REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

EL GEOESPACIO: ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Fabián Arévalo Gordillo

Bogotá D.C.

2016

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

EL GEOESPACIO: ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Autor: Lic. Fabián Arévalo Gordillo

Director de tesis:

Mary Falk de Losada (PhD.)

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez (PhD.)

Bogotá D.C.

2016

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre 10 de 2016

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradezco a Dios por haberme apoyado, orientado y guiado, por ofrecerme su entusiasmo y fortaleza en aquellos momentos donde pase por dificultades, esto permitió enriquecer mi labor como docente a través de nuevos aprendizajes y experiencias.

Le doy gracias a mis padres Miguel y María, pues estuvieron constantemente interesados en mi desempeño y sus consejos fueron de gran ayuda en la culminación de este ciclo, por haberme inculcado sus valores y haberme apoyado en mis estudios que permitieron forjar el profesional de hoy.

A los profesores Mary Falk y Osvaldo Rojas por haber aceptado ser mis directores de tesis, sus conocimientos, dedicación, correcciones y observaciones permitieron enriquecer constantemente mis experiencias y conocimientos como educador. Destacar que su formación humana y paciencia fueron de gran ayuda en la culminación de la presente tesis.

A mis compañeros, porque durante dos años logre conocer grandes personas que me compartieron su conocimiento y experiencia en las distintas clases, esto contribuyó en la generación de nuevas ideas y saberes que fueron esenciales en el presente trabajo.

A los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli, pues su entusiasmo, paciencia y carisma en las distintas actividades permitieron culminar esta investigación.

Finalmente agradezco a cada uno de los profesores de la maestría, su sabiduría y opiniones tuvieron aportes significativos en mi formación académica.

DEDICATORIA

SÍNTESIS

El aprendizaje del contenido de la geometría del espacio ha presentado históricamente ciertas dificultades, en el grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli, se tiene que es limitado el uso de materiales manipulables en su enseñanza, y no se propicia que el estudiante posea un papel activo en la búsqueda del conocimiento geométrico, entre otras. En la investigación se elabora una estrategia didáctica sustentada en el Geoespacio y en la robótica educativa, que permite desarrollar e incentivar el pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli. La estrategia propuesta tiene como fundamento teórico los problemas retadores, la comunidad de práctica de Wenger, el pensamiento visual, el pensamiento espacial, la robótica educativa y los contenidos de la geometría del espacio.

La implementación de las actividades en el aula permite: el uso de materiales manipulables, desarrollar habilidades visuales y de representación, apropiarse de recursos heurísticos para la resolución de problemas, un dominio de los conocimientos previos en los estudiantes, la construcción robusta del contenido geométrico del espacio; para potenciar el desarrollo del pensamiento espacial en el momento de dar resolución a los problemas geométricos del espacio.

ABSTRACT

The learning from the content about geometry of the space has represented historically some difficulties, in 7th grade at Giovanni Pascoli school, it is limited if it refers the use of operable material in its learning and it does not promote that student possesses an active paper for the geometric knowledge, among others.

In the research, it makes a didactic strategy given in the geo-space and in educational robotics, which lets to develop and innovate the spatial thinking in students of 7th grade at Giovanni Pascoli school. The proposed strategy has as main teoric reason the challenging problems, the practise´s community Wenger, the visual thought, the spatial thinking, educational robotics and the geometric contents from the space.

The implementation of the different activities in the classroom allows: the use of operable material, to develop visual and representation abilities, to dominate the heuristic resources for solving problems, a control of previous knowledge in the students, the vigorous construction of geometric content in the space in order to foster the thought's development spatial in the moment to give solution to the geometric problems of the space.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN

La geometría es una de las ramas de la matemática que se puede visualizar y contextualizar de forma inmediata, así Duarte (2013) sugiere que la geometria se encuentra ligada a la realidad y por ello hay numerosas herramientas que permiten manipular, abstraer, conceptos y sus propiedades. Cabe destacar que su enseñanza-aprendizaje en colombia durante los ultimos años se vio influenciada por la matemática moderna, especialmente en los años setenta.

El Ministerio de Educacion Nacional (MEN, 1998) establece que la intuición en la enseñanza aprendizaje de la geometría de la educación escolar desapareció temporalmente, debido al formalismo y avance de la matemática moderna, lo cual conllevo a darle poca importancia en los currículos escolares. En este proceso se afectó la intuición y la visualización, aspectos determinantes para la enseñanza de la geometría.

Barrantes & Blanco (2004) mencionan como los contenidos de la enseñanza de la geometría durante estos años se desplazaron a la parte final de los textos de matemáticas, lo cual motivo, que en la mayoría de los currículos esta se dictara a finales de los periodos, insinuando de forma implícita a los docentes su poca importancia y su favoritismo por lo numérico.

Estos mismos autores, aluden a la enseñanza aprendizaje de la geometría en la época actual, y según su estudio, se refieren a que esta enseñanza no ha cambiado, pues los estudiantes siguen sin comprenderla o por otro lado la conciben como una materia de memorización de fórmulas sin interés. Este proceso refleja que se está enseñando de la misma forma, donde se evidencia que los maestros siguen sin recurrir a nuevas vías, métodos o herramientas en su aprendizaje.

Ante esto el MEN (1998) ve la necesidad de retomar esta idea intuitiva espacial en la enseñanza de las matemáticas, puesto que contribuye a una mejor percepción y entendimiento de los conceptos. Esto contribuye al papel necesario e importante de la geometría en las a aulas de clase, esta rama de la matemática nace de un origen práctico para dar solución a problemas del mundo real.

Peña & Escudero (2008) mencionan que la palabra geometria proviene de la medida de la tierra y que de una forma u otra los matemáticos y filosofos griegos la consideraron un cuerpo de conocimientos, pues esta era demostrable y no dependia de argumentos externos como las creencias o la personalidad.

Al igual Bishop (1999, citado en Duarte, 2013) se refiere al uso de los conceptos geometricos en las distintas culturas. Quedando en evidencia que cada cultura esboza diferentes cosas y cada uno de estos diseños difiere entre cada cultura; con lo cual Zaslavsky (1979, citado en Bishop) indica como se encuentra inmerso el uso de la geometria en el diseño decorativo y en la arquitectura, ya sean de forma circular o de forma rectangular. Este proceso permite esclarecer el uso necesrio e innato de la geometria en la construccion, diseño, decoración o elementos del entorno.

De lo planteado anteriormente se infiere la importancia de la geometría para comprender o modelar en cierta medida el entorno, sin embargo su enseñanza-aprendizaje ha perdido su valor, puesto que algunos contenidos se ven de forma general y no permite dar profundidad a los mismos.

Muchos de estos contenidos están orientados a la parte bidimensional y axiomática, por lo cual (CIAEM, 2015) se refiere a la poca profundidad de los temas referentes a sólidos y sus propiedades evidenciando una mayor importancia a lo bidimensional y olvidando la conexión de lo bidimensional con lo tridimensional o viceversa.

Gardner (citado en MEN, 1998) en su teoría de las inteligencias múltiples plantea la necesidad del pensamiento espacial para el desarrollo del pensamiento científico y esto es debido a que permite concretizar cierta información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. En este proceso se conduce a una mejor interpretación de la información.

Del mismo modo el estudio “Perspectivas sobre la enseñanza de la geometría” Hecha por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, 2001) menciona la importancia de la geometría como una rama de las matemáticas que se encuentra ligada a la realidad, a través de su proceso intuitivo y concreto. También alude cinco aspectos referentes a la aplicación de la didáctica en la geometría como: la ciencia del espacio, representaciones visuales, punto de encuentro entre las matemáticas, manera de pensar y entender, y ejemplo paradigmático y herramienta de las aplicaciones.

En el estudio “Marcos y pruebas” (Pisa, 2012) se establece una lista de categorías indispensables en los currículos escolares y que son necesarias para el desarrollo del contenido. Entre estas categorías se menciona el espacio y la forma referido a su relación con patrones, propiedades de objetos, relaciones, direcciones y representación de objetos, rescatando así la importancia de la geometría como herramienta base para el uso de la visualización espacial.

Este estudio también menciona algunos contenidos a evaluar, donde se tiene en cuenta dichas categorías, enfocados en: comprensión de la perspectiva, transformación de las formas e interpretación de vistas de escenas tridimensionales desde distintas perspectivas. En este proceso, por consiguiente hay una amplia relación e importancia entre la enseñanza de la geometría y el pensamiento espacial.

Guzel & Serner (2009) enfatizan que la capacidad espacial, en matemáticas ofrece algunas ventajas para el aprendizaje de los estudiantes, como son: el aumento de su capacidad de percepción, la creación de diferentes contextos y la generalización de conceptos. Estos criterios se toman, son relevante y se aplican en el proceso de enseñanza de la geometría, dado que esta se encuentra en un mundo tridimensional, donde dichas ventajas son necesarias para comprender las características y propiedades de algunos sólidos geométricos.

La enseñanza de la geometría debe enriquecerse por medio de la visualización, Duarte (2013) hace referencia a que: *“Una de las tareas del profesor de matemáticas es conseguir que sus estudiantes* *comprendan los diversos conceptos que están en juego, no de una forma mecánica, sino que puedan operar con ellos en diversos contextos"[1].*

A su vez Arrieta (2001) manifiesta que la sociedad valora una habilidad visio-espacial, pues esta habilidad es importante para: escultores, dibujantes, arquitectos, ingenieros y tipógrafos. En estas profesiones es difícil pensar en su progreso, sin una desarrollada habilidad visio-espacial. Por otro lado, esta habilidad es posible trabajarla desde los primeros grados, concretamente en sexto y séptimo, se propicia dar una mayor comprensión y apropiación por medio del contexto de la geometría.

Otro factor importante a tener en cuenta es la necesidad de hacer uso de las herramientas didácticas como medio de interacción entre el conocimiento y la práctica. Godino (1998) infiere en que un material didáctico es aquel medio o recurso que facilita el aprendizaje de las matemáticas, del mismo modo dicho material didáctico se clasifica en: ayudas para el estudio e instrumentos (Semióticos).

La primera de estas comprende los recursos que guían y orientan al profesor en su metodología de clase, tales como los manuales escolares, el segundo corresponde a materiales del entorno con una meta especifica que permitan explorar, razonar, indagar o dar solución a problemas entre estos se incluyen gráficos, textos o palabras. Estos instrumentos a su vez se clasifican en: manipulativos tangibles correspondientes a herramientas basadas en el tacto y manipulativos-gráfico-textuales en los que intervienen el audio y la percepción visual.

Del mismo modo Galindo (citado en Mariño, 2000) se refiere a la baja aprehensión de los contenidos en geometría destacando entre ellos el poco material didáctico existente como instrumento de apoyo de los docentes. Por lo anterior lo que se busca es desarrollar una herramienta manual y didáctica basada en

[1]Duarte, A. (2013). El geo plano: una alternativa para mejorarla enseñanza de la geometría. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 523-531). México, DF: Comité Latino Americano de Matemática. Recuperado el día 2 de junio de 2014 de: http://funes.uniandes.edu.co/4082/1/CastilloElgeoplanoALME2013.pdf, p. 525.

instrumentos semióticos que permita integrar la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio junto con la visualización y el pensamiento espacial.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente del desarrollo de pensamiento espacial, son temáticas que han ocupado a los investigadores en reuniones y congresos: la Conference of European Research in Mathematics Education (CERME, 2013), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), el International *Congress on Mathematical Education (*ICME,2004,2016-TSG 13*),* las reuniones latinoamericanas de Matemática educativa (RELME), los congresos Colombianos de Matemática, los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros. En estos eventos esta temática es tema central de discusión.

En el ICME (2004) se aborda la enseñanza aprendizaje de la geometría, a través del entorno y como este es un facilitador de conocimientos. En las investigaciones realizadas se aborda el uso de software e instrumentos en la implementación, pues estos facilitan y permiten desarrollar el nivel deductivo de los estudiantes.

En la conferencia europea sobre educación matemática (CERME, 2013) se afronta el pensamiento espacial aplicado a la enseñanza aprendizaje de la geometría, y en este mismo se abordan diferentes estrategias en base a distintos materiales didácticos que permitan potenciar la percepción espacial.

En el ICME 13 (2016), el grupo tema de estudio (TSG) 13, aborda la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, en el nivel secundario. En este grupo se discute sobre la enseñanza aprendizaje, el pensamiento, y el uso de una variedad de configuración de programa de estudios de la geometría en la secundaria. Es necesario destacar que dentro de su debate se encuentra las conexiones entre la geometría y los procesos prácticos de la matemática: la argumentación, la prueba, la visualización, la figuración e instrumentación; aspectos estos que son determinante en el logro de un robusto proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente para el desarrollo del pensamiento espacial.

Diferentes investigaciones y trabajos se han realizado sobre la geometría y la geometría del espacio en los diferentes niveles educativos, presentándose las mayores dificultades en el desarrollo del pensamiento espacial. En estas temáticas se destacan Bishop (1989), Flores (1991), Gutiérrez (1992), Rizo y Campistrous (1980-2007), López (2005), Abrate et al. (2006), Kohanová, (2007), Cantoral (2008), Rojas (2009); Steinwandel, y Ludwig, (2011), y Villarroel, y Sgreccia, (2011) entre otros. Estos autores proponen modelos, estrategias, alternativas, procedimientos, entre otras formas, en aras de favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, en particular el desarrollo del pensamiento espacial.

A través de la aplicación de métodos empíricos como la observación a clase y encuesta (ver Anexo #) y la experiencia del investigador, se pudo constatar las siguientes insuficiencias:

- Es limitada la base conceptual de la geometría plana necesaria para el aprendizaje de los cuerpos geométricos.
- Un extenso desarrollo de contenidos no permite dar claridad y precisión a las temáticas correspondientes de la geometría espacial.
- Son escasas las herramientas manuales en el momento de la enseñanza-aprendizaje de la geometría espacial.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo desarrollar e incentivar el pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli?

Se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en grado séptimo.

Se infiere como **objetivo general**: elaborar una estrategia didáctica que permita desarrollar e incentivar el pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli.

Objetivos específicos:

- Crear e implementar un geo-espacio dentro de la malla curricular del colegio Giovanni Pascoli que permita trabajar algunos temas relacionados con la geometría del espacio como: punto, recta, plano y transformaciones rígidas de algunos poliedros regulares (cubo y tetraedro) e irregulares (prismas y pirámides).
- Elaborar actividades manuales que permitan visualizar y analizar algunas características propias de: punto, recta, plano y transformaciones rígidas de algunos poliedros regulares (cubo y tetraedro) e irregulares (prismas y pirámides).

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, a través del desarrollo del pensamiento espacial, en grado séptimo.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **hipótesis científica**: a través de una estrategia didáctica sustentada en problemas retadores, en la manipulación geométrica, en el pensamiento visual, en la robótica educativa y en la comunidad de práctica de Wenger; donde se fomente el liderazgo, la participación y la identidad, se favorece el desarrollo y se incentiva el pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli.

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje geometría, específicamente que contribuyan al desarrollo del pensamiento espacial en grado séptimo.
2. Determinar los fundamentos teóricos, que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje geometría, específicamente que contribuyan al desarrollo del pensamiento espacial en grado séptimo
3. Elaborar una estrategia didáctica para favorecer el desarrollo del pensamiento espacial, a través del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en grado séptimo.
4. Valorar la viabilidad de la estrategia didáctica.

El **aporte práctico** radica en una estrategia didáctica y un sistema de actividades sustentados en problemas retadores, que permita desarrollar e incentivar el pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascoli.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y 7 anexos. En el capítulo 1 se hace referencia a las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente acerca del desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo, en el mundo y en Colombia. En el capítulo 2 se precisa el marco teórico en el cual se sustenta la investigación: la teoría de resolución de problemas y problemas retadores, el pensamiento visual, las Comunidades de Práctica de Wenger y la Robótica Educativa. El capítulo 3 se orienta hacia la metodología de la investigación. En el capítulo 4 se explicita la estrategia y se propone el sistema de actividades. Por último en el capítulo 5 se realiza un análisis de los resultados obtenidos en la práctica escolar, para desarrollar e incentivar el pensamiento espacial.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

La geometría es una rama de la matemática que permite dar concretización de los contenidos y conceptos, propicia emplear métodos y técnicas de forma visual y con ellos aplicar el pensamiento espacial, sin embargo últimamente esta misma se ha visto desplazada por los docentes de matemática, pues le han dado más importancia a la parte numérica. Del mismo modo cabe destacar que dicha rama de la matemática permite desarrollar la parte comunicativa y expresiva. Barrantes & Fernández (2012) aluden a la influencia de esta en el desarrollo de algunas capacidades como son: la percepción visual, la expresión verbal, el pensamiento lógico y la resolución de problemas aplicados a otras áreas.

En este capítulo se dará sustento a lo mencionado anteriormente a través de algunas investigaciones realizadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, más específicamente en los grados de sexto, séptimo y octavo.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado séptimo

Dentro de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Básica es importante nombrar algunas características comunes y relevantes de diferentes investigaciones, las cuales en cierto modo apuntan a una serie de criterios como son: conceptualización, visualización, aplicabilidad y razonamiento inductivo. A continuación se realiza un análisis de algunas de las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la geometría a nivel mundial.

1.1.1. Apuntes para un diseño instruccional en geometría plana con ayuda del geo plano[2]

Robaina & Martin (1985) estudian el uso del geoplano en la isla de Tenerife España, donde aplican en los grados de cuarto a octavo los conceptos básicos de geometría y figuras planas. Esta investigación la sustentan desde el método constructivo, donde se hace hincapié en el uso de materiales que llamen la atención del estudiante, y que le permita motivarse por querer hacer e investigar lo cual conlleva al descubrimiento.

Estos autores trabajan con una serie de actividades en base al geoplano, de tal forma que el estudiante pueda reconocer un segmento, vértice, arista, ángulo y diagonal de un polígono. El autor de esta tesis comparte estos criterios, pues el material y las actividades a realizar buscan el uso del método constructivo. Sin embargo se pretende ir más allá pues el Geoespacio es una extensión del geoplano y permite reconocer elementos básicos de la geometría tridimensional.

1.1.2. Proceso y Habilidades en visualización Espacial[3]

Gutiérrez (1991) hace un estudio con 3 estudiantes de sexto grado en España, esto es aplicado en horas extraescolares donde propone una serie de actividades basadas en el desarrollo de algunas habilidades de visualización y en tres criterios que estudia la geometría espacial en la actualidad: representaciones dinámicas en ordenador, cuerpos físicos y representaciones estáticas planas en papel. Seguidamente se plantearon una serie de actividades basadas en: reconocer representaciones planas de sólidos, Movimientos de solidos de forma real o por ordenador, representación de sólidos en papel, construcción de sólidos.

---

[2] Robaina, M. & Martín, M. (1985). Apuntes para un diseño instruccional en geometría plana con ayuda del geoplano. *Revista números*. Recuperado el 21 julio del 2015 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/11/Articulo02.pdf, pp. 15-40.

[3] Gutiérrez, Á. (1991). *Proceso y Habilidades en visualización Espacial*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Valencia. España. Recuperado el 21 julio de 2015 de: http://www.sectormatematica.cl/articulos/visualizacion.pdf

Así concluye que dicho desarrollo espacial debe ser dado por actividades basadas en el micro-espacio, y luego pasar al uso de ordenadores que permitan hacer movimientos de forma libre.

Lo anterior es de gran importancia, pues dentro de la presente tesis se pretenderá hacer uso del Geo espacio como material manipulativo y como a través de este se puede llegar a la representación de elementos de la geometría del espacio, permitiendo hacer uso de las distintas vistas para identificar características propias de cada sólido.

1.1.3. Poliedros en el aula[4]

Sardella, Mastucci & Berio (2002) realizan un taller aplicado a docentes de primaria y secundaria sobre poliedros regulares y destacan algunos aportes referentes a la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en especial al pensamiento espacial donde algunas de las sugerencias dadas por dichos docentes referente al tema fueron:

- *"A los alumnos les gusta y no les cuesta demasiado desarrollar las actividades que se proponen cuando se apoya con material concreto.*
- *Demasiado trabajo algebraico y existencia de poco material concreto para experimentar.*
- *Primero trabajo en el plano y luego en el espacio. Trato de relacionar los conceptos con la naturaleza.*
- *Es difícil que los alumnos comprendan la idea de espacio.*
- *La matemática está demasiado algebrizada, hay que enseñar más geometría.*
- *Los docentes en general, dejan la enseñanza de la geometría para el final y, si hay tiempo, se enseña"*[5].

[4] Sardella, O. Mastucci, S. &. Berio, A. (2002). Poliedros en el aula. Volumen 49. pp. 45- 32. Recuperado el 22 de julio del 2015 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/49/Articulo03.pdf
[5] Sardella, O., Mastucci, S. &. Berio, A. (2002). Poliedros en el aula. Volumen 49, p. 46. Recuperado el 22 de julio del 2015 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/49/Articulo03.pdf

Lo anterior será tenido en cuenta en el presente trabajo, ya que los estudiantes usaran material manipulable y en cada una de las actividades se abordaran problemas relacionados con la aplicación de la geometría del espacio y su contexto.

1.1.4. Marco metodológico para atención a la diversidad: una experiencia para el área de matemáticas[6]

Prada (2003) realiza una investigación en 10 institutos de educación secundaria obligatoria en Madrid, a través de esto propone una didáctica para la enseñanza de la geometría por medio de diferentes instrumentos, esto se hace teniendo en cuenta los niveles de Van Hiele y tomando como referente las distintas formas de aprendizaje del estudiante. Por medio de una serie de guías y recursos didácticos concluye que tales instrumentos permiten dar una mayor motivación e interés, así mismo comenta *"… los materiales son un recurso ineludible, en una sociedad tecnológica de la imagen, para hacer asequible a los alumnos la abstracción de los conceptos matemáticos"*[7]*.*

Finalmente este autor concluye que el uso de diferentes materiales en un momento despierta el interés de los estudiantes, sin embargo solamente se confirma un aprendizaje significativo de la geometría en dos de los diez grupos experimentales, mostrando resultados muy pobres. Esto es debido a que los alumnos ratifican que prefieren la explicación del profesor en lugar de hacer una autoconstrucción del conocimiento.

---

6 Prada, M. (2003). Marco metodológico para atención a la diversidad: una experiencia para el área de matemáticas. *Revista de educación*. N° 330. Recuperado el 28 de julio del 2015 de: http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre330/re3302211213.pdf?documentId=0901e72b81258cdc, pp. 419- 447.

7 Prada, M. (2003). Marco metodológico para atención a la diversidad: una experiencia para el área de matemáticas. *Revista de educación.* N° 330.Recuperado el 28 de julio del 2015 de la URL: http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre330/re3302211213.pdf?documentId=0901e72b81258cdc, p. 3.

El autor de esta tesis comparte lo dicho anteriormente, pues es necesario hacer uso de diferentes herramientas en la enseñanza- aprendizaje de la geometría, ya que hay múltiples formas de aprender, sin embargo se abordara la geometría tridimensional por medio del Geoespacio y la resolución de problemas, de esta forma el estudiante autoconstruye su conocimiento.

1.1.5. Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría[8]

Moriena & Scaglia (2003) realizan en grado octavo un estudio sobre la influencia de las imágenes gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría, donde se estudia principalmente la identificación de figuras geométricas teniendo en cuenta su posición, pues los libros de texto desempeñan un papel importante ya que le ofrecen al alumno una figura geométrica la cual es un ejemplo representativo de algunas definiciones geométricas.

Del mismo modo estos autores mencionan que esta influencia de las gráficas visuales estereotipadas, pueden generar errores en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, ya que los alumnos se quedan muchas veces con la primera impresión visual y no analizan de forma detallada la relación entre un concepto y su representación.

Finalmente concluyen que es necesario que los alumnos apliquen sus conocimientos conceptuales sobre figuras geométricas en dibujos no estereotipadas, a su vez recomiendan el uso de secuencias didácticas que permitan superar estos estereotipos de figuras geométricas.

El autor de esta tesis está de acuerdo con lo mencionado anteriormente, sin embargo se pretende superar este estereotipo de figuras geométricas, por medio del Geoespacio, donde el estudiante construya

[8] Moriena, S. & Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, vol. 15. Recuperado el 8 de diciembre del 2015 de la URL: http://www.redalyc.org/pdf/405/40515101.pdf

algunos solidos geométricos y mediante su manipulación de posición se logre dar una nueva interpretación al concepto.

1.1.6. Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional[9]

Thibaut (2004) hace un proyecto llamado *Cube*, el cual es aplicado a estudiantes de cuarto grado de la educación secundaria. En este mismo se plantea la motivación de trabajar el espacio a partir de una película llamada Cube, donde sirve de motivación y material introductorio a la temática, luego trabaja una serie de problemas en base a la película, los cuales permiten pasar de lo bidimensional a lo tridimensional.

Del mismo modo se refiere a las actividades y especifica que *"Una actividad interesante para mejorar la intuición espacial es precisamente pasar del plano al espacio. Desde este punto de vista, la visualización de una estructura cúbica"*[10].

En el presente trabajo de investigación, se tienen en cuenta lo comentado, pues el Geoespacio tiene una forma similar a un cubo y allí el estudiante comprenderá como identificar de una nueva forma los entes geométricos en el espacio y las nuevas propiedades que ellos generan.

1.1.7. La enseñanza de la geometría[11]

Peña & Escudero (2008) comentan en su libro una serie de actividades encaminadas a enriquecer la enseñanza de la geometría básica y cuyo objetivo es superar las dificultades presentadas en los exámenes para la calidad y el logro educativo (Excale) 2005.

Como primera instancia se refieren a la construcción del concepto en geometría y su relación con la visualización, argumentan que no solo los conceptos deben de ser apoyados a través de una sola gráfica

---

9 Thibaut, E. (2004). Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional, *suma, N 47*°. Recuperado el 26 de julio del 2015 de la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/47/011-018.pdf, pp. 11-18
10Thibaut, E. (2004). Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional. *suma, N 47*°. Recuperado el 26 de julio del 2015 de la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/47/011-018.pdf, p. 11.
11 Peña. S. & Escudero .O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. México. Materiales para apoyar la práctica educativa.

como medio de apropiación, sino que además deben de ser estudiados de una forma rigurosa donde se estudie su posición, tamaño, medida y rotación, esto a su vez ayuda a conservar las características esenciales del concepto.

Por otro lado estos autores se refieren a la importancia de la geometría en el contexto inmediato. De este modo se refieren:

> Las personas construyen de manera intuitiva algunas relaciones y conceptos geométricos, producto de su interacción con el espacio; la enseñanza de la Geometría debe permitir avanzar en el desarrollo del conocimiento de ese espacio, de tal manera que en un momento dado pueda prescindir de él y manejar mentalmente imágenes de figuras y relaciones geométricas, es decir, hacer uso de su capacidad de abstracción. El estudio de la Geometría permite al alumno estar en interacción con relaciones que ya no son el espacio físico sino un espacio conceptualizado y, por lo tanto, en determinado momento, la validez de las conjeturas que haga sobre las figuras geométricas ya no se comprobarán empíricamente sino que tendrán que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación en Matemáticas en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen[12].

Lo anterior es significativo, ya que dentro de la presente tesis se hará uso de un Geoespacio aplicado a diferentes solidos que tendrán como base diferente figuras planas y de las cuales se podrán destacar propiedades, evitando las gráficas visuales estereotipadas. Esto conllevará a desarrollar las habilidades espaciales y geométricas del estudiante, de tal forma que en un momento dado pueda relacionar la geometría espacial con elementos de su entorno.

---

[12] Peña. S. &. Escudero .O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Materiales para apoyar la práctica educativa. p. 29.

1.1.8. El geo plano: Una alternativa para mejorar la enseñanza de la geometría[13]

Por su parte Duarte (2013) hace una investigación aplicada al primer año de la educación básica media general, en Venezuela, sobre las figuras geométricas y sus propiedades, donde emplea para ello el modelo de Van Hiele y el geoplano. En este estudio utiliza guías y actividades aplicadas al contexto cotidiano, llegando a la conclusión de que dichos instrumentos permiten alcanzar el nivel 2 del modelo de Van Hiele, correspondiente al análisis, pues los estudiantes identificaron figuras geométricas y generalizaron las propiedades.

Estas ideas planteadas son de gran ayuda en la presente tesis, puesto que en esta se tiene en cuenta el uso del micro-espacio para el apoyo y percepción de solidos geométricos junto con el pensamiento espacial de tal forma que permita generalizar propiedades. A su vez el macro- espacio se ve desarrollado, debido a que el estudiante identifica y analiza patrones de su entorno que son plasmados en el Geoespacio.

1.1.9. Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study[14]

Moss, Hawes & Naqvi (2015) realizan un estudio sobre la importancia de la geometría espacial en la escuela, donde enfatizan que los docentes se limitan a la geometría bidimensional, conllevando al poco manejo del espacio, del mismo modo en su estudio tratan de integrar lecciones japonesas basadas en la enseñanza del espacio y como ello contribuye a una mejor adquisición del conocimiento en cuanto a la geometría espacial.

---

[13] Duarte, A. (2013). *El geo plano: Una alternativa para mejorar la enseñanza de la geometría*. Recuperado el 24 de junio del 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/4082/1/CastilloElgeoplanoALME2013.pdf

[14] Moss, J., Hawes, Z. & Naqvi, S. (2015). *Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study*. Recuperado el 24 de junio de 2015 de la URL: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-015-0679-2#/page-1.

En su integración dé lecciones japonesas incluyen 4 cambios adaptados al currículo, el primero de ellos se refiere a transformaciones mentales tales como: composición y descomposición de figuras tridimensionales, el segundo se basa en enfoques de los maestros hacia las actividades en clase, donde estos deben abordar problemas distintos a los usuales y de carácter significativo, el tercer aspecto se basa en las lecciones y actividades explorativas donde el docente diseña una serie de actividades las cuales pone a prueba con un pequeño grupo de estudiantes y de acuerdo a los resultados obtenidos modifica esta misma para poder aplicar al grupo en concreto. La cuarta adaptación se refiere al espacio donde se evalúan proyectos de aplicación en base al pensamiento espacial y de esta forma se escogen y adaptan teniendo en cuenta los beneficios educativos.

Finalmente concluyen que la adaptación de los anteriores pasos, permite una mayor profundización, adaptación y aplicación de la geometría espacial. Al igual hay una mayor motivación por parte del docente y de los estudiantes en el momento de dar inicio a una actividad.

Dentro de la presente tesis se tendrán en cuenta las ideas abordadas anteriormente, pues se abordaran herramientas y problemas dentro de las actividades, a su vez los estudiantes construirán una noción sobre los entes básicos de la geometría del espacio y luego los identifican en la construcción de cada uno de los sólidos. De esta forma se hará uso del pensamiento visual y espacial, puesto que se hace en un reconocimiento y análisis de patrones tridimensionales.

1.2. Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo

El pensamiento espacial es una forma de ver el mundo y relacionarse con él a través de las diferentes experiencias. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), define el pensamiento espacial como "… el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales"[15]. Dado lo anterior podemos inferir como el desarrollo del pensamiento espacial permitirá que el educando se pueda desenvolver en diferentes contextos de su entorno.

Al igual Hadamard (Citado en Gutiérrez, 1992) especifica como gran parte del pensamiento matemático desarrollado es de tipo espacial, donde hace referencia a la aplicación del pensamiento matemático al entorno y como a través de este se fundamenta el pensamiento espacial.

Del mismo modo el MEN (1998) clasifica las relaciones del individuo con su espacio, llamándolas meso-espacio y macro-espacio. Donde el primero de ellos es referente al análisis del objeto, propiedades y su relación con otros objetos. El macro-espacio se refiere a la ubicación del estudiante en su entorno y a partir de este poder inferir propiedades.

Por otro lado dentro de la presente tesis se hará uso del Geoespacio, donde se aborda su contexto histórico y su definición.

1.2.1. Geometría en la ciudad[16]

Muzas (1999) realiza una actividad geométrica llamada geometría en la ciudad, la cual es aplicada a 30 estudiantes de grado octavo. Esta actividad tiene como fin reconocer algunas propiedades de los sólidos geométricos por medio de la observación, para ello implementan guías y acertijos que permitan llevar a los estudiantes a distintos sitios del barrio, donde se usa como base su espíritu investigativo y su curiosidad.

---

[15] Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Bogotá: Creamos Alternativas. Recupera el día 6 de junio 2015 de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf, p**.** 61.

[16] Muzas, M. (1999). Geometría en la ciudad. *Revista suma* N° 30. Recuperado el 8 de agosto del 2015 de la URL: http://catedu.es/matematicas_mundo/RUTAS/Geometria_en_la_ciudad.pdf

Finalmente este autor concluye que estas actividades aplicadas a hacer recorridos e identificar objetos matemáticos en su contexto, permite que los estudiantes puedan ir más allá de un simple concepto y de esta forma abrir un mundo matemático tanto dentro como fuera del aula.

Lo anterior es de gran importancia en la presente tesis pues se pretenderá identificar objetos tridimensionales a través de su construcción y su relación con el contexto, de esta forma se desarrollara el macro-espacio a través de la implementación del Geoespacio.

1.2.2. Different projecting methods in teaching spatial geometry[17]

Bako (2003) menciona la importancia de la geometría en el espacio y como esta se ha visto desplazada debido a las pocas herramientas en el momento de enseñar, de este modo decide aplicar un software en estudiantes con edades entre los 13, 14 y 15 años, esta aplicación es llevada con dos grupos. El primero usa representaciones manuales y el segundo computadores.

En cada una de las actividades los dos grupos deben reconocer secciones planas de un cubo y además propiedades relacionadas con los sólidos geométricos. Dentro de los resultados hallados se ve un gran avance en el manejo del software ya que permite hacer una mayor manipulación de sólidos para abordar los problemas.

Finalmente este autor plantea que el uso de la computadora permite entender ciertas representaciones de la geometría, sin embargo el uso de modelos visibles o solidos amplían la capacidad de percepción visual, por ello dentro de la enseñanza de la geometría espacial es necesario el uso de herramientas tecnológicas integradas con elementos manipulables para mejorar su enseñanza aprendizaje.

[17] Bako, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial giometry. Hungria. Recuperado el 22 de agosto del 20016 de la URL: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_Bako_cerme3.pdf

Aunque el uso de la tecnología y su aplicación en la geometría trae resultados favorables en pensamiento visual y espacial como se comentó, en la presente investigación se implementa el Geoespacio como una herramienta complementaria y de fácil manejo, pues al igual que el uso de Software permite construir y dar significado a elementos visuales que identifica el estudiante en el de abordar las actividades encaminadas a la geometría en el espacio.

1.2.3. El Geoespacio un recurso para la enseñanza de la geometría[18]

Orozco (2004) aplica en Honduras más específicamente en los grados séptimo y octavo el uso del Geoespacio en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, sus actividades están encaminadas a la construcción de algunos prismas irregulares y como a través de esto se puede obtener el área y volumen, de la misma forma aplica el teorema de Pitágoras en la obtención de diagonales dentro de un cubo.

Este mismo autor menciona como el Geoespacio fue trabajado por Pescarini y Puig en 1935, donde nace a través de una extensión del geoplano para trabajar en tres dimensiones y menciona "*El Geoespacio es una estructura cubica que lleva un sistema de argollas dispuestas en las aristas, donde podrán colocarse ligas de colores para formar sólidos y presentar diversas situaciones didácticas*"[19].

Del mismo modo Orozco (2004) hace una representación (Ver Figura 3) y se refiere a una de sus desventajas, la cual es que este mismo no permite hacer uso de puntos de apoyo fuera de las aristas y debido a esto se deben hacer construcciones auxiliares.

Dentro de la presente tesis se hará la construcción e implementación de tal Geoespacio pero haciendo uso de esta desventaja para poder trabajar con puntos interiores, a través de cuerdas, las cuales permitirán ubicar tales puntos (Ver Figura 1).

[18]Orozco, M. (2004). El Geoespacio un recurso para la enseñanza de la geometría. Antología sobre el Geoplano y el Geoespacio SEP México. Recuperado el 23 de agosto del 2015 de: http://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf
[19] Ibídem, p.19

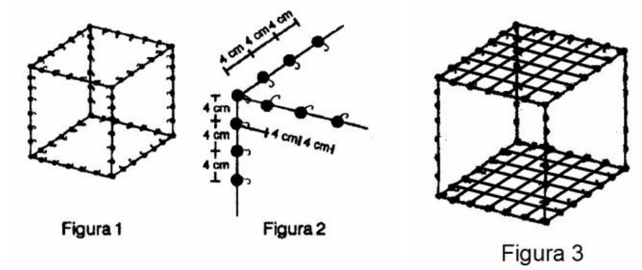


Figura 1. Representación del Geoespacio.

Por otro lado dentro de la presente tesis se buscara que el estudiante pueda construir diversos prismas y pirámides irregulares por medio de una serie de coordenadas, las cuales reforzaran el concepto de coordenadas rectangulares y mediante la percepción de los distintos entes geométricos poder ver relación que hay entre el contexto y la geometría del espacio. Además se hará uso de problemas donde el estudiante hace uso de distintas técnicas heurísticas que podrá plasmar en el Geoespacio para llegar a su resolución.

1.2.4. The efects of "spatial geometry curriculum with 3d" in lower secondary school mathematics[20]

Chino Kimiho et .al (2006) realiza en Japón una aplicación basada en el reconocimiento de solidos geométricos, esta es implementada en grado séptimo con un grupo de control n=32 y un grupo experimental n=66.

Cabe aclarar que estas actividades se encuentran subdivididas en las temáticas que se encuentran dentro del currículo en Japón de esta forma se tienen: composición y descomposición de figuras, corte de figuras, área y volumen de sólidos. Cada una de las actividades se sustenta en el uso de software (3 D DGS);

[20] Chino, k. morozumi, T. Arai, H. Ogihara, F. Oguchi, Y & Miyazaki, M. (2006). The efects of "spatial geometry curriculum with 3d" in lower secondary s|chool mathematics.japon. Recuperado el 21 de agosto del 2016 de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED499417.pdf

algunas de las preguntas se basan en el análisis y reconocimiento de sólidos, donde los estudiantes deben usar su percepción visual.

Finalmente dichos autores concluyen a través de una comparación entre el grupo de control y el grupo experimental, como el uso de este software permite fortalecer el entendimiento, interés y uso. Lo cual conlleva a un mejor entendimiento sobre las características de los sólidos y desarrollo del pensamiento lógico espacial.

De acuerdo a lo anterior, en la presente investigación se hace uso del Geoespacio, el cual no es una herramienta tecnología, pero su implementación permite abordar la construcción y caracterización de algunos sólidos geométricos, dejando en evidencia el uso del pensamiento visual y espacial. Por otro lado se implementara dentro de cada una de las actividades la relación de la geometría espacial con la robótica educativa, de esta forma el estudiante descubrirá la importancia que tiene la geometría del espacio en el proceso de mover ciertos mecanismos robóticos y su relación con la industria.

1.2.4. Geometría intuitiva desde el cuarto del baño[21]

Gómez & Nuñez (2009) realizan en argentina una actividad basada en la enseñanza aprendizaje de la geometría bidimensional y tridimensional, esta es aplicada en estudiantes de grado séptimo, octavo y once. Tales actividades están basadas en el uso del reconocimiento y obtención de fórmulas geométricas, todo esto es por medio de la manipulación y observación de características propias de los sólidos. Este proceso tiene como objetivo principal determinar como el estudiante usa la visión geométrica en el descubrimiento de problemas experimentales y como esto conlleva al uso del pensamiento espacial y la visión espacial.

---

[21] Gómez, C. &. Núñez, E. (2009). Geometría intuitiva desde el cuarto del baño. *Revista Números,* vol. 70. pp. 89-104. Recuperado el 20 de agosto del 2015 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Experaula_01.pdf

Estos autores concluyen que los alumnos disfrutan manipular materiales concretos, lo cual permite desarrollar su pensamiento espacial al mismo tiempo que realiza tal construcción. Dentro de la presente tesis se hará uso del reconocimiento, manipulación y observación de solidos geométricos a través del uso del Geoespacio y la resolución de problemas, de esta forma se busca relacionar los contenidos geométricos con su contexto.

1.2.5. Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability[22]

Pittalis & Christou (2010) aplican en Chipre un estudio basado en los tipos de razonamiento geométrico tridimensional, este es aplicado a 58 estudiantes de grado séptimo, se aplicaron 27 actividades las cuales permitieron identificar y reconocer solidos geométricos, manipulación de objetos tridimensionales, estructuración o encajamiento de cubos para hallar el volumen, rotación y traslación de sólidos. Dentro del análisis de resultados estos autores proponen que hay cuatro tipos de razonamiento que permiten describir el pensamiento en la geometría tridimensional nombrando: la representación, estructuración, conceptualización y razonamiento los cuales a su vez se componen de capacidades espaciales tales como: visualización, orientación y relaciones espaciales.

En la presente investigación se tiene en cuenta las ideas expuestas anteriormente, debido a que dentro del planteamiento y desarrollo de las actividades, será necesario que el estudiante use su pensamiento visual, orientación y las relaciones de los objetos tridimensionales logrando fortalecer la representación, análisis y base conceptual de los contenidos geométricos del espacio.

