeringa y un platón hallar el volumen de los siguientes productos agrícolas. Describe como lo hiciste.

a.

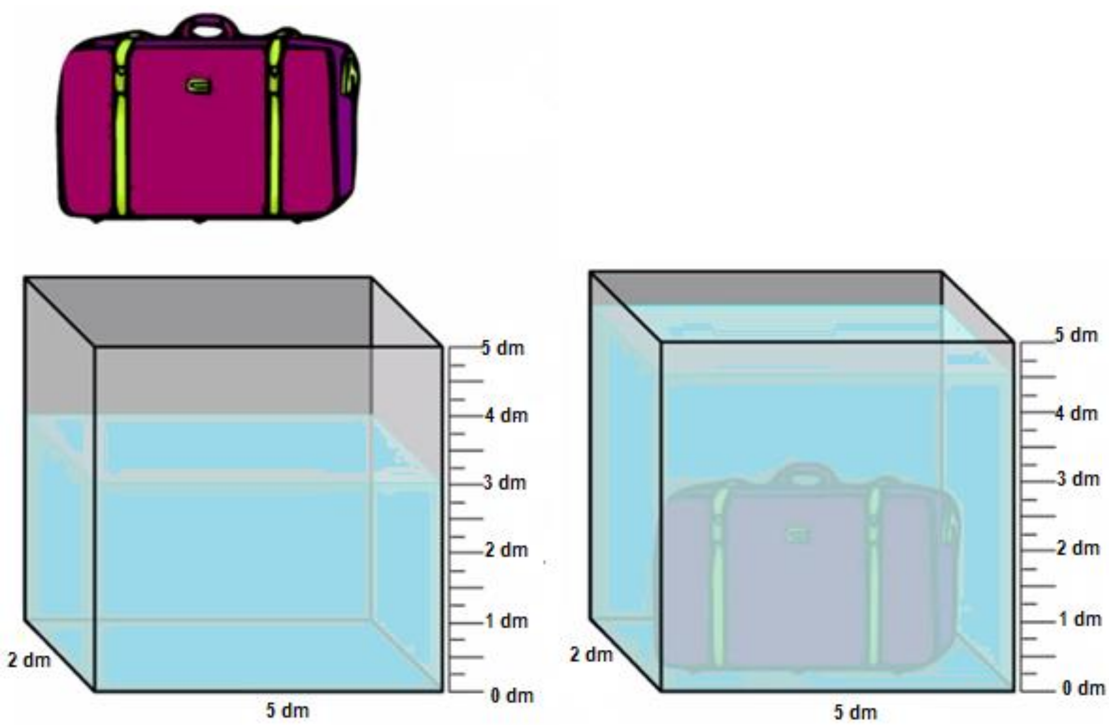
b.

c.

d.

e.

4. **4.** Juanito hace el siguiente experimento para hallar el volumen a la maleta pero a la hora de encontrarlo no logra hacerlo. Recuérdale como hallarlo.



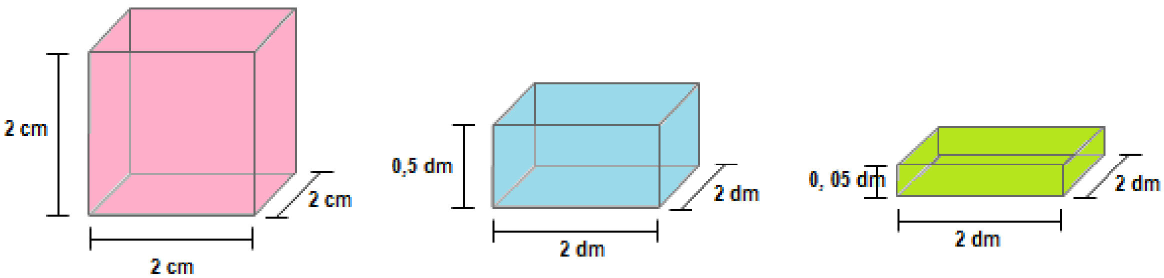
[53]

5. ¿Cuál de los recipientes en forma de prisma rectangular puede Ana coger para remplazar el frasco que dejo caer, si desea depositar en él exactamente la

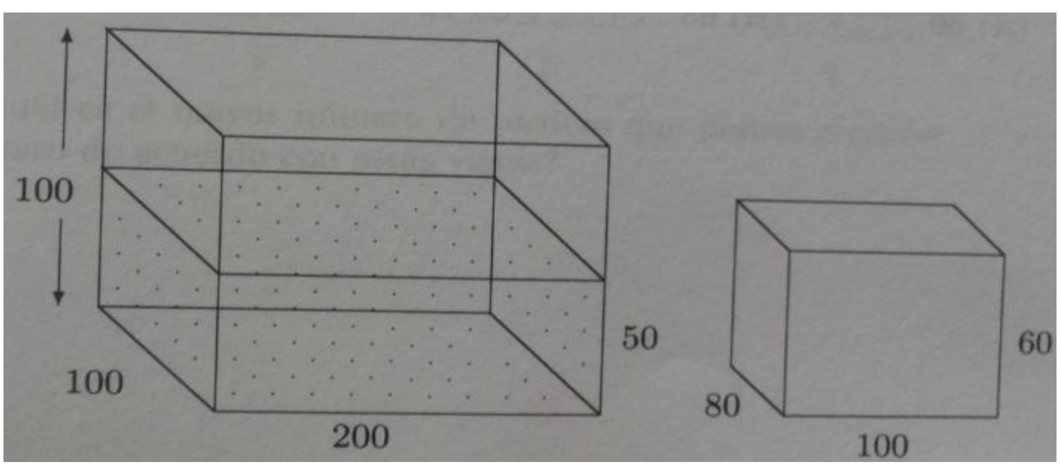
---

[53] Tomado de Tesla, W. (s.f). video "CÓMO medir el VOLUMEN de un objeto PASO A PASO" publicado el 11/09/2012. Recuperable el 23/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=xjn0V-ByT70.

misma cantidad de pepitas que tenía en el otro? Nótese que las figuras no están dibujadas a escala.



6. Una pecera con base de 100cm por 200 cm y 100 cm de altura, contiene agua a una altura de 50 cm. Un prisma sólido metálico con dimensiones 80 cm por 100 cm por 60 cm es sumergido en el tanque con una cara de 80 cm por 100 cm en la parte inferior. ¿En cuántos centímetros supera la altura del agua a la altura del prisma?[54]



[54] Tomado de González, E y Valderrama, A. (2009). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas primer nivel. Universidad Antonio Nariño.

Materiales y medios a utilizar: para realizar esta actividad es propicio contar con: 1 probeta graduada, agua, 1 piedra, 1 recipiente en forma de prisma rectangular, 1 jeringa, 1 platón, 1 naranja, 1 ciruela, 1 pera ,1 papa y 1 zanahoria.

Sugerencias metodológicas: a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad, se le recomienda realizar primero un trabajo individual, donde se explore y experimente con los materiales. Después se socializan las respuestas, cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de los estudiantes.

3.2.4. Actividad 4: ¡A experimentar se ha dicho!

Objetivo: Deducir la forma general de hallar el volumen de una pirámide, un cono y una esfera, a partir de la relación existente con otros cuerpos de volumen conocido.

Desarrollo de la actividad:

Carlos ha decidido compartir con sus compañeros de clase las relaciones que él ha encontrado entre el volumen de ciertos sólidos geométricos y para ello propone una serie de experimentos. Así:

1. Tome la pirámide y el prisma que tienen características en común (cualidades o particularidades que están en cada uno de estos sólidos las cuales los determinan, los distinguen o lo califican como tales, diferenciándolos entre sí) y con ayuda del primer sólido llene el segundo totalmente, y responde:

    a. Enumera las características que tuviste en cuenta para escoger cada pareja de cuerpos.

b. ¿Qué conclusión sacaste del experimento? Plantea matemáticamente la relación que observaste.

c. ¿Cómo producto de las actividades anteriores, podrías decir cómo hallar el volumen de un prisma? ¿Cuál sería la manera de hacerlo?

d. ¿Cómo indicarías la manera de hallar el volumen de una pirámide?

2. Siguiendo características en común, tome ahora conos y cilindros y llene estos últimos de arena con ayuda del cono que le corresponde. Contesta:

   a. Enumera las características que tuviste en cuenta para escoger cada pareja de sólidos.

   b. ¿Qué conclusión sacaste del experimento? Plantea matemáticamente la relación que observaste.

   c. ¿Cómo calcularías el volumen de un cilindro?

   d. ¿Cómo indicarías la manera de hallar el volumen de un cono?

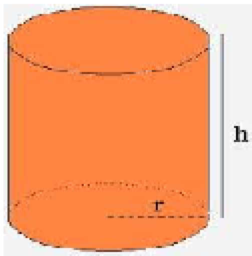
3. Forme parejas con un cono y una esfera de forma tal que tengan características en común y con ayuda del cono llene la esfera correspondiente. Contesta:

   a. Enumera las características que tuviste en cuenta para escoger cada pareja de cuerpos.

   b. ¿Qué conclusión sacaste del experimento? Plantea matemáticamente la relación que observaste.

   c. ¿Cómo calcularías el volumen de la esfera?

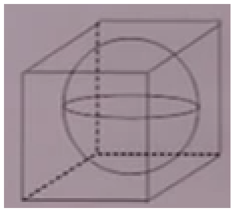
4. El cilindro que se muestra en la figura tiene radio (r) y su altura (h) es el doble del radio. ¿Cuál es la altura del cilindro si su volumen es de 250π cm^3?[55]



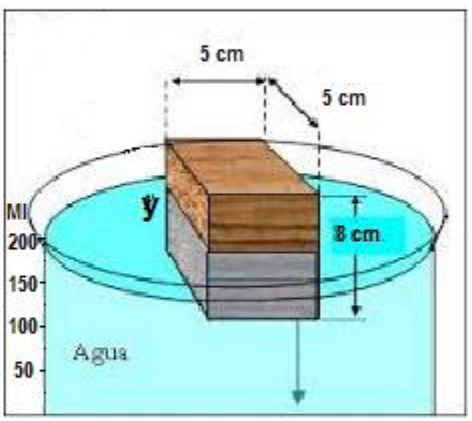
5. Cuando un triángulo rectángulo de área 3 centímetros cuadrados es rotado en 360° respecto del cateto menor, el cuerpo que se genera tiene un volumen de 30 centímetros cúbicos. ¿Cuánto mide el cateto mayor?[56]

[55] Tomado y modificado de Lozano, L. (s.f). SABER 11: CILINDRO, CONO Y ESFERA. Programa de ECOPETROL innovando y educando. LA FORMACIÖN DESDE OTRA PERPECTIVA. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.
[56] Tomado del video Puntaje Nacional: Cuerpos geométricos - Guía de ejercicios - ejercicio 8. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=g2H2_D72tTQ.

6. Determinar el volumen de la esfera que se encuentra inscrita en un cubo de arista 8 cm. Se dice que la esfera está inscrita en el cubo si es tangente a cada una de las caras del cubo.



7. Si **y** es la altura del trozo del prisma rectangular inmerso en el depósito de agua que equivale a 5/8 de su altura total, ¿cuál sería el volumen del agua del recipiente cilíndrico antes de ser sumergido parte del prisma rectangular?



Materiales y medios a utilizar: para esta actividad se utilizan dos parejas de prismas y pirámides de igual base y altura, dos parejas de cilindros y conos de igual radio y altura, dos parejas de esferas y conos de igual radio y altura, arena y la guía para la actividad.

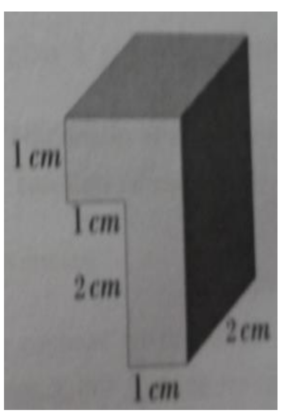
Sugerencias metodológicas: se le entrega a cada estudiante la guía para la actividad; primero se realizará un trabajo individual, luego se socializan las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad. El docente constantemente pasa por mesas de los estudiantes e intervendrá cuando sea requerido, además evaluará de forma sistemática los avances en la resolución de los problemas.

3.2.5. Actividad 5: El reto

Objetivo: Determinar el nivel de conocimientos fundamentales en el estudiante, que lleven a identificar el concepto de volumen que han alcanzado.

Desarrollo de la actividad:

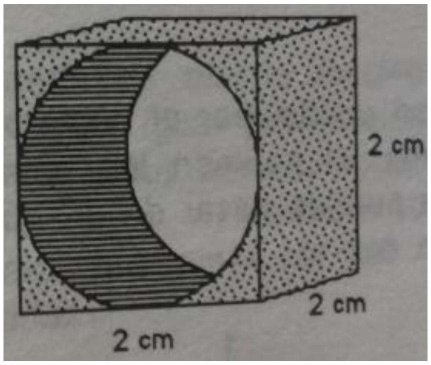
1. Se tienen bloques de madera en forma de “ele” como el que se muestra en la figura. Determinar el mayor número de estos bloques de madera que se pueden empacar en una caja de 2 cm por 4 cm por 6 cm.[57]



2. Andrea tiene una cajita de música con una tapa de 21 cm^2 de área. Si su altura es de 9 cm, ¿cuál es su volumen?

[57] Tomado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

3. Se tienen un cubo de madera de 2 cm de arista, del cual hemos sacado un cilindro de 2 cm de diámetro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el volumen de la parte sobrante del cubo?[58]

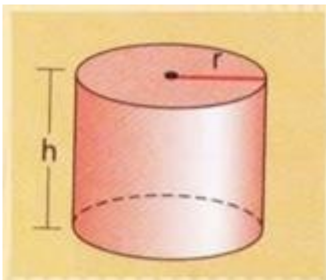


4. Calcula el volumen de agua necesario para llenar un recipiente cilíndrico de radio 3.5 cm y 8,6 centímetros de altura al cual se le ha dejado caer una canica, de 2 cm de radio. [59]


60

[58] Tomado de Valderrama, J. (1989). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1985- 1989. Publicación de la corporación universitaria Antonio Nariño.
[59] Tomado de Blanco, X. Descartes 2° ESO Matemáticas, cuaderno número 10. Bajo licencia creative Commons. Recuperable el 23/07/14 de la URL: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/cuadernos/2eso_cuaderno_10_cas.pdf.
[60] Tomado de Blanco, X. Descartes 2° ESO Matemáticas, cuaderno número 10. Bajo licencia creative Commons. Recuperable el 23/07/14 de la URL: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/cuadernos/2eso_cuaderno_10_cas.pdf.

5. Cuáles serían las dimensiones de la caja de base rectangular que debería comprar Martha para empacar 8 cilindros como el que se muestra en la figura, desperdiciando la menor cantidad de espacio posible.



a. 2r, 6r y 4r.
b. 4r, 8r y r.
c. 2r, 8r y 2r.
d. 4r, 8ry 2r.

6. Se tienen los siguientes recipientes, uno de forma semiesférica, uno cilíndrico y otro de forma cónica de radio R y altura h como se muestra en la ilustración[61]

---

[61] Tomado de Lozano, L. (s.f). SABER 11: CILINDRO, CONO Y ESFERA. Programa de ECOPETROL innovando y educando. LA FORMACIÖN DESDE OTRA PERPECTIVA. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.

Respecto al volumen de estos recipientes **NO** es correcto afirmar que

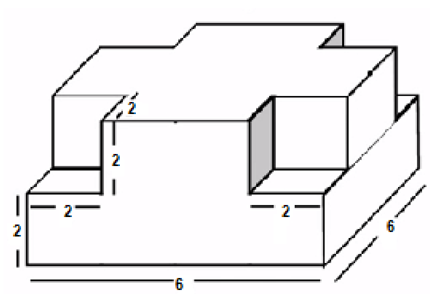
a. El volumen del 2 es el triple del 1.

b. El volumen del 3 es el doble del 1.

c. El volumen del 3 es el mitad del 1.

d. El volumen del 1 es la tercera parte del 2.

7. Determine el volumen de la siguiente figura simétrica.



8. Si un cilindro está inscrito (es decir se halla dentro de otro cuerpo geométrico y es tangente a las caras de ese cuerpo) en un cubo de arista 2. ¿Cuál es el volumen del espacio entre el cubo y el cilindro?[62]

a. 8+2π.

b. 2π.

c. 8- 2π.

d. 10π.

[62] Tomado de Lozano, L. (s.f). SABER 11: CILINDRO, CONO Y ESFERA. Programa de ECOPETROL innovando y educando. LA FORMACIÖN DESDE OTRA PERPECTIVA. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.

Materiales y medios a utilizar: solamente se hace entrega de la guía para la actividad a desarrollar.

Sugerencias metodológicas: se le entrega a cada estudiante la guía para la actividad; primero se realizará un trabajo individual, luego se socializan las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad. El docente constantemente pasa por mesas de los estudiantes e intervendrá cuando sea requerido, además evaluará de forma sistemática los avances en la resolución de los problemas.

3.2.6. Actividad 6: Feria “construyendo el concepto de volumen”

Objetivo: Compartir la construcción de significado del concepto de volumen, adquirido a través de las diferentes actividades desarrolladas por equipos, para precisar su definición.

Desarrollo de la actividad: Cinco grupos de cuatro estudiantes cada uno, del grado 8°-1, socializarán de manera ordenada y secuencial la actividad correspondiente, de acuerdo a lo trabajado anteriormente, utilizando el mismo material con que se prepararon inicialmente. Luego de la exposición de cada equipo, integrarán a su auditorio a la actividad para compartir la experiencia, fortalecer el conocimiento e iniciar a sus nuevos compañeros en la **construcción del concepto de volumen**. Tendrán como interactuantes los estudiantes de los cursos 6-1, 6-2, 6-3, 7-1 y 7-2.

Materiales y medios a utilizar:

Grupo 1:

- 1280 cubos.

Grupo 2:

- Guía de la actividad a desarrollar.

Grupo 3:

- 20 probetas graduadas.
- Agua.
- 20 piedras.
- 20 recipientes en forma de prisma rectangular.
- 20 jeringas.
- 20 platones.
- 20 naranjas, 20 ciruelas, 20 peras ,20 papas y 20 zanahorias.

Grupo 4:

- 40 parejas de prismas y pirámides de igual base y altura.
- 40 parejas de cilindros y conos de igual radio y altura.
- 40 parejas de esferas y conos de igual radio y altura.
- Arena.

Grupo 5:

- Guía de la actividad a desarrollar.

Sugerencias metodológicas: una completa seguridad del expositor al explicar la metodología de Polya, empleada para desarrollar cada actividad, debida utilización del material correspondiente; el espacio amplio y debidamente adecuado; buen comportamiento y disposición positiva tanto al exponer como al compartir, mostrando amplia participación en equipo; asesoría permanente por parte del docente.

Conclusiones del capítulo 3

Las seis actividades propuestas se sustentan en problemas retadores, donde se utiliza la manipulación geométrica, la representación geométrica y la visualización en aras de lograr un aprendizaje robusto de la construcción del concepto de volumen en los estudiantes.

Con la resolución de problemas de la geometría del espacio, específicamente sobre la construcción del concepto de volumen se aprende a matematizar, a pensar de manera abstracta y a crear modelos mentales espaciales. Lo cual favorece tener una visión del mundo para llegar a resolver situaciones no solo de Matemáticas, sino también de la vida real.

CAPÍTULO 4. VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se realiza un análisis de la implementación de las actividades, donde se valora en cada una de ellas el desarrollo de la actividad, la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades.

4.1. Actividad 1: Composición y descomposición de cuerpos

Desarrollo de la actividad. En esta actividad participaron 20 estudiantes, que en un primer momento trabajaron de forma individual. Se observó que la pregunta **1b (**¿Influye la forma de la figura en el total de cubitos que la componen? Justifica tu respuesta**)** y el literal **a** de la segunda situación del mismo punto **1,** representaba para los estudiantes una dificultad, pues no la entendían aunque sí habían formado los cuerpos con ayuda de los 64 cubitos para la primera situación y 24 para la segunda situación, de lo cual se apoya la autora de la tesis para hacerles comprender el sentido de la pregunta haciendo que la reformularan con sus propias palabras.

En la segunda pregunta no hubo problema en su comprensión, pero se constató varias formas de trabajar en su solución, unos estudiantes contaban los cubitos que habían en una cara, luego lo multiplicaban por el número de caras que se encontraban atrás de ella, y al resultado que obtenían le adicionaban el número de cubitos faltantes que eran sumados uno por uno. Otros multiplicaban la base por la altura de cada cara, luego sumaban cada resultado parcial y así obtenían el número de cubitos que conforman la figura. Por último, otro grupo tomó los cubitos dados y armaron las figuras procediendo a contar el número de éstos (Ver Figura 19). En esta última estrategia, cuando les resultaba ser el cuerpo más grande de lo esperado, los estudiantes para completar el sólido se prestaban el material necesario.

Figura 19. Estudiante completando el sólido con los cubos

En la tercera pregunta los estudiantes manifestaron cierto desinterés, y en algunos casos pereza al analizar la primera figura sólida que allí aparece (ver figura 20), pues manifestaban que a la hora de contar los cubitos se confundían, por lo que la mayoría reconstruyeron la figura empleando el material didáctico dado, otros simplemente lo contestaron sin la certeza de que estuviera bien. Es de aclarar que tres estudiantes no lo hicieron, aduciendo el grado de dificultad que les presentaba.

Figura 20. Figura de la tercera pregunta con cierto nivel de dificultad

En la pregunta **4a** (¿Con cuántos cubos se ha formado la estructura si se han quitado las columnas centrales?) todos los estudiantes, hallaron primero el total de cubitos multiplicando el largo por el ancho y por el alto de la figura; luego a este resultado le restaron el número de cubitos que tenía cada columna que le quitaron, teniendo en cuenta que dos de las tres columnas se cruzaban en un cubito. Una niña tomó el material didáctico dado, y para tener certeza de cuántos cubos se habían quitado armó la estructura de tan solo las tres columnas retiradas, evidenciando el cruce de dos cubitos como se muestra la Figura 21.

Figura 21. Construcción de la estructura requerida

Para las preguntas **4b** y **4c** simplemente tomaron los cubitos dados, armaron la figura y contaron los cubitos que utilizaron para lograrlo (Ver Figura 22).

