# CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE PROPORCIONALIDAD A TRAVÉS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática**

**Andrés Felipe Blanco Rodríguez**

**UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO**

**Bogotá, D.C.**

**2014**

# CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE PROPORCIONALIDAD A TRAVÉS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática**

**Andrés Felipe Blanco Rodríguez**

**DIRECTORA DE TESIS**

**Mary Falk de Losada**

**UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO**

**Bogotá, D.C.**

**2014**

**Nota de aceptación:**

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

**Firma del presidente del Jurado**

______________________________

**Firma del Jurado**

______________________________

**Firma del Jurado**

**Bogotá D.C. 11 de Diciembre de 2014**

## AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme el placer de querer las matemáticas y el privilegio de poder ayudar a otras personas a que también lo hagan.

A mi esposa, Ángela, por su comprensión, ánimo y apoyo durante el proceso de elaboración de ésta tesis. El sacrificio de estar tanto tiempo sin su compañía hace que este logro sea de los dos.

A la Doctora Mary Falk de Losada que como directora de ésta tesis, me ha orientado, apoyado y corregido en mi labor científica con un interés y una entrega que han sobrepasado, con mucho, todas las expectativas que deposité en su persona.

A los profesores de la maestría que me brindaron su apoyo y guiaron mi desarrollo profesional por el camino correcto.

# RESUMEN

Existen variedad de trabajos en educación matemática donde se procura desarrollar problemas contextualizados como punto de inicio para las diferentes temáticas de clase; aun así estos carecen de teoría que fundamente el cómo hacer esto de forma correcta. Investigadores holandeses encabezados por Hans Freudenthal, han desarrollado la teoría de la *educación matemática realista (EMR)* donde tienen como uno de sus principios el trabajo con problemas contextualizados y otros más que ayudan a la aplicación de los mismos en el aula de matemáticas. Esta teoría se aplica en muchos colegios y libros en Holanda mostrando excelentes resultados en matemáticas por parte de los estudiantes en especial en pruebas de evaluación internacionales. El presente trabajo utiliza esta teoría como marco para el diseño de las actividades y se fundamenta en las comunidades de práctica de Wenger para el trabajo en el aula con los estudiantes.

**Palabras claves:** Razón, Proporción, Educación matemática realista, Comunidad de práctica.

# ABSTRACT

There are a number of papers on Mathematics teaching where contextualized problems are intended to be developed as starting point for the different subjects of the lesson, even if they lack support on a theory which tells how to do it properly.

Dutch researchers such as Hans Freudenthal have developed the Realistic Mathematics Educational Theory (RME) where contextualized problems are the fundamental principle along with some other kind of problems that help the implementation of this in the class room. This theory has been applied at several schools and in textbooks in Holland showing excellent results on the students' side, especially when it comes to international level test. This paper makes use of this theory as framework for designing the activities and it is based on Wenger's communities of practice applied to students.



**Key words:** Reasoning, Proportion, Realistic Mathematical Educational Theory, Community of Practice.

## CONTENIDO

# INTRODUCCIÓN

## Planteamiento del problema

Uno de los conceptos matemáticos que más se utiliza en la vida cotidiana y que desafortunadamente durante mi trabajo de docente he visto que no es bien entendido por parte de los estudiantes de bachillerato, es el concepto de proporcionalidad. Aunque éste es un tema que usualmente se ve en los primeros cursos del bachillerato (sexto o séptimo), los estudiantes de cursos superiores siguen demostrando la falta de dominio del concepto y no logran utilizarlo en dar solución a problemas académicos, mucho menos en sus vidas cotidianas. [Godino y Batanero (2002), Lamon (1994).]

Además, el razonamiento proporcional es fundamental para los estudiantes luego en el desarrollo de conceptos relacionados, tales como semejanza de figuras, funciones, gráficas, estadística, ecuaciones y razones trigonométricas como afirma Lobato, Hawley, Druken y Jacobson (2011) citando el trabajo de varios investigadores (Karplus, Pulos & Stage, 1983; Lobato & Ellis, 2010; Thompson & Saldanha, 2003) y Broekman (2000) el de otros más (Hart 1984, Clarkson 1990, Schliemann y Nunez 1990).

Usualmente se considera que el estudiante se apropia del concepto cuando logra resolver diferentes tipos de problema (especialmente de porcentaje) utilizando el algoritmo denominado “regla de tres”, resolviendo ejercicios matemáticos o algunos problemas de “aplicación”, pero que terminan siendo lejanos a su entorno social, ya que son simplemente ejercicios camuflados como problemas contextualizados que probablemente los estudiantes nunca encontrarán en la vida real. Esto hace que fuera del aula los estudiantes no logren ver la utilidad del conocimiento que han adquirido. Es fácil entender por qué ocurre esto, ya que la proporcionalidad se convirtió en la utilización directa de una regla de tres, que para el estudiante se transforma en un simple algoritmo que debe repetir para lograr aprobar una asignatura.

Freudenthal (1980) hace el cuestionamiento de ¿cómo estimular la reflexión sobre las propias actividades físicas, mentales y matemáticas del individuo mismo? Esto buscando que los docentes analicen sobre lo adecuado que sea la enseñanza de algoritmos antes del uso de la intuición por parte de los estudiantes a la hora de resolver problemas.

La presente propuesta de investigación se centra en el cómo un estudiante logra construir un nutrido significado del concepto de proporcionalidad con base en problemas reales, llegando no sólo a no limitarse a una regla de tres, sino a crear sus propias estrategias y representaciones que puedan ser útiles en los diferentes problemas que quiera resolver.

## Justificación

El área de matemáticas sigue obteniendo bajos resultados en las pruebas del estado, con un promedio que oscila entre los 45 y 50 puntos[1]; además sigue mostrando los peores índices de reprobación de los estudiantes en los colegios públicos distritales SED (2013) y en los estudiantes nuevos en las universidades continúa siendo la asignatura que más se pierde, siendo el caso de la Universidad Nacional donde cerca de la mitad la pierde[2].

Los resultados obtenidos en las pruebas PISA 2012, han mostrado que los estudiantes no están en capacidad de hacer inferencias simples o hacer interpretaciones simples de resultados matemáticos. Barrera-Osorio, Maldonado y Rodríguez (2012) y los recientes resultados de las mismas pruebas en competencias matemáticas publicados en 2014, en las cuales se medía la capacidad para resolver problemas de la vida real, afirma que “Colombia ocupó el último lugar de los 44 países evaluados con 399 puntos”. Redacción El Tiempo (2014 1 de abril). Los resultados han dejado una gran preocupación en la sociedad colombiana acerca de qué se está viendo en el aula de matemáticas y por qué los estudiantes siguen sin adquirir los razonamientos apropiados para poder resolver problemas matemáticos.

Por otro lado los muchachos continúan quejándose en muchas ocasiones de los temas que ven en el aula, debido a que, según su percepción, poco o nada ven su

---

**[1] Reporte generado entre los años 2009 y 2013, según la página www.icfesinteractivo.com**

**[2] Blog de la nacho Las materias que más se pierden en la Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá**

uso en la vida real, con la popular pregunta “¿esto para qué me sirve?”, a la cual muchos de nosotros los docentes contestamos que este conocimiento les servirá en su futura vida académica en sus pregrados. De todas formas, el profesor de matemáticas no debería limitarse solo a enseñar para aquellos que deseen continuar con sus estudios superiores, sino que debería buscar enriquecer la calidad de vida y abrir las puertas al futuro para todos, sea por las aplicaciones que la matemática tiene en la formación de un ciudadano crítico, para ejercer un oficio o profesión o por el desarrollo del razonamiento matemático.

El conocido científico Rodolfo Llinás apoya este reclamo; en una entrevista realizada por el periódico El Espectador en la cual habla acerca de la educación; entre los nuevos conceptos que él da para que rijan el paradigma educativa actual en Colombia se encuentra la "educación en contexto". Dice Llinás, "No existen hechos aislados, pero el modelo educativo vigente tiende a mostrarlos como si estuvieran aislados de la complejidad en la que en realidad se inscriben". [Mendoza (2014, 29 abril)]

Uno de los conceptos que las personas deberían tener más claro por su gran aplicabilidad a situaciones cotidianas es el de proporción. Desafortunadamente, es común que las personas no distingan situaciones en las que juega un papel el concepto de proporcionalidad. Un ejemplo de las claras dificultades se aprecia al momento de hacer compras donde algunos productos dicen tener el precio más bajo pero al momento de comparar con otros productos esto resulta ser falso y terminan los compradores siendo engañados, ya que en realidad el producto que tiene menor precio puede contener una menor cantidad haciendo que su precio sea más alto. Esta es solo una situación donde el uso de conceptos como razón y proporcionalidad, deberían ser utilizados para que los consumidores analicen qué está ocurriendo con los precios.

Otra forma de engañar utilizando la proporcionalidad es cuando se presenta una gráfica estadística donde las distancias no guardan la misma proporción que los resultados numéricos muestran; un claro ejemplo de la posible manipulación de la información de esta forma, fue una situación que se presentó en España donde en el programa *La noche en 24 horas* de la cadena TVE el 5 de febrero del 2014 se mostraban los resultados de la intención de voto por dos partidos; gráficamente ambas intenciones habían caído de la misma forma, pero los números mostraban que una de las intenciones había caído en un 12% y la otra 2%. Figura 1.


Figura 1. Gráfico de la polémica.

Aunque la cadena de televisión admitió el error y pidió disculpas, es un claro ejemplo de cómo la falta de conocimiento puede ser utilizada para que el ciudadano a la hora de votar pueda verse influenciado por las creencias que han surgido al observar el gráfico sin analizar los números y terminar por tomar una decisión diferente a la que pensaba tomar a la hora de ejercer su derecho al voto. De esta capacidad alfabetizadora de la matemática se refiere Mogens Niss en Skovsmose (1999) afirmando

"*es de importancia democrática tanto para el individuo como para la sociedad como un todo, que a cualquier ciudadano se le suministren los instrumentos para comprender el papel de las matemáticas. Cualquiera que no posea tales instrumentos se vuelve una "víctima" de los procesos sociales en los que las matemáticas es una componente. Así, el propósito de la educación matemática debe ser capacitar a los estudiantes para darse cuenta, comprender, juzgar, utilizar y también ejecutar las aplicaciones de las matemáticas en la sociedad, en particular en las situaciones significativas para su vida privada, social y profesional*".

Aquí se defiende luego la necesidad de los conceptos matemático a la hora de participar como ciudadanos y, por lo expuesto antes, aquí se encuentran los conceptos de razón y proporcionalidad, por lo que son de los que más énfasis deba tenerse en el aula.

Con base en lo expuesto se genera la siguiente pregunta de investigación con sus componentes:

**Problema de investigación**

¿Cómo favorecer el proceso de construcción del significado robusto del concepto de proporción en los estudiantes de séptimo grado del Colegio Helvetia de Bogotá?

**Objeto de investigación:**

Proceso de enseñanza aprendizaje del razonamiento proporcional.

**Campo de investigación:**

Proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de proporción a través de problemas contextualizados y no rutinarios utilizando la teoría de la educación matemática realista.

Para dar la solución a esta problemática, se propone la siguiente hipótesis:

**Hipótesis de investigación:**

Si se proponen problemas contextualizados y no rutinarios, se favorece el proceso de construcción del significado de proporción y, por lo tanto, se beneficia el proceso de enseñanza aprendizaje de la aritmética relacionada con el tema.

## OBJETIVOS

### Objetivo general

Que los alumnos construyan un concepto nutrido de proporcionalidad utilizando el modelo de la *educación matemática realista* (EMR) en el grado séptimo del Colegio Helvetia Bogotá.

### Objetivos específicos:

1. Aplicar actividades estructuradas en secuencias didácticas, para que los estudiantes construyan significado robusto para el concepto de razón y proporcionalidad, considerando procedimientos didácticos y metodológicos adecuados al aprendizaje individual y grupal, atractivo a la lectura de los alumnos y que facilite la labor del docente en el aula.

2. Ejercer el modelo didáctico durante las sesiones de clase de aritmética a partir de la EMR y la teoría de las comunidades de práctica de Wenger, para motivar, facilitar y mejorar el aprendizaje conceptual de los alumnos.

3. Evaluar la implementación de las actividades para la construcción del significado de proporcionalidad en los estudiantes.

# 1. ESTADO DEL ARTE

La importancia de la enseñanza de la proporcionalidad se puede recalcar en el famoso *Informe Cockcroft* (1985) donde se tratan los usos del razonamiento proporcional en diferentes profesiones como las de técnico, oficinista, enfermero y obrero de construcción, sin contar su uso en las carreras profesionales.

Dentro del área de las matemáticas, el pensamiento proporcional, como ya se ha dicho, tiene gran importancia para otros pensamientos como el algebraico y el funcional; aun así no es sólo en matemáticas donde este concepto tiene gran importancia, en física y química muchos conceptos son relaciones de proporcionalidad como velocidad, aceleración, densidad, etc. Broekman y otros (2000) ratifican lo dicho afirmando que “estas propiedades son muy importantes para las ciencias, como las proporciones que se dan entre varias cantidades han dado un significado para nuevas cantidades y similares.”

Debido a esto, existen múltiples estudios que analizan el concepto de proporcionalidad desde diferentes puntos de vista; se ha intentado recoger una literatura especializada en el tema, de diferentes países y con diferentes miradas, tomando en cuenta los investigadores más reconocidos sobre el tema. Haciendo un análisis de los diferentes trabajos que tratan el proceso de enseñanza aprendizaje de la proporcionalidad, se encuentra una variedad de estudios donde la gran mayoría está enfocada en el primer año del nivel secundario donde es comúnmente contemplada a profundidad esta temática en los diversos planes de estudios de los países.

Entre los muchos estudios realizados, el hecho por Ellis (2013) ha encontrado que comúnmente se supone que la apropiación del concepto de proporción es fácil de adquirir y esto se debe a que usualmente son propuestos problemas fáciles, de duplicar o sacar la mitad, pero cuando los estudiantes se enfrentan con problemas más complejos, se evidencia las deficiencias en el razonamiento del concepto "atender dos cantidades al mismo tiempo es un paso complicado para los estudiantes. Ellos comienzan usualmente razonando con una sola. Una forma de crear la relación, es formar de las dos cantidades una nueva." Una opinión similar expone Bjorg (2003) quien muestra diferentes estudios de la importancia de éste concepto pero la dificultad de una apropiación completa por parte de los estudiantes "a pesar de que los niños demuestran bases para el razonamiento proporcional a una edad temprana, los estudiantes son lentos para lograr la maestría de estos importantes conceptos." Por otro lado afirma que usualmente los problemas que se les proponen a los estudiantes manejan cantidades discretas, lo que hace que se consideren con facilidad por los estudiantes, pero que no logran reflejar el verdadero dominio del concepto.

En Ainley & Pratt (2005) hablan del estudio hecho por De Book (2002), donde se muestra evidencia empírica acerca de cómo los estudiantes asocian problemas de valor perdido con situaciones proporcionales, aun así estos problemas no lo sean; pero esta dificultad no es detectada porque los problemas no proporcionales usualmente no son escritos de ésta forma, luego se termina por pensar que los estudiantes han captado el concepto de proporcionalidad porque a cualquier problema que tenga esta forma ejecutan la técnica con la que han resuelto siempre estos problemas. Además Godino y Batanero (2002) concluyen de numerosas investigaciones que las destrezas relacionadas con proporcionalidad son adquiridas por los estudiantes de una forma más lenta de lo que se piensa comúnmente, incluso mostrando que algunas personas nunca llegan a dominarlas. Lo mismo afirman los autores, acerca del concepto de porcentaje, donde se ha demostrado que desde estudiantes de niveles primarios hasta en personas adultas este concepto no es lo suficientemente claro; ellos reafirman lo dicho apuntando “el desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplinas que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química.”

Para finalizar, esta no facilidad también se refleja en NCTM (2000) cuando afirman que "las situaciones con proporcionalidad implican mucho más que establecer dos relaciones iguales y despejar el término que falta. Implica reconocer cantidades que se relacionan proporcionalmente y el uso de números, tablas, gráficos, y ecuaciones para pensar en las cantidades y sus relaciones”

### 1.1. Los profesores

Parte de este problema lo aportan los mismos profesores según Broekman, Van der Valk & Wijers (2000) quienes desarrollaron un estudio con futuros profesores, encontrando que los profesores al momento de enfrentarse por primera vez con el problema de trabajar la proporción en sus clases, intentan recordar cómo aprendieron e intentan reproducirlo, repitiendo los mismos errores o aciertos que pudiesen haber cometido con los conceptos de proporcionalidad al momento de ser estudiantes. Luego los futuros profesores parecen no tener ninguna idea de las dificultades específicas que puedan tener los alumnos para construir un significado apropiado para los conceptos de razón y proporción, y por ende sólo se ocupan del problema de la enseñanza de este tema, no con la comprensión y el aprendizaje de los alumnos. Es decir, el conocimiento limitado de la matemática, la didáctica y las creencias de los docentes influyen en forma definitiva en la forma de trabajar en sus clases. Así mismo, Ainley & Pratt (2005) discuten la importancia del rol del maestro a la hora de guiar a los estudiantes cuando se tienen actividades diseñadas y en la discusión que debe llevarse a cabo para explorar de forma correcta estos materiales; luego un docente bien preparado debe comprender el enfoque que va a utilizar al momento de impartir las diferentes tareas.

Por otro lado Lobato, Druken, Jacobson, Hawley (2011), evidencian estudios donde se sugiere que los futuros profesores, así como muchos maestros de primaria y secundaria, no tienen un conocimiento profundo de razonamiento proporcional y dependen demasiado de procedimientos memorísticos, como el algoritmo de la multiplicación cruzada.

## 1.2. El no uso de algoritmos

Por lo dicho anteriormente, la forma más evidente de observar la dificultad que muestran los profesores, se encuentra en el manejo de la “regla de tres”; y aunque hay ventajas en este tipo de procedimientos de forma mecánica, debido a su eficiencia y aplicación a diferentes contextos como lo afirma el estudio realizado por ELLIS (2013), también se señala que no siempre los estudiantes aprenden el procedimiento o tienen dificultad en saber cuándo usarla. Luego es necesario un balance entre habilidad y conceptos; es decir, es muy diferente hablar de qué significa entender el concepto de razón y cuál es el razonamiento proporcional, y por otro lado tener habilidad en proceder en un algoritmo. El artículo enfatiza en que la enseñanza de habilidades no es una garantía de que el estudiante realmente entienda fenómenos proporcionales, ya que puede ser que los estudiantes se hayan vuelto expertos en imitar procedimientos sin entender qué hacen. “Los estudiantes asumen situaciones como proporcionales si en un problema se les da tres números o si el problema implica palabras claves con ´es a´ o ‘tasa’. Sin embargo, pueden llegar a utilizar (equivocadamente) el algoritmo para problemas no proporcionales.”

Es claro entonces que este tipo de algoritmo no ayuda a desarrollar apropiadamente el razonamiento proporcional y como lo mencionan Godino y Batanero (2002) se debería abordar cuando los estudiantes lo descubran por su propia cuenta o ya hayan logrado un razonamiento más sofisticado de proporcionalidad y un fundamento matemático consistente.  “Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado."

Otro trabajo que aconseja el no uso de algoritmos es el de Lobato y otros (2011) donde se muestra que en el procedimiento denominado 'multiplicación en cruz´, para evitar la confusión de operar las fracciones que aparecen en una proporción, es mejor multiplicar ambos lados de la igualdad por el mismo número, así también se refuerza el concepto de ecuación en los estudiantes y no los confunde con otras 'operaciones' entre fraccionarios. Los investigadores encontraron que los estudiantes a menudo se involucran en un razonamiento más complejo cuando no se utiliza el algoritmo de la proporción, y que el algoritmo puede oscurecer o incluso interferir de forma negativa con el pensamiento de los estudiantes.

Broekman y otros (2000) reafirman esta posición diciendo "pero el algoritmo no aclara la forma de razonamiento proporcional, y muchos estudiantes utilizan el algoritmo pero no entienden el fondo del mismo, no saben el por qué, lo que hace que a los estudiantes se les dificulte organizar los números para localizarlos adecuadamente en el algoritmo."

Igualmente en Ferrucci, Carter & Lee (2009) un estudio acerca del porqué de los mejores resultados de los estudiantes de Singapur en las pruebas internacionales de matemáticas que además compara la formación de profesores de Estados Unidos y Singapur, se afirma que uno de los factores de ello es el no manejo de "formas algebraicas" a la hora de resolver situaciones que presentan proporcionalidad, lo que parece influir de forma positiva en la comprensión de los estudiantes.

### 1.3. Razón y fracción

Otro punto a resaltar en los diferentes estudios realizados sobre el aprendizaje del concepto de proporción, es el de entender y analizar que el razonamiento proporcional afecta el entendimiento del estudiante frente al concepto de fracción como lo señalan Ellis (2013), Godino y Batanero (2002), Cai, Lo & Watanabe (2004) y Broekman y otros (2000).

Godino y Batanero (2002), afirman que aunque hay un vínculo entre una razón y una fracción, es necesario que los estudiantes entiendan que son dos conceptos separados. “Es importante, sin embargo, estudiar con más detalle el uso que se hace del término “razón”, ya que no siempre es sinónimo de “fracción”, lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes.”

Cai y otros (2004) resaltan cómo se maneja el concepto de razón en los países asiáticos y dicen que frente al problema de evitar la confusión entre razón y fracción, se decidió distinguir entre la razón a:b como una relación multiplicativa entre dos cantidades y el valor del cociente a/b de la división como el valor de la razón. Enfatizan que como la división no es conmutativa, luego el orden en la razón es importante; cambiarla es cambiar de perspectiva.

Los autores llaman la atención en que hay que tener cuidado con las unidades de las magnitudes al momento de comparar, ya que se pueden terminar multiplicando dos unidades sin que tenga sentido. “Usualmente se hace uso de la ayuda de representaciones pictográficas para la solución de problemas contextualizados.”

Broekman y otros (2000) muestran en su estudio de futuros profesores, que para ellos los conceptos de razón y proporción son evidentes por sí mismo y al tratar de definirlos, llegan a una definición cercana a la representación de fracción sin lograr reconocer la diferencia, y los que sabían que eran conceptos diferentes, no pudieron explicar la diferencia. Los autores afirman que muchos artículos sobre razón y proporción en la enseñanza de las matemáticas toman las definiciones de estos conceptos por sentado. Sin embargo, la falta de acuerdo sobre la definición da lugar a inconsistencias dentro y entre los diferentes artículos.

Los autores señalan frente a las diferencias entre un cociente y una razón, se puede afirmar que “En un cociente, los dos términos son números; en una razón, otros términos pueden ser utilizados, como vectores, números complejos o cantidades no determinadas.

En un cociente, los términos consisten en un par de números; una razón puede constar de tres o más términos, por ejemplo, 3 : 4 : 5.

Incluso si nos limitamos a las relaciones con números y sólo dos términos, hay claras diferencias que pueden señalarse:

- Cada cociente tiene un lugar en la recta numérica real; una razón no lo tiene;
- Los números negativos no aparecen en una razón; en un cociente, uno o ambos términos pueden ser números negativos;
- En un cociente, uno de los números es el numerador y el otro el denominador. En una razón no existe tal discriminación;

- En las proporciones, la comparación de los dos aspectos de la situación o contexto es fundamental. Si la relación de dólares a manzanas es de 1 : 4 , es importante saber que el 1 se refiere el dinero y el 4 que se refiere a las manzanas que se pueden comprar por el dinero. En un cociente, los dos valores pueden ser cambiados, en este caso de ¼ o 0,25. Detrás de los números de una razón, su contexto es oculto." Broekman y otros (2000)

### 1.4. Proporcionalidad en la EMR

Otros trabajos que utilizan la EMR como los de Heuvel-Panhuizen (2003), Broekman y otros (2000) y Van Galen & Van Eerde (2013), instruyen sobre el papel de los modelos en este enfoque y cómo éstos pueden utilizarse en el aula para la enseñanza del concepto de proporcionalidad

En Heuvel-Panhuizen (2003) la atención se centra en el uso del modelo de barras para el concepto de porcentaje que se ha diseñado para *la matemática en contexto*, que es un plan de estudios de una escuela intermedia de EE.UU. Simplificando, es el uso de la representación conformada por una tira como instrumento abstracto que representa un contexto relacionado con el porcentaje y sirve para la estimación y el razonamiento del uso de porcentaje como operador.

Sin embargo, el modelo de barras no es el único modelo de apoyo para este dominio. Además, la barra se puede convertir más tarde en una recta numérica doble, una tabla de razones o un gráfico circular. Aunque entre la barra y una línea doble no hay mucha diferencia, la barra se hace más simple y por lo tanto es más fácil de usar.

“De hecho, las actividades de modelación no producen un solo modelo, sino una cadena de modelos.”

Un resultado interesante del uso de este modelo es que los estudiantes usan espontáneamente fracciones para explicar el porcentaje de “llenura” de la barra, utilizando las fracciones como representación, y empleando así los diferentes conocimientos que traen los estudiantes. Dice la autora que especialmente en los casos donde la transformación de fracción a porcentaje es difícil, la barra ofrece un buen punto de apoyo para llegar a expresar o modelar un porcentaje aproximado.

El artículo muestra cómo los estudiantes empezaron con un modelo de un metro que se fue cambiando gradualmente a la barra, es decir, en términos de la teoría pasa de un ´modelo de´ a ´un modelo para´, haciendo un cambio real en el pensamiento de los estudiantes.

La barra ofrece una herramienta de cálculo tal que los estudiantes en las primeras unidades convierten con mucha facilidad las fracciones a porcentajes y en posteriores unidades saben convertir expresiones porcentuales aditivas a formas numéricas multiplicativas con decimales.

Desafortunadamente el artículo no muestra cómo los estudiantes pueden aprender a resolver problemas a través de la construcción de modelos con una matematización progresiva, sino cómo conceptos matemáticos como número racional y porcentaje se aprenden. “Estas experiencias no deben llevar a la conclusión de que este modelo de barra es la respuesta final a la pregunta de cómo los estudiantes pueden aprender mejor porcentajes. Es sólo una respuesta." Heuvel-Panhuizen (2003).

Van Galen & Van Eerde (2013) atestiguan sobre las ventajas del uso de la barra de porcentaje diciendo que una de ellas es que los estudiantes hacen una representación de la relación entre lo que se da y lo que se pide, ya que un problema inicial mostrado por los estudiantes es que realizan el problema "en la cabeza" lo que los lleva a errar en el proceso; otra ventaja es que la barra ofrece un paso intermedio entre el análisis del problema y el cálculo para resolver el problema, ya que la barra y el cómo utilizarla es fácil de entender por parte de los estudiantes; además el modelo sirve para que los estudiantes mismos supervisen las relaciones que se están formulando. Por último los autores aseveran que la barra ofrece una entrada natural al cálculo en el caso de problemas que piden el 1%. Ellos dicen que esta última parte es beneficiosa ya que los estudiantes generalmente resuelven correctamente problemas de porcentaje con valores de 50%, 20%, 10%, etc, pero para números no múltiplos de 5, tienen dificultad en dar el resultado correcto.

En Broekman y otros (2000) los autores muestran una herramienta que se ha trabajado en Holanda por Streetfland (1985) y en problemas de las ciencias (de Jong, 1995) para los conceptos de razón y proporción, la cual es la tabla de razones.

Hay que señalar que los autores pertenecen al grupo del proyecto BPS en el cual trabajan investigadores holandeses que se centran en enseñar a profesores el uso de las tablas de razones. Además se advierte que en holandés los conceptos "razón" y "proporción" son expresados usando la misma palabra ´ verhouding´.

La llamada tabla de razones es una línea de dos filas, cada fila tiene una etiqueta que indica el sentido de los números en la fila. Las columnas se llenan con pares de números que tienen la misma relación. No hay preferencia sobre cómo elegir la fila superior o inferior. La tabla la utilizan para multiplicar, dividir, sumar y restar. Con la tabla los estudiantes crean su propio algoritmo. Por lo tanto, las tablas forman un elemento de conexión entre razón, proporción, fracción y porcentaje.

Los investigadores resaltan que cuando se trabaja con tablas de razones, se aprecia que el estudiante mejora el significado avanzado que atribuye a la razón como relación. Los autores comentan que antes de utilizar la tabla de razones, en Holanda era usual el algoritmo cruzado para la resolución de problemas de razones y proporciones. Con el uso de tablas de razones, los alumnos obtienen una estructura clara en la que pueden encontrar una respuesta por su cuenta.

Los alumnos tienen una cierta libertad en relación con el llenado de números en una columna siguiente de la tabla, puesto que ésta les permite elegir los pasos, permite al alumno utilizar tantos pasos como él piensa que se necesitan o considera útiles; sin embargo, la relación entre los números en la fila superior e inferior tiene que seguir igual.

Resumiendo, la tabla maneja dos filas en donde los estudiantes pueden colocar las magnitudes a relacionar y las pueden ubicar en cualquiera de las filas (arriba o abajo), las magnitudes conocidas usualmente se colocan primero y luego se sitúa la otra magnitud conocida a una distancia que el estudiante debe estimar. Después, en los primeros intentos, por simple intuición, el estudiante llena el valor de la magnitud faltante en la fila correspondiente de la tabla. “Después de un uso frecuente de la tabla, el estudiante termina por crear estrategias para utilizarla correctamente y de forma más ágil y eficiente.” Broekman y otros (2000).

Un estudio similar muestran Gravemeijer y otros (2005) con el uso de la tabla de razones y resaltan la forma como emerge este modelo en el transcurso del trabajo de los estudiantes con problemas contextualizados; pero después de haber entendido la herramienta, la logran utilizar para situaciones diferentes a la que se presentó inicialmente, diciendo “los estudiantes pueden finalmente comenzar a usar la tabla de razones de una manera semi-algorítmica para ejecutar multiplicaciones, sin necesidad de tener que pensar en posibles significados contextuales de los números involucrados”.

### 1.5. ¿Cómo manejar el tema?

Acerca del cómo sería la mejor forma de trabajar el concepto de proporción, Godino y Batanero (2002) sugieren el desarrollo del razonamiento proporcional con diferentes elementos, entre los cuales incluyen la comparación de probabilidades implicando una comparación de fracciones. Al respecto aseveran: “pero se añade la dificultad de que también se requieren las ideas de azar, casos favorables y posibles. Los autores que han trabajado el tema sugieren que una tarea de comparación de probabilidades es siempre más difícil que otra tarea de comparación de fracciones en un contexto determinista.” Además en el artículo referido se dan consejos acerca de cómo se deben preparar las actividades: razones equivalentes, progresiones crecientes, construir modelos físicos (palillos, escala), buscando como objetivo “proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes”.

Ferrucci, Carter & Lee (2009) muestran que uno de los resultados más importantes del estudio realizado por ellos, es el éxito del uso del método unitario y el método referencia en los estudiantes de Singapur a la hora de resolver problemas que involucran proporcionalidad. El llamado método unitario es llevar el problema a resolver a la equivalencia de la unidad de una de las magnitudes que se están relacionando y luego multiplicar según el valor buscado. El método de referencia es buscar un valor que sea fácil de calcular simplificando y luego multiplicar hasta el valor deseado. Ellos utilizan un problema donde se les pide a los estudiantes calcular cuánto demoraría una persona leyendo 80 páginas, si gastó en leer 50 páginas 30 minutos. Por lo tanto utilizando el método unitario se buscaría cuánto tiempo se gasta en leer una página para luego multiplicarlo por 80. Con el método de referencia se podría buscar cuanto demoraría en leer 10 páginas, es decir divide los valores por 5 y luego se multiplicaría por 8. Según los autores, aquellos estudiantes que manejaban estas técnicas, tuvieron resultados acertados mayores al 95%.

Lobato y otros (2011) en su artículo procuran identificar los tipos de razonamiento que pueden ser más accesibles como punto de partida de los estudiantes para que puedan lograr un desarrollo sofisticado de razonamiento proporcional por medio de una matematización progresiva. El artículo se centra en los conocimientos matemáticos que son cruciales para la creación de una secuencia de instrucción que apoye el desarrollo de una red cada vez mayor de ideas en apoyo al razonamiento proporcional de los estudiantes.

Haciendo una recopilación de varios trabajos, ellos indican que los estudiantes pueden comenzar el razonamiento con proporciones, uniendo o componiendo dos cantidades para crear una nueva unidad, que a su vez, se puede operar por iteración o división (Lamon, 1994, 1995). Alternativamente, los estudiantes pueden formar una relación como una comparación multiplicativa de dos cantidades, haciendo una comparación relativa de la cantidad de veces tan grande que una cantidad es de otra (Kaput & Maxwell-West, 1994; Thompson, 1994). Mientras que algunos investigadores utilizaron como estrategia incluir unidades compuestas para el pre razonamiento de razón (Lesh, Post, y Behr, 1988), otros argumentan que el razonamiento proporcional más sofisticado puede surgir a través de un proceso de reflexión sobre el número de grupos que se crean cuando se repite la partición y mediante la combinación de operaciones cuantitativas (Lobato y Ellis, 2010).

Teniendo en cuenta estos trabajos y los resultados arrojados, es clara la necesidad de alentar al estudiante a desarrollar sus propias estrategias de trabajar problemas de proporcionalidad, de no presentar únicamente problemas sencillos en un mismo formato, de no acelerar el proceso de construcción por pensar que la temática es fácil de aprender, de tener cuidado con el concepto de fracción al momento de utilizar las razones y preferiblemente utilizar la notación con dos puntos antes que utilizar una fracción, y de proponer las diferentes estrategias que sugieren los autores para facilitar la comprensión del concepto.

# 2 MARCO TEÓRICO

## 2.1. Marco disciplinar

Durante la antigüedad el tema de la proporcionalidad fue estudiado extensamente y ha sido de vital importancia en el desarrollo de la matemática. El libro de Euclides *Los Elementos* es una de las claras manifestaciones de que los matemáticos de la antigüedad veían la importancia de este concepto. Aunque Euclides no fue el primero en trabajarlo, el Libro V de *Los Elementos* en el cual el autor presenta la teoría pitagórica de la proporcionalidad sí es uno de los escritos que más ha tenido impacto en la historia de la teoría de la proporcionalidad. Una de las razones para ello es que, a diferencia del trabajo de los pitagóricos, Euclides trabaja la razón incluyendo magnitudes inconmensurables. Además, Euclides trabaja la proporcionalidad geométrica contrario de lo que usualmente se trabaja en el colegio como la proporcionalidad netamente aritmética; aunque esto no significa que no se puedan deducir de la proporcionalidad geométrica los conceptos y propiedades de la proporcionalidad aritmética.

El Libro V de *Los Elementos* está conformado por 18 definiciones, 25 proposiciones y 2 corolarios. De las definiciones, las más importantes para este trabajo son la tercera y la quinta ya que la tercera define una razón como “determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas” Puertas (1994). Y la quinta dice “Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente," Puertas (1994). Esta hace que luego en la sexta definición se defina proporcionalidad entre magnitudes simplemente como "las que guardan la misma razón," Puertas (1994).

Por otro lado, las proposiciones y los corolarios, muestran las diferentes propiedades que tienen las magnitudes (no se nombran ni números, ni fracciones), las razones y las proporciones. En las demostraciones se utilizan segmentos para el concepto de magnitud, y es claro que esta práctica corresponde a la concepción griega que cualquier magnitud, conmensurable con la unidad o no, es representable por un segmento de recta (lo que equivale a la idea moderna de hacer corresponder el conjunto de los números reales con el de los puntos sobre una recta numérica, la recta real).

Para aquellos que hayan tenido la oportunidad de leer *Los Elementos* de Euclides, sabrán que la forma en que se expresan las proposiciones dista mucho de la actual; por ello, para resumir la proposiciones se mostrarán en forma contemporánea las propiedades que enuncian éstas, utilizando como base los comentarios de John Casey en su libro *The first six books of the Elemets of Euclid* (1885) y el proyecto realizado por la UBC (Universidad de Columbia Británica) a cargo de David Joyce (1996).

I. $(ma+mb+mc+md)=m(a+b+c+d)$

II. $(a+b)m=(ma+mb)$

III. $m(nx) = (mn)x$

IV. Si $a : b = c : d \quad entonces \quad pa : qb = pc : qd$

V. $(a - b)m = (ma - mb)$

VI. $(m - n)a = (ma - na)$[3]

VII. Si $x = y \quad entonces \quad x : z = y : z \quad \text{y} \quad z : x = z : y$

Corolario: Si $x : w = y : z \quad entonces \quad w : x = z : x$

VIII. Si $x < y, \quad entonces \quad x : z < y : z \quad pero \quad z : x > z : y$

IX. Si $x : z = y : z \quad entonces \quad x = y. \quad Tambien, \; si \; z : x = z : y \quad entonces \quad x = y$

X. Si $x : z < y : z \quad entonces \quad x < y. \; Pero \quad si \quad z : x < z : y \quad entonces \quad x > y$

XI. Si $x : w = y : z \quad \text{y} \quad y : z = u : v \quad entonces \quad x : w = u : v$

XII.

Si $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = ... = x_n : y_n = \Gamma \quad entonces \quad (x_1 + x_2 + ... + x_n) : (y_1 + y_2 + ... + y_n) = \Gamma$

XIII. Si $x : y = w : z \quad \text{y} \quad w : z > u : v \quad entonces \quad x : y > u : v$

---

**[3] Como se puede observar, exceptuando la proposición IV, las otras anteriores se refieren a propiedades de las magnitudes.**

XIV. Si $x : y = w : z \quad \text{y} \quad x > w \quad entonces \quad y > z$

XV. $x : y = nx : ny$

XVI. Si $x : y = w : z \quad entonces \quad x : w = y : z$

XVII. Si $(w + x) : x = (y + z) : z \quad entonces \quad w : x = y : z$

XVIII. Si $w : x = y : z \quad entonces \quad (w + x) : x = (y + z) : z$

XIX. Si $(w + x) : (y + z) = w : y \quad entonces \quad (w + x) : (y + z) = x : z$

Corolario: Si $(w + x) : (y + z) = x : z \quad entonces \quad (w + x) : (y + z) = w : y$

XX. XXI. $a : b = e : f \quad \text{y} \quad b : c = d : e \quad entonces \quad a = c \quad si \ y \ solo \ si \quad d = f$ .[4]

XXII.

Si $x_1 : x_2 = y_1 : y_2, x_2 : x_3 = y_2 : y_3, ..., x_{n-1} : x_n = y_{n-1} : y_n, \ entonces \ x_1 : x_n = y_1 : y_n$

XXIII. $a : b = c : d \quad \text{y} \quad b : e = f : c \quad entonces \quad a : e = f : d$

XXIV. $a : b = c : d \quad \text{y} \quad e : b = f : d \quad entonces \quad (a + e) : b = (c + f) : d$

XXV. Si $a : b = c : d$ y $a$ es la magnitud más grande de las otras tres, mientras que $b$ es la menor, entonces $a + d > b + c$.

---

**[4] El autor indica que estas dos proposiciones son una preparación para las proposiciones número 22º y 23º.**

Al examinar las diferentes propiedades que Euclides nos muestra en su libro, se puede analizar que la mayoría de éstas han sido olvidadas en el aula y muy pocas de ellas son hoy manejadas por los estudiantes y profesores. Por otro lado, el proyecto del presente trabajo es enriquecer el significado del concepto de proporción de los estudiantes, y es evidente que entre más propiedades básicas maneje y entienda un estudiante, más acertado será el significado que construya para el concepto, o sea, mejor será su comprensión.