[22] Pittalis, M. &. Christou, C. (2010). *Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. Springer Science+ Business Media*. Recuperado el 10 de enero del 2015 de la URL: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-010-9251-8

1.2.6. The effects of high school Geometry instruction on the performance in Spatial Tasks[23]

Kospentaris & Spyrou (2010) realizan en Grecia una aplicación de actividades encaminadas a la aplicación del pensamiento espacial, de esta forma estos autores deciden realizarlo con 282 estudiantes entre las edades de (13-20 años). Cabe mencionar que dentro de las actividades se evalúa: análisis de forma y configuración, transformaciones y lateralidad; el fin de este proceso es poder medir el desarrollo del pensamiento espacial a través de una serie de guías.

Estos autores encuentran una gran diferencia significativa de la geometría en el espacio, ya que a medida que se avanza de curso los estudiantes mejoran su pensamiento espacial y esto es debido a la mayor ejercitación del pensamiento cuando se avanza en el colegio. Al igual se pudo precisar que la geometría plana es de mayor facilidad para los estudiantes debido a su intensidad y en el momento de aplicar rotaciones espaciales los estudiantes obtuvieron resultados muy bajos.

De esta forma se ve la necesidad de hacer uso de herramientas manipulables para poder ejercitar el pensamiento visual y espacial desde muy temprano, permitiendo lograr mejores avances a medida que el estudiante avanza por los distintos grados. Lo anterior se relaciona con el presente trabajo, pues se abordara elementos de la geometría en el espacio en grado séptimo de tal forma que el estudiante comprenda desde muy temprano que está en un mundo tridimensional donde es aplicable en todos los contextos la geometría del espacio.

[23] Kospentaris, K & Spyrou, P. (2010). The effects of high school Geometry instruction on the performance in Spatial Tasks. University of Athens. Recuperado el 22 de Agosto del 2016 de la URL: http://www.math.uoa.gr/me/docs/Kospentaris_Spirou_Effects%20of%20High%20School%20Geometry.pdf

1.2.7. Using origami to enchance geometric reasoning and achiviement[24]

Arici & Tutak (2013) realizan en Turquía un estudio basado en la enseñanza- aprendizaje de triángulos, más específicamente en el tema de puntos y rectas notables del triángulo. Esta actividad es aplicada a 167 estudiantes de educación secundaria, los cuales son divididos en dos grupos: uno de control y otro experimental. El grupo de control recibía educación tradicional en base a textos y deducción de propiedades, mientras el grupo experimental hacia uso del origami para la construcción del conocimiento. Sin embargo aunque ambos grupos presentaron resultados significativos al final del estudio, se puede apreciar una mayor apropiación del conocimiento por parte del grupo experimental. En este proceso se refleja la importancia del material didáctico, el cual hace uso del razonamiento, construcción, observación y pensamiento espacial, para comprender conceptos y características propias de los triángulos.

De acuerdo a lo anterior, se precisa el uso del material didáctico y manipulable como es el Geoespacio, este elemento manipulable permite representar distintos contenidos geométricos del espacio y sus relaciones con situaciones de la vida cotidiana de una forma más significativa y visible.

1.2.8. An investigation on students' degree of acquisition related to Van Hiele level of geometric reasoning: a case of 6-8th graders in turkey[25]

Koç, Işıksal & Seviş (2013) realizan en Turquía un estudio en base a la comprensión de la geometría tridimensional, su aplicación fue hecha a 809 estudiantes de los grados sexto, séptimo y octavo. Estos autores usan el modelo dado por Gutiérrez y otros (1991), donde este autor propone una guía abordada por preguntas y porcentajes que permiten clasificar a los estudiantes en los distintos niveles de

---

[24] Arici, S &. Tutak, A. (2013). Using origami to enchance geometric reasoning and achiviement. Cerme (2013). pp. 585-592. Recuperado el 14 de agosto del 2015 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

[25] Koç, Y., Işıksal, M., Seviş, Ş. Osmanoğlu, A. Çetinkaya, B. Aşkun, C. & Bulut, S. (2013). An investigation on students' degree of acquisition related to Van Hiele level of geometric reasoning: a case of 6-8 th graders in turkey. Cerme (2013). pp. 665-674. Recuperado el 14 de agosto del 2015 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

razonamiento geométrico dado por Van Hiele. Por lo tanto concluyen de las preguntas hechas; que tan solo el 36% alcanzó el nivel 1 de Van Hiele (Descriptivo) y el 64% correspondiente se ubicó en el nivel 0 (Reconocimiento) o no reconocían figuras tridimensionales. Esto mostro que en algunos casos la enseñanza de la geometría tridimensional es de forma memorística o que de un modo u otro el currículo escolar no aborda con suficiente claridad esta temática, presentando deficiencias en el proceso de enseñanza aprendizaje sobre la geometría del espacio.

Lo anterior es de gran importancia en la presente tesis, pues se ve con gran claridad la importancia de abordar la geometría tridimensional por medio de herramientas manipulables, resolución de problemas y robótica educativa que permitan potenciar y desarrollar el pensamiento visual y espacial por medio de diferentes contextos que permiten al estudiante ser partícipe de su propio conocimiento y dejando de un lado la enseñanza de forma tradicional.

1.3. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, en particular sobre el pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo en Colombia

Durante los últimos años la enseñanza-aprendizaje de la geometría ha tenido un carácter evolutivo, puesto que esta misma ha sido de gran interés debido a su poca importancia que se le ha dado en las aulas escolares, más aún es importante rescatar la importancia del pensamiento espacial inmerso en algunos contenidos de la geometría básica. Chávez & Floriano (2011) comentan: *"El aprendizaje del espacio es significativo en el medio en que el estudiante está inmerso, debido a que la realidad que está al alrededor comprende objetos con formas y dimensiones diferenciadas y al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y la representación espacial el educando debe ir progresando en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas"*[26].

[26] Chávez. S. & Floriano, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros .Recuperado el 2 de julio del 2015 de la

A continuación se muestran algunas investigaciones referentes a la aplicación del pensamiento espacial en la Educación Básica en Colombia.

1.3.1. Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videojuego, como práctica socialmente compartida[27]

Acevedo (2009) aplica en el gimnasio los robles de Bogotá una serie de actividades encaminadas a los grados 4, 5 y 6. Estas contienen temáticas en base a movimientos rígidos y mediante la implementación del juego tetris, con lo cual se pretende comprender los conceptos de traslación y rotación. En este estudio se pretende dar fortalecimiento a algunos conceptos básicos de solidos que se relacionan con la geometría tridimensional. Este autor en el proyecto no muestra conclusiones finales de tales aplicaciones, se fundamenta en investigaciones basadas en juegos y tecnología mostrando como a través de estos se incentiva la motivación y el deseo por aprender y aplicar conceptos geométricos al contexto.

Lo anterior será tenido en cuenta, pues en la presente tesis se borda la orientación espacial dentro de las actividades. De esta forma se aborda implícitamente en el sistema de actividades el uso de la rotación y algunos conceptos básicos de traslación, dando significado a los contenidos de la geometría del espacio.

1.3.2. Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial[28]

Chávez & Floriano (2011) realizan un estudio en Florencia el cual es aplicado a estudiantes de grado séptimo. En la investigación abordan el tema correspondiente a cuadriláteros y al proceso de enseñanza-aprendizaje de estos por medio de Geogebra. Manifiestan que esta herramienta permite hacer uso del

---

URL: http://www.elitv.org/documentos/tesis/Tesis%20de%20Maestria%20Cesar%20y%20Ramon.pdf, p.15.

[27] Acevedo, J. (2009). *Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videojuego, como práctica socialmente compartida.* Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/741/

[28] Chávez. S. & Floriano, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros. Recuperado el 2 de julio de la URL: http://www.elitv.org/documentos/tesis/Tesis%20de%20Maestria%20Cesar%20y%20Ramon.pdf

pensamiento espacial, pues se refiere a propiedades como la rotación y traslación de figuras. Concluyen como la geometría dinámica permite generar experiencias significativas basadas en el uso del pensamiento espacial.

Estos autores concluyen que la implementación de herramientas tecnológicas no solo permite motivar al estudiante, sino que desarrollan el pensamiento espacial, permitiendo que los estudiantes puedan diferenciar algunas características propias tanto de figuras bidimensionales como de figuras tridimensionales.

Respecto a lo anterior, en la presente investigación se difiere al uso de la tecnología, pues se asume como herramienta integradora el Geoespacio, pues a pesar de no ser una herramienta tecnológica, permite motivar al interés y curiosidad por parte del estudiante en el momento de plasmar los contenidos geométricos del espacio, de esta forma se llega a desarrollar el pensamiento visual y espacial.

1.3.3. Dibujando la realidad usando las isometrías en el plano bidimensional[29]

Galán & Rodríguez (2013) aplican una serie de técnicas en grado séptimo basadas en isometrías y software dinámico, por medio de imágenes dadas. En este trabajo los estudiantes parten de figuras tridimensionales a formas bidimensionales donde a su vez las transforman en isometrías, estas pueden ser trabajadas de forma manual o haciendo uso de Cabri. Lo anterior permite rescatar el desarrollo del pensamiento espacial basado en la composición y descomposición de objetos tridimensionales, sin embargo estos autores concluyen que es muy complejo partir de un objeto real y llegar a una representación bidimensional puesto que se necesitan procesos extensos.

[29] Galán, G. & Rodríguez, Y. (2013). *Dibujando la realidad usando las isometrías en el plano bidimensional.* En Gallego, Adriana P. (Ed.), *Revista Científica* (pp. 781-783). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado el 16 de septiembre del 2015 de URL: http://funes.uniandes.edu.co/6749/1/Rodriguez2013Dibujando.pdf

Lo anterior será abordado en la presente tesis, pues los estudiantes usaran el Geoespacio para analizar las distintas representaciones y proyecciones de los sólidos en situaciones de su contexto, esto permite hacer uso del pensamiento visual y espacial en el momento de abordar el reconocimiento de figuras, conllevando a fortalecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional o viceversa.

1.3.4. Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café[30]

Ramírez, Cano & Molina (2013) aplican en Antioquia una serie de actividades en grado sexto, las cuales buscan diferenciar el concepto de área y perímetro por medio de la agricultura del café, tales actividades están basadas en la observación, siembra, análisis y solución de problemas. Estos autores concluyen que la matemática se debe dotar de experiencias vivenciales, en particular a través de la agricultura, de este modo se permite evidenciar y palpar los conceptos, diferencias y características de área y perímetro.

Ante lo anterior es importante rescatar que las actividades planteadas dentro de la presente tesis estarán basadas en problemas aplicados al contexto del estudiante, donde el mismo pueda observar, medir, contar y usar métodos heurísticos que conlleven apropiarse de los contenidos de la geometría del espacio.

1.3.5. Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática[31]

Quiroz (2014) realiza en Caucasia una serie de actividades las cuales están enfocadas a grado décimo para la comprensión de área y volumen por medio de la modelación matemática. Estas actividades están orientadas a reconocer los lugares del colegio que se puedan ver afectados por la inundación y de esta

[30] Ramírez, Z. Cano, R. &. Molina, J. (2013). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café*. Universidad de Antioquia. Recuperado el 7 de octubre del 2015 de la URL: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/18619-65393-1-PB.pdf
[31] Quiroz, S. (2014). *Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática*. Universidad de Antioquia. Recuperado el 8 de octubre del 2015 de la URL: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/177/1/JC0875.pdf

forma poder determinar su área y volumen, por medio de planos y con un análisis de los mismos los estudiantes estiman la superficie del colegio que puede ser afectada y la capacidad de agua que puede albergar.

Este autor concluye que la aplicación del contexto permite generar un mayor interés y conexión de los conceptos previos para generar conocimiento, de esta forma los estudiantes muestran apropiación y dominio de los conceptos relacionados con área y volumen.

En la presente tesis, se buscara que los estudiantes usen métodos heurísticos donde hagan uso de sus pre saberes para encontrar la solución a los problemas planteados, del mismo modo por medio de la construcción de dichos solidos a través del Geoespacio y su relación con objetos del contexto, se buscara que el estudiante sea el propio constructor de su conocimiento.

1.3.6. Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo[32]

Tafur (2015) realiza en grado séptimo un estudio sobre las trasformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios, las actividades propuestas están sustentadas bajo la visualización y la comunidad de práctica de Wenger, estas mismas buscan que los estudiantes hagan uso de sus pre-saberes y mediante el uso de herramientas heurísticas puedan encontrar la solución a los problemas planteados. Finalmente los estudiantes pueden reconocer la aplicabilidad de las transformaciones en el plano por medio de ejemplos prácticos que encuentran en su entorno.

Esta autora concluye que el uso de representaciones planas y el trabajo en equipo permiten que los estudiantes puedan construir una realidad objetiva de forma mental por medio de ilustraciones a

[32] Tafur, A. (2015). *Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo.* Tesis presentada para optar al título de magister en educación matemática. Universidad Antonio Nariño.

manipulaciones, del mismo modo aclara que el uso de materiales didácticos concretos favorece el proceso de enseñanza aprendizaje.

Las anteriores conclusiones se tendrán en cuenta por el presente autor, pues se hará uso de la comunidad de práctica de Wenger y de material didáctico concreto aplicado a la geometría tridimensional, de esta forma se usara el Geoespacio y se contextualizaran los contenidos geométricos a la tecnología, conllevando a incentivar y aplicar lo adquirido, de tal forma que los estudiantes muestren un dominio de la geometría espacial en su entorno.

Conclusiones del capítulo 1

Las investigaciones presentadas anteriormente, se enfocan principalmente en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el espacio, estas mismas se enfocan en la construcción y caracterización de solidos geométricos en la Educación Básica Secundaria abordadas en distintos países del mundo y en Colombia. De esta forma los autores que más se destacan son: Robaina & Martin (1985), Gutiérrez (1991), Muzas (1999), Sardella, Mastucci & Berio (2002), Prada (2003), Bako (2003), Orozco (2004), Chino Kimiho et .al (2006), Gómez & Nuñez (2009), Restrepo, Ramírez & Múnera (2009), Pittalis & Christou (2010), Kospentaris & Spyrou (2010), Koç, Işıksal & Seviş (2013), Sanchis & Guillen (2013), Moss, Hawes & Naqvi (2015).

Las investigaciones de estos autores están enfocadas al uso de herramientas manipulables, medibles y visibles para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el espacio, del mismo modo consideran la necesidad de implementar herramientas tecnológicas y el uso de problemas para incentivar el pensamiento espacial desde edades muy tempranas, de tal forma que se vea la necesidad y aplicabilidad en el contexto. Con esto se logra evitar el uso memorístico y rutinario de la geometría en el espacio.

En conclusión, el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría espacial se ve influenciado por las pocas herramientas manipulables que tienen los docentes en el momento de abordar las temáticas y por ello se hacen representaciones bidimensionales que no permiten concretizar o visualizar de forma más clara las temáticas abordadas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordara la fundamentación teórica de la presente tesis, donde se abarcaran seis ítems; en la sección 2.1 se habla sobre la resolución de problemas y problemas retadores, destacando su papel en la enseñanza-aprendizaje de la matemática y el papel activo del estudiante. El ítem 2.2 es referente al pensamiento visual, y en él se habla de la importancia del uso de imágenes o representaciones para favorecer el desarrollo del pensamiento espacial.

El ítem 2.3 se enfoca en el pensamiento espacial y su caracterización dada por Carroll (1993) la cual permite identificar una serie de factores que desarrollan este pensamiento. El ítem 2.4 abarca la robótica educativa como una herramienta aplicada al contexto que plasma la necesidad e importancia de hacer uso del pensamiento visual, espacial y comprender la geometría del espacio en el entorno.

El ítem 2.5 hace referencia a la Comunidad de Práctica de Wenger (1998), donde se menciona la importancia de trabajar en grupo dentro del aula de clase y como esto favorece la enseñanza-aprendizaje de la matemática, finalmente el ítem 2.6 concluye con los referentes teóricos de grado séptimo más específicamente en geometría del espacio.

2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas. Problemas retadores

Dentro de la enseñanza aprendizaje de la geometría en el colegio es común encontrar estudiantes que se dedican a repetir los procesos y algoritmos que se trabajan en clase, esto conlleva a que se limite su capacidad de razonamiento, análisis y comprensión.

Debido a esto el MEN (2006) decide plantear un aprendizaje por competencias en el cual el estudiante deba solucionar problemas, estos últimos le permiten ser partícipe en la construcción de su propio conocimiento. El MEN (2006) refiere que "*Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación* *espontánea, si no que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos*"[33].

Del mismo modo el MEN (2006) establece cinco procesos generales de la actividad matemática nombrando entre ellos la formulación, tratamiento y resolución de problemas, a su vez lo destacan como principal eje organizador del currículo de matemáticas. Esto es debido a que muchas situaciones problema o los problemas permiten validar posibles caminos que conlleven a distintos procesos y estos a diferentes resultados, esto permite que el estudiante realice en cada proceso un análisis reflexivo, conllevándolo a formular y responder preguntas. Finalmente el MEN (2006) enfatiza que: *"La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas suscitados por una situación problema permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas"*[34].

Lo anterior establece la importancia de involucrar la teoría de la resolución de problemas dentro de la enseñanza aprendizaje de la matemática y por ello dentro de la geometría, en particular dentro de la geometría espacial. A continuación se presentan algunos investigadores que han trabajado con problemas, luego se abordaran las definiciones más representativas para asumir una de ellas en la presente tesis.

Algunos autores que han trabajado con la definición de problemas son: Polya (1965), Martínez (1981), Majmutov (1983), Rohn (1984), Schoenfeld (1985), Mayer (1986), Labarrere (1987), Fridman (1991),

---

[33] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Enlace Editores Ltda: Bogotá. Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf, p.49.
[34] Ibídem, p.52.

Sánchez (1995), Garret (1995), Campistrous y Rizo (1996), Sriraman y Engish (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros.

Cabe aclarar que aunque Polya (1965) es uno de los principales representantes de la teoría de resolución de problemas, Quintana (2005) menciona como Polya no define problema en su primer libro *How to sovel it* (1945), donde presenta una serie de pasos que permiten dar inicio a la heurística moderna, de hecho tal definición es presentada en su obra posterior llamada *Mathematical discovery* (1962-1965). Quintana (2005) cita textualmente la definición de problema dada por Polya "*Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata*"[35].

Krulik & Rudnik (1980) definen problema como "*un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma*"[36].

Según Román (2012) en las anteriores definiciones de problema, se establece que un problema debe cumplir con tres requisitos:

1. *"Aceptación: El individuo o grupo debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.*
2. *Bloqueo: Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.*

[35] Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Madrid 2005. Recuperado el 11 de octubre del 2015 de la URL: http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf, p. 38.
[36] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon, p. 4.

3. *Exploración: El compromiso personal o del grupo fuerza la exploración de nuevos métodos para atacar el problema*[37]".

Por otro lado Charnay (1994) define problema como "*Un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una determinada situación que "hace problema" para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar*"[38]

La definición de problema abordada por Polya (1965) será tomada en la presente tesis, ya que relaciona de forma subjetiva la relación y compromiso de la persona por encontrar una solución lógica y razonable a un objetivo propuesto, del mismo modo esta definición es clara y concisa en comparación a las otras.

Teniendo claro lo anterior, lo siguiente a tener en cuenta es la definición de resolución de problema y sus características, en este punto es necesario entender la importancia de aprender a solucionar los problemas, pues esto puede potenciar la capacidad del pensamiento matemático y permitir un aprendizaje más significativo. De este modo Godino (Citado en Chávez & Floriano, 2011) menciona "*Al solucionar un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad*"[39].

Dentro de las diferentes investigaciones referentes a la resolución de problemas, encontramos autores como: Polya (1965), Restle & Davis (1962), Schoenfeld (1987), Fridman (1991), Ballester, et al. (1992), Brenes & Murillo (1994), Lesh & Zawojewski (2007), entre otros. Polya (1965) establece que: *"... resolver*

---

[37] Román, M. (2012). *Resolución de problemas geométricos*. Universidad de Valladolid. Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: http://cerro.cpd.uva.es/bitstream/10324/2705/1/TFG-G%20184.pdf, p. 15.

[38] Charnay, R. (1994). *Aprender por medio de la resolución de problemas, Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Barcelona: Paidos .Recuperado el 13 de octubre del 2015 de la URL: http://instituto20.com.ar/archivos/Didactica%20de%20matematicas%20%20Aportes%20y%20reflexiones.pdf, p. 8.

[39] Chávez. S. & Floriano. R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial*. Recuperado el 2 de julio de: http://www.elitv.org/documentos/tesis/Tesis%20de%20Maestria%20Cesar%20y%20Ramon.pdf, p. 66.

un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"[40].

Garret (Citado por García, 1998) define la resolución de problema como "*Una actividad de aprendizaje, compleja, que incluye el pensar…, y que, además,… puede ser descrita como un proceso creativo, ya que solucionar problemas es pensar creativamente… y… hallar una solución a un problema, es un acto productivo*"[41].

Frazer (Citado por García, 1998) se refiere a resolución de problema y las particularidades del proceso, por ello lo define como "*Un proceso que utiliza el conocimiento de una disciplina y las técnicas y las habilidades de esa disciplina para salvar el espacio existente entre el problema y su solución*".[42]

Según las definiciones descritas en base a resolución de problemas, aquella que se asumirá en la presente tesis es la dada por Garret, dado que esta habla de procesos, construcción, creatividad y actos productivos, de esta forma se ve una diferencia con las definiciones de Polya y Frazer puesto que tales autores enfatizan solamente en describir procesos o caminos no vislumbrados que conllevan a un descubrimiento.

Cabe destacar que la resolución de problemas permite al estudiante tener un papel activo, de esta forma Chávez & Floriano (2011) mencionan como la resolución de problemas activan la capacidad individual como son: leer comprensivamente, reflexionar, analizar y manejar un plan de trabajo el cual mediante una serie de pasos permita dar verificación a las soluciones.

---

[40] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.
[41] García, J. (1998). *Didáctica de las ciencias. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* Grupo Impresor. Colombia. Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191, p. 15.
[42] Ibídem, p. 15.

Con base a lo anterior, la resolución de problemas permite desarrollar e incentivar el pensamiento espacial, pues los estudiantes harán uso de la construcción y representación de objetos tridimensionales por medio del Geoespacio, dentro de tales construcciones habrán problemas los cuales permitan al estudiante tomar un papel activo, donde haga uso de sus saberes y descubra nuevos métodos y formas de manera creativa para dar solución a lo planteado.

Lo siguiente a tener en cuenta son los distintos autores o investigadores que han abordado la resolución de problemas y sus distintas fases, donde destacamos a: Dewey (1933), Pólya (1965), Schoenfeld (1985), Fridman (1991), De Guzmán (1993), cada uno de ellos han formulado distintas etapas según su punto de vista, dentro de la presente tesis se asumirá el modelo dado por Pólya (1965). Cabe aclarar que Polya (1965) Introduce el término "heurística" refiriéndose al arte de la resolución de problemas, del mismo modo se refiere a esta misma y las formas de pensar o métodos que conlleven a dar solución a un problema.

Polya (1965) menciona una serie de características necesarias para resolver un problema de este modo se refiere: "*Para resolver un problema se necesita: comprender el problema: ¿Cuál es la incógnita? , ¿Cuáles son los datos y las condiciones? concebir un plan: ¿conoce un problema relacionado con este?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podrá enunciar el problema de otra forma?, ¿ha empleado todos los datos? ejecución del plan: comprobar cada uno de los pasos, ¿puede usted ver que el paso es correcto? , visión retrospectiva: verificar el resultado*"[43].

Polya (1945) define cuatro fases para la resolución de problemas:

- Orientación hacia el problema.

[43] Polya, G. (1965). *How to solve it*. Princenton University Press (Traducción: Cómo plantear y resolver problemas, de Julián Zagazagoitia, Ed. Trillas. México), p.19.

- Trabajo en el problema.
- Solución del problema.
- Evaluación de la solución y de la vía.

Ante lo anterior, Valencia, Quintero & Morales (2008) especifican las características correspondientes a cada uno de los pasos propuestos por Polya.

Paso 1. Orientación hacia el problema.

En este paso es importante comprender el problema, saber interpretarlo y de esta forma saber lo que se pregunta, por eso es importante un estudio profundo del enunciado, cabe aclarar que en esta etapa se da una familiarización y exploración de la persona con el problema, por eso es relevante que surjan preguntas como ¿Qué nos piden? ¿Qué datos me sirven? ¿De qué trata el problema?, entre otras.

Valencia, Quintero & Morales (2008) se refieren: *"Un enunciado consta de una o varias preguntas, unos datos que expresan una información relevante y, a veces, una información no relevante. La relevancia o irrelevancia de la información parte de la pregunta que plantee el problema, por ese motivo lo primero que hay que analizar es la pregunta"*[44].

Del mismo modo se pueden dar una serie de preguntas en este paso: ¿Se entiende todo lo que dice? ¿Se puede reformular el problema con propias sus palabras? ¿Distingue cueles son los datos? ¿Sabe a qué metas se quiere llegar? ¿Hay información expresada de manera extraña? ¿Es este problema similar o equivalente a algún otro que hayas realizado antes?

Paso 2. Trabajo en el plan.

[44] Valencia, v. Quintero, G. Morales, A. (2008). Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Universidad tecnológica de Pereira. Recuperado el 2 de noviembre del 2015 de la URL: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/990/1/3722107A282.pdf. p. 24.

Es este paso Valencia, Quintero & Morales (2008) comentan como es necesario tener o buscar un plan, del mismo modo es necesario contar con un mal plan en lugar de ningún plan, ya que esto permite generar un análisis reflexivo en la búsqueda de la solución. También es importante hacer uso de las experiencias y conocimientos previos, si no se llega a contar con esto, interfiere de forma participativa el docente haciendo uso de sugerencias o preguntas que permitan acercar al estudiante a un planteamiento en la estrategia de solución.

Valencia, Quintero & Morales (2008) mencionan: "*¿Puedes usar algunas de las siguientes estrategias?, ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema de forma más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, usar las propiedades de los números, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, usar casos, resolver una ecuación, buscar una fórmula, usar un modelo, usar un análisis dimensional, identificar sub-metas, identificar coordenadas, usar simetría, entre otras.*"[45]

Paso 3. Solución del problema.

En este paso es importante aclarar el hacer por hacer, ya que la solución de un problema se alcanza de forma consciente, es decir se analiza los procesos aplicados y su contribución al desarrollo del problema. Valencia, Quintero & Morales (2008) se refieren: "*En cada encrucijada, se asaltara la duda y la angustia. La duda, porque siempre es fácil saber que camino hay que seguir. La angustia, Por que elegir un camino supone dejar otro y nunca sabremos que había al final de un sendero no recorrido. Pero ¿no queremos*

[45] Valencia, v. Quintero, G. Morales, A. (2008). Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Universidad tecnológica de Pereira. Recuperado el 2 de noviembre del 2015 de la URL: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/990/1/3722107A282.pdf, p. 25

que las matemáticas no se alejen de la vida real? Pues, la vida consiste en eso: en elegir una cosa sabiendo que se dejan otras y que nunca sabremos cómo eran"[46].

Finalmente, es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Implementar la o las estrategias hasta dar solución al problema o hasta que tal aplicación necesite de un nuevo curso.
- Establecer un tiempo razonable para dar solución al problema, si no se desarrolla durante este tiempo, considérese una sugerencia al problema o descanse un momento.
- No hay que temer a comenzar de nuevo, ya que una nueva estrategia o plan pueden llegar a ser el camino al éxito.

Paso 4. Evaluación de la solución y de la vía.

En este paso lo que se pretende es dar un análisis minucioso de la solución al problema, Para ello se debe retomar de nuevo el problema y mirar si el desarrollo responde a la pregunta de tal problema. Esto es posible lograrlo mediante preguntas como: ¿Esta solución es la correcta? ¿Existe una solución más sencilla? ¿Has usado la información relevante en la solución del problema? ¿Qué conocimientos has usado? ¿Es posible generalizar tal solución y aplicarla a otra solución de problemas?

Con estos cuatro pasos se puede lograr que el estudiante adquiera un dominio de sus preconceptos y los integre en la solución de problemas, generando nuevos saberes los cuales van a ser auto-evaluados.

[46] Valencia, V., Quintero, G. & Morales, A. (2008). Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Universidad tecnológica de Pereira. Recuperado el 2 de noviembre del 2015 de la URL: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/990/1/3722107A282.pdf, p. 26.

Dentro de la presente tesis se hará uso de estos cuatro pasos, ya que el estudiante hará uso de sus preconceptos en geometría plana y sus ideas del espacio para poderlos aplicar en el Geoespacio y finalmente usar medios heurísticos que permitan dar solución al problema planteado inicialmente.

Las actividades que se proponen en la tesis se sustentan en problemas retadores. Según Pérez (2004) los problemas retadores *"… invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento"*[47].

Por otra parte los problemas retadores *"… exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior"*[48].

Estos problemas propician en los estudiantes creación y originalidad, su resolución le exige responsabilidad y compromiso. En la investigación se comparte el criterio relacionado a los fines de la resolución de problemas, los cuales constituyen también fines de los problemas retadores. Estos pueden resumirse en:

- *"Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*

[47] Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[48] Ibídem.

- *Darle una buena base matemática"[49].*

Según Falk (1980) todo problema retador es motivante para el estudiante. Estos problemas para que cumplan con este calificativo, deben tener tres características, *"…que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"[50]*, cuestiones estas que se consideran en las actividades para el desarrollo del pensamiento espacial, que se proponen en el capítulo cuatro de esta tesis.

La resolución de problemas sirve de apoyo al desarrollo del pensamiento espacial, pues propicia en los estudiantes:

- Explorar, analizar, conjeturar y comprender el problema.
- Realizar una representación, una gráfica o construcción auxiliar que ilustre los elementos del problema.
- Estrategias visuales en la resolución de problemas.
- Ubicación espacial.

También en este proceso es importante asumir el riesgo de equivocarse, pues no hay que temer a comenzar de nuevo, ya que una nueva estrategia o plan pueden llegar a ser el camino al éxito.

Finalmente cabe mencionar que el uso de problemas retadores, constituye una motivación o reto que conlleva al estudiante a generar dudas y usar razonamientos distintos en el aula, de esta forma si se da solución, se crea confianza en los saberes, del mismo modo si no se da solución, el estudiante cuestionara constantemente sobre sus métodos de solución y de esta forma aprender de sus errores para poder usarlos en problemas futuros.

[49] Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de noviembre de 2012 de http:www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/

[50] Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. p. 16.

2.2. Fundamentos del pensamiento visual

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría es fundamental que los docentes hagan uso de imágenes o figuras, las cuales permitan al estudiante interiorizar conceptos básicos de geometría. Este proceso le propicia abstraer y modificar términos que aún no han sido aclarados dentro de las definiciones abordadas en clase.

Wheatley & Brown (1994) mencionan como algunos estudios especializados establecen que el uso de construcción de imágenes o figuras dentro de las actividades abordadas permiten mejorar el aprendizaje matemático y ayuda a interiorizar el conocimiento de forma más clara. Cabe aclarar que el uso de la visualización junto con el pensamiento visual tiene una aplicación reciente en la Educación Matemática. Presmeg (2006) propone tres etapas referentes a la aplicación de la visualización en la educación matemática, las cuales se analizan a continuación:

La primera etapa corresponde entre los años 1970 y 1980, donde surgen de nuevo las investigaciones de imágenes desde una base psicológica, se realizan estudios sobre el pensamiento geométrico espacial (sólidos) y su relación con la intuición. Además se hace uso de ordenadores para representar algunas funciones.

La segunda etapa se ubica en la década de los 90, donde la visualización se incluye como un campo especifico de investigación dentro de la Educación Matemática. En esta etapa se originan las investigaciones relacionadas con el diseño curricular y áreas particulares de la matemática, establecimiento de categorías de imágenes y esquemas de imaginería y status de la visualización, y rechazo a visualizar en matemáticas.

La tercera etapa comienza a partir del año 2000 donde se amplía el enfoque de la visualización hacia sus aspectos semióticos. Esta etapa se dirige a analizar cómo pueden tomar forma las ideas matemáticas y se confirma la necesidad de dar consistencia a teorías que puedan unificar todo el campo de la visualización dentro de la educación matemática.

Teniendo claro la importancia de la visualización y del pensamiento visual en la Educación Matemática, algunos autores que han trabajado estos conceptos son: Arnheim (1969), De Guzmán (1993), Castro Martínez & Castro (1997), Presmeg (1999, 2006), Cantoral.et al (2000), Gregorio & Cornelio (2004), Alsina & Nelsen (2006), Giaquinto (2007), Domenicantonio, Costa & Vacchino (2011) y Reed (2013).

A continuación se realiza un análisis sobre el significado del pensamiento visual, para ello se consideran algunas definiciones dadas por los autores antes mencionados. Arhneim (1969) comenta que "… *la percepción visual es el pensamiento visual*"[51], donde aclara que la percepción visual es una operación mental, que interviene al igual que la memoria o el pensamiento en la recepción, almacenaje y procesamiento de información.

Del mismo modo Presmeg (1999, citada en Díaz y Dircio, 2010) comenta "*Asumimos que el pensamiento visual es producto de procesos visuales, y adquiere la forma concreta de generalizaciones y los argumentos para sustentarlos*"[52].

Por otro lado Castro Martínez & Castro (1997, citados en Gregorio & Cornelio 2004) menciona "… *el pensamiento visual está fuertemente ligado a la capacidad de formación de imágenes mentales, también la capacidad para visualizar cualquier concepto matemático, o problema, requiere la imagen para interpretar y entender información figurativa, sobre el concepto, manipularla mentalmente, y expresarla sobre un soporte material*"[53].

---

[51] Arnheim, R. (1985), *El pensamiento visual*. Buenos Aires: Editorial Universitaria, p. 13.
[52] Díaz, M. & Dircio, L. (2010). El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME 2010). Recuperado el 7 de enero de 2016 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/4556/1/D%C3%ADazElgradoALME2010.pdf, p. 338.
[53] Gregorio, R. &. Cornelio, L. (2004). *El papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas.* Tesis para optar al título de licenciado en matemáticas. Recuperado el 4 de diciembre del 2015 de la URL: http://cimateuagro.org/images/pdf/2004-3.pdf, p. 9.

Gregorio & Cornelio (2004) se refieren "… *las formas de pensamiento asociadas al lenguaje figurativo (imágenes, diagramas o figuras), se denominan pensamiento visual*"[54]. Guiaquinto (2007) menciona el pensamiento visual como *"… pensamiento que se refiere a la imaginación visual o percepción visual de diagramas externos"*[55]. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede apreciar lo importante del pensamiento visual en el momento de abordar un concepto geométrico, pues permite usar una representación o imagen mental la cual se usa para comprender o dar significado al nuevo cocimiento.

A su vez el autor de la presente tesis asume las definiciones dadas por Castro Martínez & Castro (1997) y Guiaquinto (2007) pues en ellas se exponen de forma clara la relación de pensamiento visual con percepción visual y a su vez la importancia de visualizar cualquier definición matemática o problema, conllevando a una mejor interpretación, apropiación y manipulación de los contenidos abordados. En este proceso se logra una conexión entre el pensamiento visual y los métodos heurísticos de los estudiantes en el momento de dar solución a un problema geométrico.

Del mismo modo, en la presente tesis se aborda la geometría espacial, la cual será encaminada a la comprensión de elementos y propiedades de recta, plano y ubicación de coordenadas rectangulares, por ello es indispensable hacer uso del pensamiento visual, el cual será desarrollado por medio del Geoespacio. En este proceso los estudiantes podrán hacer una ubicación de puntos, rectas y construcción de algunas propiedades de la geometría del espacio. Este trabajo permite generar una imagen visual de los elementos construido y a través de la interacción con este mismo, poder generar una representación

[54]Gregorio, R. &. Cornelio, L. (2004). *El papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas.* Tesis para optar al título de licenciado en matemáticas. Recuperado el 4 de diciembre del 2015 de la URL: http://cimateuagro.org/images/pdf/2004-3.pdf. pp.7-8.

[55] Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in mathematics*. Oxford university press. Recuperado el 8 de diciembre del 2015 de la URL: http://www.emmanouela.yolasite.com/resources/Visual%20Thinking%20in%20Mathematics.pdf, p. 12.

mental, donde el estudiante interiorice sus distintas características y propiedades, conllevándolo a fortalecer su pensamiento espacial.

Ante lo anterior Fischbein (1993) menciona como en la geometría hay una intervención entre entidades mentales, las cuales a su vez poseen características figúrales y conceptuales. Este autor se refiere, a que "*Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figúrales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección*"[56].

Teniendo en cuenta las definiciones e ideas expuestas en base al pensamiento visual, se puede precisar una serie de rasgos:

- Es una operación mental donde hay una serie de procesamiento de información.
- Lograr una representación y manipulación de ideas a través de lenguaje figurativo (imágenes, diagramas o figuras).
- Permite la visualización, abstracción y generalización de conceptos matemáticos, métodos heurísticos y simulación de procesos.
- Propiciar la generación de nuevas ideas.
- Es una herramienta indispensable en la enseñanza aprendizaje de la geometría, más aun en la Educación Secundaria.

Dentro de la educación, el pensamiento visual juega un papel importante, pues Paivio (1978,1986) establece una teoría de codificación dual, donde hay dos formas para la codificación de la memoria. La primera se refiere a un sistema verbal donde el lenguaje tanto oral como escrito es codificado en este

[56] Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* p. 143.

sistema; por otro lado la segunda codificación se refiere al sistema de imagen, donde una representación es codificada tanto en el sistema verbal como en el sistema de imagen. De este modo una ilustración o dibujo trabaja con doble codificación, permitiendo que se produzcan más códigos en la memoria y por ende sea más fácil de recordar.

De igual forma Winn (citado por Rusbult, 1995) menciona la importancia cognitiva de las representaciones visuales en los estudiantes y refiere que: *"Las representaciones visuales utilizan un tipo totalmente de la lógica basado en el uso significativo de espacio y la yuxtaposición de elementos en un gráfico. … Formas gráficas, la transmisión de información por medio de la argumentación visual, puede inducir el uso de procesos cognitivos que son en sí mismos "visual" de alguna manera. …La ventaja de utilizar el argumento visual radica en la aplicación, por los estudiantes, de las capacidades cognitivas que son particularmente adecuados para lo que tiene que aprender. ... Formas gráficas animan a los estudiantes a crear imágenes mentales que, a su vez, hacen que sea más fácil para ellos aprender ciertos tipos de material. ... La presentación de la información gráfica permite a los estudiantes escanear con rapidez y rápidamente para descubrir patrones de elementos dentro del esquema que sean significativos y que conducen a la realización de una gran variedad de tareas cognitivas. ... Gráficos, diagramas y gráficos son eficaces en la instrucción, ya que permiten a los estudiantes utilizar sistemas alternativos de la lógica. ... Ciertas fuerzas fisiológicas de los alumnos, tales como reconocimiento de patrones y la capacidad de reconocer formas geométricas, así como las ventajas de procesamiento "cerebro derecho", pueden ser explotados".*[57]

Giaquinto (2007) se refiere a que una prueba del uso del pensamiento visual en matemáticas se puede evidenciar en las investigaciones de Educación Matemática. Con el apoyo de los textos escolares, se

---

[57] Rusbult, C. (1995). *Visual thinking in education.* Tesis doctoral. Documento electrónico. Recuperado el 10 de enero del 2016 de la URL: http://www.asa3.org/ASA/education/teach/visual.htm

muestran en las aulas, experiencia de algunos profesores por querer trabajar con gráficos, ya sea en su clase o en páginas web y finalmente el interés de los científicos por aplicar modelos o métodos matemáticos al contexto.

De esta forma se ve la necesidad de involucrar el uso del pensamiento visual en la educación, en la matemática se muestra que los libros de texto y las herramientas tanto manuales como digitales están enfocadas de forma significativa por el uso de imágenes o diagramas para dar una mejor comprensión a una definición o teorema.

Por lo tanto dentro del aula de clase es posible hacer uso de este pensamiento visual en la enseñanza de la geometría espacial, a través de herramientas manipulables, visuales o tecnológicas. En este proceso se debe lograr que el estudiante interactúe y forme diagramas, imágenes o representaciones de forma interna o externa; dentro de la presente tesis, las actividades estarán encaminadas al uso de gráficos, Geoespacio y herramientas manipulables, que conllevará al estudiante a una apropiación de punto, recta, plano, uso coordenadas rectangulares y clasificación de poliedros. Todo ello aplicado a su entorno.

2.3. Fundamentos del pensamiento espacial

Es importante que dentro de la enseñanza- aprendizaje de la geometría se comprendan las habilidades que permiten al ser humano relacionarse con su entorno, ya que constantemente se interactúa con objetos y problemas que requieren de una manipulación y dominio del espacio que lo rodea.

Arrieta (2006) manifiesta que desde 1950 los educadores en matemática se han preocupado por la capacidad espacial y la relación de está con las matemáticas, más específicamente con la geometría. De esta forma se destacan algunos autores que tratan el pensamiento espacial: Guay & McDaniels (1977), Lohman (1979), Bishop (1980,1989), Lean & Clements (1981), Battista, Wheatley & Talsma (1982), Presmeg (1989), Clements & Battista (1992), Carroll (1993), Gutiérrez (1998), Arrieta (2006), Sepúlveda et al. (2006), Clements & Samara (2009).

De esta forma algunos estudios realizados por Lean & Clements (1981), Clements (2003) se refieren al pensamiento espacial como la capacidad que posee la persona para las representaciones espaciales, McGee (1979) alude al pensamiento espacial como la capacidad de formar imágenes mentales y poder manipularlas en el pensamiento.