Figura 22. Estructuras de los literales b y c

Para el último problema, el material didáctico facilitado fue clave, pues todos se valieron de éste para reconstruir las figuras, y al considerarlo insuficiente, lo pedían prestado a los compañeros para lograrlo; seguidamente procedían a contar el número de cubitos que contenía cada una de ellas. La representación en el papel, pocos la realizaron y quienes lo intentaron lo dejaron incompleto.

En la segunda, parte correspondiente a la socialización fue el escenario perfecto para llevar a cabo el cuarto paso de la metodología de Polya, pues en él se volvió a contrastar la solución, y eso fue lo que precisamente se vio, pues se tomó punto por punto y a medida que esto sucedía los estudiantes iban pronunciando frases como: *"¡hay, me quedó mal!; ¡no conté la hilera completa!"*[63]*,* entre otras.

En varios casos los estudiantes, al preguntarse entre sí, el por qué sobraban o faltaban algunos cubos, se prestaban la colaboración para aclarar el motivo y encontrar la respuesta, con la ayuda del cubo, y así reconocer claramente la razón.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes fue de gran expectativa la utilización del material, pues para ellos, los cubos les llamó mucho la atención, en la pretensión de construir con éstos cualquier figura, así no fuese de las exigidas. El entorno tradicional, se transformó en un ambiente más dinámico, libre, y de compartimiento. Todos estaban en acción y la docente tan sólo se convertía en una observadora, con pocas intervenciones aclaratorias.

Logros: la experiencia permitió ver el sentido de cooperación entre los estudiantes, pues siempre se prestaron el material entre sí, socializaban respuestas para fortalecer dudas entre ellos. Se pudo además comprobar que el material es fundamental en la solución de muchos problemas, pues no obstante desarrolla la creatividad, permite mediante la visualización, la manipulación y la práctica directa

[63] Opinión de los estudiantes.

obtener con más certeza los resultados. Una mayor constatación de la actividad se muestra en las evidencias fotográficas (ver anexo 2).

Dificultades: en el desarrollo de la actividad a pesar de la motivación por resolver los problemas y los logros obtenidos, se precisan las siguientes insuficiencias:

- Faltó mayor detenimiento en la observación del seguimiento de los procesos, seguramente por la misma ansiedad de manipular el material y querer encontrar resultados no previstos.
- La misma curiosidad de una clase muy diferente, al desarrollar problemas no rutinarios con el uso de un material novedoso, los llevó a dejarse dominar por la inventiva, saliéndose por momentos de aquello que en realidad debían desarrollar.
- La socialización se extendió demasiado, pues por razones de la falta de fluido eléctrico, fue imposible hacer uso del video beam para la proyección de las figuras y la explicación de su contexto, de donde fue además complicado hacer énfasis en la observación para llegar con mayor seguridad a la manipulación.

4.2. Actividad 2: Empaques

Desarrollo de la actividad: con los veinte estudiantes se inicia el desarrollo de la actividad, de manera individual. La primera pregunta presentó cierta confusión y dificultad al solucionarse, pues casi todos los estudiantes no tenían claridad, que para dar el resultado se debía contar el número de cubos que había en las cajas o si por el contrario, el resultado obedecía a la operación matemática de multiplicar el número de cubos que ocupaban el largo por el ancho por el alto, según lo indicaba la

Figura 23. En otro caso, tomaron el resultado del número de cubos que ocupaban la primera capa y para dar la respuesta final lo lograron sumando el número de cubos existentes capa por capa.

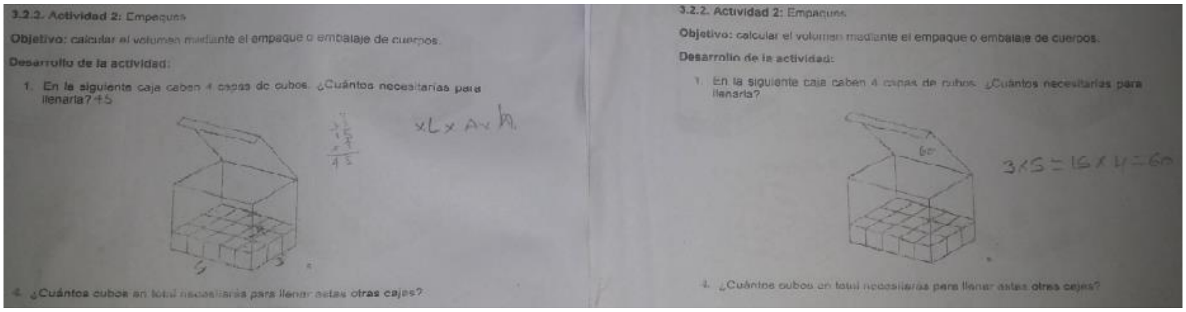


Figura 23. Procesos algorítmicos realizados por los estudiantes

Es necesario aclarar, que todos tenían muy claro qué clase de operación matemática se requería para obtener la respuesta, sin embargo dicho resultado no fue el mismo para todos, pues mientras unos, tuvieron en cuenta los cubos figurados dentro de la caja, éstos al resultado final le restaban el número de cubos que estaban incluidos dentro de ella, otros simplemente daban el resultado de las operaciones matemáticas, sin tener en cuenta los cubos incluidos.

La segunda pregunta no presentó dificultad alguna a la hora de solucionarla, pues no hubo interrogantes durante el proceso de solución. Para la tercera pregunta, consideraron entendible el proceso pero un poco complejo, en razón a que no veían la manera de manipular los objetos para considerar así, cuántos cabían en el recipiente, al punto que pedían se les prestara los cubos para lograr realizar experimentalmente el proceso, situación que no fue permitida. Al pretender dar una respuesta en particular, optaron por determinar el número de cubos contenidos en cada ficha, como también número de cubos en el recipiente, con el ánimo de establecer el número de fichas contenidas en el recipiente, estipuladas en cada uno de los literales.

Finalmente, se presentó el interrogante acerca de que si las fichas se debían ubicar tal como aparecían en el gráfico o podían cambiar de posición, a lo cual la investigadora responde que había libertad de movimiento en ellas. Este proceso les llevó a jugar con las fichas encontrando diferentes formas de ubicación, donde se tiene en cuenta lo estipulado en cada literal, concluyendo en particular que con las fichas estipuladas en el literal **c** no se alcanzaba a llenar totalmente el recipiente.

La cuarta y quinta preguntas no presentaron dificultad alguna en su solución, puesto que el referente de la tercera fue el mejor indicador y ayuda para obtener la respuesta.

Para el problema seis, la mayoría de los estudiantes se percataron que las dimensiones del empaque del reloj no correspondía a las de la caja de regalo, pues en ésta no existía ninguna dimensión equivalente a diez, por lo que dedujeron rápidamente que cuatro centímetros del empaque del reloj quedaban por fuera, sin importar su ubicación. Algunos manifestaron que a la hora de multiplicar daba lo mismo, por lo que deducían que sí cabía completamente, donde se evidenció que no leyeron la pregunta, simplemente se limitaron a ejecutar el algoritmo indicado.

El séptimo y octavo problema fue considerado, por todos los estudiantes, como de muy fácil solución, tanto así que era resuelto de forma inmediata y de manera correcta, tan convencidos de ello, que exigían su rápida revisión. El problema nueve fue resuelto correctamente por la mayoría de estudiantes, pero su respuesta salió del ensayo y del error, no fue evidente para ellos el algoritmo matemático.

La pregunta diez, tuvo claro el proceso, aunque tan solo algunos alcanzaron un positivo resultado, pues los otros confundieron el radio con el diámetro, situación que les impidió hallar la respuesta correcta.

Durante el proceso de socialización contamos con la ayuda del vídeo beam, lo que permitió reforzar la eficacia de la observación y en consecuencia se hizo más efectiva y dinámica. A continuación se muestra este desarrollo para algunos de los problemas o puntos:

- Para aquellos estudiantes que no lograban tener claridad, especialmente en la figura **b** de la primera situación del punto dos, se recurre al uso de los cubos, con los cuales de forma pragmática, fue posible una mejor y directa observación, alcanzando así el objetivo.

- Para el punto tres, la docente presenta la situación descrita allí inicialmente, encontrando que no era efectiva, pues los estudiantes quienes utilizaron esta estrategia, no tuvieron en cuenta la ubicación de las fichas dentro del recipiente, limitándose simplemente a cuadrar la suma de los cubos que contenía cada ficha para que esta fuera igual a los ciento ochenta cubos que contenía el recipiente.

- Para la segunda solución descrita en este punto, una de las niñas que empleó esta estrategia, hizo uso del Paint para explicarla, de modo que así construyó el recipiente con las dimensiones indicadas, trazó los cubos, y dio a cada ficha un color diferente, de tal manera que presentó la disposición y número de las fichas necesarias para ocupar el recipiente, según las indicaciones en cada literal.

- Los puntos cuatro y cinco, se desarrollaron con mayor facilidad, pues al lograr entender el tercer punto, éste les sirvió de guía, por lo cual no hubo necesidad de hacer uso del Paint. La retroalimentación se dio a simple observación y comunicación directa.
- El punto seis se desarrolló mediante la cooperación entre los mismos estudiantes, en donde quienes lo habían desarrollarlo inicialmente de manera correcta, dieron a sus compañeros la explicación del por qué el reloj no podía ser guardado en la caja de regalo, haciéndoles ver que la dimensión diez no aparecía por ningún lado en ésta.
- Para la pregunta nueve, la docente explica en el tablero la solución, donde se emplea la descomposición en factores primos, pues los niños que lo hicieron correctamente manifestaron, que este lo habían obtenido al "tanteo", pues sabían que la multiplicación del largo por el ancho por el alto del sólido regular les debía dar ciento cinco.
- En la retroalimentación del problema diez se verificó que el proceso estaba claro para todos, sin embargo al preguntárseles cuál era la diferencia entre el radio y el diámetro, los niños que habían obtenido el resultado incorrecto, "entraron en risa", al percatarse que el problema traía indicada una esfera con su radio, dándose cuenta del error cometido; pues habían tomado el radio como el diámetro ("ancho" de la esfera según ellos).

Motivación por el aprendizaje: el hecho de haber desarrollado la anterior actividad haciendo uso de los cubos, dio a los estudiantes cierta apertura para entrar, con mayor curiosidad e interés a desarrollar el planteamiento de los diferentes problemas, donde muestran gran seguridad, júbilo y dinamismo en el transcurso del proceso. Al socializar el trabajo desarrollado en la actividad, mostraban gran interés por dar a conocer sus resultados y compartían de manera desinteresada y amplia los conocimientos adquiridos. Mostraron gran agrado al compartir los saberes y siempre estuvieron motivados y concentrados solo en lo que estaban haciendo.

Logros: el haber alcanzado que los estudiantes hubiesen logrado la forma general de hallar el volumen de un cubo o prisma rectangular, mediante el desarrollo de la primera actividad y sin la ayuda del docente. De igual manera el fortalecimiento de la integración y cooperación entre los estudiantes.

Una mayor constatación de la actividad se muestra en las evidencias fotográficas (ver anexo 3).

Dificultades: la poca capacidad de interpretación de la lectura y su mismo afán por terminar rápido.

4.3. Actividad 3: Volumen y capacidad

Desarrollo de la actividad: participaron veinte estudiantes del grado octavo. La primera parte de la actividad se desarrolló en el polideportivo de la Institución, pues era necesario el manejo de agua y los espacios son más amplios y disponibles. Se inició a las seis a.m. y se culminó a las nueve y treinta a.m.

El problema **uno** no presentó dificultad para su solución, puesto que los estudiantes manejaban la equivalencia entre la unidad de capacidad **ml** y la unidad de volumen **cc** cúbicos; además fue para ellos fácil reconocer que si en la probeta había cierta “cantidad” (volumen) de agua, y luego de introducirle la piedra dentro de dicha probeta, el volumen ("cantidad") del agua subía. Esa diferencia de medidas era entonces el volumen de la piedra que se le había introducido; resultado obtenido mediante el cálculo mental de los niños.

Para el segunda problema, un recipiente en forma de prisma rectangular, lleno de agua hasta la mitad, era el instrumento utilizado por el estudiante para hallar el volumen de la piedra. Este proceso desarrollado, aproximadamente por el 60% de los estudiantes, lo llevaron a cabo a partir de la medición de las dimensiones del agua (largo, ancho y alto) que estaba dentro del recipiente, con la ayuda de una regla; seguidamente multiplicaron las tres dimensiones y obtuvieron el volumen del agua. A continuación procedieron a introducir la piedra, con lo que luego al subir el nivel del agua, el estudiante repitió el proceso antes descrito y encontró experimentalmente la diferencia entre los dos volúmenes, concluyendo que dicha diferencia correspondía al volumen de la piedra.

Un 25% por ciento de los niños, optaron por coger la probeta y contabilizaron cuántas probetas llenas, (las cuales estaban graduadas en **ml**), se necesitaban para llenar la mitad del recipiente dado. Como sabían la equivalencia entre **ml** y **cm^3**, encontraron fácilmente el volumen del agua contenido en el recipiente y con la ayuda de un marcador señalizaron hasta donde marcaba el agua. A continuación introducen la piedra que inmediatamente genera una subida del nivel del agua, para en consecuencia con la probeta, substraer del recipiente esa cantidad de agua que subió, hasta dejar el nivel en el punto antes señalado con el marcador. El agua substraída equivale entonces al volumen de la piedra tomado en **ml** y convertido en **cm^3**.

Una tercera solución fue planteada por el 75% de los estudiantes, quienes llenaron el recipiente de agua hasta la mitad, señalizando con el marcador el punto hasta donde daba el nivel del agua, luego introdujeron la piedra y a continuación con una jeringa de cinco **ml**, substraer el agua que excedía el punto señalizado por el marcador. El resultado lo calcularon sumando el número de jeringas llenas substraídas, para luego tomado ese resultado, convertirlo a **cm^3**.

El tercer problema fue solucionado de igual manera que el punto anterior, donde solo cambió el elemento objeto a encontrar su volumen. Una última experiencia, para este problema, resultó de algunos estudiantes que llenaron con agua totalmente el recipiente, colocado éste sobre un platón, de donde luego de introducir el producto agrícola, al cual iban a medir su volumen, éste generaba un vertimiento de agua, ésta era retomada y medida con la jeringa para así calcular tantos **ml**, que luego sería convertidos en **cm^3**, encontrando con ésto el volumen del objeto indicado.

Para el cuarto problema, los estudiantes tenían claro el proceso a seguir para encontrar la solución. Sin embargo, algunos encontraron dificultad a la hora de leer el gráfico que determinaba la altura (nivel) del agua presentándose confusión y en consecuencia error al dar la respuesta, esto le ocurrió al 20% de los estudiantes.

El quinto problema presentó algunas imprecisiones, pues todos los estudiantes tenían claro el procedimiento para encontrar el recipiente correcto, sin embargo a la hora de realizar las operaciones de conversión de unidades de longitud, algunos lo hicieron de manera incorrecta, otros realizaron mal el algoritmo de la multiplicación con números decimales. No obstante el 45% de los participantes encontraron la respuesta correcta.

En último problema fue el que mayor dificultad presentó, pues tan solo una niña logró desarrollarlo casi correctamente, pues le faltó el último proceso (ver figura 24). Tres estudiantes intentaron desarrollarlo, sin alcanzar éxito, pues tan solo hallaron el volumen del agua contenida en el recipiente y el del prisma sólido metálico. Los dieciséis estudiantes restantes (80%), no intentaron iniciar el proceso, por considerar imposible hallar la solución.

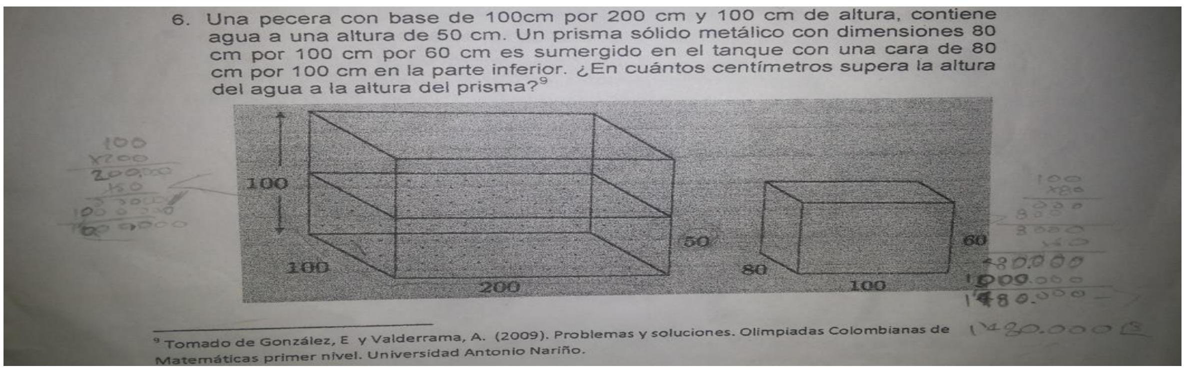


Figura 24. Proceso algorítmico desarrollado por la estudiante S.R

La socialización se llevó a cabo en la sala de sistemas, bajo la orientación de la docente, en la cual se proyectó la guía de la actividad en un vídeo, dando explicación por parte de los estudiantes, de la forma en que abordaron los distintos procesos para encontrar la solución de los ejercicios. Es importante reconocer que entre los mismos estudiantes se hacían las correcciones de aquellas confusiones que se presentaron. La docente tan solo explicó la última parte de la forma de solucionar el ejercicio seis, pues la primera parte de este ejercicio fue explicada por la única niña que lo alcanzó a resolver.

Toda esta actividad fue observada y valorada por el Magister Fernando Pérez, designado por la Universidad Antonio Nariño, para constatar la implementación de las actividades.

Motivación por el aprendizaje: el lugar elegido para el desarrollo de la actividad, brindaba todas garantías para realizar un buen trabajo; amplios espacios con suficiente ventilación e iluminación. La buena disposición de los participantes al encontrarse en un ambiente diferente y único, con disponibilidad de materiales útiles al momento de realizar el trabajo. Durante el desarrollo de la actividad el ambiente es agradable, en donde a pesar de ser sugerido un trabajo individual, resultó ser muy cooperado y compartido, tal vez por curiosidad de correlacionar experiencias y de proponer ayudas mutuas de perfeccionamiento para lograr unos mejores resultados, eso sí, sin desprenderse de lo que le era propio y le correspondía personalmente.

Logros: en el desarrollo de la actividad se pudo constar que:

- Hubo gran dinamismo y alto sentido de participación, se despertó la curiosidad en los estudiantes y mostraron desear siempre estar en actividad.
- Se fortaleció el sentido de cooperación y deseos de hacer las cosas siempre correctamente.
- Se pudo una vez más comprobar la importancia de la práctica como agente vital en el desarrollo del conocimiento.
- El debido uso del material didáctico en relación de la intención en la aplicación de los conocimientos matemáticos, de donde se pudo obtener resultados, sin

que necesariamente se tuviera que acudir a fórmulas o rigurosas reglas prescritas.

Una mayor constatación de la actividad se muestra en las evidencias fotográficas (ver anexo 4).

Dificultades: gracias al buen ambiente, disponibilidad y cooperación, fue una actividad tan agradable que muy pocas dificultades se dieron. Tal vez el agotamiento de parte de algunos estudiantes al hacerse un poco extenso el trabajo.

4.4. Actividad 4: ¡A experimentar se ha dicho!

Desarrollo de la actividad: se desarrolló una primera parte en el polideportivo con dieciocho estudiantes. Se eligió este lugar pues se requería de un sitio apropiado para la manipulación de arena y el uso de algunos cuerpos geométricos.

Para los problemas **uno**, **dos** y **tres**, aunque se trabajaba con parejas de cuerpos distintos pero con características en común, a los estudiante no se le presentó dificultad alguna, en cuanto al reconocimiento de los cuerpos, puesto que éstos ya se tenían desde grados anteriores, al igual que el planteamiento de la ecuación para encontrar el volumen de cuerpos como el prisma y el cilindro (ver figura 25).

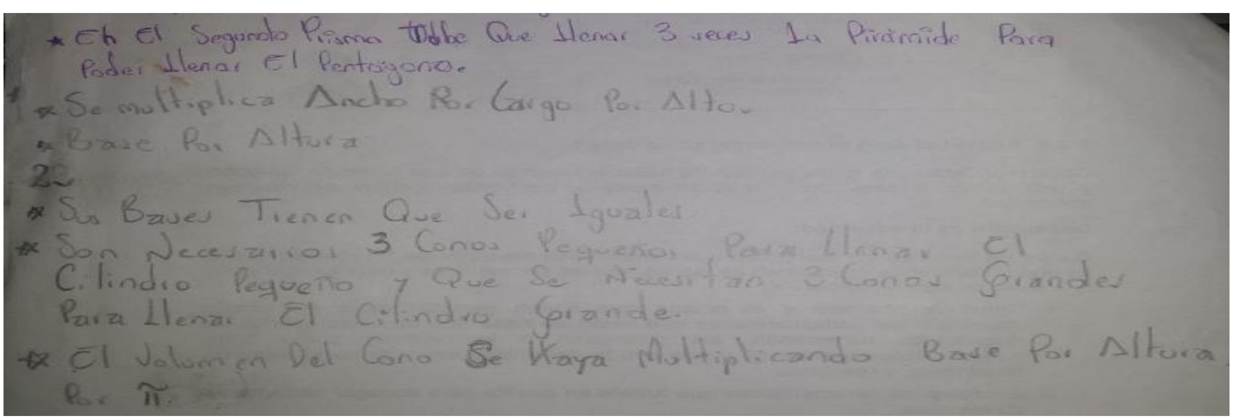


Figura 25. Reconocimiento del prisma y planteamiento de la ecuación para hallar el volumen de éste

Se presentó gran dificultad a la hora de plantear matemáticamente la relación que se observaba entre el llenado del prisma con la ayuda de la pirámide y el del cilindro y la esfera con la ayuda del cono, aunque verbalmente comentaban lo que sucedía y lo afirmaban correctamente. Pero al ir a la operación matemática les fue imposible por sí solos, por lo que la docente tuvo que guiar el proceso metódicamente, mediante preguntas o impulsos heurísticos claves y muy puntuales para llevarlos a alcanzar el objetivo.