## 2.2. Marco pedagógico

### 2.2.1. Educación matemática realista

La *educación matemática realista* (EMR) fue introducida y desarrollada por el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO) (que posteriormente se pasó a llamar Instituto Freudenthal) en la Universidad estatal de Utrecht de Holanda. Esta teoría ha sido adoptada en varios países como Inglaterra, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil, EE.UU., Japón y Malasia (de Lange, 1996). La forma actual de la EMR ha sido determinada por la visión del matemático y educador alemán Hans Freudenthal (1905-1990) y surgió como una forma de contrarrestar tanto el método mecanicista en matemáticas vigente en los años sesenta como el auge de la matemática moderna en los currículos y su aplicación en las escuelas de todo el mundo.

A diferencia de las nuevas formas de enseñar la matemática en las escuelas, Freudenthal no creyó en una matemática conjuntista y, alejándose de esta “moda”, concibió la matemática como una práctica social donde lo importante es solucionar problemas de la vida cotidiana y no alejados de ella. Él habla de una “matemática para todos”, tal que, sin importar las motivaciones personales que tengan los estudiantes frente a la matemática, el estudiante debe poder utilizarla para enfrentar y resolver sus problemas cotidianos. Hay que entender que cuando Freudenthal dice la “matemática para todos”, no significa exigir la misma matemática para todos, sino hacer que cada estudiante influya en las decisiones de qué trabajar en el aula, logrando que el alumno llegue a su mejor nivel personal en matemáticas y le halle sentido al aprendizaje. Los estudiantes son valorados por las construcciones propias y reflexionan acerca de la actividad matemática que han realizado, siendo esto último un gran logro para la educación matemática.

Por lo tanto Freudenthal piensa que las matemáticas deben estar cerca de los niños y ve en la enseñanza de la matemática la importancia de resolver problemas realistas los cuales son el punto de partida para que el estudiante pueda llegar a unas relaciones más generales y pueda abordar objetos abstractos. La palabra realista para Freudenthal no sólo se refiere a situaciones reales, también se refiere a situaciones que puedan ser imaginables por parte de los estudiantes. “No hay razón aún si fuera posible, de restringir la “realidad” a simples experiencias de las impresiones sensoriales” Freudenthal (1991). Este tipo de visión ayuda a dar algunas respuestas a la dificultad de que los estudiantes, los padres de familia y en ocasiones los mismos docentes le den sentido al aprendizaje de las matemáticas.

El contexto es la situación en la que se produce algo; “los problemas contextuales describen situaciones en las que se plantea un problema. Muy a menudo ésta será una situación de la vida cotidiana, pero no necesariamente es así; para los estudiantes de matemáticas más avanzados el mismo entorno matemático abstracto se convertirá en un contexto.” Gravemeijer (2004).

No es extraño ver a las matemáticas como una abstracción de la realidad o como la representación de los aspectos comunes a una amplia variedad de situaciones. Esta visión Freudenthal la llamó la fenomenología didáctica y hace que nos devolvamos al mundo de donde hemos abstraído la matemática ya que en muchas ocasiones en el aula nos hemos olvidado del mundo original. Esta fenomenología se centra en las conexiones entre un objeto matemático (nooumenon) y el mundo complejo que se relaciona con éste (phainomenon).

“Empiezo con la antítesis - si realmente es una antítesis - entre nooumenon (objeto del pensamiento) y phainomenon.

Los objetos matemáticos son nooumenon, y solo un pedazo de las matemáticas puede ser experimentado como un phainomenon; los números son nooumena, pero trabajar con números puede ser un phainomenon.” Freudenthal (1983)

La fenomenología de las matemáticas solicita un análisis fenomenológico didáctico. Esto implica que el diseñador de la instrucción debe encontrar fenómenos, tareas o situaciones específicas, donde los estudiantes vean la necesidad de desarrollar un concepto o herramienta matemática para darle solución un problema, siendo este concepto matemático el que fue pensado como el objetivo inicial por parte del instructor. Gravemeijer & Bakker (2006)

Se pueden ver dos actitudes contrarias. La primera de ellas es enseñar matemáticas sin ninguna relación con su uso y esperar que los estudiantes sean capaces de aplicarlas cuando sea necesario. Esta es la actitud más frecuente de los docentes y los resultados siguen siendo desesperanzadores ya que la gran mayoría de estudiantes no son capaces de aplicar sus experiencias matemáticas del aula, ni en el laboratorio de física o de química en la escuela, ni en las situaciones más triviales de la vida diaria. La actitud opuesta sería enseñar matemáticas útiles. Esto podría ser desventajoso ya que si dependiera del contexto los alumnos llegarían a creer que solo en ese ambiente fuera útil. Pero de hecho eso es lo maravilloso de las matemáticas, que se puede llegar a eliminar el contexto y transformarlo a una forma matemática que se pueda utilizar una y otra vez en diferentes situaciones. Freudenthal (1968). Por otro lado, como señala el mismo Freudenthal en el mismo escrito, “siempre he considerado un hecho notable que las personas son capaces de aplicar la aritmética simple, pero las ecuaciones cuadráticas no o incluso funciones lineales”, hablando acerca de cómo las personas manejan la aritmética con mucha facilidad debido a su uso, pero otros razonamientos matemáticos no los manejan de la misma forma, justamente porque no le pueden dar uso.

#### 2.2.1.1. Reinvención guiada

Freudenthal (1991) ve a la educación matemática como un proceso de reinvención guiada; éste se basa en el concepto de 'la matemática como una actividad humana', esto es, cuando los estudiantes pueden experimentar un proceso parecido al de cómo las matemáticas fueron inventadas. Además, es claro que, cuando nace la matemática, nace de una necesidad contextual. La parte de "invención" expresa el proceso de aprendizaje, mientras que el significado de "guiado" hace referencia al proceso de instrucción cuyo propósito es lograr un aprendizaje. Además, la expresión "proceso de reinvención guiada" habla acerca de los procedimientos de solución informales, los que se pueden interpretar como una anticipación de los procedimientos más formales; por ello los estudiantes no son considerados como simple receptores, sino que la educación les debe proveer las herramientas suficientes para que tengan la oportunidad de reinventar las matemáticas por ellos mismos, lo que hace que sea más significativo su aprendizaje y que se desarrollen recursos claves para la interiorización del conocimiento.

Este proceso de invención guiada busca que el diseñador de la instrucción utilice la historia de las matemáticas como fuente de inspiración, así como los procedimientos de soluciones informales de las experiencias personales de los estudiantes, lo que hace que se llegue a una ruta de aprendizaje que conduce a una reinvención colectiva. Gravemeijer & Bakker (2006)

A su vez, el trabajo con problemas que son similares entre sí ofrece la oportunidad para el proceso de reinvención. La resolución de un problema similar a otro ya antes realizado induce a este proceso. La descripción del problema da lugar al uso de un lenguaje informal, el cual evoluciona a un lenguaje más formal y estandarizado debido a un proceso de simplificación y formalización. Gravemeijer, (1994).

Hay que señalar que la EMR tiene una macro teoría a un nivel general que se dirige a responder la pregunta de cómo debe ser el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esta se compone a su vez de unas micro teorías o teorías locales, que son teorías específicas de diferentes pensamientos dentro de la matemática que han ido trabajando los diferentes investigadores durante estos años desde que se fundó la escuela de la EMR. Estas teorías se basan en la investigación del diseño, que en realidad se puede considerar como una combinación de diseño e investigación, cuyo objetivo principal es desarrollar secuencias didácticas de instrucción y una teoría local de instrucción. Para llegar a esta teoría local, se empieza por un experimento de enseñanza que es un experimento mental del instructor para imaginar cómo se propondrán las actividades y la forma en que los estudiantes interactuarán con estas actividades. Luego de esta planeación, la actividad se pone a prueba en el aula, de manera que se produce un proceso interactivo y acumulativo donde las actividades luego podrán ser rediseñadas de acuerdo a los efectos arrojados en el proceso de aprendizaje real. Luego, con varias interacciones de estas actividades se tendrá una versión mejorada de la secuencia didáctica, la que al final adquirirá el estado de una teoría de instrucción local. Gravemeijer & Bakker (2006)

La siguiente explicación de la teoría será solo para la teoría macro que fue la creada por Hans Freudenthal.

#### 2.2.1.2. Principios

La EMR tiene unos principios fundamentales los cuales muestran los fundamentos, objetivos y conceptos importantes que maneja este enfoque.

##### 2.2.1.2.1. Problemas contextuales

El primer principio habla de cómo el contexto de los problemas puede ayudar a los estudiantes a que logren un mejor entendimiento del problema y a que deseen solucionarlo; se tiene que considerar problemas que tengan varias formas de solución (sea matemática o no). Esto hace que sea más fácil usar unas estrategias de solución informales y que, a medida que va trabajando, el estudiante tenga la oportunidad de concebir una práctica matemática más formal.

Como ya se había dicho, una base que ayuda a encontrar problemas que serán los puntos de partida del proceso de aprendizaje es el mirar a la historia de las matemáticas como inspiración para identificar los problemas a los que se enfrentó la humanidad y que hacen que los estudiantes se enfrenten a experimentos reales que tuvieron lugar en algún momento.

Esto es diferente al enfoque tradicional mecanicista, ya que en él los problemas contextuales funcionan sólo como un campo de aplicación, mientras que aquí los problemas contextuales funcionan también como fuente para el proceso de aprendizaje; es decir, las situaciones de la vida real se utilizan tanto para construir como para aplicar los conceptos matemáticos. Mientras trabajan en estos problemas los estudiantes pueden desarrollar herramientas y comprensión matemática.

Al respecto Freudenthal (1968) toma como ejemplo el cómo se ve habitualmente el concepto de fracción. “En la enseñanza tradicional el contexto concreto no es más que una ceremonia…si después de la teoría abstracta de las fracciones se tiene que aplicar, se llega demasiado tarde y en un nivel demasiado alto, y no está conectado a ninguna experiencia anterior en un nivel en el que deberían haberse introducido las fracciones.”

#### 2.2.1.2.2. Modelación

Otro principio es el de la modelación, es decir, que los estudiantes logren modelar los problemas para procurar que puedan llegar luego a generalizaciones. El objetivo principal es que el estudiante llegue a observar que el modelo propuesto por él mismo, cumple unas características que hacen que para un conjunto de problemas pueda ser útil; este tipo de “nuevos” problemas puede ser más simple o más complejo del que el estudiante llegó a modelar.

“El aprendizaje es un proceso discontinuo de matematización progresiva que involucra distintos niveles y en el que los contextos y modelos poseen un papel central como puente para favorecer el subir de nivel,” Freudenthal (1991). Así, el papel que desempeñan los modelos emergentes de los estudiantes hace que se reduzca la grieta que hay entre el conocimiento informal y el formalmente aceptado.

“El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual se idealiza o simplifica una realidad o teoría compleja con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal.” Freudenthal (1991)

En la EMR, los modelos se ven como representaciones de situaciones problemáticas contextuales que reflejan aspectos de los conceptos matemáticos que se están trabajando, por ello pueden tener diferentes manifestaciones en los estudiantes. Por esta razón es que la palabra ‘modelo’ no se maneja de manera literal, los modelos pueden ser variados (gráficas, materiales, diagramas, símbolos, etc.) y no deben ser siempre iguales para todos los alumnos.

Para entender un concepto matemático o para resolver un problema, es necesario, a partir de la comprensión inicial, realizar alguna representación de las relaciones que tiene que ver con el concepto o el problema que se está trabajando. Los símbolos y sus relaciones tienen sentido sólo cuando representan múltiples significados, no son solo el resultado de aprendizaje mecánico; luego toda representación simbólica matemática es un modelo. Por eso los modelos que utilizan los estudiantes pueden ser variados y no es la forma común en que se concibe el modelo en matemáticas ya que, en general, se podría afirmar que las matemáticas construyen modelos para plantear relaciones entre objetos de cualquier naturaleza.

“La fuerza de estos modelos es el hecho de que, si bien suelen tener sus raíces en situaciones concretas, también son lo suficientemente flexibles como para ser introducidos en los niveles más altos de las actividades matemáticas. Proporcionan un punto de apoyo durante el proceso de matematización vertical, sin obstruir el camino de regreso a la fuente. Uno de los más poderosos ejemplos de esto es la recta numérica, que comienza en el primer grado como un collar de perlas, y que, en el sexto año, se ha convertido en una recta numérica doble para apoyar el trabajo con fracciones y porcentajes." Heuvel-Panhuizen (1996)

Los modelos que se traten en el aula deben tener unas características importantes: una es que sus raíces deben provenir de contextos realistas o por lo menos imaginables; por otro lado deben ser flexibles para que sirvan de herramientas en niveles más generales. Un requisito fundamental es que, desde el punto de vista de los estudiantes, se vea la necesidad de construir y utilizar el modelo. Aun así con estas características, lo más importante es que los estudiantes con las actividades propuestas puedan identificar estructuras y conceptos matemáticos, lo que hace que se reconozca el valor de las construcciones y producciones libres de los modelos de los alumnos.

En un diseño instruccional, la atención se centra en la heurística del modelo emergente. La actividad de modelado surge en el momento en que el estudiante lucha por resolver el problema y desarrolla conjeturas como acto reflejo para la construcción de una nueva realidad matemática. Gravemeijer & Bakker (2006)

Los modelos "primitivos" permiten estrategias informales que corresponden a la solución de la situación entregada; a medida que el estudiante obtiene mayor experiencia al realizar problemas similares el modelo adquiere un carácter más objetivo, de tal forma que no haya necesidad de tener que pensar en los posibles significados de los números involucrados, llegando así a un nivel más formal del razonamiento matemático. (Se hablará más de esto en la siguiente sección).

Según lo dicho, es claro que el objetivo no es entregar modelos como productos ya prefabricados, sino el estimular a reinventarlos, tal vez en una forma estricta a la en que éstos funcionan, sino en una forma en que los estudiantes puedan valorar el uso del modelo y los beneficios que ofrece.

#### 2.2.1.2.3. Rol del estudiante

El siguiente principio habla del papel importante que tiene el estudiante en el aula, cuyo rol es denominado "matematizar". Matematizar significa organizar y estructurar la información del problema para luego llegar a sacar los aspectos más relevantes y descubrir regularidades o irregularidades, relaciones, estructuras y reflexionar sobre la actividad que acaba de hacer. De la importancia del mismo, afirma Freudenthal (1991):

"Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común se cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aun mayor, una jerarquía tremenda, construida gracias a un notable interjuego de fuerzas".

Para resumir matematizar involucra:

La búsqueda de lo esencial dentro y a través de situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;

El descubrimiento de características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos;

La ejemplificación de ideas generales;

El encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática;

La irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones;

La búsqueda de atajos y la abreviación progresiva de estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas; y

La reflexión acerca de las propias actividades, considerando los fenómenos a matematizar desde diferentes perspectivas.

Freudenthal (1991).

Treffers (1978) propuso dos formas de matematización; distinguió matematización vertical y matematización horizontal. Según Treffers un enfoque empirista sólo se centra en la matematización horizontal, mientras que un enfoque estructuralista se limita a la matematización vertical, y en un enfoque mecanicista ambas formas están desaparecidas.

Treffers afirma que matematizar se refiere a más que adquirir un conocimiento matemático o a convertirse en experto en las diferentes operaciones; más bien, matematizar implica profundizar en el conocimiento de los procesos subyacentes como ordenar, clasificar, generalizar y formalizar.

En general el significado de cada una es el siguiente:

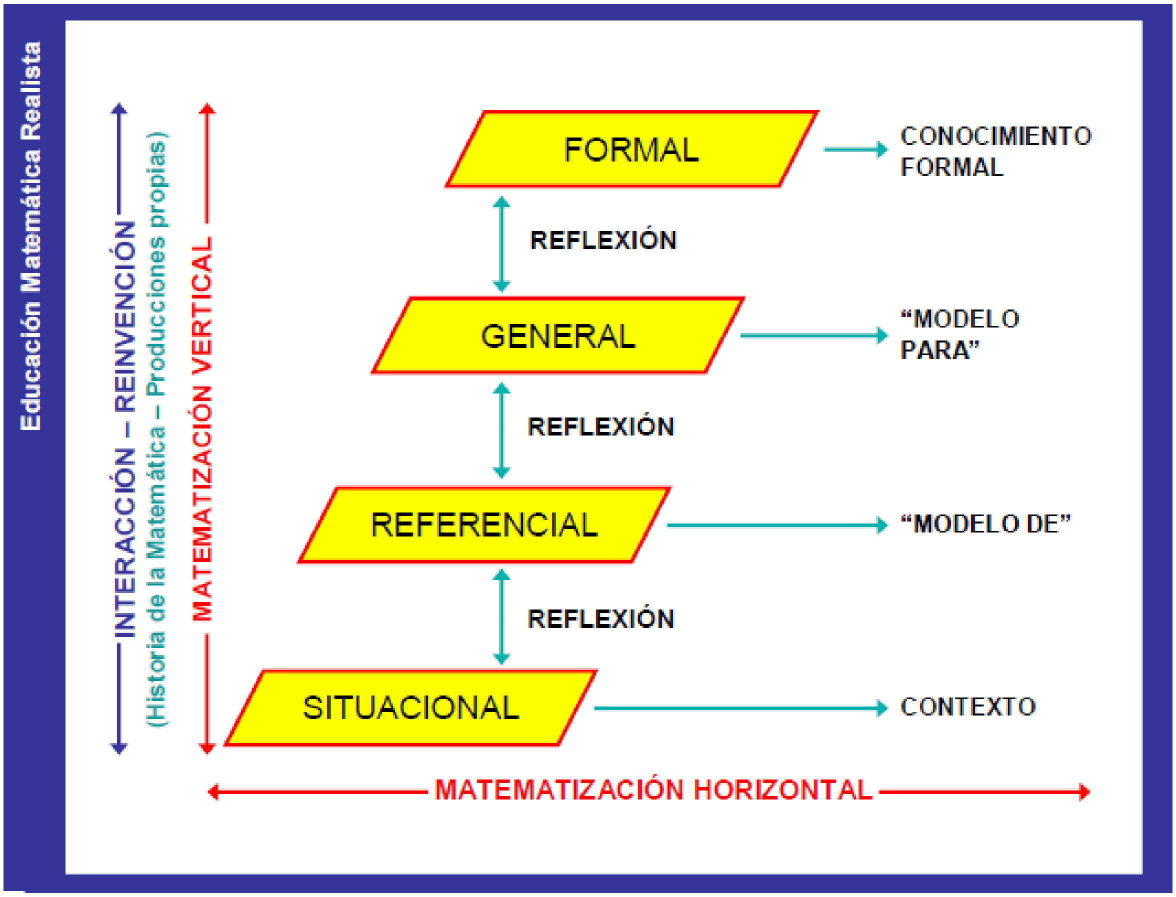
La matematización horizontal se da entre alumnos, se refiere a un nivel situacional y se da cuando se habla de cómo solucionar un problema contextual, luego los estudiantes deben procurar analizar qué conocimiento matemático le puede servir para su objetivo. Deben tratar de llevar esa “realidad” a unos símbolos matemáticos, dar nociones de estos objetos matemáticos y conjeturar la estrategia correcta que pueden utilizar para resolver el problema.

La matematización vertical consta de todos los tipos de reorganizaciones realizadas por los estudiantes dentro del propio sistema matemático que deciden utilizar. Aunque también se da entre alumnos, está sujeta a la interacción con el docente y es un proceso que tiene varios niveles. El primer nivel es el situacional que se da cuando los estudiantes trabajan con el cómo convertir el problema a símbolos matemáticos dependiendo de los conceptos que manejan; los otros niveles se mueven dentro de ese sistema de representación que utilizaron los estudiantes y cómo lo van transformando. El siguiente nivel es el referencial que es donde aparecen los modelos que utilizarán los estudiantes para esquematizar el problema y para la estrategia que decidieron utilizar los alumnos. Estos modelos se consideran como “modelos de”, ya que están dados para solucionar el problema dado. Luego llega el nivel general donde los estudiantes procuran generalizar el modelo que utilizaron para emplearlo en otros tipos de problemas. Luego los modelos que utilizaron se transforman de “modelo de” a “modelo para”, logrando que, debido a la reflexión hecha, el estudiante pueda observar los diferentes problemas en que se podría utilizar el mismo modelo trabajado. A medida que se ‘sube’ de nivel, los estudiantes partiendo de las nociones iniciales van construyendo diferentes conceptos cada vez más cercanos a los aceptados por la comunidad científica.

Resumiendo, en primer lugar, se desarrollan estrategias estrechamente relacionadas con el contexto; posteriormente, algunos aspectos de la situación pueden llegar a apreciarse como más generales dando acceso a un conocimiento matemático más formal. En este paso entre el conocimiento informal y el formal es cuando se dice que un “modelo de” pasa a un “modelo para”. Streefland (1985.)

El nivel final es el formal, donde se llega a la formalización del conocimiento trabajado por el estudiante, o sea, se llega a la notación y los conceptos matemáticos que se manejan en forma institucional. Es claro que esta parte es manejada en gran parte por el docente que consigue enlazar el conocimiento descubierto por el estudiante al conocimiento sabio. Todos los niveles y matematizaciones se pueden apreciar en la Figura 2.

Figura 2. Niveles de matematización. Adaptado de Gravemeijer (1994) en Pochulu y Rodríguez (2011)




Es posible que en el proceso de interacción de los estudiantes, las simbolizaciones que están incrustadas en el proceso de modelado y que se constituyen en el modelo puedan cambiar con el tiempo.

### 2.2.1.2.4. Interacción

El otro principio es el de la interacción. Freudenthal, al concebir la matemática como una actividad humana, tiene presente que es en la sociedad que se forma el conocimiento matemático. "La imagen de las matemáticas está enmarcada por la imagen del mundo, la imagen del matemático por la imagen del hombre, y la imagen de la educación matemática en la de la sociedad.” (Freudenthal 1991)

Para esto, el trabajo de los estudiantes se propone en forma de grupos pequeños y heterogéneos en cuanto a los conocimientos que manejan los estudiantes que los integran. Se plantea una clase dialógica, donde las interacciones entre los mismos estudiantes y entre los estudiantes y el docente hacen que se llegue a una apropiación de las ideas que desarrollan los estudiantes tal que, al momento de discutir sobre lo que ellos han hecho, lo defiendan de forma confiada ya que es la producción hecha por ellos mismos.

Una cuestión fundamental es la manera en que se tiene en cuenta tanto el desarrollo de la matemática colectiva de la comunidad del aula y el aprendizaje de las matemáticas por parte del individuo que participa en el mismo. Luego la EMR está alineada con los últimos desarrollos teóricos en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que hacen hincapié en el carácter social situado de la actividad matemática.

En consecuencia, es clara la diferencia entre la EMR y el enfoque tradicional de aprendizaje ya que se tiene una conceptualización más compleja y significativa de la que se plantea cuando los estudiantes son entrenados por ejercicios comúnmente de tipo rutinario y usualmente basado en trabajo individual. Los estudiantes en vez de ser receptores, se consideran participantes activos del proceso de aprendizaje lo que hace que en este sentido se tenga mucho en común con los socioconstructivistas de la educación matemática. Así, el objetivo al diseñar la experiencia de aprendizaje es crear ambientes en los que los estudiantes pueden colectivamente renegociar sus soluciones; este continuo diálogo hace que se vaya refinando el conocimiento matemático que se trabaja en el aula, primero en pequeños grupos y luego con toda la clase.

"Cuando en la EMR nos referimos a "la clase completa", no estamos diciendo que todos los estudiantes procedan colectivamente a resolver un problema, siguiendo la misma senda y alcanzando el mismo nivel de desarrollo al mismo tiempo. En la EMR los chicos son considerados como individuos, cada uno sigue una senda de aprendizaje individual.

Contrariamente a otros enfoques, en la EMR se intenta mantener al grupo de alumnos junto -no buscando separarlos en pequeños grupos de trabajo de acuerdo a sus habilidades- y adoptando problemas que puedan ser resueltos en los diferentes niveles de comprensión" Santamaría (2006) citando a Heuvel-Panhuizen, (2002).

Como el trabajo de la presente tesis está fundamentado en el trabajo del aula de los estudiantes, es necesario enfocarse en este principio, por lo cual un apoyo para encauzar este tema será la teoría de comunidad de práctica de Wenger de la cual se hablará más adelante.

#### 2.2.1.2.5. Interrelación curricular

Por último se tiene la interrelación que tiene que haber con los ejes curriculares, ya que éstos en muchas ocasiones sujetan el trabajo en el aula, mientras que una clase orientada por EMR no está sujeta a temáticas especiales, sino al conocimiento que fluye cuando se quiere solucionar un problema contextualizado. Aunque es claro que el docente tiene en sus ideales el que los estudiantes aprendan ciertos tópicos, puede que los problemas lleven a ciertos modelos diferentes a los que el docente puede haber planeado, pero que ofrecen una oportunidad inmejorable para llegar a otros conocimientos. Para Freudenthal (1991) “la interrelación entre ejes debe darse tan pronto, por tanto tiempo y tan fuertemente como sea posible”.

Además el currículo ayuda a la investigación, esto debido a que es muy común el trabajo con textos didácticos, y la creación de los mismos es un eje fundamental en el trabajo de la EMR. Esto ocurre por la necesidad de proporcionar herramientas a los docentes de forma que éstos se dediquen al trabajo en el aula, a ayudar matematizar o en palabras de Freudenthal, a didactizar. “Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación.” Freudenthal (1982).

Además, esta libertad de permitir transitar los alumnos en diferentes conocimientos matemáticos, hace que ellos decidan qué les parece más fácil, pero que al momento de discutir con los compañeros puedan elegir cuál es la estrategia más adecuada para el problema, evitando así restringir la creatividad del estudiante por el ‘tema’ que se está trabajando en ese momento en el aula. “El permitirle a un alumno desarrollar sus propias estrategias hace que mientras algunos resuelvan un problema de una manera geométrica, otros lo hagan de una forma aritmética. El mundo actual exige que un alumno pueda prepararse a resolver un problema de su entorno de maneras cada vez más ingeniosas.” Santamaría (2006)

Al momento de investigar han surgido una gran cantidad de trabajos que exploran no solo el cómo matematizar, sino el cómo didactizar, el cómo generar estos procesos de matematización en los estudiantes, el de didactización en los docentes, los diferentes niveles de comprensión que pueden tener los estudiantes y el cómo deben estar estructurados los problemas para que sean óptimos para los objetivos del enfoque.

Como se puede ver, la EMR es una teoría que tiene tanto principios exclusivos de enseñanza como de aprendizaje, por lo tanto tiene muchas temáticas en las cuales enfocar las investigaciones. Por ello sus propios investigadores afirman que aún es una teoría que está desarrollándose y que es necesario profundizar en temas que aún no han sido explorados. Por ejemplo, muchos de los trabajos elaborados se han enfocado en la parte de la enseñanza y de la matematización vertical; es decir, nos podríamos quedar con la didactización como actividad central, sin embargo ésta se organiza en función de la matematización progresiva de los alumnos, y por ello en la actualidad se están desarrollando nuevos estudios sobre el aprendizaje y la matematización horizontal, como es el objetivo del presente trabajo, donde nos enfocaremos en el cómo los estudiantes construyen sus propios significados del concepto de proporción.

Como se dijo anteriormente, en la EMR existen micro teorías que dependen del tipo de pensamiento matemático que se esté trabajando en el aula. Esta micro teoría (la concerniente al razonamiento proporcional) se ha mostrado en el estado del arte en trabajos esencialmente de investigadores holandeses, los cuales no serán punto de apoyo para esta tesis ya que uno de los objetivos es que los estudiantes construyan su propio significado, luego no se les dará un modelo a seguir como es la pretensión de estas teorías.

Este enfoque proporciona ventajas frente a los otros enfoques de educación matemática debido a que ayuda a que los alumnos aprendan a usar las matemáticas en la sociedad y a descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y posteriores profesiones; igualmente los estudiantes pueden ver el por qué es importante la matemática que aprenden y desarrollar una actitud crítica y flexible en el uso de las matemáticas en la vida real.

Por otro lado por medio de los problemas los estudiantes se acercan de forma natural a la historia de las matemáticas y de otras disciplinas lo que hace que incremente su interés por la asignatura.

### 2.2.2. Comunidades de práctica

Como se dijo anteriormente, dado que el presente trabajo está enfocado en los significados que construyen los alumnos y utiliza como base el principio de interacción de la EMR, hay que fundamentar este aspecto con otra teoría debido a la falencia presente en la EMR (en la cual ellos están trabajando actualmente); por esto el trabajo deberá apoyarse en una teoría que se enfoque en esta construcción social del conocimiento y la teoría que parece acomodarse mejor es la de comunidades de práctica de Wenger, en especial el cómo se construye significado, el cual lo trabajó en su libro Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity (1998).

El trabajo de Wenger busca proveer una alternativa para aquellos educadores que han visto en los paradigmas cognitivistas psicológicos un campo limitado donde el aprendiz internaliza el conocimiento, sea por descubrimiento, por transmisión o interaccionando con otros, y se termina ignorando el aprendizaje como parte de un mundo socialmente formado y de sus relaciones con éste, reduciéndolo a solo la capacidad mental. Pero también está mostrando una opción para aquellos que por otro lado difieren de la perspectiva según la cual la práctica social es el fenómeno generativo primario y el aprendizaje una de sus características. Wenger proporciona una teoría de aprendizaje en la que la unidad primaria de análisis no es ni el individuo ni las instituciones sociales, sino las comunidades de práctica.

En el trabajo de Lave y Wenger (1991), los autores se trasladan lejos de las explicaciones psicológicas y cognitivas de aprendizaje a una vista más social y situada; haciendo hincapié en la importancia del "desplazamiento del enfoque de centrarse en el estudiante como individuo, para el centrarse en el aprendizaje como participación en el mundo social " (Lave y Wenger, 1991). Así también, la obra de Wenger (1998) se encuentra dentro de este amplio campo; él señala que su trabajo es una teoría social del aprendizaje que no pretende sustituir otras teorías del aprendizaje, pero sí tiene su propio conjunto de supuestos y su propio enfoque. Wenger resalta los logros de su trabajo anterior con Lave, pero señala que conceptos como los de comunidad de practica e identidad "no se les dio la atención necesaria y se quedaron en gran parte sin analizar". Por lo tanto Wenger se separa del enfoque trabajado con Lave de la participación periférica legítima para dar mayor importancia a los conceptos ya mencionados.

#### 2.2.2.1 Comunidad de práctica

Para Wenger las comunidades de práctica están en todas partes y, porque son tan informales y omnipresentes, es rara vez que nos fijamos en ellas. El centrarse en ellas nos permite profundizar, ampliar y repensar nuestras instituciones. Wenger define una comunidad de práctica como un tipo especial de comunidad donde se asocia la práctica y la comunidad por medio de tres dimensiones que hacen que la práctica sea fuente de conexión de la comunidad.

La primera dimensión es el compromiso mutuo y frente a él Wenger habla de la habilidad de la comunidad de posibilitar el compromiso, de involucrar a los individuos en lo que tiene importancia, ya que la comunidad existe porque hay personas que participan en actividades cuyo significado es de valor para ellos. Esto es lo que define a este tipo de comunidad; no es un simple conjunto de personas definido por alguna característica, no es equivalente de grupo, equipo o red.

Para que exista un verdadero compromiso, la comunidad debe fomentar la diversidad de los individuos, permitiendo la posibilidad de una identidad propia que se define justamente en el compromiso hacía la práctica. Esta diversidad también implica unas relaciones interrelaciónales entre los individuos, lo que hace que se presenten situaciones emocionales positivas y negativas; esto hace entender que una comunidad de práctica no es un lugar de armonía total pero sí un lugar donde se privilegia la participación de sus integrantes y por lo tanto debe ser parcial al momento de negociar sus significados.

La segunda es una empresa conjunta, expresión que hace referencia a un objetivo que tiene la comunidad por medio del compromiso mutuo pero teniendo en cuenta la diversidad de la que se habló anteriormente; por ello este objetivo debe ser negociado por los individuos que pertenecen a la comunidad. Ahora, una empresa conjunta conlleva a una responsabilidad conjunta; es decir, aunque haya diferentes niveles de responsabilidad en la empresa, cada individuo tiene que cumplir tal responsabilidad, y ésta puede variar en cualquier momento según avanza la práctica y se modifican las identidades.

La ultima conexión de una comunidad de práctica es un repertorio mutuo y es una consecuencia obvia de las anteriores debido a que la comunidad en la consecución de su empresa, maneja sus propios significados, los crea, y modifica los recursos que utiliza en la práctica; estos elementos pueden ser lingüísticos, gestuales, cosificaciones, actividades, etc. Según Wenger(1998), el repertorio es “el conjunto de recursos compartidos de una comunidad para destacar su carácter ensayado y su disponibilidad para el posterior compromiso en la práctica”. Cabe señalar que aunque el repertorio es compartido, no significa que se impongan significados a estos elementos, ya que este significado puede irse modificando en nuevas situaciones donde se involucren los elementos en la práctica.

Estas dimensiones de las comunidades de práctica hacen que los novatos en la comunidad puedan tener acceso a la práctica involucrándose por medio de una experiencia personal en la participación. “Cumpliendo estas condiciones, las comunidades de práctica son un lugar favorecido para la adquisición de conocimiento”.

Wenger explica que el aprendizaje se lleva a cabo a través de la participación en las actividades y de las interacciones que se producen durante estas participaciones, logrando que los individuos con sus identidades propias se comprometan con la cultura e historia de la comunidad. Éste aprendizaje influye a la estructura social, de tal manera, que la transforma así como a los individuos que interactúan dentro de ella. "es el medio para la evolución de las prácticas y la inclusión de los recién llegados a la vez que (y a través del mismo proceso) es el medio para el desarrollo y la transformación de las identidades".

Wenger explora la intersección de componentes del aprendizaje: la comunidad, la práctica, el significado y la identidad; y éstos proporcionan un marco conceptual para analizar el aprendizaje como participación social.

El trabajo se basa en cuatro premisas:

1. Un aspecto esencial del aprendizaje es que las personas son seres sociales.

2. El conocimiento hace referencia a la competencia con respecto al valor que se le da a unas empresas.

3. El saber es cuestión de la participación activa en el mundo.

4. El significado es al final, lo que produce el aprendizaje.

Hay que resaltar que Wenger observa que el aprendizaje es inevitable, lo que significa que aunque nuestros estudiantes aparentemente no quieran aprender, no es así; lo que ocurre es que no aprenden lo que nosotros queremos que aprendan. Por otro lado se observa que el punto de atención de esta teoría es la participación activa en las actividades de la comunidad y las relaciones con las identidades de estas comunidades, lo cual concibe el aprendizaje como participación social.

Sobre los componentes necesarios para la participación social, Wenger los define así:

“1) significado: una manera de hablar de nuestra capacidad (cambiante) -en el plano individual y colectivo- de experimentar nuestra vida y el mundo como algo significativo;

2) práctica: una manera de hablar de los recursos históricos y sociales, los marcos de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo en la acción;

3) comunidad: una manera de hablar de las configuraciones sociales donde la persecución de nuestras empresas se define como valiosa y nuestra participación es reconocible como competencia;

4) identidad: una manera de hablar del cambio que produce el aprendizaje en quiénes somos y de cómo crea historias personales de devenir en el contexto de nuestras comunidades.”

La conexión de estos elementos de acuerdo con Wenger se muestran en la figura 3.

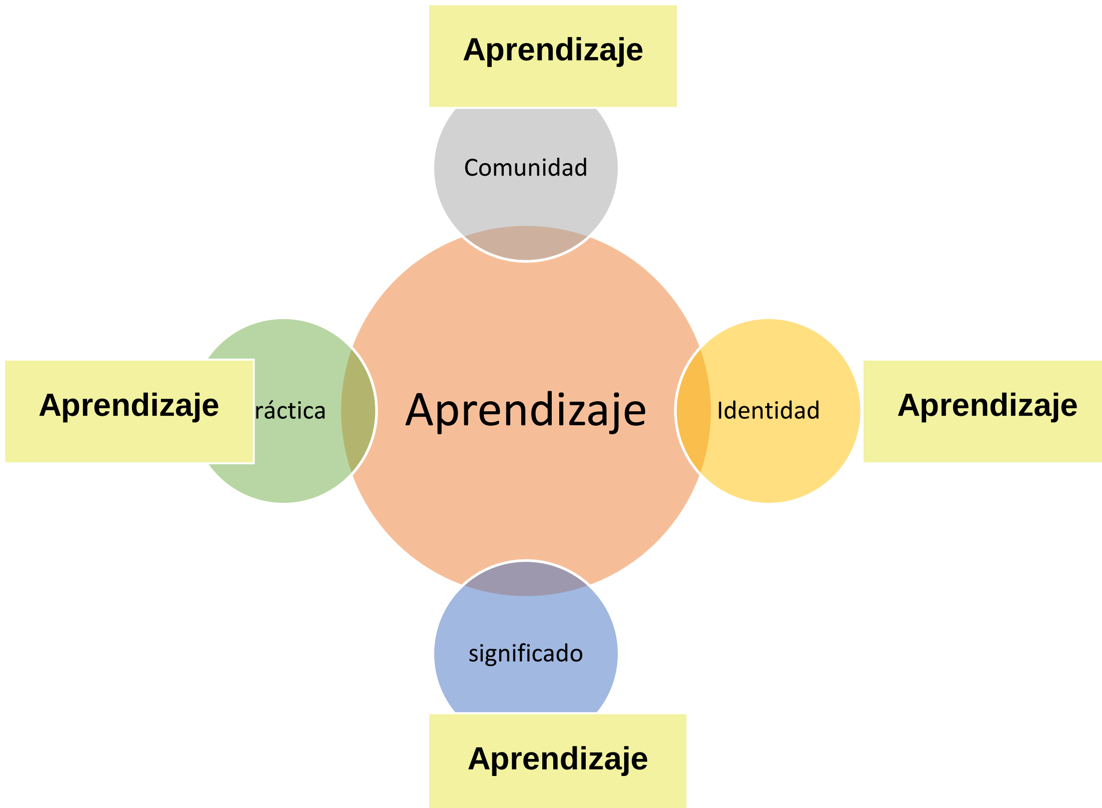



Figura 3. Componentes de una teoría social del aprendizaje

Según Wenger estos elementos están "profundamente interconectados y mutuamente definidos ", afirma además que cualquiera de los elementos externos podría ser al centro y el aprendizaje podría ser un elemento externo y aún así el gráfico mantendría sentido.

#### 2.2.2.2. Significado

Según Wenger el continuo proceso de interacción con el mundo hace que en las diferentes experiencias del individuo haya una significancia de los conceptos que él maneja y éstas hacen que se guíen las acciones a tomar, dependiendo de los diferentes objetivos que el individuo tenga.

En el ámbito escolar esta constante interacción de los estudiantes con su entorno, con sus compañeros, y con su propia reflexión, hace que sus significados sean continuamente cambiados y reestructurados. Esta reestructuración, que se da al momento de querer decidir qué debe hacer en cada situación, hace que el construir un significado apropiado sea por medio de una continua negociación de éste.

Por lo tanto el autor dice que lo que él llama negociación de significados se refiere a ese encontrar el sentido apropiado a una situación para poder decidir cuál es la acción necesaria para cumplir su objetivo. Es un proceso constante que tiene lugar en cada compromiso con la práctica.

Como la práctica es nueva en cada situación experiencial, se dice que es singular y por ello el proceso de negociación del significado hace que se “amplíen, desvíen, ignoren, reinterpreten, modifiquen o confirmen la historia del significado anterior”. El nivel de fuerza en el que se produce esta negociación tiene que ver con la motivación del participante en la actividad.

Según el autor, la negociación tiene ciertas características como son: es un proceso activo, es maleable, tiene la capacidad de influenciar y ser influido, en esta influyen muchos factores y puede llegar a ser parcial o efímero dependiendo de la situación.

Además, el proceso de negociación lleva consigo dos procesos relacionados que él llama participación y cosificación, los cuales presentan una dualidad de vital importancia para la negociación del significado.