Al igual MEN (1998) define el pensamiento espacial "… *considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales*"[58]. Definición que será asumida en el presente trabajo, pues el estudiante hará uso del Geoespacio y de representaciones planas para manipular elementos geométricos e identificar propiedades y características en la solución de cada problema. De ahí la importancia de hacer uso del pensamiento visual, pues es necesario tener una imagen o representación la cual puede interiorizarse y de esta forma poder ser manipulable para identificar sus características y propiedades.

De este modo la aplicabilidad de este pensamiento se ve reflejado en distintos contextos, así Gardner (citado en MEN, 1998) que menciona la inteligencia espacial, donde destaca el pensamiento espacial que es necesario para el pensamiento científico, puesto que este se aplica para representar y manipular información que se relacione con el aprendizaje y la resolución de problemas. Por ello se debe implementar ya que la mayoría de las profesiones requieren de este pensamiento, algunas de ellas son: ingenierías, aviación, arquitectura, dibujo, química, física y matemáticas, donde el uso de su habilidad e inteligencia espacial se pone a prueba en el quehacer profesional.

Por otro lado se plantean algunos factores relacionados con el pensamiento espacial, de esta forma destacamos a Lohman (1979) quien sugiere tres factores principales. El primero de ellos corresponde a

---

[58] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá, p. 56.

relaciones espaciales referida a las rotaciones y reflexión de figuras, orientación espacial y visualización espacial, el segundo factor corresponde a la orientación espacial que es relacionado con el estímulo desde diferentes perspectivas a través de la aptitud imaginar, el tercer factor se refiere a la visualización como el desarrollo de sólidos, doblado de papel y rotaciones.

Clements & Samara (2009) mencionan dos capacidades que conllevan a la formación del pensamiento espacial, estas son orientación espacial y visualización espacial. La primera de ellas se refiere a identificar la forma y tamaño de un objeto, ubicación y representación en el espacio tridimensional, todo ello por medio de la manipulación del entorno; la visualización espacial está relacionada con el reconocimiento, creación, interpretación, aplicación y razonamiento de gráficos, diagramas y dibujos mentales, usando procesos comunicativos que se obtienen en el pensamiento por medio de ideas.

Sin embargo el modelo planteado por Carroll (1993) es el que se considera como uno de los más acertados y completos de las investigaciones realizadas en la literatura científica. Pues Arrieta (2006) menciona como este autor toma 461 conjuntos de datos, utilizando matrices de correlaciones iniciales, con ello habla de la capacidad espacial y menciona que esta se usa para crear, identificar y manipular figuras, imágenes y objetos de forma mental. De esta forma se encuentran dentro de la capacidad espacial cinco factores específicos independientes: Visualización (VZ), relaciones espaciales (SR), velocidad de clausura (CS), flexibilidad de clausura (CF) y velocidad perceptiva (P). De esta forma se definen según Arrieta (2006):

- *"Visualización (VZ): capacidad para reestructurar (componer, descomponer, plegar, desarrollar, etc.) mentalmente patrones visuales en 2D o 3D. Las tareas más específicas se refieren a tares complejas que requieren ensamblaje, plegado de papel o desarrollo mental de sólidos.*
- *Relaciones espaciales (SR): Capacidad para rotar mentalmente patrones visuales relativamente simples en 2D o 3D. La tarea típica consiste en pedir que se compares dos estímulos en 2D para*

determinar su uno es un visión rotada o en espejo del otro. En otras tareas se trata de reconocer figuras rotadas en 3D.

- *Velocidad de clausura (CS): es la rapidez para unificar en una única percepción un campo perceptual aparentemente dispar. La tarea típica consiste en identificar o captar un patrón visual que ha sido presentado de manera incompleta, distorsionada, difuminada u escurecida. El patrón ha de ser familiar y se tiene que reconocer nombrándolo, ya que la elección de alternativas proporciona pistas excesivas.*
- *Flexibilidad de clausura (CF): Aptitud para mantener una percepción o configuración visual en la mente con la finalidad de distinguirla de otras percepciones bien definidas. Rapidez para encontrar, captar e identificar un patrón visual conocido cuando se enmascara u oculta.*
- *Velocidad perceptiva (P): Rapidez para encontrar un patrón visual conocido o para comparar con precisión uno o más patrones en un campo visual donde los patrones no se deterioran o enmascaran. Hay dos tipos de pruebas de rapidez en localización de letras, números idénticos y pruebas de rapidez para comparar caras, formas, nombres, etcétera[59]".*

Como se nombró anteriormente los factores de Carroll (1993) se asemejan a los de Lohman (1979), la única diferencia es que dentro de sus factores específicos no se encuentra la orientación espacial ya que esta no es independiente y se encuentra inmersa en cada uno de los cinco factores.

Cabe decir que hay una conexión entre el pensamiento visual y el pensamiento espacial, se entiende que incide primero el pensamiento visual, para que, a través de este haya una manipulación de imágenes u objetos conllevando al surgimiento del pensamiento espacial.

[59] Arrieta, M. (2006). Capacidad espacial y educación matemática. Recuperado el 8 de abril de 2015 de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518105, p. 108.

De esta forma en la presente proyecto de investigación será tenido en cuenta los 5 aportes de Carroll (1993) para desarrollar el pensamiento espacial, pues a través del Geoespacio, actividades manipulativas, robótica educativa y resolución de problemas se logra que el estudiante construya y manipule entes y elementos geométricos básicos de la geometría del espacio, lo que a su vez permite relacionarlos con Poliedros, así se comprende la relación de la geometría del espacio con el contexto del estudiante.

2.4. La robótica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría

Romero (2012) menciona como la robótica es una ciencia que diseña y aplica robots de tal forma que haga uso de múltiples disciplinas como la mecánica, electrónica, física, matemáticas, informática, inteligencia artificial, ingeniería de control y otras ciencias, sin embargo cabe preguntarse ¿qué es un robot? Para ello, este mismo autor se refiere a un robot como una maquina autónoma o autómata que tiene cierto nivel de inteligencia, permitiéndole captar su entorno y de esta forma poder imitar algunos comportamientos del ser humano. Finalmente un robot se aplica en algunas labores de: precisión, carga, velocidad, riesgo, fines sociales y educativos.

Romero (2012) aclara la importancia de la robótica en la sociedad y se refiere a su desarrollo histórico, de esta forma habla sobre la creación de seres animados que al combinarse con el progreso mecánico, tecnológico, científico y electrónico da origen a los autómatas. De esta forma podemos ver su desarrollo dentro de la edad antigua aplicado por primera vez en los egipcios y griegos ya que conocían algunos funcionamientos y aplicaciones de la rueda, la palanca, el eje, la polea, la rosca, el engranaje y tenían un gran conocimiento de la hidráulica y la neumática, de esta forma al combinarlos se lograba el movimiento de algunas estatuas.

En la edad media Alberto Magno (1206-1280) creo un autómata de hierro capaz de caminar, Al- Jazzari (1136-1206) crea un reloj elefante con seres humanos y animales mecánicos. Durante el renacimiento se destaca Leonardo Davinci (1452-1519) con algunos inventos, destacando la máquina de volar, el matemático y filósofo Blaise Pascal (1623-1662) crea la máquina de calcular y Jaques de Vaucanson (1709- 1782) realiza un pato artificial con la capacidad de mover sus alas y realizar el proceso digestivo.

Hasta el siglo XVIII estos autómatas permitieron cierto optimismo, bienestar y progreso socioeconómico, sin embargo con la revolución industrial se da una nueva aplicación, pues se usa para remplazar la mano de obra y el sostenimiento de estos mismos perjudican el medio ambiente. Durante la primera y segunda guerra mundial se ve los alcances destructivos de estos autómatas, en la actualidad la robótica tiene un objetivo y es ayudar al ser humano permitiendo un bienestar social.

Cabe aclarar que la robótica puede aplicarse a distintos contextos como: la industria automotriz, operaciones quirúrgicas, robots espaciales, uso doméstico, operaciones militares y educación. Esta última es de gran importancia en la presente tesis pues la estrategia didáctica planteada tomara actividades en base a un robot cartesiano.

Teniendo en cuenta lo anterior cabe preguntarse ¿Dónde nace la robótica educativa y cuál es su objetivo? Para ello Pozo (2005) comentan como la robótica educativa tiene sus inicios en 1983 en el Instituto tecnológico de Massachusetts donde se desarrolla el primer lenguaje programático para niños llamado logos. Con ello se empieza a ver la necesidad de implementar la robótica en los planes curriculares de la escuela y solventarla a través de algunas disciplinas, pues uno de sus objetivos es despertar el interés de los estudiantes e integrar algunas ciencias para generar mayor motivación y aplicación de las mismas.

Del mismo modo Márquez & Ruiz (2014) se refieren: *"La enseñanza que deja la robótica en un entorno pedagógico debidamente planificado y controlado, permite que su incursión en etapas académicas como la secundaria hasta llegar a la universidad sea un hecho. Por lo que cabe agregar, que el proceso de enseñanza- aprendizaje en esta área, motiva y potencia la creatividad del estudiante, conectándolo* *directamente con la ciencia, la tecnología e ingeniería, donde la física, las matemáticas y la programación, son las bases que se fundamentan a medida que el curso avanza*"[60].

Por otro lado cabe mencionar que la aplicación de esta robótica educativa trae algunas ventajas, Gallego (2010) menciona tres ventajas: "*Aglutina ciencias y tecnologías: matemáticas, física, informática…, Fomenta la imaginación, despierta inquietudes y ayuda a comprender mejor el mundo que nos rodea, Permite el trabajo en equipo facilitando la comunicación, responsabilidad, toma de decisiones…"*[61]

Lo anterior muestra la importancia de incluir la robótica como eje transversal a la matemática, más específicamente en la geometría del espacio, de esta forma Olaskoaga (2009) menciona tres formas de abordar la robótica en el proceso de enseñanza aprendizaje las cuales pueden ser: como objeto de aprendizaje, como medio de aprendizaje y como apoyo al aprendizaje. Las dos primeras se refieren a la construcción y programación de robots, la tercera se refiere a la utilización de robots para dar un acercamiento distinto y practico de algunos contenidos presentes en el currículo.

En la presente tesis se asume la robótica como apoyo al aprendizaje, ya que dentro de cada una de las actividades propuestas, se lleva al estudiante a pensar como aplicaría la Geometría del espacio en la industria, ya que emplea máquinas y robots para hacer sus distintas labores diarias, de esta forma se lleva al estudiante a tomar el papel de un operador de máquinas industriales, donde debe observar, analizar y describir los entes y elementos geométricos del espacio para que el robot pueda hacer su trabajo de forma rápida y precisa. Así se brinda otro punto de vista aplicado a la necesidad de poder comprender la geometría del espacio y su importancia en las nuevas tecnologías.

---

[60] Márquez, J. & Ruiz, J. (2014). Robótica educativa aplicada a la enseñanza básica de secundaria. *Revista científica de opinión y divulgación.* Recuperada el 2 de mayo del 2015 de la URL: www.raco.cat/index.php/DIM/article/download/291518/379999, p. 2

[61] Gallego, E. (2010). *Robótica Educativa con Arduino una aproximación a la robótica bajo el hardware y software libre*. Recuperado el 18 julio del 2016 de la URL: 2012, de http://anteriores.eventos.cenditel.gob.ve/site_media/detalle/files/robotica.pdf, p. 80.

2.5. Teoría de comunidad práctica de Wenger

Es importante tener en cuenta en el aula de clase la importancia de la socialización entre los mismos estudiantes, ya que es común encontrar alumnos que le piden explicación a sus compañeros cuando no entienden algún tema en general y en ocasiones esto es debido al temor de preguntar a su profesor o por miedo a pensar que sus compañeros lo tilden de bruto o ignorante, esto revela la importancia de trabajar en grupo. Con el trabajo en grupo, el estudiante muchas veces no tiene miedo de expresar sus ideas y de esta forma siente libertad para pensar y aportar.

Del mismo modo el MEN (2006) enfatiza: "El aprendizaje se propone como un proceso activo que emerge de las interacciones entre estudiantes y contextos, entre estudiantes y estudiantes y entre estudiantes y profesores en el tratamiento de las situaciones matemáticas. Estas formas de interacción tienen importancia capital para la comunicación y la negociación de significados. Por ello se enfatiza en el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes tomar decisiones; exponer sus opiniones y ser receptivos a las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos"[62].

Por otro lado Wenger (1998) enfatiza en cuatro supuestos sobre la importancia de aprender y el origen del conocimiento, así da una definición:

1) "Somos seres sociales. Este hecho, lejos de ser una verdad trivial, es un aspecto esencial del aprendizaje.

[62] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL [MEN]. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Enlace Editores Ltda: Bogotá. Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf, p. 73.

2) El conocimiento es una cuestión de competencia en relación con ciertas empresas valoradas como, por ejemplo, descubrir hechos científicos, arreglar máquinas, escribir poesía, ser cordial, entre otras.
3) Conocer es cuestión de participar en la consecución de estas empresas, es decir, de comprometerse de una manera activa en el mundo.
4) El significado es la capacidad de experimentar en el mundo y el compromiso con el como algo significativo, es lo que debe producir el aprendizaje"[63].

Referente a lo anterior Wenger (1998) nombra como el interés central de esta teoría se basa en el aprendizaje como participación social, esto implica que el individuo no solo se comprometa a dar una participación y una solución, sino que pueda ser activo en la comunidad y de esta forma pueda transformar y construir su identidad de acuerdo a esta interrelación individuo-comunidad. De esta forma una comunidad de práctica es definida por Wenger, Mcdermott & Snyder (2002): *"[…] un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área a través de una interacción continuada[64]"*.

Definición que se tendrá en cuenta en la presente tesis, pues dentro de las actividades planteadas, habrá grupos de 3 estudiantes a los cuales se les entregara una guía basada en resolución de problemas que solucionaran de forma grupal. Del mismo modo Wenger (1998) se refiere a una serie de componentes que permiten dar caracterización a la participación social como un proceso de aprender y conocer de este modo se refiere:

---

[63] Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. Recuperado el 27 de octubre del 2015 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S, p. 5.
[64] Wenger, E, McDermott, R. & Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing. Knowledge.* Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1-57851-330-8. p. 4.

1) *"Significado: posibilidad individual y colectiva de darle sentido a las experiencias y la vida para construir un aprendizaje significativo.*

2) *Práctica: se refiere a los recursos históricos, sociales, marcos de referencia y perspectivas compartidas, que propician el compromiso mutuo en la acción.*

3) *Comunidad: son las configuraciones sociales, donde los grupos se definen como valiosos y se valora la participación como una competencia.*

4) *Identidad: representa el cambio generado por el aprendizaje en quienes somos y la forma como se crean historias personales dentro de las comunidades*[65]".

Ante lo anterior Wenger (1998) se refiere a una interconexión de estos elementos y como se definen de forma mutua, del mismo modo si observamos la Figura 2, vemos cómo es posible colocar en el centro del diagrama cualquiera de los componentes y este mismo tendría el mismo sentido.

Figura 2. Componentes de una teoría social de aprendizaje: inventario inicial[66].

[65] Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. Recuperado el 27 de octubre del 2015 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S. p. 5.
[66] Ibídem, p. 23.

Por otro lado Wenger (1998) se refiere al aprendizaje como una actividad de forma grupal y no de forma separada, esto sucede cuando el individuo se siente comprometido y ve la necesidad de dar su aporte para poder pertenecer a una comunidad.

Del mismo modo en el ámbito educativo estas comunidades tienen un trasfondo extra-escolar, su fin es cumplir con tres dimensiones que permitan desarrollar el aprendizaje, Wenger (2006) se refiere a:

a) Internamente, donde el conocimiento se ejecuta teniendo en cuenta sus particularidades con otras materias.
b) Externamente, correspondiente a las formas de participación y aplicación de los estudiantes en contextos extra-escolares.
c) Interés, donde este logre repercutir más allá del periodo escolar.

Morales & Macias (2013) se refieren a la igualdad o equivalencia entre los miembros de una comunidad, esto implica que cada uno de los participantes puede aportar diferentes conceptos, ideas y conocimientos, esto a su vez conlleva a dar participación activa por cada uno de los miembros. Es importante aclarar que las limitaciones de poder son un limitante para permitir alcanzar este conocimiento, ya que puede darse el caso en el que algunos integrantes prefieran callar y no discutir diferentes puntos de vista.

Wenger, Mcdermott & Snyder (2002) aclara que, aunque algunos miembros asuman el liderazgo, su participación debe ir enfocada al servicio, es decir este mismo líder debe apoyar el aprendizaje de los otros y favorecer el aprendizaje de la comunidad. Por otro lado Wenger (1998) menciona tres medios que constituyen la arquitectura del aprendizaje, estos son: Compromiso, imaginación y alineación. Estos mismos al combinarse pueden formar comunidades de aprendizaje, dicha relación se puede apreciar en la Figura 3[67].

Figura 3. Tres infraestructuras del aprendizaje.

El compromiso se refiere a la construcción de la comunidad destacando entre este: la inventiva, espacios de participación, iniciativa, responsabilidad, memoria cosificadora y memoria participativa. La imaginación se refiere a elementos con los que debe contar la comunidad de práctica que le permita generar nuevas ideas y medios para la construcción de su conocimiento, así se destaca una orientación, reflexión y exploración. En la orientación encontramos situación en el espacio, en el poder y en el significado; en la reflexión se encuentran las reflexiones, modelos y representaciones de pautas; en la exploración se encuentra los escenarios alternativos, Prever el futuro o las distintas posibilidades y simulaciones.

La alineación trata de enfocar la comunidad de práctica hacia una meta fija, de este modo la imaginación ofrece distintas alternativas y la alineación las enfoca en un solo objetivo, dentro de esta encontramos características como: convergencia y coordinación (Wenger, 1998).

[67] Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. Recuperado el 27 de octubre del 2015 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S. p. 282.

Finalmente para poder llevar a cabo una aplicación de actividades en base a problemas usando como herramienta el Geoespacio, se van a tener en cuenta una serie de elementos de pertenencia en una comunidad de práctica de Wenger y sus propiedades citados por Pérez (2011)[68], que se relacionan a continuación en la tabla 1.

Tabla 1**.** Wenger, Modos de pertenencia. Fuente: ICME 11 Topic Study Group 37

Modo	Componente
Compromiso	• Contextualizar el problema de una manera que se conectará con los alumnos y sus intereses, se encuentre cerca de sus vidas o sea algo que les concierne. • Ofrecer una situación que sale de las actividades habituales. • Poner a los alumnos en condiciones de apropiarse de la situación, para que puedan desarrollar por sí mismos la comprensión de su participación. • Favorecer la libre circulación de información, estrategias, y otras. • Poner a los alumnos en interacciones, haciéndoles trabajar en equipo o como un grupo. • Ofrecer una situación en la que los alumnos tendrán como objetivo común: la resolución de un problema usando las matemáticas. • Solicitar el compromiso voluntario de los alumnos en cierta situación. • Asegurarse de que el objeto sea claro para los estudiantes. • Promover a los estudiantes autoría en la ruta de la resolución y en las soluciones que producen.

[68] Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia, pp. 45-46

Imaginación	• Dibujar un contexto con el que los estudiantes serán capaces de establecer vínculos con los aspectos de sus vidas cotidianas. • Ofrecer una situación en la que la resolución tendrá un efecto fuera del aula. • Utilizar la información real para que los estudiantes realicen enlaces con la forma en que lo utilizan y con que lo utilizan en otros lugares. • Dar un problema en el que la resolución da a los estudiantes un sentimiento de competencia "en el mundo" (por ejemplo un problema real). • Ofrecer una situación "práctica" donde los estudiantes observan el sentido de la utilización de las herramientas matemáticas. • Ofrecer una situación de composición abierta para dar oportunidades a los estudiantes a explorar y ser inventivos. • Animar a los estudiantes a crear sus propias estrategias de uso de sus conocimientos matemáticos estableciendo vínculos entre los conceptos. • Animar a los estudiantes a generar la articulación de una comprensión global de la situación, mirando a los conocimientos matemáticos que se utilizan, en su propio aprendizaje de la situación y los momentos importantes o elementos de la realización de la solución. • Valorar el pensamiento crítico de la situación, debatir los objetivos y sus logros. • Introducir y analizar diferentes caminos para explorar la situación, y estar abierto a otras posibilidades. • Plantear una duda en el aprendizaje de las matemáticas (¿Por qué las matemáticas? ¿Por qué utilizamos estas matemáticas en particular?) • Discutir el enfoque matemático de una situación como una forma de verlo. • Fomentar una transformación de la práctica matemática de las aulas, y poner de relieve las transformaciones que se producen.
Alineación	• Ofrecer un problema dirigido a toda la clase como un grupo.

	• Decidir con los alumnos la ruta de acceso general para la solución de un problema. • Asegurarse que los estudiantes tengan una visión general de la situación. • Hacer el ajuste necesario para cada uno, para la producción de los equipos, individuales y de toda la clase. • Apoyar el pensamiento crítico sobre las soluciones y la interpretación, sobre todo, donde se favorezca la aparición de las conclusiones contradictorias. • Animar a los estudiantes a identificar las ideas matemáticas exploradas en una situación de composición abierta, y para establecer vínculos explícitos con el plan de estudios. • De vez en cuando imponer normas para la aproximación matemática de una situación (con un concepto dado, probando un procedimiento determinado). • Validar con los estudiantes la concordancia entre su comprensión de conceptos y sus estrategias con el “estándar” de las definiciones y procedimientos. • Colectivamente decidir el momento de dejar de investigar una situación, decidir lo que se considera como una resolución del problema. • Comparar con los alumnos sus estrategias y acuerdos. • Pedir a los alumnos un resumen de su investigación. • Animar al debate y a la adopción de un número limitado de estrategias o soluciones.

Cabe aclarar que dentro de este proyecto de investigación, el diseño de las actividades estará enfocado en problemas retadores los cuales a su vez permitirán despertar en los estudiantes la curiosidad, el debate, la heurística, la reflexión y el análisis. Estos últimos son características propias del compromiso, imaginación y alineación; correspondientes a la arquitectura del aprendizaje como lo especifica Wenger (1998).

Finalmente en la tesis se hará uso de las comunidades de práctica, pues dentro del aula de clase se conforman grupos de tres personas, a las cuales se les hace la entrega de una guía, Geoespacio y materiales manipulables. De esta forma los estudiantes solucionaran algunos problemas retadores, donde ellos usen sus pre-saberes y mediante la interacción en grupo cumplan las cuatro categorías: práctica, comunidad, identidad y significado, esto permitirá dar solución a los problemas planteados y lograr un aprendizaje.

2.6. Referentes sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en grado séptimo

2.6.1. Referentes teóricos sobre Geometría plana y del espacio

Es claro que los estudiantes al finalizar grado sexto y cursar gran parte de séptimo, han tenido un nivel de profundización y estudio de la geometría plana o bidimensional junto con sus propiedades y características, sin embargo en estos cursos se posterga o deja de lado la geometría del espacio, de esta forma es llevado a pensar de forma bidimensional aun cuando el estudiante es parte de un mundo tridimensional.

En la presente tesis se abordaran algunos temas relacionados con la geometría del espacio, Rodríguez (2005) menciona como en geometría existen algunos términos primitivos como punto, Recta, Plano y espacio. Dentro de la presente tesis se pretende hacer un acercamiento a estos términos y sus propiedades haciendo uso de lo visual y concreto.

El punto puede pensarse como la intersección de dos o más rectas Guerrero (2006), sin embargo en la presente tesis se aborda el uso del Geoespacio donde la ubicación de cada punto tendrá una serie de coordenadas, de esta forma la generación de la recta y plano estarán relacionadas con vectores.

PUNTO EN EL ESPACIO

Lehmann (1980) menciona como un punto P en el espacio, requiere de otra dimensión la cual se llamara Z. Como consecuencia de esto se habla de un sistema tridimensional que se genera como una extensión del sistema bidimensional; en geometría analítica del espacio se usan distintos sistemas de coordenadas, el más usado y apto para grado séptimo es el rectangular.

El sistema rectangular consta de tres planos mutuamente perpendiculares (Ver Figura 4), estos se cortan en un punto llamado origen (O) por lo tanto reciben el nombre de planos coordenados ya que permiten ubicar un punto con referencia a ellos y las rectas de intersección de estos planos se nombran ejes coordenados.

De acuerdo a la figura 1, los ejes coordenados XX', YY', ZZ' se denotan como ejes X, Y ,Z, los planos coordenados dividen el espacio en ocho octantes. El octante delimitado por las partes positivas se llama primer octante y este se asemeja a una habitación donde las paredes y el piso representan cada uno de los planos coordenados.

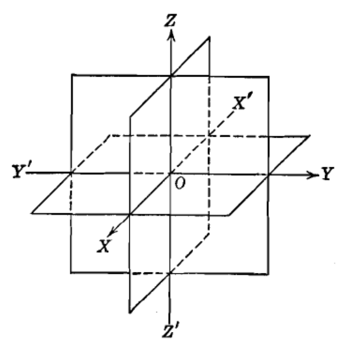


Figura 4. Sistema rectangular[69]

Ahora bien para ubicar un punto en el espacio no es necesario realizar los planos coordenados, para ello se dibujan solamente los ejes coordenados (Ver Figura 5), de esta forma al ubicar un punto P. Se hacen pasar planos paralelos a cada uno de los ejes los cuales contengan a dicho punto y de esta forma estos planos cortaran a los ejes en los puntos A, B, C como se aprecia en la figura; al observar esto se aprecia

[69] Lehmann, C. (1980). Geometría analítica. Nueva York. Editorial Limusa S.A.. Recuperado el 22 de febrero del 2016 de la URL: http://www.cimat.mx/~gerardo/GeoA/tareas/Lehmann.pdf, p. 318.

un paralelepípedo recto. Por lo tanto las coordenadas de este punto P estarán determinadas por las distancias OA, OB, OC que se designaran como x,y,z. Así un punto P en el espacio tiene solamente una terna (x,y,z).

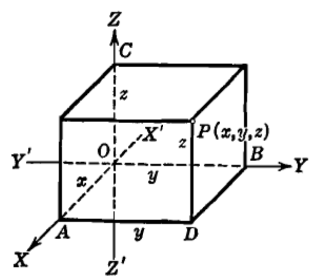


Figura 5. Coordenadas rectangulares[70].

Por otro lado Godino (2002) se refiere a una idea de recta la cual es ilimitada por ambos extremos y no tiene espesor, destaca un modo de notación de rectas utilizando dos de sus puntos o letras minúsculas que tendrán coordenadas rectangulares ya que estarán ubicados en el Geoespacio (Ver Figura 6).

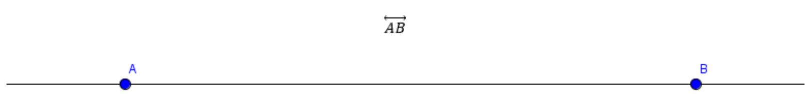


Figura 6. Recta que pasa por los puntos AB.

Del mismo modo la recta puede generarse a través de un punto y una dirección, Respecto a lo anterior se tiene en cuenta la relación entre punto y recta, de esta forma Acosta (2003) se refiere a puntos colineales como aquellos puntos que están en una misma recta, Díaz (2011) menciona los puntos exteriores como aquellos puntos que no pertenecen a una recta y Lehmann (1980) menciona segmento como una porción de línea recta que se encuentra entre dos puntos A y B, de esta forma se usan estos

[70] Lehmann, C. (1980). Geometría analítica. Nueva York. Editorial Limusa S.A. p. 319. Recuperado el 22 de febrero del 2016 de la URL: http://www.cimat.mx/~gerardo/GeoA/tareas/Lehmann.pdf, p. 319.

puntos extremos para representar el segmento (Ver Figura 7). Su notación para dos puntos A y B es $\overline{AB}$

.

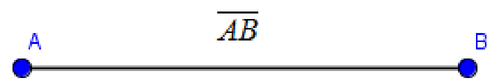


Figura 7. Representación del segmento $\overline{AB}$

Seguidamente se tienen en cuenta algunas nociones en base al plano, así Guerrero (2006) menciona como Un plano no tiene profundidad, lo más parecido a este elemento del espacio es una hoja de papel (Ver Figura 8), pero su diferencia con esta es que es ilimitado y no tiene grosor. Para denotar el plano se utilizan tres de sus puntos que no están sobre una misma recta o por medio de letras mayúsculas Vega (2010).

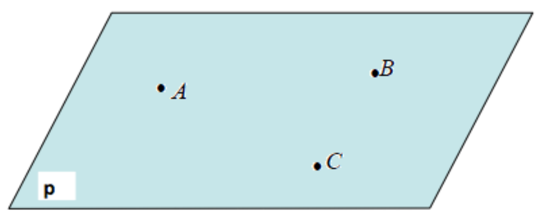


Figura 8. Representación del Plano P o plano ABC

Por otro lado se establece que para poder generar un plano es necesario un punto A y un vector (segmento) AB, distinto del vector cero ya que con estos elementos se puede encontrar vectores ortogonales segmento AB. Así Leithold (1994):

> "*Si N es un vector dado diferente del vector cero y P_0 es un punto dado, entonces el conjunto de todos los puntos para los cuales V (P_0P) y N son ortogonales define el plano que pasa por P_0 y tiene a N como vector normal*"[71]

[71] Leithold, I. (1994). Cálculo con geometría analítica. Editorial Oxford University, P. 822.

Lehmann (1980) menciona como un plano queda determinado por tres condiciones independientes, destacando que tres puntos no colineales determinan un plano. Existe y es único el plano al cual pertenecen. Estos puntos reciben el nombre de **puntos coplanares** ya que están sobre un mismo plano, de igual forma este autor se refiere a como una recta que pasa por dos puntos diferentes de un plano se encuentra contenida en este plano (Ver Figura 9).

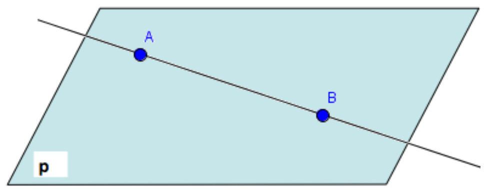


Figura 9. Recta $\overleftrightarrow{AB}$ contenida en el plano P.

Cuando se tienen rectas sobre un mismo plano, Pogorelov (1974)[72] define:

- *En el espacio dos rectas se llaman paralelas si están en un mismo plano y no se cortan.*
- *Dos rectas son secantes si se intersectan en un punto.*
- *Dos rectas son perpendiculares si son secantes y forman ángulos rectos, es decir, ángulos de 90°.*

  Se simboliza $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Por otro lado Leithold (1994) menciona "dos vectores son paralelos si uno de los dos vectores es múltiplo escalar del otro"[73].Otra forma de nombrar las rectas secantes es refiriéndose a rectas concurrentes, Landaverde (1997) las define como "aquellas rectas que están sobre un mismo plano y se cortan en un punto"[74] (Ver Figura 10).

---

[72] Pogorelov, A. (1974).*Geometría elemental.* Ed. Mir. Moscú. Recuperado el 30 de julio del 2016 de la URL: http://www.cienciamatematica.com/libros/Mir/Geometria_Elemental_A.Pogorelov(Editorial_MIR)Part-2.pdf, p. 141.

[73] Leithold, I. (1994). Calculo con geometría analítica. Editorial Oxford University. p. 813.

[74] Landaverde, J. (1977). Curso de geometría. Editorial progreso. Recuperado el 4 de junio del 2016 de la URL: https://books.google.com.co/books?id=CSVgfC9zVvIC&pg=PA269&lpg=PA269&dq=rectas+concurrent

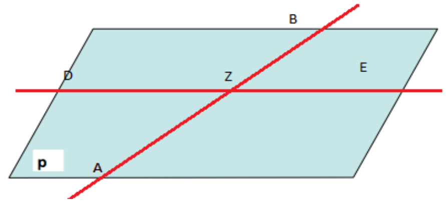


Figura 10. Rectas *concurrentes*

Del mismo modo se puede hablar de la posición relativa en el espacio entre las rectas y el plano, teniendo en cuenta la definición entre paralelismo de la recta y el plano así Pogorelov (1974) "*La recta y el plano se denominan paralelos si no se cortan*[75]" lo que a su vez permite hablar de paralelismo de planos teniendo en cuenta la misma característica.

También se puede hablar de la perpendicularidad entre plano y recta refiriéndose a "*la recta se denomina perpendicular al plano si es perpendicular a toda recta que se encuentra en dicho plano*[76]". Por otro lado algunas de las posiciones relativas de los planos en el espacio determinan:

- "Si dos planos distintos se cortan su intersección es una recta."[77]
- Si tres planos distintos se cortan su intersección es un punto.

Teniendo claro las definiciones de punto, recta, Segmento, segmentos paralelos, secantes, perpendiculares, puntos colineales, plano, puntos coplanares, se da inicio a la definición de poliedros y su clasificación, De esta forma el estudio de solidos geométricos, es de gran importancia, pues por medio de ellos el estudiante visualiza y relaciona la geometría del espacio con su uso práctico, para ello se

es&source=bl&ots=Y8yardK3Yt&sig=pmjYr2aYOxSiuQO8pN2sVD9xGl4&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjE_IWJl5LNAhVLQyYKHaXtANw4ChDoAQgrMAM#v=onepage&q=rectas%20concurrentes&f=false, p. 243.

[75] Pogorelov, A. (1974).*Geometría elemental.* Ed. Mir. Moscú. Recuperado el 30 de julio del 2016 de la URL: http://www.cienciamatematica.com/libros/Mir/Geometria_Elemental_A.Pogorelov(Editorial_MIR)Part-2.pdf, p.143.

[76] Ibídem, p. 149.

[77] Acosta, J. (2003). Elementos de geometría. Universidad de Antioquia. Recuperado el 10 de mayo del 2016 de la URL: http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/pdf/elementos%20de%20geometria1.pdf, p. 6.

tendrá en cuenta que el espacio tridimensional corresponde al espacio en el cual se tiene libertad de generar figuras con tres dimensiones de movimiento, alto, largo y ancho , el cual se llama en lo sucesivo el espacio

Las siguientes definiciones son abordadas por Baquerizo et. Al (2006).

POLIEDRO

Se define como poliedro al cuerpo que está limitado por superficies planas (denominadas caras) y de contorno poligonal (denominadas aristas de las caras). Los vértices del poliedro son los vértices de las caras (Ver Figura 11).

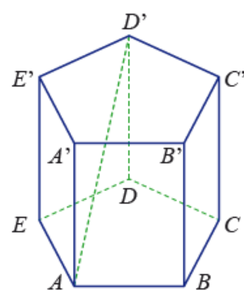


Figura 11. Poliedro

Del mismo modo la diagonal de un poliedro es un segmento de recta que uno dos vértices situados en caras diferentes (Ver Figura 11) de esta forma el segmento $\overline{AD'}$ es una diagonal del poliedro. Por otro lado en la presente tesis se abordaran solamente los poliedros convexos, los cuales se definen como aquellos que están limitados por polígonos convexos (Ver Figura 11).

Algunos de los poliedros más comunes son prismas, pirámides y varias clases diferentes de poliedros regulares y Arquimedianos, los cuales se definirán a continuación.

POLIEDRO REGULAR

Un poliedro de n caras se dice que es regular, si y solo si todas sus caras son polígonos regulares congruentes. Cabe mencionar que los poliedros regulares ya eran trabajados y descubiertos por algunas culturas europeas, Critchlow (1979) da una prueba de estos trabajos ya que encuentra algunas representaciones manuales de estas culturas (Ver Figura 12), de esta forma historiadores de la matemática como Eves (1983) y Kline (1992) mencionan como las civilizaciones egipcias y babilónicas tenían conocimiento del cubo, tetraedro y octaedro. Donde este saber era transmitido a los griegos por medio de los viajes de Tales y Pitágoras.

Figura 12. Sólidos neolíticos de escocia

Con estos saberes transmitidos, los platónicos comienzan su estudio con las figuras cósmicas, relacionando los cuatro elementos básicos con cuatro solidos regulares. Así relaciona el fuego con el tetraedro, tierra con el fuego, aire con el octaedro y agua con el icosaedro; finalmente el dodecaedro era el todo (Ver Figura 13).

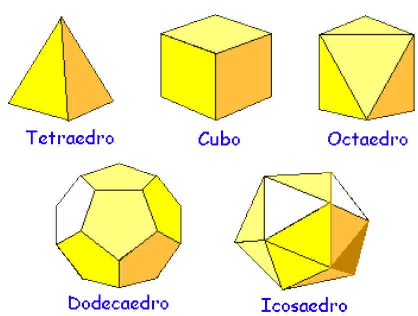


Figura 13. Sólidos platónicos.

A continuación se muestra una definición de estos poliedros regulares.

Tetraedro regular: Esta limitado por 4 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 4 vértices, 4 ángulos triedros. 6 aristas y 6 ángulos diedros.

Hexaedro regular o cubo: está limitado por 6 caras que son cuadrados. Tiene 8 vértices congruentes y concurrentes.

Hexaedro regular: está limitado por 6 caras que son cuadrados. Tiene 8 vértices, 8 ángulos triedros, 12 aristas, 12 ángulos diedros y 4 diagonales congruentes y concurrentes.

Octaedro regular: está limitado por 8 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 6 vértices, 12 aristas y 12 ángulos diedros. Está formado por dos pirámides unidas por un pase en común.

Dodecaedro regular: está limitado por 12 caras que son pentágonos regulares. Tiene 20 vértices, 20 ángulos tetraedros, 12 aristas y 12 ángulos diedros. Está formado por dos pirámides unidas por su base común.

Icosaedro regular: está limitado por 20 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 12 vértices, 12 ángulos pentaedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Los poliedros Arquimedianos o poliedros semirregulares, son muy parecidos a los poliedros regulares, ya que son convexos y sus caras son polígonos que tienen lados y ángulos iguales, sin embargo se diferencian de los poliedros regulares, ya que tienen caras con distinto tipo (Ver Figura 14).

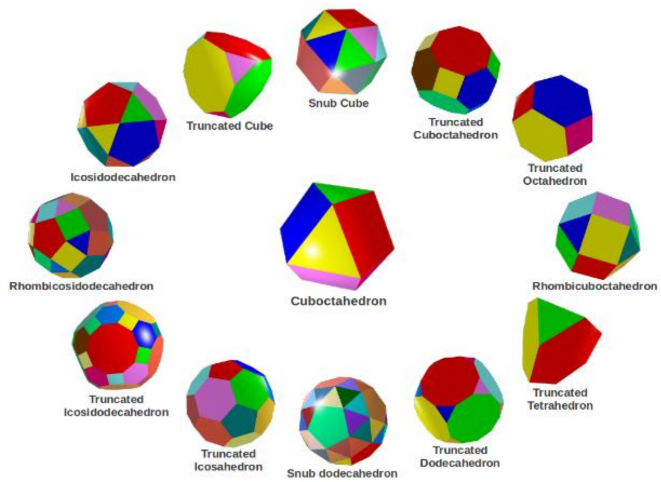


Figura 14. Poliedros Arquimedianos

PRISMAS

Es un poliedro (Ver Figura 15) en el cual existen dos caras iguales (congruentes) que se encuentran contenidas en planos paralelos, denominadas bases, en donde las otras caras, llamadas caras laterales, conectan los lados congruentes de las caras laterales. Si las aristas de las caras laterales son perpendiculares a los planos que contiene las caras base se llama prisma recto, de lo contrario se llama prisma oblicuo. Los prismas se nombran por la forma de su base, de esta forma el prisma que se muestra en la Figura 15 se llama prisma pentagonal recto.

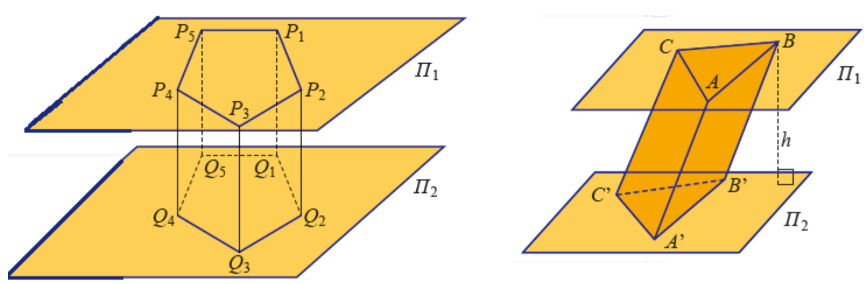


Figura 15. Prisma pentagonal recto y prisma triangular oblicuo.

Dentro de los prismas encontramos a los paralelepípedos (Ver Figura 16), los cuales son un prisma cuyas bases son paralelogramos, un paralelepípedo recto rectangular se le denomina ortoedro (Ver Figura 16).

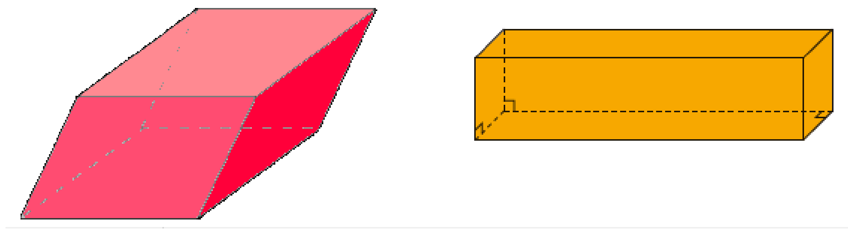


Figura 16. Paralelepípedo y ortoedro

PIRAMIDE

Una pirámide (Ver Figura 17) está determinada por tener una cara base y un vértice que no es coplanar con los vértices de esa cara. Las otras caras, denominadas caras laterales, son triángulos que contienen una arista de la base y el vértice que no pertenece al plano que contiene la base. Al igual que los prismas éstas se nombran teniendo en cuenta la forma de su base. La pirámide de la Figura 17 es una pirámide rectangular.