El cuarto problema presentó igualmente ciertas dificultades, pues aunque había que aplicar la fórmula para encontrar el volumen del cilindro, la incógnita no era propiamente el volumen, pues este era dado, sino que había que reemplazar los valores suministrados en la ecuación, para luego despejar la incógnita que era la altura. El despeje como tal no tuvo complicaciones.

El quinto problema, fue también de cierta manera complejo, pues fue difícil para ellos comprender la expresión "es rotado en trescientos sesenta grados respecto del cateto menor". Los estudiantes lograron con dificultad comprender, qué era el cuerpo que se generaba de esta acción, a tal punto que fue necesario recurrir al uso de una escuadra en forma de triángulo rectángulo para que pudieran observar de manera directa y tangible, lo que sucedía cuando el cateto giraba.

Luego que los estudiantes entendieron que el cuerpo que se lograba era un cono, asumieron el resto del proceso para encontrar la solución, puesto que de ahí en adelante había mucha similitud con lo visto en el problema anterior. No obstante este punto, encontró otro tropiezo en cuanto a la función que cumplía el dato correspondiente al área del triángulo rectángulo. Sin embargo al final, ninguno llegó a su solución, entonces la docente propone diferentes niveles de ayuda a través de preguntas o impulsos heurísticos claves y muy puntuales para llevarlos a alcanzar el objetivo.

El sexto problema, necesitó ante todo, hacer claridad acerca del significado de la palabra tangente. Una vez aclarado, el punto se desarrolló sin contratiempo, ni intervención de la docente.

Para el séptimo punto, los estudiantes lo relacionaron directamente con lo realizado en la actividad tres, por lo cual pudo desarrollarse con tan solo una corta asesoría de la docente, requerida por los estudiantes; esto en cuanto a recordarles el cómo hallar la fracción de un número.

La socialización se hizo casi a la par con el desarrollo de la actividad, en razón a las constantes intervenciones de la docente, dadas las dificultades que seguidamente se presentaban, por lo cual paso a paso se iban orientando.

Motivación por el aprendizaje: las seguidas intervenciones de la docente, permitió estimular los ánimos para que los estudiantes no declinaran y pudieran fortalecer el interés por encontrar los resultados.

Logros: mantener el deseo y el interés por terminar la actividad y al final el estudiante pudiera alcanzar el objetivo, donde ofrece la respuesta adecuada y cuál era el motivo de la dificultad.

Una mayor constatación de la actividad se muestra en las evidencias fotográficas (ver anexo 5).

Dificultades: en el desarrollo de esta actividad se pudo precisar que:

- El desconocimiento, tal vez por olvido, de algunos conocimientos básicos requeridos para el desarrollo de ciertos problemas dentro de la actividad.
- Se evidenció el manejo sistemático de problemas con contextos rutinarios, donde se remitían al uso de fórmulas rutinarias, que aunque sin entenderlas las empleaban de manera mecánica.
- Al planteárseles situaciones contextuales nuevas y diferentes los llevó a la confusión y prácticamente al "bloqueo", tratando de desistir del proceso.

4.5. Actividad 5: El reto

Desarrollo de la actividad: en esta actividad participaron 18 estudiantes y fue una actividad especial, pues en ella se estaba confirmando, a través de los resultados, qué tanto había construido el estudiante acerca del concepto de volumen. En todos los problemas hubo trabajo y en la mayoría respuestas correctas, pues en algunos estudiantes se presentaron errores en el desarrollo de operaciones básicas. En los problemas como el quinto y el sexto se evidenció una vez más el temor por abordar problemas no rutinarios como éstos, donde el resultado estaba dado en términos del radio (r o R).

El problema **uno**, tuvo dos formas distintas de solución, una hace referencia a procesos netamente algorítmicos, pues hallaron primero el volumen de la caja para luego encontrar el del bloque, y así determinar cuántas veces estaba éste en la caja. La otra solución es más lógica y sin procesos algorítmicos ya que simplemente acomodaron dos bloques en forma de prisma rectangular y así determinar, teniendo en cuenta las dimensiones del nuevo cuerpo, cuántos se podían guardar o empacar en la caja.

La pregunta **dos**, no representó dificultades para los estudiantes, al lograr su correcta solución. En el problema **tres**, se presentaron 3 situaciones: un grupo de tres estudiantes (16,6%), que aunque si bien el proceso era el correcto para dar con la solución, no leyeron con detenimiento, y en vez de trabajar con la ecuación para determinar el volumen de un cilindro, como el cuerpo que allí se mencionaba, emplearon la de una esfera. Otro grupo formado por cinco estudiantes (27,7%), encontró satisfactoriamente el volumen del cubo y el del cilindro respectivamente, pero no los relacionaron para dar con la solución. Y por último, el tercer grupo correspondía a los 10 estudiantes (55,5) que sí lograron culminar el proceso.

En esta situación, pasó algo muy similar que en la pregunta anterior, pues por un lado se encuentran los estudiantes que alcanzaron satisfactoriamente la respuesta y por el otro, quienes se quedaron en la mitad, pues aunque lograron encontrar correctamente los volúmenes de los cuerpos allí implicados, no lograron ver el paso que les faltaba, que no era otra cosa que restar, el volumen de la esfera, del volumen del cilindro con la esfera adentro.

Este quinto problema por ser de selección múltiple con única respuesta, generó en la docente ciertas dudas, en cuanto qué procesos llevaron a cabo los estudiantes que contestaron correctamente, pues se pudo verificar que para encontrar el resultado se limitaron a marcar al azar sin justificarla. En el problema sexto se dio la misma situación que en punto anterior, pues era de selección múltiple con única respuesta.

La séptima pregunta sin embargo tuvo procesos interesantes para lograr afirmativas respuestas en la mayoría de los estudiantes, pues mientras unos hallaron el volumen del bloque completo para luego restarles el resultado de sumar cuatro veces o multiplicar por cuatro el volumen de uno de los cubos retirados. Otros estudiantes ignoraron las medidas allí dadas y en vez de multiplicar 6x6x4, multiplicaron 8x4x4, y como en este nuevo análisis ya no faltaban 4 sino 2 cubos de 2x2x2, entonces restaron 16 de 128, logrando así su solución correcta (ver figura 153).

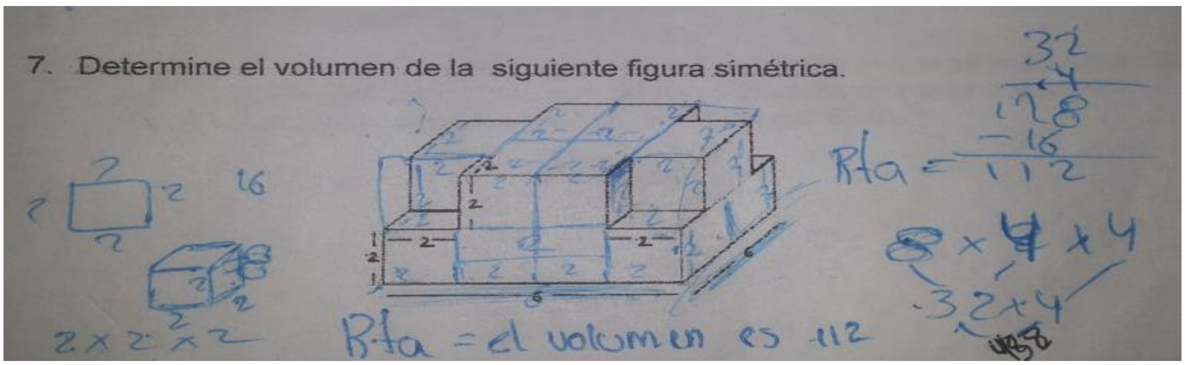


Figura 26. Proceso realizado por uno de los estudiantes para determinar el volumen del sólido dado

Para el último problema planteado, la mayoría de los estudiantes siguieron el mismo proceso empleado para la pregunta dos, con la única variable de que en éste no se remplazaba pi por 3.1416. Así entonces se cometieron los mismos errores, que en la situación dos se presentaron y fueron descritos claramente. Aquí, solamente 2 estudiantes (11,1%) no lo resolvieron.

En la socialización se destacó de manera permanente una estudiante SR, que en las actividades anteriores también mostró gran habilidad en el desarrollo de los procesos, pues casi que quería explicarlos todos. A continuación se realiza un análisis de este momento para cada uno de los problemas:

- En el problema uno, fue esta la estudiante SR quien explicó la solución no algorítmica, para luego dar paso a un estudiante CA que expresó verbalmente el recorrido algorítmico empleado para llegar a la solución, (no quiso pasar al tablero pues expresaba timidez para hacerlo).
- En el problema **dos**, casi que en coro los estudiantes describían la solución del problema, la dificultad se encontró en el que nuevamente no querían pasar al tablero, por lo que la estudiante SR del punto anterior, lo resolvió en la pizarra.
- En el problema **tres**, es necesario recordar que ya se mencionó las tres situaciones que se dieron, pero como se trataba de retroalimentar y nuevamente los niños estaban reacios a pasar al tablero, entonces la estudiante SR solucionó el problema, suscitando rumores en la mayoría de sus compañeros, pues los que trabajaron con la esfera comentaban: *"… [64]yo hice el mismo proceso pero con la ecuación de la esfera, pues la sombra me confundió",* y los que lo habían empezado bien entonces murmuraban *"… me falto la resta, huy!, casi me queda perfecto!"[65].* En este caso se notó la falta de lectura.
- El problema **cuatro**, fue solucionado fácilmente, aunque no faltó el error a la hora de efectuar las operaciones básicas matemáticas entre los números decimales. En el problema **quinto** los estudiantes ofrecen la solución al tanteo, pero no lo explican. Ante esta situación la docente intervino, y con ayuda de un tarro de pintura y una caja que había en el aula, explicó a los estudiantes el

[64] Opinión de estudiantes.
[65] Opinión de estudiantes.

contexto de la pregunta, y el por qué las respuestas estaban en términos del radio (Ver Figura 27).

Figura 27. Intervención de la docente en la solución del problema 5

- El tratamiento para encontrar la solución del problema **seis** también fue guiado por la docente, pues ofrece ciertas preguntas o impulsos heurísticos, lo cual permitió la resolución adecuada. Es de destacar que la dificultad no estuvo en los procesos para encontrar los volúmenes de los cuerpos allí presentes, sino en la interpretación de las opciones de respuestas.

- Para la explicación del problema **siete**, los estudiantes pedían al unísono la oportunidad para que se les permitiera desarrollarlo. Al presentarse dos tipos de solución entre todos los estudiantes, entonces un representante de cada grupo que precisaba un proceso diferente, pasó al tablero a exponer su punto de vista. Dadas las dos explicaciones se encontró que sus respuestas eran correctas.

- Al llegar al problema **ocho**, los estudiantes consideraron, que su proceso era muy similar al efectuado en el punto dos, viendo la diferencia tan solo, en que en el punto dos π se reemplazó por su valor y en éste se dejó solamente indicado.

Motivación por el aprendizaje: los estudiantes se extrañaron un poco al no encontrar material didáctico para continuar con el trabajo, sin embargo no se desmotivaron, pues al empezar el desarrollo de los problema notaron que tan solo se trataba de aplicar fórmulas, y encontraban sorpresas al notar los errores cometidos, y lo sencillo que pudo haber sido si se hubiera tenido mayor cuidado al efectuar el proceso de comprensión de lectura correctamente. Al hallar las respuestas correctas se mostraron animados y muy satisfechos.

Logros: en el desarrollo de esta actividad se pudo constatar que:

- Satisfacción de los estudiantes al notar avances en el desarrollo de sus procesos.
- El fortalecimiento del sentido de cooperación, compañerismo y confidencialidad entre los estudiantes.
- Desarrollan mayor confianza en la participación y se esforzaban por encontrar respuestas correctas.
- Un total 16 estudiantes (88,8%) adquirieron un significado acerca del concepto de volumen y dos (22,2%) se apropian de forma parcial.

Una mayor constatación de la actividad se muestra en las evidencias fotográficas (ver anexo 6).

Dificultades: en esta actividad se detectaron las siguientes insuficiencias:

- El olvido de algunos algoritmos en las operaciones matemáticas básicas especialmente con números racionales.
- La interpretación de la lectura, generando confusiones y procesos inconclusos.
- Rigor y detenimiento al observar las figuras.

4.6. Actividad 6: Feria "construyendo el concepto de volumen"

Desarrollo de la actividad: se realiza una distribución de los estudiantes en cinco grupos de cuatro cada uno. A cada grupo se le asignó una actividad diferente de las abordadas anteriormente.

El grupo número **uno**, con la ayuda de cubos, se encargó de armar y desarmar distintos cuerpos, los que podían ser regulares o irregulares. La novedad, se convirtió en curiosidad, para los estudiantes y esto permitió que se dedicaran con mucho cuidado y atención a desarrollar la actividad, haciéndola con dinamismo y total participación. Se obtienen resultados satisfactorios, pues lograron con destreza y mostraron algarabía al presentar su obra de arte.

Al grupo número **dos** le correspondió la actividad de empaques. En esta, el grupo dinamizador le solicita a los estudiantes sexto y séptimo a realizar el dos, el cinco, seis, siete y ocho, por considerar que eran los de más fácil comprensión. Aquí se ayudaron del vídeo beam, ya que se necesitaba de muchas gráficas. La selección de estos puntos fue muy acertada, pues quienes desarrollaron tal actividad lo lograron con gran efectividad, a la hora de emitir sus respuestas, especialmente los estudiantes de grado sexto, tal vez por ser niños más detallistas y curiosos.

El grupo dinamizador de la actividad **tres**, es decir volumen y capacidad, trabajaron en el polideportivo, puesto que para su desarrollo requerían del manejo del agua. Explicaron las distintas formas aprendidas acerca de cómo hallar el volumen de cuerpos irregulares. Así entonces los participantes encontraron el volumen de cuerpos como uno piedra, una papa, una zanahoria, una naranja, una ciruela y una pera, a las que se agregaron cuerpos como sacapuntas, bolas de tenis, entre otros. El método de más aceptación, tal vez por ser el de mayor facilidad, fue el de la probeta.

El grupo cuatro, igualmente eligió como lugar de trabajo el polideportivo, a diferencia que su objeto de trabajo fue con arena. En razón a la dificultad que se les presentó al desarrollar la actividad, iniciaron explicando, primero qué clase de cuerpos se iban a trabajar y sus características, para luego abordar con los estudiantes el primer problema, con otro el segundo y con otro el tercero, de tal forma que formaron las parejas de cuerpos allí indicadas y realizaron la acción exigida.

Posteriormente el grupo dinamizador, a través de una cartelera dieron a conocer las fórmulas para encontrar el volumen de los cinco sólidos con los que estaban trabajando, de forma tal que lograron explicar a los niños de dónde salían las variables implicadas en cada una de las ecuaciones, con ayuda del experimento antes realizado. El rigor de esta actividad, implicó mucho cuidado y tiempo, por lo cual fue muy difícil lograr culminarla en su totalidad, no obstante hasta donde se desarrolló fue efectiva.

La quinta actividad, fue desarrollada por el grupo dinamizador número, donde se presentan problemas y no se le precisan de materiales, es considerada prácticamente como la evaluación general. En ésta, el grupo dinamizador, llegó a la solución de los puntos **uno**, **dos**, **tres**, **cinco** y **siete**, interactuando con los estudiantes de sexto y séptimo. Este grupo utiliza las mismas herramientas que la docente empleó al explicarles la actividad **cinco**, es decir el tarro de pintura y la caja. Los otros puntos se desarrollaron formulando preguntas orientadoras que llevaban a los estudiantes a comprender con mayor facilidad el proceso para encontrar la diferentes soluciones. Entre las preguntas más puntuales fueron: *¿Qué cuerpos fueron utilizados en la situación?, ¿qué información se tiene de cada uno de los cuerpos utilizados?, ¿qué entiendes de la pregunta formulada?, ¿qué harías para encontrar la solución a la pregunta?*[66]*,* entre otras.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes del grupo dinamizador fue significativo el sentirse en una actividad no convencional, que les generaba interactuar libremente, sin presiones y haciendo uso de materiales didácticos y desarrollando actividades que los comprometía a actuar con mayor autoridad, prácticamente como la del docente. También el ser tenido en cuenta por el docente y sentir que son capaces y seguros para responder en cuanto sean exigidos. Todo esto es favorable para la motivación de los estudiantes grado sexto y séptimo.

Logros: En esta actividad se pudo constataron que los estudiantes:

- Desarrollaron el trabajo ante un grupo bastante diverso y fueron capaces de fijar la atención de los estudiantes de grado sexto y séptimo para lograr la resolución de los problemas.

[66] Preguntas de los estudiantes del grupo dinamizador a los de grado sexto y séptimo.

- Aprendieron de los errores cometidos, al punto de buscar las estrategias y escoger los puntos de la guía que permitieran mantener la atención de sus espectadores, quienes eran de un nivel inferior.
- La masiva participación de los estudiantes de grado sexto y séptimo, advertidos que sus resultados no incidirían en sus valoraciones académicas.
- Asumir cierta autoridad, en la que se veían reflejados en el docente los estudiantes del grupo dinamizador y ser escuchados por otros estudiantes.

Dificultades: En el desarrollo de esta actividad se precisa que:

- Como se trataba de la última semana del calendario académico, los espacios permitidos por las directivas no eran los suficientes, para desarrollar a cabalidad la guía, o por lo menos sin afanes o apresuramientos.
- En ocasiones los niños, dadas sus cortas edades, les llevaba a la distracción y falta de concentración al momento de desarrollar el trabajo, situación que demoraba el éxito final.

Conclusiones del capítulo 4

Los resultados de cada actividad se precisan sobre la base de su desarrollo, la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades. En el desarrollo de la actividad se describe en un primer momento las posibles soluciones de los estudiantes y en un segundo momento se expresa como a través de la socialización de cada uno de los problemas se propicia el conocimiento y la construcción del concepto de volumen.

En las actividades se destaca el sentido de cooperación entre los estudiantes, pues siempre entre ellos se prestaron los materiales en aras de la resolución del problema y socializaron sus respuestas para fortalecer las dudas entre ellos.

En la resolución de los problemas con ayuda de los materiales ofrecidos se pudo comprobar que estos son fundamentales, que sirven de base y niveles de ayuda para el trabajo con los problemas de las restantes actividades.

En la resolución de los problemas los estudiantes tienen preferencia por lo tangible, lo concreto o sea por la manipulación de los cuerpos geométricos, pues tratan de resolver todos los problemas con este proceso, para después con la ayuda de la visualización obtener con más certeza los resultados. Los posibles resultados de cada uno de los problemas se ofrecen en un CD ROM, que se anexa a la tesis.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre la construcción de significado robusto del concepto general de volumen y del volumen de cuerpos geométricos espaciales en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la paz, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo de éste trabajo, ellos son:

- En la geometría del espacio, específicamente sobre la construcción del concepto de volumen de cuerpos geométricos, se destacan investigadores como Gutiérrez (1992, 1998), Rizo y Campistrous (1980-2007), Fernández (2005), Abrate et al. (2006), Rojas (2009), Steinwandel y Ludwig (2011), Villarroel y Sgreccia (2011), Morales y Majé (2011), entre otros, los cuales coinciden con la necesidad de mantener sus contenidos en el currículo de la escuela. También algunos de estos autores conceden valor a la manipulación geométrica para el aprendizaje de los conceptos, consideran importante el proceso de representación de cuerpos geométricos en el plano y sugieren desarrollar un proceso de enseñanza de la geometría del espacio desde sus aplicaciones prácticas.
- Con la resolución de problemas de la geometría del espacio, específicamente sobre la construcción de significado robusto del concepto de volumen se aprende a matematizar, a pensar de manera abstracta y a crear modelos mentales espaciales. Este proceso de resolución favorece tener una visión del

mundo para llegar a resolver situaciones no solo de Matemáticas, sino también de la vida real.

- La manipulación para la construcción de significado robusto del concepto de volumen es aquella que permite buscar características y propiedades de las figuras geométricas, que pueden ser percibidas únicamente cuando se interactúa con dichas figuras. En este proceso el estudiante se percata de ciertos elementos de los cuerpos geométricos, que pasan inadvertidos en una percepción exclusivamente visual.
- La representación geométrica espacial propicia desarrollar una modelación de la realidad objetiva, en la mente del individuo o materializada a través del dibujo o en objetos construidos, aspectos determinantes para la construcción de significado robusto del concepto de volumen en los estudiantes.
- El proceso de visualización favorece la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpos geométricos. Este proceso es visto como un conjunto de destrezas, que permite formar imágenes y utilizarlas de manera efectiva en la búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos, donde se tiene en cuenta sus interrelaciones, para construir este concepto.
- Después del proceso de Implementación, se obtuvieron los siguientes resultados:

- El uso de los materiales didácticos genera mayor motivación para la resolución de los problemas. Se pudo constatar que en la construcción de concepto el trabajo en colectivo fue fundamental.
- En la socialización de las actividades se visualizó los diferentes procedimientos que utilizaron los estudiantes para la resolución de los problemas y es el momento donde ellos se percatan de su error y lo rectifican.
- Es favorable el fortalecimiento del sentido de cooperación, compañerismo, confidencialidad, dinamismo y alto sentido de participación entre los estudiantes, también se despertó la curiosidad en los estudiantes y deseos de hacer las cosas siempre correctamente.
- Durante la resolución de los problemas aprendieron de los errores cometidos, al punto de buscar las estrategias de solución más precisa, donde demostraron su creatividad.
- Plena satisfacción de los estudiantes al notar avances en el desarrollo de sus procesos, motivado en el esfuerzo de encontrar respuestas correctas y una mayor confianza en la participación en el aula.
- Los estudiantes del grupo dinamizador en la actividad 6 desarrollaron el trabajo ante un grupo bastante diverso, asumieron cierta autoridad, en la que se veían reflejados en el docente y fueron capaces de fijar la atención de los estudiantes de grado sexto y séptimo para lograr la resolución de los problemas.

