REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

TIPOLOGÍA DE ERRORES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS A PARTIR DE LOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Lic. Álvaro Suárez López

Bogotá D.C.

2013

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

TIPOLOGÍA DE ERRORES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS A PARTIR DE LOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Lic. Álvaro Suárez López

Director de tesis: Osvaldo Jesús Rojas Velázquez (Ph.D.)

Bogotá D.C.

2013

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Junio 14 de 2013

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor Osvaldo de Jesús Rojas, por su gran colaboración, aportes, dedicación, acompañamiento y sacrificio. Fue un motor para la culminación del presente trabajo.

A los docentes de la maestría por su labor ejemplar.

Al profesor José Joaquín Valderrama por su incondicional apoyo.

A la UAN por las oportunidades y facilidades financieras para cursar la maestría.

A Diana Pérez por su acompañamiento y ánimo.

A los estudiantes del grado noveno por su esfuerzo, a los profesores que brindaron sus tiempos y directivas del Colegio Francisco Javier Matiz I.E.D.

A los doctores María Falk y Mauro García por sus aportes.

DEDICATORIA

A mis hijos: Melba Juliana, Darío Alejandro, David Arturo, Álvaro Daniel, D'Sebastian Andrés y Luzby Ariadna.

A Merilhu, por que la esperanza renazca, y el sacrificio dé frutos.

A Julián Santiago mi científico estrella.

SÍNTESIS

La preparación de los estudiantes en problemas de olimpiadas, desde el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, es importante para lograr resultados satisfactorios en cada estudiante así como en competiciones internacionales.

Uno de los contenidos con mayor énfasis es el referido a la geometría. En esta temática se inserta el presente trabajo de investigación; donde, para lograr cada vez mayores aciertos, se clasifican los errores encontrados en los resultados obtenidos por los concursantes en las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, en las Pruebas Clasificatorias Nacionales y se utiliza el error como estrategia didáctica que permita la construcción de conocimientos significativos. En el trabajo se determinan los posibles errores al responder las preguntas de geometría que puedan limitar el éxito en los estudiantes.

Como vía de solución al problema se diseñaron talleres de solución de problemas para el grado noveno de tal manera que presentan una estructura conducente a minimizar el error y dar a éste un tratamiento en forma positiva en la solución de problemas geométricos. Estos talleres median, desde una concepción que instruye, desarrolla y ayuda al estudiante a evitar el error, donde se tiene en cuenta el diagnóstico y se aprovecha todas las potencialidades del trabajo en grupo.

La implementación de la experiencia demostró que se contribuye al mejoramiento de la resolución de problemas geométricos de olimpiadas.

ABSTRACT

Preparing students in Olympiad problems from the perspective of the teaching-learning process of mathematics is important to achieve satisfactory results in each student as well as in international competition.

One of the subjects that receives greater emphasis is geometry. It is in this area that the research reported here is inserted, research that classifies the errors found in the results obtained by the participants in the Colombian Math Olympiads on National Qualification Tests, mistakes are used as a teaching strategy that allows the construction of significant knowledge. This research determines possible errors found in answering geometry questions that limit student success.

In response to this situation, problem-solving workshops for ninth grade students were designed in such a way that their structure is favorable to minimizing mistakes and to giving a positive treatment to the solution of geometric problems. These workshops intervene in the situation based on a conception that instructs, develops and helps the student to avoid errors, taking into account the errors identified and taking advantage of the potentialities of working in groups. The implementation of the experience showed that it helps in the improving the solving Olympiad problems in geometry.

TABLA DE CONTENIDOS PÁG

INTRODUCCIÓN

La Universidad Antonio Nariño convoca cada año a las instituciones educativas, en sus diversos niveles, a participar en las Olimpiadas Colombianas en sus modalidades de Matemáticas, Física y Ciencias, Computación y Astronomía.

En Matemáticas se tienen competencias para estudiantes en los niveles de primaria, secundaria, media y universitario. La Universidad hace presencia a nivel nacional e internacional en diferentes eventos como: Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Concurso Futuros Olímpicos de Matemáticas, Canguro Matemático, Competencia Construya-Explore-Pruebe (CET), Competencia Regional de Matemáticas, Olimpiada Regional de Matemáticas, Olimpiada Colombiana de Matemáticas para Primaria, Olimpiada de Matemáticas de Centroamérica y el Caribe, Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas y Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Las preguntas de las pruebas clasificatorias nacionales son de selección múltiple con única respuesta, constan de un enunciado y cinco opciones de respuesta, dentro de la cuales una respuesta correcta (solución) y cuatro incorrectas. El presente trabajo pretende analizar las respuestas incorrectas marcadas por los estudiantes al responder las preguntas de geometría en la Prueba Clasificatoria Nacional Primer Nivel (PCN-PN) y Prueba Clasificatoria Nacional Nivel Intermedio (PCN-NI) de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, entre los años 2007 y 2011, para mostrar una tipología de los errores que llevaron a los estudiantes a dar respuestas incorrectas. De las pruebas se tomarán las preguntas de geometría, y basados en las estadísticas que posee la Universidad, se dará relevancia a aquellas preguntas en donde alguna de sus respuestas incorrectas tenga un alto porcentaje.

Los cuatro distractores (opciones incorrectas) que hay en cada una de las preguntas han sido elaborados por el autor de la pregunta de manera cuidadosa, conocedor de la tendencia de los estudiantes a cometer determinados errores. Se analizarán las respuestas incorrectas a cada una de las preguntas, donde se presumen las posibles razones, causas o procedimientos, catalogados como error, para clasificarlos y ubicar cada uno de ellos en alguna categoría existente o dar una nueva para una tipología específica en geometría.

La tipología a mostrar se basará en estudios sobre el error en matemáticas realizados por autores como: Movshovitz, N. (1987), Radatz, H. (1979), Astolfi, J. (1999), Socas, M. (1997) y Brousseau, G. (2003). Estos autores han realizado investigaciones sobre los errores cometidos por los alumnos sobre la base de teorías como la del procesamiento de la información (Radatz, H. 1979) o de un análisis constructivo de la soluciones (Movshovitz, N. 1987).

Se realizará una prueba de campo para contrastar los resultados; para esta situación se presentarán los problemas (respondidos con distractores con alto índice de error) para ser resueltos de manera abierta sin distractores. Se pretende explorar en otro contexto la posibilidad de que los estudiantes cometan los errores que un problema de selección múltiple muestra a través de los distractores y la posibilidad de aparición de otros errores para los mismos problemas.

La prueba de campo permitirá seguir de manera completa los procesos que realizan los estudiantes para la solución de cada uno de los problemas. También permitirá visualizar de manera clara en dónde estriban las dificultades y por tanto comparar con los supuestos, resultantes del análisis de los problemas de las pruebas de Olimpiadas con distractores.

Planteamiento del problema

Estudios en educación matemática deben aportar herramientas que les permitan tanto al docente como al estudiante conocer los riesgos que se pueden correr al recibir una formación deficiente. Una adecuada formación del docente le permite tipificar los errores que se pueden cometer en geometría y analizar las posibles causas lo cual contribuye a prevenirlos y a lograr un mejor resultado tanto para el docente en su labor, como para el estudiante en su aprendizaje.

En un estudio realizado en el Colegio Francisco Javier Matiz IED basado en la aplicación de métodos empíricos, encuestas y entrevistas a docentes, la experiencia del autor de la investigación por más de treinta años trabajando como docente y coordinador en los niveles primaria y secundaria, y los resultados obtenidos por los participantes en las PCN-PN y PCN–NI, entre los años 2007 y 2011, permitieron constatar dificultades como las siguientes:

- Limitada comprensión del enunciado del problema.
- Dificultad en el uso de los algoritmos, particularmente en el uso de los cálculos.
- Aplicación de reglas o estrategias de manera inadecuada.

- Dificultades para obtener información de las gráficas y/o figuras que ilustran el problema.
- Utilización incorrecta de datos, definiciones y teoremas para tratar de buscar una respuesta rápida no verdadera, que se encuentra entre las opciones de respuesta.

Precisamente las respuestas a esta situación problemática constituyen la esencia de esta investigación, en la que se plantea como **problema investigación**: ¿cuáles son las tendencias a cometer ciertos tipos de errores al responder las preguntas de geometría en las Pruebas Clasificatorias Nacionales del Primer nivel y del Nivel Intermedio de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas y cómo se puede mejorar?

Justificación del problema

Una práctica que debe ser más difundida y de uso frecuente, es trabajar sobre el error. Es importante conocer los errores que se pueden cometer cuando se abordan los diferentes temas de la geometría, esto ayuda a estar alerto para evitarlos, y sobre los más frecuentes generar un trabajo especial de reconceptualización que implique implementar estrategias que garanticen un mayor y más eficiente aprendizaje.

"*Si bien es un dicho común que se puede aprender de los errores, debe también tenerse por dado que con un trabajo adecuado por parte del docente se puede usar el error en forma positiva en situaciones de aprendizaje. La historia de la matemática confirma que todo gran matemático ha tenido algunos desaciertos, de modo que* *ningún estudiante debe temer cometer error, ni ningún profesor descalificar el trabajo de ningún estudiante simplemente porque contiene alguna equivocación"*[1]*.*

Se ha venido, en forma lenta en nuestro medio, incrementando la preocupación de los docentes de matemáticas en trabajar sobre el error que cometen sus estudiantes al presentar las evaluaciones periódicas de sus materias. Después de cada evaluación, se realizan las respectivas correcciones de la prueba, recalcando aquellos pasos en los cuales la mayoría cometió errores; falta sí, el asumir la sistematización de lo que hacen.

A nivel internacional se aduce que *"… el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido una cuestión de permanente interés en educación matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. En cada época el análisis de errores en educación matemática se ha visto orientado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología; también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas…*[2]*.*

Por otra parte el conocimiento de los errores más frecuentes debe permitir al docente mejorar las estrategias de aprendizaje permanentes, que conlleven al estudiante a clarificar los procesos, conceptos y propiedades, y así idear estrategias tendientes a evitar el error, y, esto debe hacer parte fundamental del currículo en todos los niveles de nuestro sistema educativo.

---

[1] Falk, M. (2012). Texto inédito durante la revisión del Anteproyecto de Álvaro Suárez.

[2] Kilpatrick, J. (1995). Educación Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes. Bogotá: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamerica.

La aritmética ha sido la rama de las matemáticas que ha dominado la mayor parte de los estudios sobre los errores. Sobre la tipificación de los errores en matemáticas hay varias clasificaciones, las cuales difieren entre ellas, pero al mismo tiempo se complementan y concuerdan en varios aspectos.

El estudio de los errores en educación matemática ha tenido un permanente desarrollo desde el siglo pasado en los Estados Unidos; en los países europeos este estudio carece de continuidad. Radatz (1980) hace un recuento por países sobre las contribuciones al estudio del error desde principios del siglo pasado hasta finales de la década de los setenta en el cual se destacan los trabajos de Alemania, la antigua Unión Soviética, los Estados Unidos y España.

La geometría como rama de las matemáticas debería ser cobijada por alguna de las tipificaciones (Radatz, H. (1979), Movshovitz, N. (1987), Socas, M. (1997), Astolfi, J. (1999) y Brousseau, G. (2001)), pero por su carácter particular no lo es en su totalidad. Un trabajo que da una tipificación específica para la geometría será la base para tipificar las respuestas de las PCN-PN y PCN–NI. En el trabajo de investigación realizado por Franchi, L. y Hernández, A. (2004) se da una tipificación exclusiva para la geometría y como lo afirman *"En geometría se ha escrito poco con relación a sus tipos de errores…"*[3]. Su trabajo será un buen inicio para determinar si los errores arrojados por las respuestas de los estudiantes de las PCN-PN y PCN–NI, se ajustan a las categorías dadas en su tipificación o el estudio determinará la creación o supresión de alguna de sus categorías, o dado el caso una nueva tipificación.

[3] Franchi, L. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere* (24), 63 - 71.

De este análisis y a partir del problema se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas geométricos.

Para resolver el problema se formula como **objetivo general**: clasificar los errores geométricos en los resultados obtenidos por los concursantes en las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas en el primer nivel y nivel intermedio de las Pruebas Clasificatorias Nacionales y utilizar el error como estrategia didáctica, que permita la construcción de conocimientos significativos en estudiantes de noveno grado del Colegio Francisco Javier Matiz.

Objetivos específicos:

- Determinar los errores geométricos cometidos por los estudiantes en las PCN-PN y PCN–NI.
- Tipificar los errores cometidos en las PCN-PN y PCN–NI.
- Establecer estadísticamente la tipificación de los errores encontrados en las PCN-PN y PCN–NI.
- Formular estrategias conducentes a evitar los errores o a hacer uso constructivo de los mismos y proponer alternativas que permitan su uso positivo.
- Contrastar los resultados obtenidos con los que se obtengan al aplicar las pruebas sin distractores.
- Proponer alternativas que permitan hacer uso positivo del error.

En correspondencia con el objetivo, se precisa como **campo de acción**: el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas geométricos en competiciones matemáticas basados en el error como elemento didáctico.

En función del desarrollo de la tesis se propone la siguiente **hipótesis de trabajo**: el análisis de los errores cometidos por los estudiantes al responder las preguntas de geometría de las PCN-PN y PCN–NI, permitirá realizar una tipificación de los mismos y establecer estrategias para mejorar el desempeño de éstos.

Para darle solución al problema planteado y cumplir con el objetivo propuesto, se formularon las siguientes **tareas de investigación**:

- Determinar el estado del arte de la temática investigada.
- Establecer fundamentos teóricos que le dan pertinencia al problema de investigación y que caracterizan su objeto de estudio.
- Seleccionar los problemas de geometría contenidos en las pruebas, específicamente aquellos en los cuales se encuentre un mismo error cometido por el 30% o más de los participantes.
- Clasificar y establecer una tipología para los errores cometidos.
- Elaborar estrategias conducentes a evitar los errores o a hacer uso constructivo de los mismos.
- Aplicar los problemas seleccionados a varios grupos de estudiantes, pero sin distractores y analizar los resultados con fines de comparar y contrastar con los resultados de las pruebas PCN-PN y PCN–NI entre 2007 y 2011.

Metodología de investigación.

En el trabajo de investigación se utiliza una metodología cualitativa. Las características que enmarcan este tipo de investigación son:

- Se utiliza la observación participativa.
- La meta del investigador "…*es llegar a reunir y ordenar sus observaciones para construir una interpretación comprensible del fenómeno*"[4].
- Se basa en el modelo conceptual-inductivo.

La investigadora Ortiz L., M. (s.f.), integrante de la Asociación Anillo Matemático afirma: "*La prevalencia de métodos cualitativos es una característica de la investigación en educación matemática a escala mundial, ya que se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza aprendizaje y la resistencia que ofrecen los cambios conceptuales y los avances en el aprendizaje para ser atrapados en cuadros estadísticos o en mediciones porcentuales*"[5].

Ortiz L., M. (s.f.) afirma que los procesos investigativos se han direccionado más al *cómo* lo que se ve reflejado en "…*el gran interés de los investigadores por comprender la forma como niños y jóvenes acceden al conocimiento matemático y, desde esa comprensión, diseñar propuestas didácticas que den lugar a cambios benéficos en el sistema educativo*".[6]

[4] Aravena, M., et al. (2006). *Investigación Educativa I.* Chile.

[5] Ortiz, L. (1999). *La investigación en Educación Matemática en Colombia, 1991 - 1999.* Recuperado el 11 de 10 de 2012 en la URL: http://portales.puj.edu.co/didactica/PDF/EstadosdeArte/EducacionMatematicas.MarinaOrtiz .pdf , p. 5

[6] Ibídem. p. 5

Para la unidad de estudio se toman los resultados de las Olimpiadas Colombiana de Matemáticas, en su Primer Nivel y Nivel Intermedio de las Pruebas Clasificatorias Nacionales desde el año 2007 hasta el 2011. La muestra está conformada por los estudiantes del grupo 901, de la jornada de la mañana del Colegio Francisco Javier Matiz IED.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y referencias, y anexos. En el primer capítulo se aborda el estado del arte sobre las tipologías de errores en geometría. En el segundo capítulo se asume como marco teórico la resolución de problemas, donde se hace énfasis en los problemas de olimpiadas, además se toman como referentes la heurística y el error como estrategia didáctica. En el capítulo 3, se aborda la tipología de errores en la resolución problemas geométricos y se proponen estrategias para minimizar el error a través de talleres. En el capítulo 4 se realiza los análisis de los resultados de cada taller.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

Toda actividad está sujeta a errores; el campo del conocimiento ha ido de la mano con éstos, pero el mismo ser humano con su saber ha ido superándolos, aprende de ellos y en muchas de las ocasiones han sido el punto de partida para construir nuevos conocimientos. En este capítulo se realiza un recuento histórico del estudio sobre el error donde se hace una referencia a los autores y sus aportes. También se aborda los errores en la resolución de problemas geométricos posterior a 1977.