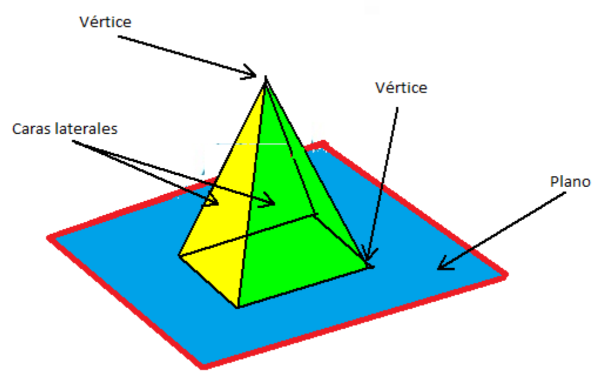


Figura 17. Pirámide rectangular.

Teniendo claro los conceptos y propiedades de los poliedros es importante reconocer la distancia entre las diagonales de un poliedro que en ultimas se resume a poder obtener la distancia entre dos puntos en el espacio, para ello se usara el teorema de Pitágoras en el espacio.

TEOREMA DE PITÁGORAS

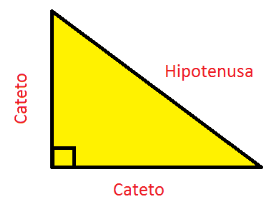
El surgir de la geometría nace a través de problemas prácticos, de esta forma las primeras civilizaciones como Egipto, India, China, Mesopotamia, aplican la geometría en problemas de agricultura, construcción y Astronomía. Dentro de sus escritos se encuentra el uso del Teorema de Pitágoras.

La civilización india (2500 a.c.) hace uso de este teorema en la construcción de altares religiosos, la civilización china (2100 a.c.) emplea este teorema en la astronomía, así el libro Zhou bi suan jing (500-300 a.c.) usa triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras para encontrar la altura del sol y de otros cuerpos, la civilización egipcia (3150 a.c.) cada año, tras la inundación del Nilo en sus campos, los agrimensores debían delimitar sus terrenos mediante trazos perpendiculares, para ello usaban nudos igualmente espaciados y uniendo ciertas longitudes en forma de triángulo obtenían ángulos rectos, lo cual conllevó al uso de los triángulos rectángulos.

De esta forma Pitágoras de Samos (582 a.c-497 a.c) (Ver Figura 18) tomó toda esta experiencia geométrica a través de sus viajes a Egipto y la incorporó en el teorema que lleva su nombre, teniendo claro que las anteriores civilizaciones ya conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, de forma práctica.

Figura 18. Una rendición artística de Pitágoras de Samos

En este punto cabe preguntarse ¿Qué es el teorema de Pitágoras? Para dar respuesta a ello es necesario recordar lo qué es un triángulo rectángulo y cada una de las partes que lo conforman como se muestra a continuación.



De acuerdo a esto Rodríguez & García (2009) muestran una demostración china sobre el teorema de Pitágoras tomada del libro Chou Pei Suan Ching (200 a.c).

1) *"Para la construcción comienza con un triángulo rectángulo (Ver Figura 19).*
2) *Luego refléjalo respecto a su hipotenusa.*
3) *Ahora, rota este rectángulo 90 grados a la derecha.*
4) *Traslada este rectángulo hacia arriba.*
5) *Construye los cuadrados que se forman.*
6) *Finalmente traslada los triángulos rectángulos.*

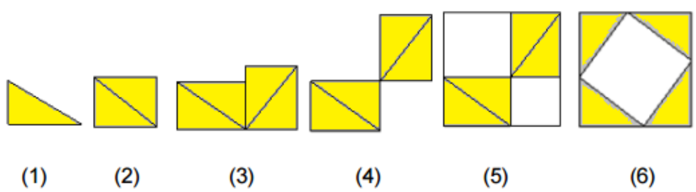
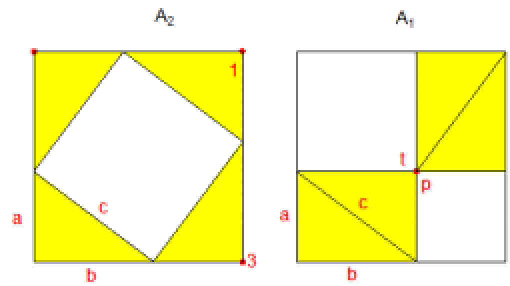


Figura 19. Construcción teorema de Pitágoras

De esta forma se observa que después del paso (5) se forma en el paso (6) un cuadrado (blanco) de lado igual a la hipotenusa del triángulo inicial. Por lo tanto, el área de ese cuadrado blanco en el paso (6), va ser la suma de los cuadrados blancos del paso (5). En otras palabras el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"[78]

[78]Rodríguez, S. & García, S. (2009). Diez demostraciones Visuales del teorema de Pitágoras. Universidad industrial de Santander. Recuperado el 2 de noviembre de la URL: http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7157/2/132354.pdf, p. 34.

Por otro lado de forma algebraica si llamamos a y b las dimensiones del triángulo rectángulo inicial y comparando las áreas A_1 y A_2 tenemos:



$$A_1 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + a^2 + b^2$$

$$A_2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$A_1 = A_2$$

$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + a^2 + b^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \ (TEOREMA\ DE\ PITAGORAS)$$

El anterior resultado es conocido como el teorema de Pitágoras, de esta forma Euclides enuncia el Teorema de Pitágoras, el siguiente enunciado corresponde a una traducción de Euclides (1996):

"*En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto*"[79].

Finalmente dentro de la propuesta de actividades de la tesis, se implementa este teorema para que los estudiantes comprendan que no es un teorema que solo puede ser aplicado en problemas

[79] Euclides. (1996). Elementos. Introd. De L. vega, trad. Y notas de M. Puertas. Gredos. Madrid. Libro I. p. 260.

bidimensionales, si no que rete al estudiante a plasmar en el Geoespacio problemas de la vida cotidiana que requieren para su solución la visualización, pensamiento espacial y análisis de la geometría del espacio.

Conclusiones del capítulo 2

Teniendo en cuenta la resolución de problemas y problemas retadores, como marcos conceptuales en la presente tesis. Se asume en el presente proyecto la definición de problema de Polya (1965), definición sobre resolución de problema de Garret (1998), la definición sobre problemas retadores dada por Falk (1980) y finalmente las fases o estrategias de Polya (1945). De esta forma se deduce como los problemas contribuyen a una autoconstrucción del conocimiento del estudiante ya que él debe usar distintos métodos heurísticos y además tener en cuenta las distintas fases o estrategias por las cuales debe pasar en el momento de dar solución a un problema.

Respecto al pensamiento visual se asume las definiciones dadas por Castro Martínez & Castro (1997) y Guiaquinto (2007). Con ello se logra comprender el proceso o capacidad de formación de imágenes mentales y su importancia en el momento de abordar figuras, diagramas, problemas y conceptos matemáticos; al igual se destaca la importancia que tiene este pensamiento en la comprensión de la matemática, más específicamente en la geometría del espacio, donde el estudiante puede hacer uso de elementos manipulables y visuales que conllevan a interiorizar los conceptos matemáticos.

En cuanto al pensamiento espacial se asume la definición dada por MEN (1998) y se toman los aspectos planteados por Carroll (1993), de esta forma se ve la importancia de incentivar y desarrollar el pensamiento espacial a través de factores como la visualización, relaciones espaciales, velocidad de clausura, flexibilidad de clausura y velocidad perceptiva, los cuales conllevan a dar una mayor adquisición y análisis de la geometría del espacio y su aplicación en el contexto del estudiante.

Con base a la robótica educativa, se asume las ideas planteadas por Olaskoaga (2009) donde concibe la robótica como un apoyo al aprendizaje, de esta forma se presenta un contenido geométrico práctico que permite ver la necesidad de comprender y aplicar la geometría del espacio en las nuevas tecnologías.

Respecto a las comunidades de práctica de Wenger, se asume la definición dada por Wenger, Mcdermott, y Snyder (2002) y se tiene en cuenta los componentes dados por Wenger (1998) como son Significado, Práctica, Comunidad e identidad. Con ello se logra que los estudiantes tomen un papel activo en cada comunidad de práctica, pues sus ideas y aportes son tenidos en cuenta en el momento de afrontar un problema que posiblemente requiere de distintas estrategias y medios.

Finalmente cabe destacar que dentro de la presente tesis se abordaran los anteriores aspectos en la aplicación de cada una de las actividades propuestas, pues los estudiantes son agrupados en comunidades de práctica donde solucionan problemas basados en temas de geometría del espacio y robótica, de esta forma usaran su pensamiento visual y espacial para proponer distintos métodos heurísticos, los cuales se basaran en las distintas fases de Polya (1945) para dar solución al problema.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se valora el tipo o enfoque de investigación que se asume en la tesis, se precisa el alcance del estudio, y se describe la población y muestra con la cual se trabaja. También se explican los métodos, técnicas e instrumentos utilizados para lograr con éxito un aprendizaje robusto del contenido geométrico y el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascolli.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

La investigación se sustenta en un enfoque cualitativo, al respecto Sandín (2003) menciona que es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales. También se dirige a la transformación de la práctica, a la toma de decisiones y además hacia el descubrimiento y desarrollo de los conocimientos.

A su vez esta investigación está orientada bajo la modalidad de la investigación acción, la cual tiene un carácter interpretativo y exploratorio que analiza las acciones y las situaciones de la comunidad Educativa. Para Duhalde (1999) una investigación-acción es un proceso basado en la exploración, interpretación, reflexión y comprensión sistemática de la práctica parte del docente, con el objetivo de mejorar y transformar la práctica educativa.

Por otro lado Minerva (2006) plantea la investigación-acción como un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, lo cual propicia el mejoramiento del quehacer del docente, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría, con el objetivo de lograr un aprendizaje robusto de los contenidos en los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, esta investigación como ya se expresó se sustentada bajo la modalidad de investigación-acción. En este proceso se recogen los datos directamente de la realidad con el propósito de favorecer el proceso de aprehensión del conocimiento geométrico en los estudiantes y a su vez, aportarle estrategia a los docentes, a través del diseño y aplicación de actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento espacial, a través del Geoespacio y la robótica en la escuela.

3.2. Alcance del estudio

La presente investigación pretende desarrollar e incentivar el pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo. Este pensamiento es base para la construcción robusta del contenido geométrico, permitiendo una mejor comprensión en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría y por ende mejorar los resultados en las competiciones matemáticas y pruebas PISA.

3.3. Población y muestra

Para este estudio la población la conforman los estudiantes de grado séptimo del colegio Giovanni Pascolli, la muestran es intencional y la integran los 34 estudiantes del grupo séptimo B, de la misma institución.

3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En la investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Los métodos teóricos son:

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente acerca del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo.

Análisis-Síntesis: presente en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, a través del uso del Geoespacio y de la resolución de problemas en el grado séptimo, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados y la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La observación participante: facilita obtener información sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente acerca del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo.

Encuesta: con relación a esta Minerva (2006) la define como "… la herramienta utilizada por el investigador para recabar información acerca del hecho, evento o fenómeno que investiga"[80]. En este estudio se precisa para obtener información sobre las dificultades acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, específicamente del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo.

Los métodos **Matemáticos Estadísticos** se utilizan para el procesamiento de la información obtenida a través de los métodos y técnicas del nivel empírico, en diferentes momentos de la investigación.

Conclusiones del capítulo 3

En la tesis se asume el paradigma de investigación cualitativo con un enfoque de investigación acción, pues está acorde con los objetivos que se persiguen. Para llevar a cabo las tareas de investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Los métodos teóricos son: Histórico-Lógico y Análisis-Síntesis. También se utilizaron métodos del nivel empírico: observación participante, encuesta, así como el procedimiento del cálculo porcentual perteneciente a los métodos Matemáticos Estadísticos.

[80] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 69.

Capítulo 4. ESTRATEGIA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VISUAL

En el presente capítulo se aborda la estrategia didáctica asumida en el presente trabajo de investigación, de esta forma se explica su fundamentación y estructura desde sus cuatro fases: análisis, planificación, ejecución, seguimiento o control. Finalmente se aborda el sistema de actividades que se sustentan en dicha estrategia.

4.1. Fundamentos de la estrategia didáctica

Las estrategias en el ámbito educativo se utilizan para que el estudiante se apropie del conocimiento en las diferentes asignaturas. Para Velasco y Mosquera (s.f) la estrategia "… *es un sistema de planificación aplicado a un conjunto articulado de acciones, permite conseguir un objetivo, sirve para obtener determinados resultados*"[81]. Por estrategia didáctica se entiende que "… *es el conjunto de procedimientos, apoyados en técnicas de enseñanza, que tienen por objeto llevar a buen término la acción pedagógica del docente*"[82].

Las estrategias didácticas se dirigen a la esencia y optimización del proceso de enseñanza aprendizaje, pues permiten propiciar vías, alternativas, medios y acciones para el cambio, para mejorar dicho proceso en el salón de clases.

La implementación de las estrategias didáctica en las clases de matemática conllevan a un proceso de toma de decisiones, donde se debe planificar los objetivos que permitan pasar de un estado existente a otro superior y deseado, dentro de la estructura de conocimiento matemático de los estudiantes.

[81] Velasco, M. y Mosquera, F. (s.f). Estrategias didácticas para el Aprendizaje Colaborativo. Universidad Distrital de Colombia. Recuperable el 11 de noviembre de la URL: http://acreditacion.udistrital.edu.co/flexibilidad/estrategias_didacticas_aprendizaje_colaborativo.pdf, p. 2.

[82] Ibídem, p. 3.

En la tesis se presenta una estrategia didáctica que busca desarrollar e incentivar el pensamiento espacial en los estudiantes. Esta estrategia se sustenta en problemas retadores, en la manipulación geométrica, en el pensamiento visual, en la robótica educativa y en las comunidades de práctica de Wenger, con estudiantes de grado séptimo del Colegio Giovanni Pascoli. En la Figura 20 se muestra cómo interactúan estas categorías para propiciar el desarrollo del pensamiento espacial.

Figura 20. Modelo de la Estrategia didáctica.

La estrategia didáctica se estructura en cuatro fases: análisis, planificación, ejecución, seguimiento o control. A continuación se explica cada una detalladamente, al igual que las acciones a realizar para su cumplimiento.

4.1.1. Fase de análisis

Se comienza con la caracterización del colegio, en cuanto a su ámbito social, su contexto cultural y económico. Luego se determina la preparación del docente, su experiencia y resultados en el desempeño profesional. A continuación se tienen en cuenta los conocimientos del grupo de estudiantes sobre los conocimientos precedentes, sus hábitos y estilos de aprendizaje, específicamente en lo relacionado con el dominio del contenido geométrico y el desarrollo de habilidades geométricas básicas para el trabajo con la geometría del espacio.

4.1.2. Fase de planificación

Su objetivo esencial es que los docente planeen y organicen el sistema de actividades, las cuales contienen actividades sobre puntos en el espacio, segmentos rectas y colinealidad, planos y su generación, poliedros y teorema de Pitágoras.

Para ello, se elaboran actividades basadas en problemas retadores, donde se ofrece el título, objetivo, sugerencias metodológicas, materiales y desarrollo de la actividad. Estas actividades propician la interacción entre el estudiante, el conocimiento y el docente.

Esta fase tiene dos momentos. El primero se dirige a preparar las acciones para el tratamiento de los contenidos de cada actividad y su dosificación. En segundo momento se proyectan los problemas a desarrollar en cada actividad y los avances que se esperan de los estudiantes.

En el primer momento el profesor debe partir del estudio:

- Los documentos normativos.
- Los objetivos formativos.
- El sistema de habilidades.
- El sistema de conocimientos.
- Los conocimientos previos de los estudiantes.
- Herramientas manipulables que permitan dar apropiación de contenidos geométricos.

El docente para elaborar los problemas de cada una de las actividades debe de considerar:

- Contenido a tratar.

- Nivel de profundidad que se desea lograr.
- Individualidades de los grupos de trabajo.
- Contextualización de las actividades a orientar.
- Cómo se evaluará la actividad.
- Aplicación de las tecnologías en el contexto y su relación con los contenidos.

En el segundo momento, el docente debe poseer un dominio de los conocimientos previos o empíricos asociados con el desarrollo del pensamiento espacial. También es importante que el docente conozca las características del grupo y el contexto donde este se desenvuelve, para concebir las acciones a desarrollar en cada actividad. El sistema de actividades se presenta en el epígrafe 4.2.

4.1.3. Fase de ejecución

Se implementa en la práctica lo planificado en las fases precedentes, también se tiene en cuenta los conocimientos y las expectativas de los estudiantes. En cada una de las actividades se les entrega la guía, el Geoespacio y se orienta su desarrollo. Durante el desarrollo de la actividad, el docente de ser necesario, a través de preguntas heurísticas, orienta el trabajo de los estudiantes hacia la búsqueda independiente de las soluciones de los problemas, llevándolos al descubrimiento o redescubrimiento del contenido geométrico espacial. Al final de cada actividad se socializan los resultados en los grupos de trabajo y a nivel grupal, donde se debate sobre las mejores respuestas y las dificultades existentes en la resolución de los problemas.

Las actividades deben estar mediadas por el profesor, el cual guía el trabajo en el salón de clases, para propiciar el interés y la motivación de los estudiantes por el contenido de la geometría del espacio, donde se fomente el desarrollo del pensamiento espacial. En la tesis se presentan cinco actividades (ver Anexos 2, 3, 4, 5, 6) y una encuesta de satisfacción (ver Anexo 7).

4.1.4. Fase de control

En la medida que se lleva a cabo la fase de ejecución, es importante conocer cómo han asimilado los estudiantes los conocimientos de la geometría del espacio, para poder expresar que han desarrollado su pensamiento espacial. Esto puede determinarse a través de diferentes mecanismos de seguimiento, control y evaluación de los resultados.

Para el análisis de los resultados se tiene en cuenta los siguientes aspectos: desarrollo de la actividad (se presenta una valoración sobre el trabajo realizado por los diferentes grupos de trabajo, donde se plantean diferentes formas de solución y estrategias utilizadas), motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades. Este análisis cualitativo de cada actividad permite obtener regularidades sobre el aprendizaje del contenido geométrico espacial, lo cual posibilita constatar el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes.

El control se constata también en los resultados de la encuesta de satisfacción y en las muestras fotográficas y de videos realizadas, así como en el asesoramiento de la actividad realizado por la Dra. Diana Pérez Duartes.

4.2. Actividades orientadas a incentivar y desarrollar el pensamiento visual por medio de la enseñanza aprendizaje de la geometría en grado séptimo

4.2.1. Actividad 1. Representación y manejo de puntos con el Geoespacio

Objetivo: Incentivar la necesidad de ubicar y representar puntos en el espacio por medio del Geoespacio y la resolución de problemas.

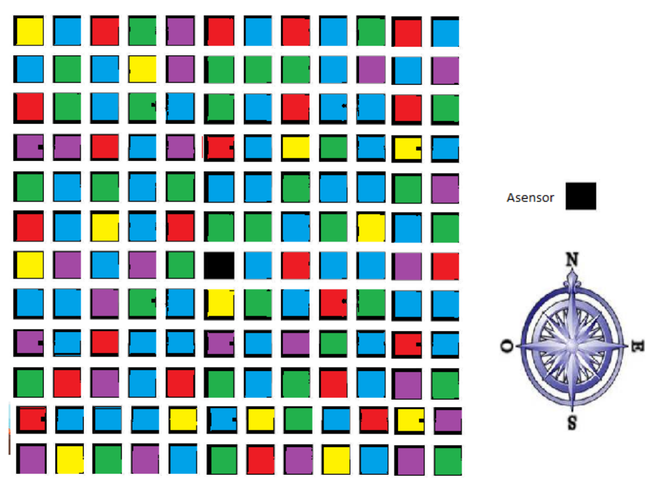
Sugerencia metodológica: Se hace la entrega de un Geoespacio y su respectiva guía de trabajo a cada grupo de estudiantes, primero trabajan en forma grupal y finalizada la guía se hace una socialización para identificar aquellas soluciones y dificultades encontradas por cada grupo.

En la pregunta 1 se hará la entrega de lana para que los estudiantes hagan una correspondencia del Geoespacio con un problema de la vida cotidiana y describan desplazamientos para dar solución. La pregunta 2 relaciona el Geoespacio con un robot que se dirige a marte permitiendo ver la necesidad de las coordenadas en el espacio y la pregunta 3 se enfoca a la relación del juego “atrápame si puedes”, con la ubicación de puntos en el espacio. La pregunta 4 se dirige al uso de las coordenadas rectangulares para describir los puntos en el espacio de forma que sea entendida por todos; la pregunta 5 se enfoca a la representación de un prisma permitiendo relacionarlo con la vida cotidiana; la pregunta 6 busca representar elementos del entorno a través del modelado con el Geoespacio permitiendo evidenciar la aplicación de la geometría en el contexto del estudiante; la pregunta 7 se enfoca a usar un modelo de escala para poder representar edificios muy altos en el Geoespacio y finalmente las preguntas 7 y 8 se enfocan a solucionar problemas relacionados con puntos reticulares.

Materiales a utilizar: Geoespacio, lana, tijeras, colores, guías y fichas de parqués.

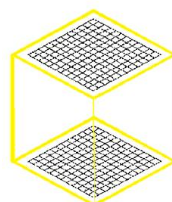
Desarrollo de la actividad.

1. A continuación se muestra el plano de la primera planta de un centro comercial, donde el ascensor ha sido coloreado de negro, los locales se encuentran coloreados de morado, verde, azul, amarillo y rojo.



Sofía y Nicolás se ponen una cita para encontrarse en el primer piso del centro comercial, sin embargo, Sofía se ha perdido en el primer piso y ha llamado a Nicolás para saber su ubicación. Él le comenta que está ubicado a 5 esquinas del ascensor del primer piso, del mismo modo ella le dice que se encuentra a 3 esquinas de dicho ascensor.

Usando lana de color negro para bordear en el Geoespacio el cuadro que representa el ascensor y usando fichas de parques para representar los posibles puntos de ubicación de Sofía y Nicolás, represente en la figura de abajo la información anterior.



a. Está claro que Nicolás y Sofía sólo pueden avanzar sobre las cuerdas, pues representan los pasillos del centro comercial. Si usted tuviera que guiar a Nicolás, ¿qué caminos le recomendaría para encontrar a Sofía? A continuación escriba 4 de éstos y las esquinas que se recorren en cada camino.

- Camino 1:
- Camino 2:
- Camino 3:
- Camino 4:

b. A Sofía no le gusta esperar tanto, por ello quiere que Nicolás llegue lo más rápido posible. Escriba un desplazamiento o recorrido corto que permita a Nicolás encontrarse con Sofía en el menor tiempo posible.

2. En la figura inferior se presenta el Geoespacio, donde se ha simulado en la planta inferior la ubicación del robot Curiosidad y en la planta superior la ubicación del planeta Marte.

La agencia de la COSA (Colombian Space Agency) desea enviar el robot Curiosidad al planeta Marte, por ello han establecido coordenadas desde el punto de partida en la tierra hasta culminar el recorrido en Marte (Ver Figura 1).

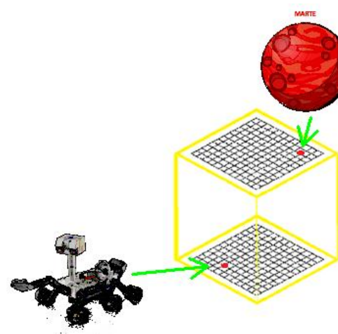


Figura 1**.** Representación de coordenadas en el Geoespacio.

a. Emplee un método que describa cuatro caminos que permitan al robot Curiosidad llegar al planeta Marte.

- Camino 1:
- Camino 2:
- Camino 3:
- Camino 4:

b. Debido a los costos de combustible empleada en el recorrido, la COSA decide tomar el recorrido más corto para economizar gastos. Describa el recorrido.

3. Teniendo en cuenta los resultados y aplicaciones obtenidos en los puntos anteriores, se ve que hay tres direcciones o ejes que permiten ubicar puntos en el mismo. Tales ejes reciben el nombre de x, y, z, como se aprecia en la figura de abajo. Si se quiere ubicar el punto A = (3, 2, 4), éste se ubica desplazándose tres unidades en el eje “x”, dos unidades en el eje “y” y 4 unidades en el eje “z”, de esta forma se localiza el punto A.

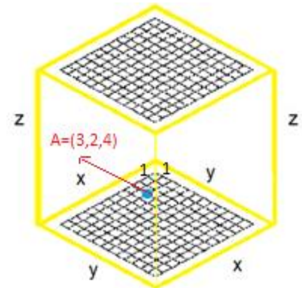
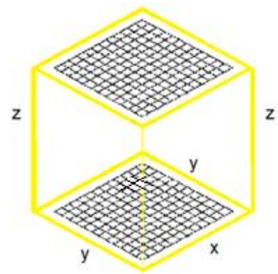


Figura 2: Representación del Geoespacio y los ejes coordenados.

a. Usando la notación anterior, escriba la posición en la que se encuentra Sofía y Nicolás en el momento de recibir la llamada. Cada posición debe señalarse con una letra mayúscula.
b. determine la posición en la que se encuentra el robot Curiosidad y el planeta Marte del punto 2 en el momento de iniciar el recorrido.

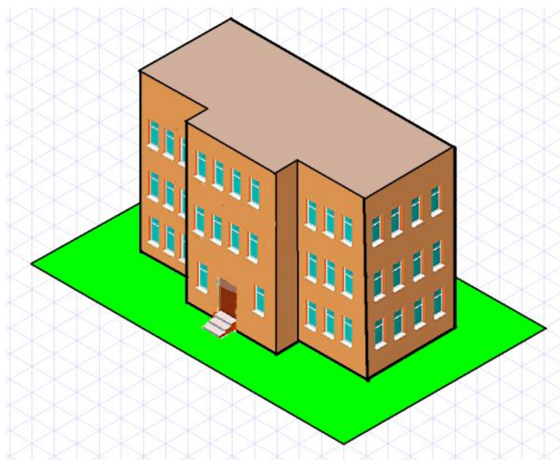
4. Observe la representación del baño que se encuentra en la figura inferior.

a. Realice una representación de la superficie de este mismo en el Geoespacio, usando lana para representar: paredes, techo y suelo. Relacione las baldosas del baño con la cuadricula del Geoespacio para tener en cuenta el ancho, largo y alto; represente lo obtenido en la figura de abajo. **Nota:** no es necesario representar los muebles que se encuentran en el baño.

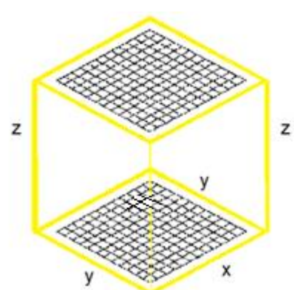


b. Determine la posición de los puntos que corresponden a las esquinas del baño en la figura anterior.

5. Observe la siguiente estructura.



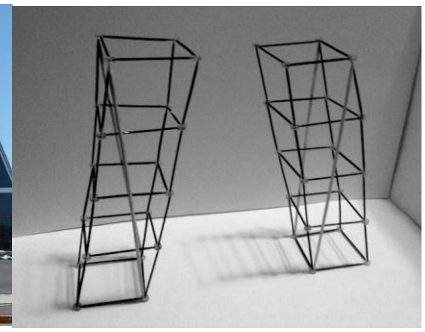
a. Use lana de colores para representar las aristas del edificio y la cuadrícula en el césped, use los pisos del edificio para seleccionar la altura donde debe ubicar la planta del Geoespacio, y finalmente haga la representación en la figura inferior:



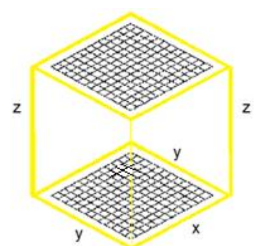
b. Determine la posición de los puntos que corresponden a las esquinas del edificio en el modelo anterior.

6. Las torres KIO en Madrid (España) fueron construidas en 1989 y se llaman originalmente Torres "Puerta de Europa"; son dos torres inclinadas de cristal, granito y metal, tienen 114 m de altura

repartidos entre 27 pisos y destaca su inclinación, la mayoría de su peso descansa sobre un eje central de hormigón y acero, los ascensores suben de forma vertical.



a. Use lana de colores para realizar un modelo de las torres de KIO en el Geoespacio. Para que quepa el modelo, ¿cada unidad del eje z debe representar cuántos pisos de estas torres? ¿Cómo determinaría usted las distancias entre las esquinas de la primera planta para conservar la escala en su representación? Luego represente en la figura de abajo lo hecho anteriormente.

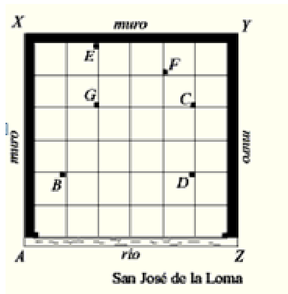


b. Escriba las coordenadas de los puntos que corresponden a las esquinas del modelo del edificio anterior.

c. Teniendo en cuenta lo hecho anteriormente, dar otros tres o cuatro ejemplos que muestran la importancia que tiene la ubicación de puntos para representar objetos, dar solución a problemas de la vida cotidiana, y su uso en la tecnología.

7. El diagrama muestra las calles se San José de la Loma. Los sitios de interés turístico se encuentran en los puntos A, B, C, D, E, F, G y la estación de buses se encuentra en el punto z.

Marcos y su hermana llegan al punto A y Marcos quiere recorrer todos los puntos de interés mientras que su hermana solamente decide caminar por el muro del pueblo, pasando por “x” y “y”. Ambos terminaran su recorrido en la estación de buses. ¿En qué orden debe Marcos visitar los puntos de interés sin emprender un recorrido mayor que su hermana?[83]



8. Los puntos A y B distan 10 unidades entre sí. Los puntos B y C distan 4 unidades entre sí. Los puntos C y D distan entre si 3 unidades. Si la distancia entre los puntos A y D es la menor posible. encuentre el menor número de unidades que los separa[84].

4.2.2. Actividad 2. Rectas, segmentos y colinealidad

Objetivo: Construir el concepto de segmento en el espacio para relacionarlo con la noción de recta y colinealidad de puntos por medio del trabajo en el Geoespacio y resolución de problemas.

Sugerencia metodológica: se hace uso de un láser grupal, el cual será manipulado por algunos estudiantes, que a su vez recibirán asesoría constante por parte del docente, luego se hará la entrega del Geoespacio y su respectiva guía de trabajo a cada grupo de estudiantes. Primero trabajan en forma grupal, donde discuten sobre las propiedades que poseen las rectas, los segmentos y el concepto de

[83] Olimpiadas colombianas de matemáticas. (1998). Tomado de la Prueba clasificatoria nacional. nivel intermedio, Recuperado el 12 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl98/pcni98.htm

[84] Olimpiadas colombianas de matemáticas. (1997). Tomado de la Prueba clasificatoria nacional. Primer nivel, Recuperado el 12 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl97pn/clasPN97.htm

colinealidad, y finalizada la guía se hace una socialización, donde se identifican aquellas soluciones y dificultades encontradas por cada grupo, para lograr un robusto aprendizaje de estos contenidos.

En la pregunta 1 se hace uso de herramientas manipulables como un láser de tal forma que el estudiante a través de ciertas situaciones prácticas pueda asimilar una noción de segmento junto con sus características. Esto se lleva a cabo controlado por el profesor frente a toda la clase y luego en cada grupo se discute lo que se pudo observar. La pregunta 2 se enfoca a la construcción de una noción de recta, a través de una idea de vector dirección y por medio de esto comprender la colinealidad de puntos.

La pregunta 3 se dirige a determinar las características de una recta en el espacio por medio de un problema práctico como lo es un avión. En la pregunta 4 se infieren algunas propiedades sobre rectas paralelas. La pregunta 5 está orientada a aplicar el concepto de perpendicularidad de segmentos a través de problemas, mientras que la pregunta 6 se dirige a solucionar un problema adaptado de la olimpiada matemática (2000) primer nivel, en el cual se debe aplicar los desplazamientos en su solución. Finalmente la pregunta 7 es un problema encaminado a la aplicación de desplazamientos de rectas en el espacio, donde el estudiante cuestione si las rectas que contienen los tres segmentos dados pueden concurrir en un punto.

Materiales a utilizar: Geoespacio, láseres, hojas, lana, tijeras y cinta de enmascarar, colores y guías.

Desarrollo de la actividad.

1. Dado un láser que se entrega y algunos lugares marcados en la pared:

a. Con asesoría del profesor, se apunta el láser sobre un punto en la pared. ¿Qué observa de la trayectoria del láser?

b. Teniendo en cuenta la trayectoria del láser, ¿con qué elemento geométrico lo identifica?

c. Un **segmento** es la parte de una recta que se encuentra comprendida entre dos puntos (Ver Figura 1). Si A y B son los dos puntos extremos, el segmento se denota por $\overline{AB}$.

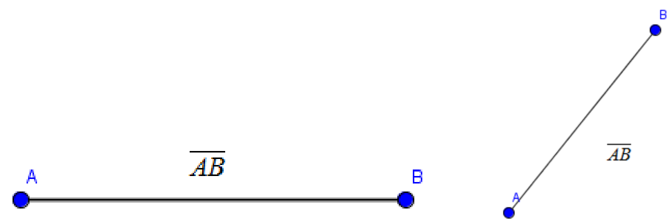
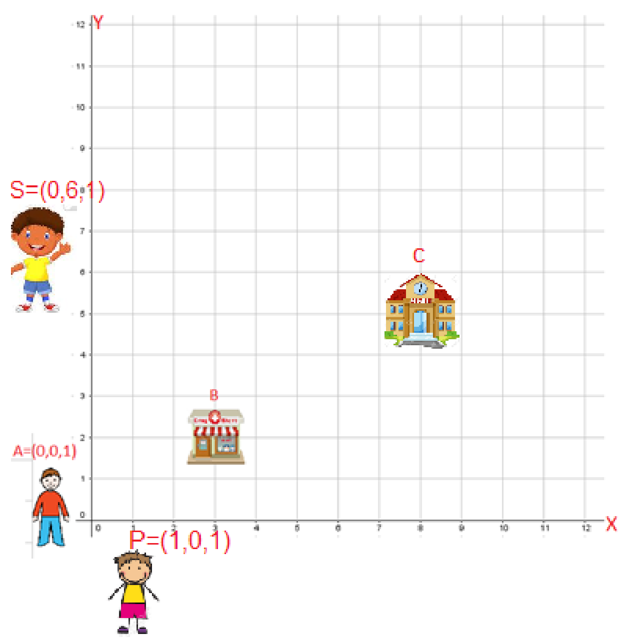


Figura 1.Representación del segmento $\overline{AB}$

d. Con la ayuda de cuatro estudiantes asesorados por el profesor, cada uno de ellos deberá apuntar el láser a un mismo punto de la pared. ¿Qué puede concluir con respecto a las trayectorias?

2. En la siguiente figura, se aprecian una retícula de las calles y carreras de un barrio de la ciudad. Alejandro se encuentra en el punto (A), Pedro en el punto (P) y Sebastián en el punto (S). Estos compañeros van a la misma droguería punto (B) y al colegio que se encuentra en el punto (C) como se muestra en la figura inferior:



a. Ubique los puntos en el Geoespacio. Escriba los desplazamientos que debe realizar Alejandro, Pedro y Sebastián para llegar a la droguería y el segmento que representa el desplazamiento total en cada caso.

b. Luego de llegar a la droguería (Punto B), Alejandro, Pedro y Sebastián deciden repetir el mismo desplazamiento que ya se realizó, cada uno dos veces, para llegar a los puntos: D y E (Alejandro); F y G (Pedro); H e I (Sebastián). Determine las coordenadas de estos puntos.

c. Con la información anterior complete las siguientes tablas:

	SEGMENTOS / DESPLAZAMIENTOS	Segmento $\overline{AB}$	Segmento $\overline{AD}$	Segmento $\overline{AE}$
ALEJANDRO	Eje x			
	Eje y			

	SEGMENTOS / DESPLAZAMIENTOS	Segmento $\overline{PB}$	Segmento $\overline{PF}$	Segmento $\overline{PG}$
PEDRO	Eje x			

	Eje y			

	SEGMENTOS / DESPLAZAMIENTOS	Segmento $\overline{SB}$	Segmento $\overline{SH}$	Segmento $\overline{SI}$
SEBASTIAN	Eje x			
	Eje y			

- ¿Encuentra algo notable en las tablas anteriores?
- Encuentre otros dos puntos sobre el segmento AB. ¿Cómo se puede describir los desplazamientos para llegar a ellos desde el punto A? Encuentre otros tres puntos sobre el segmento AD y describir los desplazamientos para llegar a ellos desde el punto A. Piense en extender el segmento AB tanto como se pueda en la cuadrícula que se muestra arriba. ¿Cómo se podrá dar instrucciones para llegar a cualquier punto que pertenece a la extensión del segmento AB?
- En base a lo anterior, encuentre puntos que se encuentren en la extensión de los segmentos $\overline{PB}$ y $\overline{SB}$. ¿Cómo podría dar instrucciones para llegar a cualquier punto que pertenece a la extensión de los segmentos $\overline{PB}$ y $\overline{SB}$?
- Alejandro, Pedro y Sebastián asisten al mismo colegio. ¿Cómo son las trayectorias que debe realizar cada uno para llegar al colegio?

d. Encuentre otros dos puntos sobre los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{SC}$. ¿Cómo puede describir los desplazamientos para llegar a ellos desde el punto P y S respectivamente?

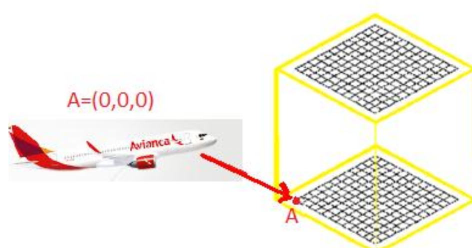
e. Piense en extender los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{SC}$. tanto como se pueda en la cuadrícula. ¿Cómo se podrá dar instrucciones para llegar a cualquier punto que pertenece a la extensión de los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{SC}$?

f. Con base a los resultados del literal anterior, conteste. ¿Qué ente geométrico se va formando con los desplazamientos sucesivos? ¿Qué criterios se usan para poderlo generar? ¿Qué características posee?

---

g. Los puntos que están sobre una misma recta se llaman colineales. Dados los puntos Q con coordenadas (7,2,1) y R con coordenadas (10,3,1), ¿qué método usaría para determinar si un punto S con coordenadas (12, 4, 1) es colineal con Q y R? ¿Y el punto T con coordenadas (16, 5, 1)?

3. La aeronave de Avianca despega en el punto A= (0,0,0) (ver figura inferior) y durante su elevación en línea recta pasa por el punto B = (3,3,3) hasta llegar a los 33.000 pies donde conserva una altura constante.



a. Si el nivel superior del Geoespacio representa una altura de 36000 pies, determine por lo menos 5 puntos por los cuales pasa la aeronave hasta llegar a los 30.000 pies y escriba su posición en la parte inferior.

b. ¿Qué relación hay entre los puntos encontrados anteriormente?

c. Determine un método que permita encontrar todos los puntos por los cuales pasa el avión hasta que alcanza los 33.000 pies.

4. Si se tienen dos rectas en un mismo plano (piense en el plano del nivel 12 del Geoespacio), hay sólo dos posibilidades,

1) o bien las rectas se cruzan o se intersectan o tienen un punto en común,
2) o bien las rectas son paralelas, es decir, no importa qué tanto se extiendan, las rectas no tienen un punto en común.

Dados dos segmentos en un mismo plano, se dice que los segmentos son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas.

a. Dado el segmento EF con E= (2,1,1) y F= (6, 5,1), encuentre un segmento que pase por A (0,0,1) y que sea paralelo a EF. Encuentre un segmento que pase por C (5, 1,1) que sea paralelo a EF y cuya longitud sea la cuarta parte de la longitud de EF. ¿Puede haber más de una respuesta a esta pregunta? ¿Cuántos de tales segmentos hay?
b. Encuentre otros dos segmentos en el mismo plano paralelos a EF. ¿Cuál es la condición que debe cumplir un segmento para ser paralelo a EF?

5. Dadas dos rectas en un mismo plano (piense en cualquier nivel del Geoespacio) que se intersectan. Si, al intersectarse, las rectas forman un ángulo de 90° se dice que las rectas son perpendiculares.