- De los 18 estudiantes que asistieron a todas las actividades, un total 16 (88,8%) adquirieron un significado acerca del concepto de volumen y dos (22,2%) se apropian de forma parcial.
- En el desarrollo de la actividad se propone por la investigadora que el trabajo sea en un primer momento individual, lo cual no se logra en todas las actividades, lo que demuestra el carácter social para la construcción de cualquier concepto, específicamente el de volumen.

RECOMENDACIONES

La implementación de la construcción de significado robusto del concepto de volumen de cuerpos geométricos espaciales en los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la paz, requiere considerar y poner en práctica las recomendaciones siguientes, para optimizar el proceso investigativo y los resultados obtenidos:

- Implementar en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en general, la metodología de Polya sobre la resolución de problemas para potenciar el pensamiento geométrico en el estudiante a través del fortalecimiento de las capacidades de visualización, representación y manipulación de cuerpos.
- Propiciar el trabajo colectivo y el uso de material didáctico en la construcción de conceptos cualquiera que este sea.
- Crear un espacio en las instituciones donde los estudiantes expliquen a compañeros de grados inferiores temas en común, ya que es un recurso motivante que genera aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática. Recuperable el 15 de noviembre de 2013 en la URL: http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf.
- Agudelo G., Bedoya V. y Restrepo A. (2008). *Método heurístico en la solución de problemas matemáticos*. Universidad tecnológica de Pereira.
- Alonso, I. (2001). La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Resumen de Tesis de Doctorado, Santiago de Cuba. p.13.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1989). *Invitación a la Didáctica de la Geometría.* España: Ed. Editorial Síntesis, S.A.
- Alsina, C. et al (1991). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. España. Editorial Síntesis.
- Arenas, J. (2009). Estrategias de autorregulación en bienes intangibles: el caso del software. Universidad de Antioquia. Recuperable el 21 de abril de 2014 en la URL: http://www.udea.edu.co/portal/page/portal/bibliotecaSedesDependencias/unidadesAcademicas/FacultadDerechoCienciasPoliticas/BilbiotecaDiseno/Archivos/Tab10/Libro%20Software%20Web.pdf

- Arrieta, M. (1992). Capacidad espacial y educación matemática: Tres problemas para el futuro de la investigación. Educación matemática. Vol.15, nº3, 2003
- Arrieta, M. (2002). Capacidad espacial y educación matemática. Recuperable 16/11/2013 en la URL: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Arrieta02.pdf
- Artigue, M. (1998) Research in Mathematics Education trough the eyes of mathematicians. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.): Mathematics Education as a research domain: A search for identity (pp. 477–489). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Balieiro, I. (2004) Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: Quatro episódios da história da heurística. Tese de Doutorado. Rio Claro: IGCE, UNESP (http://www.biblioteca. unesp.br/bibliotecadigital/document/?did=2255).
- Ball, A. (s.f). Citado por Labarrere, F. (1987): *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y Educación.
- Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I y II. La Habana: Pueblo y educación.
- Bishop, A. (1989). Implicaciones didácticas de la investigación sobre Visualización. Revista de investigación sobre la visualización en Matemáticas. Universidad de Cambridge. UK.
- Blanco, X. Descartes 2° ESO Matemáticas, cuaderno número 10. Bajo licencia creative Commons. Recuperable el 23/07/14 de la URL:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/cuadernos/2eso_cuaderno_10_cas.pdf.

- Borassi, R. (1986). Algebraic Explorations of the error. *Matthematics Teacher, 79*, 246 - 248.
- Bransford, J. y Stein, B. (1988): *Solución ideal de problemas*. Editorial Labor, Barcelona. España.
- Camacho, Á. Et. Al (s.f). La medida en la educación primaria. Recuperable el 26/06/14 en la URL: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte4.pdf. Pag. 183.
- Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.
- Camou, B. (2012). La geometría del espacio: un fascinante mundo por descubrir. Acta del 4° congreso uruguayo de Ed. Matemática, (CUREM4). Liceo 10, Montevideo, Uruguay. Recuperable el 7/12/13 en la URL: http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf
- Campistrous, L. (1993). *Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje.* Centro de Información y Documentación del ICCP. La Habana.

- Campistrous, L. y C. Rizo. (1996): *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Proyecto TEDI. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del Pensamiento matemático*. México. Editorial Trillas.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México, Ed. Pearson Educación, Tipográfica Barsa, S.A. de C.V.
- Cantoral, R., Rodríguez, F. y Montiel, G. (2008). Visualization in iterative processes. ICMI. Monterrey.
- Carr (1989). p. 471. Tomado de Barroso, J. J., & Ortiz, I. R. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, *342*, 257-286.
- Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software geogebra con alumnos de II de magisterio de la E.N.M.P.N. Tesis en opción al grado de Magister en Matemática Educativa. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Hondura, Tegucigalpa M.D.C. Recuperable el 10/12/13 en la URL: http://www.upnfm.edu.hn/bibliod/images/stories/Tesis/sepnov2010/idania_castellanos.pdf.
- Castelnovo, E. (1966). *Didattica della matemática.* La Nouva Italia, Firenze.
- Castro, E. y Castro, E. (1997): Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, 95-124.

- Chamorro, C. y Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales* (n° 17). Madrid: Editorial Síntesis S. A.
- Cockcroft, W. et al. (1982). Mathematics count. A report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Colectivo de autores. (1988). *Psicología. Libro de textos.* La Habana: Pueblo y Educación.
- Cortés, M. y Galindo, N. (2007). El modelo de Pólya centrado en resolución de problemas en la interpretación y manejo de la integral definida. Universidad de la Salle. Recuperable el 5 de octubre de 2014 de la URL: *http://repository.lasalle.edu.co/bitstream/10185/1552/1/TM85.07%20C818m.pdf*
- Cruz, A., Montes, Y. y Vargas, A. (s.f). Volumen y capacidad: de las unidades de medida antropométricas a las estandarizadas. Recuperable el 31 de octubre de 2014 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/2581/1/Volumen_y_capacidad_de_las_unidades_de_medida_antropom%C3%A9tricas_a_las_estandarizadas.pdf
- Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.
- Cruz, M. (2002). Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática. Holguín: Tesis en opción al grtado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP José de la Luz y Caballero.

- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. For the Learning of Mathematics, 5 (1), 44–48.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Dante, L. (2002). Tomado del blog del área de formación inicial docente. Recuperable el 24/02/14 en la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/edu.
- De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática.* EDIPUBLI S.A., Argentina.
- Delgado, R. (1998). La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas. Tesis de Doctorado, La Habana. p.2
- Encarnación y Castro, E. (1997). Tomado de Molina, R. y Guerrero, Luis. (2004). Tesis titulada el papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática. Antología. Universidad autónoma de Guerrero. México.
- Escudero, J. (1999). Resolución de problemas matemáticos. (Vol. 3). Recuperable el 31 de octubre de 2014 en la URL: http://platea.pntic.mec.es/jescuder/BLOG-1/Resolucion%20de%20problemas%20matematicos%20(Vol%203).pdf

- Estándares Curriculares para la Educación Matemática. National Consilium Teacher of Mathematic. Sociedad andaluza de Educación Matemática (NCTM, 1992, 2000, 2007)
- Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana, VIII*(1), 21.
- Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Intermedio. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Fernández, M. (2005). Texto inédito. Universidad del País Vasco. Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas. Bilbao.
- Flórez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba. Tesis de Grado (Candidato a Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana.
- Formación Inicial Docente. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. Recuperable el 21 de febrero de 2014 en la URL: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf
- Fouche, A. (1952). *La pedagogie des matematiques*. PUF, París.
- Freudenthal, H. (1983). “Didactical phenomenology of mathematical structures”. Reidel. Publishing Company. Boston. Tomado de Saucedo, G. Carbó, A. y

Mántica, A. (s.f). Volumen, ¿qué se necesita conocer para enseñarlo? Institución: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Recuperable el 9/12/13 en la URL: http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_22/pro_Saucedo_tra.pdf

- Garret, R.M. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. Alambique. Monografía. La resolución de problemas. No.5. Año II. Julio, Barcelona. España, pp. 6-15.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18 (1), 7–34.
- Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. Educación matemática, 11 (1), 77–78.
- Gaudio, P. y Gaudio, R. (2007). Geometría y espacio – Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales- 18-19. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/gaudio2.pdf.
- Gil, D. et al. (1992): La didáctica de la resolución de problemas en cuestión: elaboración de un modelo alternativo. Un ejemplo de cómo puede plantearse una crítica fundamentada de la enseñanza habitual y del pensamiento docente espontáneo, y de cómo lograr la participación de los profesores en la construcción de propuestas alternativas. Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales, No.6., Universidad de Valencia, pp. 73-86.

- Gil, D. (1992). Contribución de la historia y filosofía de las ciencias a la transformación de la enseñanza de la ciencia, en actas History of the Physical-Mathematical sciences and the Teaching of Sciences. (European Physical Society: Madrid).
- Gómez, J (2009). El Proceso de Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico: Un estudio de caso. Trabajo de grado. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.
- González, E y Valderrama, A. (2009). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas primer nivel. Universidad Antonio Nariño.
- González, M. (2006). La formación geométrica semipresencial en los Institutos Superiores Pedagógicos, basada en problemas. Tesis Doctoral. ISPEJV. Ciudad de la Habana.
- Gorgorió, N. y otros. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo las rotaciones. Suma 33, pp. 59-71. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/33/059-071.pdf.
- Guétmanova, A. (1989). *Lógica.* Moscú: Progreso.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Leída: SEIEM. Recuperable el 8/12/13 en la URL: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3629127.pdf.

- Gutiérrez, Á. (1989). Modelo del Razonamiento Geométrico de Van Hiele. Enseñanza de las Ciencias / Ángel Gutiérrez, Jaime Adela Jaime. Universidad de Valencia. Vol. 7, No. 1.
- Gutiérrez, Á. (1992**).** La enseñanza de la Geometría de los Sólidos en la EGB. Memoria final del proyecto de investigación. Formato pdf. Valencia, 219p
- Gutiérrez, Á. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. Revista EMA, 3(3), pp. 193-220. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/1079/1/41_Guti%C3%A9rrez1998Las_RevEMA.pdf
- Gutiérrez, Á. (2005). Enseñanza de las matemáticas en entornos informáticos. Módulo optativo del Plan de Estudios de Maestro. Curso 2005-06. Universidad de Valencia. Departamento de Matemática.
- Gutiérrez, Á. (2006). Situación de la Geometría del espacio en España y América Latina. Texto inédito.
- Gutiérrez, Á. et al. (1991). Proceso y Habilidades en visualización Espacial. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Valencia. España. Recuperable el 17/10/2013 en la URL: http://www.sectormatematica.cl/articulos/visualizacion.pdf
- Guzmán, M. de (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Red Científica. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html

- Herrera, D. y Aguilar, J. (s.f). Juego didáctico para construir volúmenes geométricos deformables. Universidad de Chile. Recuperable el 9/12/13 en la URL: http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2006/herrera_d2/sources/herrera_d2.pdf.
- Hitt F. (Editor, 2002a). Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.
- Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Recuperado el 15 de agosto de 2012, en la URL: *www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandohitt.pdf*
- ICME-10 Proceedings. Recuperable el 21 de abril de 2014 en la URL: http://higeom.math.msu.su/~asmish/Lichnaja-2010/Version2010-11-20/Trudy/Publications/2004/icme_completebook.pdf
- Jaime, F. (1994). *Problemas y soluciones.* Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 1990-1994. Universidad Antonio Nariño.
- Jaime, F. y David, M. (1999). *5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria* 1995-1999. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Universidad Antonio Nariño.
- Jaime, F. y Pérez, J. (2004). *Problemas y soluciones.* Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

- Kahane, J–P. (1988). La grande figure de George Polya. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.): Proceedings of Sixth International Congress on Mathematical Education (pp. 79–97). János Bolyai Mathematical Society.
- Kahane, J–P. (2000). La commission de réflexion sur l'enseignement desmathématiques. Gazette des mathematiciens, 84, 63–69.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty–five years of researchon teaching mathematical problem solving. In E. Silver (Ed.): Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 1–
- Kilpatrick, J. (1992). Historia de la investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.): *Educación Matemática e investigación*, Madrid: Síntesis.
- Kohanová, I. (2007). Comparison of observation of new space and its objects by sighted and non-sighted pupils. Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME). Recuperable el 11/11/2013 en la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG7.pdf
- Krulik, S. & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . pág. 4.
- Kubínová, M. (2001). The position of didactics of mathematics in the training of mathematics teachers (http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome12/article6.htm).

- Labarrere, F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y Educación,
- Labarrere, F. (1996). *Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
- Las magnitudes y su medida en la Educación Primaria. Recuperable el 2 de abril de 2014 en la URL: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte5.pdf
- Llivina, M. (1999). Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos. Tesis de Doctorado, La Habana.
- López, L. (2005). Metodología para el perfeccionamiento del proceso enseñanza aprendizaje del cálculo vectorial, fundamentada en el desarrollo de la visualización matemática tridimensional. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Camagüey. Centro de Estudios de Ciencias de la Educación “Enrique José Varona”.
- Lozano, L. (s.f). Saber 11: cilindro, cono y esfera. Programa de ECOPETROL innovando y educando. La formación desde otra perspectiva. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.
- M.E.N (Ministerio de Educación Nacional) (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Colombia: M.E.N.

- Majmutov, M. (1983). *Enseñanza problémica.* La Habana: Pueblo y Educación.
- Malara, N. (1997). An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25, ICME 8, Modena.
- Mapas de progreso del aprendizaje. Matemática: Geometría. Ministerio de Educación de Perú. Recuperable el 2 de abril de 2014 en la URL: http://www.ipeba.gob.pe/estandares/Mapasprogreso_Matematica_Geometria.pdf
- Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente.* España. Editorial Labor S.A.
- Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Editorial Paidos.
- Miyares, A. y Escalona, J. (1964). *Matemática, Segundo Curso. Geometría.* La Habana. Editorial Nacional de Cuba.
- Morales, C. y Majé, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Ciencias de la Educación. Universidad de la Amazonia. Recuperable el 12 de abril de 2014 en la URL: http://www.elitv.org/documentos/tesis/Tesis%20de%20Maestria%20Cesar%20y%20Ramon.pdf
- Netz, R. (2000). The origins of mathematical physics: new light on old question. Physics Today on the Web (http://aip.org/pt/june00/origins.htm).

- Newell, A. y Simon, H. (1972). Human problem solving. Printice-Hall. Perales, J.F. (2000). Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales. Editorial Marfil. Colección Ciencias de la Educación, España. 20.
- Orton, A. (1996). Tomado de Barroso, J. y Ortiz, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. Revista de Educación, 342. pp. 257-286.
- Owen y Sweller (1989). Tomado de la Tesis para optar al grado de doctor. Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Madrid 2005. p. 326
- Pérez, D. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.
- Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
- Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires, Argentina: Eduvim.
- Polya, G. (1945). *How to solve it.* Second edition. Princeton university press, new Jersey.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* España. Editorial Comares.

- Putnam, H. (1975), The meaning of "meaning" , en *Mind, Language and Reality*, Cambridge University Press p. 218-227.

- Revista de didáctica de las matemáticas números, Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 73-94. Recuperable el 7/12/13 en la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf.

- Ribnikov, K. Historia de las Matemáticas / K. Ribnikov. - - Moscú : Editorial MIR, 1987.

- Río, J. del; Hernández, L. Y. y Rodríguez, M. J. (1992). Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica. Mare Nostrum Ediciones Didácticas, S. A., Madrid.

- Rizo, C. (1987). Sobre la historia de la enseñanza de la Geometría en los niveles medio y elemental en Cuba. *Revista Varona* (La Habana) año IX (18).

- Rizo, C. y Campistrous, L. (2007d). Geometría Dinámica en la escuela, ¿Mito o realidad? Revista de Didáctica de las Matemáticas No. 45. Editorial Grao de IRIF, S.L.

- Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científica de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la luz y caballero”, Holguín. Cuba.

- Sáiz, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. Revista Mexicana de Investigación Educativa, vol. 8, núm. 18 pp. 447-478. Recuperable el 9/12/13 en la URL: https://quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_54/nr_607/a_8287/8287.pdf
- Sánchez, M. (1995). *Desarrollo de habilidades del pensamiento. Razonamiento verbal y solución de problemas.* México: Trillas.
- Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Santos, L. (s.f). *La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación práctica*. Cinvestav-IPN. México.
- Saucedo, G. Carbó, A. y Mántica, A. (s.f). Volumen, ¿qué se necesita conocer para enseñarlo? Institución: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Recuperable el 9/12/13 en la URL: http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_22/pro_Saucedo_tra.pdf.
- Sawada, T. (1990). International comparisons on Mathematics Education. Final report of SIMS, NIER, Tokyo.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problems Solving, Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving. In: F. R. Curcio (Ed.) Teaching and Learning: A problem Solving Focus (pp. 27–46). Reston, VA: NCTM.

- Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving, p. 28. In: F. R. Curcio (Ed.) Teaching and Learning: A problem Solving Focus. Reston, VA: NCTM.
- Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sierpinska, A. et al. (1993). What is research in mathematics education, and what are its results? Journal for research in Mathematics Education, 24 (3), 274–278.
- Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.
- Steiner, H. (1985). Theory of Mathematical Education (TME): An introduction. For the Learning of Mathematics, 5 (2), 11–17.
- Steinwandel, J. y Ludwig, M. (2011). Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME). Recuperable el 11/11/2013 en la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG7.pdf
- Suárez, A. (2014). Tipología de errores en la solución de problemas geométricos a partir de los problemas de olimpiadas. Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño.
- Tall, D. (1988). The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Hungría: el papel de la discusión para PME.
- Tall, D. (1992). Constructions of objects through Definition and Proof. Durham: PME Working Group on AMT.

- Team Maths challenge (2013). "Packing" was the theme of the poster competition at the national final. Design by arbelos, based on the winning poster by the perse School. United Kingdom Mathematics Trust
- Tesla, W. (s.f). Video "CÓMO medir el VOLUMEN de un objeto PASO A PASO" publicado el 11/09/2012. Recuperable el 23/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=xjn0V-ByT70.
- Tomado de colaboradores Wikipedia, recuperable el 13/04/14 en la URL: http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_triangular.
- Tomado del video Puntaje Nacional: Cuerpos geométricos - Guía de ejercicios - ejercicio 8. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=g2H2_D72tTQ.
- Torrance, E. y Myers, R. (1970). "Creative Learning and Teaching". Dodd, Mead y Company. Inc., USA. Traducción Española: "La Enseñanza Creativa". Educación Abierta, Santillana. Aula XXI. Madrid. (1976).
- Torres, P. (2000). La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI: logros y retos. ISP "Enrique José Varona", La Habana.
- Valderrama, J. (1989). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1985-1989. Publicación de la corporación universitaria Antonio Nariño.
- Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Revista Números. Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 73–94 ISSN: 1887 -1984. Recuperable el 11/11/2013 en la URL: http://www.sinewton.org/numeros

- Wussing, H. (1989). Conferencias sobre Historia de la Matemática / H. Wussing.- La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1990). Visualization in Teaching and Learning. Mathematics, MAA Notes Number 19. USA, Mathematical Association of America.

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta a profesores de Matemática

Objetivo: Determinar las insuficiencias que presenta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente sobre la construcción de significado robusto del concepto de volumen.

Desarrollo: Estimado profesor (a), la presente encuesta reviste una gran importancia para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente sobre la construcción de significado robusto del concepto de volumen, motivo por el cual es necesario tener presente sus valiosas opiniones. Por lo tanto usted ha sido seleccionado para realizar la misma, con vista a la realización de una investigación sobre este tema en el grado octavo. Por su ayuda, muchas gracias.

I.Datos Generales.

Lic.: Sí __ No__

Años de Experiencia: ____

Total de veces que ha trabajado el grado: ____

Institución: ________________________________

II.Cuestionario.

1. Marque con una X los medios de enseñanza que usted utiliza en las clases de geometría del espacio.

____ Tablero.

____ Regla, escuadra, compas, transportador

____ Objetos concretos.

____ Cuerpos geométricos.

____ Guía de trabajo.

____ Software de geometría dinámica.

____ Otros

2. ¿Cuáles son las dificultades que usted le aduce al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la geometría del espacio en las Instituciones, específicamente sobre la construcción de significado robusto del concepto de volumen?

3. Mencione alguna de las causas que han provocado las dificultades anteriores.

4. ¿Puede ofrecer un ejemplo que propicie un robusto proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio?

Anexo 2. Evidencias de la actividad 1

Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad composición y descomposición de cuerpos.