1.1. Los errores en la resolución de problemas matemáticos, antes de 1977

El error se ha ido convirtiendo en un elemento de estudio para los docentes de matemáticas, pues les permite detectar conceptos mal adquiridos, procesos mal desarrollados e información o instrucción mal impartida, lo cual les ha permitido establecer algunas estrategias para superar dichos inconvenientes. En el ir y venir del proceso enseñanza aprendizaje "… *los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en nuestro proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones"*[7].

El estudio en los errores en el aprendizaje de las matemáticas, según Radatz, H. (1980), tiene tres características: el área dominante en los estudios es la aritmética, en

[7] Kilpatrick, J. (1995). *Educación Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes.* Bogotá: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamerica.pág 85.

Europa el estudio fue en ese entonces esporádico, mientras que en Estados Unidos de América hay mayor continuidad y finalmente hay diversidad de aproximaciones teóricas a explicar las causas de los errores por parte de los estudiantes al aprender matemáticas.

Las contribuciones más relevantes a nivel mundial sobre el error se resumen en el siguiente cuadro.

Tabla 1. Autores que contribuyeron al estudio del error hasta 1977.

PAÍS	AUTOR	AÑO	APORTE
ALEMANIA	Weiner	1922	Clasificó los errores en cinco categorías: errores familiares, persistentes, por similitud, mixtos y debidos a situaciones emocionales.
	Seseman	1931	Define tres tipos de errores: mecánicos, asociativos y funcionales.
	Kiessling	1925	Tratamiento teórico de la evaluación y del error.
	Rose	1928	Causas del error: inatención, ignorancia de las reglas, confusión de conceptos e incapacidad para reconocer elementos de un problema matemático.
	Schlaack	1968	Errores debidos a comprensión inadecuada de los enunciados, determinación incorrecta de los números.
	Glück	1971	Errores por cambios de operación, aproximación aditiva o multiplicativa, resultados parciales y errores de trascripción.
	Pippig	1977	Describa causas del error en los diferentes procesos de solución.
Unión Soviética	Kuzmitskaya	1967	Planteó 4 causas de error: insuficiencia de la memoria a corto, comprensión insuficiente del

			problema, ausencia de reglas verbales e incorrecto uso de las cuatro operaciones.
	Menchinskaya	1967	Marca 4 causas del error: realización incorrecta en una operación, comprensión conceptual cualitativamente insuficiente, errores mecánicos por distracción y aplicación de reglas o algoritmos inadecuados.
Estados Unidos	Buswell y Judd	1925	Recopilan 31 estudios sobre errores en Matemáticas.
	Thorndike	1917	*Psicología de la aritmética*
	Brueckner	1935	Lista de técnicas potencialmente erróneas, determinar la frecuencia de las técnicas erróneas por edades, dificultades con la división y operaciones con cero, persistencia de técnicas erróneas individuales, clasificar y agrupar los errores.
	Engelhard	1975	Dieron continuación con sus trabajos a la corriente de investigación de Brueckner.
	Lankford	1972	
	Cox	1975	
	Erlwanger	1975	Estructuras básicas en los procesos enseñanza – aprendizaje empleando el análisis de errores cómo método de investigación, junto a entrevistas clínicas y el estudio de casos.
	Ginsburg	1977	
	Ashlock	1975	Enseñanza por diagnóstico en matemáticas, análisis de errores.
	Reisman	1972	
	Robitaille	1976	
España	Villarejo A.	1953	Reflexión para considerar los errores más frecuentes en aritmética escolar y da bases para presentar bases de una enseñanza correctiva en aritmética con base en métodos
	Fernández H.		

			diagnósticos resultado de los errores detectados.

La mayor parte de estudios realizados se basan en el recuento del número de soluciones incorrectas a una serie de problemas y en un análisis de las clases de errores detectados. Los aportes de los autores antes mencionados abordan los errores esencialmente en el campo de la aritmética, donde hacen un uso descriptivo de ellos. Se nota la ausencia de trabajo en el área de la geometría, dando a entender la falta de interés en su estudio.

1.2. Los errores en la resolución de problemas geométricos, posterior a 1977

El estudio y análisis de los errores es una línea de estudio en educación matemática. Son cuatro las líneas de investigación que articulan los estudios e investigaciones:

1. *"Estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías y clasificaciones de errores detectados.*
2. *Estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje de las matemáticas.*
3. *Estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los estudiantes.*
4. *Trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores"[8].*

[8] Kilpatrick, J. (1995). *Educación Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes.* Bogotá: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamerica.pág. 95.

Estas líneas de investigación, apoyadas por el procesamiento humano de la información, enmarcan los trabajos realizados a partir de 1977, tales como los siguientes:

- Radatz, H. (1979) clasificó los errores teniendo en cuenta el procesamiento de la información en cinco categorías: errores debidos a dificultades del lenguaje, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, errores debidos a asociaciones incorrectas o a la rigidez de pensamiento y errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
- Bell, A. (1986), cuyos trabajos realizados o dirigidos están orientados a "descubrir y poner de manifiesto un número de áreas susceptibles de errores y equivocaciones graves y ampliamente desconocidas". Se han desarrollado diversas clases de tareas que facilitan descubrir conocimientos erróneos, llevar a la reflexión y poner de manifiesto los conceptos pertinentes. El Shell Center de la Universidad de Nottingham ha desarrollado varios tipos de tareas que se han difundido y las cuales tienen un desarrollo didáctico sobresaliente.
- Borassi, R. (1987) y otros autores vienen desarrollando la utilización de los errores como fundamento para explorar nuevos conocimientos en matemáticas.
- Movshovitz, N., Zaslavksy O. & Inbar, S. (1987), realizan una clasificación basada en un análisis constructivo de las soluciones, en seis categorías: errores debidos a datos mal utilizados, errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje, errores debidos a inferencias no válidas lógicamente, errores debidos

al uso de teoremas o definiciones deformadas, errores debidos a la falta de verificación de la solución y errores técnicos que incluyen los errores de cálculo.

- Centeno J. (1988) plantea la necesidad de interpretar los errores con el objeto de orientar la enseñanza.
- El trabajo de Díaz, G. (1990) enuncia una serie de errores de aritmética, álgebra y cálculo que ha observado. Presenta una prueba escrita con cinco numerales sobre álgebra y trigonometría para que sobre ella los estudiantes respondan si es correcto o no el enunciado. Concluye, entre otras, que los estudiantes de ingeniería de los tres primeros semestres "*persisten en cometer errores de teoría elemental de matemáticas*"[9], específicamente en lo relacionado con álgebra y trigonometría.
- Sora, S. y Cáceres, S. (1991), basan su trabajo en un cuestionario con temas como simetrías, congruencias, semejanzas, áreas, volúmenes, construcciones y relaciones espaciales. El cuestionario de selección múltiple, arroja en su análisis que los estudiantes de noveno tienen muy malas bases pues sus conocimientos en geometría son muy deficientes. Además también concluye "*que los errores que presentan los estudiantes se deben a que no traen conceptos fundamentales*

[9] Diaz, I. (1990). Detección y análisis de errores frecuentes en álgebra y trigonometría en la Universidad Antonio Nariño como base para una metodología especial para la enseñanza de la matemática básica. Bogotá: Tesis de pregrado, Universidad Antonio Nariño.

como recta, paralela, confunden conceptos como perímetro y área, no saben enfrentar una demostración"[10].

- Socas, M. (1997) presenta una tipificación con tres categorías: Errores que tienen su origen en un obstáculo, errores que tienen su origen en la ausencia de sentido y errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.
- Astolfi, J. (1999) propone una tipología con ocho categorías: Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo, errores como resultado de hábitos escolares o de una mala interpretación, errores como resultado de las concepciones alternativas de los estudiantes, errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas, errores en los procesos adoptados, errores debidos a una sobrecarga cognitiva de la actividad a realizar, errores que tienen su origen en otra disciplina y errores causados por la complejidad propia del contenido.
- Brousseau, G. (2003) propone una tipología con cinco categorías: Error a un nivel práctico, error en la tarea, error de técnica, error de tecnología y error de nivel teórico.
- Franchi, L. & Hernández, A. (2004) de la Universidad de Zulia proponen una tipología formada por ocho categorías para clasificar los errores cometidos por los estudiantes en el área de la geometría plana, estas son: errores de prerrequisitos, errores propios del lenguaje geométrico, errores gráficos, errores

[10] Sora, A. & Cáceres, A. (1991). *Estudio diagnóstico sobre los errores comunes y frecuentes en Geometría Euclidiana cometidos por los alumnos de noveno grado de Educación Básica Secundaria y algunas posibles estrategias didácticas y metodológicas para su corrección.* Bogotá: Tesis de pregrado Universidad Antonio Nariño.

de razonamiento, errores de transferencia, errores de técnica, errores de tecnología y errores azarosos

- Bocco, M. & Canter, C. (2010), En su investigación titulada, Errores en geometría: clasificación e incidencia en un curso preuniversitario, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina; analizan los errores cometidos por los alumnos, en la aplicación de conceptos geométricos relevantes.

- Radillo, M., Ulloa, R. & y Villalpando, J. de la Universidad de Guadalajara, realizan una investigación sobre los obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclidiana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático.

- Souza, S. (2009), de la Universidad Federal de Pernambuco, Recife – Brasil en su trabajo de investigación realiza un análisis de los errores de los alumnos en clases virtuales de geometría descriptiva bajo las teorías del desarrollo del pensamiento geométrico y del concepto figural, donde verifica la ocurrencia de errores desde la clasificación propuesta por Astolfi, J. (1999), desde los niveles propuestos por Van Hiele (1986), y del concepto figural (Fischbein, 1993).

- En el libro La Didáctica y la Dificultad en Matemática[11] de D'Amore, B., et al. (2011), se presenta el apartado, 1.8 relacionado a "Errores específicos", dando un ejemplo de geometría respecto a la relación entre área y perímetro. En el capítulo 2 se ofrece un estudio de los obstáculos en el aprendizaje de la

[11] D'Amore, B., et al (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Bogotá. Editorial Magisterio.

matemática. En el capítulo 3, “Imágenes, modelos y misconcepciones” se presenta un estudio tendiente a una clasificación de esta última a partir de las particularidades específicas. En el apartado 3.8, “Ejemplos de misconcepciones evitables e inevitables se citan ejemplos de ambas categorías y a partir de la página 95 dan ejemplos principalmente de geometría.

- Pochulu, M. (2004) realiza un trabajo de investigación sobre el análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. En este trabajo se afirma “…*que parte de las dificultades que presentan los alumnos son debidas a estrategias inadecuadas llevadas a cabo por los profesores*”[12]. Así mismo aduce que algunos errores se deben a que los estudiantes “… *leen un enunciado en forma incompleta y quieren tener la respuesta en forma instantánea*”[13]. El autor de esta tesis comparte estos criterios, pues la preparación adecuada de los docentes y la implementación en las clases de estrategias, que conduzcan a minimizar el error, donde el estudiante comprometido, propicia el éxito en resolución de problemas.
- En su trabajo de investigación Radillo, M., y Huerta, S, (2012) desarrollan un análisis sobre los obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclidiana relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En este trabajo se concluye que los obstáculos están relacionados con los procesos de

[12] Pochulu, M. (2005). Análisis y categorizazción de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1 - 14.
[13] Ibídem.

traducción entre códigos del lenguaje matemático y que desde el punto de vista lingüístico se clasifican en las categorías sintáctica y semántica.

En tal sentido, el autor de esta tesis aduce que en todas estas tipologías, aún la específica para geometría de Franchi, L. & Hernández, A. (2003), la cual se considera la más adecuada en correspondencia al campo de la investigación, y se profundizará en el capítulo 3. En estas tipologías se presentan ciertas limitaciones al precisar los errores específicos cometidos por los estudiantes, pues las pruebas que ellas realizan son preguntas de carácter abierto, a diferencia de las de olimpiadas que en sus primeros niveles son de selección múltiple.

Conclusión del capítulo 1

Son variados los trabajos sobre error en matemáticas, los cuales están suficientemente fundamentados y corresponden en diferentes sentidos a la clase de investigación realizada. En un alto número de trabajos, el campo de estudio es la aritmética, respecto al objeto de estudio de la presente investigación son pocos los estudios realizados, e igualmente hacia otras ramas de la matemáticas. Lo anterior parece una debilidad, pero da margen para un gran campo de investigación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Actualmente existe una tendencia que en los trabajos realizados sobre los errores, no solamente se hace la descripción y tipificación, sino que empiezan a darse sugerencias didácticas para su superación.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas se inicia en la escuela colombiana desde los primeros grados, con el objetivo de preparar a los estudiantes para que sean capaces de resolver los problemas de la vida cotidiana. En este capítulo se ofrece una conceptualización sobre la resolución de problemas y también se hace referencia al error como estrategia didáctica.

2.1. Conceptualización sobre la solución de problemas

Se conoce al enfoque de resolución de problemas como "… *una variedad de formas de trabajo que abarcan desde la simple incorporación de problemas en el desarrollo de una clase, hasta propuestas sumamente elaboradas apoyadas en teorías sobre el desarrollo cognitivo o el procesamiento de la información*"[14]. La resolución de problemas como estrategia didáctica se fundamenta en "*… que el problema es el principio, la motivación y el fin;…*"[15]. Un problema interesante y bien llevado atrapa al alumno, lo mantiene cautivo, lo inspira y hace que se esfuerce y busque caminos que lo lleven a la solución.

Diferentes investigadores, han realizado investigaciones donde abordan problemas como propuestas didácticas, entre los que se destacan: Polya, G. (1965), Fridman, L. (1972), Martínez, M. (1981), Majmutov, M. (1983), Rohn, K. (1984), Schoenfeld, A. (1985), Mayer, R. (1986), Sánchez, L. (1994), Garret, R. (1995), Labarrere, G. (1987), Campistrous, L. y Rizo C. (1996) y Álvarez, C. (1996).

---

[14] Mancera, E. (2000). *Saber matemáticas es saber resolver problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
[15] Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Sobre la conceptualización de problema matemático hay una amplia literatura, encontrándose autores como Polya, G. (1945) y su libro: Como plantear y resolver problemas; Borasi, R. (1986) quien da elementos estructurales para una tipología de problemas; Schoenfeld, A. (1985), quien propone un marco con cuatro componentes (los recursos, la heurística, el control y los sistemas de creencias). Otros autores como Gascón, J. (1992) identifica lo que denomina siete paradigmas para la resolución de problemas (teoricista, tecnicista, modernista, constructivista, procedimental, de la modelación y de los momentos didácticos). Por su parte Guzmán, M. (1987) elaboró un modelo donde incluye decisiones ejecutivas y de control, así como las heurísticas para la resolución de problemas. También Callejo, M. (1994), Mason, J (1988), Bagazgoitia (1997) y el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) propusieron en 1980 como eslogan educativo de la matemática escolar la resolución de problemas.

El término problema se define, en un sentido amplio, como aquella tarea a la que una persona se enfrenta y desea o necesita encontrar una solución sin poseer un procedimiento accesible y fácil para encontrarla y, como consecuencia, realiza distintos intentos.

En su libro *Mathematical Discovery* (Polya, G. 1961), se vio obligado a proporcionar una definición de problema. Pero no para empezar su disertación, sino en el capítulo 5, y después de una amplia exposición práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas. Polya, G. (1961), plantea que tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

Otra definición, parecida a la de Polya, G. (1961) es la de Krulik, S. y Rudnik, J. (1980), quienes plantean que: “*Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para el cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma”*[16]. Esta última definición de problema es asumida por el autor de esta tesis, por considerarla la más atinada a lo que se pretende en la investigación.

Diversos autores han dado estrategias sobre resolución de problemas que buscan en general llevar a feliz término la solución.

Según Schoenfeld, A. (1985) en la resolución de problemas: “*el estudiante debe tener dominio de recursos informáticos, manejo de las estrategias heurísticas y meta cognitivas y al sistema de creencias que tenga sobre las matemáticas*”[17].