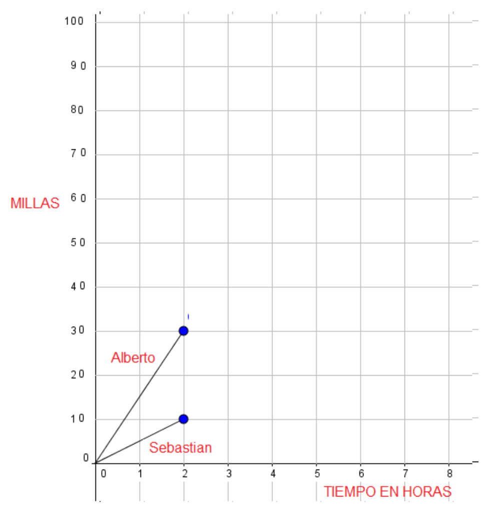
Dado el segmento $\overline{AB}$ con A = (3, 3, 1) y B = (9, 7, 1).

a. Represente el segmento $\overline{CD}$ con C= (4, 8, 1) y D= (6, 5, 1) ¿Qué relación encuentra entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$? ¿Puede obtener otros segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ que tengan esa misma característica que tiene $\overline{CD}$?
b. Determine un segmento tal que uno de sus extremos sea un punto sobre el segmento $\overline{AB}$ y que pase por P = (4, 8, 1) de tal forma que sea perpendicular al segmento $\overline{AB}$.

c. Halle dos o más segmentos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ que pasen por D = (4,8,1) y tales que uno de sus extremos esté sobre $\overline{AB}$. Escriba la ubicación de los puntos extremos de cada segmento en la parte inferior.

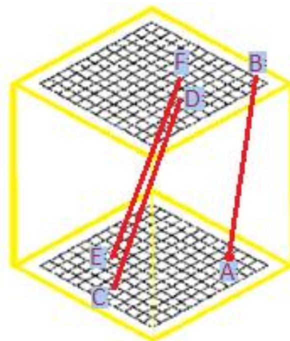
d. Encuentre otros tres segmentos en el mismo plano perpendiculares a $\overline{AB}$. ¿Puede haber más de una respuesta a esta pregunta? ¿Cuál es la condición que debe cumplir un segmento para ser perpendicular a $\overline{AB}$?

6. El siguiente diagrama muestra la distancia en millas que viajaron los ciclistas, Alberto y Sebastián en dos horas. Si ambos siguen avanzando con la misma velocidad, al cabo de 8 horas después de la partida, ¿cuántas millas más ha viajado Alberto que Sebastián? ¿En qué posición se encontrará cada participante?[85]



7. A continuación se muestran tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ cuyas coordenadas de los puntos extremos son A = (9,11,4); B = (11,12,7); C = (6,2,4); D = (9,6,7); E = (3,5,4); F = (7,8,7). Si se prolongan los tres segmentos tanto como se quiera, ¿habrá un punto de intersección entre dos cualesquiera de ellos? ¿Concurrirán las prolongaciones en un solo punto común a los tres? ¿Por qué?

[85] Olimpiadas colombianas de matemáticas. (2000). Adaptado de la Prueba clasificatoria nacional primer nivel grados 6 y 7. Recuperado el 12 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl00/pcnpn/pcnpn.htm



4.2.3 Actividad 3. Planos y su generación

Objetivo: Construir significado robusto del concepto de plano, a través de su relación con los puntos y rectas en el espacio, por medio del trabajo en el Geoespacio y de la resolución de problemas.

Sugerencia metodológica: Se hace la entrega de palillos y trozos de silicona en barra, Geoespacio y su respectiva guía de trabajo a cada grupo de estudiantes. Primero los estudiantes trabajan en forma grupal y finalizada la guía se hace una socialización para identificar aquellas soluciones y dificultades encontradas por cada grupo.

La pregunta uno busca que el estudiante a través de elementos manipulables como son los palillos y barra de silicona, construya una mesa de tres y cuatro patas a pequeña escala, de tal forma que al colocarla sobre distintas superficies pueda determinar la mejor estabilidad, de esta forma podrá relacionar a través de la observación que tres puntos no colineales determinan un plano. La pregunta dos se enfoca a la ubicación de distintos puntos junto con segmentos perpendiculares a ellos, de esta forma se socializará lo observado por cada grupo y con esto poder construir de forma general la generación del plano a través de un punto y un vector perpendicular a este. La pregunta tres se dirige a determinar un criterio sobre puntos coplanares en el espacio y como estos puntos se relacionan con la construcción de las caras de distintos poliedros. La pregunta cuatro se orienta a determinar las diagonales de un cubo; y finalmente la pregunta cinco busca que el estudiante determine cuantos planos están determinados por 4 puntos en el espacio, a partir de la observación, análisis y aplicación de lo visto anteriormente.

Materiales a utilizar: Geoespacio, palillos, silicona, lana, tijeras y guías.

Desarrollo de la actividad.

1. Un **plano** no tiene profundidad, lo más parecido a este elemento del espacio es una hoja de papel, pero su diferencia con ésta es que es ilimitado y no tiene grosor. Este se simboliza por las letras griegas (α, β, μ) o también por aquellos puntos que lo conforman (Ver Figura 1).

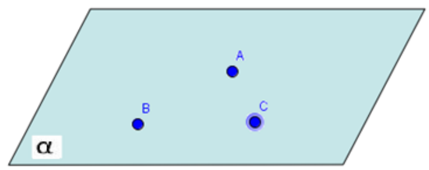
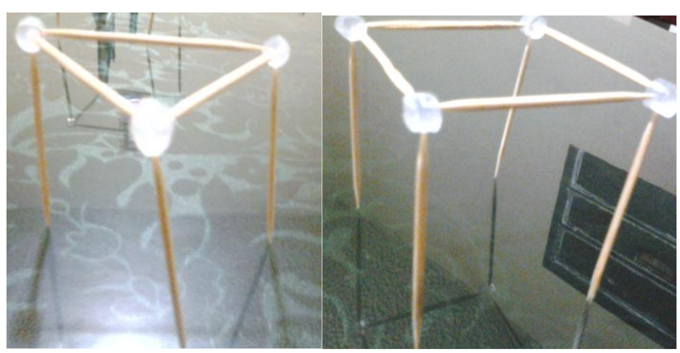


Figura 1. Plano α o plano ABC

- Tome palillos y pequeños trozos de silicona para conectarlos entre sí y construir las figuras que se encuentran en la parte inferior, estas figuras se asemejan a la forma de una mesa en pequeña escala que tiene tres y cuatro patas de forma respectiva.



a. Ubique las dos figuras anteriores en diferentes lugares planos ¿encuentra algo notable? ¿Cuál de estas dos mesas es más estable?

b. Si pensamos en cada una de las patas de la mesa como si fueran puntos y el suelo como un plano, ¿qué observamos? Identifique una situación donde se pueda evidenciar lo anterior.

c. De acuerdo a lo observado anteriormente, se hace una socialización de forma general, donde cada grupo compartirá lo observado ante sus compañeros y el profesor. Escriba una conclusión de lo socializado.

2. Represente en el Geoespacio los siguientes elementos geométricos:

- Punto A = (7, 6, 10).
- Segmento $\overline{CD}$ cuyos puntos extremos tienen las siguientes coordenadas, C = (5, 6, 10) y D = (5, 6 , 5).

a. Encuentre un segmento que pase por el punto A y que sea perpendicular al segmento $\overline{CD}$. Encuentre otro segmento que pase por A y que sea perpendicular al segmento $\overline{CD}$, ¿Puede haber más segmentos que cumplan lo anterior? ¿Cuántos de tales segmentos hay?

b. Dado el punto F = (7, 0, 6) y el segmento $\overline{FG}$ con coordenadas F = (7, 0, 6) y G = (7, 5, 6), encuentre otro segmento que pase por F que sea perpendicular a $\overline{FG}$. ¿Puede haber más segmentos que cumplan lo anterior? ¿Cuántos? ¿Qué tienen en común todos estos segmentos?

c. De acuerdo a lo anterior, ¿hay algún ente geométrico que se genera por medio del proceso realizado? ¿Cuál? ¿Qué elementos geométricos son necesarios para poder generar este ente? Finalizado este ítem, se hará una socialización con los demás grupos de acuerdo a lo observado y luego se escribirá la conclusión de lo anterior.

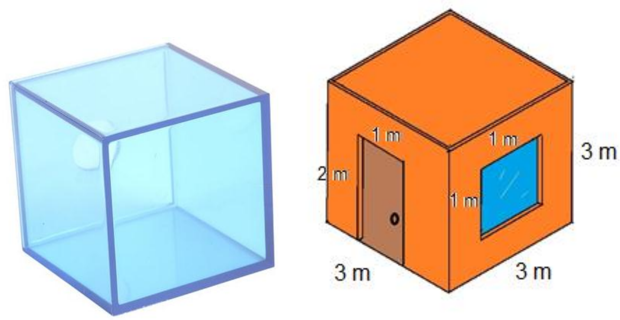
d. Dado el punto O = (0, 0, 0) piense en los ejes “x”, “y”, “z” como rectas. Determine cuántos planos son determinados por estos tres ejes en el espacio. Explicar.

3. Hadrian es un Robot que se emplea en la construcción (ver Figura 2). Fue creado por el ingeniero australiano Marck Pivak y es capaz de colocar 1000 ladrillos cada hora. Cuenta con un brazo de 28 metros con una cinta transportadora por la que viajan los ladrillos. Según sus creadores, podría construir una casa en dos días.

Figura 2. Robot Hadrian.

Antes de comenzar a construir es necesario facilitarle los planos en 3D y luego dejarle cerca los ladrillos con los que realizará la construcción.

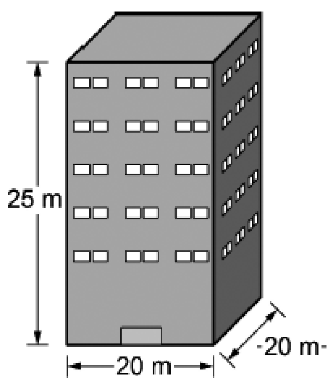
- En base a lo anterior, usted es la persona indicada para facilitarle los planos en 3D al Robot Hadrian y para ello le han propuesto construir la siguiente estructura cúbica.

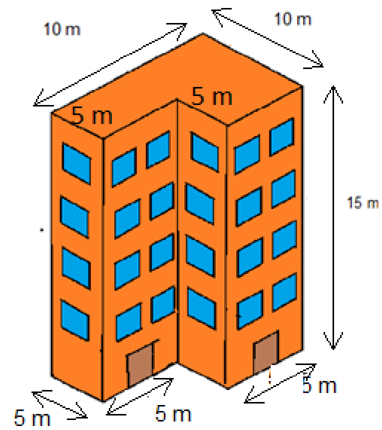


a. Represente las esquinas y bordes de la estructura cúbica en el Geoespacio. ¿Qué coordenadas les asignaría a las esquinas de la estructura cubica para que el robot Hadrian pueda delimitar las paredes que la conforman? Las paredes y el techo están contenidos en diferentes planos. ¿Cuáles características distinguen estos planos? ¿Qué relación geométrica deben cumplir las esquinas de la estructura?

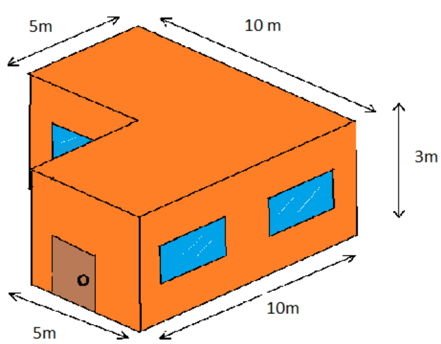
b. Si cada ladrillo mide 20 centímetros de largo y 10 centímetro de profundidad, darle instrucciones a Hadrian para armar la primera hilera de ladrillos de la construcción y luego la segunda hilera. ¿Cómo deben relacionarse éstas para dar estabilidad a la construcción?

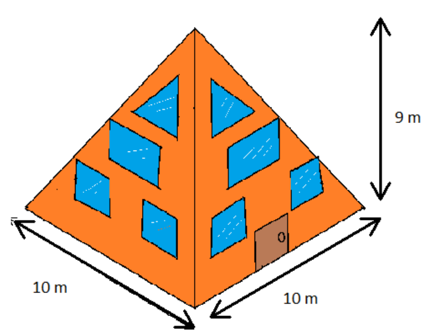
c. La compañía B.C.C. (Bogotá Construction Company) le propone realizar los siguientes modelos de edificios y casas que quiere en la construcción de sus usuarios, para ello muestra la siguiente tabla con los diseños.

<table>
<tr><td>EDIFICIO TIPO 1</td><td>EDIFICIO TIPO 2</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

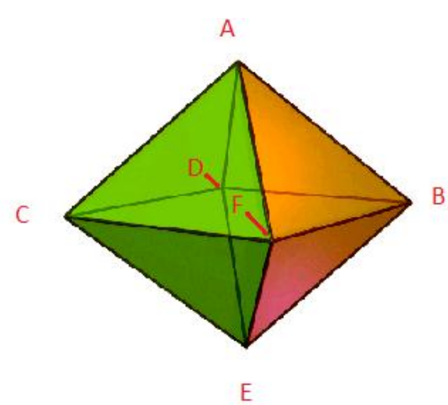
<table>
<tr><td>CASA TIPO 1</td><td>CASA TIPO 2</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

- Represente en el Geoespacio las esquinas y bordes de cada tipo de edificio y casa que se mostraron anteriormente ¿Qué coordenadas le asignaría a cada una de las esquinas de cada estructura para que el robot Hadrian pueda delimitar las paredes que la conforman?
- Las paredes y el techo están contenidos en diferentes planos. ¿Cuáles características distinguen estos planos? ¿Hay alguna relación geométrica que deban cumplir las esquinas del edificio tipo 1, tipo 2 y de la casa tipo 1? ¿Cuál?
- ¿Dónde se debe ubicar la esquina superior de la casa tipo 2 para que su estructura vista desde afuera sea uniforme? ¿Hay alguna relación entre la esquina superior de la casa tipo 2 con las otras dos esquinas inferiores de cada cara triangular?

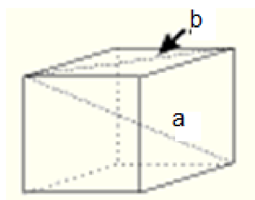
d. Al Robot Hadrian le ponen el reto de construir el octaedro que se muestra en la figura de abajo. El octaedro que se muestra es semirregular. Las aristas (los segmentos) $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{FE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ tienen igual longitud, y del mismo modo las aristas $\overline{BF}$, $\overline{FC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ tienen igual longitud, pero no todas las aristas son iguales.



- Represente en el Geoespacio el octaedro anterior de tal modo que sus vértices sean todos puntos reticulares. ¿Qué coordenadas le asignaría a cada uno de los vértices (esquinas) que conforman el octaedro? ¿Hay más de una posibilidad de hacer la asignación? ¿Qué condiciones deben cumplir los vértices A y E? Para que A y E cumplan esa condición, ¿qué condiciones deben cumplir los vértices B, C, D y F?

- ¿Cuántas caras conforman la figura? ¿Qué relación geométrica cumplen los vértices de una misma cara?

4. Un cubo tiene ocho vértices (esquinas) y doce aristas (bordes). Un segmento, como el marcado con "a" en el diagrama, que no es una arista y que une dos vértices, se llama diagonal. El segmento marcado con "b" también es una diagonal.



a. ¿Cuántas diagonales tendrá el cubo?[86]

b. ¿Cuántos planos diferentes están determinados por los vértices del cubo? ¿Cuántos de éstos contienen diagonales de tipo a? ¿Cuántos de éstos contienen diagonales de tipo b? ¿Cuántos de ellos no contienen ni diagonales de tipo a ni diagonales de tipo b?

c. Como hemos visto, tres puntos no colineales determinan un plano. Ubique 4 puntos no colineales y no coplanares en el geoespacio. El sólido cuyos vértices son estos 4 puntos se llama un tetraedro. ¿Cuántas aristas y caras tiene el tetraedro? ¿Cuántos planos diferentes están determinados por los cuatro puntos? Seguramente no son iguales los tetraedros construidos por los diferentes grupos. ¿Cuántos tetraedros de diferentes formas fueron construidos? ¿Cuántas diferentes formas de tetraedro puede haber?

[86] Olimpiadas colombianas de matemáticas. (1998). Tomado de la Prueba clasificatoria nacional primer nivel grados 6 y 7, Recuperado el 24 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl98/pcpn98.htm

4.2.4 Actividad 4. Trabajo con planos y poliedros

OBJETIVO GENERAL: Descubrir activamente y construir el concepto de poliedros (prismas, pirámides y poliedros regulares) a través del análisis de vértices, caras y aristas.

Sugerencia metodológica: Se hace la entrega del Geoespacio y su respectiva guía de trabajo a cada grupo de estudiantes. Primero los estudiantes trabajan en forma grupal y finalizada la guía se hace una socialización para identificar aquellas soluciones y dificultades encontradas por cada grupo.

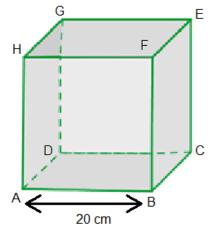
La pregunta uno va dirigida a determinar la posición relativa de dos planos en el espacio, donde se pedirá identificar los planos que conforman un cubo. Luego a través de la observación, el estudiante determinará criterios sobre planos paralelos y secantes que conllevarán a la formación de rectas y puntos en el espacio que son parte de los poliedros. La pregunta dos se enfoca a identificar las características de un poliedro y sus partes, ya que en ella los estudiantes representarán un edificio a pequeña escala en el Geoespacio y luego determinarán en el sus caras, vértices y aristas.

En el punto tres se aborda la clasificación de poliedros (prismas, paralelepípedos, pirámides, poliedros regulares y poliedros semiregulares), punto en el cual los estudiantes, a través de la construcción y observación, determinarán sus propiedades, características y relación con el contexto. Finalmente, las preguntas cuatro y cinco se enfocan a la resolución de problemas relacionados con el análisis y observación de poliedros.

Materiales a utilizar: Geoespacio, lana, silicona, palillos, tijeras, colores y guías.

Desarrollo de la actividad.

1. Represente en el Geoespacio el siguiente cubo y escriba al lado de cada punto las coordenadas asignadas a sus vértices en el Geoespacio.



a. Las caras del cubo se encuentran contenidas en distintos planos. Compare inicialmente las caras ADGH y BCEF, luego las caras GHFE y ADBC ¿Observa algo notable? Encuentre más caras que cumplan lo observado anteriormente.

b. Los planos que contienen las caras determinadas anteriormente se clasifican como planos paralelos, escriba un criterio que permite hablar sobre planos paralelos de acuerdo a lo observado.

c. Ahora haga uso del Geoespacio para comparar las caras EFGH y BCEF, luego compare las caras ABFH y BCEF ¿Observa algo importante? Encuentre otros pares de caras que cumplan lo observado anteriormente.

d. Planos como los encontrados en el literal anterior se clasifican como planos secantes. Imagine que prolonga indefinidamente estos planos secantes ¿Qué propiedad cumplen estos planos?

e. Haga uso del Geoespacio para observar las caras ABCD, BCEF y ABFH. Después compare las caras ADGH, EFGH y CDEG ¿Encuentra algo notable? ¿Cómo clasificaría estos planos? Determine más conjuntos de tres caras que cumplan lo observado.

f. Encuentre un ejemplo de la vida cotidiana donde identifique los elementos anteriores.

2. Un <u>poliedro</u> es un sólido limitado por planos, sus partes son: caras, vértices y aristas. (Ver Figura 1.)

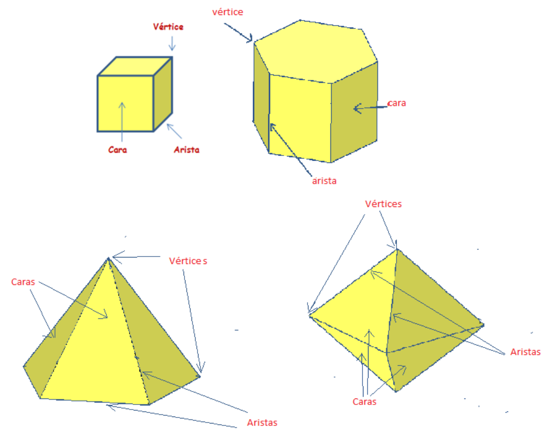


Figura 1. Partes de un poliedro.

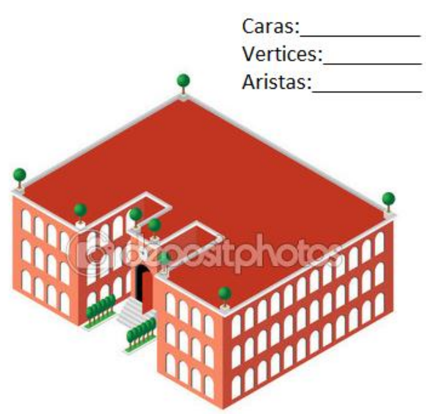
a. Teniendo en cuenta lo señalado en la Figura 2, escriba enfrente los elementos que caracterizan a cada una de las partes del poliedro:

CARA ____

ARISTA ____

VERTICE ____

b. Represente las paredes, piso y techo de la siguiente estructura de un colegio en el Geoespacio. Luego escriba al lado de la figura la cantidad de vértices, aristas y caras que tiene.



3. Algunos de los poliedros más comunes son prismas, pirámides y varias clases diferentes de poliedros regulares.

a. Un paralelepípedo es un poliedro que tiene como base un paralelogramo, todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos. En la Figura 2 se muestra un paralelepípedo recto ya que sus aristas laterales son perpendiculares a las bases sí esto no ocurre se llama paralelepípedo oblicuo; los paralelepípedos se nombran de acuerdo a la forma de la base, así el paralelepípedo de la Figura 2 se llama paralelepípedo recto rectangular (ortoedro).

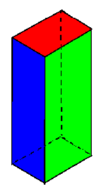
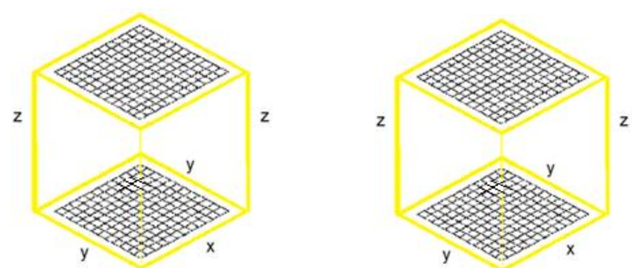


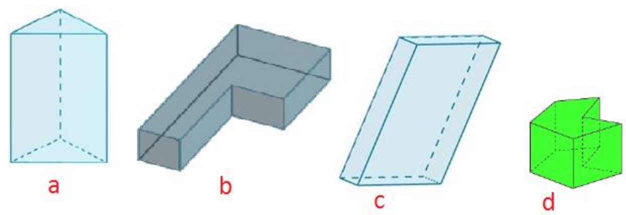
Figura 2. Paralelepípedo recto rectangular (ortoedro)

- En la actividad anterior se habló sobre el robot Hadrian el cual puede construir una casa en dos días, asuma que usted es el operador del robot, de acuerdo a lo anterior, dele instrucciones al Robot Hadrian para que construya en el Geoespacio un paralelepípedo rectangular oblicuo y un paralelepípedo romboidal (romboedro). Luego represéntelos, siguiendo usted las instrucciones, en la parte inferior.



- Identifique tres objetos que usted ha visto que se asemejen a los anteriores paralelepípedos y escríbalos.

b. Represente en el Geoespacio los siguientes poliedros:



- En cada poliedro haga uso de lana para unir sus diagonales ¿encuentra algo notable?
- Los poliedros a y c son llamados poliedros convexos, teniendo encuentra lo anterior ¿Qué criterio debe cumplir un poliedro para ser convexo?
- ¿Los paralelepípedos son convexos? Justifique.

b. Un prisma (Ver Figura 3) es un poliedro en el cual existen dos caras iguales (congruentes) que se encuentran contenidas en planos paralelos, denominadas bases, y en los cuales las otras caras, llamadas caras laterales, conectan los lados congruentes de las caras laterales. Si las aristas de las caras laterales son perpendiculares a los planos que contiene las caras base se llama prisma recto, de lo contrario se llama prisma oblicuo. Los prismas se nombran por la forma de su base, de esta forma el prisma que se muestra en la Figura 3 se llama prisma pentagonal recto.

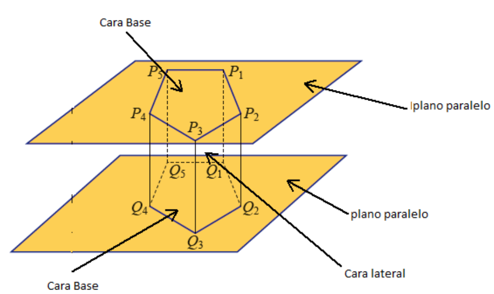
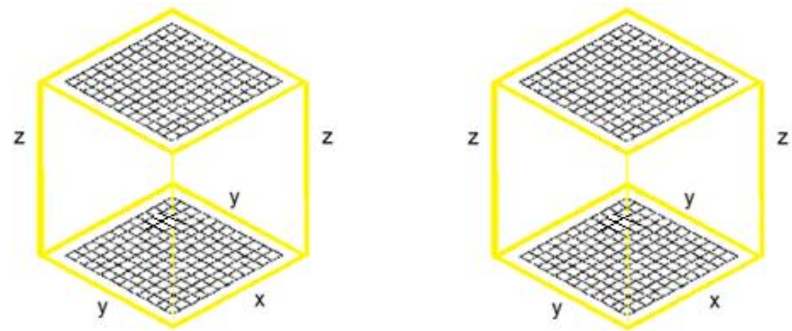


Figura 3. Prisma pentagonal recto.

c. Teniendo en cuenta lo anterior, dele instrucciones al Robot Hadrian para que construya en el Geoespacio un prisma pentagonal oblicuo y un prisma hexagonal recto no convexo. Siguiendo las instrucciones que usted mismo elaboró, represéntelos en la parte inferior.



d. Identifique 3 objetos que usted ha visto, que se asemejen a los prismas y escríbalos.

e. De acuerdo a lo trabajado sobre prismas y paralelepípedos, encuentre algunas relaciones y diferencias, escríbalas y responda ¿Todo paralelepípedo es un prisma? ¿Por qué?

f. Una pirámide (Ver Figura 4) está determinada por tener una cara base y un vértice que no es coplanar con los vértices de esa cara. Las otras caras, denominadas caras laterales, son triángulos que contienen una arista de la base y el vértice que no pertenece al plano que contiene la base. Al igual que los prismas éstas se nombran teniendo en cuenta la forma de su base. La pirámide de la Figura 4 es una pirámide rectangular.

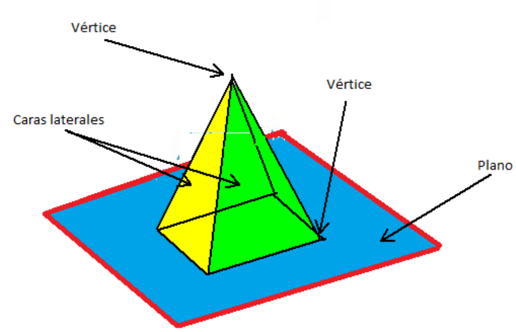


Figura 4. Pirámide rectangular.

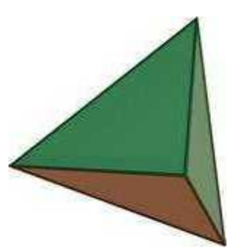
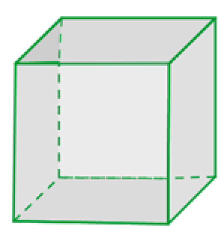
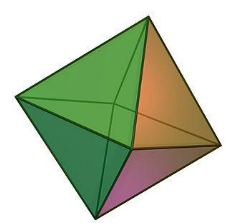
g. Dele instrucciones al robot Hadrian para que construya una pirámide triangular, rectangular, cuadrangular, pentagonal y hexagonal. ¿Cuántas pirámides triangulares de diferentes formas se construyeron entre todos los estudiantes de su grupo? ¿Entre todos los estudiantes de su curso?

h. Nuevamente dele instrucciones al robot Hadrian para que construya en el Geoespacio una pirámide cuadrada del menor volumen posible cuyos vértices sean puntos reticulares.

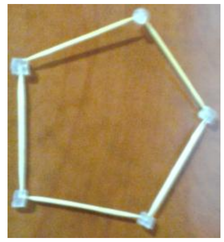
i. Dele instrucciones al Robot Hadrian para que construya en el Geoespacio una pirámide cuya base sea un triángulo rectángulo y luego otra pirámide cuya base sea un triángulo isósceles no equilátero. ¿Será posible que Hadrian pueda construir una pirámide cuya base sea un triángulo equilátero y además sus vértices estén sobre puntos reticulares del espacio? Si la puede construir determine las instrucciones que debe tener Hadrian y hágalo en el Geoespacio, en caso contrario justifique su respuesta.

- Identifique 3 objetos que usted haya visto que se asemejen a las pirámides.

j. En la figura de abajo se muestran algunos poliedros regulares. La condición para que un poliedro sea regular es que tenga todas sus caras congruentes y todas sus aristas de igual longitud. En el anexo se encuentran moldes en forma de triángulo equilátero. Úselos para construir el tetraedro regular y el octaedro regular, teniendo en cuenta que el cubo es una excepción ya que se puede realizar en el Geoespacio.

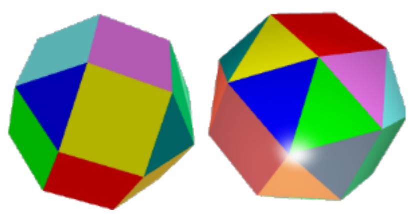
A	B	C
 Tetraedro	 Cubo	 Octaedro

- Tome palillos y pequeños trozos de silicona para conectarlos entre sí y construir un polígono semejante a un pentágono regular como se aprecia en la figura inferior. (Hay un molde de pentágono regular en el anexo. ¿Cómo lo pueden usar para formar pentágonos regulares de cualquier tamaño que se quiere?)



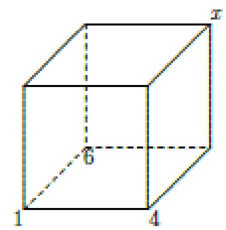
- Con base a las construcciones de los poliedros regulares anteriores, haga uso de su creatividad e ingenio para construir un poliedro regular cuyas caras sean pentágonos. ¿Cuántas caras, vértices y aristas pueden encontrar? ¿El poliedro anterior se asemeja con algún objeto que haya visto?

k. Los poliedros Arquimedianos o poliedros semirregulares, son muy parecidos a los poliedros regulares, ya que son convexos y sus caras son polígonos que tienen lados y ángulos iguales, sin embargo se diferencian de los poliedros regulares, ya que tienen caras con distinto tipo como se aprecia en la figura inferior.

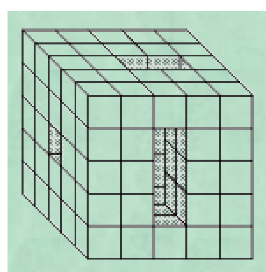


- A partir de lo anterior, tome palillos y pequeños trozos de silicona para conectarlos entre sí y construir pentágonos y hexágonos, luego use todo su ingenio y creatividad para unir estos polígonos y formar un polígono semirregular. ¿Cuántas caras, vértices y aristas puede encontrar? ¿El poliedro anterior se asemeja con algún objeto que haya visto?

4. Los vértices de un cubo se numeran del 1 al 8 de manera que el resultado de sumar los cuatro números asignados a los vértices de cada cara es el mismo para todas las caras. Se han colocado ya los números 1, 4, 6 como se muestra en la figura ¿Qué número va en el vértice marcado con *x*?[87]



5. A continuación se muestra un cubo de dimensiones 5cm x 5cm x 5cm que tiene un hueco de dimensiones 1cm x 1cm x 5cm que se ha recortado de una cara, atravesando el cubo, y similarmente, un hueco de dimensiones 2cm x 1cm x 5cm que se ha recortado de otra cara, y un hueco de dimensiones 3cm x 1cm x 5cm recortado de la tercera cara, tal como se muestra en el diagrama. ¿Cuántos cubos quedan en la figura? [88]

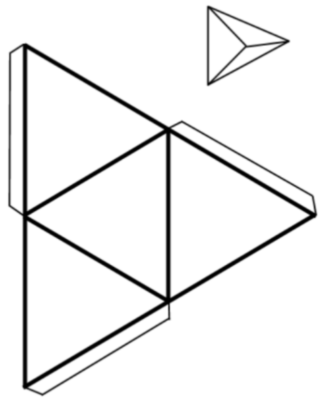
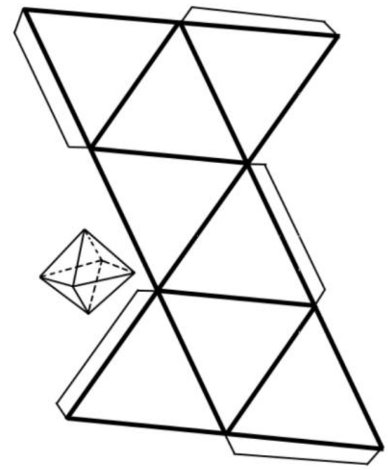


ANEXO

TETRAEDRO	OCTAEDRO

[87] Examen canguro matemático. (2014). Tomado del nivel Cadete. Recuperado el 29 de octubre del 2016 de la URL: http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/previos/cadete14.pdf

[88] Olimpiadas colombianas de matemáticas. (1997). Tomado de la XVI competencia regional de matemáticas nivel intermedio grados 8 y 9. Recuperado el 29 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Crm97ni/crm97ni.htm

4.2.5. Actividad 5. Teorema de Pitágoras

Objetivo: Descubrir y aplicar el teorema de Pitágoras a partir de la observación, exploración, indagación y solución de problemas.

Sugerencia metodológica: se hace uso de una cuerda egipcia, un rompecabezas, luego se hace la entrega del Geoespacio y su respectiva guía de trabajo a cada grupo de estudiantes. Primero trabajan en forma grupal, donde discuten algunas soluciones y determinan la más acertada.

La pregunta uno se dirige a encontrar segmentos perpendiculares a través de la observación y experimentación con la cuerda egipcia, de esta forma se aplicará el teorema de Pitágoras en situaciones prácticas, determinando criterios entre la relación de los lados de un triángulo rectángulo. La pregunta dos se enfoca a determinar la relación que hay entre los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo a través de la comparación de áreas, y la pregunta tres se dirigen a manipular un rompecabezas con 4 triángulos rectángulos sobre una base cuadrada. De esta forma los estudiantes a través de la exploración y observación determinarán una relación más general entre los catetos de cada triángulo rectángulo y su hipotenusa. Las preguntas 4, 5, 6, 7, 8,9 se enfocan en la implementación del Geoespacio para solucionar problemas relacionados con la aplicación del teorema de Pitágoras, las preguntas 10 y 11 se dirigen a solucionar problemas ya sea aplicando el teorema de Pitágoras o empleando conocimientos sobre áreas.

Materiales a utilizar: Geoespacio, láseres, hojas, lana, tijeras y cinta de enmascarar, colores y guías.

Desarrollo de la actividad

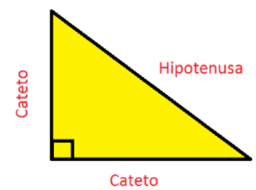
1. El surgir de la geometría nace a través de problemas prácticos, de esta forma las primeras civilizaciones como Egipto, India, China, Mesopotamia, aplican la geometría en problemas de agricultura, construcción y astronomía. Dentro de sus escritos se encuentra el uso del Teorema de Pitágoras.

La civilización india (2500 a.c.) hace uso de este teorema en la construcción de altares religiosos. La civilización china (2100 a.c.) emplea este teorema en la astronomía, así el libro Zhou bi suan jing (500-300 a.c.) usa triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras para encontrar la altura del sol y de otros cuerpos. En la civilización egipcia (3150 a.c.) cada año, tras la inundación del Nilo en sus campos, los agrimensores debían delimitar sus terrenos mediante trazos perpendiculares, para ello usaban nudos igualmente espaciados y uniendo ciertas longitudes en forma de triángulo obtenían ángulos rectos, lo cual conllevó al uso de los triángulos rectángulos.

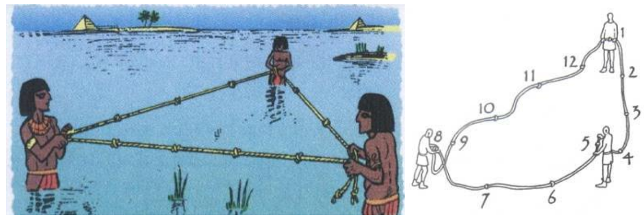
De esta forma Pitágoras de Samos (582 a.c-497 a.c) (Ver Figura 1) tomó toda esta experiencia geométrica a través de sus viajes a Egipto y la incorporó en el teorema que lleva su nombre, teniendo claro que las anteriores civilizaciones ya conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, de forma práctica.

Figura 1. Una rendición artística de Pitágoras de Samos.

En este punto cabe preguntarse ¿Qué es el teorema de Pitágoras? Para dar respuesta a ello es necesario recordar lo qué es un triángulo rectángulo y cada una de las partes que lo conforman como se muestra a continuación.



A continuación se muestra el modelo de una cuerda que tiene doce nudos con12 espacios iguales.



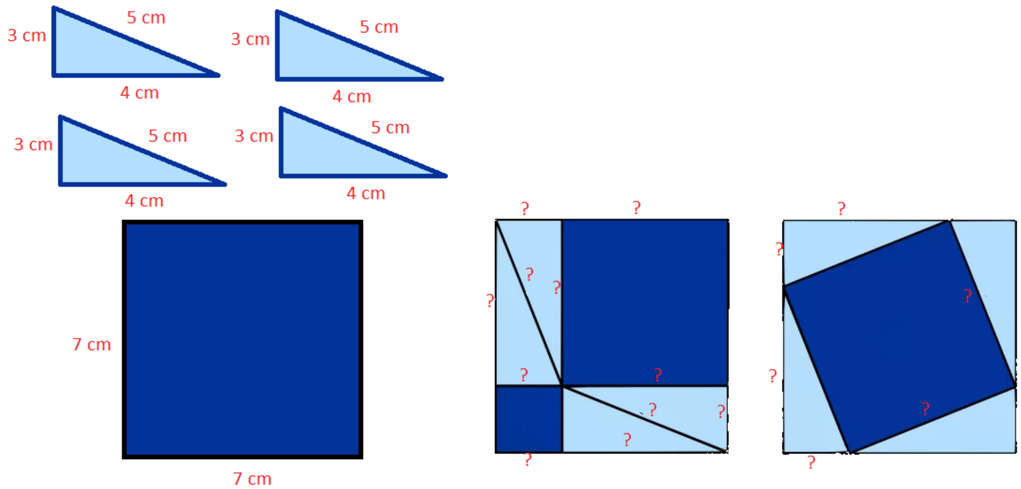
Esta cuerda es conocida como la cuerda egipcia, ya que la usaban los egipcios para encontrar segmentos perpendiculares en la delimitación de sus terrenos.

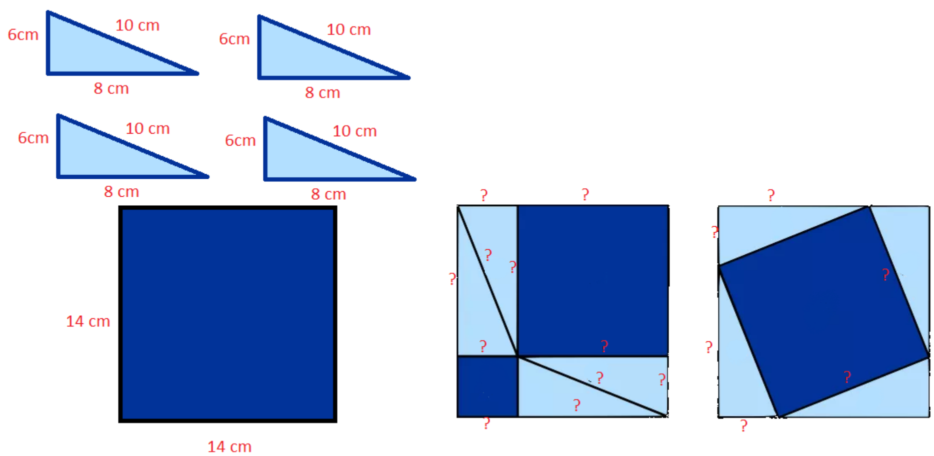
a. Por grupo (3 estudiantes) toman la cuerda egipcia que fue entregada, cada estudiante debe sujetar un nudo para formar un triángulo rectángulo y con ello encontrar segmentos perpendiculares sobre sobre el suelo. Cuando se hayan encontrado los segmentos perpendiculares, ¿cuánto miden los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo que se formó?

2. Use cuerdas egipcias de 24 nudos, 30 nudos, 10 nudos y realice el mismo proceso anterior. ¿Con qué cuerdas pudo encontrar segmentos perpendiculares cuyos vértices sean nudos? ¿Identifica alguna relación entre los lados de los triángulos?

3. A Camilo le han dado dos rompecabezas con distintas medidas, conformados por una base cuadrada y 4 triángulos rectángulos, él ha construido dos figuras distintas en el momento de manipular cada rompecabezas. A continuación se muestran las figuras que hizo Camilo con cada

rompecabezas.

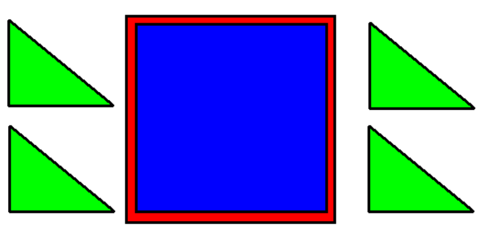




a. Determine y escriba las medidas donde se encuentran los signos de interrogación.

b. Estudie bien las áreas de cada figura formada. ¿Qué observa?