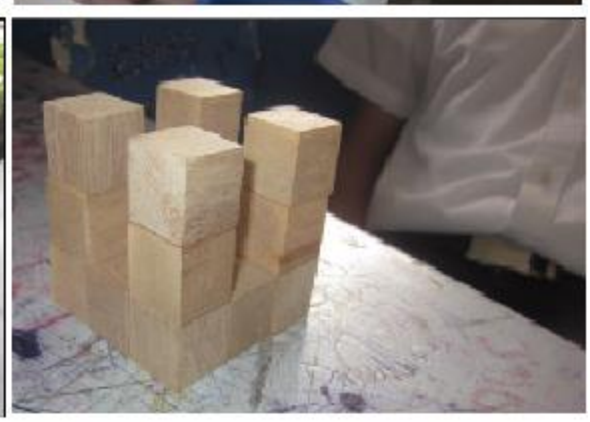






09/15/2010







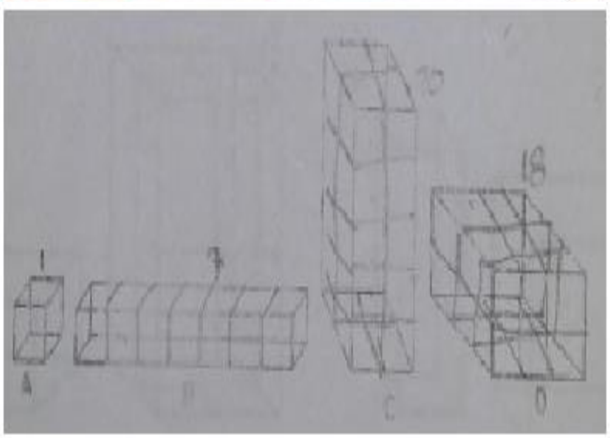
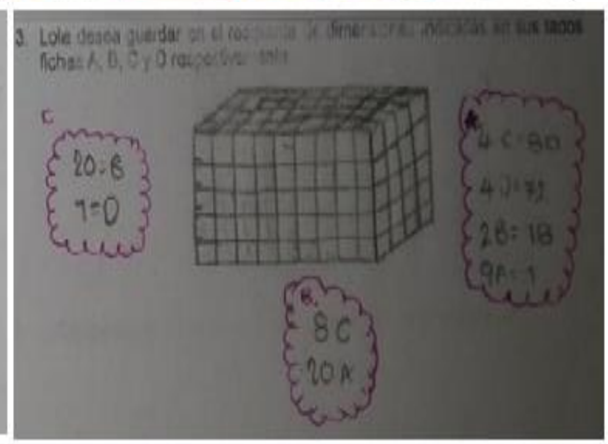
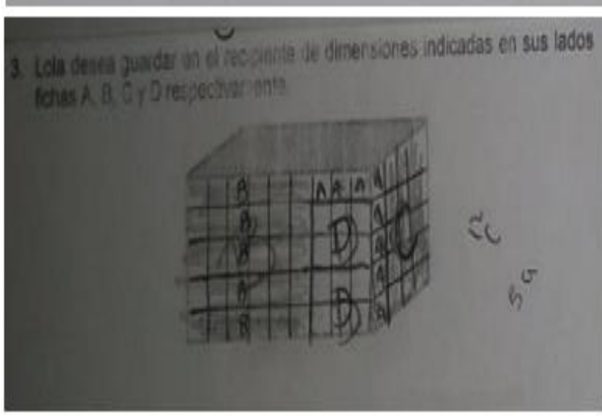


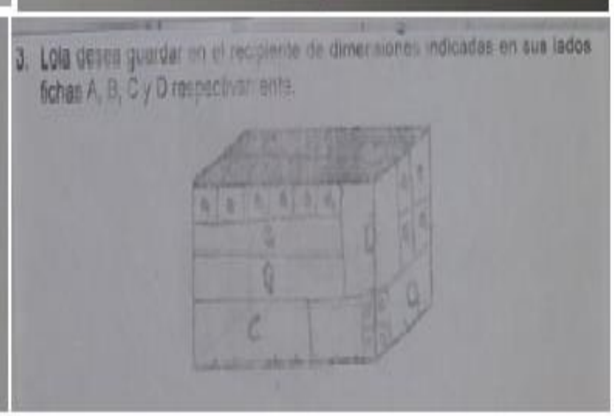
Anexo 3. Evidencias de la actividad 2

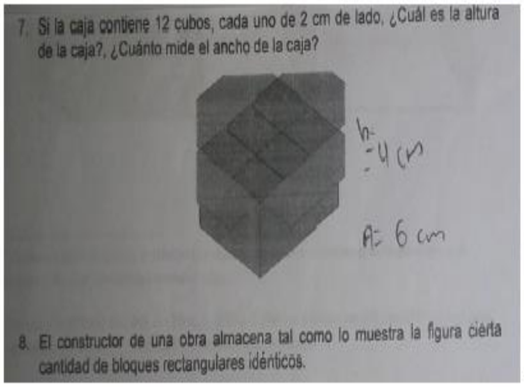
Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad empaques.







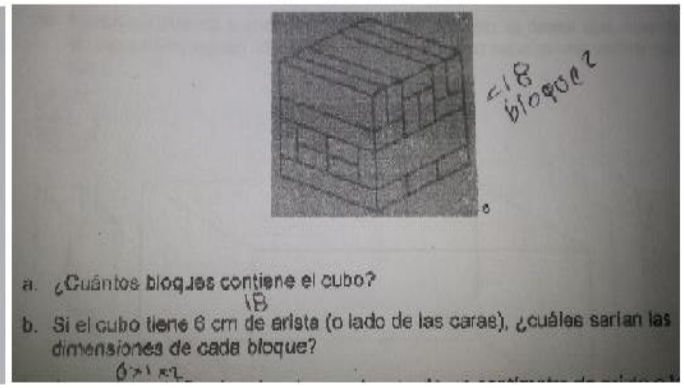


7. Si la caja contiene 12 cubos, cada uno de 2 cm de lado, ¿Cuál es la altura de la caja?, ¿Cuánto mide el ancho de la caja?

h: = 4 cm

A: 6 cm

8. El constructor de una obra almacena tal como lo muestra la figura cierta cantidad de bloques rectangulares idénticos.



≈18 bloque?

a. ¿Cuántos bloques contiene el cubo?

18

b. Si el cubo tiene 6 cm de arista (o lado de las caras), ¿cuáles serían las dimensiones de cada bloque?

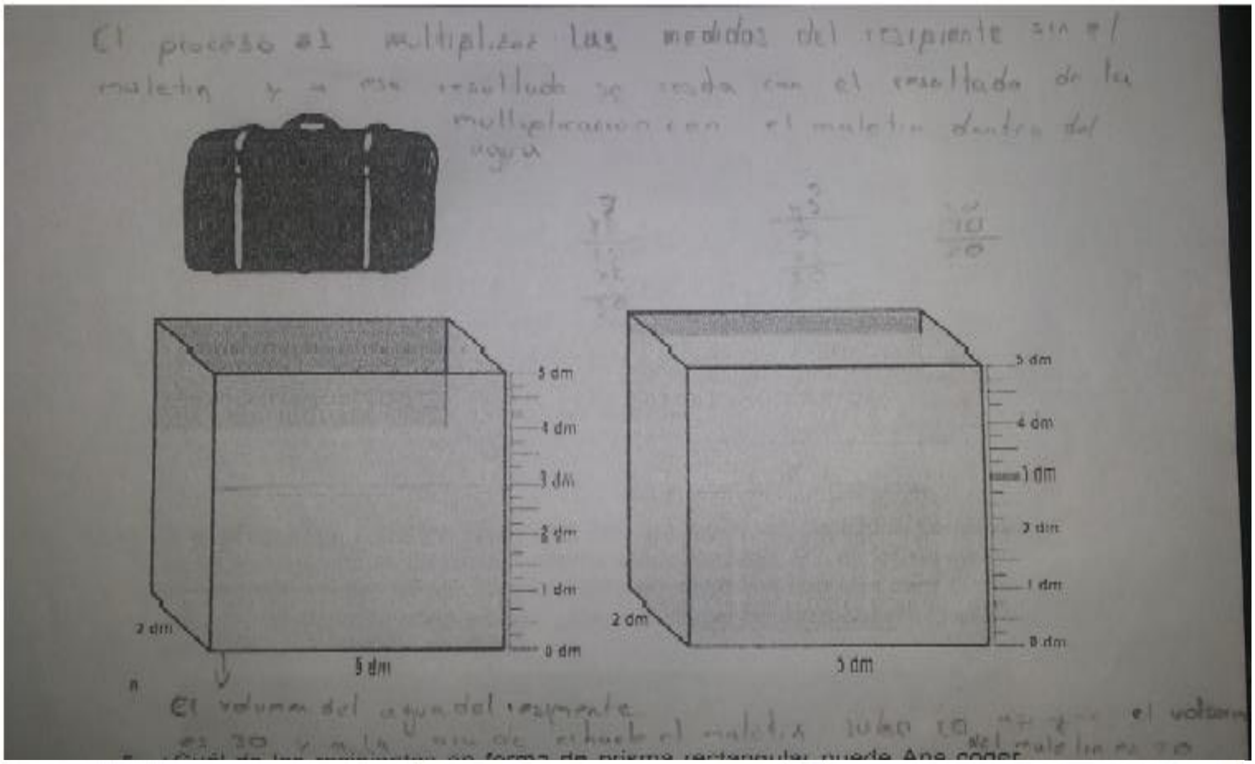
6×1×2

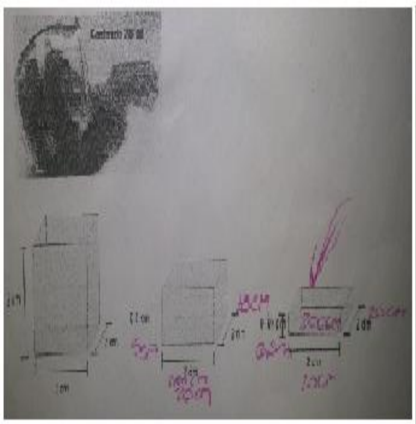
Anexo 4. Evidencias de la actividad 3

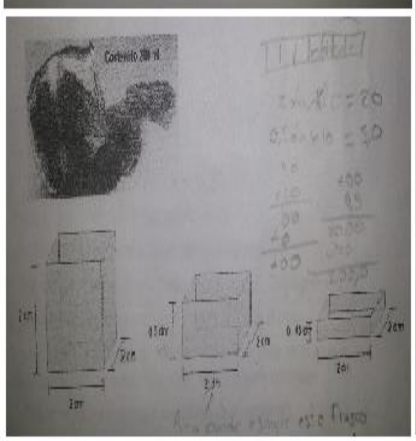
Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad volumen y capacidad.

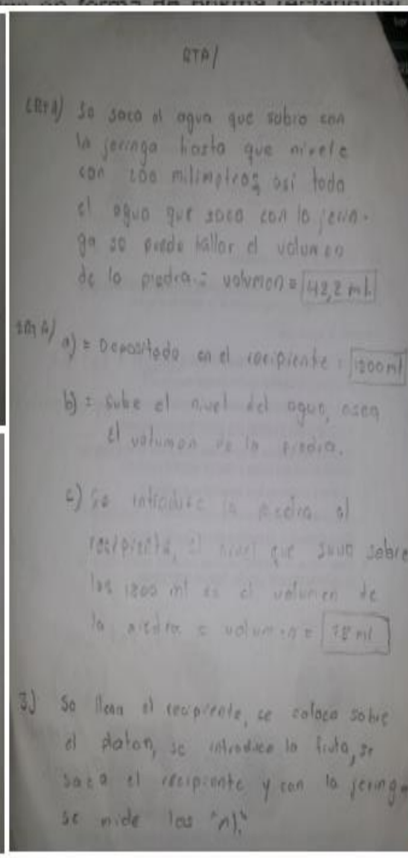


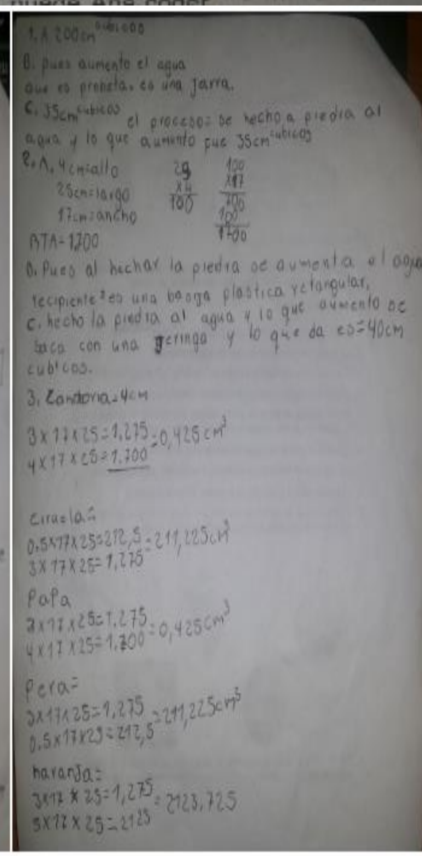




El proceso es multiplicar las medidas del recipiente sin el maletín y a ese resultado se resta con el resultado de la multiplicación con el maletín dentro del agua
5 dm
4 dm
3 dm
2 dm
1 dm
0 dm
2 dm
5 dm
El volumen del agua del recipiente es 30
el volumen del maletín es 20


Contenido 200 ml


Contenido 200 ml


RTA/
(RTA) Se saca el agua que sobra con la jeringa hasta que nivele con 200 milímetros así toda el agua que saco con la jeringa se puede hallar el volumen de la piedra.: volumen = 42,2 ml.
a) = Depositado en el recipiente : 1200 ml
b) = Sube el nivel del agua, osea el volumen de la piedra.
c) Se introduce la piedra al recipiente, el nivel que suba sobre los 1200 ml es el volumen de la piedra = volumen = 78 ml
3) Se llena el recipiente, se coloca sobre el platón, se introduce la fruta, se saca el recipiente y con la jeringa se mide los "ml".

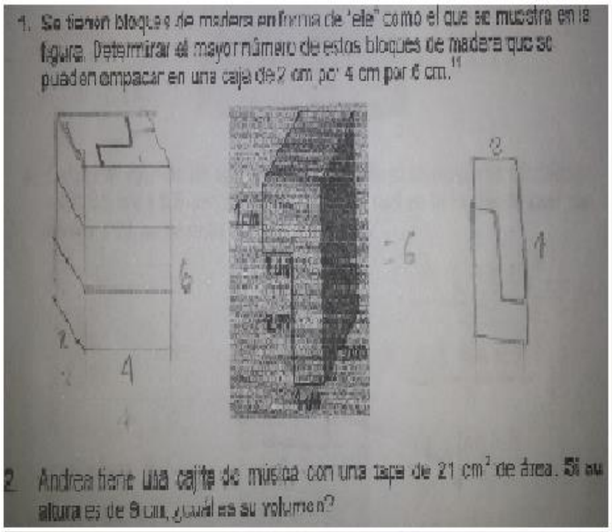

1. A. 200 cm cúbicos
B. Pues aumentó el agua que es prestada en una jarra.
C. 35 cm cúbicos el proceso: se hecho a piedra al agua y lo que aumentó fue 35 cm cúbicos
2. A. 4 cm = alto
25 cm = largo
17 cm = ancho
RTA = 1,700
B. Pues al hechar la piedra se aumenta el agua
recipiente: es una bandeja plástica rectangular,
C. hecho la piedra al agua y lo que aumentó se saco con una jeringa y lo que da es = 40 cm cúbicos.
3. Zanahoria = 4 cm
3 X 17 X 25 = 1,275
4 X 17 X 25 = 1,700 = 0,425 cm³
Ciruela =
0.5 X 17 X 25 = 212,5
3 X 17 X 25 = 1,275 = 211,225 cm³
Papa
3 X 17 X 25 = 1,275
4 X 17 X 25 = 1,700 = 0,425 cm³
Pera =
3 X 17 X 25 = 1,275
0.5 X 17 X 25 = 212,5 = 211,225 cm³
Naranja =
3 X 17 X 25 = 1,275
5 X 17 X 25 = 2125 = 2123,725

Anexo 5. Evidencias de la actividad 4

Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad ¡A experimentar se ha dicho!

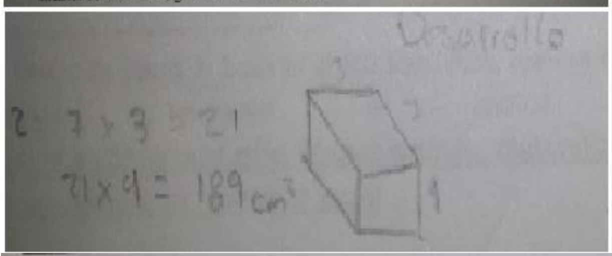
Anexo 6. Evidencias de la actividad 5

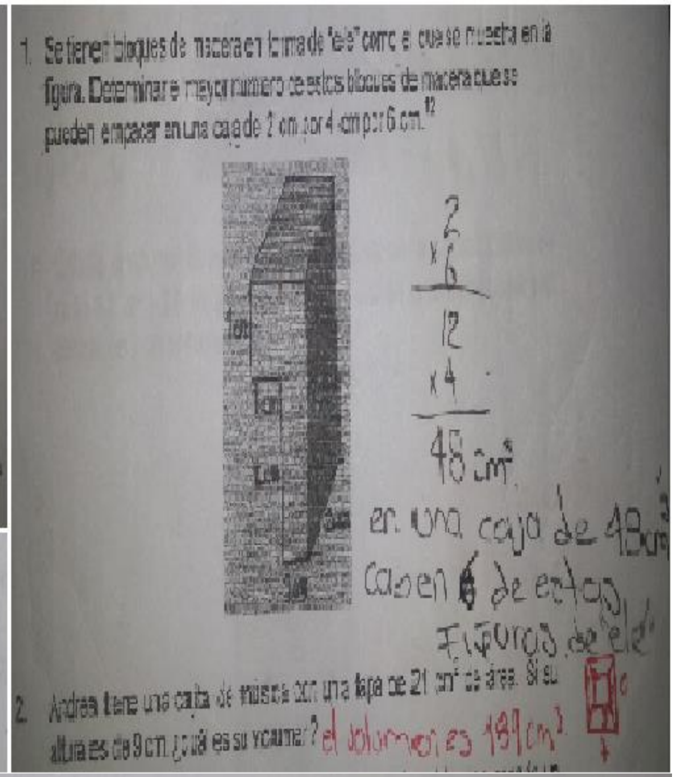
Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad el reto.



1. Se tienen bloques de madera en forma de "ele" como el que se muestra en la figura. Determinar el mayor número de estos bloques de madera que se pueden empacar en una caja de 2 cm por 4 cm por 6 cm.[11]

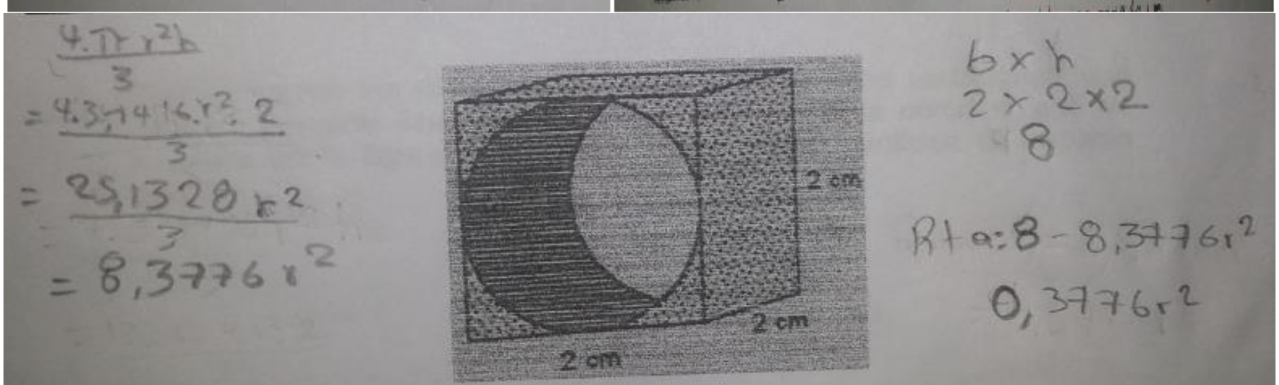
2. Andrea tiene una cajita de música con una tapa de 21 cm² de área. Si su altura es de 9 cm, ¿cuál es su volumen?

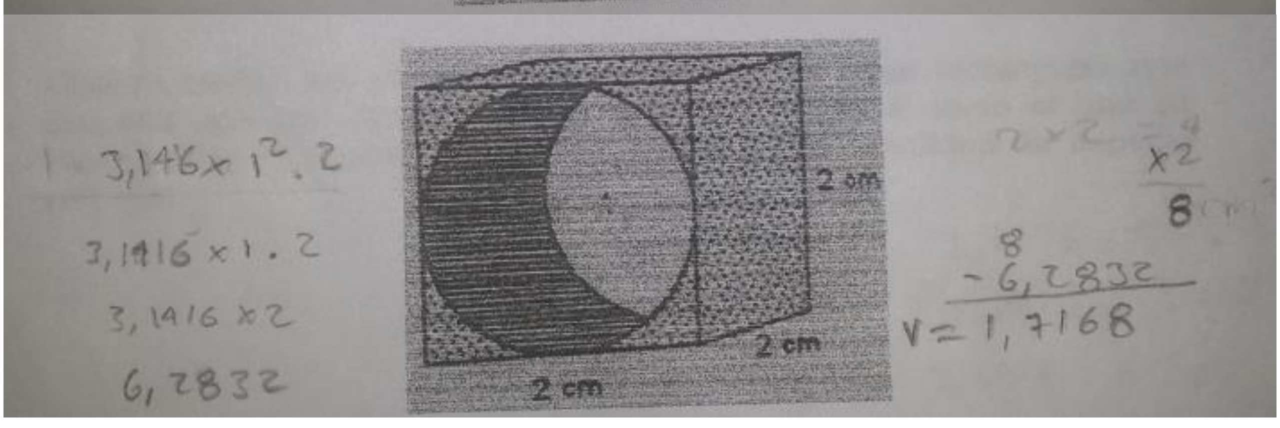




1. Se tienen bloques de madera en forma de "ele" como el que se muestra en la figura. Determinar el mayor número de estos bloques de madera que se pueden empacar en una caja de 2 cm por 4 cm por 6 cm.[12]

2. Andrea tiene una cajita de música con una tapa de 21 cm² de área. Si su altura es de 9 cm, ¿cuál es su volumen? el volumen es 189 cm³





4. Calcula el volumen de agua necesario para llenar un recipiente cilíndrico de radio 3.5 cm y 8,6 centímetros de altura al cual se le ha dejado caer una canica, de 2 cm de radio. [14]

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ +3,5 \\ \hline 9,0 \end{array}$$

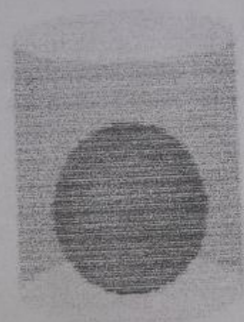
$3,1416 \times 3,5^2 . 8,6$

$3,1416 \times 9,0 . 8,6$

$3,1416 \times 77,4$

$V = 243,15984$

cilindro



[15]

$$\frac{4 . 3,1416 \times 2^2 . 2}{3}$$

$$\frac{4 . 3,1416 \times 8}{3}$$

$$\frac{12,5664 \times 8}{3}$$

$$\frac{100.5312}{3}$$

$V = 33,5104$

esfera

$$\begin{array}{r} 243,15984 \\ -\ 33,5104 \\ \hline V = 209,84944 \end{array}$$

Agua

SOLUCIONARIO DE LA PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN A TRAVÉS DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO.