Para el autor participación es "tomar parte en una cosa, compartir", es decir, es la experiencia de vivir en un mundo y al estar involucrado en el mundo. Por necesidad hay una afiliación a algún tipo de comunidad la cual tiene diferentes objetivos en los cuales el sujeto se involucra y para los cuales tiene que trabajar en forma mutua con otros miembros de la comunidad.

Wenger aclara que participar no quiere decir simplemente colaborar, ya que hay muchas más relaciones que conforman el papel del individuo en la comunidad y el papel de la comunidad en el individuo. Además, participar es mucho más que la práctica en sí misma ya que se toma en cuenta la experiencia de los sujetos que se encuentran involucrados en dicha comunidad.

Respecto a la cosificación Wenger dice que es el proceso de convertir en cosa la idea experiencial de forma simbólica para el individuo, es decir, convierte en algo material su significado, transformando el significado en algo objetivo pero que claramente tiene una carga valorativa personal. Es necesario ver que esta materialización no proporciona el significado ontológico, pero las continuas negociaciones interactuadas por los sujetos de la comunidad hacen que tome un valor determinado para tal comunidad convirtiéndola en objeto de identidad. Esta cosificación por lo tanto se convierte más tarde en una forma del individuo de argumentar su significado y ponerlo a consideración de los otros miembros de la comunidad de práctica.

El autor aclara que la cosificación se refiere tanto al proceso como al objeto material producido y que los usuarios del producto no tienen que ser los productores, por lo tanto puede que el objeto haya sido desarrollado por fuera de la comunidad de práctica. Por último dice que la cosificación no es el reflejo de una práctica, sino que son los reflejos en la negociación de significados.

Aunque por lo expresado la cosificación brinda muchas ventajas, también el autor muestra el por qué hay que tener cuidado con el proceso ya que puede terminar perjudicando la negociación de significados. Primero se debe tener en cuenta que la cosificación puede terminar pareciendo una aglomeración excesiva de la realidad de lo que se quiere expresar, lo que puede llegar a que un individuo de la comunidad de práctica asuma la cosa como el significado, haciendo que se cierre a la negociación de nuevos significados posibles. Pero, si el sujeto toma la cosa que da la comunidad y negocia su significado, aportando o modificándolo, hará que el individuo se convierta en un sujeto de la comunidad de práctica.

Por ello se habla de una dualidad entre la participación y la cosificación ya que la una no sustituye a la otra pero sí deben producirse mutuamente. Por ejemplo, la participación repara las posibles limitaciones y complicaciones que pueda crear la cosificación eliminando la rigidez de los objetos que fueron consolidados; mientras que la cosificación le quita esa informalidad a los significados que se van negociando.

#### 2.2.2.3. Identidad

Como se mencionó anteriormente, el concepto de identidad es de vital importancia para Wenger y su teoría social de aprendizaje. Cuando se habla de identidad se observa cómo Wenger no se centra en la persona como un yo sino como un individuo que hace parte de una comunidad, centraliza a la persona en función de los otros; es éste el punto de apoyo entre lo social y lo individual. El autor afirma "la práctica supone la negociación de maneras de llegar a ser una persona en contexto" y confirma la importancia de las identidades diciendo "la formación de una comunidad de práctica también es la negociación de identidades"

Para llegar a construir una identidad, hay una necesidad de negociar los significados en la experiencia, en la práctica de la afiliación a múltiples comunidades, por ello lo que más importa es la interacción; Wenger rechaza el supuesto del conflicto que existe entre lo individual y lo colectivo con estas palabras, "una identidad es una superposición de capas de eventos de participación y de cosificación por las que nuestra experiencia y su interpretación social se conforman mutuamente".

Como el aprendizaje está definido como la capacidad de negociar nuevos significados, esto hace que las personas negocien también su identidad continuamente, que existan nuevas formas de afiliación, multiafiliación y que hayan diferentes roles dentro de las comunidades. Sobre la importancia de la identidad en el aprendizaje, Wenger dice “lo que convierte la información en conocimiento -lo que la hace potenciadora- es la manera en que se puede integrar dentro de una identidad de participación. Cuando una información no conduce a una identidad de participación, se queda en algo ajeno, literal, fragmentado, innegociable. No es sólo que esté desconectada de otras informaciones pertinentes, sino que no se traduce en una manera de ser en el mundo que tenga la coherencia suficiente para ser llevada a la práctica”

Por otro lado, Wenger observa que una identidad debe incorporar un pasado y un futuro como trayectoria y las comunidades deben permitir esto para que los individuos puedan experimentar una trayectoria personal.

#### 2.2.2.4. Aprendizaje

Por lo visto anteriormente el aprendizaje es una experiencia de identidad, luego fuera de ser un proceso, necesita un contexto donde se pueda definir la identidad. Esto supone la necesidad de ofrecer a los estudiantes formas diferentes de participación para que la identidad encuentre nuevos espacios para negociar los significados.

Desde una perspectiva social, el aprendizaje no se limita a situaciones concretas donde esté explicito el deseo de aprender, el aprendizaje va enfocado en la persona que queremos convertirnos (identidad) y esta negociación de significados se produce en cualquier sitio. Por otro lado, aunque Wenger propone que el aprendizaje se desarrolla mejor cuando hay interacción de los individuos, no significa que no pueda efectuarse de otra forma, Hay ocasiones que el individuo en soledad vivencia experiencias que hacen que transforme su identidad lo que produce que haya un aprendizaje significativo para la persona.

Respecto al aprendizaje, Wenger da unos principios basados en su teoría:

1. Aprender es inherente a la naturaleza humana.
2. Aprender es por encima de todo, la capacidad de negociar nuevos significados.
3. Aprender crea estructuras emergentes.
4. El aprender es fundamentalmente de la experiencia y social.
5. El aprendizaje transforma nuestras identidades.
6. Aprender constituye estructuras de participación
7. El aprendizaje significa tratar con límites
8. Aprender es una cuestión de poder y energía social
9. Aprender es una cuestión de compromiso
10. Aprender es una cuestión de imaginación
11. Aprender es una cuestión de alineación
12. Aprender supone una interacción entre lo local y lo global
13. El aprendizaje no se puede diseñar.

Del primer y segundo principio se explicó al inicio cuando se habló de las premisas del trabajo de Wenger, así como en el aparte de significado.

El tercer principio nos indica que diferentes estructuras emergen al momento de querer acumular experiencia por medio de la renegociación de los significados. Estas estructuras pueden ser mentales, así como sociales de acuerdo a las diferentes comunidades y afiliaciones de los individuos.

El cuarto principio es la base de una teoría social del aprendizaje, así como el quinto trata del aprendizaje de forma individual pero dentro de una comunidad; luego el sexto es una fusión y consecuencia de los dos anteriores que genera la participación del individuo en la sociedad.

El séptimo nos expone algo acerca de los límites que se crean con la participación, sea por las multiafiliaciones que tengamos, que no pueden ser tantas como se quieran por nuestra propia condición humana y los límites propios que se generan dentro de las comunidades debido al nivel de participación que tenga cada individuo. Esto nos lleva al octavo principio sobre los poderes que surgen y que son definidos por los mismos límites, haciendo que existan relaciones de jerarquía entre los más experimentados y los aún no tan experimentados. Estas relaciones de poder no son impuestas sino que también son negociadas por los participantes, quienes son los que entienden el valor de la experiencia.

El noveno, sobre el compromiso, se ha mostrado en varios momentos en especial sobre la definición de comunidad de práctica.

En el décimo, cuando se habla del papel de la imaginación en el aprendizaje es a causa de que, si bien el proceso de negociación de significado se efectúa en la interacción, debe haber una operación mental que haga reflexionar al individuo y sea posible explorar nuevas posibilidades para esos significados sin que sea necesario limitarlo a un solo contexto; por ello la habilidad de llevar significados a otras situaciones depende de la imaginación del individuo en entrelazar sus experiencias.

El undécimo principio formula que el aprendizaje obedece a la destreza de alinearse y esto se refiere a como el individuo, aunque tenga diferentes intereses al vincularse a una comunidad de práctica, reconoce que la comunidad tiene reglas establecidas, sean de significados o de cómo efectuar la práctica, de cómo afiliarse a la comunidad, etc. Teniendo esto en cuenta, el poder alinearse hace que el aprendizaje se efectué de forma efectiva, ya que si no es así, no hay forma de conexión entre el individuo y la colectividad.

Respecto a la suposición de lo local y lo global en el aprendizaje es porque aunque la práctica y los significados se elaboran de forma local, éstos siempre dependen de una forma global. Aquí hay una conexión clara entre los principios anteriores de compromiso, la imaginación y la alineación para que lo local y global interactúen constantemente.

El último principio muestra la posición que tiene Wenger ante la enseñanza, ya que al decir que el aprendizaje no se puede diseñar, él está diciendo que el aprendizaje ocurre con o sin diseño y el diseño puede terminar por frustrar el proceso en vez de mejorarlo. Por ello Wenger dice que lo único que se puede hacer es facilitar el proceso siempre y cuando haya unas condiciones óptimas para hacerlo. Confirma esta parte afirmando “la práctica misma no se presta al diseño”.

El último principio parece mostrar un problema para el sistema educativo y en especial para los docentes quienes son en realidad los que se “entrometen” en un proceso que es inevitable. El autor corrobora explicando “además de que el enseñar no es necesario para el aprendizaje, la enseñanza no es particularmente útil para aprender”

Aunque esto parece preocupante, luego se aclara cuando dice "¿Cómo podemos minimizar la enseñanza de modo que se maximice el aprendizaje?

Así se argumenta que, dado que el corolario de la "enseñanza no es una condición previa para el aprendizaje" no es, la enseñanza no resulta en aprendizaje, mostrando que el papel del docente es no fijarse tanto en la enseñanza y sí en el aprendizaje a tal punto que la enseñanza sea “invisible” para el estudiante y además el papel del docente sea oculto. Esto se da cuando el maestro toma el papel de guía; lo que puede hacer el maestro es direccionar el aprendizaje de forma que se pueda acelerar el proceso.

## 3. METODOLOGÍA

La metodología empleada en esta propuesta está situada en la presentación de una encuesta inicial orientada a conocer la motivación de los estudiantes hacia la matemática y la clase de matemáticas, una posterior unidad didáctica cuyo objetivo es que los estudiantes desarrollen el concepto de razón y proporción, luego una encuesta final para evaluar las mejoras motivacionales y conceptuales de los estudiantes en la clase de matemáticas, y por último el desarrollo de un problema retador por parte de los estudiantes y el análisis de las respuestas frente al mismo.

### 3.1. Encuestas

Dado que uno de los motivos para trabajar problemas contextualizados en el aula es el que los estudiantes hallen la utilidad de la matemática y se motiven más a involucrarse en su proceso para lograr un real aprendizaje significativo, se quiere analizar si en realidad esto se logra luego de implementar la secuencia didáctica que se propone. Por lo tanto, se hará una encuesta inicial sobre las motivaciones y sentimientos que tienen los estudiantes hacia la matemática y posteriormente una encuesta final luego de trabajar la secuencia didáctica como lo sugiere la educación matemática realista.

Para poder analizar las motivaciones que tienen los estudiantes en el aula de matemáticas se han consultado varios trabajos que hablan acerca de la motivación en la educación matemática. Entre ellos se tiene Font (1994) quien trabajó el patrón motivacional de alumnos de 12 años, y afirma, “el objetivo del constructivismo es la modificación de los esquemas de conocimiento del alumno y el primer paso para conseguir que el alumno realice un aprendizaje significativo consiste en que el nuevo contenido rompa el equilibrio inicial de sus esquemas… pero una de las razones para que esto no ocurra, es que el alumno no esté motivado para realizar la actividad propuesta, con lo que puede pasar que ni siquiera se produzca la situación de desequilibrio porque la tarea que le proponemos le resulta ajena”. Así Font muestra la importancia, para que se pueda producir un aprendizaje, de una motivación en la actividad que va a ejecutar el estudiante. Posteriormente el autor ratifica diciendo “El constructivismo de acuerdo con Ausubel, considera que una de las condiciones indispensables para que sea posible el aprendizaje significativo es que el alumno manifieste una disposición para aprender el nuevo contenido”. De allí se supone, para los efectos de la presente investigación, que la motivación es uno de los factores que inducen al alumno a adoptar una actitud óptima para empezar su proceso de aprendizaje.

Respecto a la definición de motivación, en el diccionario enciclopédico Larousse, se define como la acción y efecto de dar motivos, siendo motivo la causa que mueve a actuar de cierta manera. En Farias y Pérez (2010) se encuentran otras definiciones como la de Santrock (2001) "conjunto de razones por las que las personas se comportan de la forma en que lo hacen", esclareciendo adicionalmente que dicho comportamiento se caracteriza por ser "vigoroso, dirigido y sostenido". También se encuentran la definición de Hellriegel (2004) para quien la motivación es un conjunto de "fuerzas que actúan sobre una persona o en su interior y provocan que se comporte de una forma específica, encaminada hacia una meta" y la de Romero (1985) “la motivación se refiere, en general, a estados internos que energizan y dirigen la conducta hacia metas especificas”. Además, la importancia de la motivación en el aula de matemáticas se recalca en el círculo vicioso del que habla Font cuando afirma que “falta de motivación implica fracaso escolar, y a la vez, la sensación repetida de fracaso escolar lleva a una falta de motivación”.

Por otro lado Vázquez (2013) habla de motivación como “uno de los factores que llevan al aprendizaje” y cita a Passey & Rogers (2004) quienes distinguen ocho dimensiones del término, entre ellos el del “reconocimiento del valor de uso”, donde se muestra la importancia de percibir las ventajas de la matemática en su uso cotidiano. Lo mismo ocurre en uno de los ítems que encuentra Font (1994) para ayudar a la motivación en el aula de matemáticas; para él se tiene el “descubrir las aplicaciones de la matemática en la realidad cotidiana”. Farias y Pérez (2010) sostienen que entre los elementos determinantes de la motivación de un estudiante se puede encontrar la percepción del valor de la actividad, el “¿por qué hacerla?, es su juicio sobre la utilidad para sus objetivos, teniendo en cuenta que un alumno sin objetivos ya sean escolares o sociales no puede tener motivación.” Es común que el estudiante no encuentre el por qué realiza una actividad si no está interesado en estudiar matemáticas, ya que en la clase se suele trabajar abstractamente el tema, lo que hace que para él no tenga sentido el involucrarse en tales actividades.

Hay que resaltar que hay diferentes tipos de motivación y que la que más debe primar en el aula es la motivación intrínseca, que Farias y Pérez (2010) definen como “aquella que ocurre cuando se atrapa la atención del estudiante, bien sea porque el tema es interesante o porque las actividades que se desarrollan atraen la atención de quien aprende. Con esta motivación el alumno se siente a gusto, cómodo con aquello que el realiza.” Respecto a la importancia de esta motivación, Dweck y Elliot (1983) dicen que: "el alumno puede estar incrementando sus conocimientos o sus destrezas, pero aquello que determina su actividad, no es tanto el interés por incrementar su competencia cuanto la propia actividad en la que se siente a gusto, y cuyo fin está básicamente en sí misma."

En Vázquez (2013) siguiendo el estudio de Dweck (1986), se mostró que el proceso motivacional media en el manejo y aplicación por parte de los alumnos de sus habilidades y conocimientos, además en la adquisición de otros nuevos. Asimismo, según este autor, los patrones motivacionales influyen, en sentido positivo o negativo, en el rendimiento cognitivo de los alumnos, aun en el caso de que sus habilidades no difieran significativamente.

Ya teniendo claro lo que se pretende con motivar a los estudiantes con las actividades que se propondrán, en los anexos se muestran las encuestas que se implementaron para evaluar este aspecto. La primera encuesta que se muestra en el Anexo A, se apoya en la escala de Auzmendi (1992) que muestra Font (1994) y la de Gómez (2000) en las preguntas abiertas. La segunda encuesta (Anexo B), que es la que se presentó al finalizar la secuencia didáctica, se basó en Vázquez (2013).

## 3.2 Secuencia didáctica

### 3.2.1. Actividad 1 "De-forma visual"

El objetivo de la actividad es reconocer el significado intuitivo que los estudiantes tienen de proporción y razón, además el evaluar las estrategias que los estudiantes utilizan para resolver los problemas, esto con la finalidad, al concluir la secuencia didáctica, de analizar el desempeño de los estudiantes respecto a la construcción del significado de proporción así como el enriquecimiento de heurísticas en el trabajo de clase.

Esta actividad está enfocada a la visualización, ya que es en la que los estudiantes, intuitivamente, han desarrollado la proporcionalidad de objetos al momento de utilizar el sentido de la vista. Esto se lleva a cabo debido a que los seres humanos (por no decir los seres vivientes que tienen vista) ven en perspectiva, es decir, no tienen clara la dimensión de los objetos, y éstos cambian de tamaño en sus cerebros de acuerdo a la distancia a la que los esté observando. Por ello la visualización es vital para comprender el significado de proporción, ya que ha sido desarrollado durante los años por los estudiantes. Además, constituye una forma en que los objetos resultan más manipulables, esto cuando se debe medir y deducir cuantas veces cabe una medida de longitud en otra, lo que hace que ellos se aproximen más a la construcción del significado.

El acercamiento al concepto de proporción entonces se hará casi que en una forma netamente geométrica (como el planteado por Euclides), buscando que las soluciones planteadas por los estudiantes tengan no sólo la forma que se vislumbra por parte del docente, sino que sean creativos a la hora de formular y sustentar sus estrategias.

El tiempo propuesto para la actividad es de 2 horas clase y una tarea para la casa durante el intermedio de la actividad. La actividad se desarrollará en grupos de máximo tres y mínimo dos estudiantes, buscando una heterogeneidad en sus conocimientos matemáticos. La tarea es individual.

El primer problema pide pensar en la ampliación de una imagen, donde el objetivo es observar el cómo lo harán, o sea, qué tipo de estructura utilizarán. Es muy probable que los estudiantes utilicen una estructura aditiva para solucionarlo, en vez de una multiplicativa.

El segundo es un ejercicio, en teoría fácil, de comparación de razones y el poder deducir la altura de los otros jugadores con base en una razón dada; para ello una forma es que los estudiantes analizan la relación que existe entre la altura verdadera del jugador y la que aparece en la fotografía, lo que hará que puedan llegar a concluir que tal relación le pueda ser útil para lograr su objetivo.

En el tercero aparece por primera vez la palabra proporción, la cual no será explicada y se intentará analizar qué entienden los estudiantes por proporción. Es similar al ejercicio anterior, aunque aparte se le pide al estudiante que analice cuánto puede medir el buzo, ya que no se da tal información; lo mismo se hace con el peso del buzo. Al finalizar se comparará con la longitud y peso real de la ballena jorobada que es: longitud de 12m a 16 m y un peso aproximado de 36.000kg.

El cuarto punto busca que los estudiantes hallen la relación entre el tamaño de la huella del gigante y la del estudiante, para que luego hallen también la relación entre el pulgar y la estatura de las personas y así poder encontrar la estatura pedida. Es una actividad con más dinámica ya que los estudiantes tendrán que analizar si estas relaciones se cumplen en sus cuerpos y de allí deducir una posible altura del gigante.

El quinto punto tiene como objeto analizar la congruencia de la figura dada, en la cual el estudiante no sólo debe tener en cuenta la longitud de los lados de la figura sino que tiene que analizar la necesidad de permanencia de los ángulos dados. Aunque la actividad no es de congruencia de figuras, si es necesario que el estudiante comprenda que cuando una figura es ampliada o reducida no sólo depende del tamaño de la figura sino que hay otros aspectos que hace que la figura siga siendo "la misma" pero con diferente tamaño.

El sexto punto es parecido en fondo al cuarto punto, pero en esta ocasión se hallará la altura de un hotel conocido, el Burj Al Arab, por lo tanto el cálculo realizado por los estudiantes debe estar cercano a la altura real del edificio (321 m) y al igual que el cuarto, los estudiantes al intentar resolver el problema pueden llegar a deducir y utilizar la propiedad que:

$$x : w = y : z \text{ y } y : z = u : v \text{ entonces } x : w = u : v$$

El séptimo punto se parece al quinto punto, pero aquí hay figuras congruentes y otras que parecen serlo y no lo son. El estudiante agrupará según su criterio y después sustentará cuales fueron los criterios utilizados y el grupo completo juzgará la validez de la agrupación.

El octavo punto es una ilusión óptica donde el estudiante deberá analizar el motivo por el que ocurre esto y qué tienen que ver las líneas que muestran la perspectiva en la imagen.

El noveno punto es un ejercicio numérico donde el estudiante deberá analizar lo que ha trabajado en la actividad para poder analizar cuál de los portarretratos es el más educado y la razón de ello; en las opciones dadas no se encuentra la respuesta correcta como es pedida en el problema, así que el estudiante estará en necesidad de argumentar el por qué no recurre a ninguna de las opciones suministradas.

El décimo punto es la tarea que se propondrá para la casa para que los estudiantes practiquen lo que han visto de escala en asignaturas y cursos pasados y vean la utilidad de ello. Aquí los estudiantes trabajarán con la razón que quieran y que vean que les es más cómoda para realizar la tarea.

Se debe recordar que una vez realizada la actividad por los grupos de tres estudiantes, será socializada por todo el grupo para sacar conclusiones y encontrar cuál es la respuesta correcta y la mejor estrategia.

La actividad se localiza en el Anexo C.

### 3.2.2 Actividad 2 “Convertidor de divisas”

La actividad tiene como objetivo el construir el concepto de razón y el poder comparar razones, para ello se creará un ambiente de intercambio de monedas de diferentes países, donde cada estudiante funcionará como un país diferente.

Anteriormente a la actividad, los estudiantes diseñarán el cómo se llamará su moneda y como lucirán sus billetes y monedas, siguiendo las especificaciones hechas acerca de las denominaciones. Cada estudiante creará su propia moneda y luego diseñará 20 monedas donde tenga las siguientes denominaciones: monedas de 10, 20 y 50 centavos y billetes de 1, 5 y 10 unidades.

Luego en clase, en grupos de máximo cuatro estudiantes situados en mesa redonda, se sorteará de la lista de razones de cambio, cuál será la tasa de cambio que habrá entre las monedas de un estudiante y su compañero de la derecha, luego, el segundo lo hará con el cuarto y el tercero con el primero. El objetivo es que cada uno de los integrantes del grupo, tenga por lo menos una moneda y un billete de cada uno de sus compañeros haciendo la operación de cambio correspondiente.

Luego el grupo responderá las siguientes preguntas:

¿Cuál es la moneda de mayor valor y cuál la de menor valor?

¿Cómo realizaron los cambios?

¿Hubo problemas en hacer algún cambio? Si así fue, especifique cuál fue la situación donde ocurrió.

En el tablero se pondrá la lista de las tasas de cambio de cada uno de los participantes de los diferentes grupos, mientras el docente pasará por cada grupo creando una nueva razón entre uno de los estudiantes de cada grupo y el docente.

A continuación, cada grupo deberá ordenar las monedas de todos los estudiantes del curso utilizando las tasas que se formaron con el docente y luego explicar el cómo lo hicieron.

Para finalizar, en mesa redonda, todo el curso hablará sobre su experiencia en la actividad y se plantearán unas preguntas guía para procurar llegar a una conclusión general.

<u>Preguntas para la mesa redonda</u>

¿Cómo hicieron para efectuar los cambios?

¿Qué procedimientos se utilizaron?

¿Dónde encontraron dificultades?

¿Cómo las lograron resolver?

¿Encontraron una forma más fácil de hacer las conversiones?

¿Lograron encontrar una propiedad que les ayudara a efectuar la operación?

¿Qué es una razón?

Entre dos monedas diferentes ¿hay diferentes razones?

Los participantes deberán llevar un registro individual de lo que han gastado, las tasas de cambio y cuánto han cambiado, esto para poder evaluar su participación en la actividad, o que simplemente cambien los billetes sin hacer la transacción. Este registro se entregará al finalizar la actividad, junto con las monedas y billetes que cada estudiante cambió y el dinero que le sobró.

El tiempo esperado para la actividad completa es de dos horas.

<u>Lista de razones de cambio*</u>

1. 50 centavos suyos son 1,2 unidades de su compañero.
2. 3 unidades suyas son 2,4 unidades de su compañero.
3. 80 centavos suyos son 90 centavos de su compañero.
4. 1,7 unidades de su compañero son 1,3 unidades suyas.
5. 2,2 unidades suyas son 1,1 unidades de su compañero.
6. 20 centavos suyos son 60 centavos de su compañero.

*Solo hay 6 razones, esto para procurar evitar que no haya unas tasas muy grandes entre monedas; como hay más de seis estudiantes, habrá razones que se repetirán. El sorteo se hará con un dado y la asignación de un número a la lista de tasas.

Las propiedades de las razones que se verían involucradas en la actividad y que se espera los estudiantes puedan concluir, son:

VIII. Si $x < y, \quad entonces \quad x : z < y : z \quad pero \quad z : x > z : y$

X. Si $x : z < y : z \quad entonces \quad x < y. \; Pero \quad si \quad z : x < z : y \quad entonces \quad x > y$

XIII. Si $x : y = w : z \quad \text{y} \quad w : z > u : v \quad entonces \quad x : y > u : v$

XIV. Si $x : y = w : z \quad \text{y} \quad x > w \quad entonces \quad y > z$

Las propiedades siguen el numeral de las proposiciones que tiene Euclides en su Libro V de *Los elementos.*

La actividad está localizada en el Anexo D.

### 3.2.3. Actividad 3 "Una sorpresa para mamá"

El objetivo de esta actividad es trabajar con razones y proporciones de diferentes magnitudes.

En una primera parte se pide encontrar cuántos ingredientes se deben comprar para ocho personas, conociendo cuántos son necesarios para cuatro; por lo tanto el estudiante se enfrentará a una situación entre dos razones proporcionales y la necesidad de hallar uno de los valores de dicha relación. Como esta relación es simple, a continuación se modifica el ejercicio para que sean siete las personas que van a comer.

En una segunda parte, se dan las cantidades y precios de cuatro productos y de cada producto hay tres opciones de las cuales dos son proporcionales y una no; luego el estudiante en su búsqueda del producto más económico, encontrará razones proporcionales y otras que no lo son. Adicionalmente hay otro problema similar al anterior pero que no es de comparar razones, sino de encontrar uno de los términos de una razón, conociendo otra razón proporcional a la dada.

En la tercera parte, hay otro ejercicio donde los estudiantes deben encontrar el valor de una de las magnitudes en un problema con tres razones, cuya solución se hace con lo que se llama usualmente “regla de tres compuesta”; esta pregunta difiere de las otras ya que los estudiantes no deben pensar únicamente en dos razones, lo que hace que se muestre un nivel de complejidad mayor a lo trabajado en la actividad y termine por enriquecer aún más su concepto de proporcionalidad. Para este punto se necesita un documento extra que se les presentará a los estudiantes para que calculen las calorías de la porción de postre (*Tabla de hidratos de carbono*, documento localizado en www.diabeteschile.cl/nuevo/descargas/tabla_hidratos_de_carbono.pdf).

Al finalizar la actividad, se hará una socialización sobre los procedimientos realizados por los estudiantes para darle solución a los problemas y se buscará llegar a un acercamiento al concepto de proporcionalidad.

La actividad es propuesta para grupos de tres estudiantes y para un tiempo de dos horas clase.

Respecto a las propiedades a las cuales pueden llegar los estudiantes durante la resolución de la actividad se tiene:

IV. Si $a : b = c : d \quad entonces \quad pa : qb = pc : qd$

XI. Si $x : w = y : z \quad \text{y} \quad y : z = u : v \quad entonces \quad x : w = u : v$

XV. $x : y = nx : ny$

XVI. Si $x : y = w : z \quad entonces \quad x : w = y : z$

Conectado a las propiedades que se procura encuentren los educandos, se puede observar que se seguirán manejando las propiedades vistas en la actividad anterior al momento de comparar razones en la segunda pregunta.

Como para la primera pregunta se espera que sea fácil la respuesta, ya que consta de duplicar la cantidad de ingredientes, se espera que se pueda vislumbrar el uso de la propiedad XV (numeración propuesta en el libro Los Elementos). Para la segunda pregunta se puede solucionar de diferentes formas; entre las posibles maneras una sería la de encontrar el valor unitario, es decir, encontrar la cantidad para una persona y luego encontrar la relación correspondiente para las siete personas. Para este objetivo, es posible que los estudiantes utilicen nuevamente la propiedad XV, dándose cuenta que es posible que el factor se pueda ver como la división de los miembros de la razón; luego pueden intuir la propiedad XI y llegar a la razón proporcional correspondiente. Es claro que los estudiantes no utilizan las propiedades conociéndolas, pero al momento de socializar se mostrará qué ha ocurrido con las razones, para poder enunciar finalmente estas propiedades.

En la siguiente parte del segundo problema (el encontrar el producto más económico), los estudiantes seguirán comparando razones para que sean proporcionales, pero con diferentes unidades de medida. Es posible que al momento de formar las nuevas razones, en la socialización de los resultados obtenidos, los estudiantes observen que los diferentes grupos plantearon “diferentes razones” para comparar y llegar a las razones proporcionales, pero que el procedimiento en general es el mismo y se podrá mostrar la propiedad XVI. Respecto a la conversión de las unidades, teniendo diferentes razones, los estudiantes podrán utilizar diferentes valores como factor en los componentes de la razón y observar la equivalencia de las razones encontradas, lo cual ayudará a formalizar la propiedad IV.

En la resolución de las siguientes preguntas es posible que los estudiantes hayan intuido de las anteriores respuestas hechas por ellos, algunas propiedades, utilizándolas para resolver los nuevos problemas y que las hayan formalizado antes de la socialización. Un ejemplo será en las preguntas tres y cuatro, donde la propiedad XI es muy útil para llegar a las relaciones que se les piden ya que son problemas que se desarrollan con la "regla de tres compuesta". Este tipo de problemas se seguirá utilizando en posteriores actividades para llegar a una mejor comprensión de este tema utilizando esta propiedad.

Nuevamente se recalca que se está suponiendo, entre las diversas estrategias que pueden utilizar los estudiantes, cuál puede ser utilizada y cómo se puede llegar a formalizar estas estrategias con las propiedades mencionadas.

### 3.2.4. Actividad 4. "Actividad para la casa"

Esta actividad tiene como objetivo el ver la proporcionalidad de forma lineal, es decir, el poder observar qué está ocurriendo con las magnitudes que se relacionan, analizándolo en una tabla y gráficamente encontrando la línea recta que formaría todas las relaciones posibles de estas magnitudes. También se buscará que los estudiantes analicen la forma de encontrar la constante de proporcionalidad, es decir la razón que guardan ambas magnitudes.

La actividad se realizará de forma individual como trabajo en la casa. El tiempo que se les dará a los estudiantes será de una semana, esto buscando que tengan el suficiente tiempo para examinar lo que hacen y que intenten resolver las inquietudes que se les presenten durante las clases.

En la primera parte de la actividad, se les pide hallar la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Para esto se les presenta una tabla parcial donde se les da la relación completa de dos de los datos que están en la tabla. Los estudiantes deben llenar los datos correspondientes y plantear una relación para un valor de un lado de un cuadrado que ellos quieran y que no esté en la tabla.

A continuación se les pide que sitúen los datos en una gráfica. Como tal vez ellos no lo hayan hecho en alguna ocasión o no lo manejen bien, se les muestran dos ejemplos de las dos relaciones que estaban en la tabla y el cómo se situaron en el plano.

Luego de que estén ya situados los puntos en la tabla, se les hacen unas preguntas que buscan que el estudiante logre vislumbrar que estos puntos forman una recta, así como el que puedan encontrar la razón entre estas magnitudes, sea en la tabla como en la gráfica.

Posteriormente hay dos situaciones propuestas en donde los estudiantes deberán hacer un análisis parecido al ejercicio anterior y cuyos objetivos son los mismos que se mostraron en la primera actividad. Uno de ellos está relacionado con la semejanza de los triángulos que se forman cuando se está relacionando la altura de un objeto y su sombra. Entre las preguntas se encuentra el que ellos analicen por qué se les pidió que lo hicieran en un determinado tiempo (es decir, a una hora fija) y que se den cuenta que los resultados serían diferentes a otra hora, luego el ángulo de elevación del sol influye en los resultados. La otra actividad les pide relacionar esta vez el diámetro de algunos objetos que tengan forma circular y el perímetro de las circunferencias con estos diámetros.

Finalizando, se les pide a los estudiantes que encuentren otra situación en donde ocurra lo que ha pasado en las anteriores (es decir, que haya una relación proporcional entre dos magnitudes) y que lo comprueben con la tabla y con la gráfica, Así mismo se les pide encontrar otra situación en donde no ocurra esto y nuevamente se les pide que lo comprueben con una tabla y un gráfico.

Al entregar la tarea se hará un debate sobre los resultados encontrados y se tratará de concluir sobre esta forma de representar la proporcionalidad directa. Se mirará si algún estudiante encontró también esta relación con la proporción inversa.

### 3.2.5. Actividad 5 “La ruta navideña de Boyacá”

La actividad tiene como objetivo el uso de proporciones para estimar algunas magnitudes que, aunque son aproximaciones, sirven de apoyo para hacer cálculos en la vida cotidiana, como en este caso el de velocidad promedio.

Formando grupos de tres estudiantes se les entregará a todos los grupos el mismo mapa de *sitios turísticos cercano a Villa Salomé,* el cual no tiene ningún tipo de escala.

La primera pregunta busca que los estudiantes creen su propia escala para el mapa y puedan hacer un cálculo utilizando la velocidad promedio para calcular el tiempo que necesitan para hacer la ruta.

En la segunda pregunta, dependiendo del tiempo transcurrido, los estudiantes deben hallar la velocidad promedio para saber si podrán realizar el viaje en el tiempo dado.

La tercera pregunta busca que, utilizando la velocidad promedio y la hora de llegada, los estudiantes puedan predecir el tiempo de salida para cumplir la cita.

El cuarto ejercicio propone un problema con varias razones proporcionales y adicionalmente una proporcionalidad inversa, que es uno de los temas que se trabajarán en la siguiente actividad.

El quinto ejercicio es un problema reto en el cual se debe evaluar el costo de una carrera conociendo las diferentes velocidades en diferentes trayectos, así como el tiempo de espera. Por otro lado se debe analizar las posibles ganancias que pueda tener un taxista. Luego tendrán un problema con varias proporciones al mismo tiempo.

El sexto problema busca que los estudiantes encuentren la velocidad promedio de diferentes trayectos y luego la velocidad promedio de toda la ruta. El último problema busca explorar la visión de los estudiantes sobre lo que se ha estado trabajando y se les pide que inventen un problema, no se da limitantes del tema, pero se espera que ellos inventen problemas donde se emplean razones y proporciones para buscar los resultados que se piden.

Durante la realización del taller, los estudiantes pueden pensar en las diferentes condiciones que pueden hacer que no se pueda estar absolutamente seguro de cuánto tiempo va a tomar, es decir, no hay una manera precisa de predecir la llegada o la cantidad de gasolina exacta que se gasta y que lo que se hará es hallar unas aproximaciones, que es lo que en ocasiones se utiliza en muchas situaciones de la vida cotidiana. Se podrían utilizar preguntas como éstas:

¿Será que éste cálculo conduce a una predicción exacta, o hay otros factores a tener en cuenta?

¿Podría mencionar algunas razones por las que no se puede estar seguro?

Al final de la actividad se iniciará un debate sobre cómo se utilizó la proporcionalidad para resolver el problema y qué nuevas situaciones aparecieron.

Respecto a las propiedades que se pueden involucrar en esta actividad, serán las mismas de la anterior actividad así como las siguientes:

XXII.

Si $x_1 : x_2 = y_1 : y_2, x_2 : x_3 = y_2 : y_3, ..., x_{n-1} : x_n = y_{n-1} : y_n,\ entonces\ \ x_1 : x_n = y_1 : y_n$

Esta propiedad puede emerger al momento de hacer la conversión entre kilómetros por hora y kilómetros por segundo, es decir, formar una nueva relación km/s. Luego se puede utilizar el mismo proceso para pasar la relación km/s a m/s.

XXIV. $a:b=c:d \quad \text{y} \quad e:b=f:d \quad entonces \quad (a+e):b=(c+f):d$

Esta propiedad se podría utilizar a la hora de formar una nueva relación cuando se tienen dos razones que tienen el mismo consecuente y son proporcionales a otras que tienen igual consecuente también. Esta propiedad puede ser útil para los estudiantes que llevan las relaciones a un valor unitario de una de las magnitudes; el ejercicio 4 se presta para ello ya que los datos adicionales se dan en valor unitario.

XII.

Si $x_1 : y_1 = x_2 : y_2 = ... = x_n : y_n = \Gamma \quad entonces \quad (x_1 + x_2 + ... + x_n) : (y_1 + y_2 + ... + y_n) = \Gamma$

Esta propiedad puede ser útil para dar solución al problema seis al momento de hallar la velocidad promedio de todo el trayecto ya que se pueden formar razones proporcionales y es posible mostrarle el estudiante que la suma de éstas es proporcional con una de ellas.

### 3.2.6. Actividad 6 “El concepto de proporción para entender y analizar una información.”

Esta actividad tiene como objetivo el seguir introduciendo la noción de proporcionalidad inversa que ha sido trabajada en puntos de actividades anteriores y el empleo de una de las aplicaciones de proporcionalidad más usados como es el de “porcentaje”, así como el entender el porqué de su habitual uso en el lenguaje cotidiano.

Por otro lado también se busca que los estudiantes puedan observar el uso del concepto de proporción en los medios de comunicación y el cómo se utiliza a la hora de mostrar resultados de las diferentes instituciones.

El primer punto pide encontrar una relación según los datos suministrados en el artículo y además relacionarla con otro dado. El segundo punto pide analizar y dar un criterio matemático (en este caso mirar la proporcionalidad entre las razones dadas) para afirmar o negar una proporción hecha por el autor del artículo.

En el tercer punto, basándose en el artículo, se propone una relación inversa para que el estudiante la solucione. Tal vez habrá que aclarar que no es cierta tal relación, ya que no significa que los recursos se destinen de esta forma, ni que éstas sean las políticas gubernamentales; es sólo para ilustrar las diferentes relaciones que los medios de comunicación utilizan para representar la magnitud de las situaciones. Como ejemplo se puede mostrar la analogía que se reportaba en los medios, respecto a la potencia que tiene un rayo y cómo hacían relaciones con situaciones más cercanas a las personas. (Esto en la calamidad que ocurrió en la Sierra Nevada de Santa Marta el 6 de octubre del presente año.)

El cuarto punto es otro que pide que los estudiantes tomen un punto crítico de acuerdo a la lectura y cuál, según su criterio, puede ser el material más efectivo y el porqué sería éste el más adecuado.

El quinto punto pide sacar información de la lectura para poder deducir la cantidad de kilómetros que necesitan mejorar con base en la información dada. El artículo no dice nunca esto, pero se puede llegar a tal valor con los datos que se manejan.

El sexto punto plantea otra relación inversa donde se utiliza un criterio que se da mucho a la hora de discutir el cómo hacer que la construcción de una vía sea más ágil, la cual es el adelantar trabajos por la noche.

Los puntos séptimo y octavo están dedicados a pensar en el concepto de porcentaje. Ya que éste no ha sido dado a los estudiantes, como posible ayuda se dará el pensar el porcentaje como una relación donde el 100% corresponde a todo lo que se está comparando, que es la forma intuitiva como ellos lo han utilizado o entendido.

Los puntos noveno, décimo, undécimo, duodécimo y décimo tercero siguen trabajando el concepto de porcentaje, esta vez apoyándose en una gráfica circular para aclarar este concepto, entender este tipo de gráficas y acercarse a un método más visual de resolver estos problemas como lo propone la teoría local de la EMR para el concepto de porcentaje.