4. A usted se le ha entregado el mismo rompecabezas que tenía Camilo en el punto anterior, el cual cuenta con una base cuadrada y 4 triángulos rectángulos.



a. Manipule los triángulos para formar dentro de la base cuadrada:

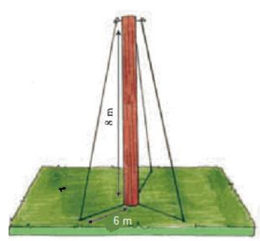
(1) dos cuadrados y dos rectángulos;

(2) un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos.

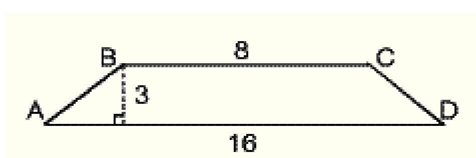
Estudie bien las áreas de las figuras formadas. ¿Qué observa?

b. Use letras distintas que expresen la longitud de cada cateto e hipotenusa del rompecabezas anterior. Emplee esta nueva notación para escribir las áreas que se obtiene en los pasos (1) y (2) del literal anterior. ¿Qué operaciones y símbolos usa para poder relacionar estas áreas?

5. Represente en el Geoespacio la siguiente situación, un poste de madera tiene 8 m de altura y se quiere sujetar con tres cables que van desde el extremo superior a un punto del suelo que equidista de la base del poste 6 m ¿Cuánta longitud de cable se necesita?



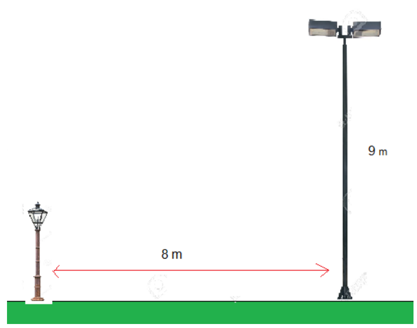
6. Ubique en el Geoespacio los puntos ABCD que forman el trapecio, los lados AB y CD son iguales ¿Cómo halla el perímetro del trapecio ABCD?[89] Descríbalo.



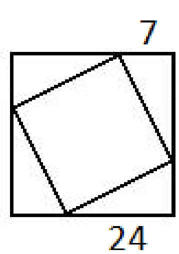
[89] Olimpiadas colombianas de matemáticas. (2000). Adaptado de la Prueba clasificatoria nacional primer nivel grados 6 y 7, Recuperado el 13 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl00/pcnpn/pcnpn.htm

7. Una caja tiene 4cm de largo, 3cm ancho y 12cm alto, Jorge quiere llevar en la caja un lápiz de 13 cm ¿Cómo determina usted si Jorge puede llevar el lápiz? ¿Explique?

8. Represente en el Geoespacio la siguiente situación. A continuación se muestra un faro que mide la tercera parte de un poste de luz, la distancia que los separa es de 8 m. ¿Cómo determina la distancia que separa los extremos superiores de los dos postes? Use pitillos para representar el faro y el poste.

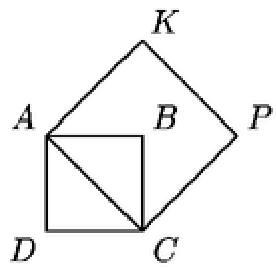


9. Un cuadrado pequeño está inscrito en el grande como muestra la figura. Encuentre el área del cuadrado inscrito.[90]

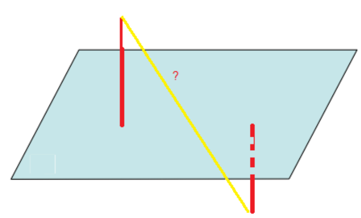


[90] Canguro matemático. (2007). Tomado y adaptado del nivel 3 de E.S.O. Recuperado el 7 de noviembre del 2016 de la URL: http://www.canguromat.org.es/canguro2007/ikg2007.html

10. Cada lado del cuadrado ABCD mide 1m. Si B es el centro del cuadrado AKPC, ¿cuál es el área del cuadrado AKPC?[91]¿Cuánto mide el lado AC de este cuadrado?



11. Ubique en el Geoespacio el plano z = 6 y en él dos pitillos de longitud 6 cm puestos verticalmente, uno de ellos hacia arriba y otro hacia abajo como se muestra en la figura inferior. Encuentre un proceso que permita obtener la distancia que separa los puntos extremos de los pitillos. ¿Puede usted colocar los pitillos de diferentes maneras de modo que se obtenga diferentes longitudes entre sus extremos? ¿En cuáles puntos del plano z = 6 los colocaría de modo que la distancia entre sus extremos sea 20 cm?



12. Dados los puntos A = (3, 2, 1) y B = (7, 5, 7), ¿cómo se puede hallar la distancia entre estos dos puntos?

Conclusiones del capítulo 4

[91] Olimpiada mexicana de matemáticas. (2012). Recuperado el 7 de noviembre del 2016 de la URL: http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/prob15/prob1a25.html#12

Las cinco actividades mostradas anteriormente se sustentan en las comunidades de práctica de Wenger, de esta forma se implementara un material manipulativo y de fácil manejo como es el Geoespacio que permitirá trabajar en la resolución de problemas aplicadas a contenidos de la geometría del espacio. Con este material manipulativo se lograra fomentar el pensamiento visual en la solución de cada una de las preguntas, que conllevara a desarrollar e incentivar el pensamiento espacial.

Por otra parte al integrar el Geoespacio en los contenidos de la geometría del espacio y la resolución de problemas, se logra que el estudiante use su imaginación y creatividad que en ultimas se convierten en fuertes herramientas heurísticas que propician la adquisición de los contenidos geométricos propuestos, tales como entes del espacio (punto, recta, plano) y la relación que estos entes conllevan a la formación de segmentos, puntos colineales, puntos coplanares, poliedros y su análisis a través de la posición relativa de planos y rectas en el espacio.

CAPÍTULO 5. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA

Este capítulo está orientado al análisis de cada una de las cinco actividades dirigidas a incentivar y desarrollar el pensamiento espacial por medio del Geoespacio, de esta forma se destacara en su análisis el desarrollo de la actividad, la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades.

5.1. Actividad 1. Representación y manejo de puntos con el Geoespacio

El desarrollo de la actividad se realizó con 34 estudiantes del grado 7B del colegio Giovanni Pascoli. Como primer paso se realizaron grupos de tres estudiantes, de esta forma se obtuvieron 11 grupos, a los cuales se les entrego un Geoespacio, seguidamente se le brinda la guía respectiva a cada estudiante, donde trabajaron de forma grupal para dar respuesta a la actividad.

En el desarrollo general de la actividad, los estudiantes tuvieron alguna dificultad en el momento de leer los distintos problemas iniciales, la cual fue superada, con ello lograron ubicar puntos en el espacio, usando como herramienta representativa y de fácil manejo el Geoespacio.

A continuación se precisa las ideas, expectativas y retos de los estudiantes durante la resolución de los problemas en el Geoespacio que conforman esta actividad.

La pregunta uno genero controversia, ya que los estudiantes proponían distintas vías de solución (Ver Figura 21) y de esta forma preguntarse si la solución escrita era la correcta, pues era la primera vez donde se abordaba un problema con distintas vías de solución. En el literal **a** los estudiantes se sorprendieron cuando pudieron encontrar más caminos que conectaban las posiciones de Sofía y Nicolás, en el ítem **b** los estudiantes usaron las cuadricula del Geoespacio para encontrar el camino con menor recorrido, esto los llevo a utilizar su pensamiento visual.

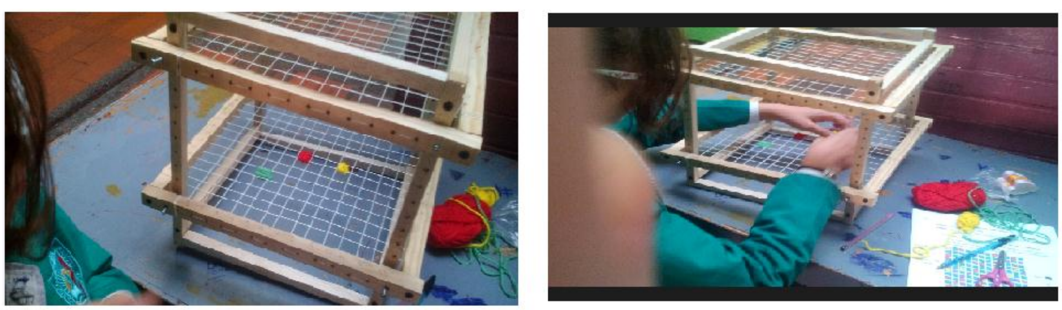
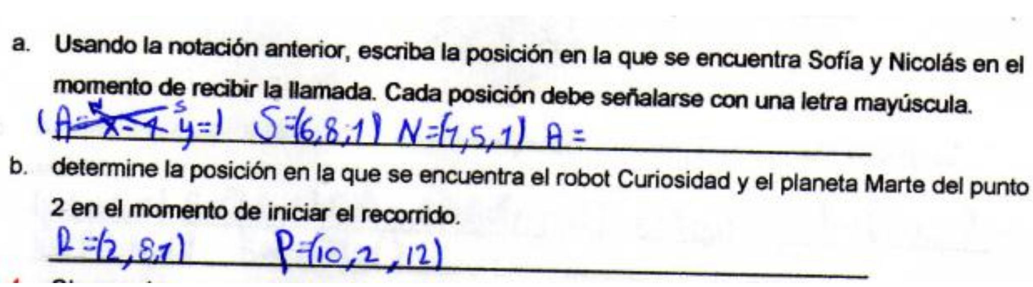


Figura 21. Representación en el Geoespacio de Sofía, Nicolás y el ascensor.

La pregunta dos fue más fácil de entender para ellos, pues comprendieron los distintos caminos usando los puntos cardinales (Ver Figura 22). En el literal **a** usaron lana para representar distintos caminos que conectaron el robot curiosidad con el planeta marte, sin embargo algunos tuvieron dificultades en el momento de dirigir el robot, pues dieron el mismo significado a “adelante” con “arriba”. En el ítem **b** los estudiantes usaron la lana para encontrar el menor recorrido y como fue sorpresa entre los grupos se presentaron distintas vías de solución, todas correctas, ya que algunos grupos habían movido los niveles del Geoespacio.

Figura 22. Soluciones que conectan el robot Curiosity con el planeta Marte.

En la tercera pregunta se observó una pequeña confusión por parte de los estudiantes en cuanto a la notación de puntos en el espacio, pues dentro del paréntesis algunos grupos escribían "x=""y=""z=". Sin embargo con la orientación del profesor se logró corregir tal notación al uso de paréntesis y comas para separar coordenadas, de esta forma en el literal **a** los estudiantes representaron la posición de Sofía y Nicolás, algunos de forma correcta y otros no tanto, ya que estuvieron confundidos con el sistema coordenado (Ver Figura 23), en el ítem **b** la gran mayoría pudo ubicar bien la posición del robot curiosidad y el planeta Marte, pues habían podido superar la notación del punto anterior.



a. **Usando la notación anterior, escriba la posición en la que se encuentra Sofía y Nicolás en el momento de recibir la llamada. Cada posición debe señalarse con una letra mayúscula.**

(A= ~~x=4~~ y=1) S=(6,8,1) N=(7,5,1) A =

b. **determine la posición en la que se encuentra el robot Curiosidad y el planeta Marte del punto 2 en el momento de iniciar el recorrido.**

R=(2,8,1) P=(10,2,12)

Figura 23. Posición en coordenadas rectangulares dadas por un estudiante.

En la pregunta cuatro los estudiantes comprendieron la representación gráfica del baño en el Geoespacio (Ver Figura 24), de esta forma en el literal **a** decidieron comenzar a ubicar la posición del baño en el nivel más apto para ellos y no miraron a los demás grupos, puesto que comprendieron que podía haber más soluciones correctas. En el ítem **b** se observa una confusión en cuanto a la representación bidimensional de objetos tridimensionales, ya que esta representación la habían hecho de forma correcta en el Geoespacio.

Figura 24. Representación de la estructura del baño en el Geoespacio.

En la pregunta cinco los estudiantes representaron el edificio propuesto, así en el literal **a** algunos estudiantes no comprendieron cuantos cuadros tenía el edificio en sus medidas exteriores, por ello el docente intervino y les dio una orientación para comprender mejor la representación, de esta forma relacionaron la cuadricula con los cuadros de la figura (Ver Figura 25). Del mismo modo en el ítem **b** los estudiantes representaron correctamente los puntos en el Geoespacio, sin embargo aún hay errores en la representación de lo tridimensional a bidimensional.

Figura 25. Representación del edificio en el Geoespacio.

En el punto seis (Ver Figura 26) los estudiantes representaron correctamente las torres de KIO en el Geoespacio, sin embargo se continua con ciertos errores en la representación de lo tridimensional a bidimensional.

Figura 26**.** Representación Torres de KIO en el Geoespacio

En la pregunta siete hubo mayor claridad en cuanto a la solución y conteo de unidades, de esta forma la gran mayoría de los estudiantes determino el camino correcto a la solución.

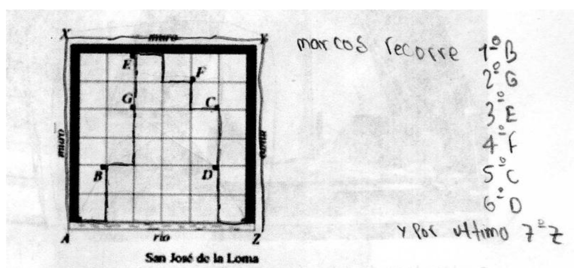


Figura 27. Solución dada por un estudiante al recorrido de Marcos.

Finalmente en la pregunta ocho, los estudiantes tuvieron problemas de interpretación en cuanto a la posición de puntos, aunque muchos plantearon la ubicación de cada uno de los puntos A, B, C y D, pero no lograron representar la menor distancia entre los puntos A y D, la cual se muestra en la Figura 28.

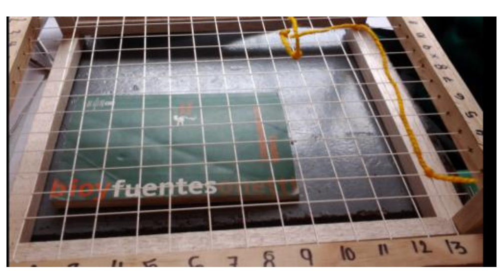


Figura 28. Planteamiento propuesto en el Geoespacio por un estudiante.

Finalizada la guía, se hizo una socialización, en este momento se aplica la cuarta etapa de polya que corresponde a la evaluación de la vía, de esta forma los estudiantes compararon sus respuestas y comprendieron las distintas vías de solución, con ello mencionaron expresiones como: *"¡hay demasiados caminos!; ¡los puntos me quedaron mal ubicados!; ¡no conté bien las baldosas!"*[92]

Motivación por el aprendizaje

Hubo gran expectativa y motivación por parte de los estudiantes, pues era la primera vez que hacían uso de un Geoespacio, lo cual despertó su interés y curiosidad. Del mismo modo el emplear materiales manipulables como lana y fichas de parques para representar las distintas situaciones como los edificios y los problemas, conllevo a que los estudiantes usaran su percepción visual, dando solución de los problemas mediante caminos y puntos. También al obtener distintas respuestas correctas en los diferentes grupos, le dio algo de originalidad y motivación al trabajo de cada estudiante.

Logros

El empleo de material manipulable, permitió plasmar cada una de las problemáticas planteadas, conllevando al uso del pensamiento visual, de tal forma que los estudiantes plasmaron situaciones y objetos para dar solución a las preguntas planteadas, a su vez se evidencio el trabajo con las cuatro fases de Polya, puesto que los estudiantes trabajaron de forma grupal y trataron de dar soluciones originales a cada una de las preguntas. El trabajo de problemas haciendo uso del Geoespacio muestra los siguientes aspectos tenidos en cuenta por Carroll (1993) para desarrollar el pensamiento espacial:

- Visualización: presente en todas las preguntas, pues en las preguntas 1,2, 3 y 7 el estudiante debe identificar patrones en 2D y 3D a partir de su representación en el Geoespacio, así encuentra

[92] Opinión de las estudiante PV y GM.

soluciones que le permiten maximizar caminos para dar solución al problema. Las preguntas 4, 5, 6 y 8 se caracterizan porque los estudiantes deben desarrollar elementos tridimensionales a partir de gráficos bidimensionales y representarlos en el Geoespacio (Ver anexos 1).

- Velocidad perceptiva: presente en los puntos 4, 5, 6 y 7, pues en estas preguntas los estudiantes deben identificar estructuras tridimensionales como edificios y cuartos para poder representarlas de forma correcta en el Geoespacio (Ver anexos).

Dificultades

Durante el desarrollo de la actividad, así como se observó algunas motivaciones por el aprendizaje y sus logros, también se evidenciaron algunas falencias, de esta forma se precisa:

- Por ser la primera vez que se enfrentaban a problemas retadores y al uso del Geoespacio en su solución, le llevo más tiempo del estipulado a los estudiantes.
- Hubo dificultad en cada uno de los grupos en el momento de representar las coordenadas rectangulares, pues nunca habían hecho uso de este simbolismo y representación en la geometría.
- El Geoespacio por ser material manipulable, en dos grupos se desajustaron las cuerdas que componen las retículas de los niveles superiores, retrasando la solución y socialización de los grupos.

5.2 Actividad 2. Rectas, segmentos y colinealidad

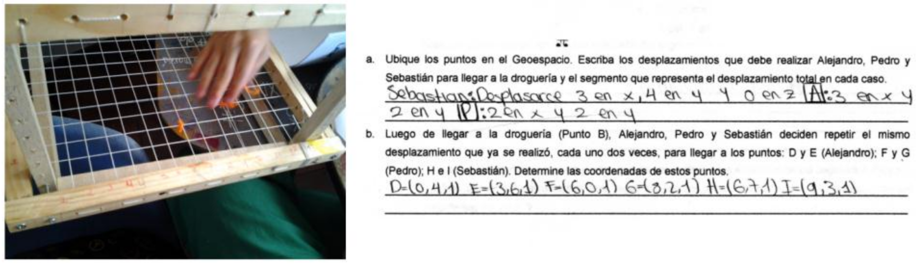
El desarrollo de la actividad se realizó con 33 estudiantes del grado 7B del colegio Giovanni Pascoli, para dar inicio a la actividad, los estudiantes se hicieron en sus grupos respectivos, de esta forma se realizaron 11 grupos de 3 estudiantes, luego se repartió la guía y el Geoespacio.

A continuación se muestra un análisis de las ideas, estrategias y la aplicación del Geoespacio, relacionado con el desarrollo de la solución de cada uno de los problemas de la actividad.

La pregunta uno se llevó a cabo con un láser y puntos fijos en el tablero, con ello en el literal **a** y **b** se le solicita a un estudiante (asesorado por el profesor) apuntar con el láser al lugar fijo del tablero (Ver Figura 29), de esta forma se produjo un debate entre los grupos sobre la trayectoria del láser comentando que se parecía a un circulo, punto inicial y punto final, trayectoria recta, cilindros, línea recta y punto. En el literal **c**, cuatro estudiantes asesorados por el profesor tomaron distintos láseres y apuntaron al mismo lugar fijo de la pared, con ello los estudiantes comentaron que habían cuatro líneas rectas que se intersectaban, cuatro líneas unidas en un solo punto y cuatro segmentos que llegan a un solo punto (Ver Figura 8); finalmente algunos concluyeron que muchas persona pueden apuntar a un mismo punto.

Figura 29. Estudiantes apuntando con el láser a un lugar fijo.

La pregunta dos permitió que los estudiantes pensaran de forma reticular, del mismo modo llevo a pensar en los desplazamientos como un cambio en el eje “x” e “y”, en el literal **a** los estudiantes ubicaron las posiciones de pedro, Alejandro y Sebastián en el Geoespacio (Ver Figura 30). Este proceso les permitió trabajar con material manipulable y poder contar las trayectorias que debía realizar cada uno para poder llegar al colegio que se ubicaba en el punto B, algunos grupos comentaron que el desplazamiento total de Alejandro al colegio era de 5 unidades, otros especificaron sus desplazamientos en cada eje (Ver Figura 30).



a. Ubique los puntos en el Geoespacio. Escriba los desplazamientos que debe realizar Alejandro, Pedro y Sebastián para llegar a la droguería y el segmento que representa el desplazamiento total en cada caso.

Sebastian: Desplasarce 3 en x, 4 en y y 0 en z A: 3 en x y 2 en y P: 2 en x y 2 en y

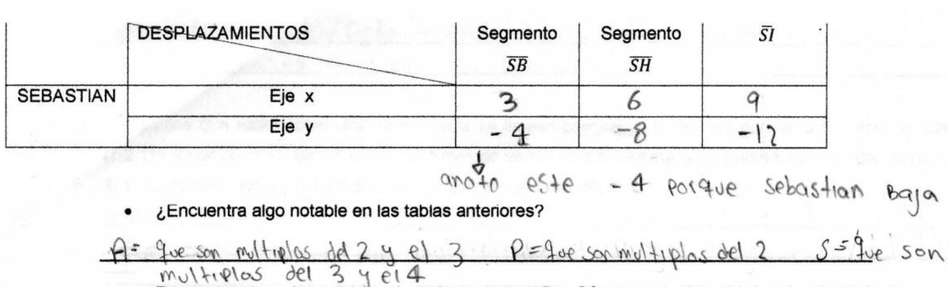
b. Luego de llegar a la droguería (Punto B), Alejandro, Pedro y Sebastián deciden repetir el mismo desplazamiento que ya se realizó, cada uno dos veces, para llegar a los puntos: D y E (Alejandro); F y G (Pedro); H e I (Sebastián). Determine las coordenadas de estos puntos.

D=(0,4,1) E=(3,6,1) F=(6,0,1) G=(3,2,1) H=(6,7,1) I=(9,3,1)

Figura 30. Representación de posiciones y desplazamientos dados por un estudiante.

En los ítems **b** y **c** de la pregunta dos los grupos encontraron los puntos específicos y con ellos completaron la tabla de forma correcta, cabe mencionar que hubo algunos grupos que lograron usar números enteros para representar desplazamientos negativos (Ver Figura 31). Con esta información los grupos comenzaron a conjeturar las relaciones entre cada tabla, encontrando que eran múltiplos (Ver Anexos 3), esto les ayudo en los literales **d** y **e** (Ver anexos 3).

En el ítem **f** y **g** los estudiantes usaron los segmentos representados en el gráfico y en el Geoespacio para determinar en algunos casos que lo que se formaba era una recta sin fin y otros comentaron "… que se formaba una línea que recorría puntos"[93]; respecto a la colinealidad algunos grupos comprendieron la definición de punto colineal, otros pidieron orientación al docente, de esta forma usaron su pensamiento visual e identificaron puntos colineales, aunque es de precisar que algunos estudiantes no pudieron lograrlo.



	DESPLAZAMIENTOS	Segmento $\overline{SB}$	Segmento $\overline{SH}$	$\overline{SI}$
SEBASTIAN	Eje x	3	6	9
	Eje y	-4	-8	-12

anoto este -4 porque sebastian baja

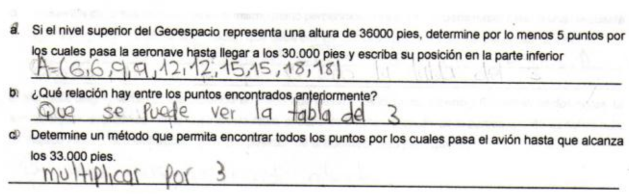
- ¿Encuentra algo notable en las tablas anteriores?

A= que son multiplos del 2 y el 3 P= que son multiplos del 2 S= que son multiplos del 3 y el 4

[93] Opinión del estudiante NP.

Figura 31. Tabla de desplazamiento con números enteros.

La pregunta tres permitió que los estudiantes aplicaran la geometría en un contexto distinto, de esta forma unieron los puntos que les daba el enunciado en el Geoespacio (Ver Figura 32), en el literal **a** algunos estudiantes extendieron lana y contaron puntos, de esta forma encontraron puntos como (1,1,1), (6,6,6), (9,9,9). Con lo anterior en el literal **b** algunos estudiantes concluyen que *"… estos puntos son múltiplos, múltiplos de 3 y puntos colineales"*[94]*;* en el ítem **c** algunos grupos comentaron que para hallar más puntos se debía seguir la escala y multiplicar por los múltiplos.



a. Si el nivel superior del Geoespacio representa una altura de 36000 pies, determine por lo menos 5 puntos por los cuales pasa la aeronave hasta llegar a los 30.000 pies y escriba su posición en la parte inferior

A=(6,6,9,9,12,12,15,15,18,18)

b. ¿Qué relación hay entre los puntos encontrados anteriormente?

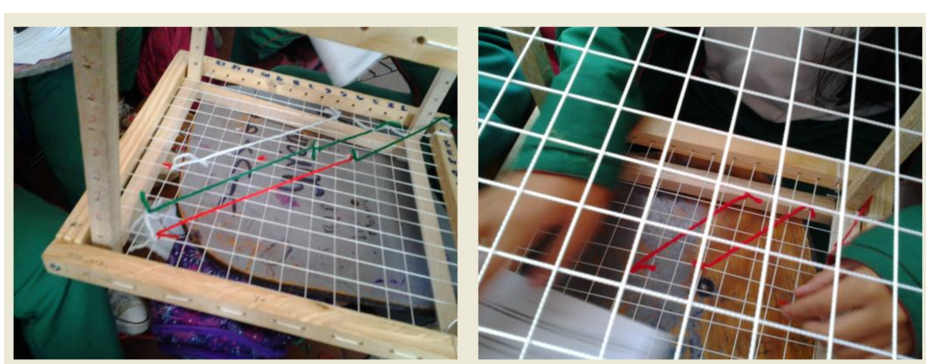
Que se puede ver la tabla del 3

c. Determine un método que permita encontrar todos los puntos por los cuales pasa el avión hasta que alcanza los 33.000 pies.

multiplicar por 3

Figura 32. Planteamiento propuesto en el Geoespacio por un estudiante.

La pregunta cuatro llevo a los estudiantes a pensar en la posición relativa de segmentos en el plano, de esta forma en los literales **a** y **b** los estudiantes construyeron criterios visuales sobre el paralelismo (Ver Figura 33). Se pudo evidenciar que los estudiantes no construyeron un criterio analítico que permitiera relacionar el desplazamiento de segmentos con su paralelismo.



[94] Opinión del estudiante YR.

Figura 33. Construcción de segmentos paralelos en el Geoespacio.

En la pregunta cinco algunos estudiantes construían segmentos secantes oblicuos sobre el Geoespacio, de esta forma en los ítems **a**, **b** y **c** el docente a través de preguntas heurísticas ofrece niveles de ayuda a los estudiantes, para orientar aquellas soluciones correctas, superado esto los estudiantes usaron criterios visuales para hallar segmentos perpendiculares (Ver Figura 34). Cabe aclarar que ningún grupo logro contestar correctamente el punto **d**, pues tuvieron dificultad en determinar un criterio analítico que relacionara el desplazamiento de un segmento con su perpendicular.

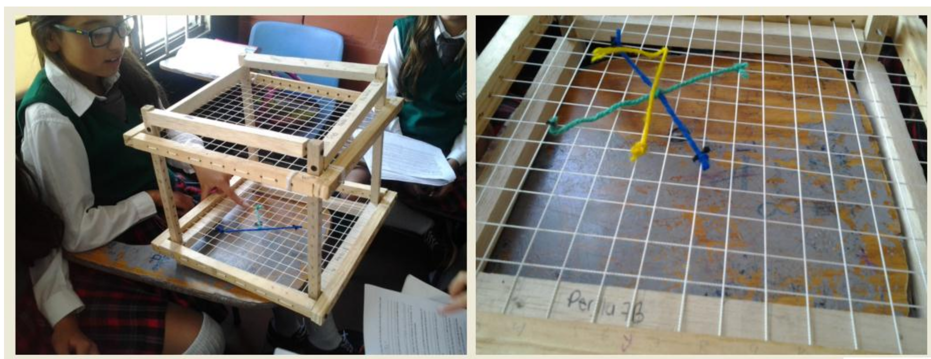


Figura 34. Segmentos perpendiculares en el Geoespacio.

La pregunta seis ofreció a los estudiantes un ejemplo aplicado, donde usaron los distintos desplazamientos y estrategias para dar solución. Algunos grupos extendieron los segmentos iniciales u otros siguieron el mismo desplazamiento inicial, para de esta forma contestar correctamente (Ver Figura 35), sin embargo otros grupos formaron desplazamientos lineales y no encontraron mayor diferencia.

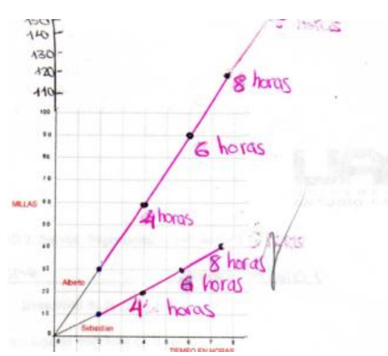


Figura 35. Solución de una estudiante mediante la multiplicidad de segmentos.

La pregunta siete presentó mayor dificultad en los estudiantes, pues estos en el momento de extender los segmentos dedujeron de forma visual que eran segmentos paralelos (Ver Figura 36), otros usaron criterios analíticos, pero no lograron encontrar el punto en común, ya que el desplazamiento tomado en el inicio no fue el mejor.

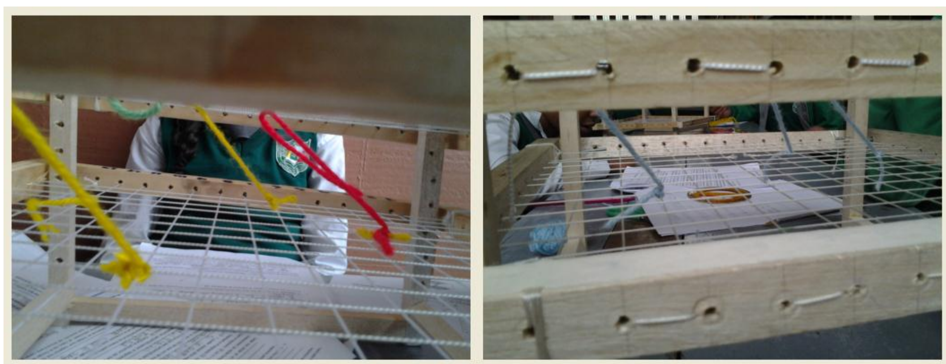


Figura 36. Representación de tres segmentos en el Geoespacio.

Finalizada la guía se hizo la socialización respectiva, de esta forma se llevaba a identificar la viabilidad de la solución propuesta por cada grupo, como lo comenta Polya (1965), de tal forma fue interesante encontrar frases como: “¡no estire el segmento!, ¡los segmentos parecían paralelos!”[95]

Motivación por el aprendizaje

El uso de material manipulativo y de carácter visible sigue llamando la atención, pues al hacer uso del láser y Geoespacio permite vincular al estudiante con el desarrollo de la actividad. Por otro lado el estudiante se siente atraído por trabajar con elementos fuera de la geometría plana que son llevados al contexto que él observa. Este proceso le permite recordar, analizar y deducir de forma más rápida criterios

[95] Opinión de los estudiantes CL y SA.

visuales sobre segmentos paralelos y perpendiculares. A su vez el punto 6 permitió que algunos grupos se interesaran por solucionarlo, pues se percataron de encontrar más de una solución al problema.

Logros

La aplicación llevo a muchos estudiantes a observar e identificar en la trayectoria del láser elementos geométricos que nunca se habían cuestionado, esto conllevo a una nueva forma de apreciar la aplicación de la geometría en el contexto. Se construyó un concepto de recta en el espacio distinto al habitual por medio del desplazamiento y materiales manipulables, se llegó la comprensión de puntos colineales, construcción sobre segmentos paralelos y perpendiculares en el espacio.

Del mismo modo se evidenció la utilización del pensamiento visual, pues tuvieron que formar imágenes en su mente las cuales permitieron encontrar una noción de recta, paralelismo, perpendicularidad y colinealidad de puntos. Durante el desarrollo de la guía se usó el Geoespacio para dar solución a los problemas, con ello esta herramienta manipulable permite precisar los siguientes factores dado por Carroll (1993) para desarrollar el pensamiento espacial:

- Visualización. Presente en todas las preguntas, pues los estudiantes tienen que identificar trayectorias del láser y segmentos para poder desarrollar criterios geométricos sobre paralelismo, perpendicularidad y colinealidad que permiten dar solución a los problemas.
- Velocidad de clausura: presente en las preguntas 1, 2, 4 y 5, ya que en ellas los estudiantes tenían que construir mediante el Geoespacio una noción de recta distinta a la habitual.
- Velocidad perceptiva: presente en las preguntas 2, 3, 6 y 7, pues en ellos se pueden descubrir patrones en el espacio o de forma bidimensional que permiten comprender las características de recta, segmentos paralelos, perpendiculares o puntos de intersección entre dos o más rectas.

Dificultades:

Aunque la actividad llamo la atención debido a su manipulación y uso de la visualización, se precisan las siguientes dificultades:

- Algunos estudiantes no comprendieron en un inicio los desplazamientos de puntos, lo cual retraso el desarrollo de la actividad y su aplicación se demoró más de lo previsto.
- Algunos estudiantes tienen muy mala comprensión lectora y por ello no comprendieron la definición de segmentos paralelos y perpendiculares.
- Algunos estudiantes presentaron poco interés al extender segmentos para hallar linealidad e intercepción de puntos.

5.3 Actividad 3. Planos y su generación

Se inicia la aplicación de la actividad con 33 estudiantes del grado 7B del colegio Giovanni Pascoli. Durante el desarrollo general de la actividad, los estudiantes fueron repartidos en 11 grupos a los cuales se les entrego una guía, Geoespacio, palillos y silicona. A continuación se precisan las ideas, herramientas y retos de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad empleando el Geoespacio en la resolución de cada problema propuesto.

La pregunta uno fue muy llamativa a los estudiantes, pues usaron su creatividad y observación en la construcción de cada mesa, de esta forma en el ítem **a** los estudiantes usaron su percepción y experimentación para determinar que la mesa de tres patas era más estable que la de cuatro (Ver Figura 37). En algunos casos los estudiantes no aluden a su forma sino al peso de esta mesa, pues genera más estabilidad, en el literal **b** los estudiantes lograron identificar elementos geométricos o del entorno que se relaciona con la situación anterior, de esta forma mencionaron mesas, pirámides y triángulos en algunos casos; finalmente en el literal **c** los estudiantes concluyen que tres puntos determinan un plano, aunque algunos no les quedo claro lo socializado.

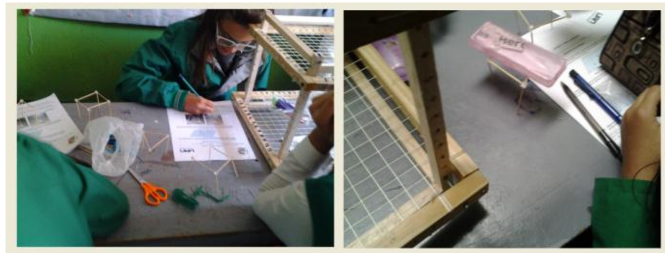


Figura 37. Representación de mesas de tres y cuatro patas por parte de los estudiantes.

En la pregunta dos inicialmente los estudiantes debían ubicar un punto y una recta en el Geoespacio donde se vio en algunos grupos que confundían el eje “x” con “y” en la ubicación, de esta forma el punto A=(5, 6, 10) lo invirtieron con B=(6,5,10). En el literal **a** los estudiantes ubicaron segmentos perpendiculares, algunos encontraron que eran 5, 8 y 16 segmentos perpendiculares, por otro lado otros usaron su visualización para escribir que eran infinitos o muchos los segmentos perpendiculares al segmento CD (Ver Figura 38).

En el item **b** describieron segmentos perpendiculares al segmento FG, sin embargo muchos no nombraron la relación entre tales segmentos y algunos encontraron que eran demasiada. En el literal **c** los estudiantes comentaban en sus grupos, que lo que se obtenía con un punto, una recta y varios segmentos perpendiculares a los iniciales se parece a triángulos, pentágonos, hexágonos y círculos, pues hicieron uso de su pensamiento visual para relacionar formas. Sin embargo algunos grupos concluyeron que se obtiene un plano, en el literal **d** algunos estudiantes tuvieron en cuenta solo el plano “xy”, de esta forma encontraron 2 planos, sin embargo hubieron otros que leyeron bien el enunciado y observaron el eje z, determinando 3 planos que se generan con los ejes “x”, “y”, “z” y el origen.

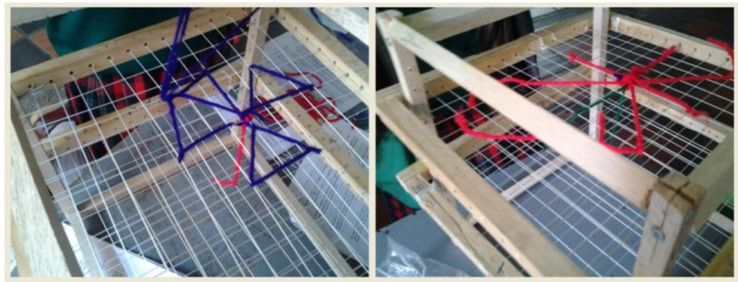


Figura 38. Representación de segmentos perpendiculares a un punto y un segmento fijo.

Respecto a la pregunta tres, en el literal **a** los estudiantes representaron de forma correcta las coordenadas de la casa para darle instrucciones al robot Hadrián, cabe aclarar que algunos estudiantes llegaron a un acuerdo en el grupo, con respecto a que los planos debían ser de 90° o en su caso formados por caras iguales, otros contestaron que las esquinan tenían casi las mismas coordenadas. En el ítem **b** los estudiantes presentaron falencias, ya que no comprendieron el enunciado, sin embargo algunos llegaron a un acuerdo grupal mencionando que en cada pared de la casa caben 5 ladrillos, pero aun así no escribieron las coordenadas, En la pregunta **c** los estudiantes que representaron las casas de tipo 1, tipo 2, tipo 3 y tipo 4 usaron algunas escalas, las cuales escribieron en la hoja junto con sus coordenadas en el Geoespacio (Ver figura 39).

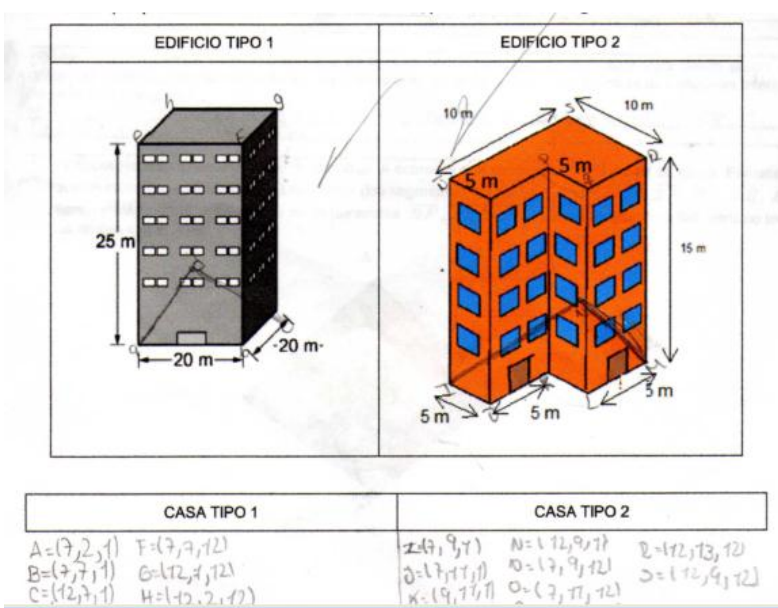


Figura 39. Coordenadas de las casas Tipo 1 y Tipo 2 por parte de una estudiante.

En la misma pregunta tres, los grupos identificaron en la casa tipo 2 como la esquina superior debe ser coplanar a las 4 esquinas inferiores, otros mencionaron en el desarrollo de la actividad que la esquina superior debe estar en el centro de la base de la casa (Ver Figura 40). En el literal **d** los estudiantes representaron el octaedro de forma correcta, por otro lado no encontraron más octaedros distintos al inicial, algunos mencionaron durante el desarrollo de la actividad que los punto A y E eran opuestos, que se encontraban en distintos planos. También otros plantearon que los vértices B, C, D y F deben conformar segmentos, estar a la misma distancia, además expresan que usaron el Geoespacio para observar y comentar entre ellos que el octaedro tenía 8 caras, encontrando en algunos casos que cada una de las caras de este octaedro forman triángulos (Ver Figura 40).

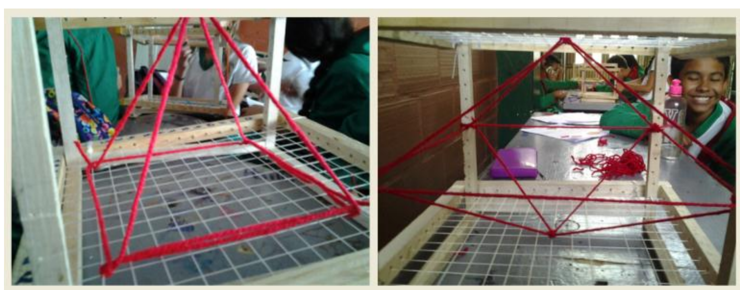


Figura 40. Representación de la casa tipo 2 y octaedro por algunos grupos de estudiantes.