Polya, G. (1961) señala métodos para la mejora de un derrotero para llevar a feliz término la resolución de problemas, lo cual quedó plasmado en su libro: *How to solve it.* Su técnica comprendía cuatro etapas:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Revisión retrospectiva.

---

[16] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . pág. 4.
[17] Schoenfeld, A. (1985) Mathematical Problem Solving. Academic Press, San Diego, CA, USA.

Para cada una de las etapas anteriores plantea una serie de preguntas que orientan a quien pretende resolver el problema. Hadamard, J. (1945) determina de manera similar a Polya, G. (1961), cuatro etapas en la solución de problemas:

- Preparación.
- Incubación.
- Iluminación.
- Comprobación.

Por su parte Dewey, J. (1910) describe a su tiempo una secuencia para la resolución de problemas:

- Presentación del problema.
- Definición del problema, tomando sus elementos esenciales.
- Formulación de una hipótesis.
- Ensayo de la hipótesis.
- Comprobación de la hipótesis.

Guzmán, M. (1991) parte de las ideas de Polya, J. (1961) y Mason, J., et al. (1988), y de los trabajos de Schoenfeld, A. (1985), y elabora un modelo para la ocupación con problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras, lo que Polya denominó pensamiento productivo. El modelo tiene los siguientes pasos:

- Familiarizarse con el problema.
- Buscar estrategias.
- Llevar adelante la estrategia.
- Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Para cada uno de los anteriores pasos da una serie de elementos que en cierta medida facilitan el llevar a cabo la solución del problema.

Cada uno de los autores antes citado presenta una estrategia, con la que se piensa en guiar al estudiante por un camino que le facilite llegar a la solución. Estos investigadores han realizado sus trabajos orientados en general hacia la aritmética y el álgebra, pero a juicio del autor de esta tesis, hay algunos campos de la matemática que requieren de un tratamiento ligeramente especial, por ejemplo la solución de problemas geométricos. Basado en los anteriores autores se puede proponer una estrategia que pueda servir como orientador para resolver los problemas geométricos de olimpiadas que involucren componentes aritmética, algebraica y/o trigonométrica. Este constaría de cuatro estados que se describen a continuación: familiarizarse con el problema, idear un plan o una estrategia, ejecutar el plan y mirar hacia atrás. A continuación se explican en cada uno de estos estados una guía para ir avanzando en el desarrollo del problema.

Estado 1: familiarizarse con el problema

Hacer que el estudiante se entere del problema, que sea capaz de repetirlo con sus propias palabras y capaz de comprender la situación que aparece. Para ello se sugiere:

- Leer el problema despacio, mentalmente, para entender a fondo la situación.
- Jugar con la situación.
- Ver cuáles son los datos.
- Escoger un lenguaje básico y adecuado de uso común, así como una notación apropiada.
- Percibir las figuras involucradas.
- Dibujar una figura o completar la figura dada con segmentos, rectas que pueden ser de utilidad en la solución.
- Usar propiedades geométricas de las figuras para identificarlas, compararlas, ordenarlas o caracterizarlas.
- Preguntar: ¿Cuál es la incógnita (lo que busca).
- Ver qué relación existe entre la incógnita y los datos.
- Preguntar ¿Sobran datos? Puede ser importante dar más datos de los necesarios para que el estudiante escoja los más importantes o necesarios.
- Ir trabajando con paz, con tranquilidad, a su ritmo.

Estado 2: idear un plan o una estrategia

- ¿Cómo se debe abordar el problema? Para ello se debe:

- Empezar por lo que se considera fácil, experimentar.
- Preguntar ¿Qué se conoce?
- ¿Qué se quiere conocer?
- ¿Qué conceptos y pasos se necesitan?
- ¿Qué operaciones se requieren?
- Describir las partes que integran las figuras, enunciar las propiedades de sus partes y analizar las propiedades matemáticas.
- Pensar si existen parecidos con problemas anteriores.
- Interrogarse: ¿Se puede plantear de problema de otra manera?
- Imaginar otro problema parecido, pero más sencillo (si los números son grandes, hacerlos más pequeños); de otro problema resuelto hacerlo al contrario.
- Preguntar ¿Se utilizaron todos los datos?
- Actuar con cierta flexibilidad, no ser terco con una idea si no funciona, buscar otra visión.

Estado 3: ejecutar el plan

- ¿Qué propiedades relacionan los elementos de la figura?
- ¿Qué propiedades relacionan dos o más figuras?
- Relacionar los elementos matemáticos a los geométricos.
- Comprobar cada uno de los pasos.

- ¿Puede verse que cada uno de los pasos es correcto?
- Antes de dar un paso, preguntarse ¿qué consigo con esto?, es decir no calcular por calcular.
- Acompañar cada paso con una explicación de lo que se hace y para qué se hace (es importantísimo).
- Cuando se tropiece con alguna dificultad que lo bloquee, romper con lo que se está haciendo y volver al principio.

Estado 4: mirar hacia atrás.

Comprobar si la solución obtenida parece buena, lógica o adecuada. Para ello debemos:

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Fijarse en la solución y comprobar si parece lógica.
- Comprobar la solución, ¿seguro?
- ¿Habrá algún otro modo de resolver ese problema?
- ¿Puede existir alguna otra solución distinta?
- ¿Existe una definición equivalente de un concepto que se puede utilizar indistintamente?
- ¿Hubo claridad en el uso de axiomas, definiciones o teoremas a aplicar?

- Acompañar siempre la solución de una explicación que aclare lo que se ha encontrado, es decir las matemáticas no son solo números, sino pensamientos que hay que contrastar con palabras.
- Saca consecuencias y conclusiones para el futuro.

La propuesta realizada enriquece las secuencias presentadas por otros autores y va encaminada a mejorar el desarrollo de las soluciones en problemas geométricos.

2.1.1 Problemas desde la olimpiada colombiana de matemáticas

Además de los elementos o factores tenidos en cuenta en la solución de problemas, en las Olimpiadas de Matemáticas se les propone a los estudiantes ciertos tipos de problemas, todos ellos **retadores.** *"Los problemas retadores son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento."*[18]

"*Los problemas retadores exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior"*[19]. Estos son criterios que son compartidos por el autor de esta investigación.

[18] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[19] ibidem

Cada buen problema cuidadosamente seleccionado para los concursos de Olimpiadas de Matemáticas abre la puerta "… *al estudiante para razonar, investigar, conjeturar, comprobar y demostrar,*…"[20] Los problemas con estas connotaciones abarcan los campos de la matemática escolar: aritmética, álgebra, geometría, combinatoria, estadística y probabilidad.

Para que un problema sea motivante debe tener tres características, *"… que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"*[21]. Lo que se busca es que el estudiante adquiera el hábito de resolver problemas, donde se recuerde los ya resueltos, que lo haga con esmero y lo convierta en un arte.

El proceso de resolución de problemas se ve favorecido por habilidades intelectuales tales como la flexibilidad de pensamiento, la reversibilidad de pensamiento, la generalización, la estimación, la imaginación espacial, la discriminación y la habilidad en el cálculo mental, cuestiones estas que el autor de esta investigación considera que son determinantes para la resolución de problemas geométrico de olimpiadas.

En la resolución de un problema se debe tener claridad con lo escrito (caligrafía), lo que lleva a dar elegancia a su solución, pues en el momento de ser evaluado sería tomado en cuenta. Medina, F. (1984) menciona siete pasos basados en preguntas para facilitar la crítica sobre la autoevaluación relacionados con la claridad en la exposición, claridad en las gráficas, desarrollo ordenado, construcciones auxiliares

---

[20]Ibídem, Pag II.

[21] Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.pág 16.

adecuadas, claridad en los resultados preliminares, ordenadas proposiciones auxiliares y sobre la solución o soluciones que sean probadas y entendibles. La buena presentación debe estar presente y aún más allá, "*Hay que inculcar en el alumno la estética matemática, es decir, la solución a un problema es más elegante en cuanto menos difícil sea la teoría empleada para solucionarlo, o sea, la solución más sencilla es la más elegante e ingeniosa*"[22].

2.1.3. Olimpiada Colombiana de Matemáticas

Con relación a las Olimpiada Colombiana de Matemáticas, en esta tesis se asumen algunos elementos de la filosofía de éstas, las cuales son normativas de la Universidad Antonio Nariño.

La misión de las olimpiadas es mostrar a los estudiantes las puertas abiertas a cuestiones matemáticas como: razonar, investigar, conjeturar, comprobar y demostrar.

La visión de las olimpiadas de matemáticas es formar en nuestro país una comunidad científica numerosa y de gran capacidad, donde se aproveche al máximo tanto las capacidades individuales como el trabajo en grupo, fomentados desde temprana edad en los diferentes eventos propuestos.

Las Olimpiadas de Matemáticas en Colombia dieron inicio en 1980; han sido más de treinta años de incansable trabajo a favor de las generaciones de jóvenes talentosos.

El fruto de este trabajo se resume en más de 200 medallas en diferentes certámenes internacionales como reconocimiento al esfuerzo, dedicación y talento de los

[22] Valderrama, J. (1986). *Problemas de Olimpiadas. Primer Nivel.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

estudiantes colombianos, en numerosos eventos internacionales, algunos coordinados por Colombia, y ante todo en un gran grupo de estudiantes interesados en las matemáticas y en el avance científico del país en general.

A continuación se presentan los objetivos de las olimpiadas colombianas de Matemática.

- *“Proponer ante la comunidad estudiantil metas consecuentes con la búsqueda de la excelencia académica en matemáticas.*
- *Impulsar la investigación y el pensamiento creativo de los estudiantes del país dentro del marco de sus estudios, desde la escuela primaria hasta los universitarios.*
- *Identificar estudiantes con especial interés y capacidad en Matemáticas para brindarles orientación y apoyo en sus estudios.*
- *Formar líderes de la comunidad científica colombiana.*

Los nueve eventos nacionales y cinco internacionales de las Olimpiadas de Matemáticas conforman un programa completo de enriquecimiento del aprendizaje de la matemática que comprende actividades a distintos niveles y de diversa naturaleza que permiten a cada estudiante buscar su óptimo nivel de realización en matemáticas. Es además un programa de apoyo al profesor en su búsqueda de la excelencia en el salón de clase. Algunos eventos permiten abarcar también actividades investigativas en el marco de solución de problemas *que requieren varias semanas o meses de dedicación, indagación y pensamiento."*[23]

Los eventos de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas dirigida a estudiantes de secundaria tienen tres niveles (Primer Nivel, Nivel Intermedio y Nivel Superior).

En las olimpiadas los alumnos muestran sus conocimientos y habilidades, pues en éstas razonan, investigan, conjeturan, comprueban y demuestran, sobre tópicos como: aritmética, algebra, combinatoria y geometría. El autor de este trabajo basado en los resultados de las pruebas de geometría, busca determinar los errores que se presentan para proponer una estrategia que logre minimizarlos.

2.3. La heurística en la resolución de problemas geométricos de olimpiada

La heurística puede describirse como el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención o de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente. Este proceso es un rasgo característico de los seres humanos.

En psicología el término está relacionado con la creatividad, entendido como una norma sencilla y eficiente que guía la toma de decisiones para que de una manera práctica se llegue a un juicio o a la solución de un problema.

Polya, G. (1965), fue uno de los autores que dio a conocer el concepto de heurística en la enseñanza de la matemática, en su libro: *Cómo resolverlo*. El libro contiene una

[23] Tomado de la Universidad Antonio Nariño. (2012). www.uan.edu.co. Recuperado el 15 de 08 de 2012 de la URL: http://olimpia.uan.edu.co/olimpiadas/public/frameset.jsp.

guía a base de preguntas para seguir paso a paso la solución de un problema. Cuatro de las orientaciones que se seguían permiten comprender el concepto:

- Si no consigues entender un problema, dibuja un esquema.
- Si no encuentras la solución, haz como si ya la tuvieras y mira qué puedes deducir *de ella* (razonando a la inversa).
- Si el problema es abstracto, prueba a examinar un ejemplo concreto.
- Intenta abordar primero un problema más general.

Autores como Ballester, P. et al. (1992), Torres, P. (2000), Rizo, C. (2009), entre otros hacen referencia al método heurístico. Este método es aquel "*... mediante el cual se le plantean a los alumnos impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y soluciones de éstos, donde el maestro no le informa al alumno los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes de forma independiente*"[24] .

En la Figura 1 se clasifican los recursos heurísticos en medios auxiliares heurísticos, procedimientos heurísticos y el programa heurístico general (Ballester, P. et al., 1992, Torres, P. 2000).

[24] Ballester et al., (1992a). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana: Pueblo y educación. p. 225.

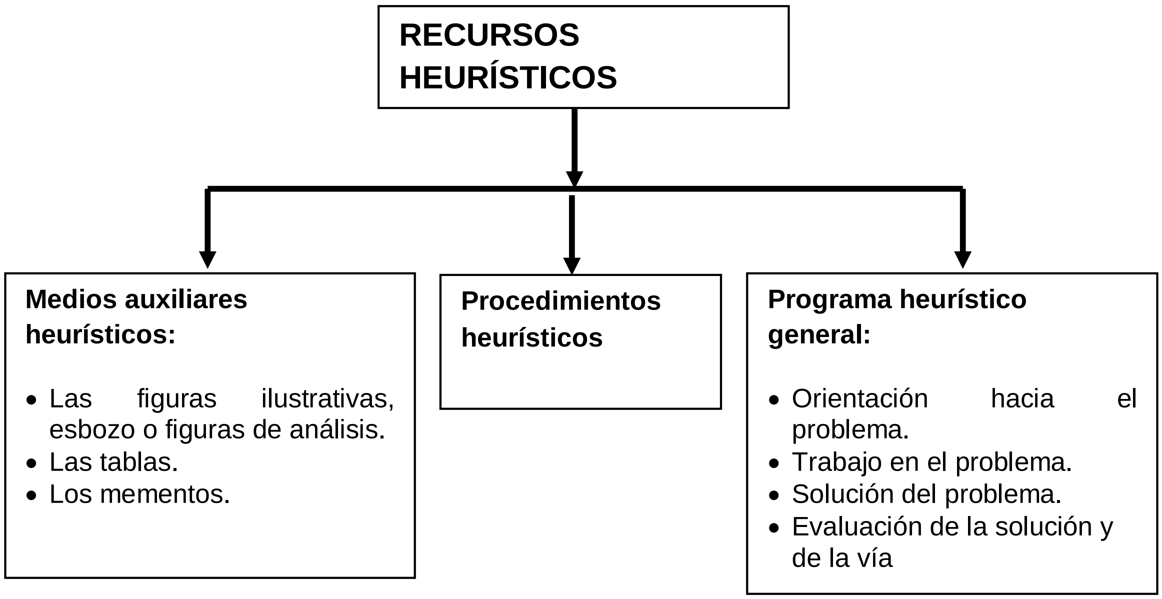


Figura 1. Clasificación de los recursos heurísticos.

Estos autores, a su vez clasifican los procedimientos heurísticos en principios generales, estrategias y reglas, tal como se muestra en la Figura 2.

Además de los principios generales relacionados en la Figura 2, se consideran otros principios llamados especiales, los cuales se aplican en el proceso de resolución de problemas, ellos son: principio de generalización, de movilidad, de medir y comparar, y de consideración de casos especiales y casos límites (Ballester et al., 1992a).