La tarea se propone con el fin de pensar el porcentaje asociado con el área de una figura, esto para afianzar y poder formalizar la herramienta de barra de porcentaje que se utiliza como modelo para la enseñanza de este tema en la EMR. Como se ha expresado anteriormente, no se introducirá este modelo, sino que se busca que emerja de forma natural al querer resolver los problemas.

La actividad está planeada para dos horas de clase, en donde se tiene estimado un tiempo final de diez minutos para un debate, principalmente enfocado en la proporcionalidad inversa y el frecuente uso del porcentaje y el por qué de ello.

### 3.2.7. Actividad 7 “Quiz”

La actividad tiene como propósito el evaluar la apropiación del concepto de proporcionalidad por parte de los estudiantes. Según estudios, los alumnos creen reconocer situaciones proporcionales cuando observan problemas donde se dan tres valores y se pide hallar un cuarto valor, así estas situaciones no sean proporcionales. Por ello se proponen 10 problemas donde hay situaciones de proporcionalidad y otras que no lo son. Los estudiantes de forma individual resolverán los problemas propuestos y luego deberán clasificarlos. No se les dice cómo deben clasificarlos, luego ellos deben pensar una forma de hacerlo. Esto puede prestarse a que la clasificación no sea la deseada; por ello al final se hará una socialización con todos los estudiantes sobre las respuestas dadas por ellos a los problemas y la clasificación hecha por ellos, buscando que ellos logren deducir una clasificación matemática.[5]

---

[5] Basado en el artículo *NOT EVERYTHING IS PROPORTIONAL: TASK DESIGN AND SMALL-SCALE EXPERIMENT*. De Bock ,D., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (20005) PME 29

Aunque la actividad es de evaluación, tiene también un objetivo de enriquecer el concepto de proporción, ya que si el estudiante contestó de forma correcta, su concepto es robusto, pero si no contestó en forma correcta, el debate final servirá para que éste sea enriquecido.

La actividad es individual, como ya se dijo, y se propone para una hora clase, que estará dividida en una primera parte, la solución del quiz, y una segunda, el debate. El debate se realizará en la misma hora de clase si el tiempo lo permite, si no, será postergado a la clase siguiente.

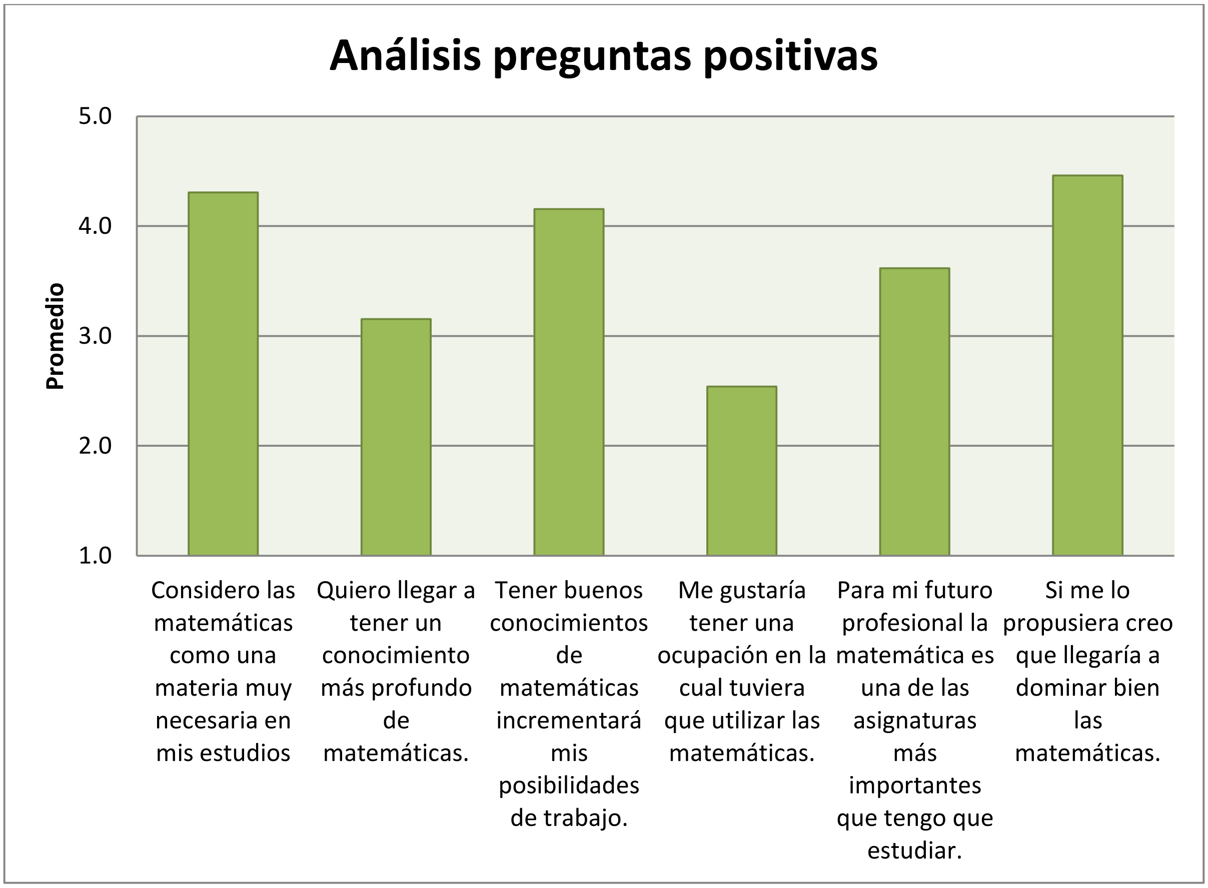
### 3.3. Prueba final

Como se dijo anteriormente, la prueba final es un problema retador que trabaja la proporcionalidad de diversas formas. Como durante la secuencia didáctica se trabajaron problemas utilizando un entorno físico de los estudiantes, la prueba final también cumplirá esta condición para mantener coherencia con la demás parte de la propuesta. Sobre la definición de problema retador se utilizará una que se dio dentro de una discusión en el congreso 16º ICMI, “se presenta cuando una persona se enfrentan a un problema cuya resolución no es evidente y para el que no parece haber ningún método estándar de solución. Así que la persona está obligada a realizar algún tipo de reflexión y análisis de la situación, posiblemente poniendo juntos diversos factores. Quienes enfrentan un reto deben tomar la iniciativa y responder a eventualidades imprevistas con flexibilidad e imaginación.” Taylor (2006).

Teniendo esto en cuenta el problema planteado busca que el estudiante utilizando su conocimiento de los conceptos de razón y proporción pueda resolver de forma libre y creativa el problema que se le plantea.

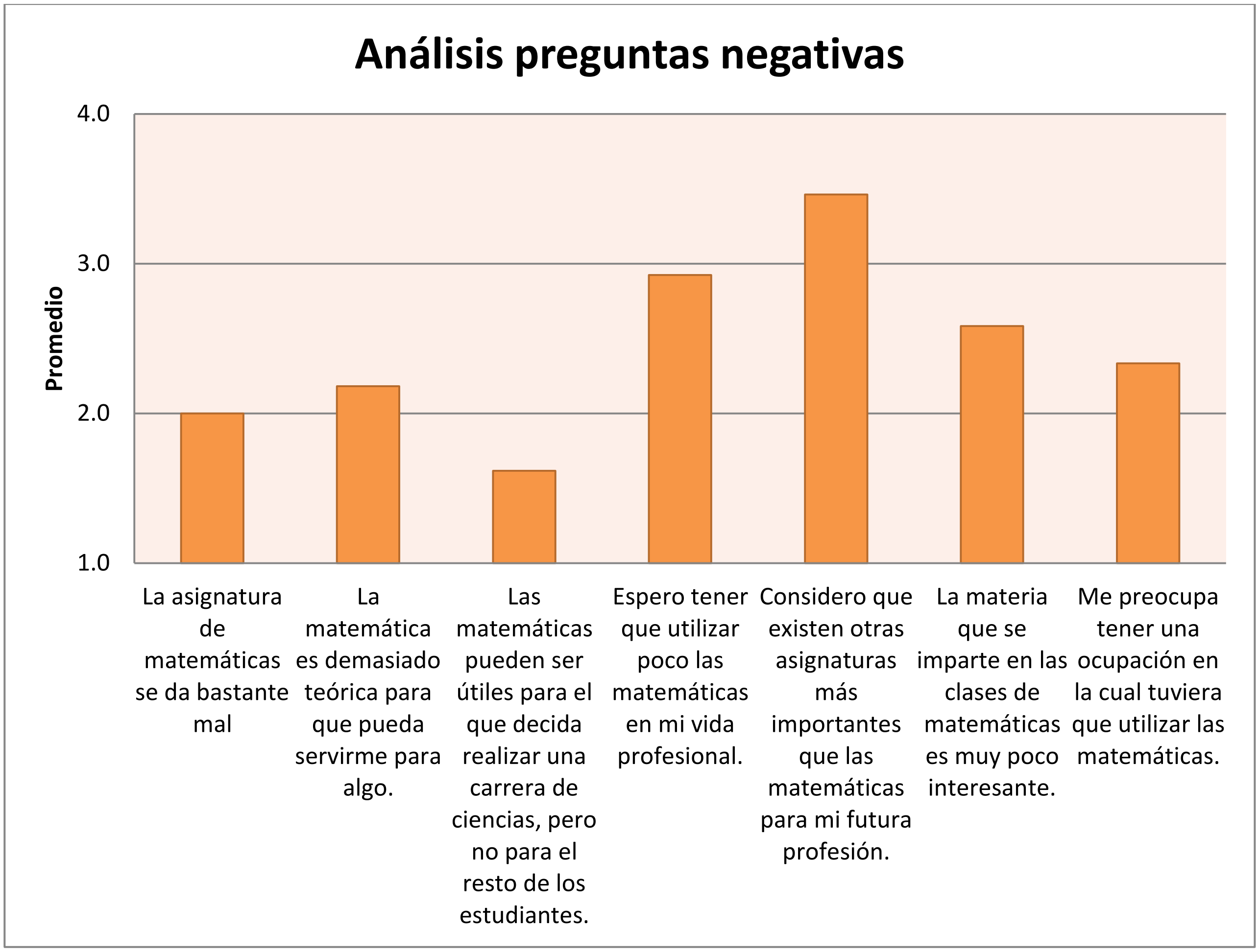
## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 4.1. Análisis de la encuesta inicial




El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en la encuesta inicial fue hecho tomando el promedio de la calificación hecha por los estudiantes y de allí intentar sacar algunas conclusiones puntuales. En la primera pregunta, los estudiantes obtienen un promedio mayor a cuatro lo que dice que están de acuerdo con la necesidad de las matemáticas, lo mismo ocurre con la pregunta que afirma que el tener buenos conocimientos en matemáticas les incrementa las posibilidades laborales futuras. La que obtiene un mayor puntaje es la que afirma que podrían llegar a dominar las matemáticas si así ellos se lo propusieran. Aun así, se puede observar en la segunda pregunta, que ellos no están de acuerdo en querer tener un profundo conocimiento matemático, así como en la quinta pregunta, que no ven en su futuro el uso de las matemáticas por parte de sus posibles futuras carreras.

Esto hace pensar que aunque se ve la necesidad de las matemáticas, que perciban la capacidad personal de entenderlas y que saber matemáticas puede llegar a abrir un mayor número de puertas laborales, los estudiantes no desean tener una futura carrera afín a la matemática, lo cual se comprueba con la respuesta con menor promedio donde los estudiantes se muestran en desacuerdo de utilizarlas en su futura vida laboral. Esto podría arrojar como conclusiones, primero, que a los estudiantes no les gusta las matemáticas por ello no quieren verlas fuera de su vida estudiantil actual y, segundo, que los estudiantes ven a las matemáticas como una asignatura que solo se trabajará en el colegio y no les va a ser útil en su vida futura si sus carreras no tiene que ver con matemáticas.




Analizando ahora la gráfica de las preguntas negativas se puede decir que las dos respuestas con mayor nivel de inconformidad (cuarta y quinta) rectifican lo dicho anteriormente, ya que los estudiantes tienen diferentes formas de apreciar la matemática pero muestran el no deseo de tener una profesión cercana con las matemáticas y demuestran poco gusto a la asignatura.

Acerca de las respuestas recolectadas en las preguntas abiertas se evidencia un problema al contestarlas por parte de los estudiantes. En el colegio, los estudiantes manejan toda su primaria en el idioma de inmersión que escogieron (francés o alemán) y el grado de ingreso al bachillerato es en séptimo. Al momento de responder la encuesta, muchos estudiantes evidenciaron dificultad al entender las preguntas planteadas ya que los estudiantes no están acostumbrados al español. Por ello hubo muchas preguntas que los estudiantes no respondieron o las contestaron de forma errática, debido a su poca capacidad de comprensión. Esto también vislumbra un problema a futuro a la hora de aplicar las actividades, ya que es clara la necesidad del entendimiento del problema para su posterior solución.

Partiendo de este punto, en el análisis de la primera pregunta respecto a cómo los estudiantes conciben a los profesores del colegio la respuesta más común se refiere a visiones positivas acerca de las actitudes y aptitudes de los mismos. Respecto al enunciado ***Las matemáticas son*** las respuestas están divididas entre los que la inscribieron por su utilidad diciendo "necesarias para la vida" y por otro lado los que propusieron una respuesta emocional generalmente negativa como "aburridas". Examinando la siguiente frase ***Mis capacidades en matemáticas son*** excepto 4 de los 16 estudiantes, afirmaron ser regulares; ahora, para la afirmación ***Para ser bueno en matemáticas toca*** todos los estudiantes enfocaron sus respuestas en la necesidad de estudiar y prestar atención en clase.

Por otro lado al momento de comentar la ***frase Las matemáticas que trabajamos en clase son*** las respuestas se repartieron entre "aburrida", "normal" e "interesantes". Cuando se les preguntó a los estudiantes sobre qué encontraban difícil en matemáticas, la mayoría expresó el tema que más les ha parecido difícil; hubo cuatro respuestas donde se dijo algo como "casi todo", lo que deja preocupación del cómo han aprendido sus matemáticas si han sido difíciles para ellos durante casi toda su vida escolar.

En la pregunta sobre el señalar cómo debería ser un buen profesor, todos los estudiantes se expresaron diciendo que debe “explicar bien” o “enseñar claramente”, donde se pudo observar que la característica que ellos observan importante en un docente, se enfoca hacía un docente que explica, antes de que guíe. Esto nuevamente se pone en evidencia cuando los estudiantes a la pregunta de ***Lo mejor que un profesor de matemáticas puede hacer por mi es***, la mayoría de los estudiantes afirman que ayudar a los estudiantes, algunos pocos contestaron respecto a la actitud en clase de los docentes como “no regañarme”.

La siguiente frase que dice ***Podrías aprender más matemáticas si*** los estudiantes nuevamente atribuyen el éxito del aprendizaje en matemáticas exclusivamente al estudio y atención en clase.

Respecto al identificar la motivación para aprender matemáticas, la mayoría expreso que es por la importancia para su futuro, donde muy pocos especifican el porqué de ésta importancia. Cabe resaltar  tres estudiantes que enfocan su motivación con las calificaciones que obtengan en la asignatura.

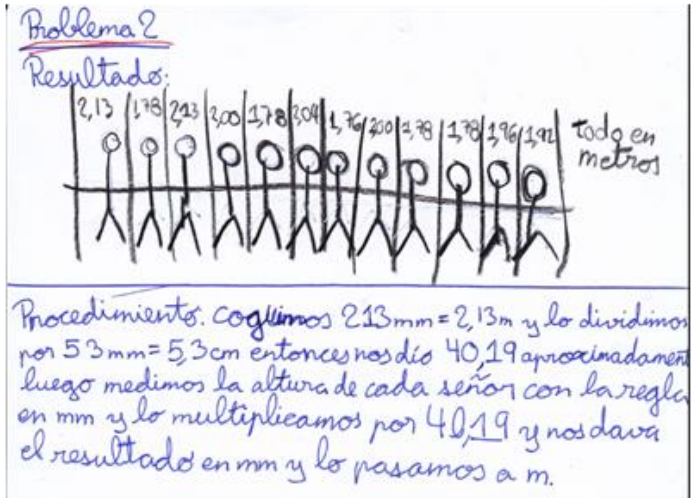
Las preguntas que exploraban las experiencias positivas y negativas con las matemáticas fueron enfocadas a los temas que más y menos habían entendido los estudiantes.

Respecto a las clases que más les gustan se vio que solamente dos estudiantes tenían a matemáticas entre sus tres más favoritas, mientras que cuatro de ellos la tienen entre las que menos les gusta, afirmando entre las razones el aburrimiento y estrés que producen estas clases. Los demás no la tienen entre sus favoritas ni entre las que no les gustan.

### 4.2. Análisis de la actividad 1 “De-forma visual”

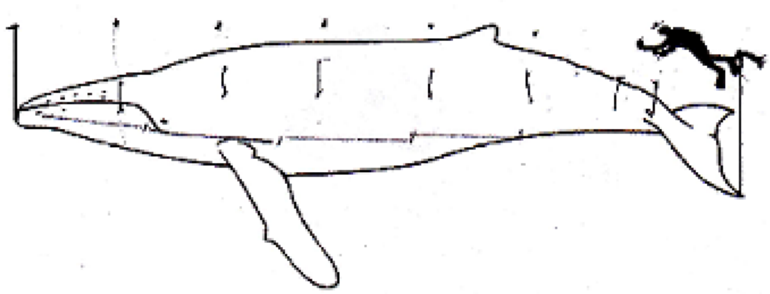
Observando las respuesta dadas en la primera pregunta de la actividad, un grupo logró pensar en dividir la altura que se pedía que tuviera la imagen, entre la altura que tiene la figura actual y así encontrar cuántas veces era necesario ampliar la imagen; la dificultad se dio en realizar las operaciones con decimales lo que hizo que se confundieran a la hora de dar la respuesta. Otro grupo pensó en multiplicar por un factor de 30, lo que hizo que la imagen quedara cercana a la medida pedida, pero no la deseada (6cm*30=180cm, siendo el objetivo 200 cm). Los otros grupos pensaron en restar las longitudes suponiendo que así se podía llegar a conocer la ampliación; al momento de debatir sus respuestas, los estudiantes analizaron que simplemente pedir que se sumara una longitud, haría que la figura se deformara.

Para el segundo punto un grupo mostró una amplia noción de proporcionalidad y manejó bien las unidades de medida; su argumentación muestra que encontraron el factor de escala de 1 milímetro y luego multiplicaron por la medida de la figura.



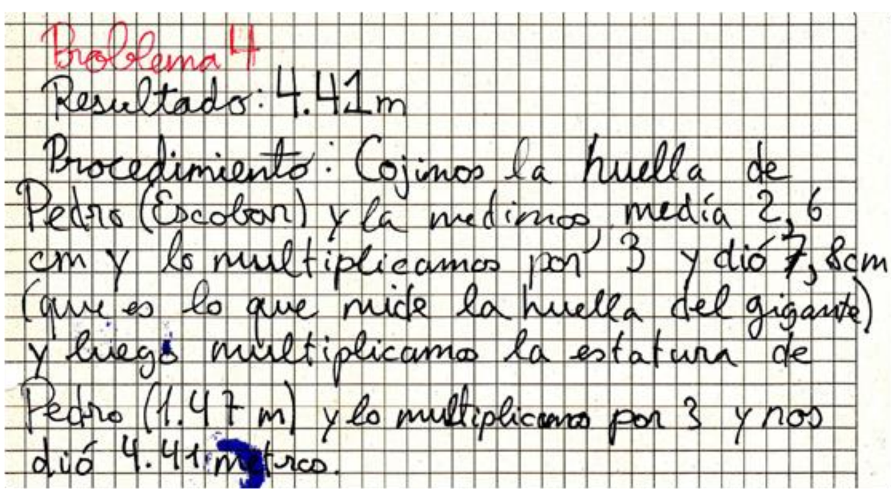

Los otros grupos utilizaron como estrategia el estimar la altura de los jugadores ‘a ojo’ con deducciones acerca de cuánto puede medir media cabeza o una oreja de una persona alta. Como el ejercicio pedía una aproximación de la estatura y los resultados eran lógicos para ellos, decidieron darle validez a los datos obtenidos.

En la tercera situación planteada, los grupos utilizaron la misma técnica para su solución. Estimaron la altura promedio de una persona y observaron cuántas veces se encontraba esa longitud en la imagen de la ballena, es decir, observaron cuantas veces cabe un segmento en otro.



Aunque los valores encontrados se encuentran cercanos a los reales, ningún grupo pensó en que no eran exactas las veces en que estaba la figura del humano en la de la ballena. Respecto al cálculo del peso, utilizaron el mismo factor para la obtención del peso; luego de la socialización los grupos observaron que faltaba multiplicar por otra dimensión, pero aún no la de multiplicar por las tres dimensiones. Fue obvia la falta del concepto del volumen para reconocer el procedimiento a seguir.

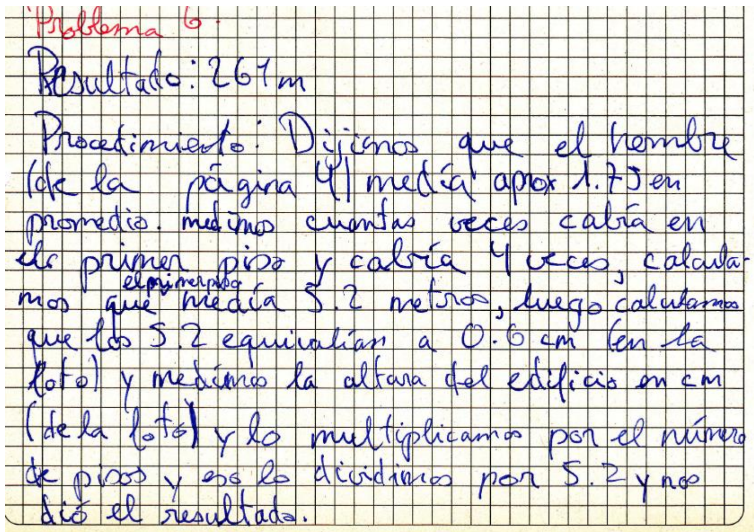
La cuarta situación hizo que los estudiantes primero se preguntaran sobre la posibilidad del utilizar una simple huella para llegar a estimar la altura de una persona; se les guio haciéndoles razonar sobre si la huella de una persona más alta que ellos sería de igual dimensión que la de ellos, luego ellos analizaron y observaron que las huellas son más grandes si la persona es más alta (usualmente). Por lo tanto empezaron a tratar de encontrar la relación que existía entre la estatura y la dimensión de la huella. Algunos midieron su estatura y luego su huella y hallaron la razón que había entre su cuerpo y su huella.


Problema 4
Resultado: 4.41m
Procedimiento: Cojimos la huella de
Pedro (Escobar) y la medimos, medía 2,6
cm y lo multiplicamos por 3 y dió 7,8cm
(que es lo que mide la huella del gigante)
y luego multiplicamos la estatura de
Pedro (1.47 m) y lo multiplicamos por 3 y nos
dió 4.41 metros.

Otros lo hicieron por pasos, mirando cuantas veces estaba su huella en su mano, luego cuantas veces estaba su mano en el cuerpo y encontraron la relación. Algunos miraron cuantas veces cabía su huella en la huella del gigante y así poder multiplicar por el factor hallado. Entre los grupos que lo hicieron de esta última forma, hubo quienes pensaron en rellenar la huella del gigante completamente con la huella de ellos, lo que hizo que obtuvieran una altura mayor a la que se podría estimar por estar contando también con el ancho de la huella. Al momento de debatir, se analizó la lógica de la respuesta, tratando de encontrar cuán grande era el gigante que ellos habían supuesto y si la huella que le correspondería sería del tamaño que se tenía en la hoja, a lo cual los estudiantes encontraron que estaban errados con esa medida.

En el quinto ejercicio hubo grupos que ampliaron la imagen haciendo una homotecia, noción que parecen conocer de cursos anteriores. Otro grupo midió los segmentos que conformaban la figura, los multiplicó por tres y utilizo un transportador para medir y mantener los ángulos, realizando la figura deseada. Para este último grupo la noción de semejanza está desarrollada y podría ser un momento apropiado para introducir el concepto. Los grupos que no lograron hacer correctamente la figura, triplicaron los segmentos de la figura pero no tuvieron en cuenta los ángulos de la misma y no lograron ampliarla correctamente.

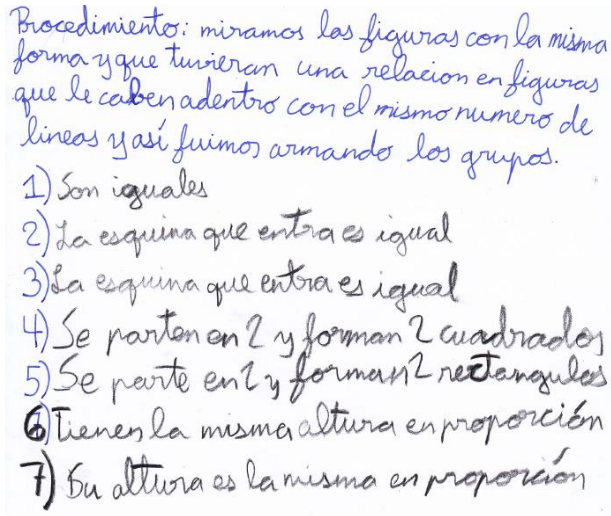
El sexto ejercicio llevó a que un grupo utilizara una proporción compuesta (obviamente sin saber el concepto de ésta) analizando las dos fotos suministradas y hallando la relación entre ellas. Utilizan a la persona que aparece en una de las fotos y estiman una estatura promedio, así pueden calcular las veces que se repite en el primer piso para tener la altura de este nivel y luego manejan esta medida como referencia para usarla como escala en el dibujo en donde se encuentra la imagen completa del hotel.



Problema 6:
Resultado: 267m
Procedimiento: Dijimos que el hombre (de la página 4) medía aprox 1.75 en promedio. medimos cuantas veces cabría en el primer piso y cabría 4 veces, calculamos que el primer piso medía 5.2 metros, luego calculamos que los 5.2 equivalían a 0.6 cm (en la foto) y medimos la altura del edificio en cm (de la foto) y lo multiplicamos por el número de pisos y eso lo dividimos por 5.2 y nos dió el resultado.

Un grupo intentó resolver el problema utilizando una relación entre el tamaño de las personas y de la fuente de agua que se localiza en la segunda foto y luego, utilizando la primera foto, tomaron la medida de la fuente e intentaron deducir la altura del edificio. Infortunadamente las mediciones no estuvieron bien hechas (debieron ser tomadas con más exactitud) y el resultado dio un valor supremamente exagerado. (945 m). Otro grupo relacionó el promedio de altura de un piso y contaron el número de pisos para dar su respuesta.

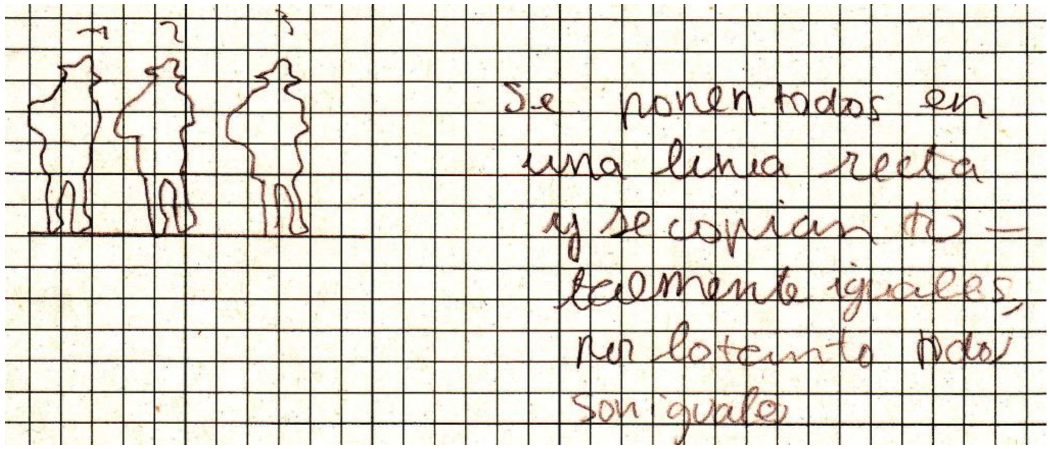
En el séptimo punto un grupo tuvo en consideración el aspecto de los ángulos y utilizó diferentes estrategias para comparar las figuras parecidas. Entre sus justificaciones utilizan la palabra proporción, mostrando cierto desarrollo del concepto.



Procedimiento: miramos las figuras con la misma forma y que tuvieran una relacion en figuras que le caben adentro con el mismo numero de lineas y así fuimos armando los grupos.
1) Son iguales
2) La esquina que entra es igual
3) La esquina que entra es igual
4) Se parten en 2 y forman 2 cuadrados
5) Se parte en 2 y forman 2 rectangulos
6) Tienen la misma altura en proporción
7) Su altura es la misma en proporción

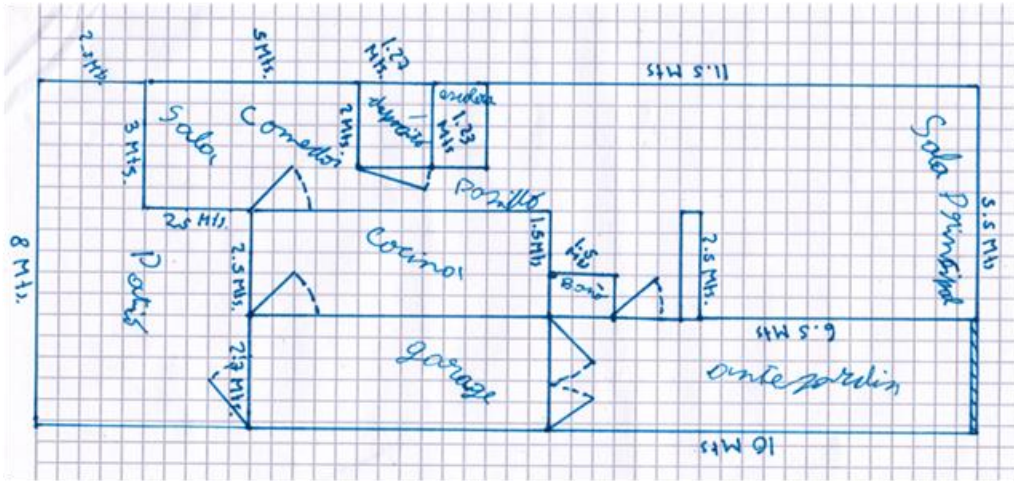
Otros grupos agruparon las figuras que eran parecidas sin tener en cuenta si estaban deformadas (visiblemente los estudiantes no han visto congruencia y no tienen la noción construida aún), por lo tanto las imágenes fueron agrupadas por figuras que fueran similares sin recapacitar sobre otra consideración.

Para el octavo punto, luego de discutir y especular sobre quién era más grande que el otro y recibiendo una pequeña ayuda, los estudiantes encontraron que eran iguales y empezaron a justificar su respuesta con varios métodos, el más común fue medir la altura de los dibujos y compararlas. Un grupo calcó las figuras para comprobar que eran iguales. Es claro que en realidad lo que hace el grupo es comparar visualmente segmentos.




Para el noveno ejercicio propuesto los estudiantes intentaron ampliar las dimensiones de la foto para hallar el portarretrato adecuado. Como las medidas que hallaban no correspondían, bien sea a la medida de la foto o a la medida de los portarretratos, entonces decidieron escoger una de las opciones que les fueron suministradas. Pero no analizaron en la opción más correcta sino que escogieron la que era parecida a las dimensiones dadas.

El décimo punto fue la tarea para desarrollar en la casa, a los estudiantes se les dio una semana para que tuvieran tiempo para desarrollarla. La imagen a continuación muestra uno de los planos donde se observa que el estudiante utilizó una escala clara, también muestra que entiende que no siempre la cuadrícula le sirva para su dibujo y al momento de representar una longitud de 2,7 metros hace una estimación de esta dimensión en su dibujo. Aunque el dibujo muestra el problema que la suma de las longitudes no concuerda con otras que deberían tener la misma medida, esta deficiencia puede estar más asociada a problemas de exactitud de medición.



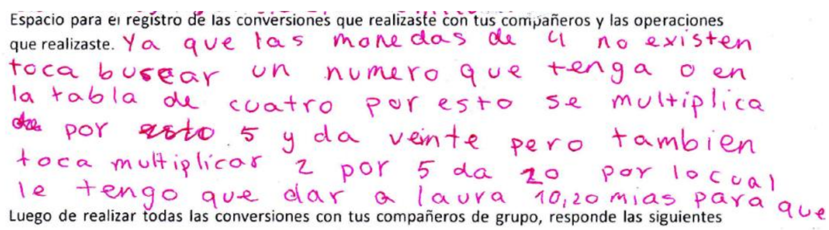

Otros estudiantes al igual que el anterior mantuvieron una escala apropiada pero no tuvieron en cuenta las medidas que no son múltiplo de 50 cm (todas las aproximaron) y así evitaron tener que salirse de la escala dada por los cuadros de la hoja. No todos los estudiantes tuvieron en cuenta la escala que debía haber en el plano y al comparar la magnitud de las paredes había incoherencia en algunas de las medidas tomadas y el dibujo hecho. Para otros estudiantes no fue necesario medir la longitud de su vivienda aunque fue explicado por qué sería útil el hacerlo para tener una idea más clara de la forma y dimensiones reales de la vivienda.

De la totalidad de la actividad se ha logrado evidenciar una noción de proporcionalidad avanzada en algunos de los estudiantes, ya que en alguno de sus argumentos frente al grupo se utilizó la palabra proporcional. Pero a la pregunta sobre qué era, no se pudo definir de forma clara, llevando a concluir que en este caso la tienen como una palabra asociada al no deformarse. No está desarrollada completamente la estructura multiplicativa para este tipo de razonamiento, ya que en algunas ocasiones suman, en otras multiplican y en otras no identifican qué operación deben realizar. Por otro lado, hallar el factor por el cual multiplicar no les es claro y solo es posible que los estudiantes lo deduzcan calculando cuántos segmentos caben en el segmento más grande (a la manera de Euclides).

### 4.3. Análisis de la actividad 2 “convertidor de divisas”

La actividad fue bien recibida en el aspecto de utilizar monedas hechas por los mismos estudiantes; hubo billetes donde se evidenció la creatividad y dedicación en la elaboración del billete con un propio nombre de la moneda.

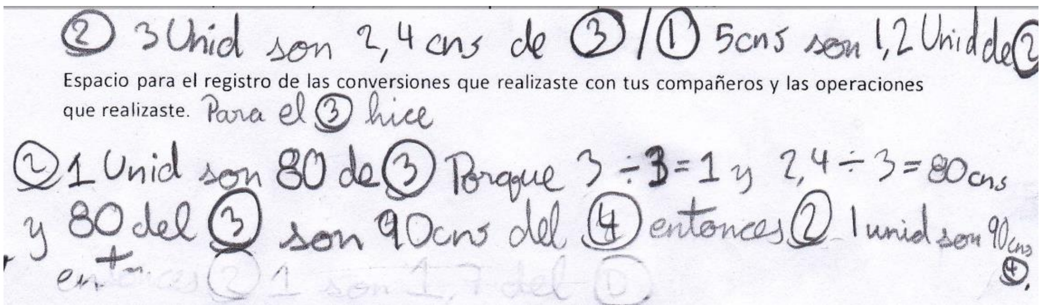
La conversión inicial con la lista implicó que muchos se preguntaran cómo hacer los cambios ya que no tenían billetes con esas denominaciones, por lo tanto no podían lograr hacer las conversiones tal como se dieron las razones; luego el problema inicial fue tratar de hacer los intercambios de monedas utilizando solo los billetes que poseían. Un grupo utilizó como método el multiplicar ambas magnitudes procurando que los resultados fueran equivalentes.


Espacio para el registro de las conversiones que realizaste con tus compañeros y las operaciones que realizaste. Ya que las monedas de 4 no existen toca buscar un numero que tenga o en la tabla de cuatro por esto se multiplica ~~da~~ por ~~esto~~ 5 y da veinte pero tambien toca multiplicar 2 por 5 da 20 por lo cual le tengo que dar a laura 10,20 mias para que
Luego de realizar todas las conversiones con tus compañeros de grupo, responde las siguientes

Entre las dificultades presentadas al interior de los grupos se dio que algunos hicieron las conversiones como si fueran la misma moneda; por ejemplo, en un grupo un estudiante dio una unidad de su moneda y le devolvieron 50 centavos de otra moneda cuando quería pagar 50 centavos de la moneda inicial. En la socialización se debatió sobre la validez de sumar diferentes monedas y obtener una nueva moneda, ya que estas dos monedas son de diferentes 'países' (una noción que es vital para la suma de fracciones y de expresiones algebraicas). Los estudiantes llegaron a la conclusión de que no siempre es posible la suma de dos cosas de la forma usual y que para sumar es necesario tener 'cosas iguales'.

Otros grupos observaron la relación entre las dos monedas y la simplificaron para que fuera posible hacer los intercambios necesarios, luego de hacer esta conversión ya hablaban en términos del doble, lo que mostró un avance no solo en el concepto de razón sino también en el de proporcionalidad.

En un grupo se decidió simplificar las razones para poder hacer los cambios con mayor facilidad. En este grupo como en otros grupos, donde las razones no eran números enteros, la situación fue difícil y terminaron por estimar algunas debido al uso de los decimales en el proceso.


2 3 Unid son 2,4 cns de 3 / 1 5cns son 1,2 Unid de 2
Espacio para el registro de las conversiones que realizaste con tus compañeros y las operaciones que realizaste. Para el 3 hice
2 1 Unid son 80 de 3 Porque $3 \div 3 = 1$ y $2,4 \div 3 = 80$ cns
y 80 del 3 son 90cns del 4 entonces 2 1 unid son 90 cns 4.
~~entonces 2 1 son 1,7 del 1~~

Entre los grupos se supusieron razones que no fueron dadas, afirmando que una moneda de uno de los estudiantes era equivalente a una moneda de otro estudiante sin que la razón asignada así lo dijera. Al momento de preguntar si hubo problemas en hacer los cambios, afirmaron que sí hubo dificultades y que éstas se dieron precisamente al momento de hallar la tasa de cambio de los compañeros cuyas razones manejaban números decimales o cuando las razones daban decimales, en especial si eran menores a uno.

Al instante de comparar dentro del grupo la moneda de mayor valor y de menor valor, los estudiantes iniciaron un diálogo sobre quién le daba cuánto a quién y quién recibía más o menos; los estudiantes estimaron que con esta información era suficiente para comparar las tasas de cambio; por ello ningún grupo vio la necesidad hasta este punto de la actividad de encontrar una forma general para hacer las comparaciones.

Para la segunda parte los estudiantes no sabían cómo era posible organizar las tasas de cambio de todo el salón; claramente el haber realizado la comparación de forma verbal al interior del grupo con sus compañeros y no procurar generalizar, hizo que no lograran deducir cómo hacerlo sin tener que dialogar con los otros grupos. Para guiarlos se les intentó ayudar utilizando experiencias vividas por ellos; entonces se les mencionó que ellos cuando van a otro país con moneda diferente al dólar, aun así deben cambiar a dólares para luego intercambiar a la moneda que se utiliza en ese país. El tiempo fue corto para terminar de desarrollar la actividad debido a que esta última parte implicaba efectuar muchas operaciones que los estudiantes hasta ese momento estaban empezando a entender y tratar de generalizar por lo realizado dentro del grupo.