En la pregunta cuatro no hubo problema para comprender el enunciado, de esta forma en el literal **a** los estudiantes usaron la gráfica bidimensional y el Geoespacio (Ver Figura 41) para encontrar las diagonales del cubo, encontrando que habían 12, 14, 18 diagonales, pero en su gran mayoría contestaron 16 diagonales que es la respuesta correcta. En el ítem **b** los estudiantes hicieron uso del Geoespacio y contaron 6 caras, tuvieron un error en decir que eran 2 o 4 planos que tenían diagonales de tipo a, algunos comentaron que había seis caras que contenían diagonales del tipo b y en su gran mayoría concluyeron que no había ninguna cara que no tuviera las diagonales de tipo a.

En el literal **c** los grupos tuvieron dudas en entender el enunciado, por ello se les oriento a través de preguntas heurísticas, a continuación se les solicita a cada grupo que representaran cuatro puntos no colineales y con ello observar si estos eran coplanares. En este proceso los estudiantes dedujeron la forma correcta de ubicar los puntos, de esta forma representaron el tetraedro (Ver Figura 41), el cual permitió observar e identificar 3 caras, 6 vértices y 4 planos que se forman, para de ahí poder contar en los grupos cuantos tetraedros se formaban, así mencionaron entre ellos que habían muchos tetraedros, ya que dependían de la ubicación de los puntos.

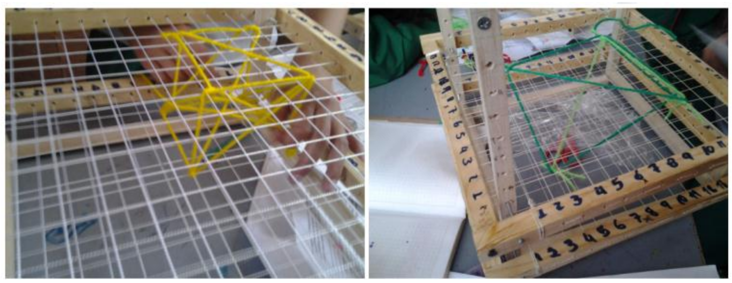


Figura 41. Construcción de las diagonales de un cubo y tetraedro.

Finalizada la guía, se dio inicio a la socialización donde los estudiantes esperaban expectativos las respuestas para verificar si en realidad lo que habían hecho era lo correcto, de esta forma algunos comentaban "¡la silla de cuatro no puede ser menos inestable!, ¡no pensé en el eje z!"[96]

Motivación por el aprendizaje:

Se observó gran interés por parte de los estudiantes en el momento de usar los palillos y la silicona para poder construir y experimentar con las sillas, a su vez la aplicación de la actividad fue en el patio del colegio lo cual permitió cambiar de ambiente, de esta forma se sintieron en libertad de trabajar, construir y responder a cada una de las preguntas. Se observó que la representación de segmentos, figuras y

[96] Opinión de los estudiantes.

conteo de planos les atraen, pues usan colores vivos para poder hacer su figura y de esta forma distinguirse de las demás.

Logros:

Se construyó a través de la experimentación y socialización de la guía los siguientes contenidos geométricos: tres puntos determinan un plano, generación de un plano, aplicación de la robótica en la geometría del espacio, caracterización del tetraedro, octaedro y cubo. Del mismo modo se aplicaron las cuatro fases de Polya y comunidades de práctica, pues los estudiantes contestaron de forma grupal y trataron al máximo de comprender los problemas para dar una solución original y al final poder socializar cada una de las preguntas.

Se evidencio el pensamiento visual, pues requerían de creatividad, manipulación de elementos materiales y con ello su interpretación geométrica, finalmente en esta actividad se hace uso del Geoespacio, el cual permite precisar los siguientes factores dado por Carroll (1993) para desarrollar el pensamiento espacial:

- Visualización: evidenciada en el punto 2, 3 y 4, pues los estudiantes debían realizar y desarrollar un criterio respecto a la generación del plano por medio de segmentos, del mismo modo debían construir en el Geoespacio elementos tridimensionales y encontrar diagonales donde tenían que identificar mentalmente patrones de carácter visual.
- Relaciones espaciales: reflejada en los puntos 2, 3 (c) y 4 (c), ya que los estudiantes debían usar la representación de los segmentos, que es la lana que se utiliza para rotar y obtener segmentos perpendiculares, también deben interpretar y representar la casa tipo 2 para poder deducir que la esquina superior debe ser coplanar con las esquinas inferiores y finalmente usar la rotación de elementos geométricos para construir el tetraedro por medio de 4 puntos y con ello poder obtener las caras.

- Velocidad de clausura: presente en las preguntas 2, 3 c, 4 c, pues los estudiantes debían construir en el Geoespacio segmentos perpendiculares que no tenían en el momento, del mismo modo tuvieron que identificar la relación que hay entre los vértices de una figura con los planos, algo no muy claro para ellos en este grado séptimo y finalmente en la construcción de poliedros donde debían reconocer ciertas características no visibles en el momento de construir.
- Velocidad perceptiva: plasmada en las preguntas 3 y 4 pues en estos puntos los estudiantes tienen que comparar las características de las figuras construidas, de esta forma el Geoespacio permitió hallar puntos coplanares, comparar segmentos y caras del octaedro y tetraedro. Finalmente comparar diagonales de un cubo presentes en su interior y en sus caras.

Dificultades

- Aunque los estudiantes construyen segmentos perpendiculares en el Geoespacio, no representan sus coordenadas de forma clara en las guías.
- Algunos estudiantes no leían de forma clara y completa cada una de las preguntas por lo tanto algunas de las respuestas están inconclusas.
- Los estudiantes presentaron dificultades en el momento de entender que un plano es generado por un punto, segmento que pasa por ese punto y rectas perpendiculares.

5.4 ACTIVIDAD 4. Trabajo con planos y poliedros

La aplicación de la actividad se da inicio con 33 estudiantes del grado 7B del colegio Giovanni Pascoli. Durante el desarrollo general de la actividad, los estudiantes fueron repartidos en 11 grupos a los cuales se les entrego una guía, el Geoespacio, palillos, silicona, pegante y tijeras.

A continuación se hace un análisis sobre el desarrollo de la actividad y en él se destaca las ideas, expectativas y retos de los estudiantes durante la resolución de problemas propuestos, de esta forma se menciona:

En la pregunta uno los estudiantes construyeron el cubo y hallaron las coordenadas (Ver Figura 42) , de esta forma en lo literales **a, b, c, d, e** y **f** los estudiantes observaron en la representación del Geoespacio que algunas caras del cubo son paralelas y perpendiculares, sin embargo solamente algunos pocos grupos supieron interpretar que 2 planos secantes originan rectas y tres originan un vértice (Ver anexo 5), finalmente todos los grupos supieron relacionar los elementos geométricos con su contexto tales como casas, buses, mesas y calles.

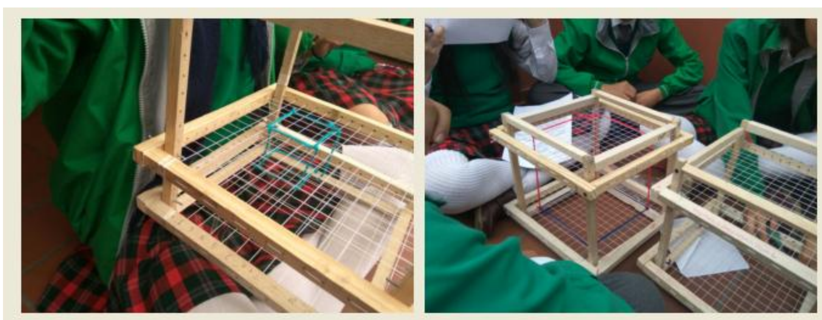


Figura 42. Representación del cubo.

En la pregunta dos los estudiantes tuvieron dificultad en poder caracterizar el vértice de un poliedro, en el literal **a** los grupos lograron reconocer a medida que observaban, como una cara corresponde a un plano y una arista es formada por 2 planos secantes (Ver Figura 43). En el literal **b** representaron la figura del colegio en el Geoespacio (Ver Figura 44), las caras y vértices pudieron contarlas de forma correcta, sin embargo presentaron dificultades en contar las aristas pues muchos grupos solo representaron las bases superiores e inferiores de la figura en el Geoespacio y olvidaron unirlas .

Figura 43. Construcción de la planta del colegio.

En el punto tres literal **a** los grupos pidieron explicación pues no les quedo claro la información suministrada en la guía, de esta forma el docente los oriento y con ello pudieron construir un paralelepípedo rectangular oblicuo (Ver Figura 44), la gran mayoría presentaron dificultad en representar el romboedro. En el literal **b** algunos estudiantes dedujeron que un polígono convexo tiene sus diagonales adentro y de esta forma pudieron clasificar el paralelepipedo (Ver anexo 5); en el ítem **c** los grupos pudieron representar prismas pentagonales oblicuos (Ver Figura 45), sin embargo solo un grupo pudo representar el prisma recto no convexo, en base a lo anterior, pudieron relacionar los prismas con juguetes, edificios y estadios. Finalmente algunos grupos pudieron determinar una relación entre paralelepípedo y prisma pues dedujeron que este tenía las mismas bases paralelas (Ver Anexo 5).

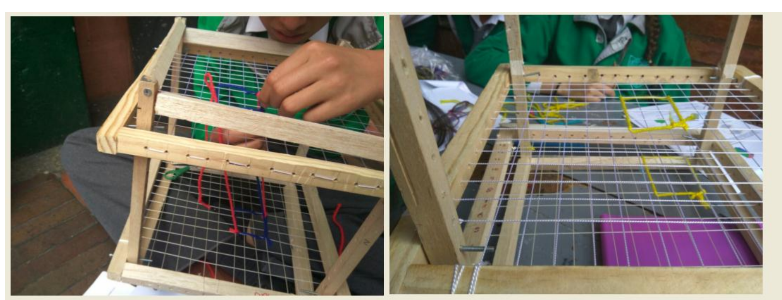


Figura 44. Construcción de paralelepípedos oblicuos.

Continuando con el punto 3 literales **g, h, i** se observó que los estudiantes pudieron comprender las características de las pirámides, de esta forma realizaron su construcción (Ver Figura 45), algunos grupos comentaron que las pirámides construidas por todos los grupos eran 3, 11 y 154. En el proceso de resolución se pudo constatar que ningún grupo logro deducir que eran infinitas, del mismo modo algunos grupos lograron encontrar la pirámide con menos volumen (Ver Figura 45), cabe aclarar que no pudieron identificar y analizar una pirámide triangular cuya base es un triángulo isósceles.

Figura 45. Construcción de pirámides.

Del mismo modo en el punto tres literales **j** y **k** pudieron construir entre los grupos el octaedro y tetraedro (Ver Figura 46), encontraron de forma correcta sus caras, aristas y vértices. Sin embargo aunque los grupos usaron los palillos y la silicona para construir el dodecaedro e icosaedro truncado no les quedo muy bien (Ver Figura 46), debido a esto no encontraron de forma correcta sus caras, vértices y aristas.

Figura 46. Construcción del tetraedro, octaedro e icosaedro truncado.

El punto 4 constituyó un verdadero reto para los estudiantes, algunos contestaron que el número que correspondía en la variable “x” era el 8, pero no fue correcto, de esta forma ningún grupo dio una solución lógica al ejercicio. Finalmente en la pregunta cinco hubieron estudiantes que llegaron a la solución correcta del enunciado, pues su estrategia fue contar la cantidad de cubos que se sacaban por cada cara sin volver a contar los cubos centrales, de esta forma usaron su pensamiento visual y espacial (Ver Figura 47).

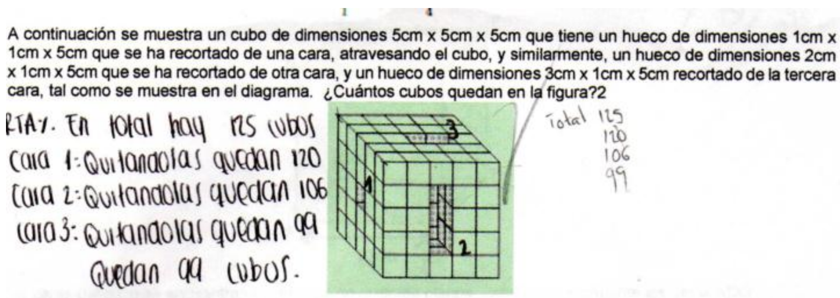


Figura 47. Estrategia de conteo para dar solución al problema de los cubos.

Finalizada la actividad, se llevó a cabo la socialización con los estudiantes para encontrar aquellas soluciones o dificultades por parte de los grupos, de esta forma los estudiantes comprendieron las distintas soluciones que pueden haber en un mismo enunciado desde distintos puntos de vista, así algunos comentaron *"¡no mire las diagonales! ¡Hay demasiadas pirámides!"*[97], entre otras.

Motivación por el aprendizaje:

Fue de gran interés para los estudiantes la construcción de los poliedros por medio de papel y palillos, ya que esto contribuyó a su imaginación y creatividad, del mismo modo la caracterización que encontraron los estudiantes de los prismas, paralelepípedos y pirámides les llamo la atención, pues incentivaron la creatividad e imaginación en cada una de las construcciones realizadas, por ello relacionaron estos poliedros con su contexto.

Logros:

[97] Opinión de los estudiantes.

Por medio de la aplicación y socialización de esta actividad se logró que los estudiantes comprendieran y construyeran los siguientes contenidos geométricos: Caracterización de prismas y pirámide por medio del análisis sobre la posición relativa de dos planos y desarrollo plano de algunos solidos geométricos, se evidencio la importancia de las Comunidades de Práctica, pues los estudiantes discutían o pedían explicación a su compañeros en el momento de no comprender algunos enunciados.

Se evidencio el pensamiento visual, ya que la construcción de poliedros y pirámides oblicuos despertó su interés y análisis mental en el momento de ubicar los puntos en el espacio, pues requerían de creatividad, manipulación de elementos materiales y con ello su interpretación geométrica, finalmente en esta actividad se hace uso del Geoespacio, el cual permite precisar los siguientes factores dado por Carroll (1993) para desarrollar el pensamiento espacial:

- Visualización: evidenciada en las preguntas 3 y 5, en ellas los estudiantes tenían que observar e interpretar información relacionada con poliedros para manipular mentalmente, de esta forma poderla representar en el Geoespacio, además en los materiales en el momento de construir poliedros.
- Relaciones espaciales: plasmada en las preguntas 2 y 3, pues los estudiantes tenían que identificar vértices, caras y aristas de los distintos poliedros, además de las características que distinguían a cada solido geométrico.
- Velocidad de clausura: presente en la pregunta uno, ya que debían dar otra interpretación a los vértices, caras y aristas del cubo, el cual fue construido en el Geoespacio, de este modo tal análisis consiste en poder definir cara como una porción del plano, arista como la generación de dos planos secantes y vértice como la intersección de tres o más planos.
- Flexibilidad de clausura: reflejada en la pregunta 2, 3 y 4, pues debían identificar patrones visuales en cada poliedro y poderlos diferenciar de acuerdo a sus características que observa.

Dificultades

- La comprensión lectora, ya que no comprendían de forma clara las definiciones de poliedro, prisma y pirámide, debido a que realizaban la lectura de forma muy rápida.
- La construcción de los poliedros truncados con palillos demoro más de lo establecido debido a la inestabilidad de los materiales en el momento de encajar las piezas.

5.5 Actividad 5. Teorema de Pitágoras

La aplicación de la actividad se da inicio con 10 estudiantes del grado 7B del colegio Giovanni Pascoli. Durante el desarrollo general de la actividad, los estudiantes fueron repartidos en 3 grupos a los cuales se les entrego una guía, cuerda egipcia, Geoplano y rompecabezas.

A continuación se hace un análisis detallado sobre el desarrollo de la actividad, donde se describe las ideas, problemáticas y soluciones realizadas por cada uno de los estudiantes en el momento de dar solución a cada uno de los problemas, de esta forma se destacan:

En la pregunta uno los estudiantes realizaron la lectura sobre la historia del Teorema de Pitágoras, de esta forma identifican los elementos básicos de un triángulo rectángulo, en el literal **a** emplean la cuerda egipcia para encontrar segmentos perpendiculares (Ver Figura 48), de esta forma determinan la longitud de los catetos mencionando que es de 4 y 6, otros de 3 y 4 con hipotenusa de cinco (Ver Figura 48).

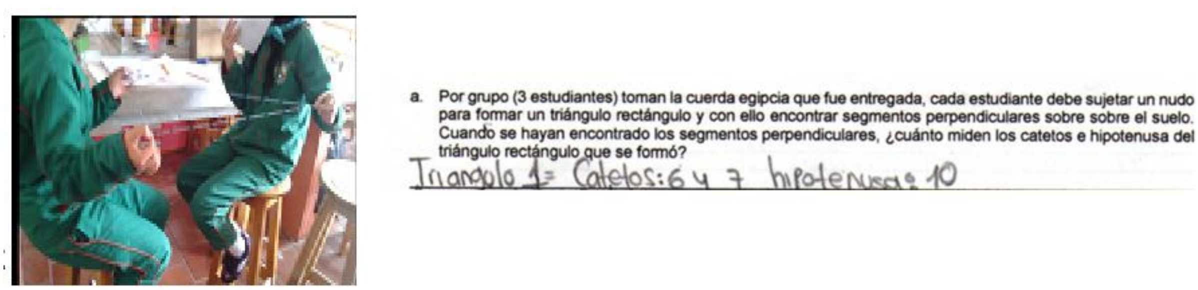
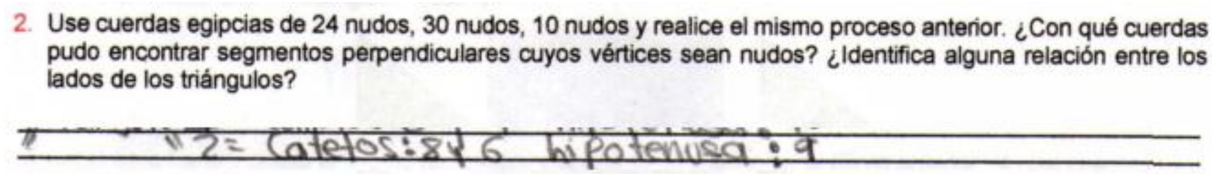


Figura 48. Medidas de una estudiante con la cuerda egipcia.

En la pregunta dos los estudiantes usaron criterios visuales para encontrar triángulos rectángulos, sin embargo los grupos se equivocaron, pues creyeron que la formación de algunos triángulos con las distintas cuerdas egipcias siempre forma triángulos rectángulos (Ver Figura 49).


2. Use cuerdas egipcias de 24 nudos, 30 nudos, 10 nudos y realice el mismo proceso anterior. ¿Con qué cuerdas pudo encontrar segmentos perpendiculares cuyos vértices sean nudos? ¿Identifica alguna relación entre los lados de los triángulos?

#2= Catetos:8y6 hipotenusa:9

Figura 49. Medidas escritas por una estudiante con la cuerda egipcia.

En la pregunta tres, en el literal **a** los estudiantes ubicaron de forma correcta las medidas de los lados en cada una de las figuras (Ver Figura 50), en el literal **b** el docente tuvo que orientar algunos grupos pues no se acordaban sobre como hallar el área de un cuadrado, de esta forma a través de preguntas heurísticas se les pidió a los estudiantes que escribieran las áreas obtenidas en cada figura, con ello un grupo comento visualmente, no se puede encontrar que las ares de las figuras son iguales, pero con las medidas es más sencillo, de esta forma concluyeron que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual a la suma del cuadrado grande (Ver Figura 50).

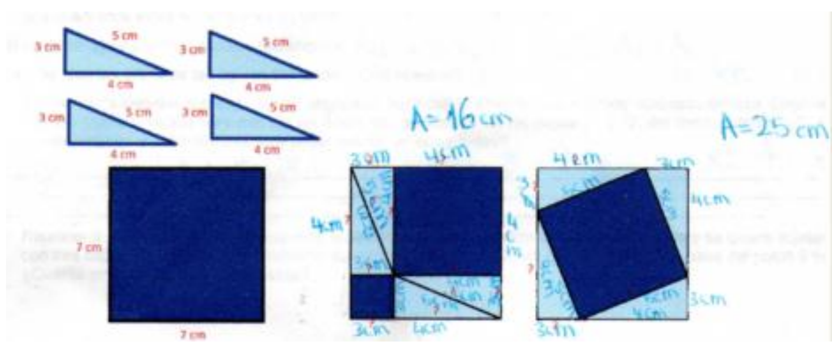


Figura 50. Áreas encontradas en cada rompecabezas.

En la pregunta cuatro se le entrega un rompecabezas a los estudiantes para que realicen el punto anterior de forma concreta (Ver Figura 51), en el literal **a** los estudiantes escriben enfrente de cada uno de los pasos expresiones como suma de catetos cuadrado e hipotenusa cuadrada y finalmente concluyen que estas dos áreas son iguales . En el ítem **b** el docente orienta a los grupos diciéndoles que tomen cualquier letra que podrá representar la medida de los lados del triángulo rectángulo, de esta forma se plantean distintas representaciones dentro de los grupos, pero comprender el proceso de la expresión que relaciona las áreas de los pasos uno y dos presentes en el literal a (Ver Figura 51).

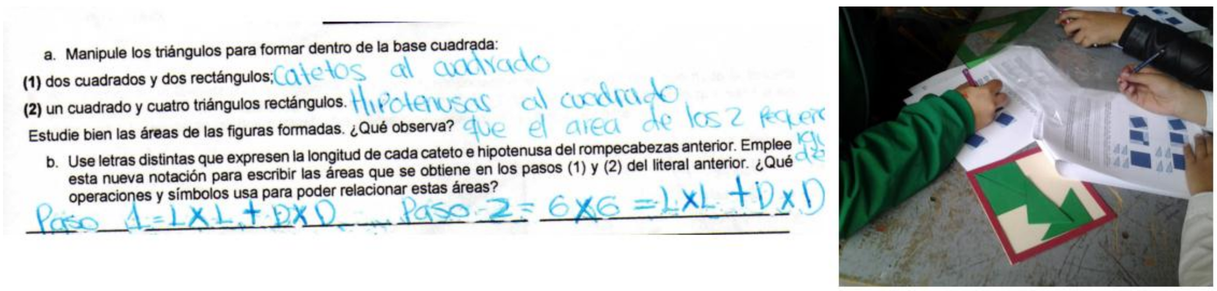


Figura 51. Manipulación del rompecabezas.

En la pregunta cinco los estudiantes construyen un modelo a escala del problema en el Geoespacio (Ver Figura 52), de esta forma algunos grupos encuentran mediante el pensamiento visual triángulos rectángulos en la figura, de esta forma aplican el teorema de Pitágoras en su solución y encuentran que la longitud del cable es de 10 m (Ver Figura 52).

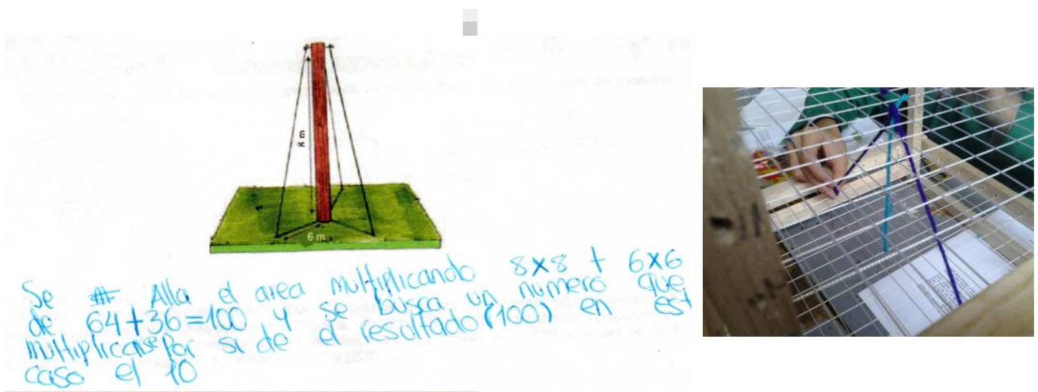


Figura 52. Representación y solución de un grupo al problema propuesto.

La pregunta seis constituyo un problema, pues representaron la figura en el Geoespacio (Ver Figura 54) y analizaron el triángulo rectángulo presente, sin embargo el docente tuvo que orientar a los estudiantes mediante preguntas heurísticas para encontrar el valor de los catetos, por último los grupos comprendieron y hallaron la solución (Ver Figura 53), algunos grupos solo hallaron la hipotenusa pero se olvidaron de hallar el perímetro total de la figura.

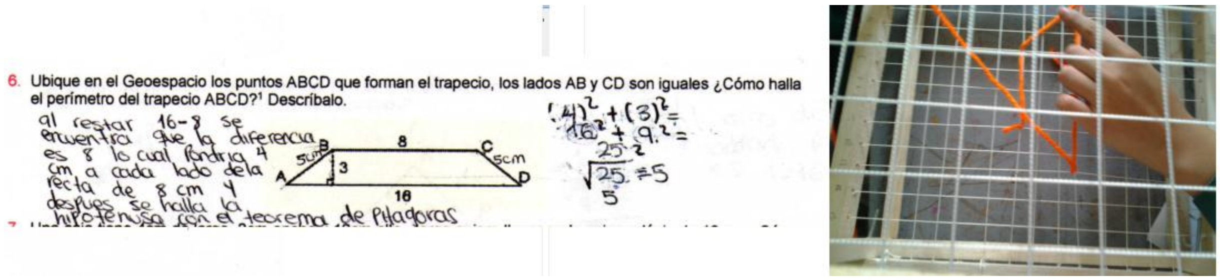


Figura 53. Representación del trapecio en el Geoespacio y solución al punto 6.

En la pregunta siete se construyó un modelo en el Geoespacio de la caja (Ver Figura 54), de esta forma algunos grupos construyeron un lápiz de papel para determinar si este cabía dentro de la caja, luego propusieron la solución, de esta forma observaron un triángulo rectángulo (Ver Figura 54) y usaron dos veces el teorema de Pitágoras en la solución del problema (Ver Anexo 6).

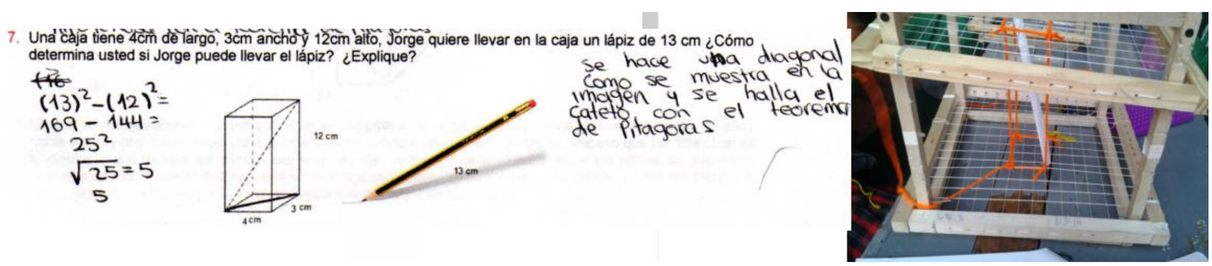


Figura 54. Representación de la caja en el Geoespacio y una solución.

En la pregunta ocho hubo un gran avance del pensamiento visual, ya que se propusieron tres vías de plasmar el problema en el Geoespacio, de esta forma un grupo uso palillos y lana (Ver Figura 55) y otro grupo propuso ubicar la planta inferior en la punta superior del poste pequeño facilitando su forma de visualizar el triángulo rectángulo (Ver Figura 55), con ello algunos grupos con la orientación del profesor y otros sin ella (como el grupo mencionado anteriormente) que la distancia entre los extremos de los dos postes es de 10 m.

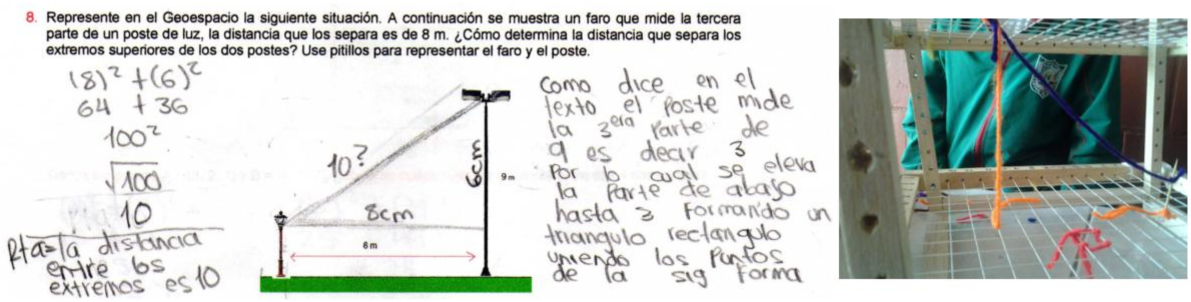


Figura 55**.** Representación del problema de los postes y su solución.

En la pregunta nueve los grupos identificaron los triángulos rectángulos, de esta forma muchos construyeron el mismo proceso empleado en las preguntas tres y cuatro (Ver Figura 56), sin embargo hubo otros grupos que no pudieron dar solución.

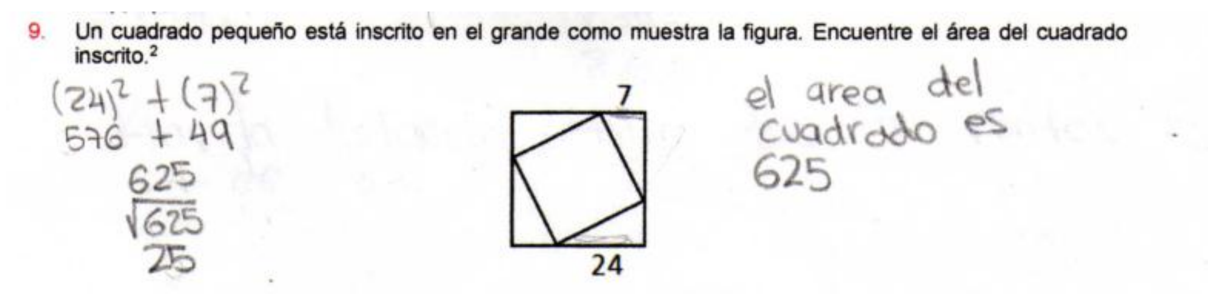


Figura 56. Solución dada por una estudiante al problema propuesto.

En la pregunta diez algunos grupos supieron identificar el triángulo rectángulo y encontraron el valor de la hipotenusa (Ver Figura 57), algunos grupos no dieron solución a lo planteado.

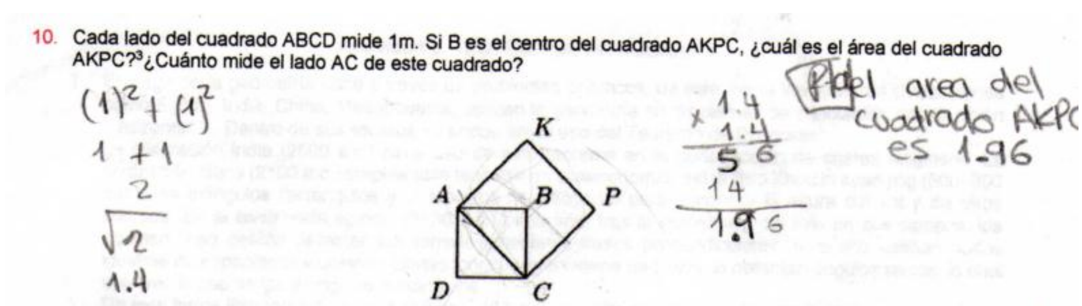


Figura 57. Solución hecha por una estudiante.

La pregunta once constituyo un verdadero reto, aunque los grupos intentaron construir la figura, no pudieron especificar las distancias que habían entre los dos pitillos. Finalmente la pregunta doce permitió que los estudiantes ubicaran y conectaran puntos, de esta forma muchos completaron el triángulo rectángulo (Ver Figura 58), sin embargo en esta parte no comprendieron como hacerlo y de esta forma el profesor los oriento para que con ello comprendieran que se debía aplicar dos veces el teorema de Pitágoras, cabe aclarar que hubo un solo grupo el cual pudo realizar su solución de forma independiente (Ver Figura 58).

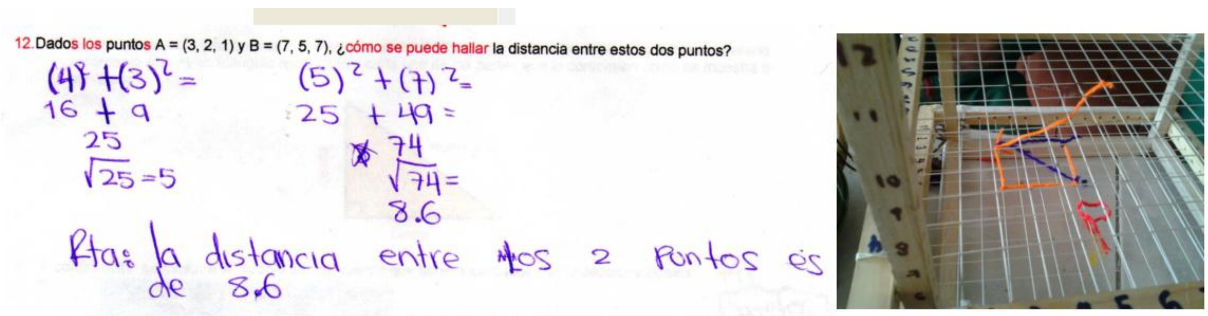


Figura 58. Representación de la distancia entre dos puntos y su solución.

Finalizada la guía, se dio inicio a la socialización, de esta forma algunos estudiantes observaron las distintas formas de dar solución a los problemas, algunas de sus expresiones fueron: "*¡la diagonal es la hipotenusa!, ¡La tercera parte es dividir en tres!*"[98].

Motivación por el aprendizaje:

A los estudiantes les llamo la atención la construcción de triángulos rectángulos mediante la cuerda egipcia, pues tuvieron que hacer uso de la experimentación y observación para encontrar triángulos rectángulos, del mismo modo al manejar los rompecabezas, se observó una gran motivación por realizar las figuras y poder determinar lo que ocurría con las áreas en el momento de compararlas.

[98] Observaciones hechas por el estudiante Diego Flores y Gabriela Melo.

Les llamo la atención la representación de problemas basados en el teorema de Pitagoras en el Geoespacio, el cual les ayudo a conjeturar y deducir ciertas ideas para dar respuesta a cada una de las problemáticas.

Logros:

Con la aplicación y socialización de esta actividad, se logró que los estudiantes comprendieran y construyeran los siguientes contenidos geométricos: Aplicación del teorema de Pitágoras de forma visual, deducción del teorema de Pitágoras mediante la comparación de áreas y resolución de problemas a través de la aplicación del teorema de Pitágoras. Del mismo modo se vio la aplicabilidad de las comunidades de práctica de Wenger puesto que los estudiantes en sus grupos trataron de analizar de distintas formas las posiciones de los triángulos rectángulos en el espacio.

Se evidencio el pensamiento visual, pues se tuvo que formar imágenes mentales que pudieran completar o encontrar triángulos rectángulos donde no eran reconocibles, cabe aclarar que la obtención de la distancia de dos puntos en el espacio es algo notable pues es muy complejo poder visualizar este proceso para estudiantes de grado séptimo de esta forma el Geoespacio constituyo una herramienta indispensable en este desarrollo, por ello se permite precisar los siguientes factores dado por Carroll (1993) para desarrollar el pensamiento espacial:

- Visualización: reflejada en las preguntas 3 y 4, pues se emplea un análisis bidimensional y encaje de figuras, de esta forma se emplean patrones visuales en 2D.
- Relaciones espaciales: presente en las preguntas 4, 7, 10 y 12, ya que en ella se deben rotar figuras de forma bidimensional o tridimensional, lo cual permite encontrar triángulos rectángulos y con ellos poder solucionar el problema.
- Velocidad de clausura: Evidenciada en la pregunta 8, 11 y 12, pues es necesario hallar triángulos rectángulos que no son evidentes y que necesitan ser analizados con detenimiento.

- Flexibilidad de clausura: evidenciada en la pregunta 1, 5, 6 y 9 ya que se deben mantener una percepción de los triángulos rectángulos y de este modo poder dar solución a los problemas. **Dificultades**
- La cuerda egipcia no tenía los nudos de forma fija lo cual ocasionaba que estos se desplazarán a otros lugares, por eso se optó por marcar puntos equidistantes en la lana.
- La comprensión lectora, pues algunos enunciados quedaron desarrollados de forma incompleta.

5.6 Resultados de la encuesta de satisfacción

Esta encuesta de satisfacción (Ver Anexos) es aplicada a los estudiantes para conocer su opinión respecto a la presente investigación, así se destacan 5 preguntas las cuales son cerradas y se evalúan de uno a cinco, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor. Estas preguntas se dirigen a determinar si la aplicación del Geoespacio incentiva el estudio de la geometría; a continuación se muestran los resultados obtenidos en tal encuesta y a manera de ejemplo se puede consultar en anexo 7.

Respecto a la primera pregunta el 60% de los estudiantes consideran que el Geoespacio les permite adquirir contenidos geométricos relacionados con la geometría del espacio, pues usaron materiales manipulables y visuales que conllevan a la adquisición del conocimiento.

En base a la pregunta dos el 60% consideran que estas actividades se deben realizar pues incentivan el estudio de la geometría ya que proporciona un ambiente distinto al habitual donde se comparte las opiniones para solucionar un problema.

En la pregunta tres, el 48% de los estudiantes consideran que si se realiza frecuentemente estas actividades, su desempeño en tal área no mejore, esto puede ser ya que los contenidos geométricos que se abordaron fueron distintos a los habituales que se acostumbran a tratar en la escuela secundaria.

Respecto a la pregunta cuatro el 74% considera que se vivió un ambiente agradable donde ellos trabajaron de forma grupal y esto les permitió adquirir de forma más fácil y clara la adquisición de contenidos geométricos.

Por ultimo en la pregunta cinco el 70% de los estudiantes lograron comprender que la geometría se aplica y se evidencia en el contexto, tales consideraciones son debido a la aplicación del Geoespacio, donde los estudiantes hicieron uso de puntos reticulares y con ellos plasmaron distintos objetos y elementos geométricos del entorno.

Conclusiones del capítulo 5

Respecto a lo anterior, se aprecia como los estudiantes se incentivan y motivan cuando hacen uso de material manipulable, de esta forma en el momento de abordar una solución a un problema se hace mediante la creatividad e imaginación que en últimas son métodos heurísticos que permiten reflejar el nivel de razonamiento matemático de cada estudiante.

Por otro lado las actividades y el Geoespacio permitieron generar ambientes distintos de aprendizaje, de tal forma que los estudiantes fueron llevados a poner en práctica sus relaciones sociales, su pensamiento visual y espacial, pues en cada nueva actividad los estudiantes debían crear, imaginar y plasmar las distintas soluciones a los problemas planteados, de esta forma se lograron avances significativos en el estudiante que integraron el contenido geométrico con su contexto.

Finalmente el desarrollo del pensamiento espacial y la adquisición de los contenidos geométricos se pueden evidenciar con la aplicación del Geoespacio en cada una de las actividades, ya que se refleja en el transcurso de las guías las distintas vías de solución que permite plasmar y aportar cada estudiante, propiciando estilos de creatividad y originalidad.

CONCLUSIONES

El desarrollo de la presente investigación sustentada en la implementación de actividades basadas en problemas retadores que involucran el uso del Geoespacio para incentivar el estudio de contenidos geométricos del espacio tales como: coordenadas rectangulares, rectas, segmentos, planos, poliedros y teorema de Pitágoras en los estudiantes del colegio Giovanni Pascoli, conllevo a dar respuesta a cada una de las tareas de investigación propuesta. Teniendo en cuenta el análisis de los resultados obtenidos en cada una de las actividades, se destacan algunos elementos que resultan pertinentes en el logro de los objetivos propuestos del presente trabajo, los cuales son:

- En correspondencia a las investigaciones hechas en el estado del arte que abordan la geometría del espacio en la educación secundaria, se precisa que es necesario incluir en los contenidos geométricos del espacio, actividades relacionadas con el uso de materiales manipulables, pues despiertan la curiosidad e incentivan el estudio hacia los contenidos geométricos, del mismo modo se debe incluir la resolución de problemas y problemas retadores, los cuales permiten que el estudiante explote su imaginación y creatividad, convirtiéndose en métodos heurísticos que conllevan al uso del pensamiento visual y espacial para dar solución a un problema, lo cual permite un aprendizaje más robusto sobre los contenidos de la geometría del espacio.
- El trabajo con la resolución problemas retadores de Falk (1980) y la implementación de la estrategia de Polya (1965) para su resolución, constituyen un elemento mediador que en interacción con el contenido geométrico del espacio conlleva a una construcción robusta del conocimiento geométrico para desarrollar el pensamiento espacial en los estudiantes.
- El pensamiento visual de Castro Martínez & Castro (1997) y Guiaquinto (2007), las comunidades de práctica de Wenger (1998) y el uso de elementos manipulables, propicia la representación y

tránsito de cuerpos geométricos de 2D a 3D o viceversa, permitiendo desarrollar y fortalecer el pensamiento espacial.