Por otra parte los impulsos heurísticos constituyen una herramienta intangible y fundamental para cada una de las etapas en la solución de los problemas. Estos impulsos pueden considerarse "… *como una actividad externa que realiza el docente y que provoca un estímulo en el sistema de conocimientos y recursos del alumno. Este se realiza sobre una situación dada, de modo que lo impela a buscar lo que se requiere en un momento dado para resolver una situación no conocida total o parcialmente,*

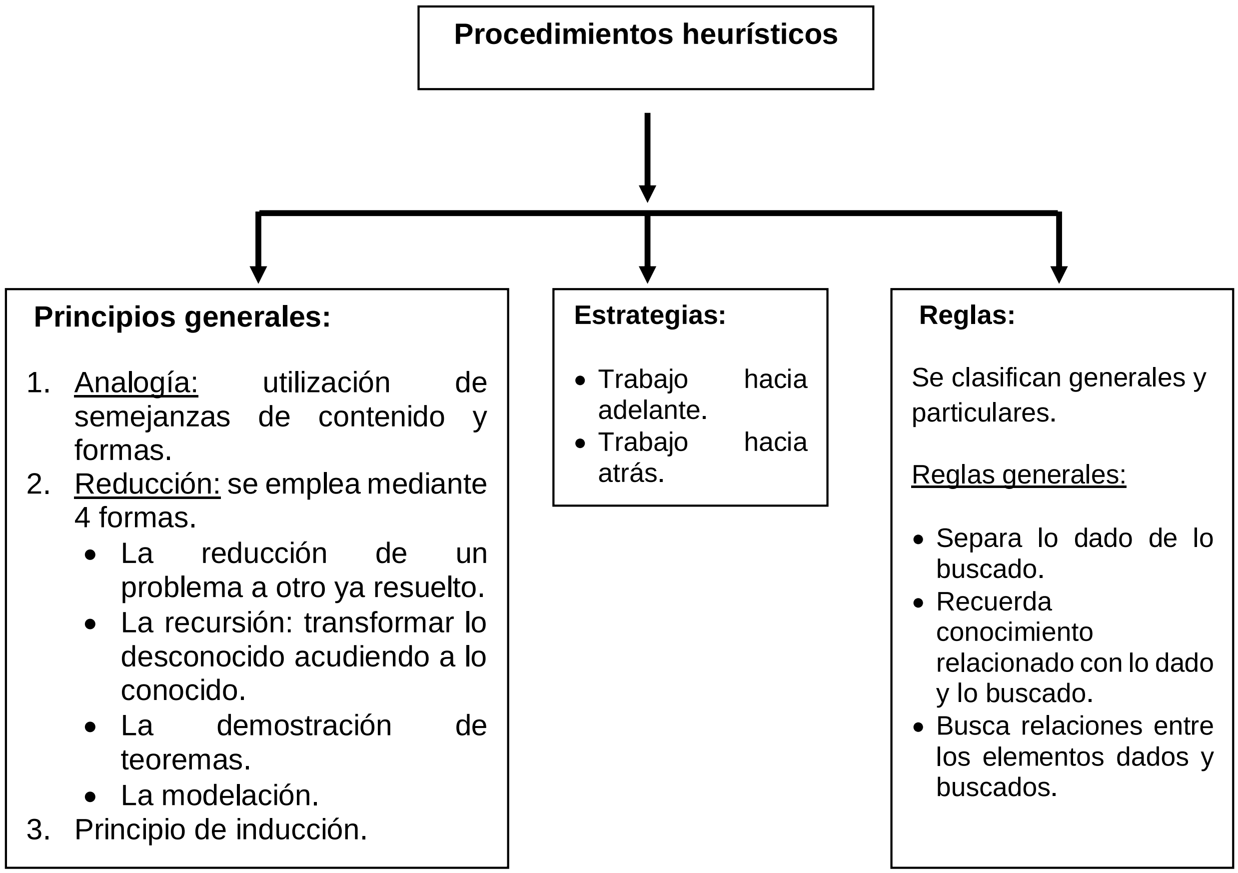


Figura 2. Clasificación de los procedimientos heurísticos.

pero sin ofrecer directamente la vía de solución, la que debe ser encontrada por el alumno"[25].

La heurística aplicada a la solución de problemas geométricos de olimpiada, tiene como fin hallar las reglas y métodos que le llevan paso a paso a la solución creativa y eficiente de cada uno de los problemas, donde se tiene en cuenta la lógica de los principios, reglas, estrategias y del programa heurístico general.

El uso de la heurística es importante en la enseñanza aprendizaje de la matemática,

[25] Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la luz y caballero". Holguín. p. 31

particularmente en la solución de problemas geométricos de olimpiadas, pues contribuye a:

- *"Desarrollar la actividad creadora y la independencia cognoscitiva de los alumnos.*
- *La integración de los nuevos conocimientos geométricos, obtenidos a partir de los conocimientos previos de la geometría plana o del espacio, existentes en el alumno, con los ya asimilados.*
- *Favorecer las operaciones intelectuales (análisis, síntesis, abstracción) como su componente fundamental.*
- *Desarrollar la intuición, la creatividad, la imaginación, etcétera, a través de la utilización de métodos y procedimientos activos y medios visuales en las clases.*
- *Favorecer el uso de las formas de trabajo y de pensamiento de la matemática, como la variación de condiciones y la búsqueda de relaciones y dependencias.*
- *Preparar a los alumnos para desarrollar un trabajo racional y planificado, lo cual les va a permitir ahorrar o conservar recursos mentales en la resolución de los problemas y situaciones de aprendizaje*."[26]

En la medida en que el docente y el estudiante interioricen y hagan de la heurística un hábito, se garantizará el éxito en la solución de problemas geométrico de olimpiada y por ende se minimizará al máximo el error.

---

[26] Ballester, P. et al., (1992a). Citado por Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógica "José de la Luz y Caballero". Holguín. p. 31-32.

2.4. El error como estrategia didáctica

La evaluación es uno de los elementos fundamentales en el proceso enseñanza aprendizaje. En este proceso estudiantes y docentes esperan los mejores resultados, pero no siempre se dan. Al momento de examinar los resultados de, por ejemplo, ejercicios o problemas desarrollados los mismos estudiantes o los docentes observan que la respuesta no es la correcta, hubo en algún momento, en algún paso del proceso de solución una falla, un error. Este error está manifestando que en el complejo proceso de la enseñanza aprendizaje hay una falencia en alguno de los factores que en éste intervienen: estudiante, docente, currículo, padre o el contexto.

En la dinámica del proceso de enseñanza aprendizaje se debe buscar la o las estrategias para que la dificultad o el error se supere. En la sistematización misma del proceso se debe observar si esta dificultad o error se ha venido produciendo en el tiempo para hallar sus causas y así evitar en lo posible que se presenten y así se obtengan resultados de mayor calidad.

Lo errores deben ser entendidos como la información de aquellos elementos que requieren atención especial y un esfuerzo conjunto para su superación, además deben ser vistos como un elemento que permite la llegada de un mejor y nuevo conocimiento. El docente en el seguimiento de su asignatura conoce los errores cometidos por sus estudiantes y dentro del tratamiento debe presentarles situaciones que les permita reconocer, reajustar y superar sus concepciones erróneas.

Según Kilpatrick, J. (1995), se refiere a que el docente conocedor de la pedagogía y psicología infantil y del adolescente debe en general tener presente:

- Desarrollar los conceptos y procesos de la matemática de acuerdo al desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva.
- Presentar los nuevos aprendizajes sobre el fundamento de que los anteriores fueron bien adquiridos.
- Generar un clima de confianza en la clase para que mediante discusiones y debates organizados se eliminen los falsos conceptos y se refuercen los correctos.
- Presentar de manera clara y agradable la construcción de los nuevos conceptos, dado el caso reelaborar el concepto, donde se parte de alguna de las concepciones erróneas de sus estudiantes.

El error, mucho más allá de ser un obstáculo, puede ser una fuente de investigación acerca de cuestiones de la naturaleza de las matemáticas. Además: "*Utilizar los errores como motivación y medio para interrogar sobre la naturaleza de las matemáticas puede mejorar la comprensión de las matemáticas como disciplina por parte de los estudiantes. Comprender una materia implica más que simplemente "aprender por comprensión" su contenido básico. También incluye comprender su filosofía, la metodología empleada, el alcance y la limitaciones de la disciplina; debe incluir el desarrollo de actitudes positivas hacia la disciplina.*"[27]

El tratamiento positivo del error, en las clases de matemática y particularmente en la preparación de estudiantes en la resolución de problemas de geometría, es una

---

[27] *Kilpatrick*, J. (1995). *Educación Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes.* Bogotá: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamerica. P.,95.

estrategia que propicia un aprendizaje significativo sobre esta temática y permite reafirmar los conocimientos ya existentes y lograr nuevos. *"Permite delimitar la diferencia, por ejemplo, entre necesidad y suficiencia de condiciones, saber plantear contraejemplos, entender cuando es posible suponer unas propiedades sin pérdida de generalidad, asumiendo que la afirmación errada fuera correcta"*[28].

2.5. Conceptos claves

Los conceptos claves tenidos en cuenta para los problemas de geometría en las olimpiadas son:

- Los objetos "*…como puntos, rectas, ángulos, triángulos, cuadriláteros, círculos y demás*"[29] y las relaciones entre ellos.
- Definiciones básicas relacionadas al triángulo: altura, mediana, bisectriz, mediatriz y las relaciones entre ellas.
- Áreas y volúmenes vistos desde el significado de los conceptos y no desde fórmulas para calcular sus valores.
- Combinatoria geométrica y probabilidad continua.
- Otros temas son: línea de Euler, teoremas de Tales, teorema de Pitágoras, Teorema de Ceva, Teorema de Menelao, Teorema de Pappus, Teorema de Pascal, lugar geométrico, transformaciones (traslación, reflexión, rotación, homotecia).

---

[28] Falk, M. (2012), Texto inédito durante la revisión del Anteproyecto de Álvaro Suárez.
[29] Medina, F. (1984). *Taller de Geometría.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Los contenidos programáticos plasmados en los estándares de matemáticas dados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se compaginan con los contenidos evaluados en la Olimpiadas.

Para el estudio de la matemática escolar desde los Lineamientos Curriculares en el área de matemáticas se han contemplado tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto. Los conocimientos básicos se han clasificado en cinco clases de pensamientos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistema de medidas, pensamiento aleatorio y sistema de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. A continuación se toman los estándares en matemática para los grados sexto a noveno.

Los contenidos organizados de acuerdo a los estándares en matemáticas para el pensamiento espacial y sistemas geométricos de sexto y séptimo son:

- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
- Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.
- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
- Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Los contenidos organizados de acuerdo a los estándares en matemáticas para el pensamiento métrico y sistemas de medidas para sexto y séptimo son:

- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
- Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
- Los contenidos organizados de acuerdo a los estándares en matemáticas para el pensamiento espacial y sistemas geométricos de octavo y noveno son:
- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Los contenidos organizados de acuerdo a los estándares en matemáticas para el pensamiento métrico y sistemas de medidas para sexto y séptimo son:

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
- Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

Conclusiones del capítulo 2

En los lineamientos curriculares se dan las orientaciones para que los docentes guíen sus asignaturas. En matemáticas la orientación a utilizar la metodología de resolución de problemas está suficientemente fundamentada, la cual se ve privilegiada por las actividades que a nivel mundial se realizan y en particular en nuestro país por la Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, que anualmente convocan a estudiantes de primaria y bachillerato a enfrentar problemas retadores.

La resolución de problemas permite un desarrollo más estructurado en el conocimiento y en el contexto, donde se lleva a que los estudiantes se preparen y hagan uso de las herramientas que les da la heurística en sus estructuras intelectuales, además que les prepara a corregir y aprender de sus propios errores.

Se considera la utilización del método heurístico en la resolución de problemas geométricos de olimpiada, donde se les plantean a los alumnos impulsos que facilitan la búsqueda independiente de sus soluciones, con el apoyo de medios auxiliares, procedimiento y programas heurísticos.

CAPÍTULO 3. TIPOLOGÍA DE ERRORES EN GEOMETRÍA

Como se ha mencionado, existen diferentes clasificaciones de tipología de errores en matemática orientadas a la aritmética y al algebra, pero pocas hacia la geometría. El trabajo con el error en la resolución de problemas geométricos es importante, pues permite mejorar el desarrollo del pensamiento espacial y métrico, tan necesario para la vida. En este capítulo se desarrolla la tipología de los errores en geometría, en la cual se sustenta la investigación, se seleccionan las preguntas de geometría en las pruebas de olimpiada y por último se propone una estrategia basadas en talleres, para minimizar el error en la solución de los problemas de geometría.

3.1. Tipología de los errores en la resolución de problemas de geometría

En el capítulo 1 se abordaron algunas clasificaciones de los errores en geometría. En esta tesis se asume la tipología propuesta por Franchi, L. & Hernández, A. (2004), la cual está compuesta de ocho categorías:

1. Errores de pre-requisitos: consideran que estos errores "…*están asociados específicamente a deficiencia en el aprendizaje de conceptos previos propios del bachillerato, como algebra elemental y dibujo técnico*."[30]

2. Errores propios del lenguaje geométrico: para las autoras este error proviene "… *de las dificultades que tienen los estudiantes para interpretar el lenguaje geométrico y para utilizar los símbolos y notaciones,…*[31]*".*

[30] Franchi, L., & Rincón, A. I. (2004). *Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II* (Vol. 8). Mérida: Educere. p. 197.
[31] Ibídem. p. 198 .

3. Errores gráficos: los interpretan las autoras como "*la falta de habilidad para imaginar, trazar e interpretar figuras geométricas*.[32]"

4. Errores de razonamiento: los explican como "… *los errores que se derivan del mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, lo cual conlleva el manejo errado de axiomas, teoremas, corolarios y definiciones geométricas*.[33]"

5. Errores de transferencia: los explican como "…*la falta de habilidad que tiene el estudiante para utilizar conocimientos adquiridos en otras asignaturas o en la asignatura objeto de estudio para resolver situaciones problémicas reales*.[34]"

6. Errores de técnica: adoptaron este tipo de error de la tipología de Brousseau (2001) y "… *surgen por la aplicación incorrecta o inadecuada de procedimientos o algoritmos en la solución de problemas geométricos o en la demostración de proposiciones geométricas*.[35]"

7. Errores de tecnología: tomado también de Brousseau (2001), y considerados como "*aquellos que se producen cuando el alumno selecciona un algoritmo inadecuado para resolver un problema geométrico o usa una estrategia inadecuada para realizar una demostración geométrica."*[36]

[32] Ibídem. p. 198.

[33] Ibídem. p. 199.

[34] Ibídem. p. 200.

[35] Franchi, L., & Rincón, A. I. (2004). *Tipoñogía de errores en el área de la geometría plana. Parte II* (Vol. 8). Mérida: Educere. p. 201.

[36] Ibídem. p. 201.

8. Errores azarosos: para las autoras "…*tienen menor importancia, pues surgen a consecuencia de un descuido o por efectos del azar… cuando el alumno transcribe mal una cantidad o símbolo o sustituye mal un dato en una ecuación dada, manipula inadecuadamente los signos algebraicos o cuando ejecuta mal operaciones aritméticas*."[37]

Para cada una de las anteriores categorías las autores hacen una exposición explicita e ilustrada con ejemplos claros y concretos. El primer error de prerrequisitos fue catalogado para bachillerato, pero lo podemos hacer extensivo para cualquier curso anterior al que se aplica la prueba.

Esta tipificación en gran medida se adapta mejor a la geometría, además que unifica las tipologías propuestas por Radatz (1979), Movshovitz (1987), Socas (1997), Astolfi (1999) y Brousseau (2001) de tal forma que será la que se tomará como base para tipificar los errores encontrados en las PCN-PN y PCN–NI, fundamentado en el razonamiento erróneo que llevó a la opción errada.

3.2. Las preguntas de geometría en las pruebas de olimpiada

En las pruebas de olimpiadas por lo general, el 30% de las preguntas están relacionadas con geometría; en este trabajo se seleccionan las correspondientes a esta temática, de las pruebas del primer nivel y nivel intermedio del 2007 al 2011.

[37] Ibídem. p. 201.

En la Tabla 2 aparecen las preguntas elegibles y el número corresponde a la pregunta que figura en el cuadernillo del año y nivel correspondiente en el documento oficial de la respectiva olimpiada.

Tabla 2. Cuadro que muestra la selección de las preguntas de geometría de cada prueba.

AÑO	NIVEL	Número de la pregunta											
2007	PN	3	4	5	6	7	10	13	17	18	19	21	11
	NI	3	8	14	15	18	19	21	24				8
2008	PN	8	11	12	14	16	22	23	25				8
	NI	2	10	14	16	17	18	19	22	21	25		10
2009	PN	4	6	16	17	18	21	23	25				8
	NI	6	10	11	12	14	15	17	19	21	23	24	11
2010	PN	4	7	8	12	18	19	20	21	25			9
	NI	4	5	6	8	10	15	19	20	23	24		
2011	PN	6	10	I2	13	16	17	18	19	23			9
	NI	6	7	0	4	5	9	23	24				8
		TOTAL											82

De las 82 preguntas de geometría se seleccionaron aquellas en las que la misma opción errada fue seleccionada por más del 30% de los estudiantes.