3.2.1 Actividad 1: Composición y descomposición de cuerpos.

Objetivo: Construir significado para el concepto de volumen por medio de la composición y descomposición de cuerpos, estableciendo la relación entre ellos por diferentes medios, incluyendo por medio de la creación de nuevos cuerpos geométricos.

Desarrollo de la actividad:

1. Construye con los cubitos dados 6 figuras diferentes.

a. ¿Cuántos cubitos conforman cada figura que construiste?

Dadas las dimensiones de cada figura precisan el número de cubitos utilizados, es decir a mayor cantidad de cubos más grande la figura será. Ejemplo:

15 cubos.

17 cubos.

8 cubos.

24 cubos.

b. ¿Influye la forma de la figura en el total de cubitos que la componen? Justifica tu respuesta.

Sí. Puesto que el tipo de figura y tamaño de la misma, estará determinado por el número de cubos utilizados y la disposición (forma) que con ellos se determine.

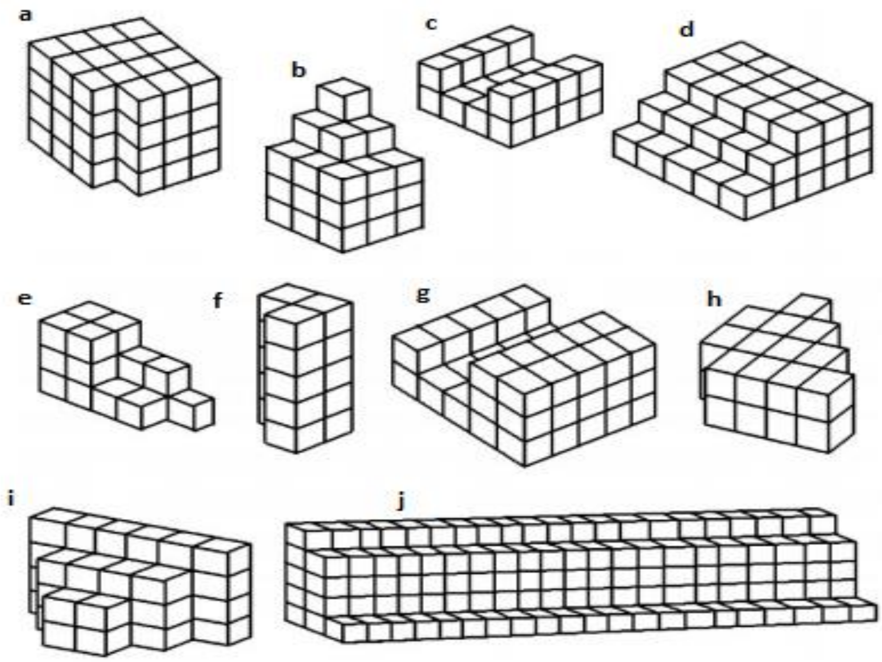
- Toma ahora 24 cubitos de los dados en el numeral uno, y empleando siempre la totalidad de éstos forma 4 figuras distintas.

a. ¿Influye la forma de la figura en el total de cubitos que la componen? Justifica tu respuesta.

No. Las formas de las figuras estarán dadas por la disposición con la que se ordenen los cubitos sin que con ello cambie la cantidad de éstos. Se pueden construir diferentes figuras con la misma cantidad de cubos. Ejemplo:

cada una de las figuras se construyeron con 24 cubos.

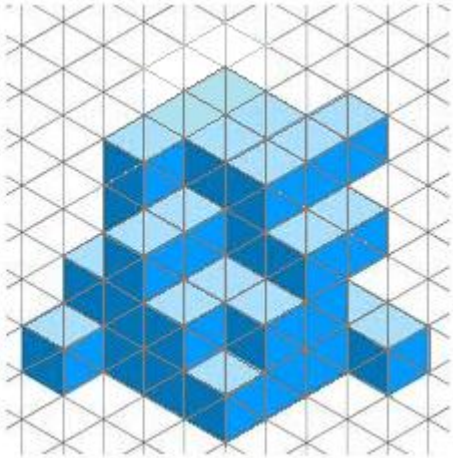
2. Observa los siguientes sólidos e indica el número de cubitos presentes en cada uno de ellos.

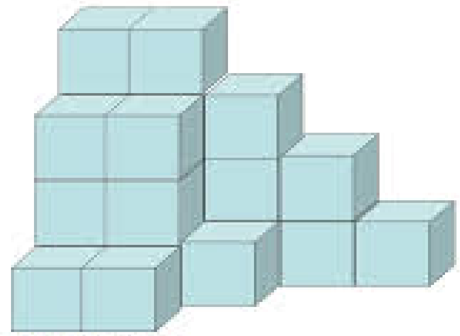


- a. 60
- b. 32
- c. 24
- d. 60
- e. 19
- f. 15
- g. 50
- h. 24
- i. 40
- j. 210

3. Observa los siguientes cuerpos y contesta:

a. ¿Cuántos cubitos se ven?
b. ¿Cuántos cubitos hay ocultos?
c. ¿Cuántos cubitos hay en total?
d. ¿Cuántos cubitos faltan para completar el cubo grande de arista 5 unidades?





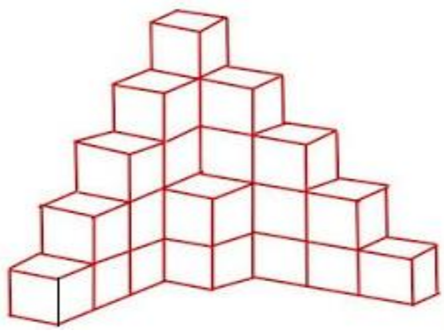
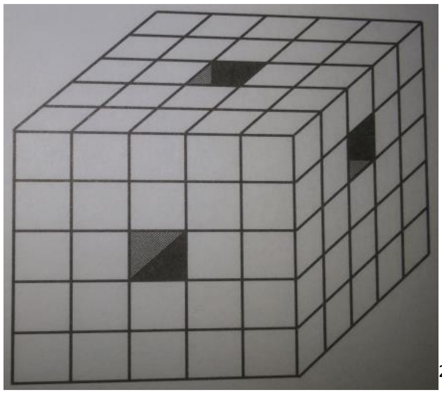


FIGURA	Superior izquierda	Superior derecha	Inferior
¿Cuántos cubitos se ven?	28	14	19
¿Cuántos cubitos hay ocultos?	20	9	8
¿Cuántos cubitos hay en total?	48	23	27
¿Cuántos cubitos faltan para completar el cubo grande de arista 5 unidades?	77	102	98

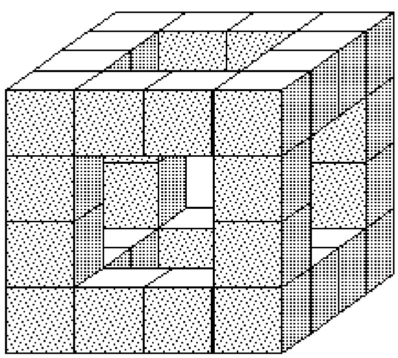
4. Las siguientes estructuras se han formado con pequeños cubos de igual tamaño.

a. ¿Con cuántos cubos se ha formado la estructura si se han quitado las columnas centrales?[1]

[2]

La estructura se ha formado con 125 (total de cubos) – 5 (cubos de la primera columna) – 8 (4 cubos pertenecientes a la columna 2 y 3 respectivamente) = 112 cubos.

b. ¿Cuántos cubos le han quitado a la estructura?

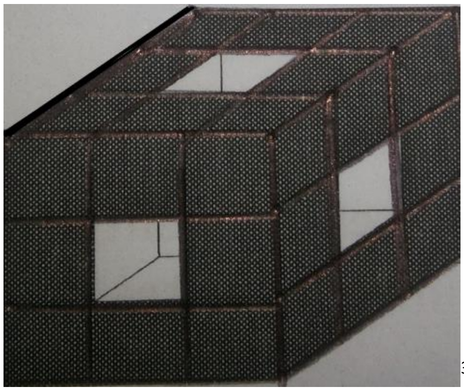


Se le ha quitado a la estructura 64 (total de cubos) – 24 (4 cubos por cada cara) – 8 (cubos centrales) = 32 cubos.

c. ¿Cuántos cubos le sacaron a la estructura?

[1] Tomado de Jaime, F. y David, M. (1999). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1995-1999. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Universidad Antonio Nariño.

[2] Tomado de Jaime, F. y David, M. (1999). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1995-1999. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Universidad Antonio Nariño.

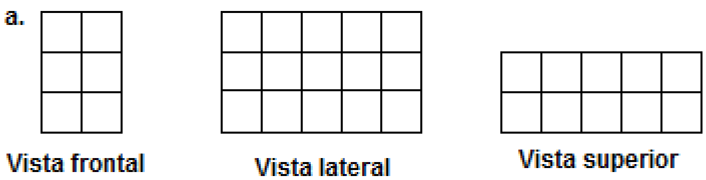
[3]

Se le ha sacado 27 (total de cubos) – 6 (1 por cada cara) – 1 (el cubo cental) = 7 cubos.

5. Un fotógrafo aficionado retrata las vistas frontal, lateral y superior de diferentes figuras construidas con cubos idénticos.

Ayúdale al fotógrafo a reconstruir las figuras (represéntalas), y determina ¿cuál es el número de cubos que contiene cada una de ellas?

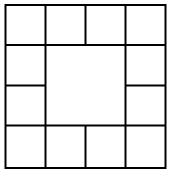
a.



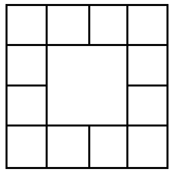
30 cubos

[3] Tomado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

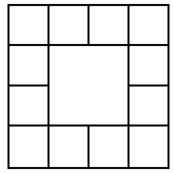
b.



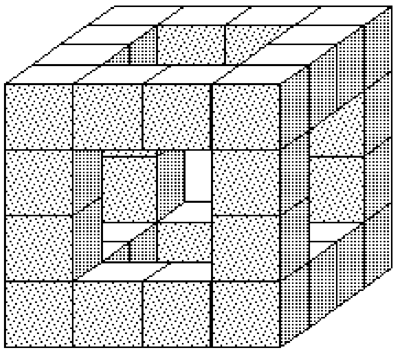
Vista frontal



Vista lateral

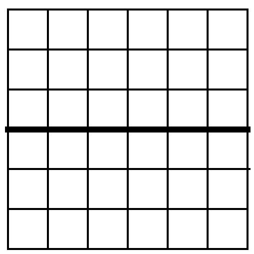


Vista superior

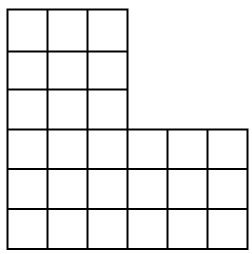


32 cubos

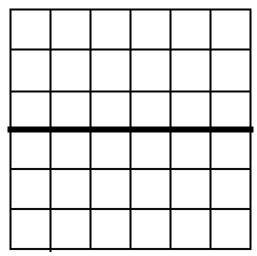
c.



Vista frontal



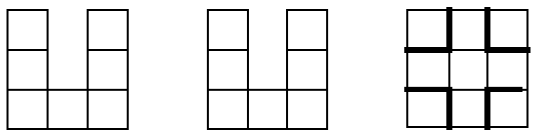
Vista lateral



Vista superior

162 cubos

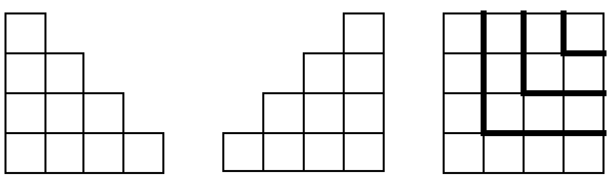
d.



Vista frontal Vista lateral Vista superior

17 cubos

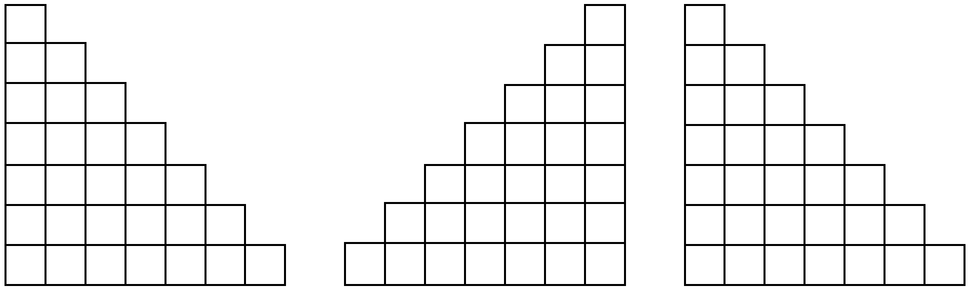
e.



Vista frontal Vista lateral Vista superior

30 cubos

f.



Vista frontal Vista lateral Vista superior

106 cubos

Nota: Las vistas que tienen líneas gruesas y en negrilla indican los niveles de la figura.

Materiales y medios a utilizar:

- 64 cubos

Sugerencias metodológicas:

En un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad; se realizará un trabajo individual de tal modo que cada uno, especificando la forma en la que abordó los cuatro pasos (comprender el problema, trabajar en el problema, solucionar el problema y mirar hacia atrás) descritos en la metodología a trabajar, basada en la resolución de problemas según Polya, halle solución a cada problema planteado.

Luego del aporte individual que se genere en el primer momento, los estudiantes pasarán a un segundo momento para socializar las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de cada uno de sus integrantes.

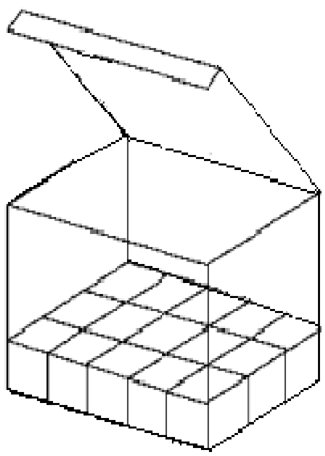
El docente constantemente hará rondas en diferentes momentos e intervendrá cuando sea requerido

3.2.2. Actividad 2: Empaques

Objetivo: calcular el volumen mediante el empaque o embalaje de cuerpos.

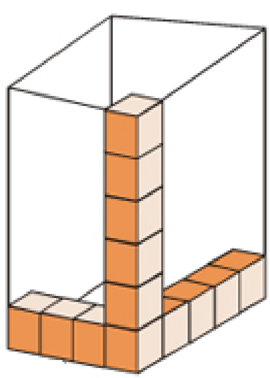
Desarrollo de la actividad:

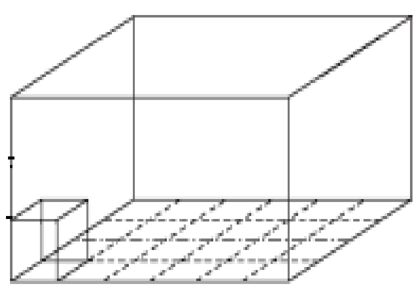
1. En la siguiente caja caben 4 capas de cubos. ¿Cuántos necesitarías para llenarla?

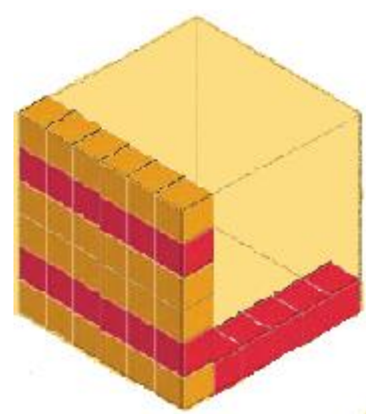

[4]

La caja se llena con 60 cubos.

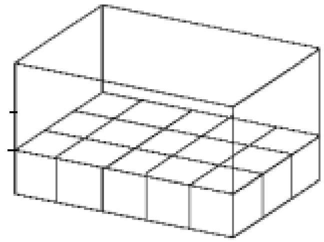
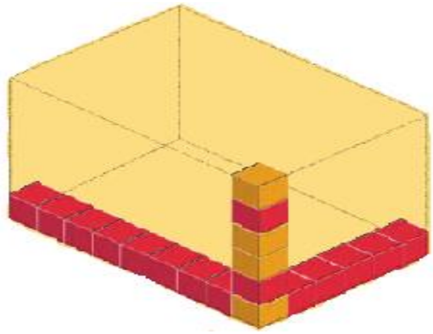
- ¿Cuántos cubos en total necesitarás para llenar estas otras cajas?





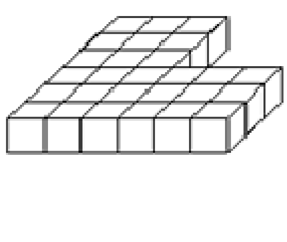
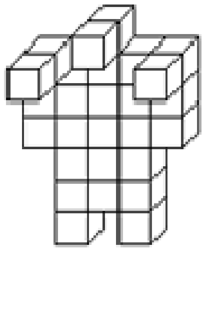
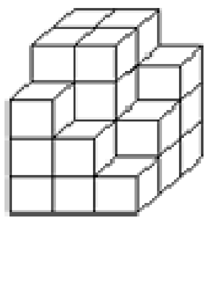


[4] Camacho, Á. Et. Al. (S.f) La medida en la educación primaria. Recuperable el 26/06/14 en la URL: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte4.pdf. Pag. 189.

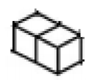
 

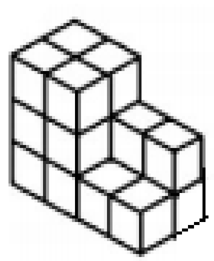
CAJA	Total de cubitos requeridos para llenar la caja
Superior izquierda	120
Superior central	72
Superior derecha	216
Inferior izquierda	45
Inferior derecha	324

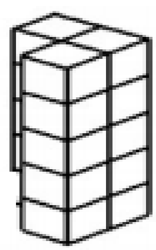
2. ¿Cuántas veces está contenido el cubo  en cada uno de los siguientes cuerpos construidos con pequeños cubos pegados por una o varias de sus caras?

CUERPO	Número de veces que esta contenido el cubo
Izquierdo	27
Central	27
Derecho	27

Ahora prueba cuántas veces está el prisma  en las siguientes figuras.





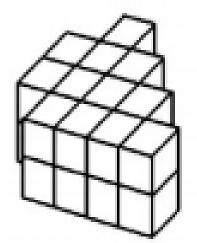
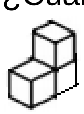
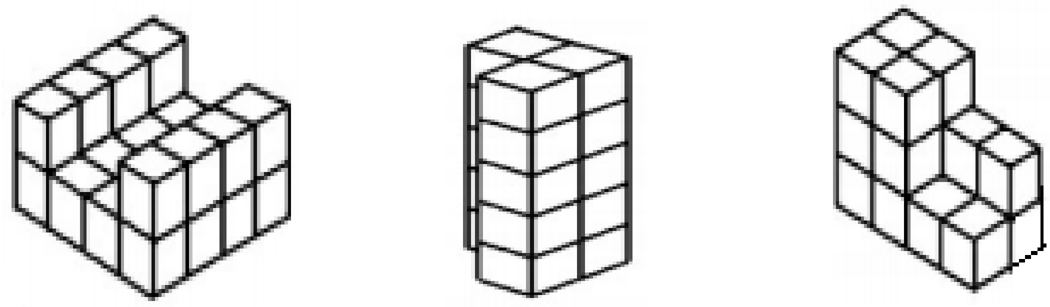


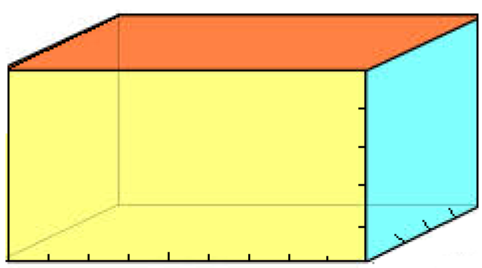
FIGURA	Número de veces que esta contenido el prisma
Izquierdo	9
Central	7
Derecho	12

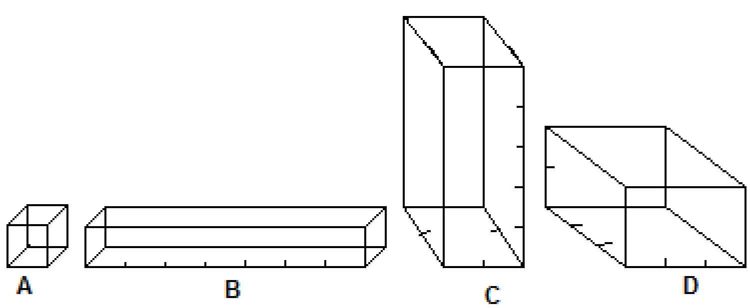
¿Cuál sería el mayor número de veces que se encuentra el cuerpo compuesto  en los siguientes sólidos?



SOLIDO	Número de veces que esta contenido el cuerpo compuesto
Izquierdo	8
Central	5
Derecho	6

3. Lola desea guardar en el recipiente de dimensiones indicadas en sus lados fichas A, B, C y D respectivamente.





a. ¿Cuál es la máxima cantidad de fichas **A**, **B**, **C, D** que se pueden guardar en el recipiente?

Fichas **A**: 15

Fichas **B**: 14

Fichas **C**: 2

Fichas **D**: 2

b. ¿Qué cantidad de fichas **A** y **C** se requieren para llenar el recipiente?

Fichas **A**: 20

Fichas **C**: 8

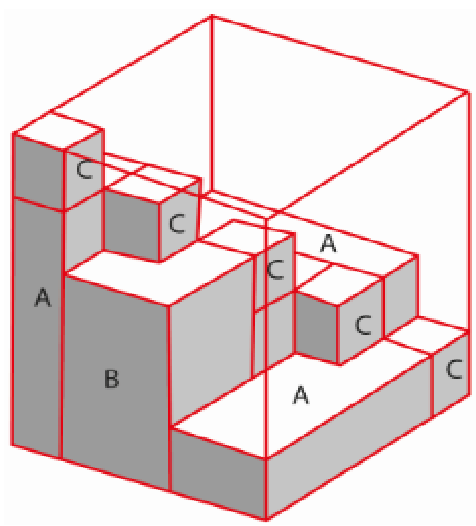
c. ¿Con cuántas fichas **B** y **D** lleno el recipiente?

a. Fichas **B**: 20 y fichas **D**: 1

b. Fichas **B**: 8 y fichas **D**: 6

4. Una mamá le ha encomendado a su hijo Mateo la tarea de acabar de llenar la caja con bloques **A**, **B** y **C** idénticos a los que allí aparecen.