- El Geoespacio constituye una herramienta didáctica que propicia la ubicación de puntos en el espacio, el desarrollo de la manipulación geométrica, afianzar y construir contenidos geométricos del espacio, conlleva al uso del pensamiento visual que permite al tránsito de 3D a 2D.
- La implementación de la estrategia en el aula permite constatar las siguientes regularidades:
  - ✓ Construcción y apropiación por parte de los estudiantes sobre el proceso de Identificación y representación de entes geométricos y su relación con sólidos u objetos aplicados al contexto.
  - ✓ Se afianza las nociones de los entes geométricos y se construye una nueva forma de abordar los poliedros a través de la relación entre tales entes desde un sentido teórico y práctico.
  - ✓ El uso de materiales manipulables en el aula de clase, transforma el ambiente de aprendizaje propiciando una mayor motivación e interés por parte de los estudiantes para la resolución de problemas basados en la geometría del espacio.
  - ✓ La creatividad e ingenio que pueden plasmar los estudiantes en el momento de dar resolución a un problema muestra las diferentes formas de pensar autónomamente, lo cual evidencia un desarrollo del pensamiento espacial.
  - ✓ Se fortalece la cooperación, trabajo en equipo y participación por parte de los estudiantes, evidenciando buenos resultados como parte de su compromiso.
  - ✓ Implementación y análisis del teorema de Pitágoras en un contexto distinto al bidimensional, conllevando a construir y analizar la importancia de los triángulos rectángulos en la solución de situaciones de la vida diaria.
  - ✓ El Geoespacio es una herramienta indispensable que permite pensar de forma reticular, conllevando a relacionar la geometría del espacio con elementos de la geometría analítica.

- La estrategia didáctica contiene un sistema de actividades que propicia la construcción robusta del contenido geométrico del espacio, para contribuir al desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, que sean capaces de solucionar problemáticas de la vida.

RECOMENDACIONES

La implementación de la estrategia didáctica que se sustenta en problemas retadores para abordar el contenido de la geometría del espacio en la Educación Básica, requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Extender y aplicar el Geoespacio en niveles superiores, pues esta herramienta permite construir y plasmar contenidos geométricos relacionados con la enseñanza aprendizaje de la geometría analítica.
- Integrar y aplicar nuevas herramientas manipulables en la enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio, pues esto motiva al estudiante y permite desarrollar el pensamiento visual y espacial en la Matemática.
- Construir un Geoespacio en materiales más resistentes que permitan realizar distintas actividades de forma continua.
- Implementar constantemente las comunidades de práctica y resolución de problemas en el momento de abordar la geometría del espacio, pues conllevan a construir métodos heurísticos que permiten evidenciar el desarrollo del pensamiento visual y espacial.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R., Delgado, G. & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática. Recuperable el 15 de noviembre de 2013 en la URL: http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf.

Acevedo, J. (2009). *Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videojuego, como práctica socialmente compartida.* Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/741/

Acosta, J. (2003). Elementos de geometría. Universidad de Antioquia. Recuperado el 10 de mayo del 2016 de la URL: http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/pdf/elementos%20de%20geometria1.pdf

Alarcón. S. (2012). Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pacman. Recuperado el 1 de julio de 2015 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/7739/1/sergioandresmontesalarcon.2012.pdf

Alsina .C. Fortuny.J. & Perez R. (1997). *¿Por qué geometría?* Propuesta didácticas para la ESO. Síntesis de Madrid.

Alsina, C. & Nelsen, R (2006): Math Made Visual. Creating images for understanding mathematics. MAA, Washington.

Arici, S. &. Tutak, A. (2013).*Using origami to enchance geometric reasoning and achiviement.* Cerme (2013). pp 585-592. Recuperado el 14 de agosto del 2015 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Arnheim, R. (1969), *El pensamiento visual*, Buenos Aires, Editorial Universitaria. p .13.

Arrieta, M. (2006). Capacidad espacial y educación matemática. Recuperado el 8 de abril de 2015 de la URL: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518105

Bako, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial giometry. Hungria. Recuperado el 22 de agosto del 20016 de la URL: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_Bako_cerme3.pdf

Ballester, P. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I y II. La Habana: Pueblo y Educación.

Baquerizo et al. (2006). Fundamentos de matemáticas para bachillerato. Instituto de ciencias Matemáticas. Segunda edición. Recuperado el 4 de noviembre del 2016 de la URL: http://www.matesitalica.es/pasatiempos_archivos/LIBROS%20Y%20CUENTOS/Fundamentos%20de%20Matem%C3%A1ticas%20para%20bachillerato.pdf

Barrantes, M. & Blanco, L. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los maestros sobre la geometría escolar*. Enseñanza de las ciencias, 22(2), 241-250. Recuperado el 2 de agosto del 2015 de: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21975/21809

Barrantes, M. & Fernández, I. (2012). *Tendencias actuales de la enseñanza aprendizaje de la geometría en educación secundaria*. Recuperado el 4 de julio de 2015 de: http://www.documat.unirioja.es/descarga/articulo/3999141.pdf

Battista, M, Wheatley & Talsma, G. (1982). *The importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in preservide Elementary teachers*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 13.

Bishop, A. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, vol 11.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in Mathematics education. Focus on learning problems in mathematics, vol. 11.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidos Ibérica.

Blanco, F. Godino, J. & Pegito, A. (2012).*Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiotico.* Boletín de educación matemática. Vol 26.pp 39 – 63.Recuperado el 20 de agosto del 2015 de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/TFernandez_Bolema%2042A_visualizacion.pdf

Brenes, V & Murillo, M. (1994). Algunos objetos de estudio del constructivismo. *Una-URC-Conicit, Costa Rica*.

Bullido, F. (1994). El empleo de materiales en la enseñanza de la geometría. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado.* N° 21, págs. 99-104 .Recuperado el 20 julio de 2015 de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117840

Campistrous, L. & C. Rizo. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. Proyecto TEDI. Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Canguro matemático. (2007). Tomado y adaptado del nivel 3 de E.S.O. Recuperado el 7 de noviembre del 2016 de la URL: http://www.canguromat.org.es/canguro2007/ikg2007.html

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Carroll, J. (1993). *Human cognitive abilities*. New York, USA, Cambridge University Press.

CERME. (2013). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Recuperado el 16 de agosto del 2015 de: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Charnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas, Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Pág. 8. Barcelona: Paidos. Recuperado el 13 de octubre del 2015 de la URL: http://instituto20.com.ar/archivos/Didactica%20de%20matematicas%20%20Aportes%20y%20reflexion

Chávez, S. & Floriano, R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial*. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros .Recuperado el 2 de julio del 2015 de la URL: http://www.elitv.org/documentos/tesis/Tesis%20de%20Maestria%20Cesar%20y%20Ramon.pdf

Chino, k. morozumi, T. Arai, H. Ogihara, F. Oguchi, Y & Miyazaki, M. (2006). The efects of “spatial geometry curriculum with 3d” in lower secondary school mathematics.japon. Recuperado el 21 de agosto del 2016 de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED499417.pdf

CIAEM. (2015). *Utilidad de los recursos didácticos, para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos*, desde la situación “recorrido por el mundo geométrico”. Recuperado el 2 de junio 2015 de la URL: http://xiv.ciaemiacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/798/338

Clements, D. &. Battista (1992). Geometry and Spatial Reasoning, en DA. Grouwz (ed), Handbook of research on mathematcs. Teachig and learning, Nueva York, Macmillan.

Clements, D. (2003). Teaching and Learning Geometry. A Reseach vompanion to principles and standards for school mathematics, Reston Va, NCTM.

Clements,D. & Samara,J. (2009).Learning and Teaching Early Math. Th eLearning Trajectories Approach. New York. Taylor & Francis.

Critchlow, K. (1979). Time Stands Still. Gordon Fraser. Londres.

De Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. EDIPUBLI S.A., Argentina.

Dewey, J. (1933). *A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. DC Heath.

Díaz, M. y Dircio, L. (2010). El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME 2010). Recuperado el 7 de enero de 2016 en la URL: http://funes.uniandes.edu.co/4556/1/D%C3%ADazElgradoALME2010.pdf, p. 338.

Díaz, T. (2011). Fundamentos de geometría euclidiana. Universidad del cauca. Departamento de matemáticas. Recuperado el 18 de junio del 2016 de la URL: http://yrosero.jimdo.com/contenidos-de-geometria/

Domenicantonio, R., Costa, V & Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. pp. 27, 75-87.

Duarte, A (2013). *El geo plano: una alternativa para mejorarla enseñanza de la geometría*. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática. Recuperado el 24 de julio del 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/4082/1/CastilloElgeoplanoALME2013.pdf

Duhalde, M. (1999). *La investigación en la escuela. Un desafío para la formación docente.* Buenos Aires. Ediciones Novedades Educativas.

ECME (2013). 14° encuentro colombiano de matemática educativa. Revista científica. Recuperado el 2 de agosto del 2016 de la URL: http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf

Castro Martínez, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124). Horsori.

Molina, R. y Guerrero, Luis. (2004). Tesis titulada el papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática. Antología. Universidad autónoma de Guerrero. México.

Euclides. (1996): Elementos. Introd. De L. vega, trad. Y notas de M. puertas. Gredos. Madrid. Libro I

Eves,H. (1983). *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS Coll.Publ.New York. Caps. 3.9, 5.8.

Examen canguro matemático. (2014). Tomado del nivel Cadete. Recuperado el 29 de octubre del 2016 de la URL: http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/previos/cadete14.pdf

Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. P. 16.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in* Mathematics. Pag. 143.

Flores, P. (2002). *Laberintos con alambre (Estructuras topológico-metricas)*. *Suma,* N° 41, pp. 45-54. Recuperado el 24 julio del 2015 de: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/0deec52cd79480dc82000000.pdf

Flórez, A. (1991). Una propuesta de estructuración de un curso de Geometría del espacio para el nivel medio superior en Cuba. Tesis de Grado (Candidato a Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas; La Habana.

Freitas, E. &. McCarthy, M. (2013).*Orientation and espatial sence:thopological thinking in the middle grades*. Cerme (2013). Recuperado el 14 de agosto del 2015 de: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf. pp. 615-624.

Fridman, L. (1991). *Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos*. *La matemática en la escuela* (5).

Galán, G. & Rodríguez, Yeimy. (2013). *Dibujando la realidad usando las isometrías en el plano bidimensional.* En Gallego, Adriana P. (Ed.), Revista Científica (pp. 781-783). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado el 16 de septiembre del 2015 de URL: http://funes.uniandes.edu.co/6749/1/Rodriguez2013Dibujando.pdf

Gallego, E. (2010). Robótica Educativa con Arduino una aproximación a la robótica bajo el hardware y software ibre. Extraido el 18 julio del 2016 de la URL: 2012, de http://anteriores.eventos.cenditel.gob.ve/site_media/detalle/files/robotica.pdf

García, J. (1998).*Didáctica de las ciencias*. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Grupo Impresor. Colombia. Pag.15. Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: https://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6758/6191

García, S. &. López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa*. México. Recuperable el 19 de febrero de 2015 de la URL: http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf

Garret, R. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. Alambique. Monografía. La resolución de problemas. No.5. Año II. Julio, Barcelona. España, pp. 6-15.

Giaquinto, M. (2007).*Visual Thinking in mathematics*. Oxford university press. Recuperado el 8 de diciembre del 2015 de la URL: http://www.emmanouela.yolasite.com/resources/Visual%20Thinking%20in%20Mathematics.pdf.

Godino, J. (1998).*Uso de material tangible y grafico textual en el estudio de las matemáticas*. Superando algunas posiciones ingenuas .En: A. M. Manchado y otros (eds): Actas de profMat98. Asociacao de profesores de matemática. Recuperado el día 1 de junio de 2015 de la URL: http://princesacatherine.blogspot.com/2012/08/uso-de-material-tangible-y-grafico.html), pp. 117-124.

Godino, J. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de granada. Recuperado el 17 de junio de la URL: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Gómez, C. &. Núñez, E. (2009).*Geometría intuitiva desde el cuarto del baño*. Revista Números vol. 70. pp.89-104. Recuperado el 20 de agosto del 2015 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Experaula_01.pdf

Gregorio, R. &. Cornelio, L. (2004). El papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Tesis para optar al título de licenciado en matemáticas. Recuperado el 4 de diciembre del 2015 de la URL: http://cimateuagro.org/images/pdf/2004-3.pdf. p. 9.

Guay, R. & McDaniel, E. (1977). *The relationship between Mathematics Achivement ans Spatial Abilities among elementary School Children*, Journal for Research in Mathematics education, vol 8

Guerrero, F. (2006). Geometría descriptiva. Universidad de Londres. Recuperado el 1 de junio del 2016 de la URL: https://www.uvirtual.edu.co/docudiseo/Dise%C3%B1o%20Grafico/E-H/geometria_descriptiva.pdf?Mobile=1&Source=%2F_layouts%2Fmobile%2Fview.aspx%3FList%3D1abf959a-d170-4c22-aa80-a04ed2aad452%26View%3Dafac9c17-e659-4b7f-b5de-773c7685abbf%26RootFolder%3D%252Fdocudiseo%252FDise%25C3%25B1o%2520Grafico%252FE-H%26CurrentPage%3D1

Gutiérrez, Á. (1991). *Proceso y Habilidades en visualización Espacial*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Valencia. España. Recuperado el 21 julio de 2015 de la URL: http://www.sectormatematica.cl/articulos/visualizacion.pdf

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en Geometría y visualizacion, Barcelona, (TIEM).

Gutiérrez, Á. Soler, G. Pastor, A & Cáceres, M. (1992). *La enseñanza de la Geometría de los Sólidos en la EGB*. Memoria final del proyecto de investigación. Recuperado el 16 de agosto del 2015 de la URL: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf

Guzel.N & Serner. E. (2009). *High school students´ spatial ability and creativity in geometry*. World conference on educational science. Recuperado el día 24 mayo de 2015 de la URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042809003152

ICME. (2004). *Proceeding of the 10 th international congress on Mathematical Education* .Recuperado el 14 de agosto del 2015 de la URL: http://higeom.math.msu.su/~asmish/Lichnaja-2010/Version2010-11-20/Trudy/Publications/2004/ICME10-Proceedings.pdf.

ICME. (2016). 13th International Congress on Mathematical Education. Recuperado el 12 de julio del 2016 de la URL: http://www.icme13.org/icmi_and_german_mathematics_education.html.

ICMI. (2001). *Perspective en l´Ensenyament de la geometría pel segle XXI* .Documento de discusión para un estudio del ICMI. Recuperado el 30 de mayo 2015 de la URL: http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm#1.

Jaimes, D. & Avenilde, R. (2013). *Integrando el uso de habilidades espaciales y geométricas para el aprendizaje significativo del concepto de volumen de sólidos con estudiantes de dibujo técnico.* En Gallego, Adriana P. (Ed.), Revista Científica (pp. 462-466). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado el 7 de octubre del 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/6678/

Jaimes, E. &. Vasquez, E. (2013). Integrando el uso de habilidades espaciales y geométricas para el aprendizaje significativo del concepto de volumen de solidos con estudiantes de dibujo técnico. Revista científica. Recuperado el 9 de septiembre del 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/6678/1/Romo2013Integrando.pdf

Kline, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid. Vol.1. Caps. 3.5, 4.9.

Koç, Y. Işıksal, M. Seviş, Ş. Osmanoğlu, A. Çetinkaya, B. Aşkun, C. & Bulut , S. (2013). *An investigation on students' degree of acquisition related to Van Hiele level of geometric reasoning: a case of 6-8 thgraders in turkey*. Cerme (2013).pp 665-674. Recuperado el 14 de agosto del 2015 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Kohanová, I. (2007). Comparison of observation of new space and its objects by sighted and non-sighted pupils. *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Recuperado el 11 de Noviembre del 2015 en la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG7.pdf

Kospentaris, K. & Spyrou, P. (2010). The effects of high school Geometry instruction on the performance in Spatial Tasks. University of Athens. Recuperado el 22 de Agosto del 2016 de la URL: http://www.math.uoa.gr/me/docs/Kospentaris_Spirou_Effects%20of%20High%20School%20Geometry.pdf

Krulik, S. & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . pág. 4.

Labarrere, A. (1987). *Bases pedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y Educación.

Landaverde, J. (1977). Curso de geometría. Editorial progreso. Recuperado el 4 de junio del 2016 de la URL:

https://books.google.com.co/books?id=CSVgfC9zVvIC&pg=PA269&lpg=PA269&dq=rectas+concurrente

s&source=bl&ots=Y8yardK3Yt&sig=pmjYr2aYOxSiuQO8pN2sVD9xGl4&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjE_IWJl5LNAhVLQyYKHaXtANw4ChDoAQgrMAM#v=onepage&q=rectas%20concurrentes&f=false

Lean, G. & Clements, M. (1981). Spatial Ability, Visual Imagery and Mathematical Performance. Educational studies in Mathematics, vol . 12.

Lehmann, C. (1980). Geometría analítica. Nueva York. Editorial Limusa S.A. Recuperado el 22 de febrero del 2016 de la URL: http://www.cimat.mx/~gerardo/GeoA/tareas/Lehmann.pdf

Leithold, I. (1994). Calculo con geometría analítica. Editorial Oxford University.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 763-804.

Lohman, D. (1979). *Spatial ability. A review and reanalysis of the correlation literature*, Stanford, Stanford University technical report, num 9.

López, L. (2005). Metodología para el perfeccionamiento del proceso enseñanza aprendizaje del cálculo vectorial, fundamentada en el desarrollo de la visualización matemática tridimensional. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Camagüey. Centro de Estudios de Ciencias de la Educación “Enrique José Varona”.

Majmutov, M. (1983). *Enseñanza problémica.* La Habana: Pueblo y Educación.

Mariño, A. (2000). El geoplano un recurso manipulable para la comprension de la geometria. Anuario eduacion integral, 3 (3-4), p. 49-75.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires. Argentina.

Márquez, J. & Ruiz, J. (2014). Robótica educativa aplicada a la enseñanza básica de secundaria. Revista científica de opinión y divulgación. Recuperada el 2 de mayo del 2015 de la URL: www.raco.cat/index.php/DIM/article/download/291518/379999

Martínez, M. (Octubre - diciembre de 1981). La enseñanza problémica. *Revista Educación*(43).

Mayer, R. (1986). Pensamiento, Resolución de problemas y cognición. Barcelona: Editorial Paidos.

McGee, M. (1079). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic; Hormonal, and Nurilogical Influence, Psychological Bulletin, vol. 86.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL [MEN]. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Enlace Editores Ltda: Bogotá.p.49.Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN] (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Bogotá: Creamos Alternativas. Recupera el día 6 de junio 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf

Morales, A. &. Macías, R. (2013). Caracterización de una comunidad de práctica orientada al uso de la matemática en la enseñanza de la ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 8 de noviembre del 2015 de la URL: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/DialnetCaracterizacionDeUnaComunidadDePracticaOrientadaAl-4707733%20(2).pdf

Moriena, S. & Scaglia, S. (2003). *Efectos de las representaciones graficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría*. Educacion Matemática, vol. 15, No.001, pp.5-19

Moss, J. Hawes, Z. & Naqvi, S. (2015).*Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study*. Recuperado el 24 de junio de 2015 de la URL: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-015-0679-2#/page-1.

Muzas, M. (1999). Geometría en la ciudad. Revista suma N° 30. Recuperado el 8 de agosto del 2015 de la URL: http://catedu.es/matematicas_mundo/RUTAS/Geometria_en_la_ciudad.pdf

Nuran, G. & Ersein, S. (2009). High school students spatial ability and creativity in geometry. Recuperado el 5 de abril de 2015 de: http://ac.els-cdn.com/S1877042809003152/1-s2.0-S1877042809003152-main.pdf?_tid=2d441b2a-03f5-11e5-8c68-00000aacb360&acdnat=1432678906_c933be9291f43653eff03ef356f49774

Olaskoaha, K. (2009). *La robótica como apoyo al aprendizaje.* Recuperado el 12 de julio del 2016 de la URL: http://lrobotikas.net/?s=oLASKOAGA&submit=submit

Olimpiada mexicana de matemáticas. (2012). Recuperado el 7 de noviembre del 2016 de la URL: http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/prob15/prob1a25.html#12

Olimpiadas colombianas de matemáticas. (1997). Tomado de la Prueba clasificatoria nacional. Primer nivel, Recuperado el 12 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl97pn/clasPN97.htm

Olimpiadas colombianas de matemáticas. (1998). Tomado de la Prueba clasificatoria nacional. nivel intermedio, Recuperado el 12 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl98/pcni98.htm

Olimpiadas colombianas de matemáticas. (2000). Adaptado de la Prueba clasificatoria nacional primer nivel grados 6 y 7, Recuperado el 13 de octubre del 2016 de la URL: http://186.28.225.60/math/Cl00/pcnpn/pcnpn.htm

Orozco, M. (2004).*El geoespacio un recurso para la enseñanza de la geometría.* Antología sobre el geoplano y el geoespacio SEP México. Recuperado el 23 de agosto del 2015 de: http://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf

Paivio, A. (1971). Imagery and verbal processes. New York: Holt, Rinehart & Winston. Paivio, A. (1986). Mental representations: A dual coding approach. Oxford, England: Oxford University Press

Paivio, A. (1986). Mental representations: A dual coding approach. Oxford, England: Oxford University Press

Peña. S. &. Escudero .O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. México. Materiales para apoyar la práctica educativa.

Pérez, D. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pisa. (2012). Marcos y pruebas de evaluación. Recuperado el 6 de junio de 2015 de la URL: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Pittalis, M. &. Christou, C. (2010).*Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability.Springer Science+ Business Media*. Recuperado el 10 de enero del 2015 de la URL: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-010-9251-8

PME. (2013). Conference of the international group for the psychology of mathematics education. Recuperado el 25 de octubre del 2016 de la URL: http://www.pme2013.de/en/documents/pme-booklet-web.pdf.

Pogorelov, A. (1974).*Geometría elemental.* Ed. Mir. Moscú. Recuperado el 30 de julio del 2016 de la URL: http://www.cienciamatematica.com/libros/Mir/Geometria_Elemental_A. Pogorelov(Editorial_MIR)Part-2.pdf, p.143.

Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.

Polya, G. (1965). *How to solve it*. Princenton University Press (Traducción: Cómo plantear y resolver problemas, de Julián Zagazagoitia, Ed. Trillas. México)

Pozo, E. G. (2005). Técnicas para la implementación de la robótica en la educación primaria. Recuperado el 4 de mayo de 2016 de la URL: http://complubot.educa.madrid.org/actividades/inrerdidac_robotica_primaria.pdf.

Prada, M. (2003). Marco metodológico para atención a la diversidad: una experiencia para el área de matemáticas. Revista de educación. N° 330. Recuperado el 28 de julio del 2015 de: http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre330/re3302211213.pdf?documentId=0901e72b81258cdc

Presmeg, N (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. pp (32), 17-22.

Presmeg, N (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. Handbook of research on the psychology of mathematics education. pp. 205-235.

Presmeg, N. (1989). Visualization in Multicultural Mathematics Classrooms, Focus on learning problems in mathematics, vol 11.

Primaria. Recuperado el 10 de mayo de 2011 de la URL : http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf

Quintana, E. (2005). *Meta cognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Madrid 2005.Recuperado el 11 de octubre del 2015 de la URL: http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf

Quiroz, S. (2014). *Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática*. Universidad de Antioquia. Recuperado el 8 de octubre del 2015 de la URL: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/177/1/JC0875.pdf

Ramírez, Z. Cano, R. &. Molina, J. (2013). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café*. Universidad de Antioquia. Recuperado el 7 de octubre del 2015 de la URL: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/18619-65393-1-PB.pdf

Reed, S. K. (2013). *Thinking visually.* Psychology Press.

RELME, (2015). Reunion latinoamericana de matematicas educativas, Relme 30. Recuperado el 13 de Julio del 2016 de la URL: http://relme30.mty.itesm.mx/?page_id=559

Restle, F. & Davis, J. (1962). Success and speed of problem solving by individuals and groups. *Psychological Review*, *69*(6), p. 520

Restrepo, W. Ramírez, J. & Múnera, E. (2009).*La enseñanza de la geometría con fundamento en la solución de problemas cotidianos*. Universidad de Manizales. Recuperado el 2 de julio del 2015 de la URL:
http://ridum.umanizales.edu.co:8080/xmlui/bitstream/handle/6789/1194/Piedrahita_Restrepo_Wilson_Antonio_2009.pdf?sequence=1

Robaina, M. & Martín, M. (1985). Apuntes para un diseño instruccional en geometría plana con ayuda del geo plano. *Revista números*. Recuperado el 21 julio del 2015 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/11/Articulo02.pdf, pp. 15-40.

Rodríguez, E. (2005). Geometría del espacio. Uruguay. Recuperado el 19 de junio del 2016 de la URL: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/LIBROESPACIO-Oct.pdf

Rodríguez, S. & García, S. (2009). Diez demostraciones Visuales del teorema de Pitágoras. Universidad industrial de Santander. Recuperado el 2 de noviembre de la URL: http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7157/2/132354.pdf

Rohn, K. (1984). Consideraciones acerca de la enseñanza problémica en la enseñanza de la Matemática. *Boletín Sociedad Cubana de Matemática y Computación*.

Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario. Tesis presentada en opción al grado científica de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y caballero", Holguín. Cuba.

Román, M. (2012).Resolución de problemas geométricos. Universidad de Valladolid.p.15. Recuperado el 12 de octubre del 2015 de la URL: http://cerro.cpd.uva.es/bitstream/10324/2705/1/TFG-G%20184.pdf

Romero, M. (2012). Robótica: entra al mundo de la inteligencia artificial.1.ed. Buenos Aires: Educ. ar S.E. Recuperado el 4 de mayo del 2016 de la URL: http://bibliotecadigital.educ.ar/uploads/contents/ROBOTICA1.pdf

Rusbult, C. (1995). Visual thinking in education. Tesis doctoral. Recuperado el 10 de enero del 2016 de la URL: http://www.asa3.org/ASA/education/teach/visual.htm

Sánchez, M. (1995). Desarrollo de habilidades del pensamiento. Razonamiento verbal y solución de problemas. México: Trillas.

Sanchis, S. &.Guillen, G. (2013). *Observación de proceso de aprendizaje de contenidos de la enseñanza secundaria*. Investigación en educación matemática siglo XVII. Recuperado el 22 de julio del 2015 de: file:///C:/Users/Usuario/Downloads/Dialnet-InvestigacionEnEducacionMatematicaXVII-569414.pdf. pp. 511-512.

Sandín, E. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Mc Graw and Hill Interamericana.

Sardella, O. Mastucci, S. & Berio, A. (2002). Poliedros en el aula. Volumen 49. Recuperado el 22 de julio del 2015 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/49/Articulo03.pdf

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problems Solving, Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving, p. 28. In: F. R.

Sepúlveda, R. E., Ospina, C. H., & González, J. M. (2006). Pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.

Steinwandel, J. & Ludwig, M. (2011). Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME). Recuperado el 11 de octubre del 2015 en la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG7.pdf

Tafur, A. (2014). Construcción del concepto de volumen a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado octavo. Tesis presentada para optar al título de magister en educación matemática. Universidad Antonio Nariño.

Tafur, P. (2015). Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo. Tesis presentada para optar al título de magister en educación matemática. Universidad Antonio Nariño.

Thibaut, E. (2004).Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional, suma, N 47°. pp. 11-18. Recuperado el 26 de julio del 2015 de la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/47/011-018.pdf

Torres, J. & Sigarreta, J. (2003).Utilización de los problemas matemáticos en la formación de valores. Revista EMA. Vol. 8. P.p.208-225. Recuperado el 14 de octubre del 2015 de la URL: http://core.ac.uk/download/pdf/12341951.pdf

Valencia, v. Quintero, G. Morales, A. (2008). Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Universidad tecnológica de Pereira. Recuperado el 2 de noviembre del 2015 de la URL: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/990/1/3722107A282.pdf

Vega, A., Puentes, X., Rojas, V & Ramos, J. (2010). Hipertexto Santillana. Bogotá. Editorial Santillana.

Velasco, M. y Mosquera, F. (s.f). Estrategias didácticas para el Aprendizaje Colaborativo. Universidad Distrital de Colombia. Recuperable el 11 de noviembre de la URL: http://acreditacion.udistrital.edu.co/flexibilidad/estrategias_didacticas_aprendizaje_colaborativo.pdf, p. 2.

Villarroel, S. & Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Revista Números*. Volumen 78, noviembre de 2011, 1887 -1984. Recuperado el 11 de octubre del 2013 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros, pp. 73-94.

Wenger, E, McDermott, R. y Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge.* Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1-57851-330-8.

Wenger, E. (2006). *Communities of practice: A brief introduction*. Recuperado el 9 e de noviembre del 2015 de la URL: http://wenger-trayner.com/wp-content/uploads/2012/01/06-Brief-introduction-to-communities-of-practice.pdf

Wenger, E.(1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. Recuperado el 27 de octubre del 2015 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S

Wentworth, G. & Smith, D. (1915). Geometría plana y del espacio. Nueva York. Ginn y compañía. Recuperado el 5 de julio del 2016 de la URL: http://beceneslp.edu.mx/pagina/content/geometr%C3%ADa-plana-y-del-espacio

Wheatley, G., & Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of images in mathematical activity. Proceedings of PME 18-1.

Zaslavsky, C. (1979). Science Direct. Recuperado el 5 de julio de 2015, de: http://ac.els-cdn.com/0315086079900776/1-s2.0-0315086079900776-main.pdf?_tid=bb323554-2347-11e5-a640-00000aab0f27&acdnat=1436122849_6c2ea67c667a8625f9c97b0de71fc540

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta a profesores de Matemática

Objetivo: determinar algunas de las fortalezas o falencias entorno a la enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial en el grado séptimo.

Desarrollo: estimado profesor, la presente encuesta reviste una gran importancia para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, específicamente en el tema de volumen de cuerpos, correspondiente a la geometría del espacio en el grado séptimo, motivo por el cual es necesario tener presente sus valiosas opiniones. Por lo tanto usted ha sido seleccionado para realizar la misma, con vista a la realización de esta investigación.

Muchas gracias por su ayuda.

I. Datos Generales.

Lic.: Sí __ No__

Años de Experiencia: ____

Total de veces que ha trabajado el grado: ____

Colegio: ____

II. Cuestionario

1. ¿Cree usted que hay pocos contenidos basados en el pensamiento espacial del grado séptimo? ¿Cuáles?

____

____

2. ¿Por qué es importante el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes de grado séptimo?

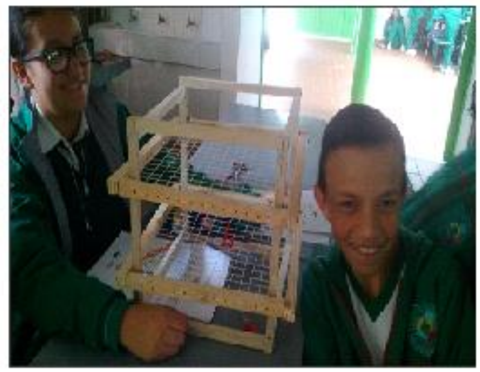
3. Mencione algunas dificultades que impiden la enseñanza - aprendizaje del pensamiento espacial en las escuelas.

4. ¿Cree usted que una extensa malla de contenidos en geometría limitan la enseñanza-aprendizaje del pensamiento espacial? Explique.

5. ¿Son limitadas las herramientas manuales en el momento de enseñar temas respectivos al pensamiento espacial? Explique.

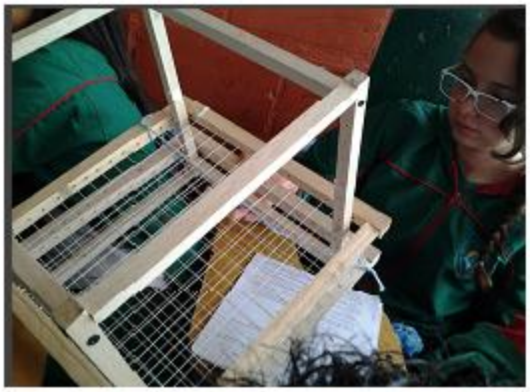
Anexo 2. Evidencias de la actividad 1

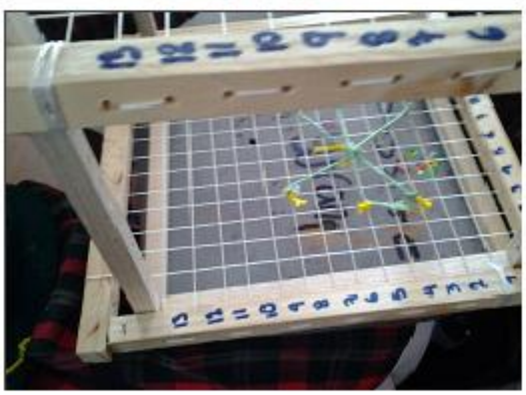


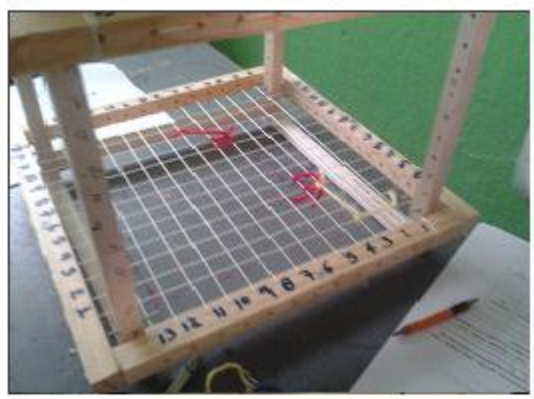





Anexo 3. Evidencias de la actividad 2







- ¿Encuentra algo notable en las tablas anteriores?

Que se puedo encontrar los tablas del 3 y 2

- Encuentre otros dos puntos sobre el segmento AB. ¿Cómo puede describir los desplazamientos para llegar a ellos desde el punto A? Encuentre otros tres puntos sobre el segmento AD y describir los desplazamientos para llegar a ellos desde el punto A. Piense en extender el segmento AB tanto como se pueda en la cuadrícula que se muestra arriba. ¿Cómo se podrá dar instrucciones para llegar a cualquier punto que pertenece a la extensión del segmento AB?

3 6 9 12 15 18 Multiplicando multiplos
2 4 6 8 10 12

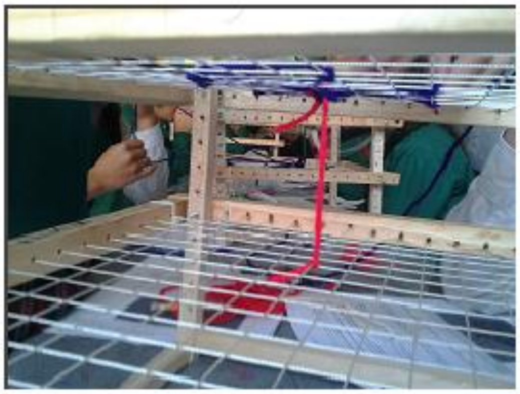
d. Encuentre otros dos puntos sobre los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{SC}$. ¿Cómo puede describir los desplazamientos para llegar a ellos desde el punto P y S respectivamente?

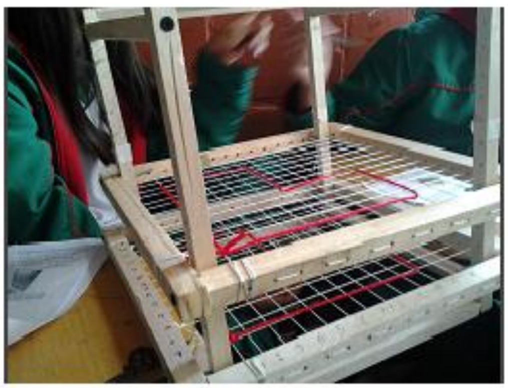
PC = 8 en x y 7 en y SC = 8 en x y 7 en y

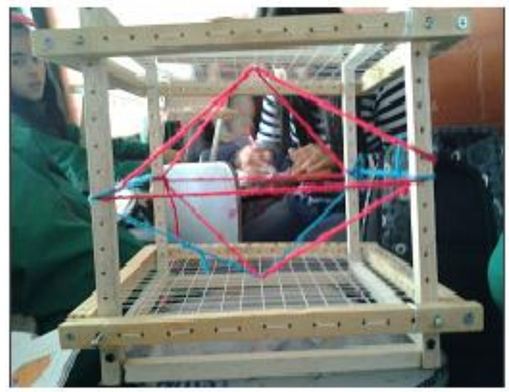
e. Piense en extender los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{SC}$ tanto como se pueda en la cuadrícula. ¿Cómo se podrá dar instrucciones para llegar a cualquier punto que pertenece a la extensión de los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{SC}$?

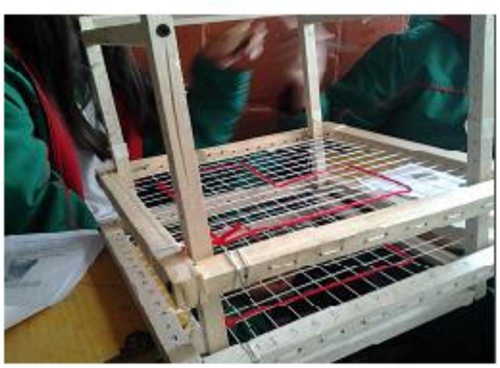
16 24 32 40 Multiplicando Multiplos
14 21 28 35

Anexo 4. Evidencias de la actividad 3

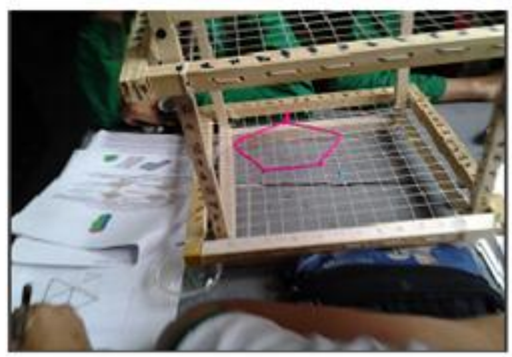








Anexo 5. Evidencias de la actividad 4



- En cada poliedro haga uso de lana para unir todas sus diagonales ¿encuentra algo notable?

Todas se unen y llegan a un mismo punto, las diagonales se unen... y en un triangulo interior.

- Los poliedros a y c son llamados poliedros convexos, teniendo en cuenta lo anterior ¿Qué criterio debe cumplir un poliedro para ser convexo?

Que las diagonales deben ir adentro

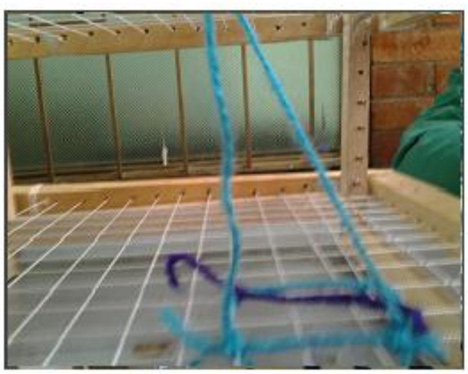
d. Identifique 3 objetos que usted ha visto, que se asemejen a los prismas y escríbalos.

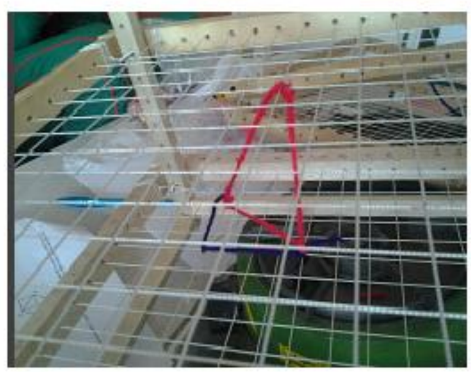
moldes de galleta, las velas y galletas

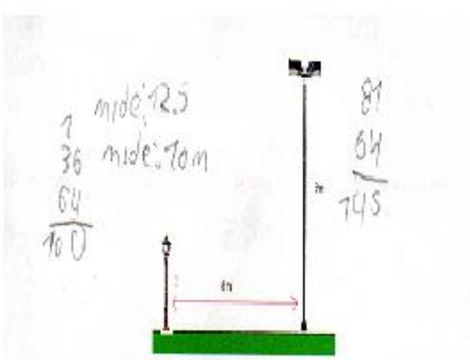
e. De acuerdo a lo trabajado sobre prismas y paralelepípedos, encuentre algunas relaciones y diferencias, escríbalas y responda ¿Todo paralelepípedo es un prisma? ¿Por qué?

si ya los prismas tienen sus bases en planos paralelos igual que los paralelogramos

Anexo 6. Evidencias de la actividad 5







Anexo 7. Encuesta de satisfacción Estudiantes

Apreciado estudiante, una vez terminada las actividades relacionadas con el Geoespacio y a partir de su experiencia como participante, <u>responda las siguientes preguntas de 1 a 5, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación</u>.

a. ¿El trabajo con el Geoespacio le permitió comprender de una forma más significativa el contenido geométrico?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

b. ¿Considera usted que las actividades desarrollada motiva hacia el estudio de la Geometría?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

c. ¿Cree usted que su desempeño en el área de geometría mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

d. ¿Considera usted que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente de trabajo grupal que propició el aprendizaje de los contenidos geométricos?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

e. ¿El trabajo con el Geoespacio le permitió comprender la relación que hay entre la geometría y el entorno?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