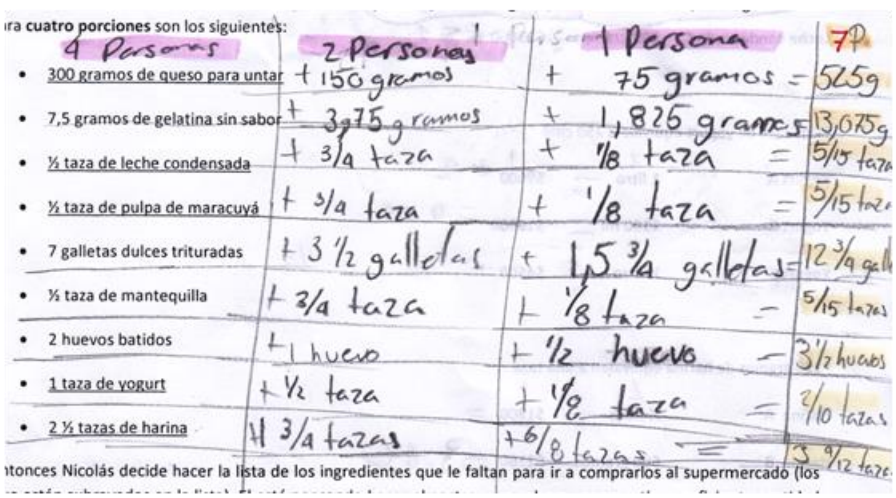
Dado que el objetivo de la actividad era llegar al concepto de razón, en la socialización los estudiantes llegaron a dar como significado para el concepto de razón que es un vínculo que unía las monedas, también se habló como una asociación que existía entre las magnitudes. Se mostró la notación de los dos puntos ( : ) como una forma de notar esta relación. No fue posible llegar a un consenso acerca de que esta asociación se puede reducir a un número, algunos estudiantes simplemente lo leyeron como “un número es a otro” (esto ocurrió debido a que para los estudiantes los dos puntos lo han trabajado en español como analogías), y aunque algunos estudiantes ven la razón como el cociente resultado de la relación planteada, no todos lograron ver que es más fácil reducirla a un número como resultado de la división de estas magnitudes. Algunos estudiantes afirmaron que si la razón se observa como un número es más fácil llegar a compararlas diferentes razones. Respecto al orden, se intentó mostrar un asomo de ese diálogo que se sostuvo adentro de los grupos, en el cuál los estudiantes organizaron las monedas de acuerdo a quien había recibido más del otro, algo que ellos trabajaron en los diálogos entre grupos. Para finalizar los estudiantes dieron diferentes 'tipos' de razones, algunos asociaron el tiempo con otras magnitudes como el dinero que recibe una niñera cuando cuida un niño; otros en el debate dijeron que el cambio de monedas se reduce al trueque que hacían los indígenas y que sería otro ejemplo de razón. Entre los que no mostraron desarrollar una noción clara aún del concepto de razón se puede mencionar a un estudiante que dijo que en una empresa por dos horas de una exposición es posible conseguir un mejor puesto laboral. En el debate se llegó a que un puesto no es medible, luego es necesario que lo que se relacionan sean magnitudes.

La actividad de cambio de divisas está muy compleja para los estudiantes. Para que los resultados sean mejores, se recomienda que sea trabajada siempre y cuando los estudiantes tengan desarrollado los conceptos de los números decimales y fraccionarios así como sus operaciones y puedan apoyarse en las operaciones con una calculadora; si no, se hace necesario cambiar las razones que se dan, para que sean enteras en su mayoría y las cifras decimales que puedan dar no sean tan complejas (décimas solamente).

## 4.4. Análisis de la actividad 3. “Una sorpresa para mamá”

Los grupos en la primera pregunta no tuvieron problemas para identificar que, teniendo una receta para cuatro personas, duplicándola se puede obtener la receta para ocho personas. Al momento de querer saber cuánta cantidad de cada ingrediente era necesaria para siete personas, los estudiantes tuvieron más dificultades de las esperadas. Aun así las estrategias por grupo fueron diversas.

Dos grupos utilizaron la estrategia de encontrar la proporción para dos personas, luego para una y al final sumarlas con la de cuatro para obtener la cantidad para siete personas; al momento de socializar fue una de las técnicas que a los estudiantes les pareció más fácil. Hubo errores con el uso de fraccionarios, lo que hizo que cometieran errores, como el decir que la mitad de un medio es tres cuartos y que la mitad de tres cuartos es un octavo.

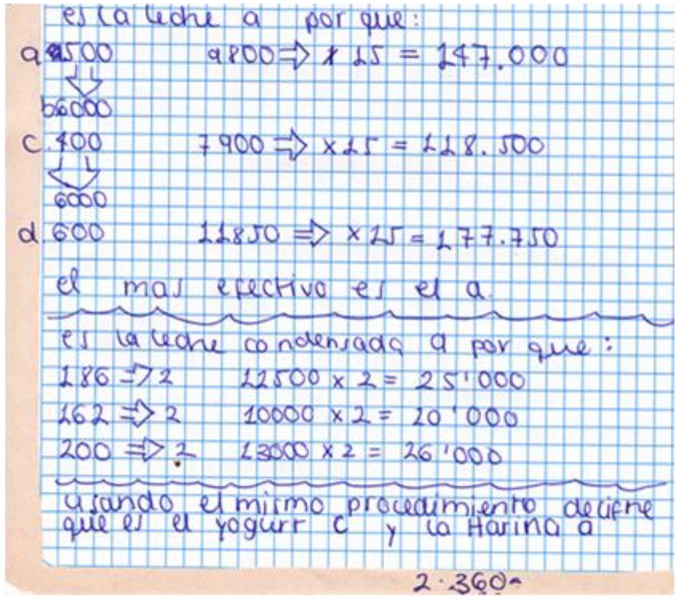



Otro grupo dividió la receta original en cuatro para así obtener los valores para una porción, posteriormente los restó de los valores para ocho que habían calculado en el punto anterior. Cabe resaltar que los estudiantes en las divisiones obtenían resultados con decimales, pero que se dieron cuenta de lo ilógico de un decimal de una taza y vieron la necesidad de convertirla en fraccionarios. Aunque hubo operaciones que estuvieron mal realizadas, la estrategia está bien pensada.

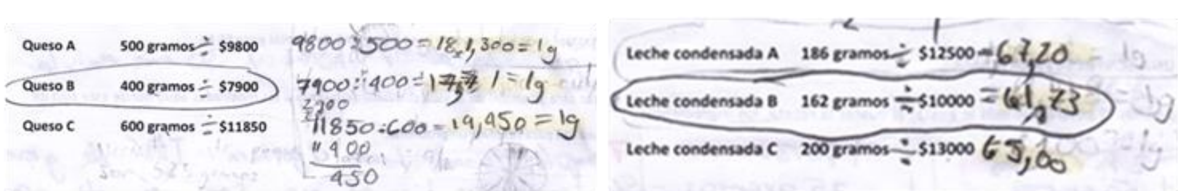
El último grupo utilizó la regla de tres; sucede que uno de los estudiantes la conoció en la tarea anterior ya que al momento de ayudar los padres se la enseñaron y los otros estudiantes mostraron interés en aprenderla debido a su aparente simplicidad. Durante el resto del taller la regla de tres fue utilizada por los estudiantes con facilidad. En la socialización los estudiantes en general se mostraron interesados en adquirir este algoritmo ya que hacía 'no necesitar pensar'.

Para la escogencia de los productos más económicos, también hubo diferencia en las estrategias. Uno de los grupos decidió igualar la cantidad de cada ingrediente a la cantidad contenida en un paquete de uno de los productos que se querían comparar y así poder comparar cuál era más económico. No se evidencia cómo llegaron a calcular la cantidad faltante o sobrante, ya que hay errores en los resultados. Por ejemplo, dicen que 100 gramos del Queso A, es equivalente a 1900, lo cual es falso. En la comparación de los otros ingredientes siguen mostrando algunos errores al parecer de desconcentración aunque la estrategia es la correcta.

Otro grupo utiliza una estrategia similar, pero busca el mínimo múltiplo en común (tema visto este año) de las cantidades para igualar los valores. El grupo solo muestra el procedimiento para uno de los productos y dice haber efectuado el mismo procedimiento para los otros. Aun así en el procedimiento de los otros productos al encontrar un múltiplo común era más complicado y en este contexto fue posible hacer resaltar que aunque es una buena técnica no es la más eficaz.

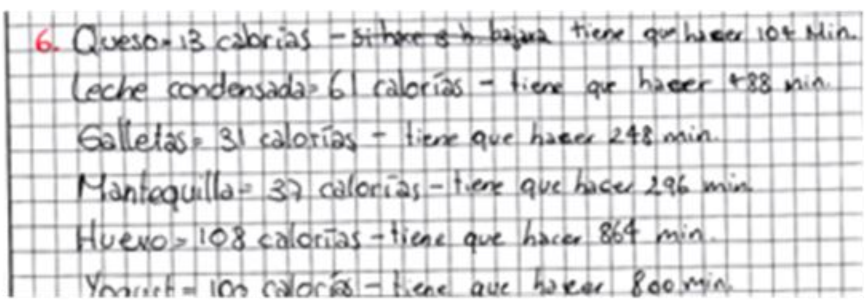



Uno de los grupos decidió simplemente dividir el costo del producto por la cantidad que posee el mismo, encontrando así el valor de una unidad entera de la cantidad y así poder comparar los resultados (estrategia que se había debatido en la actividad de divisas de cambio para la comparación de razones). En la hora de la socialización fue catalogado como la estrategia más ‘sencilla’ en este aparte. Si se observa la forma de sustentar sus operaciones, parecería que están dividiendo la cantidad por el costo; pero sí lo hacen de forma correcta, solo que no lo escriben en forma adecuada.



Respecto al número de maracuyás necesarios, uno de los grupos lo resolvió de forma correcta encontrando que las magnitudes deberían ser proporcionales y buscando mantener la misma relación para los datos pedidos, los otros grupos la resolvieron pensando en partir los maracuyás de forma que se fueran llenando las tasas necesarias.

Para la pregunta de la cantidad de tiempo de ejercicio que se necesita para quemar las calorías consumidas, muchos grupos no lograron resolver el problema totalmente debido al tiempo que se necesita para encontrar en la tabla de calorías los valores asociados a cada ingrediente. Uno de los grupos dio la cantidad de tiempo que necesitaría para quemar cada ingrediente. En la socialización el grupo pudo analizar que no consideró que el número de calorías era por kilogramo y que los cálculos que habían hecho eran para una persona cuyo peso es de 1 kilogramo.

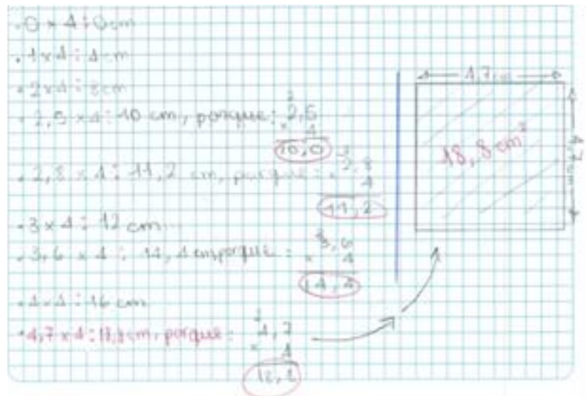

6. Queso = 13 calorías - ~~si hace~~ bajara tiene que hacer 104 Min.
Leche condensada = 61 calorías - tiene que hacer 488 min.
Galletas = 31 calorías - tiene que hacer 248 min.
Mantequilla = 37 calorías - tiene que hacer 296 min.
Huevo = 108 calorías - tiene que hacer 864 min.
Yogurt = 100 calorías - tiene que hacer 800 min.

A la hora de encontrar situaciones parecidas los estudiantes dieron como afines la relación entre el tiempo y el dinero que recibe alguien de salario, otro grupo expresó que una situación parecida se da en los aviones cuando deben calcular la cantidad de comida dependiendo el número de pasajeros; otro grupo habló de la relación que existe entre la longitud de cuerda y los diferentes tamaños que puedan tener los instrumentos.

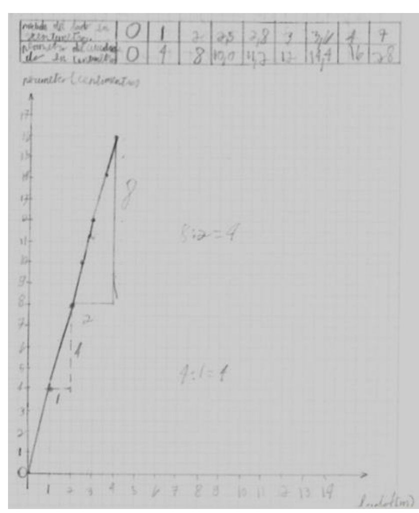
En la socialización se fue afianzando el concepto de razón y del cómo la razón se utilizó para nuevamente comparar y hallar valores desconocidos. Se empezó a hablar de proporcionalidad como aquellas situaciones en las cuales es necesario que se mantenga la misma relación (razón) entre los números. También los estudiantes lograron observar que una de las características de este tipo de relación es que los valores o aumentan juntos o disminuyen ambos. Se les explicó que en matemáticas a esta relación se le llama directamente proporcional, también se les mencionó que para la proporcionalidad no siempre ocurre esto y que hay otro tipo de relación proporcional que se trabajará posteriormente.

### 4.5. Análisis Actividad 4. "Actividad para la casa"

Para la primera parte de esta actividad, todos los estudiantes lograron completar la tabla y entender que el factor de la relación entre el perímetro y el lado de un cuadrado es 4. Entre los resultados, un estudiante entendió la relación como una igualdad; es claro que sabe que hay una relación y encontró la razón de la misma, pero no tiene claro el concepto de igualdad. Otro estudiante, mostrando las operaciones hechas, demostró falta de conocimiento entre perímetro y área; en la socialización muchos estudiantes reconocieron que tuvieron que consultar en internet qué es perímetro para poder entender el punto.

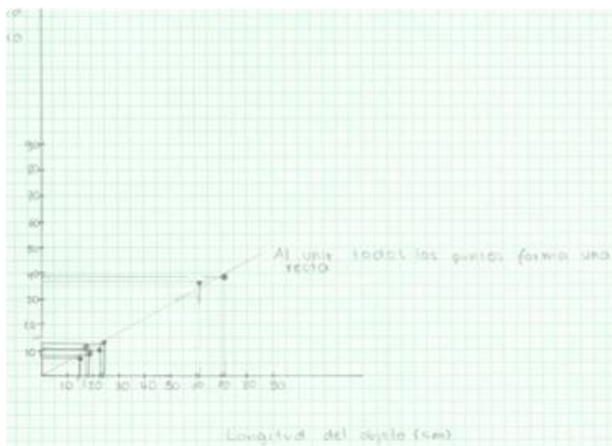


Respecto a la gráfica, todos los muchachos consiguieron localizar los puntos (algunos de forma no totalmente correcta), pero el reconocimiento de la figura que los puntos forman no fue general. Acerca del observar donde se encontraba la razón, los estudiantes localizaron sin problemas la razón en la tabla; aún así, algunos no la llaman razón sino que la llaman relación. Por otro lado, en la gráfica los estudiantes no lograron encontrar la razón, dijeron localizarla en cada punto, es decir, lo asociaron a la relación pero no al factor de la misma. Solo uno de los estudiantes logró reconocer donde se encontraba el factor relacional del perímetro de un cuadrado y su lado.

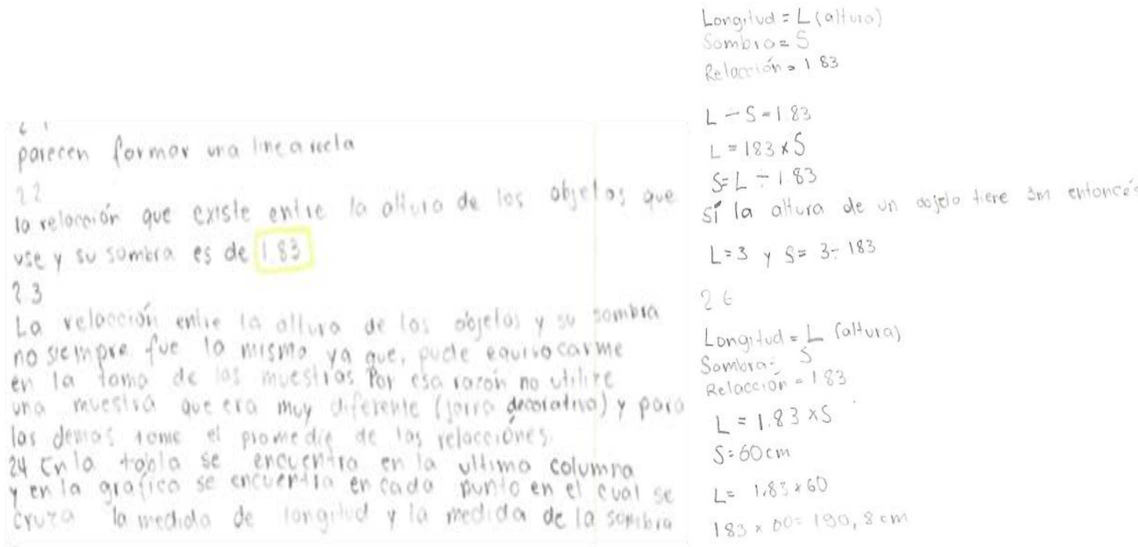


En la segunda parte, los estudiantes lograron tabular los datos y realizar la gráfica; muchos estudiantes tuvieron dificultades en encontrar la figura ya que los puntos no quedaron colineales, sea por problemas de exactitud, porque no hicieron la actividad en una hora fija, o porque algunos decidieron hacerla con una lámpara.

Una de las estudiantes observó que los datos se aproximan a una línea recta, a tal punto que termina descartando uno de los valores encontrados para llegar a esta figura; para ello se basó en los datos que iba arrojando la tabla y al observar que uno de los valores estaba alejado, decidió no utilizarlo.




Posteriormente la estudiante utiliza la razón hallada de forma correcta para resolver los problemas planteados




Para otro estudiante es clara la forma de hallar una razón y aunque observa que la razón no es la misma parece intuir que por su cercanía puede significar algo. Para resolver los ejercicios planteados, utiliza una de las razones (la que se repitió) para resolverlo con un análisis correcto de la situación.

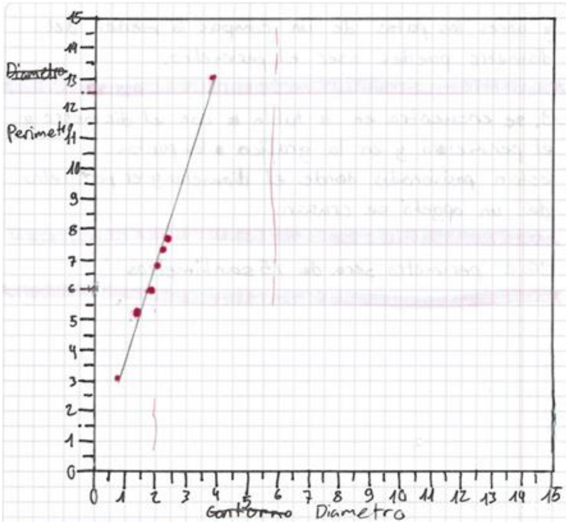
Otro estudiante maneja fraccionarios pero los amplifica para hallar la relación de los problemas dados. Tiene un claro avance no solo del concepto de razón sino también del concepto de proporcionalidad ya que por lo hecho anteriormente dedujo que los datos mantenían la misma relación.

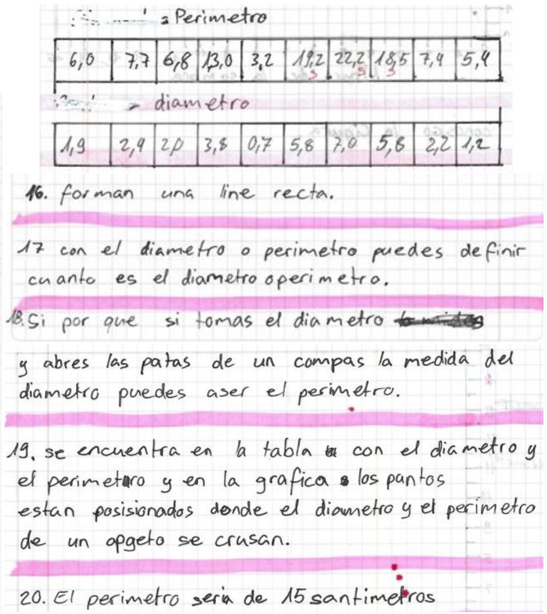
Sobre el análisis del por qué fue necesario pedir que fuera a una hora especifica realizada toda esta actividad, los estudiantes lograron observar que el ángulo de inclinación en que se encuentre el sol, afectaría el tamaño de las imágenes. Podría ser un momento justo para ingresar el concepto de figuras congruentes. Entre las muchas explicaciones un estudiante justificó el necesitar una lámpara en cambio del sol, justamente por el movimiento del sol y, por ende, no mantener su posición fija.

Entre las dificultades observadas se dieron especialmente entre aquellos estudiantes que no lograron observar la linealidad de la situación y por ello no lograron encontrar la razón asociada, y al momento de resolver las preguntas de encontrar valores desconocidos, terminaron por no contestarla o por dar valores utilizando algunos de los resultados dados para estimar estos valores o supuestos sin justificaciones.

La discusión que en la socialización se dio sobre este tema se prestó para un acercamiento a conceptos trigonométricos y se llevó la historia del logro de Tales de Mileto de hacer la medición de la altura de una pirámide. Los estudiantes discutieron sobre la viabilidad de hacerlo de ésta forma y de la validez de los resultados ya que ellos pensaban en las sombras resultantes como si la fuente fuese una lámpara y hablaban del cambio de la sombra a medida que se acercaban a la fuente (razón de cambio), una estudiante logró resolver la discusión con la deducción de que la sombra de un avión no es más grande (es más, es no perceptible), logrando deducir que la distancia en la que se encuentra el sol hace que estas consideraciones sean no necesarias de analizar.

Para la última actividad propuesta muchos estudiantes lograron razonar de forma adecuada consiguiendo encontrar la razón asociada; en este caso el estudiante logra dar un valor del perímetro aproximado según los resultados que obtuvo.



Perimetro

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,0 | 7,7 | 6,8 | 13,0 | 3,2 | 19,2 | 22,2 | 18,5 | 7,4 | 5,4 |

diametro

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,9 | 2,4 | 2,0 | 3,8 | 0,7 | 5,8 | 7,0 | 5,8 | 2,2 | 1,2 |

16. forman una line recta.

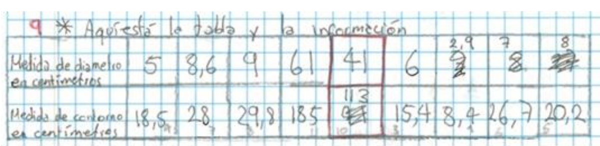
17 con el diametro o perimetro puedes definir cuanto es el diametro o perimetro.

18. Si por que si tomas el diametro ~~[illegible]~~ y abres las patas de un compas la medida del diametro puedes aser el perimetro.

19. se encuentra en la tabla con el diametro y el perimetro y en la grafica los pantos estan posisionados donde el diametro y el perimetro de un opgeto se crusan.

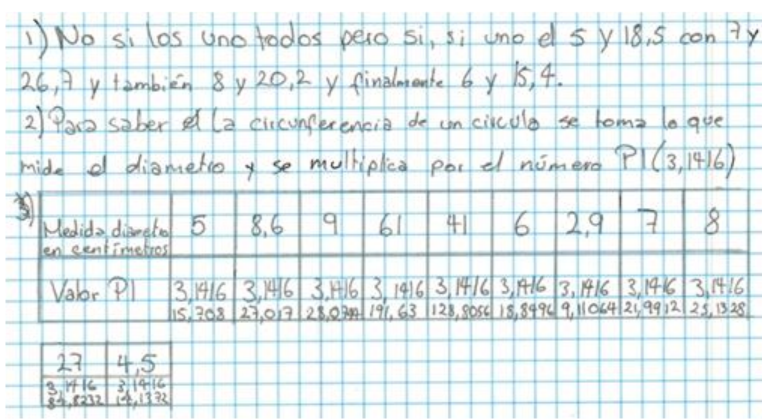
20. El perimetro seria de 15 santimetros

Otro estudiante mostró conocer el uso del número π, y aunque hizo la medición de los objetos de forma experimental, también encontró al final los valores exactos de forma analítica.



9 * Aquí está la tabla y la información

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Medida de diametro en centimetros | 5 | 8,6 | 9 | 61 | 41 | 6 | 2,9 | 7 | 8 |
| Medida de contorno en centimetros | 18,5 | 28 | 29,8 | 185 | 113 | 15,4 | 8,4 | 26,7 | 20,2 |



1) No si los uno todos pero si, si uno el 5 y 18,5 con 7 y 26,7 y también 8 y 20,2 y finalmente 6 y 15,4.

2) Para saber ~~el~~ la circunferencia de un circulo se toma lo que mide el diametro y se multiplica por el número PI (3,1416)

3)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Medida diametro en centimetros | 5 | 8,6 | 9 | 61 | 41 | 6 | 2,9 | 7 | 8 |
| Valor PI | 3,1416<br>15,708 | 3,1416<br>27,017 | 3,1416<br>28,0744 | 3,1416<br>191,63 | 3,1416<br>128,8056 | 3,1416<br>18,8496 | 3,1416<br>9,11064 | 3,1416<br>21,9912 | 3,1416<br>25,1328 |

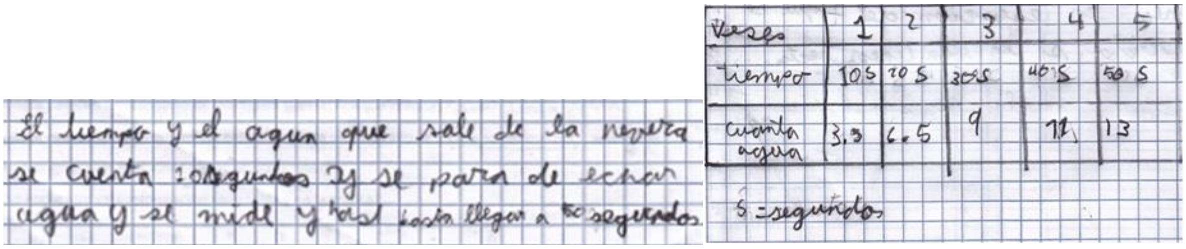
| | |
|---|---|
| 27 | 4,5 |
| 3,1416<br>84,8232 | 3,1416<br>14,1372 |

Una de las estudiantes que mostró una mayor adquisición del concepto de razón y proporción obtuvo muy buenos resultados y aunque no parece haber conocido el número $\pi$, hizo una buena aproximación según los datos arrojados para poder resolver sus problemas.

Entre las dificultades presentadas por los estudiante fue la de no tener claro el concepto de diámetro de un circulo lo que hizo que la razón que encontraban fuera diferente a $\pi$. Por otro lado, algunos tuvieron problemas en tomar los valores lo más exactamente posible lo que hizo que no se viera la recta y no se tuviera clara la constante de proporcionalidad.

Respecto a los contextos en que los estudiantes deberían encontrar situaciones proporcionales o no, entre las respuestas dadas por los estudiantes, se puede prestar atención que un estudiante analizó la situación de cantidad de animales que nacen si ésta fuera siempre constante y luego observó que para que fuera igual la situación en su razonamiento, deberían los datos formar una línea recta; aunque el ejemplo no es tan aplicable a la vida real ya que no siempre es cierto, el estudiante muestra un gran avance entre los conceptos de razón y proporción.

Otra estudiante mostro una relación proporcional compuesta, ya que relacionó el número de vasos de agua con la cantidad de agua y el tiempo que gasta una llave de una nevera en llenar cada vaso de agua.



El tiempo y el agua que sale de la regadera se cuenta 10 segundos y se para de echar agua y se mide y hasta llegar a 50 segundos

| Veses | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| tiempo | 10 s | 20 s | 30 s | 40 s | 50 s |
| cuanta agua | 3.3 | 6.5 | 9 | 11 | 13 |

S = segundos

Otro estudiante analizó y relacionó el lado de un cuadrado con la diagonal de la misma, este ejemplo es un claro avance a un concepto que el estudiante verá en su futuro como la relación trigonométrica.

En las situaciones que los estudiantes observaron que no eran proporcionales está la relación entre el perímetro de dos figuras geométricas (rectángulo y triángulo) y su área. Para saber que no está frente a una situación directamente proporcional, uno de los estudiantes se basa nuevamente en el observar la figura que formaron los datos, el estudiante mostró una apropiación de la linealidad de situaciones proporcionales pero se muestra muy dependiente de la gráfica en vez de hallar la relación en la tabla.

Otra situación planteada está relacionada con la que el estudiante hizo para la de proporcionalidad directa. En esta ocasión el estudiante analiza que la relación se mantiene siempre y cuando el número de crías de los animales sea constante como lo planteó en el problema anterior por ello plantea una situación donde el número de crías varia de tal forma que no es posible conocer cuántos serán los animales que nacerán. Esto muestra que el estudiante llega a reconocer la constante de proporcionalidad como parte importante de una situación que utiliza éste razonamiento. Otra estudiante también utilizó la situación que planteó anteriormente para decir que en un rectángulo la diagonal no mantiene la misma relación con uno de los lados. Es claro que la estudiante no consideró tener uno de los lados fijos lo que hizo que los resultados dieran no proporcionales.

En la socialización a los estudiantes aún les queda difícil encontrar situaciones diferentes a las planteadas o encontradas por sus amigos; lo que hacen es encontrar una parecida. También afirman que una situación en especial es proporcional porque las magnitudes suben o bajan pero algunos no comprenden aún que no son en la misma proporción.

Respecto al objetivo de la actividad, los estudiantes mostraron haber logrado captar la idea de que una situación se denomina proporcional cuando al hacer la gráfica de los valores relacionados se obtiene una línea recta, así como que cuando se observa una gráfica de una contexto que tiene como figura una línea recta, se puede llegar a afirmar que estamos frente a una situación proporcional. Infortunadamente solo una de los ejemplos planteados por los estudiantes muestra una proporcionalidad inversa lo que hace que aún no sea posible el afirmar que este tipo de situación se asocie con facilidad a la gráfica.

La construcción del concepto de proporcionalidad por parte de los estudiantes ha mostrado un avance en el que muchos reconocen la necesidad de mantener la misma razón para distintos valores de las magnitudes a relacionar. Pocos no han logrado entenderlo y esto es debido a que solo observan la relación entre las magnitudes (mayor en tanto, menor en tanto) pero no identifican la razón que hay entre ellas.

### 4.6. Análisis Actividad 5. “La ruta navideña de Boyacá”

Para la primera pregunta los estudiantes tuvieron dificultades en entender primero el concepto de velocidad, ya que la noción que poseían no estaba asociada a una razón (dos magnitudes que forman una nueva). La primera parte, acerca de encontrar la distancia total del recorrido de la ruta no tuvo dificultad y los estudiantes hicieron uso de la razón correspondiente a cuanto equivale un centímetro del mapa en kilómetros. El entender cómo hallar la velocidad fue la parte compleja; utilizando las representaciones que tenían de velocidades comunes (60 km/h, 100 km/h) se empezó a mostrar la relación entre estas magnitudes y el cómo es posible, teniendo una distancia dada y el tiempo utilizado en recorrerla, calcular la velocidad media. Entre los grupos se dio la discusión acerca de qué es velocidad promedio y la posibilidad de mantener esta velocidad durante el viaje. Fue el momento de explicar por qué se habla de velocidad promedio y que ésta es diferente a la velocidad en un momento dado ya que durante el trayecto la velocidad es variable.

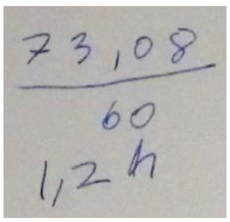
Todos los estudiantes al final abordaron la situación simplificándola y asumiendo que si recorren todo el trayecto en una hora (el trayecto en los grupos dio entre 80 y 60 kilómetros, lo que hizo que se pudiera considerar esta opción) es posible llegar a tiempo teniendo en cuenta el tiempo que esperan en cada pueblo y que los personajes terminan llegando antes de la hora estipulada.

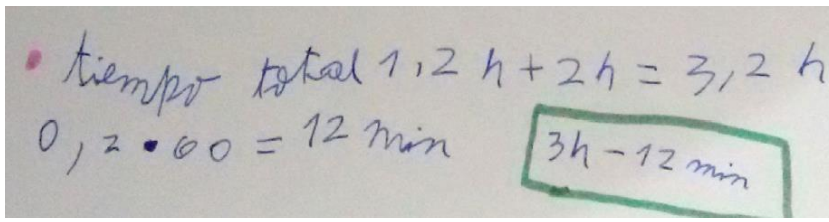
1. Son 6 pueblos y en cada uno se demoran 20min, osea que solo visitando los pueblos, se demoran 2 horas. Para hacer el recorrido completo tienen que ir a una velocidad de 88-90km por h. Si andan a esta velocidad, llegarían a su destino a las 9:30pm

A medida que fueron desarrollando los otros problemas, los estudiantes fueron agilizando su entendimiento del análisis y de las operaciones necesarias, ya que encontraban las relaciones que se formaban y habían entendido que el hablar de velocidad promedio hacía que se refiriera a una situación proporcional.

Para el segundo problema los estudiantes utilizaron un razonamiento proporcional sabiendo que los personajes habían recorrido hasta Floresta (distancia) en 2 ½ horas (tiempo) y debian recorrer de Floresta a Duitama en una hora y compararon las razones. Al momento de hacerlo se dieron de cuenta que eran casi iguales y afirmaron que sí era posible llegar a tiempo. ( en realidad ellos discutieron que llegaban tarde, pero en realidad, la podian esperar un poco, mostrando una solución totalmente ligada a la cultura de que llegar un poco tarde es admitido). Otros grupos hicieron el procedimiento de encontrar la velocidad promedio incial y luego hallar la distancia que recorrería en hora de viaje con esa velocidad. Aunque el problema se resolvio un poco más facil, el concepto de velocidad promedio sigue mostrando ser más complejo de adquirir por parte de los estudiantes.

El tercer problema tuvo como problema adicional el tener que convertir una hora decimal en parte de una hora entendida en minutos, ya que los estudiante creían que los decimales correspondian a los minutos y no entendían el porqué eran diferentes. Por ejemplo al ver en las decimas un ocho, asumian una hora y veinte minutos. Es decir tenían en cuenta la equivalencia pero la conversión de los decimales estaba mal hecho y se transformó en un impedimento, esto hizo que las respuestas en un inicio fueran mal dadas y que fuera necesario demorarse un momento en entender qué ocurría y la necesidad de convertir estas cifras.  Ya superada esta dificultad el problema fue resuelto de forma correcta.



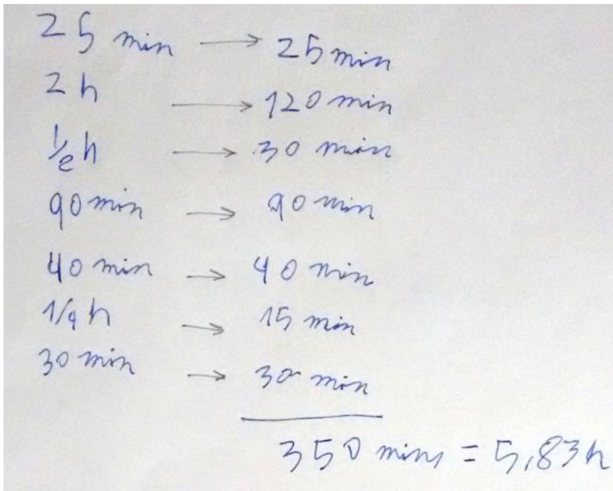



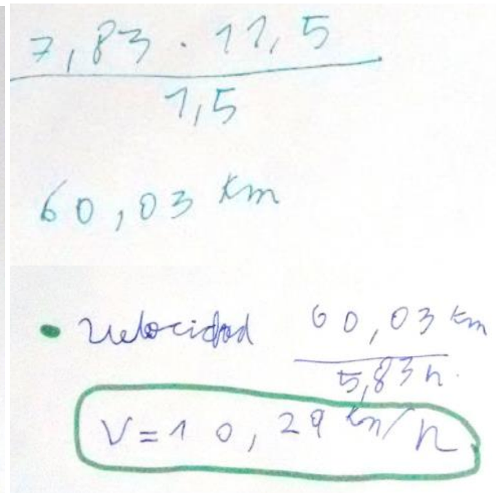

El cuarto problema involucró una relación compuesta que fue fácilmente entendida por los estudiantes debido a que una de las magnitudes era igual de valor; por los ejercicios que se realizaron anteriormente en la actividad cambio de monedas y luego de que en la socialización las dificultades fueron debatidas, el comprender esta parte fue ‘natural’ para ellos. Para resolverlo los grupos miraron cuantos galones había gastado en el recorrido anterior. Como lo sobrante era más de una galón y el recorrido faltante era posible recorrerlo con un solo galón, simplemente observando se dio la respuesta.

El quinto problema fue un problema que resultó ser extenso y que llevó mucho análisis por parte de los muchachos. Al inicio se asustaban por la cantidad de datos que involucraba y por lo extenso del texto. Como se ha explicado anteriormente, el análisis de texto ha sido complicado por las falencias que tienen ellos en lectura de textos en español. Lo que se empezó a hacer en los grupos fue explicar qué era lo que estaba pasando y se les llevó a descomponer el problema en pequeñas partes para que los estudiantes lo fueran resolviendo. Esto hizo que todos los grupos operaran de la misma forma ya que se sistematizó el método.

La respuesta dio como discusión que la cantidad de dinero que ganaba el taxista era muy poca debido a que había trasnochado; se preguntó si los datos eran cercanos a la realidad y se discutió sobre el valor que debería ganar. Esto sugirió una pregunta sobre cuánto debería ser la ganancia del taxista y de cuánto debería ser el aumento para que esto pasara. La pregunta quedó ahí y no fue respondida pero existió la posibilidad de crear otro problema que les interesó gracias a la discusión.

El sexto punto fue más sencillo ya que los estudiantes lo entendieron con facilidad, lo que hicieron fue sumar los tiempos convirtiéndolos en minutos, luego el resultado lo convirtieron en horas para luego hallar la velocidad promedio dividiendo la distancia recorrida en el tiempo que obtuvieron. Para hallar los trayectos que tuvieron mayor o menor velocidad, simplemente compararon las razones de cada uno de los trayectos.



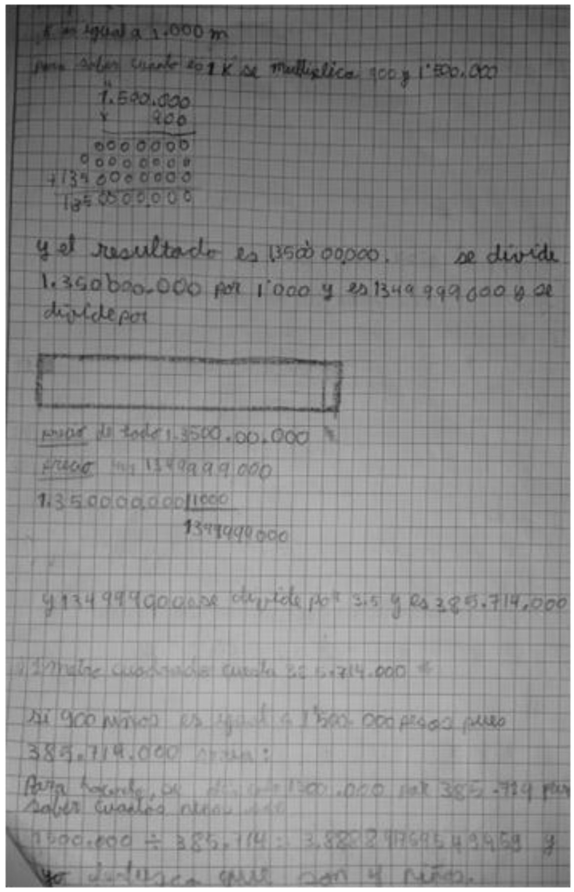




En el último punto los estudiantes desarrollaron problemas con los datos dados; utilizaron los problemas que se habían dado antes y simplemente cambiaron los datos para que como respuesta dieran los valores dados, siendo en realidad pocos creativos con los problemas planteados.