Tabla3. Selección de las preguntas de geometría con error en uno de los ítems superior al 30%

AÑO	NIVEL		RESPUESTA	%	ERROR	%	PARTICIPANTES
2007	PN	3	A	23.06	C	37.08	
		6	C	20.13	B	37.51	
		7	B	8.55	A	47.35	12791
	NI	14	A	11.07	B	30.94	
		21	C	15.84	E	30.71	12102
2008	PN	12	A	16.27	B	32.70	12563

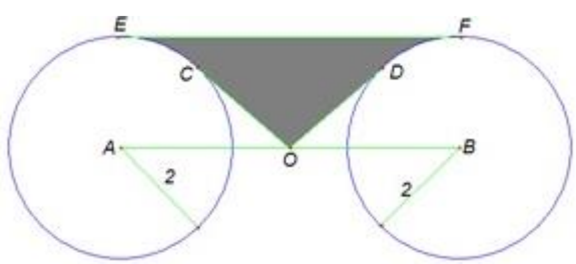
		16	A	13.20	D	30.62	
		25	B	12.42	C	31.34	
	NI						12696
2009	PN	6	D	18.10	A	56.80	
		21	C	10.79	A	47.15	14998
	NI	6	A	28.89	C	30.17	14495
2010	PN	7	C	22.97	E	30.03	
		8	B	10.57	C	46.14	
		18	C	26.40	A	30.18	13304
	NI	4	D	7.30	A	35.59	
		6	D	9.15	C	46.87	
		10	A	8.83	C	53.33	
		23	D	15.69	B	34.85	13820
2011	PN	6	E	20.24	D	40.30	12934
	NI	7	C	34.33	A	34.35	12540

En la Tabla 3 se puede observar que en las pruebas del PN del 2009, en la pregunta 6 el 18.10% de los estudiantes respondieron correctamente, pero el 56.8% es decir 8519 de los estudiantes seleccionaron la misma opción errada, el porcentaje más alto de participantes que cometen el mismo error. De manera similar y no menos significativo, de las veinte preguntas seleccionadas la número 7 en las PN del 2010, el 30.03% seleccionaron la misma opción errada, lo que corresponde a 3995 estudiantes de los 13304 que la presentaron. Las anteriores 20 preguntas son las que se toman para su análisis. Estas y otras elaboradas por el autor de la tesis serán las que se apliquen de manera abierta a estudiantes de noveno, para contrastar los resultados.

Se muestra a continuación un ejemplo del análisis que se va a hacer a cada uno de los problemas seleccionados en tabla 3. El problema corresponde a la pregunta 24 de la XXVI Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Prueba Clasificatoria Nacional, Nivel Intermedio-Grados 8 y 9, realizada el 6 de marzo de 2007; es de aclarar que no corresponde a uno de los seleccionados, solo se toma como modelo.

Es de anotar que en el problema de ilustración, que sirve de ejemplo y viene a continuación, cada una de las opciones de respuesta fue marcada por menos del 18% de los estudiantes, siendo la pregunta en la que más estudiantes dejaron de seleccionar, pues el 29.29% se abstuvo de marcar alguna opción, dando a entender que fue la pregunta con mayor dificultad.

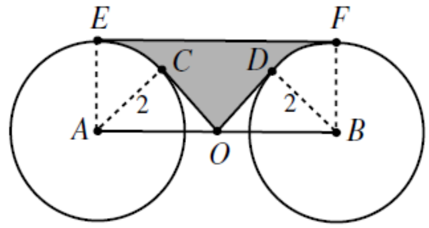
Se toma el problema: "Los dos círculos con centros *A y B* tienen radio 2, como se muestra. El punto *O* es el punto medio de $\overline{AB}$ y $OA = 2\sqrt{2}$. Los segmentos $\overline{OC}$ y $\overline{\mathrm{OD}}$ son tangentes a los círculos con centros en *A y B,* respectivamente, y $\overline{\mathrm{EF}}$ es una tangente común. ¿Cuál es el área de la región sombreada *ECODF*?



(A) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (B) $8\sqrt{2} - 4 - \pi$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}$ (E) $8\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{2}$

La solución oficial se muestra en la Figura 3.

24. **Respuesta (B):** El rectángulo $ABFE$ tiene área $AE \cdot AB = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Cada uno de los triángulos rectángulos ACO y BDO tiene hipotenusa de longitud $2\sqrt{2}$ y un cateto de longitud 2.



Por lo tanto ellos son isósceles, y cada uno tiene área $(1/2)\left(2^2\right) = 2$. Cada uno de los ángulos CAE y DBF mide 45°, por lo tanto cada uno de los sectores CAE y DBF tiene área

$$\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{2}.$$

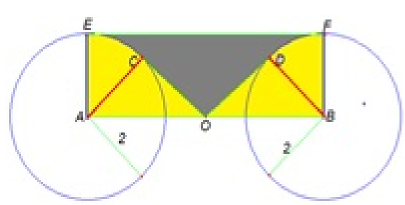
Por lo tanto el área de la región sombreada es

$$8\sqrt{2} - 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 8\sqrt{2} - 4 - \pi.$$

Figura 3. Imagen tomada de la solución oficial de la pregunta 24 de la XXVI Olimpiadas.

La anterior solución que corresponde a la respuesta correcta, la letra B, fue dada por el 14.45% de los estudiantes.

La respuesta incorrecta (A) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ fue seleccionada por el 13.49%de los participantes; la respuesta incorrecta (C) $4\sqrt{2}$ fue seleccionada por el 17.65% de los participantes; La respuesta incorrecta (D) $4\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}$, fue respondida por el 15.20% de los estudiantes y la respuesta E, respondida por el 9.84% de los estudiantes.



Como la respuesta (C) es la respuesta incorrecta respondida por mayor número de participantes se analiza para poder asignarla a una de las categorías de la tipología escogida.

Para llegar a ella, el estudiante pudo haber tomado en consideración el rectángulo *AEFB* y el conoce que el área es *L x A* (largo por ancho), reconoce que el ancho $\overline{AE} = 2$ por ser radio de la circunferencia, y el largo $\overline{AB} = 2 * 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Por lo tanto el área $AEFB = 2 * 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Supone erróneamente que el área sombreada de gris es la mitad del rectángulo obteniendo $\frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Este análisis permite decir que el estudiante cometió un error clasificado en la categoría tres, error de tipo gráfico.

De forma similar se procederá con los problemas seleccionados (Tabla 4).

3.3 Relación de problemas seleccionados y analizados.

Problema 1 (PN - 2007 – 3).

Elisa está entrenándose en natación. Cuando ella comenzó, hacía 10 trayectos de un extremo de la piscina al otro en 25 minutos. Ahora ella puede hacer 12 trayectos de un extremo de la piscina al otro en 24 minutos. ¿En cuántos minutos ha mejorado su tiempo de hacer uno de estos trayectos?

(A) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) 2 (E) 3

Solución oficial: (A) Cuando Elisa comenzó, ella hacia un trayecto de la piscina en $\frac{25}{10} = 2.5$ minutos. Ahora ella puede hacer un trayecto en $\frac{24}{12} = 2$ minutos. Ella ha mejorado su tiempo de trayecto de la piscina $2.5 - 2 = 0.5$ o $\frac{1}{2}$ minuto.

Análisis del ítem errado:

La opción con mayor cantidad de respuestas erradas corresponden al ítem C. Al responder este ítem con valor 1 se está trivializando la solución, aplicando sin sustento una operación aritmética directamente a los datos del problema. Aunque la respuesta puede estar dada en dos sentidos:

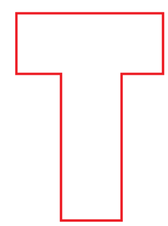
a. Que no interprete correctamente el problema, toma los tiempos totales y halla la diferencia $25\text{-}24 = 1$.

b. Menos probable, pero que en lugar de los 10 trayectos tome 5 circuitos, y en lugar de 12 trayectos tome 6 circuitos, así $\frac{25}{5} - \frac{24}{6} = 5 - 4 = 1$.

Puede afirmarse que éste es un error de trivialización.

Problema 2 (PN - 2007 – 6).

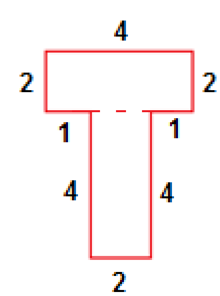
La letra **T** está formada colocando juntos dos rectángulos de 2 centímetros x 4 centímetros, como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de **T**, en centímetros?



(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 22 (E) 24

Solución oficial: (C) Teniendo en cuenta la simetría de la letra T, tenemos

El perímetro es 4 + 2 + 1 + 4 + 2 + 4 + 1 + 2 = 20 pulgadas.



O

El perímetro de cada rectángulo es de = 2l + 2w = 2(4) + 2(2) = 8 + 4 = 12 pulgadas. Cuando los dos rectángulos son colocados para formar la T, un segmento de dos pulgadas de cada rectángulo queda dentro de la T y no está en el perímetro de T. Entonces el perímetro de T es de $2(12) - 2(2) = 24 - 4 = 20$ pulgadas.

Análisis del ítem errado.

Al tomar los datos del problema el estudiante hace una interpretación errada debida a un mal uso del lenguaje (confunde perímetro y área, conceptos que no son confundibles excepto cuando el estudiante solamente los asocia con fórmulas para las cuales no ha construido ningún significado), pues cuando se le dan las dimensiones del rectángulo aplica una de las fórmulas que ha visto y realiza el producto, tomando el área dos veces, y como son dos rectángulos obtiene 16. El error es propio del lenguaje geométrico y trivialización del problema, y puede haber sido motivado por la limitación en la construcción del significado geométrico pues los profesores pueden hacer énfasis en la aplicación de las fórmulas cuando se le dan las dimensiones y las aplican indistintamente.

Problema 3 (PN - 2007 -7).

El círculo *X* tiene un radio de π. El círculo *Y* tiene una circunferencia de 8π . El círculo *Z* tiene un área de 9π . Hacer una lista de los círculos en orden del menor al mayor radio.

(A) *X,Y,Z* *(B) Z, X, Y* *(C) Y, X, Z* *(D) Z, Y, X* *(E) X, Z, Y*

Solución oficial: (B) Debido a que la longitud de la circunferencia se da por la fórmula $C = 2\pi r$ y, como el círculo *Y* tiene como longitud de su circunferencia 8π , su radio es $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$. Debido a que el área de un círculo se da por la fórmula $A = \pi r^2$, y el círculo *Z* tiene área 9π, su radio es $\sqrt{9} = 3$. Ordenando los radios, se obtiene $3 < \pi < 4$. Por lo tanto los círculos en orden ascendente de longitud de radio son *Z, X y Y*.

Análisis del ítem errado.

No tiene en cuenta la significancia de los valores dados, es decir no tiene clara diferencia entre los conceptos de radio, longitud de la circunferencia y área de la misma y sencillamente ordena los datos dados. Puede influir que las asignaciones a las circunferencias también están dadas en orden alfabético lo cual le lleva a dar una solución trivial al problema.

Problema 4 (NI - 2007- 14).

Se inscribe un triángulo cuyos lados están en la proporción $3:4:5$ en un círculo de radio 3. ¿Cuál es el área del triángulo?

(A) 8.64 (B) 12 (C) 5π (D) 17.28 (E) 18

Solución oficial: (A): Sean *3x, 4x, y 5x* las longitudes de los lados del triángulo. El triángulo es rectángulo, por lo tanto su hipotenusa es el diámetro del círculo. Entonces $5x = 2 * 3 = 6$ de donde $x = \frac{6}{5}$. El área del triángulo es

$$\frac{1}{2} * 3x * 4x = \frac{1}{2} * \frac{18}{5} * \frac{24}{5} = \frac{216}{25} = 8.64\text{, o,}$$

Un triángulo rectángulo con lados de longitudes 3, 4, y 5 tiene área de $\frac{1}{2} * 3 * 4 = 6$

Ya que el triángulo rectángulo dado está inscrito en un círculo con diámetro 6, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud 6. Entonces los lados del triángulo dado son 6 /5 tan largos como aquellos de un triángulo $3-4-5$, y su área es $\left(\frac{6}{5}\right)^2$ veces la de un triángulo $3:4:5$. El área del triángulo dado es

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 * 6 = \frac{216}{25} = 8.64$$

Análisis del ítem errado.

Es posible que el estudiante haya tomado como base el lado del triángulo que corresponde al diámetro, dado de la relación 3-4-5 igual a 6 unidades y como altura una de las otras dos relaciones, en este caso 4, para así aplicar la fórmula del área del triángulo: $A = \frac{6*4}{2} = 12$ Se cometen errores de tipo gráfico, aritmético (no tiene en cuenta la proporción dada) y geométrico. No utiliza a 3 pues al hallar el área con este dato, no encuentra la respuesta en las opciones.

Problema 5 (NI - 2007 – 21).

Una esfera está inscrita en un cubo cuya superficie tiene un área de 24 metros cuadrados. Luego se inscribe un segundo cubo dentro de la esfera. ¿Cuál es el área, en metros cuadrados, de la superficie del cubo interno?

(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 12

Solución oficial: (C): Como el área de superficie del cubo original era 24 metros cuadrados, el área de cada cara del cubo es $\frac{24}{6} = 4$ metros cuadrados, y la longitud de una arista de este cubo es 2 metros. La esfera inscrita en el cubo tiene diámetro de longitud 2 metros, que es también la longitud de la diagonal del cubo inscrito en la esfera. Sea *l* la longitud de una arista del cubo inscrito. Aplicando dos veces el Teorema de Pitágoras, se tiene

$$l^2 + l^2 + l^2 = 2^2 = 4$$

Entonces el área de cada cara es de $l^2 = \frac{4}{3}$ metros cuadrados

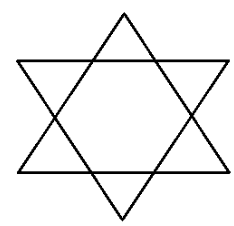
Entonces el área de superficie del cubo inscrito es de $6 * \frac{4}{3} = 8$ metros cuadrados.

Análisis del ítem errado.

El estudiante considera erróneamente que el área en metros cuadrados del cubo interno es la mitad del cubo externo a la circunferencia por tanto realiza una operación trivial con los datos que posee señalando la mitad que es 12.

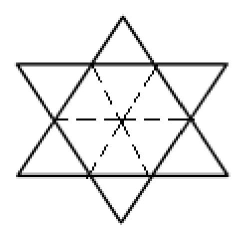
Problema 6 (PN – 2008 – 12).

Un hexagrama unitario está compuesto por un hexágono regular de lado de longitud 1 y sus 6 extensiones triángulares equiláteras, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es la razón entre el área total de las seis extensiones y el área del hexágono original?



(A) 1:1 (B) 6:5 (C) 3:2 (D) 2:1 (E) 3:1

Solución oficial: (A) Use diagonales para partir el hexágono en 6 triángulos congruentes. Debido a que cada triángulo exterior es también equilátero y comparte un lado con un triángulo interior, cada triángulo exterior es congruente con un triángulo interior. Por lo tanto, la razón entre el área total de las 6 extensiones y el área del hexágono es 1:1.



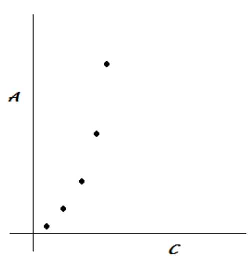
Análisis del ítem errado.

Se toma erróneamente como que el área de cada una de las extensiones es 1, en total para las seis extensiones se tendrá un área de 6. De otro razonamiento erróneo da el área del hexágono como 5, obteniendo la razón 6:5. Errores de tipo gráfico y del lenguaje geométrico.

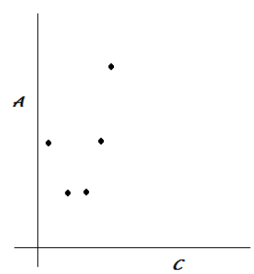
Problema 7 (PN - 2008 – 16).

Amanda Calculadora dibuja cinco círculos con radios 1, 2, 3, 4 y 5. Luego para cada círculo ella señala el punto (C, A) , donde *C* es la longitud de la circunferencia y *A* su área. ¿Cuál podría ser su gráfico?