- ¿Cuál es la cantidad máxima de bloques **A**, **B** y **C** que necesita Mateo para cumplir con la tarea?

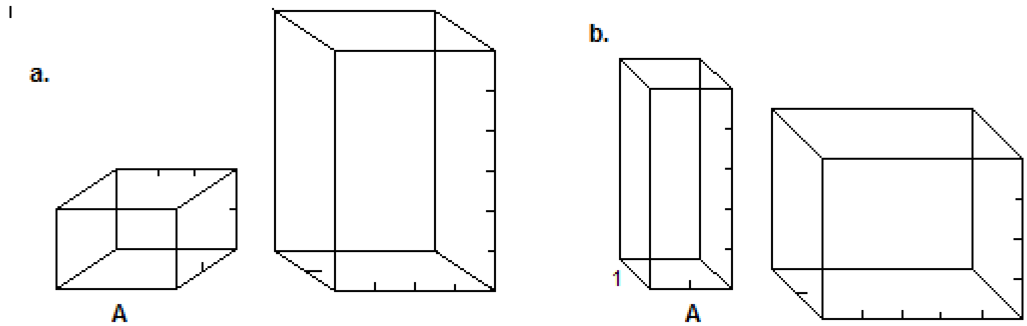


Bloque **A**: 2

Bloque **B**: 2

Bloque **C**: 24

5. ¿Cuántas copias de la caja **A** pueden empacarse en la caja grande?



a. Pueden empacarse 4 copias de la caja **A**.

b. Pueden empacarse 4 copias de la caja **A.**

6. Juan compra un reloj como regalo para el día del padre, Si en la papelería solo venden cajitas de las siguientes dimensiones. ¿Cómo acomodarías el reloj para que quepa en la caja de regalo?

reloj en su empaque

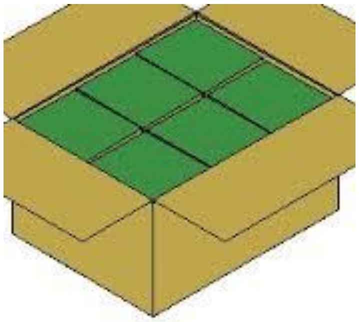
10 x 2 x 6

caja de regalo

6 x 5 x 4

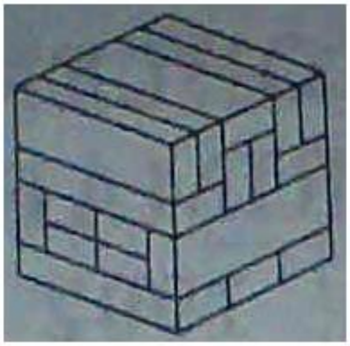
Dadas las dimensiones del reloj encuentro claramente que una de éstas (10), supera cualquiera de las dimensiones de la caja de regalo, por lo tanto se hará imposible encajar el reloj en dicho empaque.

7. Si la caja contiene 12 cubos, cada uno de 2 cm de lado, ¿Cuál es la altura de la caja?, ¿Cuánto mide el ancho de la caja?



Altura : 4 c.m y Ancho: 6 c.m

8. El constructor de una obra almacena tal como lo muestra la figura cierta cantidad de bloques rectangulares idénticos.

 [5]

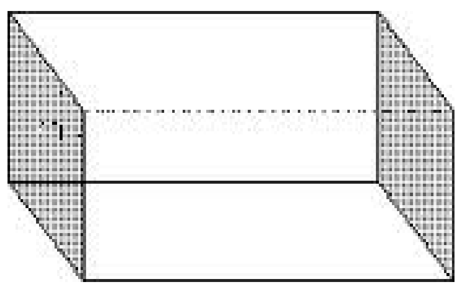
a. ¿Cuántos bloques contiene el cubo?

   Contiene 18 bloques.

b. Si el cubo tiene 6 cm de arista (o lado de las caras), ¿cuáles serían las dimensiones de cada bloque?

   2 c.m, 1 c.m y 6 c.m

9. Juana tiene 105 cubos iguales, cada uno de un centímetro de arista o lado. Los pega juntos para formar un sólido rectangular, como el de la figura. Si el perímetro de la base del sólido rectangular es 20 cm, ¿Cuál es la altura del sólido?[6]

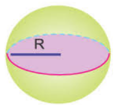


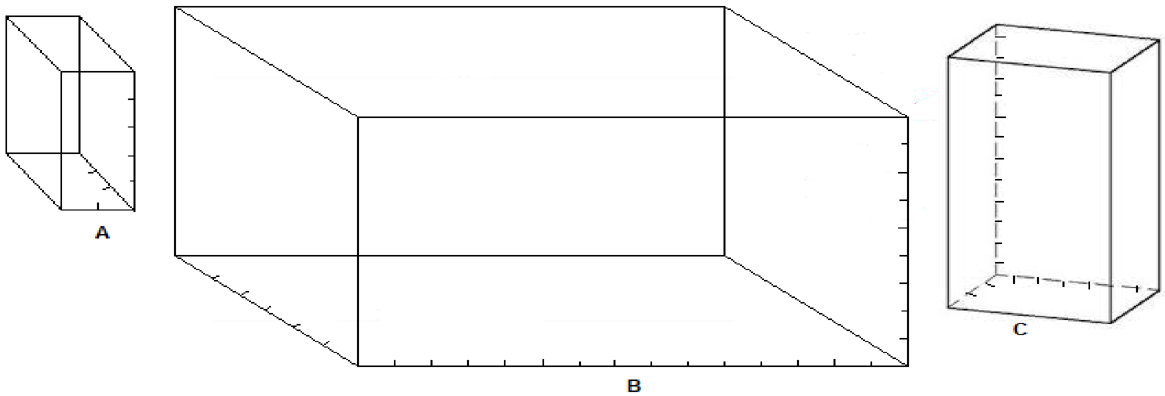
La altura es 5 cm. ya que si realizamos la descomposicion en factores primos de 105, obtenemos que ésta es igual a 3 x 5 x 7, y como el perímetro es igual a 20 cm. entonces el largo sería 3 cm. y el ancho 7 cm.

[5] Tomado de Jaime, F. (1994). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 1990-1994. Universidad Antonio Nariño.

[6] Tomado y modificado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

10. Ayúdale a Juanito a encontrar el embalaje correcto, si desea que, cuando en la caja se empaquen 30 esferas de radio 1.5 u, no cabe ni una esfera más en ella.





Juanito debe escoger el embalaje de dimensiones 15u, 6u y 9u ya que como cada esfera tiene un diametro de 3u, entonces en el largo se ubican 5 esferas, en el ancho 2 esferas y en el alto 3 esferas de forma tal que su producto sería 30 esferas que corresponde a las que se desean empacar.

Materiales y medios a utilizar:

Sugerencias metodológicas:

En un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad. Se realizará un trabajo individual de tal modo que cada uno, especificando la forma en la que abordó los cuatro pasos (comprender el problema, trabajar en el problema, solucionar el problema y mirar hacia atrás) descritos en la metodología a trabajar, basada en la resolución de problemas según Polya, halle solución a cada problema planteado.

Luego del aporte individual que se genere en el primer momento, los estudiantes pasarán a un segundo momento para socializar las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas aportadas y de la creatividad de cada uno de sus integrantes.

El docente constantemente hará rondas en diferentes momentos e intervendrá cuando sea requerido.

3.2.3. Actividad 3: Volumen y Capacidad.

Objetivo: Medir el volumen de cuerpos irregulares a partir de la relación existente entre volumen y capacidad y las medidas de capacidad de un cuerpo.

Desarrollo de la actividad:

1. Vierta en la probeta, 200 ml de agua y contesta:

a. ¿A cuánto corresponde el volumen del agua depositada?

El volumen corresponde a 200 cm^3.

b. ¿Qué sucede al introducir una piedra en la probeta? Inmediatamente el agua asciende en el nivel del que se encontraba. ¿Qué significa eso? Que el volumen del agua que asciende corresponde al volumen de la piedra.

c. ¿Cómo se hallaría el volumen de la piedra? Describe el proceso.

Con el referente del volumen del agua que se encontraba inicialmente en el recipiente y luego de introducida la piedra, procedo a calcular nuevamente el volumen del agua que continua allí, encontrando que existirá un aumento considerable, el cual será mayor que el inicial, en consecuencia hallaré la diferencia entre el segundo y el primer volumen. Dicho resultado será el volumen de la piedra.

2. Tomar una caja en forma de prisma rectangular y vertir en él, el agua que se desee sin que ésta exceda la mitad del recipiente y contestar:

a. ¿Cuál es el volumen del agua depositada en el recipiente? Éste dependerá de la cantidad de agua que se deposite en él. Se determina, midiendo con ayuda de una regla, el ancho, el largo y la altura del nivel del agua, para luego multiplicarlos entre sí, cuyo resultado será el volumen del agua.

b. ¿Qué sucede al introducir una piedra en el recipiente? El nivel del agua asciende inmediatamente. ¿Qué significa eso? Que el volumen de la piedra corresponderá al volumen del nivel del agua que sube.

c. ¿Cómo se hallaría el volumen de la piedra? Describe el proceso.

Conocido el volumen del agua que se encontraba inicialmente dentro del recipiente, y luego de introducida la piedra, se mide nuevamente el volumen que se ha generado como consecuencia del procedimiento anterior, procediendo a desarrollar los mismos pasos utilizados para encontrar el volumen inicial en el punto 2a. Finalmente el volumen de la piedra estará determinado por la diferencia entre el volumen final y el inicial. Se reconoce entonces que el volumen final será igual al volumen del agua más el de la piedra.

3. Dados el agua, un recipiente, una jeringa y un platón hallar el volumen de los siguientes productos agrícolas. Describe como lo hiciste.

a.

b.

c.

d.

e.

Solución 1:

Se vierte cierta cantidad de agua en el recipiente y se mide su largo, su ancho y la altura que alcanzó ésta dentro de él. Luego hallo el producto de las medidas de estas tres dimensiones, obteniendo así el volumen del agua allí depositada.

Después introduzco uno de los productos agrícolas dados y repito nuevamente el procedimiento antes descrito, pues una vez hallado el nuevo volumen que corresponde al del agua junto con la piedra se procede entonces a hallar el volumen de la piedra sustrayendo del último volumen el volumen inicial.

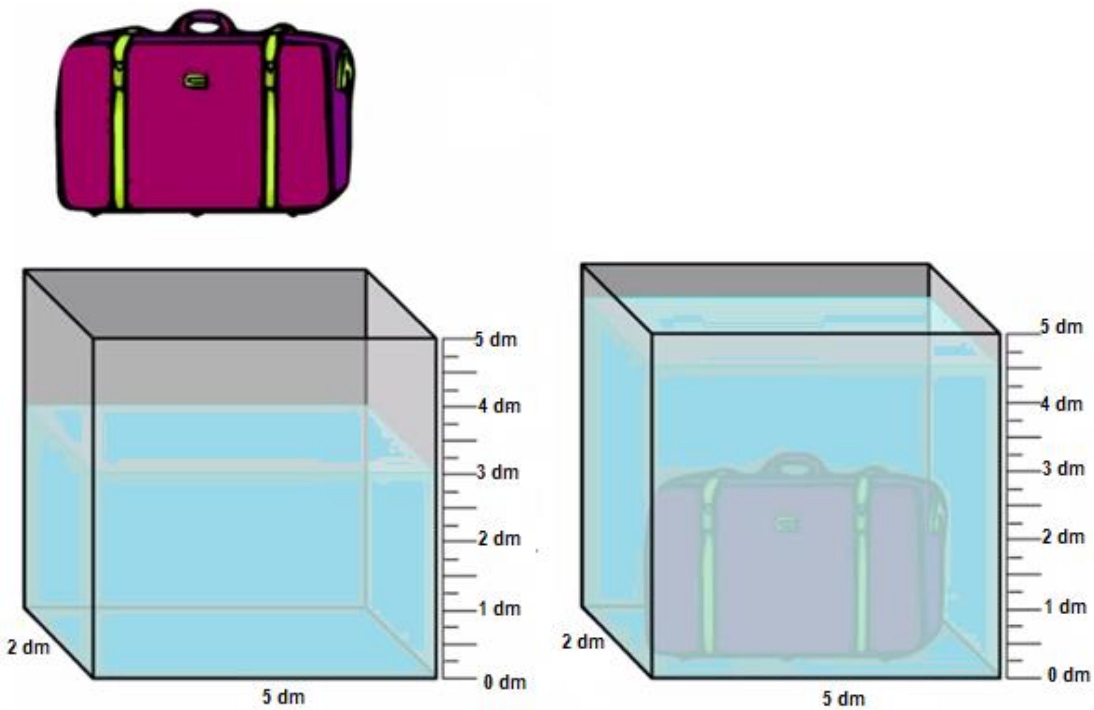
Solución 2:

Se vierte en el recipiente la cantidad de agua que desees y con un marcador se indica en él el nivel de agua alcanzado dentro de éste. Luego se introduce uno de los productos agrícolas indicados en el enunciado y con ayuda de una jeringa extraemos del recipiente la cantidad de agua que excede el nivel indicado con anterioridad, teniendo en cuenta, cuántas de éstas necesito para lograrlo, y así posteriormente encontrar el producto entre éstas y los mililitros señalados en la jeringa, ésto con el fin de establecer la relación existente entre esta medida de capacidad y los cm^3 perteneciente a las medidas del volumen. (1ml = 1 cm^3)

Solución 3:

Se coloca el recipiente totalmente lleno de agua, sobre un platón y se introduce en él uno de los productos agrícolas previstos para la actividad, del tal forma que el agua que se vierta en el platón corresponderá al volumen del producto allí inmerso. Para encontrar el valor de dicho volumen se procederá a medir con ayuda de la jeringa el agua contenida en el platón, pero como la jeringa viene graduada en mililitros entonces convertimos dicha medida a su homóloga en unidades de volumen (el cm^3).

4. Juanito hace el siguiente experimento para hallar el volumen a la maleta pero a la hora de encontrarlo no logra hacerlo. Recuérdale como hallarlo.



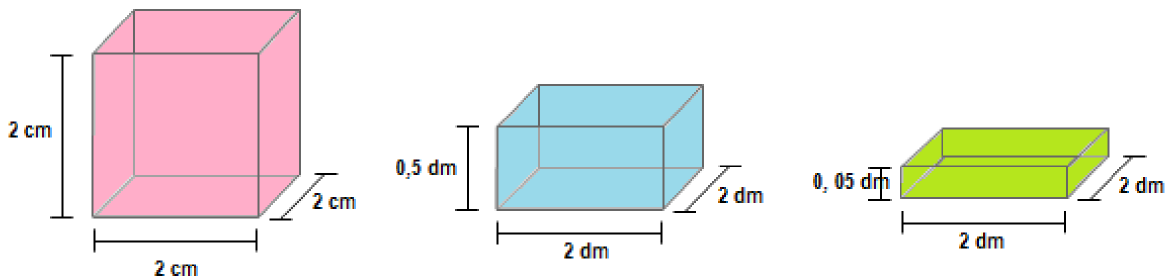
[7]

Se parte de hallar el volumen del agua depositada dentro del primer prisma así: se encuentra el producto las tres dimensiones (2 dm x 5 dm x 3 dm = 30 dm^3); seguidamente se halla el volumen del agua del segundo recipiente en el que se encuentra además la maleta, operando las dimensiones determinadas en el gráfico, así: 2 dm x 5 dm x 4.5 dm = 45 dm^3 . Finalmente, se halla el volumen de la maleta, sustrayendo del volumen del agua del recipiente en el que se encuentra la maleta, el volumen del agua del otro recipiente, encontrando entonces el siguiente resultado: 45 dm^3 – 30 dm^3 = 15 dm^3 volumen de la maleta.

5. ¿Cuál de los recipientes en forma de prisma rectangular puede Ana coger para remplazar el frasco que dejo caer, si desea depositar en él exactamente la misma cantidad de pepitas que tenía en el otro? Nótese que las figuras no están dibujadas a escala.

[7] Tomado de Tesla, W. (s.f). video "CÓMO medir el VOLUMEN de un objeto PASO A PASO" publicado el 11/09/2012. Recuperable el 23/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=xjn0V-ByT70.

;

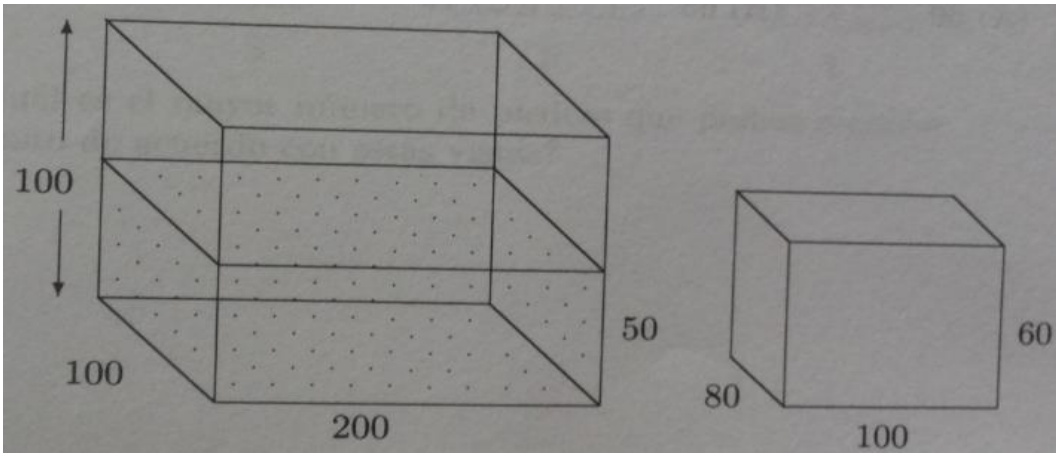


Se inicia por expresar el contenido del frasco en términos de volumen: 200 ml = 200 cm^3. Seguidamente se halla el volumen de cada uno de los prismas, no sin antes expresar cada una de las medidas de los recipientes en cm. Así entonces se tiene que el volumen del primer prisma (de izquierda a derecha), nos da un valor de 8 cm^3 ; el volumen del siguiente = 2000 cm^3 y el último = 200 cm^3 . Como podemos ver, Ana debe escoger el último recipiente, ya que es éste el que tiene un volumen equivalente al que se rompió.

6. Una pecera con base de 100 cm por 200 cm y 100 cm de altura, contiene agua a una altura de 50 cm. Un prisma sólido metálico con dimensiones 80 cm por 100 cm por 60 cm es sumergido en el tanque con una cara de 80 cm por 100 cm en la parte inferior. ¿En cuántos centímetros supera la altura del agua a la altura del prisma?[8]

---

[8] Tomado de González, E y Valderrama, A. (2009). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas primer nivel. Universidad Antonio Nariño.



$V_{agua} = 100cm \times 200cm \times 50cm = 1000000cm^3$
$V_{sólido\ metalico} = 80cm \times 100cm \times 60cm = 480000cm^3$
$V_{agua\ +\ sólido\ metalico} = 1000000cm^3 + 480000cm^3$
$V_{agua\ +\ sólido\ metalico} = 1480000\ cm^3$
$_{Largo\ x\ ancho\ x\ altura} = 1480000\ cm^3$
$200cm \times 100cm \times h = 1480000\ cm^3$
$20000cm^2 \times h = 1480000\ cm^3$
$h = 1480000\ cm^3 / 20000cm^2$
$h = 74cm$
entonce la altura del agua supera a la altura del prisma en 74cm – 50cm = 14cm.

Materiales y medios a utilizar:

- 1 probeta graduada.
- Agua.
- 1 piedra.
- 1 recipiente en forma de prisma rectangular.
- 1 jeringa.
- 1 platón.
- 1 naranja, 1 ciruela, 1 pera ,1 papa y 1 zanahoria.

Sugerencias metodológicas:

En un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad; se realizará un trabajo individual de tal modo que cada uno, especificando la forma en la que abordó los cuatro pasos (comprender el problema, trabajar en el problema, solucionar el problema y mirar hacia atrás) descritos en la metodología a trabajar, basada en la resolución de problemas según Polya, halle solución a cada problema planteado.

Luego del aporte individual que se genere en el primer momento, los estudiantes pasarán a un segundo momento para socializar las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de cada uno de sus integrantes.

El docente constantemente hará rondas en diferentes momentos e intervendrá cuando sea requerido.

3.2.4. Actividad 4: ¡A experimentar se ha dicho!

Objetivo: Deducir la forma general de hallar el volumen de una pirámide, un cono y una esfera, a partir de la relación existente con otros cuerpos de volumen conocido.

Desarrollo de la actividad:

Carlos ha decidido compartir con sus compañeros de clase las relaciones que él ha encontrado entre el volumen de ciertos sólidos geométricos y para ello propone una serie de experimentos. Así:

1. Tome la pirámide y el prisma que tienen características en común (cualidades o particularidades que están en cada uno de estos sólidos las cuales los determinan, los distinguen o los califican como tales, diferenciándolos entre sí) y con ayuda del primer sólido llene el segundo totalmente, y responde:

   - Enumera las características que tuviste en cuenta para escoger cada pareja de cuerpos.

   Base y altura

   - ¿Qué conclusión sacaste del experimento? Plantea matemáticamente la relación que observaste.

   Para llenar con arena totalmente el prisma se emplearon tres pirámides llenas de arena. Así entonces el volumen de un prisma es el triple del volumen de la pirámide o que el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma.

   $\mathbf{V}_{\textbf{prisma}} = 3 \times V_{\text{pirámide}}$ o $\mathbf{V}_{\textbf{pirámide}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}}$

   - ¿Como producto de las actividades anteriores, podrías decir cómo hallar el volumen de un prisma? ¿Cuál sería la manera de hacerlo?

   El volumen de un prisma se halla multiplicando sus tres dimensiones entre sí (largo x ancho x alto). Lo que es igual a decir su base por su altura (b x h).

   $\mathbf{V}_{\textbf{prisma}} = l \times a \times h$ o $\mathbf{V}_{\textbf{prisma}} = B \times h$, donde B es el área de la base

   - ¿Cómo indicarías la manera de hallar el volumen de una pirámide?