De la actividad se puede analizar que un concepto como el de velocidad es difícil de entender ya que los estudiantes habían visto las relaciones y el cómo hallar la razón de esta relación para transformarla en la constante de proporcionalidad, pero entender que esa constante adquiere otro nombre hace que se dificulte su entendimiento. Por otro lado las conversiones entre diferentes sistemas (decimal a sexagesimal) fueron interesantes pero también complicadas porque los estudiantes no veían la necesidad ni el problema de hacerlo como ellos lo estaban estipulando. Respecto a las relaciones compuestas, fue un buen acercamiento y aunque se asustan al enfrentar tantos datos, ellos fueron observando la necesidad de entender el problema general y hacer un desglose del mismo para convertirlo en pequeños problemas. Por otro lado, teniendo en cuenta los parámetros de la EMR, se observa que los estudiantes han desarrollado un tipo de 'modelo para' ya que al momento de identificar las situaciones proporcionales, lo primero que hacen los estudiantes casi automáticamente es hallar la constante de proporcionalidad (encuentran el valor unitario) y así multiplican por el valor que tienen varias veces de acuerdo con las condiciones de cada problema.

### 4.7. Análisis Actividad 6 "El concepto de proporción para entender y analizar una información.

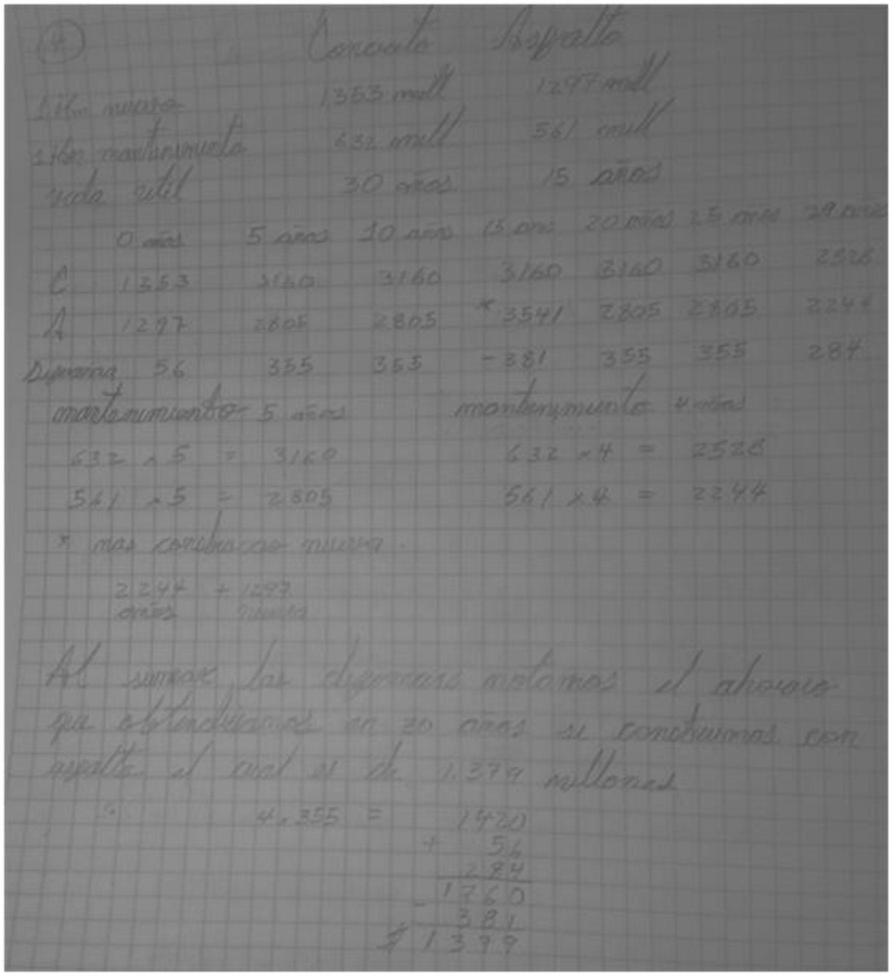
La primera pregunta de esta actividad fue abordada de forma simple por los estudiantes; lo que hicieron fue encontrar cuánto era el costo de un metro carril y luego dividir por 3.5 para encontrar el costo del metro cuadrado de vía. Para averiguar el valor de la financiación de cuántos niños equivalente a este metro cuadrado de vía, los estudiantes dividieron los 900 niños entre el costo total del kilómetro de carril encontrando así el porcentaje de niño que equivale a un millón. Como esto no tenía lógica ya que el valor era muy pequeño y no tiene lógica hablar de un pedazo de niño, lo que se hizo entonces fue hallar la razón inversa y luego encontraron cuántas veces estaba éste valor en el del metro cuadrado de vía.



Para el segundo punto los grupos de estudiantes siguieron un procedimiento parecido al del anterior punto, ya que tenían el precio total y solo multiplicaron el subsidio de un niño por los 373 que nombraba el artículo y luego hicieron una comparación con el valor que se les dio y consiguieron dar una respuesta. Aunque la mayoría afirmó que estaban en lo cierto y el valor era muy cercano a lo que afirmaba la periodista, otros dijeron que la apreciación publicada queda corta ya que para el costo más elevado hay una diferencia de la financiación de casi 50 niños.

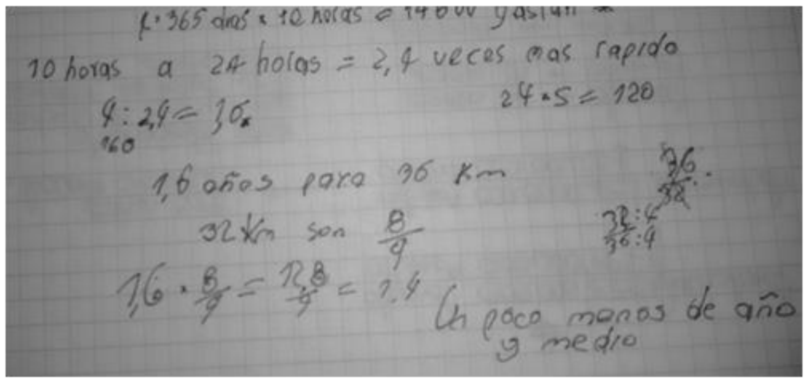
El tercer punto también fue resuelto con facilidad por los estudiantes, aunque era necesaria la relación compuesta de tres razones; los grupos simplemente analizaban una de las relaciones y luego otra. Aunque lo hacen sin ninguna estrategia generalizada aún, cuando encuentran situaciones de este tipo lo hacen automáticamente y con facilidad.  Para este ejercicio los estudiantes, utilizando el valor del kilómetro carril, lo multiplicaron por los 15 km y luego dividieron por el valor entre el costo de la financiación de un estudiante y encontraron la solución.

Para el cuarto punto los estudiantes utilizaron tablas para comparar el valor y la duración de los materiales a escoger. Aunque se hubiese preferido que utilizaran una relación entre el tiempo y la vida útil y la respuesta tiene algunos errores, los estudiantes dan un buen sustento matemático y un análisis amplio con su respectiva argumentación.

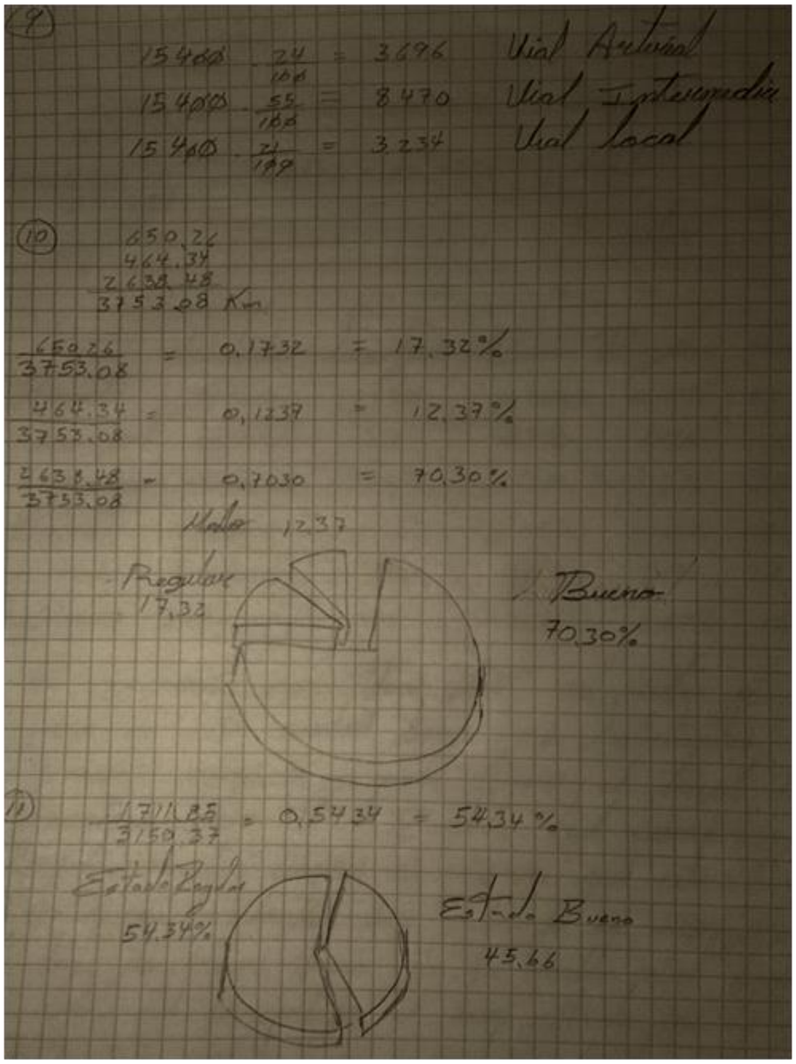



Para el quinto punto los estudiantes simplemente tomaron el valor del costo que asegura el texto y luego lo dividieron por el costo de un kilómetro carril y así encontraron la cantidad estimada de kilómetros que se tiene de vía deteriorada.

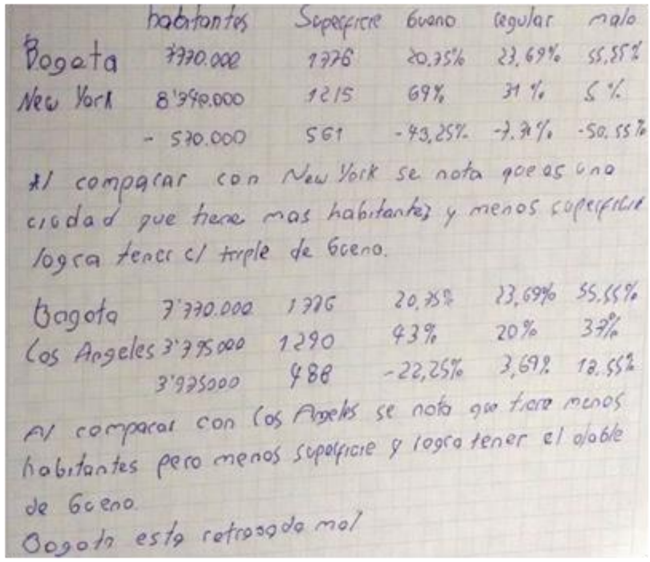
El sexto punto fue de los más complicados ya que se pedía trabajar una relación compuesta incluyendo una de proporcionalidad inversa. Unos estudiantes analizaron la relación entre el tiempo total y las horas diarias trabajadas, luego observaron que 24 horas son 2.4 veces las 10 horas, luego el tiempo de ejecución de la obra debe ser 2.4 veces menos que el anterior. Luego analizaron que, como lo habían hecho para 36 kilómetros de carril, entonces lo debían hacer para solo 32 kilómetros de carril, hallando entonces la relación entre el kilómetro de vía hecho y el propuesto. Con la constante de proporcionalidad se multiplicó por el número de horas. En el caso mostrado los estudiantes no hacen la conversión exacta del tiempo y simplemente estiman un tiempo de año y medio según lo analizado en la respuesta.




Para los ejercicios del séptimo al duodécimo, la mayoría de estudiantes habían manejado antes porcentajes y simplemente recordaron lo que sabían y fortalecieron el concepto en el caso de la gráfica donde estuvo la mayor dificultad. Para la parte algorítmica de la resolución de estos problemas no hubo dificultad y los estudiantes terminaron simplemente multiplicando por la fracción asociada al término porcentual. Lo interesante fue analizar cuál era el porcentaje que necesitaba los problemas. Para las gráficas los estudiantes no calcularon exactamente el ángulo de la porción, sino que simplemente estimaron el porcentaje que se necesitaba para dibujar la gráfica.




El punto número trece tuvo un análisis concienzudo de los datos suministrados en donde los estudiantes observaron las diferencias entre los valores dados y dieron sus argumentos de acuerdo a estos datos. Nuevamente era posible crear una relación entre las variables dadas para que los estudiantes llegaran a sacar un argumento matemático utilizando lo visto en este tema. Aun así los grupos lo hicieron de una forma que para ellos fue considerada más sencilla que no implicaba en este caso el intentar crear una relación.



| | habitantes | Supeçficie | 6ueno | regular | malo |
|---|---|---|---|---|---|
| Bogota | 7'770.000 | 1776 | 20,75% | 23,69% | 55,55% |
| New York | 8'340.000 | 1215 | 69% | 31% | 5% |
| | - 570.000 | 561 | -43,25% | -7,31% | -50,55% |

Al compacar con New York se nota que es una ciudad que tiene mas habitantes y menos supeficie logra tener el triple de 6ueno.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bogota | 7'770.000 | 1776 | 20,75% | 23,69% | 55,55% |
| Los Angeles | 3'795.000 | 1290 | 43% | 20% | 37% |
| | 3'975000 | 488 | -22,25% | 3,69% | 18,55% |

Al compacar con Los Angeles se nota que tiene menos habitantes pero menos supeficie y logra tener el doble de 6ueno.

Bogota esta retrasada mal

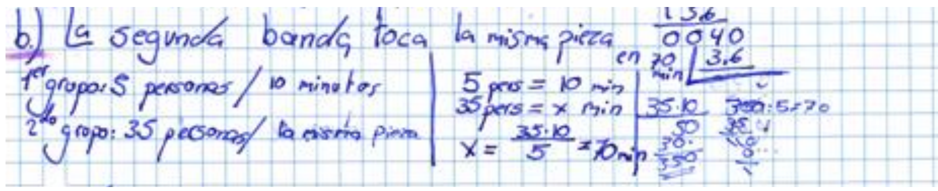
La actividad fue una de las mejores recibidas por los estudiantes debido a la disposición y forma de trabajar en la misma. El concepto de porcentaje fue repasado ya que había sido trabajado en años anteriores por los muchachos, aunque aquí se mostró el cómo el porcentaje es una situación de proporcionalidad que se usa mucho en la vida cotidiana. La actividad tuvo la dificultad de tener textos largos y que hizo a los estudiantes que tuvieran que analizar mucho y comprender bien la lectura; esto hizo que en algunos casos se demoraran en entender y encontrar la información que necesitaban utilizar.

### 4.8. Análisis de la actividad "Quiz"

En la primera pregunta la mayoría de estudiantes la contestaron haciendo uso de la constante de proporcionalidad, es decir, ellos identificaron que la situación es proporcional y hallaron la razón de los valores dados para luego encontrar las cantidades de pan posible de hacer. Dos de los estudiantes parecen formar la tabla de valores para encontrar la proporcionalidad. En el vocabulario de la teoría local de la EMR, están creando una tabla de razones, es decir, crearon su propio modelo para la solución de estos problemas.


Aunque algunos estudiantes tienen operaciones mal hechas y la forma de plantear la razón aparece mal escrita (parece que fuera la razón inversa), aun así, la razón encontrada y utilizada es la correcta. Otro estudiante muestra haber encontrado la razón, y hace uso de ella, pero no tiene claro aún el procedimiento, por ello parte de una conjetura inicial y luego logra llegar a la razón. El estudiante demuestra un nivel de razonamiento proporcional apropiado, pero aún no ha formalizado y llegado a un modelo general de solución.

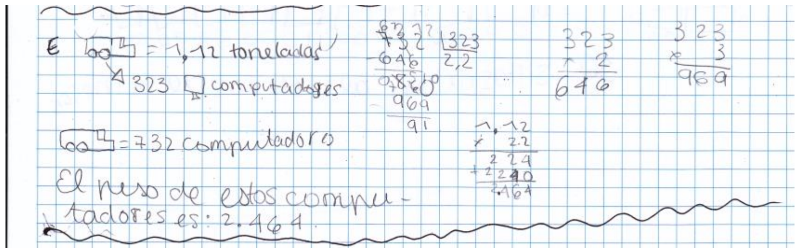
En el problema B la mayoría de estudiantes entendieron que la situación no es de proporcionalidad y dieron la respuesta correcta afirmando que los músicos emplearían el mismo tiempo porque es la misma pieza musical. Hubo estudiantes que no analizaron la situación y simplemente decidieron resolver la situación como habían estado resolviendo las actividades propuestas en clase, entre ellos uno de los pocos estudiantes que han decidido utilizar la regla de tres como algoritmo para situaciones proporcionales.




En el problema C la mayoría de estudiantes no tuvieron dificultad alguna en resolverlo de forma acertada; solo dos estudiantes contestaron de forma incorrecta, nuevamente uno de ellos es uno de los que utiliza la regla de tres como procedimiento.

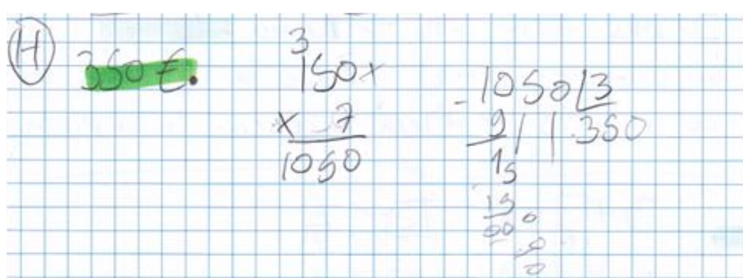
En caso contrario el problema D fue respondido incorrectamente por la mayoría de los estudiantes y solo tres estudiantes consideraron que la situación no era de proporcionalidad. Por lo observado en anteriores actividades, parece que los estudiantes asociaron la proporcionalidad con situaciones en las cuales la velocidad o rapidez es constante pero no analizaron que en el problema la velocidad en efecto sí era constante en ambos corredores, lo que hace que la diferencia de distancia no varía con el transcurso del tiempo.

El punto E fue resuelto correctamente por la mayoría, aunque algunos no dieron respuesta numérica y solo plantearon el procedimiento, esto debido al uso de decimales y las operaciones que debían realizar. Analizando, se aprecia que el razonamiento fue el correcto. Los estudiantes hallaron diferentes razones ya que unos sacaron el peso por computador y otros sacaron la relación entre el número de computadores antes y el número de computadores actual.

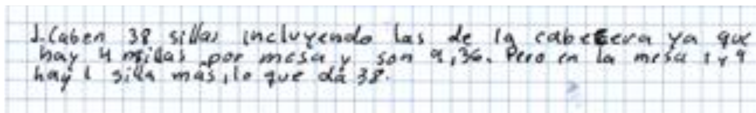


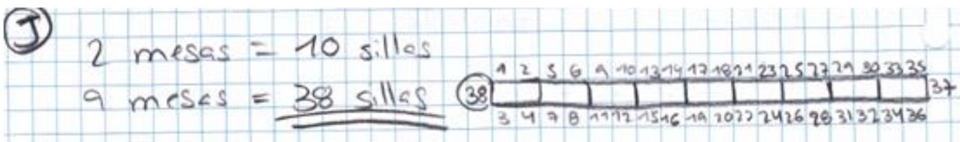

El ejercicio F fue contestado y analizado correctamente por muchos estudiantes. Los estudiantes que habían analizado anteriormente situaciones no proporcionales como si fueran de proporcionalidad, siguieron suponiendo que ésta situación sí lo era. El ejercicio G fue resuelto también apropiadamente por la mayoría de los estudiantes y hubo sólo un estudiante que no logró entenderlo y dio como respuesta el producto 16*4=96, lo que significa que el estudiante entendió que eran a 6000 cada paquete.

El punto H todos los estudiantes lo hicieron de forma adecuada, la estrategia utilizada por los estudiantes fue multiplicar el antiguo premio individual por el número de ganadores para así tener el premio semanal y luego dividir por el número de actuales ganadores para obtener el valor individual actual del premio.




El punto I fue otro de los ejercicios bien elaborados por la gran mayoría, utilizando la misma estrategia que fue separar la locomotora del tren y luego hallar el número de vagones que tenía el tren completo para luego calcular la nueva medida del tren con los nuevos vagones. El punto final fue respondido correctamente por los estudiantes utilizando diversas técnicas, la estrategia más utilizada fue recurrir al dibujo para darle solución al problema. Algunos estudiantes encontraron que había una razón del número de sillas por mesa y la multiplicaron, sumando al final las sillas que se encontraban en la cabecera.




Para la agrupación la mayoría logró catalogarlos de acuerdo a si son situaciones proporcionales o no; tres de los estudiantes del grupo no logaron observar esta categorización y, al analizar los resultados que ellos obtuvieron, se puede apreciar que no se han apropiado correctamente cuando una situación es o no de proporcionalidad; entre ellos está uno de los estudiantes, el que se ha propuesto utilizar la regla de tres como algoritmo y quien en casi todas las preguntas la usó para dar su respuesta. Se muestra el análisis de un estudiante que agrupó las situaciones planteadas de acuerdo a si tenían constante de proporcionalidad o no.

A. Martín llevaría 249 Kg de pan porque

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 12 | 23 |
| 3 | 16 | 249 |

La constante de proporcionalidad es $1,3 = \frac{4}{3}$.

B. No hay proporcionalidad la pieza musical dura lo mismo.

C. Melisa tendría 9 años. No hay constante de proporcionalidad porque siempre le va a llevar 3 años, entonces a 6 le sumo 3.

D. La constante de proporcionalidad es 3 porque es $15 \div 5$. Entonces 40 lo multiplico por 3 y me da 120.

E. La constante de proporcionalidad es 3,47 entonces multiplicamos $732 \cdot 3,47 = 2540,04$ Kg

F. No hay constante de proporcionalidad se demoran las mismas 18h.

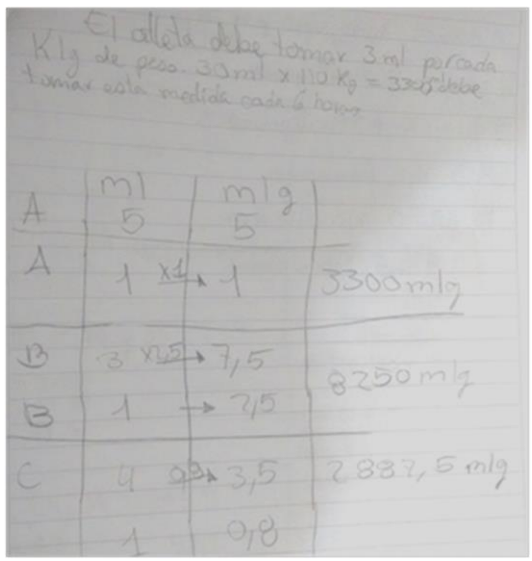
G. No hay constante de proporcionalidad solo se multiplica $6000 \cdot 16 = 96000$. El profesor deve pagar 96000.

H. Se multiplica $7 \cdot 150 = 1050$ y luego se divide $1050 \div 3 = 350$. Cada persona recibiría 350 €.

Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes ya tiene una estrategia que utiliza para situaciones directamente proporcionales y en la gran mayoría es adecuada; la estrategia predominante es encontrar la constante de proporcionalidad y multiplicar luego por la magnitud que está siendo encontrada el valor unitario. La mayoría también distingue cuándo este procedimiento es apropiado y no se equivoca en situaciones no proporcionales siempre y cuando se trate de la misma estructura de pregunta; por otro lado hay que decir que el punto D hizo confundir a la mayoría de estudiantes haciéndolos pensar que la situación era de proporcionalidad.

### 4.9. Análisis prueba final

La primera pregunta fue correctamente contestada por 13 de los 16 estudiantes de los estudiantes, la estrategia que más se utilizó fue la de hallar el factor de la relación, luego multiplicar por el número de veces que está el componente en la dosis y después los resultados fueron multiplicados por el peso del atleta o hicieron al revés, primero hallaban la cantidad de dosis que debería tomar el atleta y luego multiplicaban por la constante de proporcionalidad. Algunos estudiantes (2) lo solucionaron utilizando la regla de tres, la cual también utilizaron correctamente.

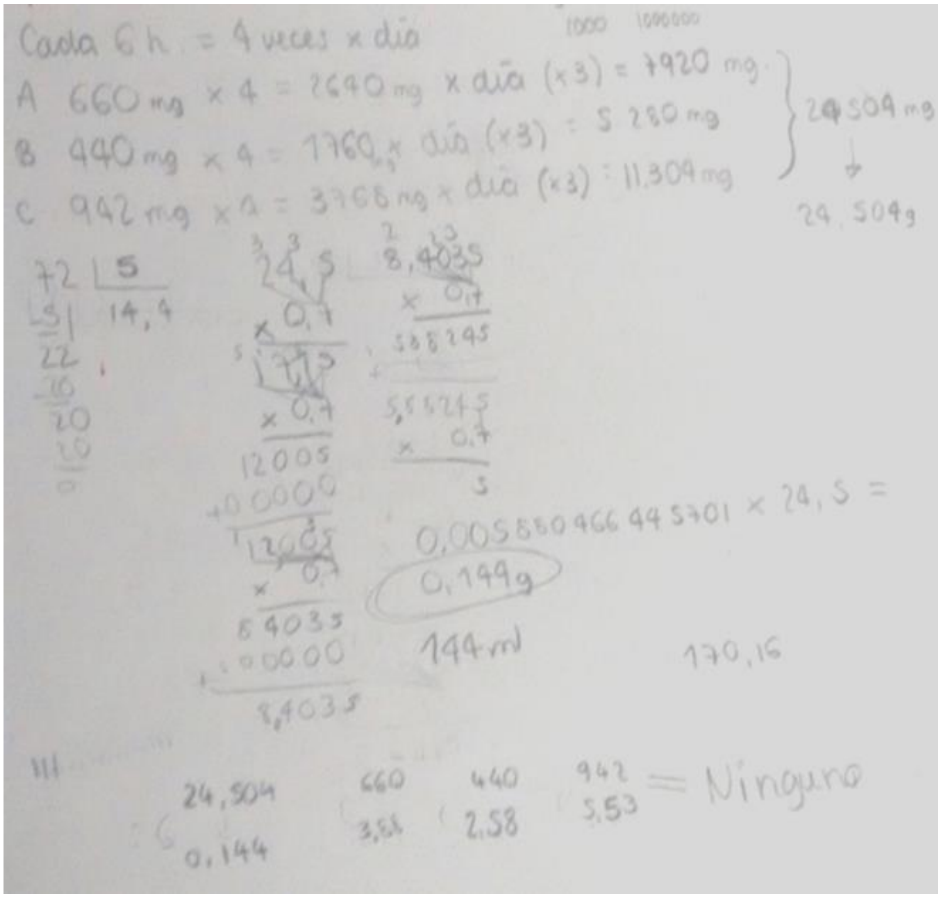



Una estudiante lo contestó mal ya que no tuvo en cuenta las unidades de medida y terminó uniendo los miligramos con los mililitros lo que hizo que se confundiera en su resultado.

En la segunda parte, que es una de las más retadoras, se propuso varias estrategias y análisis pero infortunadamente los estudiantes no comprendieron bien la situación y dejaron de tener en cuenta algunos partes importantes de ella.

Un estudiante comprendió correctamente que se necesitaba pensar en las dosis diarias que tomaba el atleta, y también intentó hallar el porcentaje que iba perdiendo el atleta. El ejercicio perdió sentido porque fue precisamente el estudiante que tuvo mal el primer punto y cuando halló el valor de la cantidad de medicamento que había consumido, la dosis resultante no era mayor en mucho a los 10 gramos y al reducir el 70% los resultados no daban ninguno con sobredosis.

El análisis hecho para el porcentaje del componente que tiene el cuerpo es interesante. Primero calculó cuantos gramos había consumido durante todas las dosis durante los cuatro días y al final lo sumó para obtener los gramos totales de los tres componentes en las dosis (parece que piensa que la relación puede variar si no lo hace solo con cada componente, sino que debe pensar en todo el medicamento). Halla las veces que el cuerpo del atleta en los tres días limpia el cuerpo el 70% (esta parte aunque está mal porque ella omite que el cuerpo queda con un porcentaje del medicamento lo que hace que la situación no sea directamente proporcional, tiene un razonamiento que hace que el estudiante piensa en que sí lo es) y el resultado lo multiplica por el valor que encontró que tomaba de las tres dosis y luego las suma. Luego planteó una relación entre la cantidad total de la dosis que se tomó el atleta en los cuatro días. Esto hizo que planteara una constante de proporcionalidad que terminó multiplicando por la cantidad que encontró de cada componente.


Cada 6 h = 4 veces x día

1000 1000000

A 660 mg x 4 = 2640 mg x día (x3) = 7920 mg

B 440 mg x 4 = 1760 x día (x3) = 5 280 mg

C 942 mg x 4 = 3768 mg x día (x3) = 11.304 mg

24.504 mg

24,504g

72 | 5
14,4

24,5
x 0,7

8,4035

0,00588046644 5701 x 24,5 =

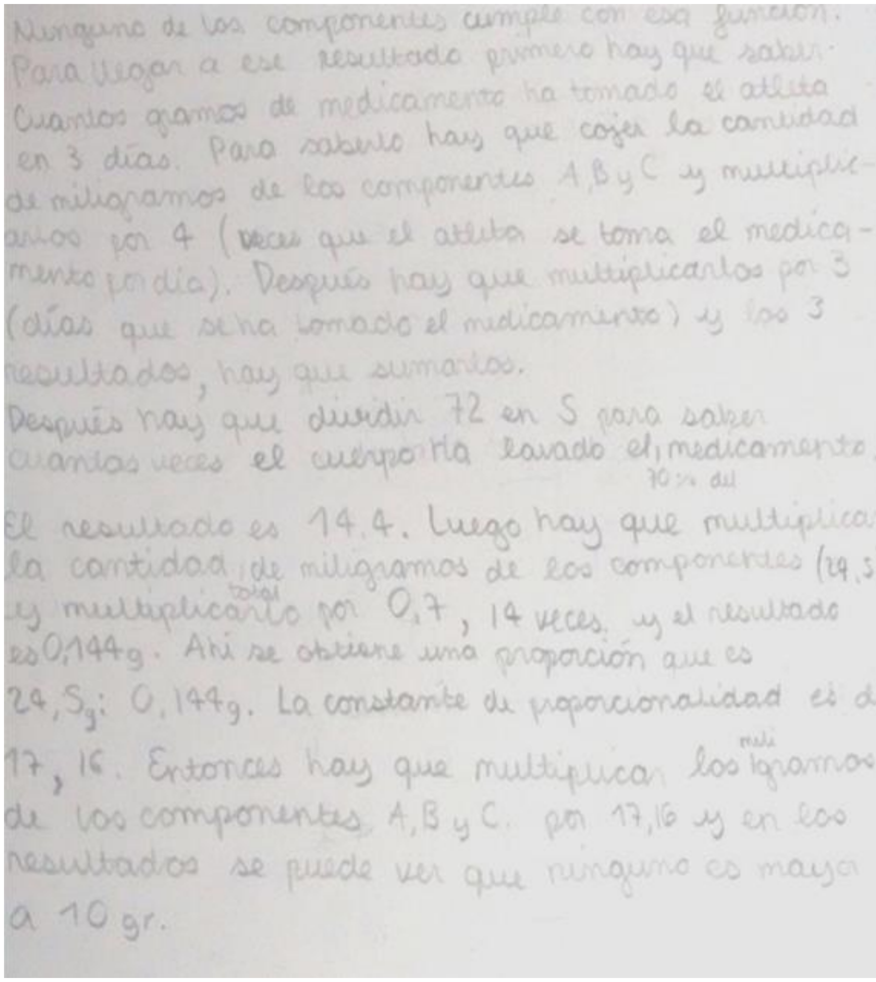
0,144g

144 ml

170,16

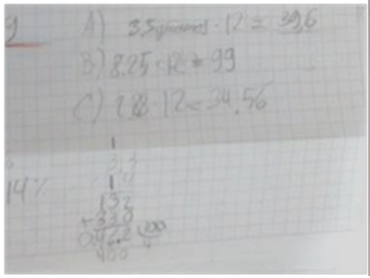
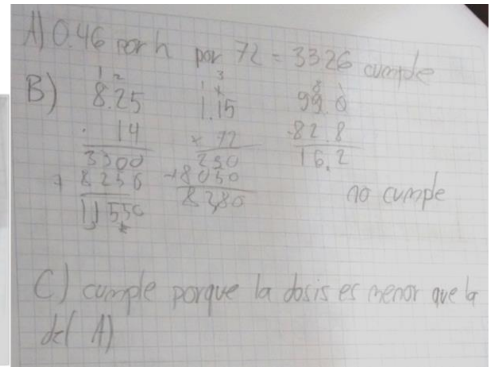
24,504 660 440 942

0,144 3,88 2,58 5,53 = Ninguno



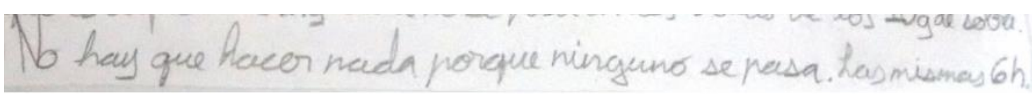
Ninguno de los componentes cumple con esa función.
Para llegar a ese resultado primero hay que saber
Cuantos gramos de medicamento ha tomado el atleta
en 3 días. Para saberlo hay que cojer la cantidad
de miligramos de los componentes A, B y C y multiplic-
arlos por 4 (veces que el atleta se toma el medica-
mento por día). Después hay que multiplicarlos por 3
(días que se ha tomado el medicamento) y los 3
resultados, hay que sumarlos.
Después hay que dividir 72 en 5 para saber
cuantas veces el cuerpo ha lavado el 70% del medicamento.
El resultado es 14,4. Luego hay que multiplicar
la cantidad de miligramos de los componentes (24,5)
total
y multiplicarlo por 0,7, 14 veces. y el resultado
es 0,144g. Ahí se obtiene una proporción que es
24,5g: 0,144g. La constante de proporcionalidad es de
17,16. Entonces hay que multiplicar los miligramos
de los componentes A, B y C. por 17,16 y en los
resultados se puede ver que ninguno es mayor
a 10 gr.

Otro estudiante que había resuelto el primer punto correctamente, primero convirtió los resultados anteriores de miligramos a gramos, luego halló la relación entre cuánto porcentaje correspondía a una hora de la operación que hace el cuerpo de lavar el medicamento y luego lo multiplicó por el número de horas en los tres días. Claramente el estudiante omitió que el atleta tomaba la medicina cada seis horas y solo lo hizo para la primera dosis lo que hizo que el valor no llegara a estar cercano. También le falto analizar que hay residuos cada cinco horas (como lo hizo el anterior alumno) y lo manejó como una relación directamente proporcional.


El error que cometió el último estudiante fue el que cometieron los demás estudiantes, que ignoraron la condición inicial de que el atleta tomaba una dosis cada seis horas y los estudiantes solo pensaron en el porcentaje que el cuerpo iba eliminando. Esto hizo que el ejercicio pareciese fácil de resolver ya que si se observaba desde el comienzo todos los componentes eran menores de 10 gramos y a medida que desarrollaron su estrategia, los resultados iban siendo menores. Tampoco hubo consideración en que aunque la situación maneja los porcentajes, no era una situación proporcional y los estudiantes no se acercaron a este razonamiento.

Para el último aparte, los estudiantes no hicieran nada ya que como el anterior punto no arrojaba ningún problema, luego decidieron que no necesitaban hacer algo.




Entre los apartes que se lograron observar que los estudiantes entendieron y desarrollaron, se pudo analizar que el modelo para resolver los problemas que involucran la proporcionalidad fue claro y era ya espontánea. Se evidenció que los estudiante ya tienen un 'modelo para' a modo de la teoría de la EMR.

Infortunadamente, los estudiantes no lograron entender el problema lo que hizo que la prueba final no hubiera cumplido el objetivo de observar el nivel de significado que adquirieron en el concepto de proporcionalidad. Es claro que el problema estuvo en un nivel más elevado de lo que se observó en clase y los estudiantes asumieron una situación de proporcionalidad directa. Tal vez se debió percibir que era necesario acercar o aclarar esta parte al momento de entregar el ejercicio. También se debió incluir los datos de la dosis y las horas indicadas al atleta al inicio de la segunda parte del problema ya que la gran mayoría de estudiantes omitió esta parte porque no la relacionaron con la pregunta.

La prueba final debe ser modificada para que se eviten las confusiones que tanto afectaron las posibilidades de los estudiantes de resolver los problemas propuestos. También es posible dividir el problema en problemas diferentes para evitar que sea un texto muy largo que sea de tan difícil comprensión para los estudiantes.

### 4.10. Análisis de la encuesta final

Para analizar la encuesta final se tendrá la numeración de la siguiente lista para poder analizar las respuestas dadas por los estudiantes.

1. La manera de trabajar este tema será importante para mi futuro.

2. Trabajar de esta manera me ayuda a concentrarme más analizar el tema.

3 Creo que la manera de trabajar este tema puede ser valiosa para mí.

4 Después de trabajar de esta manera durante tiempo, me sentí bastante capaz.

5 Estoy satisfecho con mi rendimiento.

6 Trabajar de esta forma me ayuda a comprender mejor las cosas.

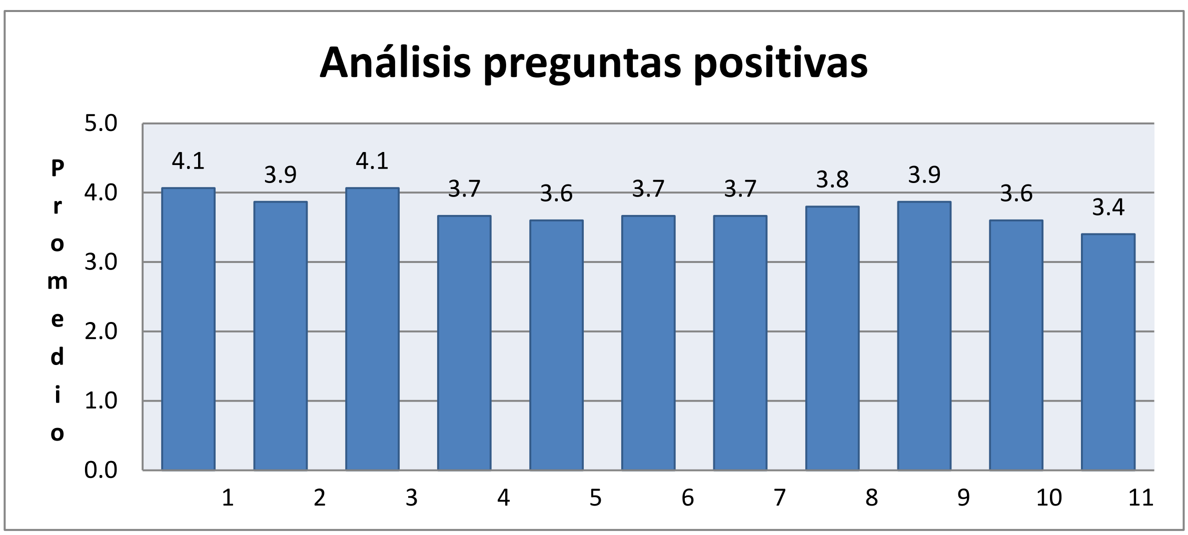
7 Presto más atención cuando el tema se desarrolla y explica de esta manera.