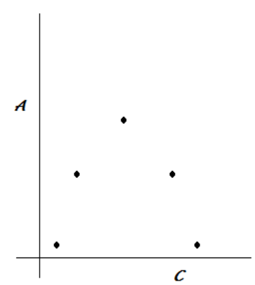
(A)



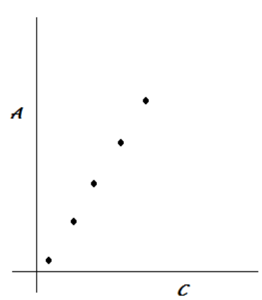
(B)



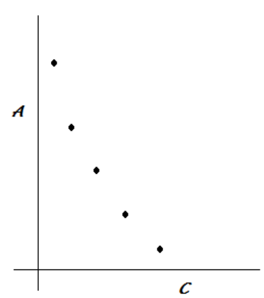
(C)



(D)



(E)

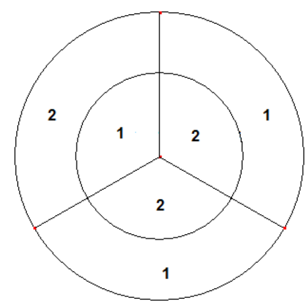


Solución oficial: (A) Las longitudes de los círculos con radios de 1 a 5 son $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi\ y\ 10\pi$, respectivamente. Sus áreas son, respectivamente $\pi, 4\pi, 9\pi, 16\pi\ y\ 25\pi$. Los puntos $(2\pi, \pi), (4\pi, 4\pi), (6\pi, 9\pi), (8\pi, 16\pi)\ y\ (10\pi, 25\pi)$ están graficados en (A). Es la única gráfica que corresponde a una función cuadrática creciente, llamada una parábola.

Análisis del ítem errado.

El estudiante puede haber dado la solución teniendo en cuenta que D es una función lineal, de las funciones que mejor conoce, por tanto no tiene en cuenta que A crece como una función cuadrática debido a que en el eje *y* se están tomando los resultados del área de la circunferencia la cual tiene un término elevado al cuadrado. Trivialización de la solución.

Problema 8 (PN – 2008 – 25).



En el tablero de dardos mostrado en la figura, el círculo exterior tiene radio 6 y el círculo interior tiene radio 3. Los tres radios dibujados dividen cada círculo en tres regiones congruentes, con los puntajes correspondientes que se muestran. La probabilidad que un dardo caiga es proporcional al área de la región. Cuando se lanzan dos dardos, la puntuación es la suma de los puntajes en las regiones donde caigan. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea impar?

(A) $\frac{17}{36}$ (B) $\frac{35}{72}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{37}{72}$ (E) $\frac{19}{36}$

Solución oficial: (B) El área del círculo exterior es 36π y el círculo interior tiene área 9π, haciendo que el área del anillo exterior sea $36\pi - 9\pi = 27\pi$. Por lo tanto cada región en el anillo exterior tiene área $\frac{27\pi}{3} = 9\pi$, y cada región del círculo interior tiene área $\frac{9\pi}{3} = 3\pi$. La probabilidad de dar en una región dada en el círculo interior es $\frac{3\pi}{36\pi} =$

$\frac{1}{12}$, y la probabilidad de dar en una región dada en el anillo exterior es $\frac{9\pi}{36\pi} = \frac{1}{4}$. Para que la puntuación sea impar, uno de los números debe ser 1 y el otro debe ser 2. La probabilidad de dar en una región con un 1 es:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

y la probabilidad de dar en una región con un 2 es

$$1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener un 1 y un 2 en cualquier orden es:

$$\frac{7}{12} * \frac{5}{12} + \frac{5}{12} * \frac{7}{12} = \frac{70}{144} = \frac{35}{72}$$

Análisis del ítem errado.

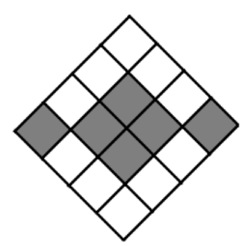
Al responder en ítem C) el estudiante está trivializando pues de las seis regiones, tres tienen un valor impar, no tiene en cuenta tamaños, ni combinaciones.

Problema 9 (PN – 2009 – 6).

En la figura, ¿cuál es la razón entre el área de los cuadrados grises y el área de los cuadrados blancos?

(A) $3:10$ (B) $3:8$ (C) $3:7$ (D) $3:5$ (E) $1:1$

(D) Después de subdividir el cuadrado central gris como se muestra, 6 de los 16 cuadrados congruentes son grises y 10 son blancos. Por lo tanto, la razón entre el área de los cuadrados grises y el área de los cuadrados blancos es $6 : 10, o, 3 : 5$.

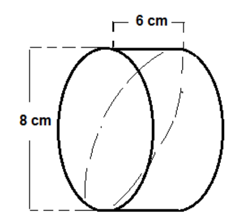


Análisis del ítem errado.

Es error de tipo gráfico, no interpreta adecuadamente la gráfica, no tiene en cuenta que la áreas de cada cuadrado deben ser igual y solamente cuenta el número de cuadrados grises y el número de cuadrados blancos en la figura dada, por tanto trivializa para dar la respuesta.

Problema 10 (PN - 2009 – 21).

Diego corta una cuña de un cilindro de 6 centímetros de salchichón como se muestra en la figura por la curva punteada. ¿Qué alternativa es más próxima al volumen de la cuña en centímetros cúbicos?



(A) 48 (B) 75 (C) 151 (D) 192 (E) 603

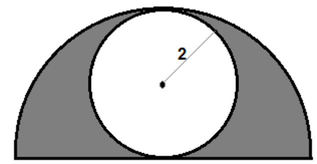
Solución oficial: (C) Usando la fórmula para el volumen de un cilindro, el salchichón tiene $\pi r^2 h = \pi * 4^2 * 6 = 96\pi$ de volumen. El corte divide el salchichón en dos partes iguales o mitades. El medio cilindro tendrá $\frac{96\pi}{2} = 48\pi \cong 151\ cm^3$ de volumen.

Nota. El valor de π es ligeramente mayor que 3, por lo tanto para estimar el volumen multiplique $48(3) = 144\ cm^3$. El producto es ligeramente menor y más próximo a la respuesta C que a cualquier otra opción de respuesta.

Análisis del ítem errado.

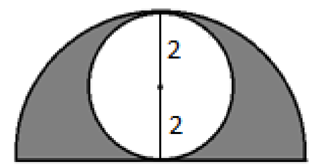
El error está basado en el desconocimiento de que la figura tiene forma de cilindro o sabiendo que tiene forma cilíndrica desconoce la fórmula del volumen. Claramente es una trivialización para dar una respuesta. Sencillamente para dar una solución realiza el producto de los dos datos dados $6 * 8 = 48$.

Problema 11 (NI – 2009 – 6).



Un círculo de radio 2 está inscrito en un semicírculo, como se muestra. La región dentro del semicírculo que esta fuera del círculo aparece sombreada. ¿Qué fracción del área del semicírculo es el área de la región sombreada?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{\pi}$



Solución oficial: (A) El semicírculo tiene radio 4 y área total de $\frac{1}{2} * \pi * 4^2 = 8\pi$. El área del círculo es $\pi * 2^2 = 4\pi$. La fracción del área que no está sombreada es $\frac{4\pi}{8\pi} = \frac{1}{2}$, y por lo tanto la fracción del área sombreada también es $\frac{1}{2}$.

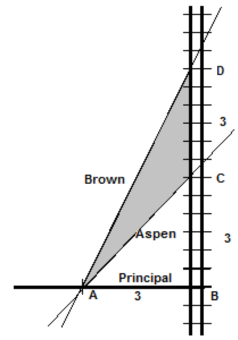
Análisis del ítem errado.

El estudiante pudo haber hallado de manera correcta el área del círculo interior $A = \pi * r^2 = \pi * 2^2 = 4\pi$. Al momento de hallar el área del medio círculo grande lo hace equivocadamente tomándolo como el área de medio cuadrado de lado 4, $A = \frac{l^2}{2} = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$, por tanto halla la fracción como la razón de la región mayor sobre la pequeña:

$$Area\ sombreada = \frac{8}{4\pi} = \frac{2}{\pi}$$

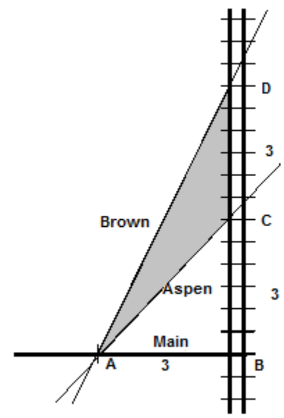
Error de apreciación en la gráfica y de aplicación de la respectiva ecuación para hallar el área de medio círculo.

Problema 12 (PN 2010 – 7).



La porción triangular de terreno *ACD* yace entre la Calle Aspen, la Calle Brown y una vía de tren. La Calle principal va en dirección este-oeste, y la vía del tren va en dirección norte-sur. Los números en el diagrama indican distancias en millas. Se puede ignorar el ancho de la vía del tren. ¿Cuál es el área, en millas cuadradas, de la porción de terreno *ACD?*

(A) 2 (B) 3 (C) 4.5 (D) 6 (E) 9



Solución oficial: (C) El área del ΔABC es de $\frac{1}{2} * 3 * 3 = \frac{9}{2}$ millas cuadradas. El área del $\Delta ABD = \frac{1}{2} * 3 * 6 = 9$ millas cuadradas. El área sombreada es el área del ΔABD menos el área del ΔABC lo cual es $9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ millas cuadradas.

O, la base $\overline{CD}$ del ΔACD mide 3 millas de longitud. La altura $\overline{AB}$ del ΔACD mide 3 millas de longitud. El área del ΔACD es de $\frac{1}{2} * 3 * 3 = \frac{9}{2} = 4.5$ millas cuadradas.

Análisis del ítem errado.

Es un error de tipo procedimental, falta de análisis y tipo gráfico, pues solamente halla el área del ΔABD.

Problema 13 (PN - 2010 – 8).

Se aumenta el largo de un rectángulo en 10% y se disminuye el ancho en 10%. ¿Qué porcentaje del área inicial es la nueva área?

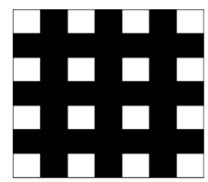
(A) 90 (B) 99 (C) 100 (D) 101 (E) 110

Solución oficial: (B) Un rectángulo con largo *L* y ancho *A* tiene área *LA*. El área del nuevo rectángulo es $(1.1)L * (0.9)A = 0.99\ LA$. El área nueva $0.99\ LA$ es 99% del área original.

Análisis del ítem errado.

Sin mediar otra alternativa, ni tener presente el sentido del porcentaje, puede ser que el estudiante sencillamente multiplica $10 * 10 = 100$. Error claro de trivialización.

Problema 14 (PN - 2010 – 18).



El diagrama representa un piso de 7 pies por 7 pies que está recubierto con baldosas negras de 1 pie cuadrado y con baldosas blancas de 1 pie cuadrado. Note que las esquinas tienen baldosas blancas. Si se va a recubrir un piso de 15 pies por 15 pies del mismo modo, ¿cuántas baldosas blancas se necesitarán?

(A) 49 (B) 57 (C) 64 (D) 96 (E) 126

Solución oficial: (C) Para mantener el diseño, los cuadrados blancos siempre ocuparán las esquinas, y cada lado del diseño cuadrado tendrá un número impar de baldosas. Creemos una tabla, comenzando con un cuadrado blanco en la esquina del diseño, y aumentemos los lados en dos baldosas.

Área del piso	# de cuadrados blancos	Diseño
1 x 1	1	1^2
3 x 3	4	2^2
5 x 5	9	3^2

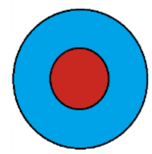
7 x7	16	4^2
9 x 9	25	5^2

Siguiendo el patrón, un área 11 x 11 tiene 36 cuadrados, un área 13 x 13 tiene 49, y una 15 x 15 tiene 64. O habrá 8 filas, cada una conteniendo 8 baldosas blancas, por lo tanto el total es 8 (8) = 64.

Análisis del ítem errado.

El estudiante no analiza que empieza y termina con baldosa blanca, en la longitud de 15 pies solo tiene en cuenta 7 para las baldosas blancas, por tanto 7 x 7 = 49. Error debido al no análisis adecuado de la gráfica.

Problema 15 (NI - 2010 – 4)



Dos círculos de 1 centímetro y 3 centímetros de diámetro tienen el mismo centro. El círculo más pequeño está pintado de rojo, y la porción fuera del círculo más pequeño y dentro del círculo más grande está pintada de azul. ¿Cuál es la razón entre el área pintada de azul y el área pintada de rojo?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) 9

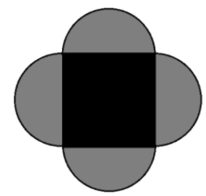
Solución oficial: (D) El círculo con diámetro 3 tiene área de $\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2$. El círculo con diámetro 1 tiene área de $\pi * \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Por lo tanto la razón entre el área pintada de azul y el área pintada de rojo es $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{1}{2}\right)} = 8$

Análisis del ítem errado.

Este es un claro error de trivialización, la aplicación sin análisis de una operación a los datos del problema, y como se ha pedido la razón, el estudiante simplemente halla la diferencia de diámetros para dar la respuesta, de igual forma sería si toma 1 para el círculo pequeño y 3 – 1 = 2 para el círculo grande: $\frac{3-1}{1} = \frac{2}{1} = 2$.

Problema 16 (NI - 2010 – 6).

Una región está limitada por arcos semicirculares construidos en los lados de un cuadrado cuyos lados miden $2/\pi$, tal como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de esta región?



(A) $\frac{4}{\pi}$ (B) 2 (C) $\frac{8}{\pi}$ (D) 4 (E) $\frac{16}{\pi}$

Solución oficial: (D) Ya que el cuadrado tiene lados de longitud $2/\pi$, el diámetro de cada sección circular es $2/\pi$. El borde de la región consiste de 4 semicírculos, cuyo perímetro total es el doble del perímetro de un círculo que tiene diámetro $2/\pi$. Por lo tanto el perímetro de la región es $2 * \left(\pi * \frac{2}{\pi}\right) = 4$.

Análisis del ítem errado.

Es claro el error debido a la trivialización para hallar la solución, pues toma $\frac{2}{\pi} * 4 = \frac{8}{\pi}$.

Puede que haya comprendido mal el enunciado, hallando el perímetro del cuadrado que efectivamente si es $8/\pi$. Error de trivialización o error del lenguaje geométrico.

Problema 17 (NI- 2010 – 10).

En un triángulo con lados de longitudes enteras, la longitud de un lado es igual a tres veces la longitud de un segundo lado, y la longitud del tercer lado es 15. ¿Cuál es el mayor perímetro que el triángulo puede tener?

(A) 43 (B) 44 (C) 45 (D) 46 (E) 47

Solución oficial: (A) Sean *x, 3x*, y *15* las longitudes de los lados del triángulo. La desigualdad triangular implica que $3x < x < x + 15$, por lo tanto $x < 7.5$. Debido a que *x* es un entero, el mayor perímetro posible es $7 + 21 + 15 = 43$.

Análisis del ítem errado.

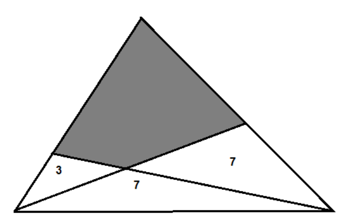
El error puede estar dado en dos sentidos.

a. La trivialización de la solución toma el dato del tercer lado que es 15 y como es un triángulo entonces $15 * 3 = 45$.

b. En el otro caso halla que $x < 7.5$ pero sin tener en cuenta el enunciado toma $x = 7.5$ por tanto el perímetro es $p = x + 3x + 15 = 7.5 * 3(7.5) + 15 = 7.5 + 22.5 + 15 = 45$.

El error por tanto puede estar dado en dos sentidos: trivialización de la solución o error propio del lenguaje matemático.

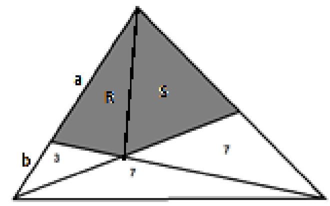
Problema 18 (NI - 2010 – 23)



Se particiona un triángulo en tres triángulos y un cuadrilátero trazando dos rectas desde dos vértices hasta los lados opuestos. Las áreas de los tres triángulos son 3, 7, y 7, como se muestra. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?

(A) 15 (B) 17 (C) $\frac{35}{2}$ (D) 18 (E) $\frac{55}{3}$.

Solución oficial: (D) Después de particionar el cuadrilátero en dos triángulos, sean *R* y *S* las áreas de los triángulos como se muestra. Entonces el área requerida es T = R + S.