   Encontrando la tercera parte de su base por su altura.

   $\mathbf{V}_{\textbf{pirámide}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma}}$

   $\mathbf{V}_{\textbf{pirámide}} = \frac{1}{3} (B \times h)$ o $\mathbf{V}_{\textbf{pirámide}} = \frac{1}{3} (l \times a \times h)$

2. Siguiendo características en común, tome ahora conos y cilindros y llene estos últimos de arena con ayuda del cono que le corresponde. Contesta:

- Enumera las características que tuviste en cuenta para escoger cada pareja de sólidos.

Base y altura

- ¿Qué conclusión sacaste del experimento? Plantea matemáticamente la relación que observaste.

Se necesitan tres conos llenos de arena para llenar un cilindro. Así entonces el volumen de un cilindro es el triple del volumen de un cono o que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro.

$\mathbf{V}_{\textbf{cilindro}} = 3 \times V_{\text{cono}}$ o $\mathbf{V}_{\textbf{cono}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$

- ¿Cómo calcularías el volumen de un cilindro?

Pi veces su radio al cuadrado por su altura.

$\mathbf{V}_{\textbf{cilindro}} = \pi \times r^2 \times h$ o $\mathbf{V}_{\textbf{cilindro}} = B \times h$, donde B es el área de la base

- ¿Cómo indicarías la manera de hallar el volumen de un cono?

Encontrando un tercio del volumen del cilindro, así:

$\mathbf{V}_{\textbf{cono}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$

$\mathbf{V}_{\textbf{cono}} = \frac{1}{3} (\pi \times r^2 \times h)$ o $\mathbf{V}_{\textbf{cono}} = \frac{1}{3} (B \times h)$

3. Forme parejas con un cono y una esfera de forma tal que tengan características en común y con ayuda del cono llene la esfera correspondiente. Contesta:

- Enumera las características que tuviste en cuenta para escoger cada pareja de cuerpos.

Radio y altura del cono igual al radio de la esfera.

- ¿Qué conclusión sacaste del experimento? Plantea matemáticamente la relación que observaste.

Que se necesitaron cuatro conos llenos de arena para llenar una esfera. Es decir que el volumen de una esfera es el cuádruplo del volumen de un cono o que el volumen del cono es la cuarta parte del volumen de la esfera.

$\mathbf{V}_{\textbf{esfera}} = 4 \times V_{\text{cono}}$ o $\mathbf{V}_{\textbf{cono}} = \frac{1}{4} V_{\text{esfera}}$

- ¿Cómo calcularías el volumen de la esfera?

Cuatro tercios de Pi veces su radio al cubo.

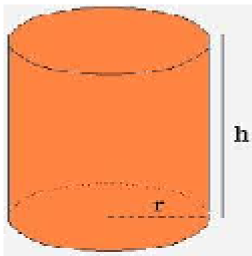
$\mathbf{V}_{\textbf{esfera}} = 4 \times V_{\text{cono}}$

$V_{\text{esfera}} = 4 \times (\frac{1}{3} (\pi \times r^2 \times h))$

$V_{\text{esfera}} = 4 \times (\frac{1}{3} (\pi \times r^3))$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}(\pi \times r^3)$

4. El cilindro que se muestra en la figura tiene radio (r) y su altura (h) es el doble del radio. ¿Cuál es la altura del cilindro si su volumen es de 250π cm^3?[9]



$V_{cilindro} = \pi \times r^2 \times h$

$250\pi cm^3 = \pi \times r^2 \times (2r)$

$250\pi cm^3 / 2 \times \pi = r^3$

$125cm^3 = r^3$

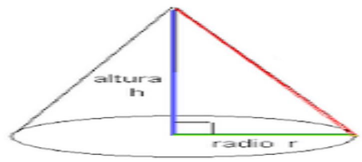
$\sqrt[3]{125cm^3} = \sqrt[3]{r^3}$

5cm = r, pero como h = 2r, entonces la altura del cilindro sería 2 x 5cm = 10cm.

5. Cuando un triángulo rectángulo de área 3 centímetros cuadrados es rotado en 360° respecto del cateto menor, el cuerpo que se genera tiene un volumen de 30 centímetros cúbicos. ¿Cuánto mide el cateto mayor?[10]

[9] Tomado y modificado de Lozano, L. (s.f). SABER 11: CILINDRO, CONO Y ESFERA. Programa de ECOPETROL innovando y educando. LA FORMACIÖN DESDE OTRA PERPECTIVA. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.

[10] Tomado del video Puntaje Nacional: Cuerpos geométricos - Guía de ejercicios - ejercicio 8. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=g2H2_D72tTQ.

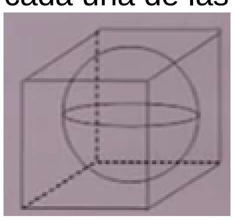


$3cm^2 = r \times h / 2$
$3cm^2 \times 2 = r \times h$
$6cm^2 = r \times h$

$\mathbf{A}$ **triángulo** $= r \times h / 2$

$\mathbf{V}$ **cono** $= \frac{1}{3} (\pi \times r^2 \times h)$
$30cm^3 = \frac{1}{3} (\pi \times r^2 \times h)$
$30cm^3 \times 3 = \pi \times r^2 \times h$
$90cm^3 = \pi \times r^2 \times (6/r)$, se expresa la altura en términos del radio
$90cm^3 = \pi \times r \times 6$
$90cm^3 / 6 \pi = r$
$15cm^3 / \pi = r$
Como el radio del cono corresponde al cateto mayor del triángulo rectángulo entonces éste mide $15cm^3 / \pi$.

6. Determinar el volumen de la esfera que se encuentra inscrita en un cubo de arista 8 cm. Se dice que la esfera está inscrita en el cubo si es tangente a cada una de las caras del cubo.



Partiendo de que la arista del cubo mide 8cm y la esfera está inscrita en él, podemos afirmar que su radio es 4cm.

$\mathbf{V}$ **esfera** $= \frac{4}{3} (\pi \times r^3)$

V esfera $= \frac{4}{3} (\pi \times (4cm)^3)$

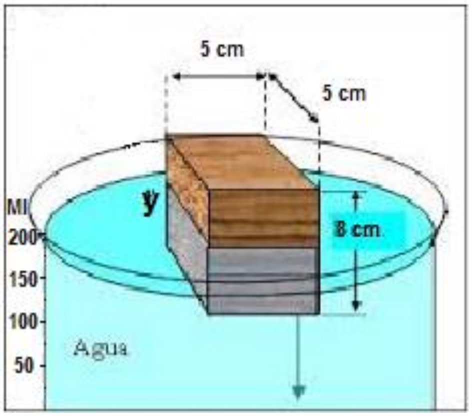
V esfera $= \frac{4}{3} (\pi \times 64cm^3)$

V esfera $= 4 \times \pi \times 64cm^3 / 3$

V esfera $= 256\ cm^3 \times \pi / 3$

V esfera $= 85{,}333\ \pi cm^3$

7. Si y es la altura del trozo del prisma rectangular inmerso en el depósito de agua que equivale a 5/8 de su altura total, ¿cuál sería el volumen del agua del recipiente cilíndrico antes de ser sumergido parte del prisma rectangular?



$y = 5/8 \times 8cm = 5cm$

Como $1ml = 1cm^3$, entonces el $\mathbf{V}_{\textbf{agua + trozo del prisma}} = 200cm^3$

$\mathbf{V}_{\textbf{trozo del prisma sumergido}} = 5cm \times 5cm \times 5cm$

$V_{\text{trozo del prisma sumergido}} = 125cm^3$

$V_{\text{agua + trozo del prisma}} = V_{\text{agua}} + V_{\text{trozo del prisma sumergido}}$

$200cm^3 = V_{\text{agua}} + 125cm^3$

$200cm^3 - 125cm^3 = \mathbf{V}_{\textbf{agua}}$

$75cm^3 = V_{\text{agua}}$

Materiales y medios a utilizar:

- Dos parejas de prismas y pirámides de igual base y altura.
- Dos parejas de cilindros y conos de igual radio y altura.
- Dos parejas de esferas y conos de igual radio y altura.
- Arena.

Sugerencias metodológicas:

En un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad; se realizará un trabajo individual de tal modo que cada uno, especificando la forma en la que abordó los cuatro pasos (comprender el problema, trabajar en el problema, solucionar el problema y mirar hacia atrás) descritos en la metodología a trabajar, basada en la resolución de problemas según Polya, halle solución a cada problema planteado.

Luego del aporte individual que se genere en el primer momento, los estudiantes pasarán a un segundo momento para socializar las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de cada uno de sus integrantes.

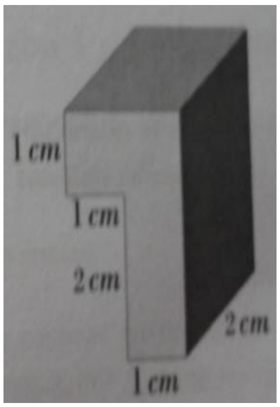
El docente constantemente hará rondas en diferentes momentos e intervendrá cuando sea requerido.

3.2.5. Actividad 5: El reto

Objetivo: Determinar el nivel de conocimientos fundamentales en el estudiante, que lleven a identificar el concepto de volumen que han alcanzado.

Desarrollo de la actividad:

1. Se tienen bloques de madera en forma de “ele” como el que se muestra en la figura. Determinar el mayor número de estos bloques de madera que se pueden empacar en una caja de 2 cm por 4 cm por 6 cm.[11]



Solución 1

V $_{\textbf{caja}}$ **=** 2cm x 4cm x 6cm

V $_{caja}$ = $48cm^3$

V $_{\textbf{bloque}}$ = 1cm x 2cm x 3cm + 2cm x 1cm x 1cm

V $_{bloque}$ = $6cm^3 + 2cm^3$

V $_{bloque}$ = $8cm^3$

Luego se divide el volumen de la caja entre el volumen del bloque para así determinar cuantos de éstos se pueden empacar en la caja.

48 **/** 8 = 6, entonces se pueden empacar 6 bloques en la caja.

Solución 2[12]

[11] Tomado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

[12] Tomado de Jaime, F. y Pérez, J. (2004). Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000-2004. Universidad Antonio Nariño.

Combine bloques para formar sólidos conocidos. Con dos bloques en forma de "Ele" se pueden formar un sólido de 2cm x 4cm x 2cm. tres de estos sólidos se pueden empacar completamente en una caja de 2cm x 4cm x 6cm.

En una caja de 2cm x 4cm x 6cm se pueden empacar 6 bloques en forma de "Ele".

2. Andrea tiene una cajita de música con una tapa de 21 cm^2 de área. Si su altura es de 9 cm, ¿cuál es su volumen?

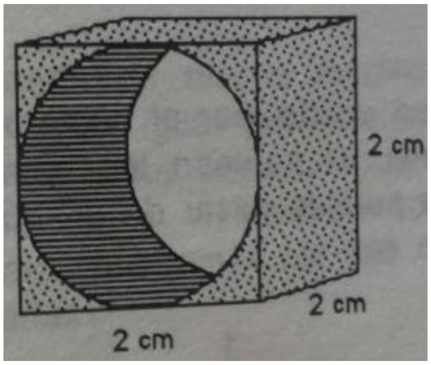
   V prisma $= B \times h$

   $V_{prisma} = 21cm^2 \times 9cm$

   $V_{prisma} = 189cm^3$

3. Se tienen un cubo de madera de 2 cm de arista, del cual hemos sacado un cilindro de 2 cm de diámetro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el volumen de la parte sobrante del cubo?[13]

[13] Tomado de Valderrama, J. (1989). 5 años de olimpiadas de matemáticas para primaria 1985- 1989. Publicación de la corporación universitaria Antonio Nariño.



V **cubo** $= 2cm \times 2cm \times 2cm$

V cubo $= 8cm^3$

V **cilindro** $= \pi \times r^2 \times h$

V cilindro $= \pi \times (1cm)^2 \times 2cm$

V cilindro $= \pi \times 1cm^2 \times 2cm$

V cilindro $= 2\pi cm^3$

V cilindro $= 2(3.1416)cm^3$

V cilindro $= 6.2832cm^3$

V **sobrante del cubo** = V cubo – V cilindro

V sobrante del cubo $= 8cm^3 - 6.2832cm^3$

V sobrante del cubo $= 1.7168cm^3$

4. Calcula el volumen de agua necesario para llenar un recipiente cilíndrico de radio 3.5 cm y 8,6 centímetros de altura al cual se le ha dejado caer una canica, de 2 cm de radio. [14]

[14] Tomado de Blanco, X. Descartes 2° ESO Matemáticas, cuaderno número 10. Bajo licencia creative Commons. Recuperable el 23/07/14 de la URL: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/cuadernos/2eso_cuaderno_10_cas.pdf.

[15]

$\mathbf{V}_{\textbf{cilindro}} = \pi \times r^2 \times h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \times (3.5cm)^2 \times 8.6cm$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \times 12.25cm^2 \times 8.6cm$

$V_{\text{cilindro}} = 105.35\pi cm^3$

$\mathbf{V}_{\textbf{esfera}} = \frac{4}{3}\ (\pi \times r^3)$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\ (\pi \times (2cm)^3)$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\ (\pi \times 8cm^3)$

$V_{\text{esfera}} = 4 \times 8\pi cm^3 / 3$

$V_{\text{esfera}} = 32\pi cm^3 / 3$

$V_{\text{esfera}} = 10.666\pi cm^3$

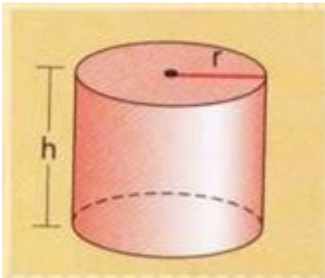
$\mathbf{V}_{\textbf{agua}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{esfera}}$

$V_{\text{agua}} = 105.35\pi cm^3 - 10.666\pi cm^3$

$V_{\text{agua}} = 94.68333\pi cm^3$

[15] Tomado de Blanco, X. Descartes 2° ESO Matemáticas, cuaderno número 10. Bajo licencia creative Commons. Recuperable el 23/07/14 de la URL: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/cuadernos/2eso_cuaderno_10_cas.pdf.

5. Cuáles serían las dimensiones de la caja de base rectangular que debería comprar Martha para empacar 8 cilindros como el que se muestra en la figura, desperdiciando la menor cantidad de espacio posible.



a. 2r, 6r y 4r.
b. 4r, 8r y r.
c. 2r, 8r y 2r.
d. 4r, 8r y 2r.

De la figura podemos deducir que el cilindro tiene de diámetro 2r, y en vista que el único criterio que se debe tener en cuenta para empacar cilindros en una caja en forma rectangular es el radio del cilindro, entonces Martha debe comprar la caja **d** en la que acomodaría dos filas de cilindros con 4 de éstos en cada una.

6. Se tienen los siguientes recipientes, uno de forma semiesférica, uno cilíndrico y otro de forma cónica de radio R y altura h como se muestra en la ilustración[16]

Respecto al volumen de estos recipientes **NO** es correcto afirmar que

a. El volumen del 2 es el triple del 1.
b. El volumen del 3 es el doble del 1.

[16] Tomado de Lozano, L. (s.f). SABER 11: CILINDRO, CONO Y ESFERA. Programa de ECOPETROL innovando y educando. LA FORMACIÖN DESDE OTRA PERPECTIVA. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.

c. El volumen del 3 es el mitad del 1.
d. El volumen del 1 es la tercera parte del 2.

$\mathbf{V}_{\text{semiesfera}} = \frac{4}{3}\ (\pi \times r^3)\ /\ 2$

$V_{\text{semiesfera}} = 4/6\ (\pi \times r^3)$

$V_{\text{semiesfera}} = 2/3\ (\pi \times r^3)$

$\mathbf{V}_{\text{cilindro}} = \pi \times r^2 \times h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \times r^2 \times 2r$

$V_{\text{cilindro}} = 2\pi \times r^3$

$\mathbf{V}_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\ (\pi \times r^2 \times h)$

$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\ (\pi \times r^2 \times 4r)$

$V_{\text{cono}} = 4/3\ (\pi \times r^3)$

Una vez calculados los volúmenes de cada una de las figuras planteadas, procedemos a analizar las relaciones planteadas en los incisos para así determinar la respuesta correcta.

a. El volumen del 2 es el triple del 1. **verdadera**

$V_{\text{cilindro}} = 3 \times V_{\text{semiesfera}}$

$2\pi \times r^3 = 3 \times (2/3\ (\pi \times r^3))$

$2\pi \times r^3 = 6/3\ (\pi \times r^3)$

$2\pi \times r^3 = 2\pi \times r^3$

b. El volumen del 3 es el doble del 1. **verdadera**

$V_{\text{cono}} = 2 \times V_{\text{semiesfera}}$

$4/3\ (\pi \times r^3) = 2 \times (2/3\ (\pi \times r^3))$

$4/3\ (\pi \times r^3) = 4/3\ (\pi \times r^3)$

c. El volumen del 3 es la mitad del 1. **falsa**

$V_{\text{cono}} = V_{\text{semiesfera}}\ /\ 2$

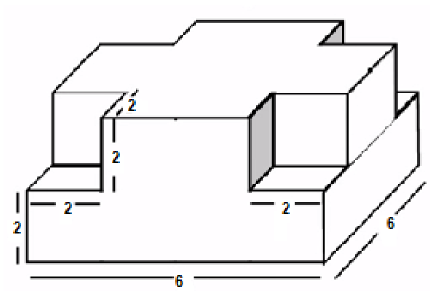
$4/3\ (\pi \times r^3) = 2/3\ (\pi \times r^3)\ /\ 2$

$4/3\ (\pi \times r^3) = 2/6\ (\pi \times r^3)$

$4/3\ (\pi \times r^3) \neq 1/3\ (\pi \times r^3)$

Como la relación es falsa, hemos encontrado la respuesta correcta.

7. Determine el volumen de la siguiente figura simétrica.



V cubo grande completo = 6 x 6 x 4

V cubo grande completo = 144

V cubo pequeño = 2 x 2 x 2

V cubo pequeño = 8

V figura dada = **V cubo grande completo – 4 x V cubo pequeño**

V figura dada = 144 – 4 x 8

V figura dada = 144 – 32

V figura dada = 112

8. Si un cilindro está inscrito (es decir se halla dentro de otro cuerpo geométrico y es tangente a las caras de ese cuerpo) en un cubo de arista 2. ¿Cuál es el volumen del espacio entre el cubo y el cilindro?[17]

   a. 8+2π.
   b. 2π.
   c. 8- 2π.
   d. 10π.

V cubo = 2cm x 2cm x 2cm

V cubo = $8cm^3$

V cilindro = $\pi \times r^2 \times h$

[17] Tomado de Lozano, L. (s.f). SABER 11: CILINDRO, CONO Y ESFERA. Programa de ECOPETROL innovando y educando. LA FORMACIÖN DESDE OTRA PERPECTIVA. Recuperable el 16/08/14 de la URL: https://www.youtube.com/watch?v=RZV5RxrWgcU.

$V_{cilindro} = \pi \times (1cm)^2 \times 2cm$

$V_{cilindro} = \pi \times 1cm^2 \times 2cm$

$V_{cilindro} = 2\pi cm^3$

$\mathbf{V_{sobrante\ del\ cubo}} = V_{cubo} - V_{cilindro}$

$V_{sobrante\ del\ cubo} = 8cm^3 - 2\pi cm^3$

La expresión que permite determinar el volumen del espacio entre el cubo y el cilindro es la **C.**

Materiales y medios a utilizar

Sugerencias metodológicas:

En un primer momento a cada estudiante se le entrega la guía para la actividad; se realizará un trabajo individual de tal modo que cada uno, especificando la forma en la que abordó los cuatro pasos (comprender el problema, trabajar en el problema, solucionar el problema y mirar hacia atrás) descritos en la metodología a trabajar, basada en la resolución de problemas según Polya, halle solución a cada problema planteado.

Luego del aporte individual que se genere en el primer momento, los estudiantes pasarán a un segundo momento para socializar las respuestas, donde cada uno contribuya a la resolución de los problemas, de manera que la solución final alcanzada sea producto del consenso de las ideas y la creatividad de cada uno de sus integrantes.

El docente constantemente hará rondas en diferentes momentos e intervendrá cuando sea requerido**.**

3.2.6. Actividad 6: Feria “construyendo el concepto de volumen”

Objetivo: Compartir la construcción de significado del concepto de volumen, adquirido a través de las diferentes actividades desarrolladas por equipos, para precisar su definición.

Desarrollo de la actividad: Cinco grupos de cuatro estudiantes cada uno, del grado 8°-1, socializarán de manera ordenada y secuencial la actividad correspondiente, de acuerdo a lo trabajado anteriormente, utilizando el mismo material con que se prepararon inicialmente. Luego de la exposición de cada equipo, integrarán a su auditorio a la actividad para compartir la experiencia, fortalecer el conocimiento e iniciar a sus nuevos compañeros en la **construcción del concepto de volumen**. Tendrán como interactuantes los estudiantes de los cursos 6-1, 6-2, 6-3, 7-1 y 7-2.

Materiales y medios a utilizar:

Grupo 1:

- 1280 cubos.

Grupo 2:

- Guía de la actividad a desarrollar.

Grupo 3:

- 20 probetas graduadas.
- Agua.
- 20 piedras.
- 20 recipientes en forma de prisma rectangular.
- 20 jeringas.
- 20 platones.
- 20 naranjas, 20 ciruelas, 20 peras ,20 papas y 20 zanahorias.

Grupo 4:

- 40 parejas de prismas y pirámides de igual base y altura.
- 40 parejas de cilindros y conos de igual radio y altura.
- 40 parejas de esferas y conos de igual radio y altura.
- Arena.

Grupo 5:

- Guía de la actividad a desarrollar.

Sugerencias metodológicas: Una completa seguridad del expositor al explicar la metodología de Polya, empleada para desarrollar cada actividad, debida utilización del material correspondiente; el espacio amplio y debidamente adecuado; buen comportamiento y disposición positiva tanto al exponer como al compartir, mostrando amplia participación en equipo; asesoría permanente por parte del docente.