8 Trabajar de esta manera me ayuda a conseguir mejores notas en mis trabajos.

9 Desarrollar los temas de esta manera me ayuda a trabajar mejor con la gente.

10 Estaría dispuesto a trabajar de esta manera de nuevo porque siento que me benefició.

11 Puedo trabajar durante más tiempo sin perder mi concentración cuando se trabaja de esta manera.



Como se observa en la gráfica, el promedio de las respuestas de los estudiantes se encuentran cercanas a cuatro por encima y debajo; es decir, que se podría decir que la mayoría están de acuerdo con las afirmaciones hechas. Aunque los valores no están cercanos a totalmente de acuerdo, observando los datos individuales se puede analizar que hubo un grupo de estudiantes que estuvieron en descuerdo en la mayoría de las preguntas analizadas mientras que los demás se mostraron de acuerdo y totalmente de acuerdo.

Entre las preguntas que alcanzaron una mayor puntaje se encuentra la que afirma que la manera de trabajar este tema es importante para el futuro (1), donde los estudiantes muestran la importancia del mismo aunque la pregunta no afirma que sea importante para su carrera futura como en la encuesta inicial, es decir que se podría decir que ven esta forma de trabajo más cercana a su vida cotidiana. Analizando la otra pregunta que obtuvo el mayor puntaje (2), se puede llegar a analizar que se confirma el valor que le dieron a la forma de trabajar este tema, lo que no se puede saber es si a la forma de las actividades, al trabajo en grupo o a ambas. La pregunta que obtuvo una menor valoración es la que afirma si este tipo de actividad lo ayuda o no a concentrase (11); muchos estudiantes afirmaron que era muy fácil distraerse durante su trabajo en grupo, sea por el mismo grupo o por las preguntas. Las otras preguntas mantienen casi un rango en común y se puede decir que están de acuerdo con estas afirmaciones.

La siguiente lista muestra el orden que tendrán las próximas preguntas a analizar

12 No logro mi rendimiento óptimo cuando se trabaja de esta manera.

13 Cualquier forma de trabajar me parece interesante.

14 Con esta forma de trabajar no logro hacer las cosas muy bien.

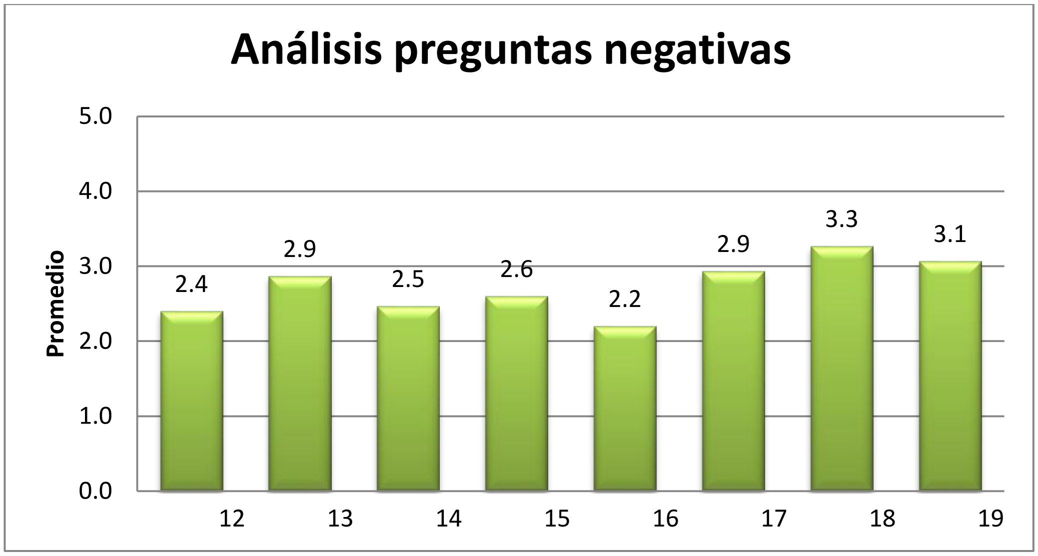
15 La manera de desarrollar la clase no mantuvo del todo mi atención.

16 Trabajo como indica el profesor solo porque eso agrada al profesor.

17 Trabajo como indica el profesor porque me lo exigen en clase.

18 Me despisto más en clase cuando se desarrolla un tema de esta manera.

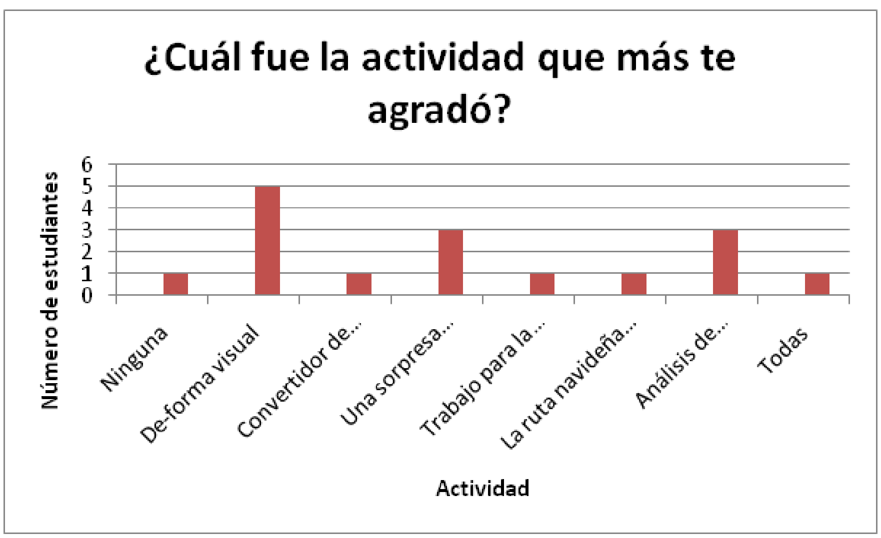
19 No me esforcé mucho en trabajar bien con el grupo.




Al observar la gráfica de los promedios de los puntajes que obtuvieron las preguntas formuladas, se puede analizar que los puntajes son altos y que muchos no están en desacuerdo y tienden más a estar en posición de no ver ningún beneficio de la puesta del trabajo. Entre las afirmaciones que obtuvieron el mayor puntaje (18), se confirma lo dicho anteriormente ya que los estudiantes no están en desacuerdo con esta afirmación lo que hace pensar que hubo problemas de desconcentración en la puesta de trabajo en grupo. Por otro lado también se muestra un alto valor en la afirmación sobre la actitud de trabajo en grupo (19), donde se evidencia que los estudiantes asumen que tuvieron problemas de disciplina en el trabajo en grupo y no se esforzaron en querer trabajar. Respecto a la pregunta donde los estudiantes parecen estar más en desacuerdo es la que afirma que trabajaron de esa forma porque quieren agradar al profesor (16), pero a la siguiente aseveración de si lo hicieron porque se les exige (17), obtiene uno de los puntajes más altos, lo que hace pesar que sí es como se afirma en la última afirmación y que los estudiantes se dispusieron así porque se les pide pero no para agradar al profesor, sino que es obligación. Como esta pregunta no se puede analizar correctamente por lo dicho anteriormente, la que se puede ver entonces como la que en realidad los estudiantes están más en desacuerdo es la que afirma que no logran un rendimiento optimó trabajando de esta manera (12), lo que se podría entender como que sí les parece apropiado trabajar bien de esta forma y aquí se puede concluir que es la forma de las actividades la que les ayudó a tener un rendimiento óptimo ya que por las otras consideraciones estudiadas anteriormente se puede decir que no les gustó el trabajo en grupo.

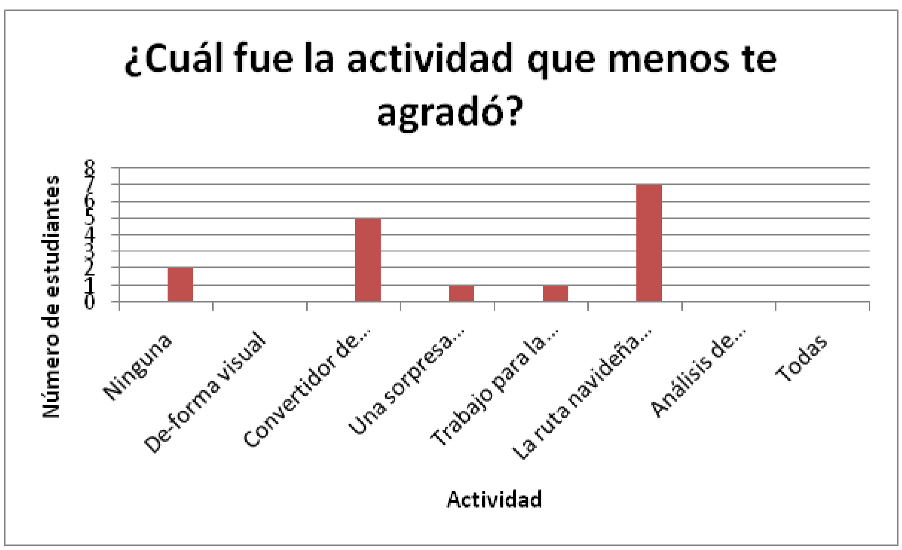
En general parce que los muchachos no se mostraron muy a gusto en especial con el trabajo en grupo ya que mostraban que se fomenta la desconcentración y por ende la disciplina no es la adecuada para poder avanzar de forma correcta.

Respecto a las preguntas abiertas, sobre la pregunta a ¿cuál fue la actividad que más te agradó? los estudiantes contestaron así:



A los estudiantes les llamó la atención más la actividad donde se trabajó la proporcionalidad de forma visual y según las justificaciones fue porque era la más fácil y otros afirmaron que trabajaban diferentes escenarios que les enseñaban cosas nuevas. Para las demás actividades las razones dadas estuvieron variadas, la mayoría fue porque les parecieron fáciles y divertidas, dos de los estudiantes dieron como justificación el trabajo en grupo en esa actividad. Uno afirmó que le gustó porque su grupo trabajó mucho en esa actividad; otro afirmó que le gustó porque le tocó con un compañero que 'no es tan amigo' pero que trabajaron bien y les fue bien. Se puede observar a un estudiante que se muestra inconforme con todas las actividades.

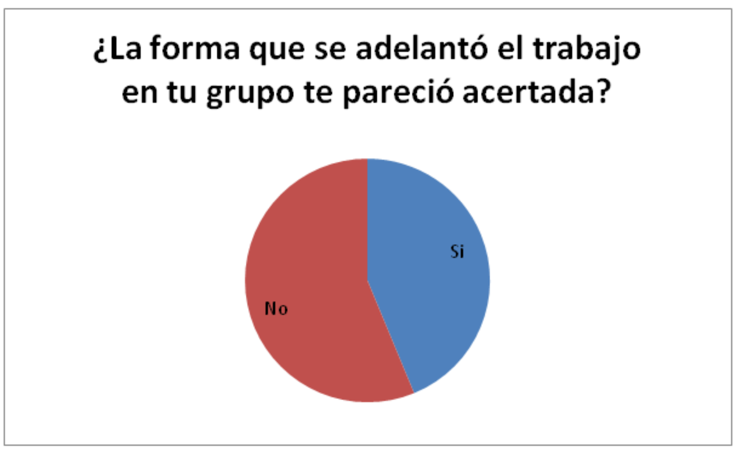
Sobre la segunda pregunta abierta que era ¿Cuál es la actividad que menos te agradó? Los resultados son:




Se puede analizar que la actividad que menos les gustó fue la de la ruta navideña, seguida por la del convertidor de divisas donde todos los estudiantes dieron como justificación para sus elecciones, que las eligieron porque fueron muy difíciles para ellos. Cabe llamar la atención que la estudiante que en la anterior pregunta dijo que ninguna actividad le gustó, en esta parte también contestó que ninguna le desagradó sin dar ninguna justificación, mientras que la estudiante que dijo que todas le habían gustado, sí afirmo que ninguna le había disgustado.

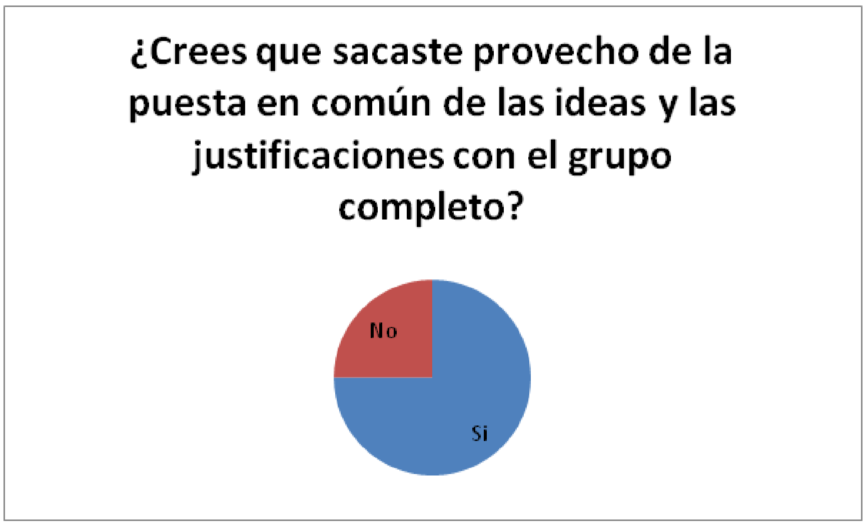
Para la siguiente pregunta acerca de si el tema de proporciones lo identifican con experiencias de la vida cotidiana, todos dijeron que sí aunque para algunos no les fue fácil mostrar una que distara de las trabajadas en clase; entre las repuestas dadas se encuentra la de ir de compras a *Carulla*, las entradas al cine, pagar por diferentes productos, en las mezclas químicas, el pagar los impuestos, las cuentas de los servicios, la cantidad de lluvia, entre otras.

Sobre la pregunta ¿La forma que se adelantó el trabajo en tu grupo te pareció acertada? los estudiantes contestaron




Los estudiantes en este punto mostraron que no les gustó el trabajo en grupo en general, entre las justificaciones dadas unos afirmaban que ellos trabajaban solos y los otros no ayudaban, otros dijeron que hablaban mucho y no hicieron casi nada, otro justificó diciendo que el grupo no le prestaba la hoja para trabajar; algunos de los que contestaron NO dijeron que no les gustó con algunos compañeros especificando con quienes y que con otros sí alcanzaron a hacer algo. Los que contestaron afirmativamente dijeron que el grupo se comportó bien y trabajaron todos juntos. Todos mostraron que sus respuestas estuvieron asociadas a la disciplina y actitud que tomaron en los grupos.

Sobre la última pregunta se tiene:




A los estudiantes les pareció que el trabajo con el grupo en general fue bueno para ellos en general, entre las justificaciones se dieron '*me enseñaron muchas cosas'*, '*porque nosotros podíamos mostrar nuestro punto de vista*', *'porque conoces los procedimientos que hicieron los otros y en un futuro los puedes hacer'*, *´porque me ayudó a entender´*, entre otros.

Los estudiantes que afirmaron que NO, sus justificaciones fueron como *´porque mi grupo no hacía nada*' o 'porque *no trabajamos en grupo'* lo que muestra que no les gustaba porque ellos no participaban en las socializaciones y parece que no les gustaba o se sentían incómodos.

Del análisis general de la encuesta final se puede observar que en general el curso tuvo dificultades en el trabajo en grupo haciendo que se incrementara la indisciplina y el poco trabajo. Por otro lado al observar sobre las actividades planeadas los estudiantes parece que les gustaron la mayoría y mostraron que dos de ellas estaban tal vez por encima de su nivel lo que hizo que no les gustaran tanto como las otras.

## 5. CONCLUSIONES

El concepto de proporcionalidad que construyeron los estudiantes fue propio de ellos mismos ya que las intervenciones donde el docente se acercó fue más para evitar las desviaciones profundas del tema o para la institucionalización de los conceptos que se estaban trabajando; luego la cimentación fue personal y por ello mucho más significativa de lo que usualmente se hacen en los cursos de matemática. Ello guarda coherencia con la reinvención guiada de la EMR.

En el quiz se pudo observar que más del 80% de los estudiantes logró caracterizar este tipo de razonamiento y utilizar las estrategias que generaron en los grupos para solucionar los problemas planteados. Se considera que en el momento en que el estudiante identifica correctamente las situaciones que no son proporcionales pero que parecen serlo, muestra que ha construido un significado robusto para el concepto de proporcionalidad.

La lectura de los textos siempre tuvo mucho direccionamiento dado que los estudiantes han trabajado poco con textos en español (hasta este año) lo que hizo que se necesitara mucho del acompañamiento para la asimilación de las lecturas; esta misma falencia se evidenció mucho en el momento en que los estudiantes se enfrentaron solos con un problema que pedía una mayor comprensión de lectura de la que ellos manejan, como fue el caso con la prueba final.

La generación por parte de los estudiantes de un algoritmo para enfrentar las situaciones proporcionales, mostró la construcción del modelo general que partió de situaciones específicas que se resolvieron. Esto hará que los estudiantes no utilicen su proceso como un simple algoritmo de memoria sino que lo usarán de forma espontánea cuando identifiquen una situación apropiada.

La teoría de EMR mostró una riqueza que hay que seguir explorando debido a que cuando los estudiantes se enfrentaban a los problemas había momentos en los cuales no solo construían el concepto que se estaba guiando, sino que también analizaban conceptos anteriores y futuros, y los estudiantes se veían interesados en ocasiones a comprender otros conceptos que se involucraban en las actividades, en especial en estas actividades el manejo de los números racionales en sus dos expresiones más comunes.

Existieron momentos en que los estudiantes al sumergirse en el contexto de las actividades generaron preguntas sobre otros temas de la matemática, lo que hizo que fuera el momento propicio para abordarlos aprovechando el interés y curiosidad que mostraban los muchachos por resolver sus inquietudes. Infortunadamente la linealidad de los planes de estudio en el colegio por lo general obligan a seguir una temática particular, lo que hace que se desaprovechen estos momento de utilizar la matemática para argumentar y darle respuestas a estas inquietudes naturales.

Los problemas proveían la oportunidad para que los estudiantes intentaran comprobar sus respuestas analizando si la respuesta dada era lógica en el contexto. Aunque en algunas ocasiones no era suficiente para comprobar la respuesta, sí hizo que los estudiantes en muchas ocasiones retomaran su papel de analizar si estaban correctas las respuestas en vez de preguntar si lo que estaban haciendo estaba bien hecho.

El trabajo en grupo no tuvo los desenlaces que se esperaban, infortunadamente el trabajo en grupo lo que hizo fue fomentar la indisciplina en los grupos, lo cual se evidenció a la hora de la encuesta final, donde los estudiantes mostraban su inconformismo con los grupos que les correspondieron. Analizando la teoría de *Comunidades de práctica*, los estudiantes en pocas ocasiones se sintieron comprometidos con la comunidad y su identidad se inclinó a hablar de temas diferentes a lo que se estaba trabajando. En ocasiones, la misma actividad hacía que ellos empezaran a involucrarse con discusiones del tema pero que se alejaban de las preguntas que se les habían propuesto.

A la hora de socializar, los estudiantes empezaban tímidos, pero cuando encontraron que sus argumentos eran válidos para el grupo y que sus justificaciones y argumentaciones fueron aceptadas en general, los estudiantes mostraron un impulso extra para continuar participando. Por otro lado, cuando sus aportes tenían las operaciones o respuestas erradas, los estudiantes fueron respetados ya que muchos grupos en un comienzo habían presentado también dificultades parecidas e hizo que se identificaran y no hubiese algún tipo de rechazo por ello.

La puesta del trabajo en grupo y las actividades no solo desarrollaba habilidades y conceptos matemáticos, ya que los estudiantes también debieron hacer uso de su habilidad de comprensión de lectura y de las habilidades sociales comunes que la sociedad continuamente pide que se deba trabajar en nuestras aulas.

Aunque el trabajo en grupo no fue óptimo, hubo varios momentos en que los muchachos se involucraban y suscitaban discusiones de los temas que se trabajaban con argumentos matemáticos que son provechosos para procesos como la abstracción y la argumentación en los estudiantes.

El estudio realizado muestra que la teoría de la EMR es propicia para la construcción de significados en los estudiantes, ya que hace que los nuevos conceptos sean más significativos y estén más enlazados a situaciones que el estudiante pueda vivenciar en su diario vivir. Para estudiantes que no son muy hábiles en operaciones matemáticas y no ven mucha la relación del área de la matemática con si futura vida profesional, la construcción de significados matemáticos con esta teoría es muy apropiada ya que incentivan la curiosidad sobre cosas que tal vez han pasado desapercibidas para los estudiantes y con las actividades apropiadas se puede volver a mostrar lo asombroso de las matemáticas y su continua utilidad en el mundo actual.

## 6. RECOMENDACIONES

Es necesario destinar más tiempo del estipulado en las actividades para que se pueda sacar toda la ventaja a las mismas. Algunas son tan ricas de conceptos, de escenarios y de las posibles estrategias de los estudiantes, que el poderlas realizar en un tiempo más extenso haría que fuera más adecuada la participación y se arrojarían resultados aun mejores.

Las actividades pueden ser bien aprovechadas por otros docentes y no es necesario que se hagan en la secuencia diseñada, todas las actividades aquí propuestas, simplemente pueden ser llevadas al aula para que se promueva un aprendizaje significativo para la construcción de los conceptos.

En el colegio donde se hizo la experiencia los cursos están divididos de forma que los estudiantes más adelantados en el área de matemáticas están en un curso diferente al que se encuentran los estudiantes del estudio. La falta de pares con un mayor conocimiento pudo restringir las posibilidades de que se produjeran mejores resultados en el trabajo en grupo, luego hay que evaluar la teoría para este tipo de escenario ya que hace que los resultados sean más lentos de lo esperado.

Fue claro que la construcción del modelo por los estudiantes partió de un ‘modelo para’ en donde resolvieron cada situación y que por medio de la matematización que elaboraron junto a sus compañeros se fue generando un ‘modelo de’ en el que les permite resolver problemas de proporcionalidad por simple inspección utilizando el algoritmo creado para ello. La motivación que se generó por esta teoría fue evidente en muchas actividades, y aunque hubo actividades que tuvieron un nivel más elevado, las microteorías de la EMR muestran que el papel de la investigación es justamente ir 'puliendo' las actividades para que cada vez sean más acordes y efectivas para los estudiantes.

Respecto al trabajo en grupo que fue el que más tuvo dificultades según los mismos estudiantes, se puede decir que no es sencillo el simplemente afirmar que en el aula de clase se puede conformar una comunidad de práctica. El compromiso personal y la identidad debe ser resultados de un proceso que los estudiantes desarrollen con el tiempo de trabajo; deben encontrar sus habilidades y dificultades para adquirir la identidad que los hará encontrar el papel que pueden desempeñar dentro de la misma comunidad, por lo tanto el proceso de asimilación y de inmersión en la comunidad debe estar dado porque la comunidad de práctica ya exista y para ello se debe fomentar el trabajo en grupo continuamente.

Es normal ver que en las aulas de matemáticas se beneficie el trabajo individual y la competencia, donde los estudiantes usualmente no trabajan en grupo y deciden trabajar solos por buscar resultados que en grupo parece que no se dan de la misma manera. Es necesario recapacitar el papel que tiene los estudiantes en el aula y que hace que busquen un bien individual, lo que concibe que la comunidad no tenga una estructura de bien común y hace que parezca que las matemáticas sean vistas como el resultado de algunos pocos matemáticos y no de una comunidad que ha ido evolucionando por los aportes grandes y pequeños de distintos individuos. Para llevar a los estudiantes a esta reflexión, la historia de las matemática es una de las herramientas que se debe implementar continuamente y con meditación de los protagonistas del aprendizaje, para que puedan observar que las matemáticas, más que el mostrar la inteligencia de algunos individuos, es la evolución de una forma de pensar que ha llevado a la humanidad a tener grandes avances en su progreso.

## 7. REFERENCIAS

**Ainley, J. & Pratt, D. (2005).** The significance of task design in mathematics education: examples from proportional reasoning. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 93-122. Melbourne: PME.

**Auzmendl, E.** (1992). *Las actitudes hacía la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Mensajero: Bilbao.

**Barrera-Osorio, F., Maldonado, D. & Rodríguez, C. (2012).** *Calidad de la educación básica y media en Colombia: diagnóstico y propuestas.* Serie documentos de trabajo. Facultad de economía. Universidad del Rosario. Bogotá.

**Bjorg, O. (2003).** *Making meaning of proportion: A study of girls in two icelandic classrooms.* Tesis doctoral. University of Wisconsin-Madison.

**Broekman, H. Van der Valk, T y Wijers, M (2000).** *Teacher knowledge needed to teach ratio and proportion in secondary school mathematics: on using the ratio table.* Universiteit Utrecht.

**Cai, J., Lo, J. & Watanabe, T. (2004).** *Developing ratio concepts: an asia perspective,* Mathematics teaching in the midle school. NCTM. E.E.U.U.

**Casey, J. (1885).** *The first six books of the Elemets of Euclid.* Third edition. Cornell University Press. Dublin.

**Cockcroft W. (1985).** *Mathematics counts.* Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of Dr WH Cockcroft. London.

**Dweck, C. y Elliot, E. (1983).** Achievement motivation. En E.M. Hetherington (ed.) *Socialization, personality and social development* . Wiley y Sons, Nueva York.

**Dweck, C. (1986).** *Motivational processes affecting learning*. American Psychologist, 41, 1040-1048.

**Redacción El Tiempo (1 de abril 2014).** Colombia se vuelve a rajar en pruebas Pisa. *El Tiempo*. Colombia. Recuperado el 9 de octubre de 2014 en http://www.eltiempo.com/vida-de-hoy/educacion/colombia-se-raja-en-pruebas-pisa_13761795-4

**Ellis, A. (2013).** *Teaching Ratio and Proportion in the Middle Grades.* NCTM.

**Farias D. y Perez J.** (2010). *Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración*. Formación Universitaria – Vol. 3 Nº 6 - 2010 35. Universidad Simón Bolivar. Caracas.

**Ferrucci, B., Carter, J. & Lee, H. (2009).** Proportional reasoning models in developing mathematics education curricula for prospective elementary school teachers. En *Models in Developing Mathematics Education* pp162-167. University of Applied Sciences, Dresden. Alemania.

**Font, V. (1994).** Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas, *SUMA, 17.*

**Freudenthal, H. (1968).** *Why to teach mathematics so as to be useful.* Educational Studies in Mathematics.

**Freudenthal, H. (1980).** *Major problems of mathematics education.* Proceedings of ICME-4.

**Freudenthal, H. (1982).** Fiabilite, validite et pertinence – criteres de la recherche surl'enseignement de la mathematique*. Educational Studies in Mathematics*, 13, 395-408.

**Freudenthal, H. (1983).** *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

**Freudenthal, H. (1991).** *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

**Godino, J. y Batanero, C. (2002).** Análisis de problemas sobre proporcionalidad y porcentajes en primaria. Proporcionalidad, *Matemáticas y su Didáctica para Maestros.* Proyecto Edumat-Maestros. España.

**Gomez, I. (2000).** *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Santillana. Madrid.

**Gravemeijer, K (1994).** *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

**Gravemeijer, K. (2004).** Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education*. Mathematical Thinking and Learning,* 6(2), 105–128. Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey.

**Gravemeijer, K. Van Galen, F. & Keijzer, R. (2005).** *Designing instruction on proportional reasoning with average speed.* In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 93-122. Melbourne: PME.

**Gravemeijer, K. & Bakker, A. (2006).** *Design Research And Design Heuristics In Statistics Education.* ICOTS-7,

**Hellriegel, D. y Slocum, J.** (2004). *Comportamiento organizacional*, 10ª ed., México D. F.: Thomson Learning Editores.

**Heuvel-Panhuizen, M. (1996).** *Assessment and Realistic Mathematics Education.* Tesis doctoral. Utrecht: Freudenthal Institute.

**Heuvel-Panhuizen, M. (2002).** Realistic Mathematics Education as Work in Progress. En: *Common sense in Mathematics education de Fou-Lai Lin* (Eds.). Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education. Pags: 1-43. Taiwan: National Taiwan Normal University.

**Heuvel-Panhuizen, M. (2003).** The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage abstract. *Educational Studies in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands

**Joyce, D. (1996).** *Euclid's Elements. Book V.* Obtenido en: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookV/bookV.html

**Lamon, S. (1994).** Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.* Albany, EE.UU. SUNY Press.

**Lange, J. (1996).** Using and Applying Mathematics in Education. En: A.J. Bishop, et al. (eds). 1996. *International handbook of mathematics education*, Part one. 49-97. Kluwer academic publisher.

**Lobato, J. Hawley, C. Druken, B. & Jacobson, E. (2011).** Middle School Teachers' Knowledge of Proportional Reasoning for Teaching. Artículo presentado como parte del simposio *Extending, Expanding, and Applying the Construct of Mathematical Knowledge for Teaching*, Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans

**Mendoza, M. (2014, 29 abril).** Los maestros siguen pensando que son dueños del conocimiento: Rodolfo Llinás. *El espectador*. Recuperado el 30 de octubre de 2014 de http://www.elespectador.com/noticias/educacion/los-maestros-siguen-pensando-son-duenos-del-conocimient-articulo-489552

**NCTM, (2000).** *Principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

**Passey, D., Rogers, C.** (2004). *The Motivational effect of ICT on pupils*. United Kingdom. Lancaster University. Obtenido en: http://downloads01.smarttech.com/media/research/international_research/uk/lancaster_report.pdf

**Puertas, L. (1994).** *Los Elementos. Libros V- IX*. Ed. Gredos. Colección Biblioteca Clásica. Madrid.

**Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.). (2011).** *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Los Polvorines:

Ediciones UNGS y EDUVIM.

**Romero, O.** (1985). Motivando para el trabajo. *Cuadernos Lagoven*. Serie siglo XXI. Caracas-Venezuela.

**Santamaria, F. (2006).** *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* Tesis de maestria. Universidad Nacional del Comahue.

**Secretaria de Educación Distrital (2013).** Boletín No. 125, *Vamos a A-PROBAR*!, Se busca reducir número de estudiantes que reprueban el año escolar. Bogotá D.C.

**Skovsmose. O. (1994).** *A Philosophy Of Critical Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

**Streefland, L. (1985).** *Searching for the rootsof ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory)*. Educational Studies in Mathematics.

**Taylor, P. (2006).** *Current Perspectives: The 16th ICMI Study*. University of Canberra.

**Treffers, A. (1987).** *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction*. The Wiskobas project. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

**Van Galen, F & Van Eerde, D. (2013).** *Solving Problems with The Percentage Bar*. IndoMS. J.M.E Vol. 4.

**Vázquez, M.** (2013). *La motivación en el aprendizaje de las matemáticas con PDI. Percepción de los estudiantes*. Seminario de iniciación a la investigación en TIC y Educación (Procesos Docentes). Universidad abierta de Cataluña. Barcelona.

**Wenger, E. (1998).** *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

# 6. ANEXOS

## 6.1. Anexo A ENCUESTA INICIAL

Por favor, elige para cada afirmación la opinión que más se acerque a tu sentir, teniendo en cuenta que:

| | |
|---|---|
| 1 | Totalmente en desacuerdo |
| 2 | En desacuerdo |
| 3 | Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo |
| 4 | De acuerdo |
| 5 | Totalmente de acuerdo |

| | |
|---|---|
| Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios | |
| La asignatura de matemáticas se da bastante mal | |
| La matemática es demasiado teórica para que pueda servirme para algo. | |
| Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de matemáticas. | |
| Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de ciencias, pero no para el resto de los estudiantes. | |
| Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo. | |
| Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional. | |
| Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión. | |
| Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas. | |
| Para mi futuro profesional la matemática es una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar. | |
| Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas. | |
| La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante. | |
| Me preocupa tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas. | |

Teniendo en cuenta cuáles son tus propias actitudes hacia las matemáticas, completa las frases de esta lista escribiendo las palabras que haga falta

Mis profesores de matemáticas del colegio son: ________________________

Las matemáticas son: ______________________________________________

Mis capacidades en matemáticas son: ______________________________

Para ser bueno en matemáticas se debe: ____________________________

Las matemáticas que trabajamos en clase son: ________________________

En matemáticas yo encuentro difícil: __________________________________

Un buen profesor de matemáticas debería: ______________________________

Podría aprender más matemáticas si: __________________________________

Mi motivación para hacer matemáticas es: _______________________________

Lo mejor que un profesor de matemáticas puede hacer por mí es: ___________

Cuando tengo la clase de matemáticas, yo: ______________________________

Mi experiencia más positiva con las matematicas se dio cuando: _____________

Mi experiencia más negativa con las matematicas se dio cuando:_____________

Cuando aprendo matematicas, yo: _____________________________________

¿Cuáles son las 3 clases que más te gustan? ____________________________

¿Y por qué te gustan?______________________________________________

¿Cuáles son las 3 clases que menos te gustan?__________________________

¿Y por qué no te gustan? ___________________________________________

Gracias por tus respuestas.

### 6.2. Anexo B ENCUESTA FINAL

Durante las pasadas semanas has estado trabajando un tema en clase de matemáticas. Las afirmaciones que aparecen a continuación se refieren a la manera en que tu profesor ha impartido este último tema.

Por favor, elige para cada afirmación la opinión que más se acerque a tu sentir, teniendo en cuenta que:

| | |
|---|---|
| 1 | Totalmente en desacuerdo |
| 2 | En desacuerdo |
| 3 | Neutral, ni de acuerdo ni en desacuerdo |
| 4 | De acuerdo |
| 5 | Totalmente de acuerdo |

| | |
|---|---|
| *No logro mi rendimiento óptimo cuando se trabaja de esta manera. | |
| La manera de trabajar este tema será importante para mi futuro. | |
| *Cualquier forma de trabajar me parece interesante. | |
| Trabajo como indica el profesor sólo porque eso agrada al profesor. | |
| Trabajar de esta manera me ayuda a concentrarme más a analizar el tema. | |
| Creo que la manera de trabajar este tema puede ser valiosa para mí. | |
| Después de trabajar de esta manera durante un tiempo, me sentí bastante capaz. | |
| Me despisto más en clase cuando se desarrolla un tema de esta manera. | |
| Estoy satisfecho con mi rendimiento. | |
| Trabajar de esta forma me ayuda a comprender mejor las cosas. | |
| No me esforcé mucho en trabajar bien con el grupo. | |
| Presto más atención cuando el tema se desarrolla y explica de esta manera. | |
| Trabajar de esta manera me ayuda a conseguir mejores notas en mis trabajos. | |
| *Con esta forma de trabajar no logro hacer las cosas muy bien. | |
| Desarrollar los temas de esta manera me ayuda a trabajar mejor con otra gente. | |
| Estaría dispuesto a trabajar de esta manera de nuevo porque siento que me benefició. | |
| Trabajo como indica el profesor porque me lo exigen en clase. | |
| Puedo trabajar durante más tiempo sin perder mi concentración cuando se | |

| | |
|---|---|
| trabaja de esta manera. | |
| *La manera de desarrollar la clase no mantuvo del todo mi atención. | |

Por favor responde las siguientes preguntas en el espacio en blanco con la amplitud que consideres conveniente teniendo en cuenta que debes pensar en el trabajo realizado las últimas semanas en clase de matemáticas.

De las actividades trabajadas ¿Cuál fue la actividad que más te agradó? ¿Por qué?

¿Cuál fue la actividad que menos te agradó? ¿Por qué?

¿El tema de razones y proporciones lo identificas con experiencias de tu vida cotidiana, diferentes a las tratadas en las actividades? ¿Cuáles?

¿La forma en que se adelantó el trabajo en tu grupo te pareció acertada? Si__, no__ ¿por qué?

¿Crees que sacaste provecho de la puesta en común de las ideas y las justificaciones con el grupo completo? Si__, no__ ¿por qué?

Gracias por tus respuestas

**<u>Los ítems marcados con asterisco deben valorarse inversamente</u>**

## 6.3. Anexo C De-forma visual

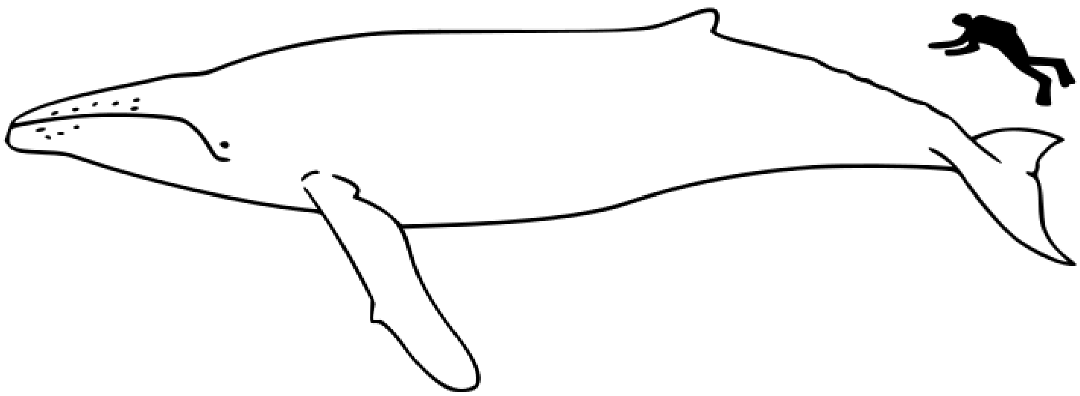
**1**. Se quiere ampliar la imagen de este superhéroe para que tenga una estatura de 2m y luego recortarla para que quede como la silueta de una persona real. ¿De cuánto debe ser la ampliación que se le debe pedir al señor de la impresión?


http://inciclopedia.wikia.com/wiki/Archivo:Chapulin_Fortachon.jpg

**2**. El jugador de baloncesto español Pau Gasol (número 4 en la camiseta de la foto de abajo), tiene una estatura de 2,13m. Intenten deducir la estatura exacta de los otros jugadores basándose en la fotografía y expliquen cómo lo hicieron.


http://www.televisionando.es/articulo/programas-tv-hoy-10-de-julio-de-2012-baloncesto-espana-francia-hay-una-cosa-que-te-quiero-decir-y-cellular/27455/

**3**. Esta imagen tiene la misma proporción de la vida real. Con ella se puede comparar la medida de un humano con una ballena jorobada. ¿Aproximadamente cuánto mide la ballena? ¿Pueden calcular cuál sería su peso?



http://es.wikipedia.org/wiki/Megaptera_novaeangliae

**4**. Un grupo de personas asegura haber visto a un gigante andando por su pueblo. Las autoridades al hacer la investigación encontraron la huella digital que se muestra en la figura con la dimensión exacta de la que fue encontrada. Pueden ayudar a las autoridades diciendo ¿cuál debe ser la altura aproximada del gigante visto?