Sean *a* y *b*, respectivamente, las bases de los triángulos con área *R* y *3*, como se ha indicado. Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón entre sus áreas es la misma que la razón entre sus bases. Por lo tanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{R}{3} = \frac{R+S+7}{3+7}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{R}{3} = \frac{T+7}{10}.$$

Similarmente,

$$\frac{S}{7} = \frac{S+R+3}{7+7}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{S}{7} = \frac{T+3}{14}$$

Entonces:

$$T = R + S = 3\left(\frac{T+7}{10}\right) = 7\left(\frac{T+3}{14}\right)$$

De aquí se obtiene

$$10T = 3(T + 7) + 5(T + 3) = 8T + 36$$

De lo anterior se sigue que $T = 18$.

Análisis del ítem errado.

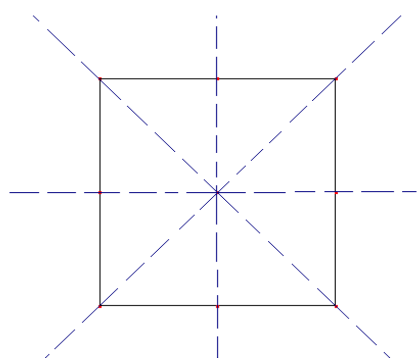
Se parte de un análisis errado de la gráfica, el estudiante puede creer que la parte sombreada es la mitad del área del triángulo, por tanto se trivializa sumando el valor de las áreas señaladas $3 + 7 + 7 = 17$.

Problema 19 (PN - 2011 – 6).

¿Cuál de las siguientes figuras tiene el mayor número de ejes de simetría? Triángulo equilátero, rombo no cuadrado, rectángulo no cuadrado, trapecio isósceles y cuadrado.

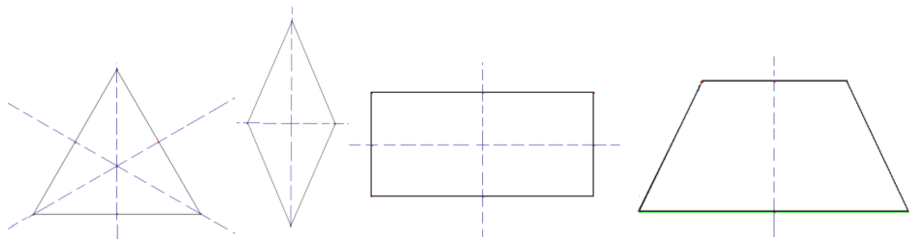
(A) Triángulo equilátero (B) rombo no cuadrado (C) rectángulo no cuadrado (D) trapecio isósceles (E) cuadrado.

Solución oficial: (E) Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.



El número de ejes de simetría de las otras figuras son:

Triángulo equilátero 3, rombo no cuadrado 2, rectángulo no cuadrado 2, trapecio isósceles 1.



Análisis del ítem errado.

El error puede deberse al desconocimiento del concepto de simetría o al desconocimiento del trapecio isósceles. Error propio del lenguaje geométrico.

Problema 20 (NI - 2011 – 7).

Un triángulo equilátero con lados de longitud 10 se llena completamente con triángulos equiláteros con lados de longitud 1 que no se superponen. ¿Cuántos triángulos pequeños se requieren para esto?

(A) 10 (B) 25 (C) 100 (D) 250 (E) 1000.

Solución oficial: La longitud del lado del triángulo grande es 10 veces la longitud del lado de cada triángulo pequeño, de modo que el área del triángulo grande es $10^2 = 100$ veces el área de cada triángulo pequeño.

Análisis del ítem errado.

El error puede estar dado en varios sentidos, uno de ellos es que no trabaja con áreas sino con los perímetros y de manera equivocada el perímetro del triángulo grande lo divide entre el perímetro del triángulo pequeño $30 \div 3 = 10$. Otra posibilidad es que sin mayor análisis y trivializando la solución divide equivocadamente la longitud del lado del triángulo mayor entre la longitud del triángulo menor $10 \div 1 = 10$. Como muestra los resultados de la tabla 4.

Tabla 4. Clasificación de los errores en las pruebas con error superior al 30%.

AÑO	NIVEL	Pregunta	ítem errado	%	PARTICIPANTES	CATEGORIZACIÓN DEL ERROR
2007	PN	3	C	37.08	12791	Error de trivialización.
		6	B	37.51		Error del lenguaje matemático y trivialización.
		7	A	47.35		Error de trivialización.
	NI	14	B	30.94	12102	Errores de tipo gráfico, conceptuales y aritméticos.
		21	E	30.71		Error por trivialización.
2008	PN	12	B	32.70	12563	Error de tipo gráfico, del lenguaje geométrico.
		16	D	30.62		Trivialización.
		25	C	31.34		Trivialización.
	NI		12696			
2009	PN	6	A	56.80	14998	Error de tipográfico y trivialización.
		21	A	47.15		Trivialización.
	NI	6	C	30.17	14495	Error de tipo gráfico y algebraico.
2010	PN	7	E	30.03	13304	Error de tipo gráfico y procedimental.
		8	C	46.14		Trivialización.
		18	A	30.18		Error de tipo gráfico.
	NI	4	A	35.59	13820	Trivialización.
		6	C	46.87		Trivialización y error del lenguaje geométrico.

		10	C	53.33		Trivialización o error propio del lenguaje matemático.
		23	B	34.85		Trivialización.
2011	PN	6	D	40.30	12934	Error del lenguaje geométrico.
	NI	7	A	34.35	12540	Error de tipo conceptual, trivialización.

De acuerdo a los resultados de la tabla 4 los errores detectados y tipificados se pueden clasificar en las categorías de errores de prerrequisitos, errores propios del lenguaje geométrico, errores gráficos y errores de tecnología planteados por Franchi, L. y Hernández, A. (2004). Un error que aparece y que es frecuente denominado de trivialización, es el que se caracteriza por el facilismo del estudiante de dar una respuesta rápida, no válida, toma elementos del problema y sin mayor razonamiento mediante alguna operación ve que le coincide con una de las respuestas y la marca; en el sentido de que el estudiante lo toma como algo obvio, evidente, elemental o sencillo y que no necesita de mayor esfuerzo, pues ya está la respuesta. No se toma en el sentido matemático de trivial en la solución de ecuaciones o en lo que puede ser fácil de entender y difícil de demostrar. No es exclusivo de pruebas de selección múltiple. Este tipo de error no es nuevo ya se había mencionado en un estudio anterior por Falk, M. (2001).

3.4. Diseño de estrategias para minimizar el error en la solución de los problemas de geometría

Conocido los resultados se elaboran talleres tendientes a minimizar los potenciales errores que puedan cometer los estudiantes de noveno, cuando se les apliquen las pruebas de olimpiadas. Estos talleres se realizan sobre los siguientes temas:

- Fracciones (razón, área, porcentaje).
- Perímetros y áreas.
- Circunferencia (longitud, área).
- Volúmenes.
- Solución de ecuaciones e inecuaciones.

Un elemento que debe ser transversal a todos los talleres es el énfasis a que el estudiante lea comprensivamente y escriba, pues es una debilidad que se nota en cada uno de los problemas.

La estructura que presentan los talleres conducentes a minimizar el error y dar a este un tratamiento en forma positiva en la solución de los problemas geométricos de olimpíadas está dada por: tema, pre-requisitos, sistemas tecnológicos, metodología y desarrollo de la actividad. A continuación se realiza una explicación de cada uno de estos elementos.

Tema: en este apartado se escribe el nombre que enmarca en contenido principal del taller.

Pre-requisitos: se enuncian los contenidos básicos que el estudiante debe dominar para un desarrollo asertivo del taller. También es necesario sistematizar sobre ciertos contenidos elementales para la solución de los problemas.

Metodología: se escribe en forma más detallada cómo se va a desarrollar el taller, el conocimiento que deben adquirir los estudiantes, la forma de dirigir el proceso de apropiación de los contenidos, se orienta la realización de los problemas por niveles de complejidad. También se deben expresar los métodos y procedimientos que se emplean. Además las sugerencias de la forma en que se desarrolla si individual o por grupos de tres estudiantes.

Desarrollo de la actividad: se sugiere desarrollar el taller donde se propone en primer lugar uno o más problemas resueltos, uno o más problema guiados y varios problemas propuestos.

A continuación se presentan cada uno de los 5 talleres con su estructura.

3.4.1. Taller 1. Fracciones

Nombre: ________________________ **curso:** ________ **Fecha:** __________

Pre-requisitos: se requieren tener claros los siguientes conceptos:

- Representación simbólica de la fracción.
- Conceptos de área.

Metodología: el desarrollo del taller se hará en tres momentos.

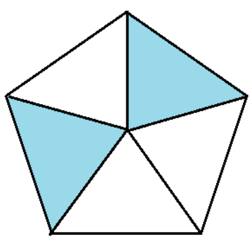
a. En un primer momento se dará del cuerpo del taller a los estudiantes, la parte correspondiente a los prerrequisitos, ejercicio resuelto y ejercicio guiado para que con su desarrollo esté mejor preparado al desarrollo de los ejercicios y problemas a resolver. Estos elementos se entregarán fotocopiados, por lo menos dos días antes de la aplicación de la segunda parte.

b. El día de la aplicación de la segunda parte se entregará por escrito copia a cada estudiante de los ejercicios o problemas a resolver, para que individualmente lo realicen.

Lo harán en un tiempo aproximado de 45 minutos. Después de realizado el taller en forma individual, se pedirá a los estudiantes que en grupos de a tres, socialicen sus respuestas unificando criterios para que cada grupo dé una solución a cada ejercicio. Se dará a cada grupo nueva copia del taller limpio u hojas en blanco para que allí se escriban las soluciones conjuntas finales. Para finalizar esta segunda parte se hará una puesta general del desarrollo de los ejercicios o problemas por los grupos que desarrollaron con mayor calidad, eficiencia y rapidez el taller.

c. Como parte de la preparación para la aplicación y de la continuidad para el siguiente taller se pedirá a los estudiantes que resuelvan con detalle el problema 10.

Ejercicio resuelto



En la gráfica, el pentágono está dividido en cinco partes congruentes, de las cuales dos están sombreadas, por tanto el área de la región sombreada corresponde a $\frac{2}{5}$, leído dos quintos, del área del pentágono. Se dice que la región sombreada equivale al 40% de toda la región, pues aplicando la regla de tres a:

PARTES	PORCENTAJE
5	100 %
2	X

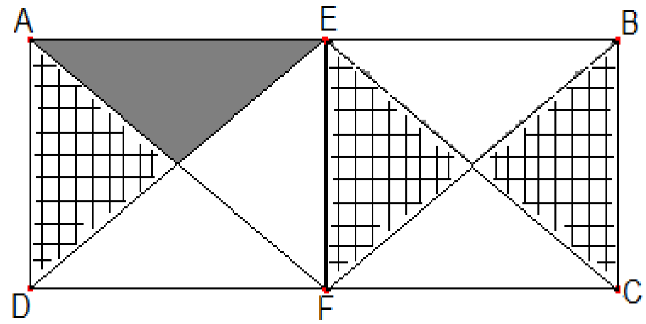
Se tiene:

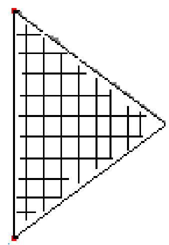
$$x = \frac{2 * 100\%}{5} = \frac{200\&}{5} = 40\&$$

Se puede decir también que la razón entre las áreas de la parte sombreada y la parte blanca es de $2:3$.

Ejercicio guiado

En el rectángulo $ABCD$, $AB = 2BC$ y E y F son los puntos medios de los lados AB y DC , respectivamente, de tal forma que $AE = EB = BC$.



a. ¿Cuántas partes congruentes a ésta,  cabrían en la figura ABCD? ___________________.

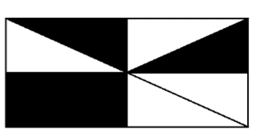
b. Las áreas de las partes subrayadas en la figura corresponden a: $\frac{\square}{\square}$ del área del rectángulo.

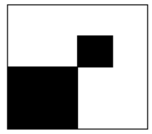
c. La fracción que representa el área sombreada es –.

d. ¿Qué porcentaje del área la figura representa el área de la región en blanco? ____ %

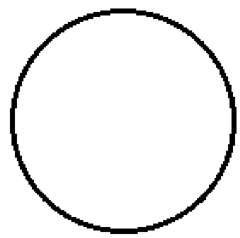
Ejercicios propuestos

1. Escriba en palabras y en números a qué parte del área total corresponde el área de la región sombreada:

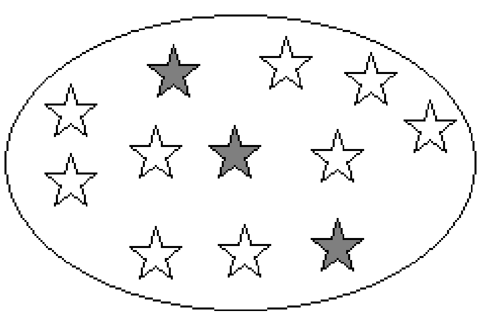
	Escriba en palabras	En números

	Escriba en palabras	En números

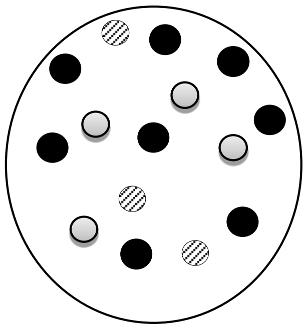
2. En los siguientes recuadros sombree una región cuya área se indica:

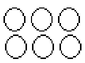
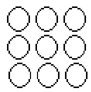
a. Un cuarto del rectángulo	b. Un sexto del círculo
	

3. Tomando la unidad como un conjunto de objetos, diga a qué parte de la unidad corresponden las figuras sombreadas:

	*Escriba en palabras*	*En números*

4. En el siguiente conjunto de canicas. ¿Qué parte corresponde a cada color?

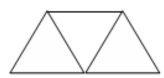
	Canicas negras: ____ Escriba en palabras	____ En número
	Canicas grises: ____ Escriba en palabras	____ En número
	Canicas a rayas: ____ Escriba en palabras	____ En número

5. Si  es el todo. ¿Qué es  ?

a. $1+\frac{1}{2}$ b. 2 c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{2}{5}$ e. 3

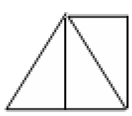
6. Si el área de  es la unidad. ¿Cuánto es $\frac{1}{3}$?

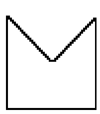
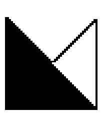
a.  La parte sombreada

d. 

b.  La parte sombreada

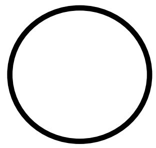
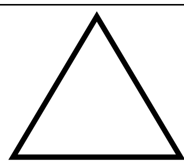
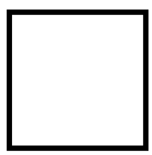
e.  La parte sombreada

c. 

7. Si el área de  es el todo. ¿A qué corresponde el área de la región sombreada  ?

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{3}{2}$. e. 2

8. Dadas las siguientes figuras, dibuja una región cuya área es:

	$\frac{2}{5}$
 TRIÁNGULO EQUILÁTERO	$\frac{1}{3}$
	$\frac{3}{2}$

del área de la región dada.

9. Observa cada una de las siguientes composiciones (Hernández D., 2009):

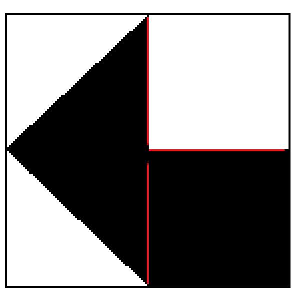


FIGURA 1.

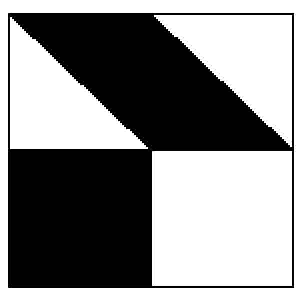


FIGURA 2

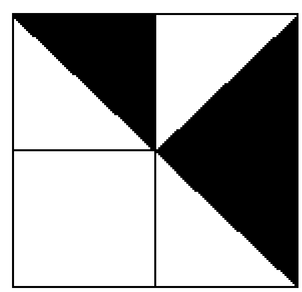


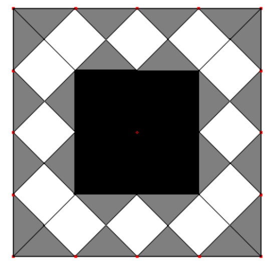
FIGURA 3

Complete la siguiente tabla de datos:

FIGURA	¿Qué formas geométricas reconoces?	Fracción de área sombreada	Porcentaje de área en blanco	Expresión decimal de la parte sombreada	Busca dos relaciones de equivalencia

1					
2					
3					

10. Indique si es falsa o verdadera (y justifique) cada una de las siguientes proposiciones en relación con el siguiente enunciado y gráfica.