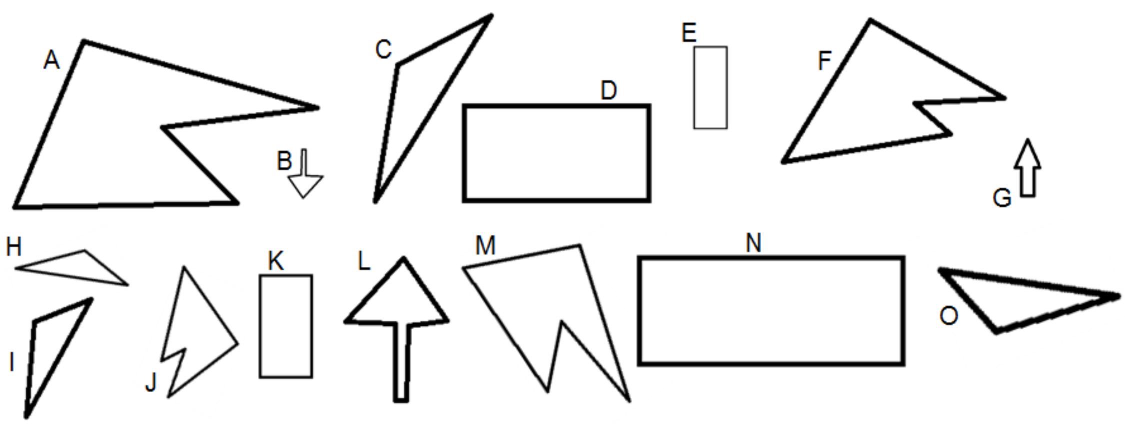
http://gacetaune.wordpress.com/2012/10/18/cual-es-el-patron-de-huella-digital-mas-comun/

**5**. A Luisa le pidieron hacer un símbolo para su curso y ella hizo el que se muestra abajo. Para mostrarlo ella desea pasar exactamente la siguiente figura a una hoja blanca pero que sea del triple del tamaño actual, ayúdenla a hacerlo.

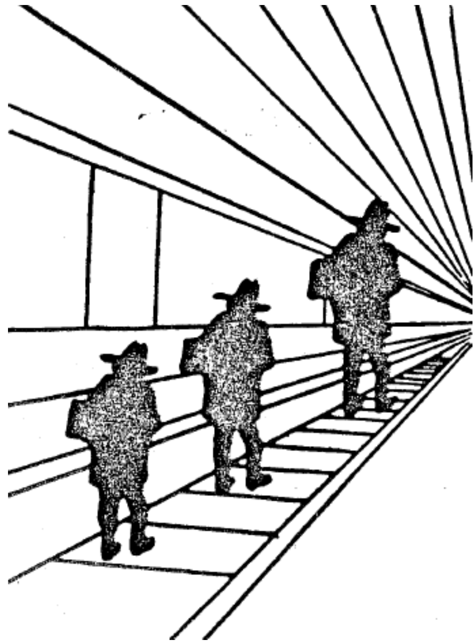
http://letrasdegraffitis.net/como-pintar-letras-de-graffitis/

**6**. Usualmente, al ver, los seres humanos vemos los objetos con una dimensión diferente a la real. Por ejemplo, la siguiente figura nos muestra un edificio, pero es claro que el edificio que se muestra no tiene en realidad la medida que tiene en la hoja. Según la gráfica, intenta hallar la medida real de ese edificio. Explica la forma en que lo hiciste.


**7**. De las siguientes figuras relaciona aquellas que son iguales en forma pero de diferente tamaño (si las hay). Explique el por qué hizo esta agrupación.



**8**. ¿Cuál de las siguientes figuras es la más grande y cuál más pequeña? Justifique su respuesta.



**9**. Juan tiene una foto de su abuela tamaño 3x4 cm, pero él desea mandarla a ampliar para colocarla en un portarretrato. Al momento de comprar el portarretrato a él le gustaron cuatro de diferente tamaño (20x25, 20x27, 20x30 y 30x45). ¿Cuál sería el más recomendable si el objetivo es que la foto ampliada quede exactamente en el portarretrato, sin que sobre ni falte ningún pedazo de la foto.

**10**. Haz el plano de tu casa en una hoja cuadriculada (del primer nivel si hay más de uno), de tal forma que las longitudes estén a escala con la del tamaño real.

### 6.4. Anexo D Actividad “Convertidor de Divisas”

Nombre: ______________________________________________________

Grupo: ______

Nombre de tu moneda:____________________________________

**Primera parte**

Escribe la razón que te tocó y el nombre del compañero con quien la hiciste.

Espacio para el registro de las conversiones que realizaste con tus compañeros y las operaciones que realizaste.

Luego de realizar todas las conversiones con tus compañeros de grupo, responde las siguientes preguntas.

¿Cuál es la moneda de mayor valor y cuál la de menor valor?

¿Cómo realizaron los cambios?

¿Hubo problemas en hacer algún cambio? Si así fue, especifica cuál fue la situación donde ocurrió.

**Segunda parte**

Utilizando la información del tablero organice de menor a mayor valor las monedas de todos tus compañeros. Especifica por favor los procedimientos que utilizó para ordenar.

### 6.5. Anexo E Actividad “Una sorpresa para Mamá”

Nicolás desea hacerle a su mamá de cumpleaños el postre que más le gusta; al buscar la receta, los ingredientes para **cuatro porciones** son los siguientes:

- 300 gramos de queso para untar
- 7,5 gramos de gelatina sin sabor
- ½ taza de leche condensada
- ½ taza de pulpa de maracuyá
- 7 galletas dulces trituradas
- ½ taza de mantequilla
- 2 huevos batidos
- 1 taza de yogurt
- 2 ½ tazas de harina

Entonces Nicolás decide hacer la lista de los ingredientes que le faltan para ir a comprarlos al supermercado (los que están subrayados en la lista). El está pensando hacer el postre para ocho personas y tiene suficiente cantidad de los ingredientes no subrayados para hacerlo.

¿Cuánto deberá comprar de cada ingrediente?

Luego de pensarlo mejor, Nicolás se da cuenta que son siete los que van a comer el postre y que a su mamá no le gusta que sobre comida (y para complacerla, por ser su cumpleaños), Nicolás se dirige a comprar los ingredientes para siete personas, buscando que sean económicos para poder comprarle además a su mamá un buen regalo.

Al momento de elegir productos, Nicolás encontró productos de igual calidad pero de diferente precio y cantidad.

- Ayuda a Nicolás a elegir los productos más económicos y determinar cuánto debe comprar de cada producto.

**Queso A 500 gramos $9800**

**Queso B 400 gramos $7900**

**Queso C 600 gramos $11850**

*Una taza de leche condensada equivale a 306 gramos

| | | |
|---|---|---|
| **Leche condensada A** | **186 gramos** | **$12500** |
| **Leche condensada B** | **162 gramos** | **$10000** |
| **Leche condensada C** | **200 gramos** | **$13000** |

*Una taza de yogurt equivale a 250 cm3

| | | |
|---|---|---|
| **Yogurt A** | **1 litro** | **$9000** |
| **Yogurt B** | **1100 ml** | **$10000** |
| **Yogurt C** | **½ litro** | **$4500** |

*120 gramos de harina equivalen a una taza

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Harina** | **A** | **½ libra** | **$1800** |
| **Harina** | **B** | **600 gramos** | **$2160** |
| **Harina** | **C** | **¼ libra** | **$850** |

- A la hora de comprar el maracuyá, un asesor de la zona de frutas y verduras, le dijo a Nicolás que con tres maracuyás se hace una taza. Como todos los maracuyá son casi iguales de tamaño, ¿cuántos maracuyás debe comprar?

- Utilizando la tabla de carbohidratos de la **Fundación de Diabetes juvenil de Chile**, ayuda a la mamá de Nicolás a saber cuántas calorías consumió con su porción de postre y calcula cuantos minutos en la bicicleta debe hacer para quemar las calorías consumidas, sabiendo que en una hora de ejercicio en la bicicleta se queman 8 calorías por cada kilogramo de peso y la mamá de Nicolás pesa 65 kg.

- Puedes encontrar otra situación de la vida cotidiana (diferente a las mostradas aquí) donde este tipo de razonamiento sea útil para resolver un problema.

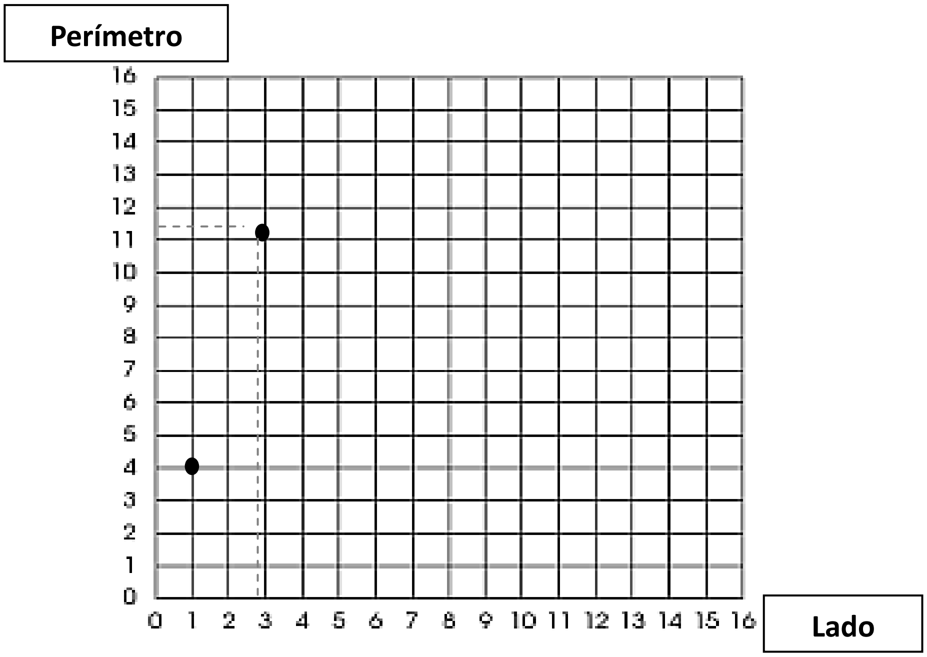
### 6.6. Anexo F Actividad "Trabajo para la casa"

El siguiente trabajo debes entregarlo en hojas aparte a tu cuaderno, detallando todo lo que se te pide. Debes ser cuidadoso con las observaciones que hagas y razonar y justificar bien lo que haces. Vamos a analizar la relación entre dos magnitudes y mostrar los resultados de dos formas distintas a las vistas en clase.

En la siguiente tabla vamos a situar en una fila, la medida de un lado de un cuadrado y en la fila de abajo la medida del perímetro del cuadrado. En la primera fila se han colocado valores de los lados del cuadrado y en la casilla de abajo le debe corresponder el perímetro del cuadrado que tiene como longitud de lado el valor en la casilla de arriba. Como ejemplo se ha colocado el perímetro para un cuadrado tiene de lado 1 cm. Su perímetro es de 4 cm y que cuando el lado mide 2,8 cm su perímetro es de 11,2 cm. Tú debes completar la tabla para cada uno de los valores dados y en la última casilla debes dar la longitud que quieras del lado de un cuadrado (diferente a los ya dados) y encontrar también la medida del perímetro de dicho cuadrado.

| **Medida del lado en centímetros** | 0 | 1 | 2 | 2,5 | 2,8 | 3 | 3,6 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Perímetro del cuadrado en centímetros** | | 4 | | | 11,2 | | | | |

Luego de completar la tabla vamos a hacer una gráfica con los valores que obtenemos de la relación entre la medida de un lado de un cuadrado y su perímetro. Debes situar puntos en el plano que se muestra a continuación. Como ejemplo se muestran los puntos que forman de los datos que estaban completos en la tabla.




¿Estos puntos parecen formar parte de una figura geométrica que conoces? ¿Cuál?

¿Puedes decir cuál es la razón que existe entre el lado de un cuadrado de 2 cm y su perímetro?

¿Es esta razón igual a las relaciones que muestra la tabla?

¿Dónde se encuentra esta información en la tabla y en la gráfica?

Ahora es tu turno. Se te presentarán dos situaciones de las cuales tendrás que tomar datos para luego formar una tabla con ellos y posteriormente llevarlos al plano como en el ejercicio anterior.

La primera situación debes hacerla al aire libre, procurando que haya buena luz solar. Inicialmente tomarás un objeto y le hallarás su altura; luego situarás el objeto que mediste a la luz del sol de forma vertical. A continuación mide su sombra. Luego haz el mismo procedimiento con otros seis objetos, midiendo su altura y luego su sombra. Debes procurar realizar las mediciones de las sombras en un término relativamente corto, es decir, no hagas uno ahora y luego el otro en media hora y luego el otro en diez minutos, etc. Intenta ser lo más preciso posible en tus mediciones, o sea, recoge los datos no solo en centímetros, sino en milímetros.

Por favor describe cada objeto cuya altura mediste. Posteriormente, ya con los datos recogidos, elabora la tabla de la relación entre la altura del objeto y la longitud de su sombra y finalmente sitúa en un plano los puntos que corresponden a los datos de la tabla.

Ahora responde:

¿Estos puntos parecen formar parte de una figura geométrica que conoces?

¿Puedes decir cuál es la razón que existe entre la altura de un objeto y la longitud de su sombra?

¿Es esta razón igual en todas las relaciones entre los objetos y su sombra que muestra la tabla?

¿Dónde se encuentra esta información en la tabla y en la gráfica?

¿Cuál sería la longitud de la sombra de un objeto que tiene 3 metros de altura?

¿Cuál sería la altura de un objeto que tiene una sombra de 60 centímetros?

¿Por qué crees que entre las indicaciones dadas fue necesario hacer las mediciones en un tiempo corto?

¿Qué crees que hubiera pasado si haces las mediciones una hora más tarde? ¿Por qué?

Para la segunda situación necesitas objetos de forma redonda (botellas, tapas, monedas, empaques, etc.). Debes medir el diámetro del círculo que tiene el objeto y luego el contorno del mismo, utiliza un cordón o una cinta para ello. Trata de ser lo más preciso posible en tus medidas. Has lo mismo con otros diez objetos y describe los objetos con sus medidas.

Luego realiza la tabla con los datos que obtuviste y la gráfica correspondiente como en los ejercicios anteriores y responde las siguientes preguntas:

¿Estos puntos parecen formar parte de una figura geométrica que conoces?

¿Puedes decir cuál es la razón que existe entre el diámetro de un círculo y su perímetro?

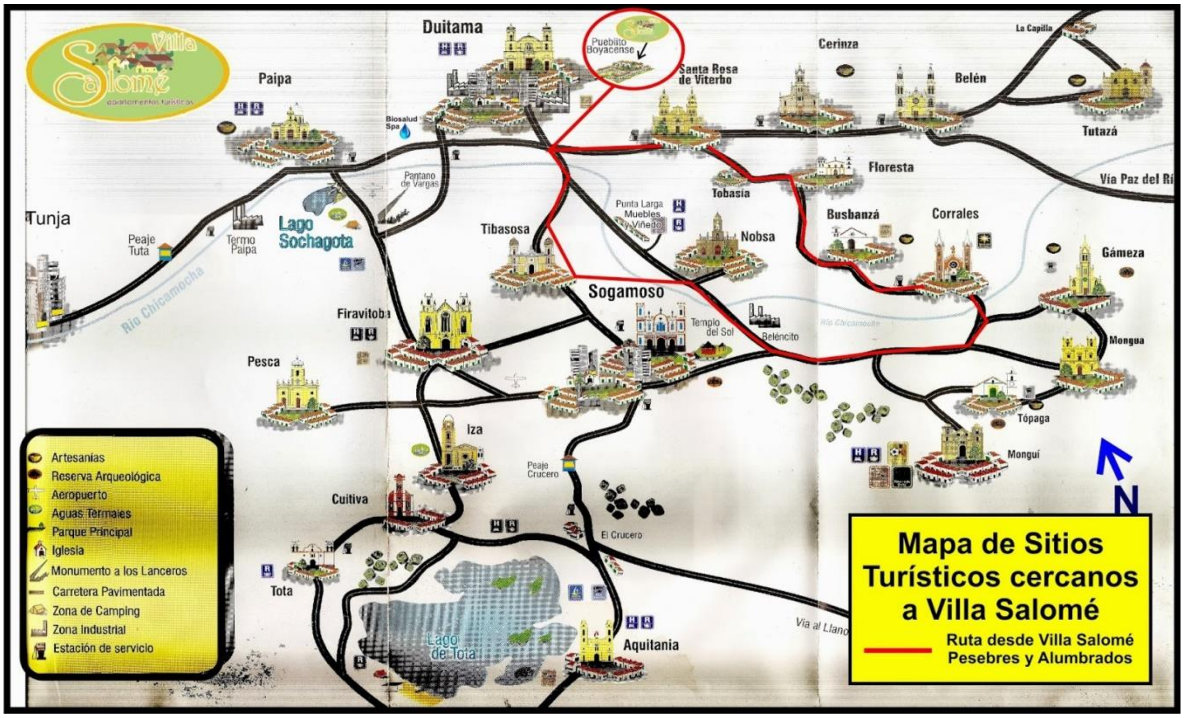
¿Esta razón existe entre todos los datos de la tabla?

¿Dónde se encuentra esta información en la tabla y en la gráfica?

¿Cuál sería el perímetro de un círculo que tiene como diámetro 5 centímetros?

Finalmente, encuentra una nueva situación, diferente de éstas que ya exploramos, donde la relación entre las magnitudes sea similar a las actividades anteriores y compruébalo utilizando una tabla de datos y una gráfica. También encuentra una situación diferente donde la relación entre las magnitudes NO sea similar a las actividades anteriores y compruébalo utilizando una tabla de datos y una gráfica.

## 6.7. Anexo G Actividad “La ruta navideña de Boyaca”




El papá de Camila (Hernán) decidió este año ir al departamento de Boyacá y hacer la ruta navideña con la familia, para visitar las iluminaciones de los pueblos que se encuentran en el recorrido. La noche del recorrido, Luisa (una amiga de Camila que se encuentra en Duitama), la invita a ella a una fiesta y dice que la recogerá a las 10:00 p.m. en Duitama. Hernán le dice a Camila que tiene permiso para ir, siempre y cuando haga el recorrido con la familia. Ellos salen de Sogamoso a las 6:30 p.m. y comienzan el recorrido hacia Nobsa.

**1**. Camila sabe que de Sogamoso a Nobsa hay 7.83 km y guiándose por el mapa ¿puedes ayudar a Camila para decirle a qué velocidad promedio debe ir su papá, si en cada pueblo se detienen 20 minutos?

**2**. Cuando se encuentran en Floresta, Luisa llama para saber si Camila va a llegar a tiempo o cuánto la deberá esperar. Luisa llamó a las 9:00 p.m. en punto. Si Hernán mantiene la misma velocidad promedio que lleva. ¿Qué debe decir Camila sobre la hora de llegada?

**3**. Si se sabe que Hernán conduce a un promedio de 60 km/h. ¿A qué hora le recomendarías a la familia de Camila el salir a realizar la ruta navideña para que alcance a llegar a las 10 p.m. donde Luisa?

**4**. Hernán sabe que el indicador del combustible ésta dañado de modo que durante su travesía y como precaución, ha llevado la cuenta de cuántos kilómetros se ha desplazado (460 km) desde que cargó el tanque completamente (17 galones llenan el tanque), ¿le alcanzará el tanque de gasolina si la próxima estación de gasolina se encuentra a 4,6 km?

**Datos adicionales** 9 km ≈ 1 litro de gasolina

1 litro ≈ 0.26 galones

**5**. Jorge hizo la ruta navideña completa con dos de sus amigos en taxi, comenzando en Duitama y terminando en el Pueblito Boyacense. La velocidad promedio hasta Belencito fue de 55 km/h, luego desde Belencito hasta Busbanzá el promedio fue de 18 m/s y por último hasta el Pueblito Boyacense fue de 1.1 km/min. Él sabe que por cada 30 segundos de espera o cada 100 m, el taxímetro cobra $72. ¿Cuánto le debe cobrar el taxista, si Jorge y sus amigos salieron a las 6:00 p.m. y llegaron a las 4:00 a.m.?¿Cuánto gana el taxista por el viaje completo si el precio del galón de gasolina es de $8600?

**6.** Patricia hizo la ruta navideña completa y quiso calcular el tiempo que gastaba de pueblo en pueblo; desde Nobsa a Belencito gasto 25 minutos, desde Belencito a Corrales estaba lloviznando y se gastaron 2 horas, de Corrales a Busbanzá había mucho tráfico y gastaron ½ hora, desde Busbanza a Floresta la vía está muy descuidada llena de huecos y eso hizo que se demorarán 90 minutos, desde Floresta a Tobacía demoraron 40 minutos porque la ruta tenía muchas curvas, desde Tobacía a Santa Rosa de Viterbo gastaron ¼ de hora y decidieron terminar en Duitama porque estaban cansados y gastaron 30 minutos. ¿Cuál fue la velocidad promedio de todo el viaje? ¿Qué trayectos fueron los que tuvieron mayor y menor velocidad?

**7.** Es hora de que pongan a funcionar su creatividad. Ahora deben inventar o encontrar un problema de la vida cotidiana utilizando algunos de los datos que se han suministrado. La respuesta del problema debe ser 3 km y 55 minutos.

### 6.8. Anexo H El concepto de proporción para entender y analizar una información.

Lea cuidadosamente el siguiente artículo del periódico El Tiempo, de la sección Bogotá publicado el día 2 de marzo de 2013

**Construir vías cuesta un ojo de la cara**

Construir un kilómetro-carril (1.000 metros de largo por 3,5 metros de ancho) de vía es tan costoso que, cada vez que se hace, Bogotá debe gastar el equivalente a lo que cuesta financiar la educación gratis de un año para 900 niños (1'500.000 pesos por cupo).

Si es en losas de concreto (pavimento rígido), el kilómetro-carril puede costar más de 1.353 millones de pesos, y si es en asfalto (pavimento flexible), no menos de 1.297 millones de pesos. Esos precios no incluyen los bordes de los andenes (el sardinel) ni mucho menos el espacio público**.**

Si se trata de solo hacer mantenimiento, el precio baja algo: vale 561 millones de pesos por kilómetro-carril si es en asfalto, o 632 millones, si es en concreto. Siguiendo con el ejemplo de la gratuidad, equivale al subsidio anual de 373 niños. […]

[…]Por eso, cuando el Instituto de Desarrollo Urbano (IDU) dice que arreglar la malla vial de Bogotá –sin construir nuevas vías– vale 11 billones de pesos, la cifra no cabe en la cabeza. Se tendría que destinar todo el impuesto predial que los bogotanos pagan en ocho años para reunir esa suma.

**¿Por qué es tan costoso?**

A la hora de responder por qué resulta tan costoso pavimentar las vías, lo primero que afirman los técnicos es que no se trata de simplemente regar asfalto o concreto. Se necesita preparar el terreno y eso implica excavar, remover materiales y construir entre tres y cuatro capas, que sirven de base para que el asfalto o el concreto duren.

El que más vida útil tiene –hasta 30 años– es el concreto, pero cuesta más; el asfalto puede mantenerse en buen estado por 15 años, pero necesita mantenimiento. […]

[…] Construir una vía nueva de 34 kilómetros-carril, por ejemplo, puede tardar hasta cuatro años. […]

[…]La compra de predios, usualmente se lleva el 20 por ciento del presupuesto, y la intervención de redes de servicios públicos, el 12 por ciento. Otras actividades, como los inventarios ambientales (si hay árboles y aves que trasladar), el trabajo para mitigar los impactos ambientales y sociales de la obra, se pueden llevar otro 6 por ciento.

Autor: Yolanda Gómez. Recuperado de
http://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-12631375

- Con base en la lectura y los datos que ésta aporta, respondan las siguientes preguntas:

**1.** ¿Cuánto cuesta construir un metro cuadrado de nueva vía? ¿A la financiación de la educación de cuántos niños equivale este metro cuadrado?

**2.** Según el artículo "Si se trata de solo hacer mantenimiento, el precio baja algo: vale 561 millones de pesos por kilómetro-carril si es en asfalto, o 632 millones, si es en concreto. Siguiendo con el ejemplo de la gratuidad, equivale al subsidio anual de 373 niños.", suministre un sustento matemático para validar o negar la equivalencia que se da. ¿Qué pueden decir acerca de la relación entre número de estudiantes de colegios públicos del distrito y vías nuevas para Bogotá?

**3.** Si el año pasado en Bogotá había 200.000 estudiantes de colegios públicos y si ahora el gobierno asegura que es posible construir 15 km de una nueva vía debido a que hay menos estudiantes este año, ¿cuántos estudiantes ya no estudian en colegios públicos?

**4.** ¿Qué material aconseja usar usted según la vida útil y el valor de su construcción? Dé un sustento matemático.

**5.** ¿Cuántos kilómetros de vía según la afirmación del IDU (décimo renglón) son necesarios arreglar, asumiendo que el material es asfalto?

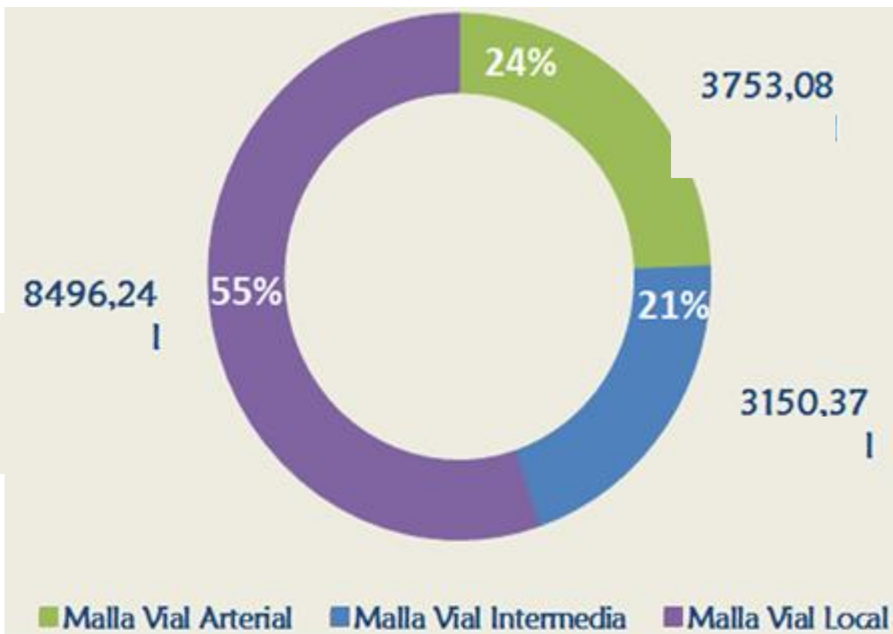
**6.** Usualmente los obreros trabajan 10 horas diarias construyendo vías. Si se trabajara las 24 horas, ¿hasta cuánto tiempo aproximadamente se demoraría en hacer una vía de dos carriles de 36 km? (aproximadamente la longitud de la avenida Boyacá).

**7.** En el periódico *El Espectador* (9 de diciembre 2013, sección *Bogotá*), el Secretario de Hacienda, Ricardo Bonilla informó que el presupuesto de Bogotá para el 2014, es de 14 billones 730 mil millones de pesos, de los cuales el 83 por ciento sería destinado a la inversión; el 14 por ciento a gastos de funcionamiento; y el restante 3 por ciento a servicio de la deuda. ¿Cuánto dinero fue destinado para cada parte?

**8.** Según el anterior punto y la lectura inicial, ¿cuántos millones le corresponde a la compra de predios, la intervención de redes de servicios públicos y las otras actividades, si todo el presupuesto de inversión es destinado a la construcción de nuevas vías?

- Según el informe anual que presenta el IDU de la malla vial en Bogotá dado a conocer 31 de diciembre (recuperado en http://www.idu.gov.co/web/guest/malla_inventario) la malla vial alcanza aproximadamente 15.400 kilómetros carril, divididos de la siguiente manera:

**Gráfica No. 1 – Composición Malla Vial - 2013**



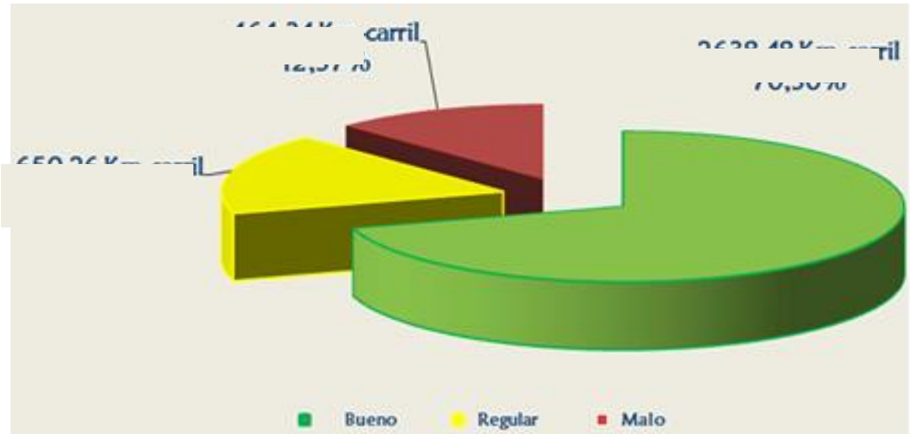

*Fuente: Base de Datos del Inventario y Diagnóstico de la Malla Vial - IDU - Diciembre de 2013.*

**9.** Según la información dada, ¿a cuántos kilómetros carril corresponde los diferentes tipos de vías?

**ESTADO DE LA MALLA VIAL ARTERIAL (Incluye Troncal)**

El resultado de su estado se muestra en la siguiente gráfica:

**Gráfica No. 2 – Estado Malla Vial Arterial – 2013**




*Fuente: Base de Datos del Inventario y Diagnóstico de la Malla Vial - IDU - Diciembre de 2013.*

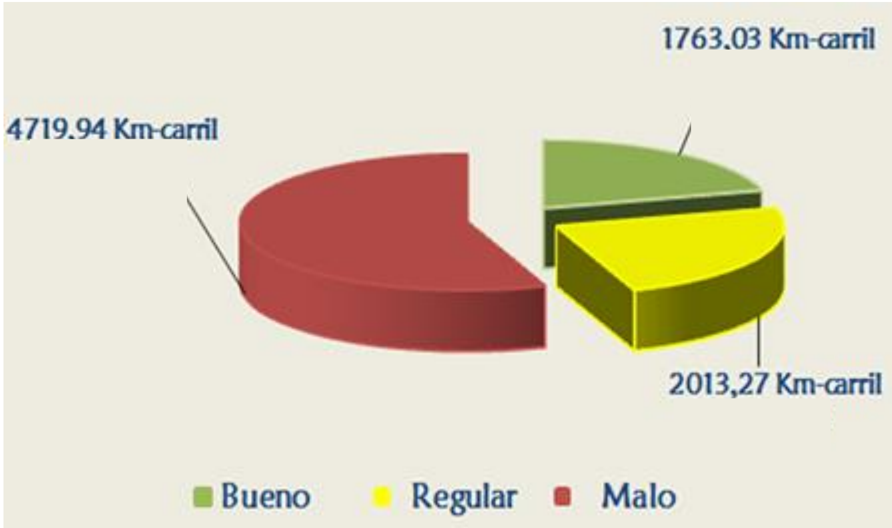
**10**. Completa el valor de los datos de la gráfica de cada porcentaje en km-carril.

**ESTADO DE LA MALLA VIAL INTERMEDIA.** A Diciembre de 2013 la Malla Vial intermedia alcanzó 3.150,37 kilómetros carril, de los cuales 1.711,85 Km – carril (54.34%) registraron un buen estado.

**11.** Realiza una gráfica circular de acuerdo con los datos reportados teniendo en cuenta que el estado regular de la malla vial es de 1711,85 km-carril.

**ESTADO DE LA MALLA VIAL LOCAL**

**Gráfica No. 6 – Estado Malla Vial Local 2013**

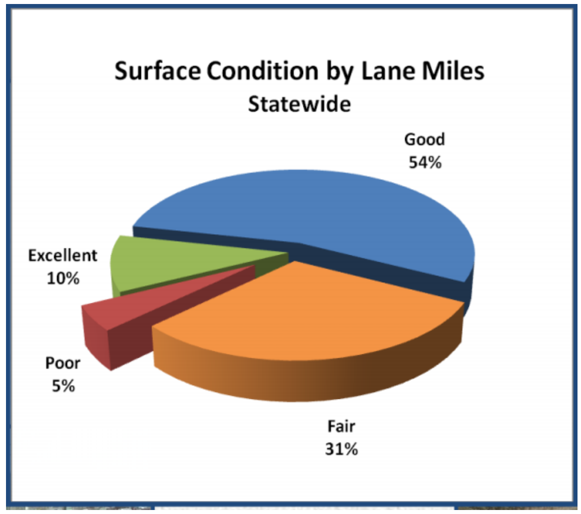



*Fuente: Base de Datos del Inventario y Diagnóstico de la Malla Vial -IDU Diciembre de 2013.*

**12.** Determina cada uno de los porcentajes que les corresponden a las diferentes calidades de la malla vial Local que se muestran en la gráfica anterior.

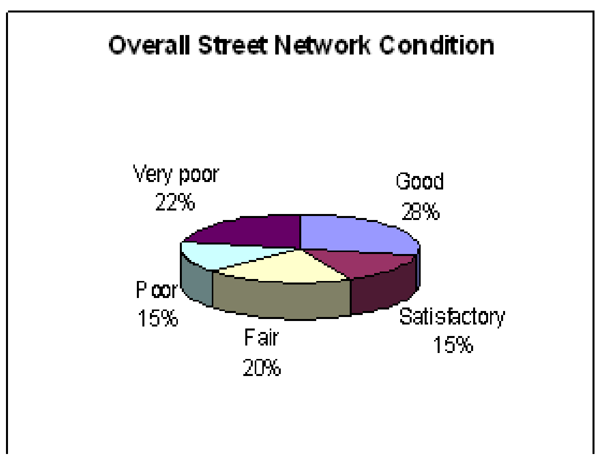
**13**. Sabiendo que Bogotá tiene aproximadamente 15.400 kilómetros de vía, 1776 $km^2$ de superficie y 7770000 habitantes; compáralo con los datos de las siguientes dos ciudades estadounidenses y concluye el avance o retraso que tiene Bogotá frente a su infraestructura vial.

**Ciudad: New York.**
**Habitantes: 8 340 000.**
**Superficie: 1 215 $km^2$.**
**Millas de vía: 41.100**
**Información de la malla vial:**




Fuente: Pavement Report, New York State Department of Transportation en https://www.dot.ny.gov/divisions/engineering/technical-services/technical-services-repository/pavement/08pcr.pdf

**Ciudad: Los Ángeles.**
**Habitantes: 3 795 000.**
**Superficie: 1290 km$^2$.**
**Millas de vía: 6.430**
**Información de la malla vial:**




Fuente: Street Infraestructure Condition Assesment, cyty of Los Angeles, en http://bss.lacity.org/State_Streets/StateOfTheStreets.htm

**Dato adicional: 1 milla equivale a aproximadamente 1,6 kilómetros.**

**Trabajo individual para la casa.**

Según las disposiciones generales en materia ambiental sobre publicidad exterior visual para la cuidad de Bogotá, los avisos que se sitúan en la fachada de los locales no pueden exceder el treinta por ciento (30%) del área hábil de la fachada del respectivo establecimiento. Su misión es encontrar dos establecimientos donde la norma se cumpla y en lo posible buscar otros dos donde la norma no se cumpla o esté muy cercano al límite establecido. De cada uno de los ejemplos encuentre el porcentaje de la publicidad exterior, muestre la forma cómo hizo para conocer el porcentaje y soporte sus conclusiones con evidencia visual de los establecimientos elegidos.

## 6.9. Anexo I Quiz

A continuación encontrarás 10 problemas para resolver. Luego de resolverlos intenta formar grupos con las diferentes preguntas.

A. Martín tiene una panadería. Él utiliza 12 kg de harina para hacer 16 kg de pan. ¿Cuánto pan puede hacer él si utiliza 23 kg de harina?

B. Un grupo de 5 músicos toca una pieza musical en 10 minutos. Otro grupo de 35 músicos interpretarán la misma pieza. ¿Cuánto tiempo se tardará este grupo en tocar?

C. Hoy, Pablo cumple 3 años y Melisa tiene 6 años. Cuando Pablo cumpla 6 años, ¿qué edad tendrá Melisa?

D. Raúl y Francisco están corriendo alrededor de una pista. Ellos corren igual de rápido pero Raúl comenzó más tarde. Cuando Raúl ha corrido 5 rondas, Francisco lleva 15 rondas. Cuando Raúl lleve 40 rondas, ¿cuántos habrá corrido Francisco?

E. Ayer, una tractomula arrojó como peso en una báscula situada en un peaje que su carga pesaba 1.12 toneladas y contenía 323 computadores. Mañana, la tractomula pasará, y contendrá 732 de los mismos computadores. ¿Cuál será el peso de estos computadores que debe arrojar la báscula?

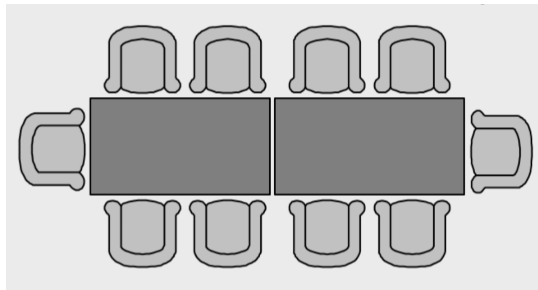
F. Luisa puso 3 toallas en el tendedero a secar. Después de 18 horas estaban secos. El vecino pone otras 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo le tomará secar?

G. En la tienda, 4 paquetes de gomitas cuestan $6.000. El profesor quiere comprar un paquete para cada alumno. Él necesita 16 paquetes. ¿Cuánto debe pagar el profesor?

H. Una lotería afirma que tiene un premio semanal y ese premio será repartido entre el número de ganadores. Cuando hubo 7 ganadores cada uno obtuvo 150€, ¿Cuánto será el premio para cada persona si hubo 3 ganadores?

I. La locomotora de un tren mide 12 m de largo. Si hay 6 carros conectados a la locomotora, el tren mide 54 m de largo. Si hubiera 9 carros conectados a la locomotora, ¿cuán largo sería el tren?

J. En el comedor del colegio, se sitúan 2 mesas en línea. 10 sillas se adaptan a su alrededor (observa la figura). Ahora el profesor pone 9 mesas en línea. ¿Cuántas sillas caben alrededor de estas mesas?



**Después de resolver los problemas.**

· Escribe aquí los diferentes grupos de problemas. (Utilice las letras en las hojas)

· ¿Por qué hiciste los grupos de esa manera?

## 6.10. Anexo J  Prueba Final

Un atleta debe tomar un medicamento para la gripa; el médico le aconsejó tomar una dosis de 30 mililitros por kilo cada seis horas durante cuatro días. En la composición del medicamento se sabe que el componente A tiene 5 miligramos por cada 5 mililitros, el componente B tiene 7.5 miligramos por cada 3 mililitros y el componente C posee 3.5 miligramos por cada 4 mililitros. Si el atleta pesa 110 kg.

**¿Cuál es la cantidad de miligramos del componente A, B, C en cada una de las dosis del medicamento mencionado?**

Cada cinco horas que pasan, el cuerpo ha lavado el 70% del medicamento que tiene. Si después de tres días el  atleta no puede tener más de 10 gramos de cada componente en su cuerpo (Desde esa cantidad es considerado doping).

**¿Cuáles de los componentes A, B y C cumplirán ésta condición?**

Sabiendo que se considera sobredosis si se tiene en el cuerpo más del 120% de la dosis suministrada y no tiene ningún efecto si se tiene menos del 25% de la dosis suministrada.

**¿Cómo podría cambiarse el tiempo de aplicación de cada dosis para que el atleta no tenga doping con  ninguno de los componentes?**