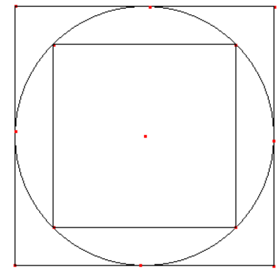


"*Betsy construye una bandera usando triángulos grises, cuadrados blancos pequeños, y un cuadrado central negro, tal como se observa en la figura. Si G es el área total de los triángulos grises, B el área total de los cuadrados blancos y N el área del cuadrado negro….*"[38]

No	AFIRMACIONES	V	F
1	$G = B$		
2	$G = N$		
3	$2G = 3N$		
4	$3G = 2N$		
5	$B = N$		
6	$2N = B$		
7	$\frac{1}{3}B = \frac{1}{2}N$		

[38] Falk, M. (2006). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel intermedio. 2002. Universidad Antonio Nariño. Octubre, p. 16.

11. *Considere una circunferencia que tiene cuadrados construidos de tal manera que uno está exactamente dentro de la circunferencia y otro la encierra exactamente. ¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado mayor y el área del cuadrado menor?*[39]



3.4.2. Taller 2. Perímetros y áreas

Nombre: ________________________ curso: ________ Fecha: __________

Pre-requisitos.

Se requieren tener claros los siguientes conceptos:

- Conceptos fundamentales de aritmética.
- Conceptos básicos de polígonos
- Teorema de Pitágoras.

A continuación se ilustran estos elementos importantes en la figura 1.

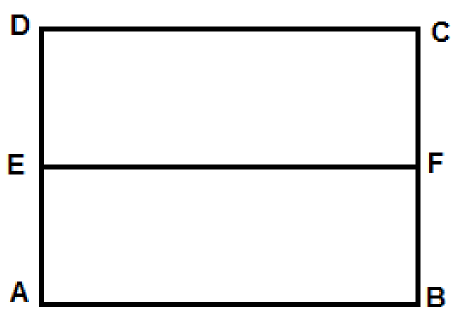
Figura 1. Elementos de un polígono.

[39] Falk, M. (2006). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Superior 2002.Universidad Antonio Nariño. Octubre, p. 8.

Observación: se puede tener el área de dos figuras o dos regiones con igual medida sin que necesariamente estas dos regiones sean congruentes.

Observemos la siguiente secuencia:

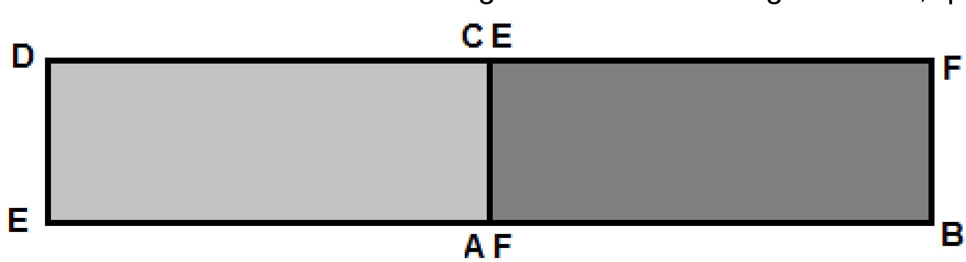
1. Se tiene el rectángulo ABCD, el cual tiene como medida de su área S



2. Se traza el segmento EF, que une los puntos medios de DA y CB.

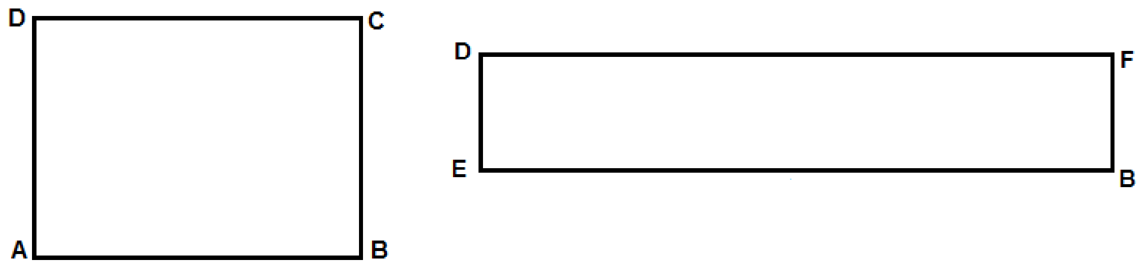
3. El rectángulo queda dividido en dos regiones congruentes, que son los rectángulos DEFC y EABF. La medida de las áreas de DEFC y EABF son iguales y tiene cada una de ellas tiene como medida $\frac{S}{2}$. Se recorta el rectángulo por el segmento EF.

4. Se coloca a continuación del rectángulo DEFC el rectángulo EABF, quedando el



nuevo rectángulo DEBF, el cual tiene como área la suma de las áreas de los rectángulos DEAC y EFBF. Entonces $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S = S$.

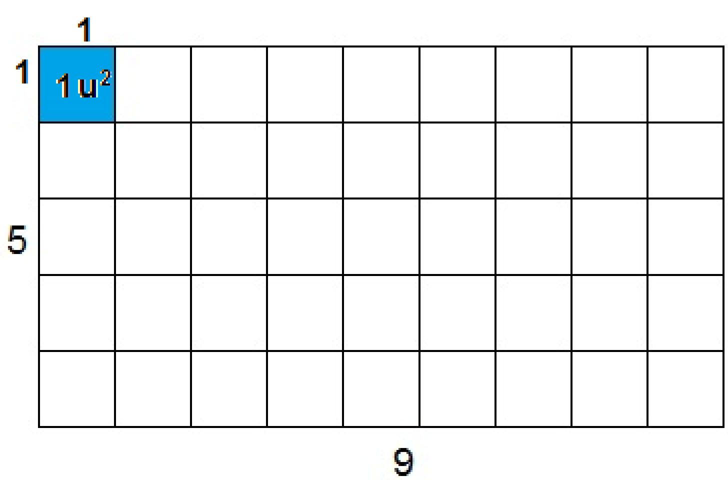
5. Es decir que los rectángulos ABCD y DEBF tienen la misma medida, sus áreas son iguales sin ser congruentes.



Más sobre áreas.

Para dar la medida del área de figuras planas es necesario tener una unidad patrón de área.

Área del rectángulo: En el rectángulo el cuadro sombreado es la unidad de medida. Esta unidad de medida está 9 veces 5 en todo el rectángulo.



Al contar el número de unidades es 45, lo que equivale a:

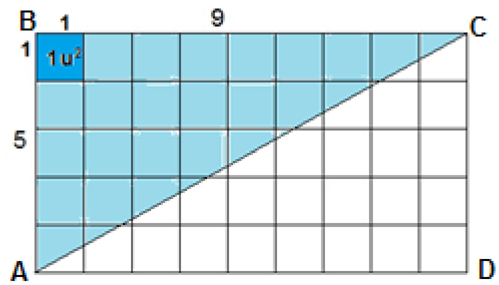
Área del rectángulo es igual base por altura.

$$A_{\blacksquare} = bxh$$

$A_{\blacksquare} = 9u \ x \ 5u = 45 \ u^2,$ 45 unidades cuadradas.

La unidad de longitud en el sistema métrico decimal es el metro, el cual tiene múltiplos (Decámetro, Hectómetro, Kilómetro, etc.) y submúltiplos (decímetro, centímetro, milímetro, etc.) lo que permite utilizar una unidad adecuada de acuerdo a la situación: el ancho de un libro, el largo de una sala o la distancia entre dos ciudades.

ÁREA DEL TRIÁNGULO: Para hallar el área del triángulo ΔABC (sombreado), obsérvese lo siguiente:



- El triángulo ΔABC forma parte del rectángulo ABCD.
- La diagonal AC divide al rectángulo ABCD en dos regiones congruentes, una de ellas es el triángulo ΔABC .
- Por tanto para hallar el área del triángulo pedido se halla el área del rectángulo ABCD y se divide por dos.

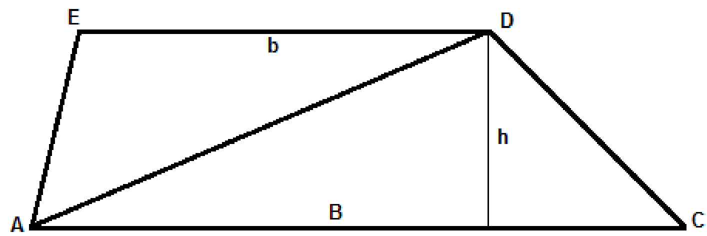
El lado BC es una base (*b*) y AB es la altura *(h*), entonces el área del triángulo es:

$$A_t = \frac{bxh}{2}$$

Realizando las sustituciones correspondientes se tiene:

$$A_t = \frac{9cm \ x \ 5 \ cm}{2} = \frac{45 \ cm^2}{2} = 22.5 \ cm^2$$

ÁREA DEL TRAPECIO: Sea ACDE un trapecio, *h* su altura, AC la base mayor (*B)* y DE la base menor (*b).* Se traza la diagonal AD la cual divide al trapecio en dos triángulos. El área del trapecio ACDE será igual a la suma de las áreas de los triángulos ACD y ADE. El área para el triángulo ACD es:



$$A_{\Delta ACD} = \frac{Bh}{2}$$

En el triángulo ADE, ED es la base (*b*), y *h* es la altura ($\overline{AC} \parallel \overline{ED}$), su área es:

$$A_{\Delta ADE} = \frac{bh}{2}$$

El área del trapecio ACDE será:

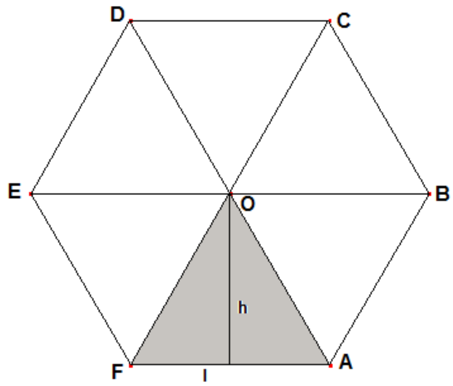
$$A_{ACDE} = A_{\Delta ACD} + A_{\Delta ADE}$$

$$A_{ACDE} = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2}$$

$$A_{ACDE} = \frac{Bh + bh}{2}$$

$$A_{ACDE} = \frac{(B + b)h}{2}$$

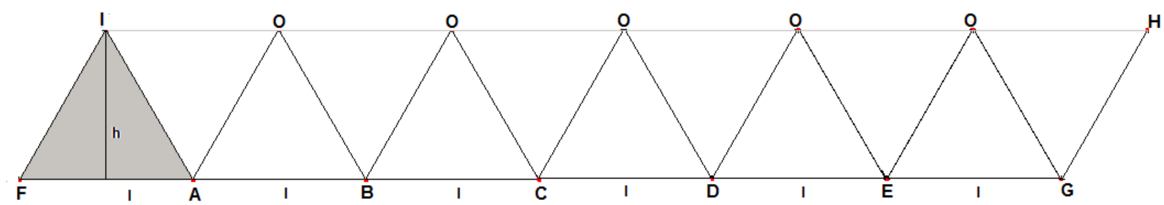
Área de un polígono regular: Para hallar el área del polígono regular ABCDEF, se



divide el polígono en triángulos congruentes, se halla el área de uno de ellos y se multiplica por el número de triángulos.

De manera alternativa se puede realizar el siguiente razonamiento para hallar una fórmula.

Desarrollando el polígono regular ABCDEF, con lado *l* y altura del triángulo *h,* se forma el paralelogramo FGHI, (el punto G es el mismo F, así como los puntos H e I son el mismo O). El paralelogramo FGHI está formado por los triángulos del polígono y por otro número igual de triángulos congruentes.



El área del paralelogramo es:

$$A_{FGHI} = bxh$$

La base del paralelogramo es equivalente al perímetro del polígono:

$$b = FA + AB + BC + CD + DE + EG = p$$

La altura del paralelogramo es la misma de la del triángulo FAI. El polígono tiene la mitad de triángulos que el paralelogramo, por tanto, el área del polígono es la mitad del área del paralelogramo.

$$A_{polígono} = \frac{bxh}{2} = \frac{pxh}{2} = \frac{pxa}{2}$$

En donde *a* longitud de la perpendicular trazada desde el centro del polígono regular hasta los lados o, lo que es lo mismo, altura de uno de los triángulos que lo componen

Metodología.

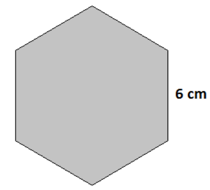
a. En un primer momento se dará del cuerpo del taller a los estudiantes, la parte correspondiente a los prerrequisitos, ejercicio resuelto y ejercicio guiado para que con su desarrollo esté mejor preparado al desarrollo de los ejercicios y problemas a resolver. Estos elementos se entregarán fotocopiados, por lo menos dos días antes de la aplicación de la segunda parte.

b. El día de la aplicación de la segunda parte se entregará por escrito copia a cada estudiante de los ejercicios o problemas a resolver, para que individualmente lo realicen. Lo harán en un tiempo aproximado de 45 minutos. Después de realizado el taller en forma individual, se pedirá a los estudiantes que en grupos de a tres, socialicen sus respuestas unificando criterios para que cada grupo dé una solución a cada ejercicio. Se dará a cada grupo nueva copia del taller u hojas en blanco para que allí se escriban las soluciones conjuntas finales. Para finalizar esta segunda parte se hará una puesta general del desarrollo de los ejercicios o problemas por los grupos que tuvieron alguna dificultad en el desarrollo de los ejercicios o problemas del taller.

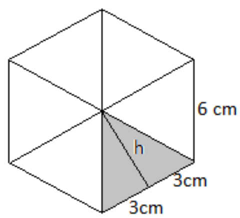
c. Durante el desarrollo del taller se aplican los métodos de trabajo independiente en un primer momento y de trabajo colaborativo. Como parte de la preparación para la aplicación y de la continuidad para el siguiente taller se pedirá a los estudiantes que resuelvan con detalle el ejercicio 16.

Ejercicio resuelto

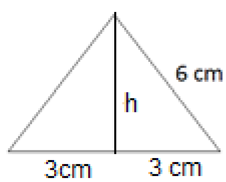
Hallar el área de un hexágono regular que tiene 6 cm de lado.



Para hallar el área del polígono, el cual es un hexágono se pueden



seguir varios caminos. Uno de ellos es descomponer el hexágono en triángulos, en seis triángulos equiláteros. Se halla el área de uno de ellos y se multiplica por seis. Es conveniente este desarrollo pues se parte de algo conocido, propiciando el pensamiento inductivo.



Para hallar el área del triángulo (uno de los seis congruentes), primero se halla la altura, *h,* de triángulo aplicando el Teorema de Pitágoras:

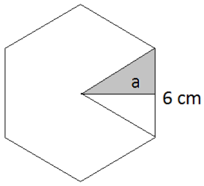
$$h^2 + 3^2 = 6^2, h = \sqrt{6^2 - 3^2}, h = \sqrt{27}cm = 3\sqrt{3}cm^2$$

Luego el área del triángulo, A_t, estará dada por:

$$A_t = \frac{b * h}{2} = \frac{6cm * 3\sqrt{3}cm}{2} = \frac{18\,\sqrt{3}cm^2}{2} = 9\sqrt{3}cm^2$$

Por tanto el área del hexágono regular será:

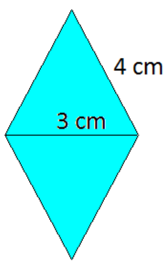
$$A_{p=6*A_t=6*9\sqrt{3}cm^2=54\sqrt{3}cm^2}$$



Otro camino es aplicar la fórmula $A_p = \frac{pxa}{2}$, es decir que el área es el semiproducto del perímetro por la altura del triángulo. En primer lugar se halla la altura *a*, lo cual ya se hizo en el primer procedimiento $h = a = 3\sqrt{3}cm^2$.

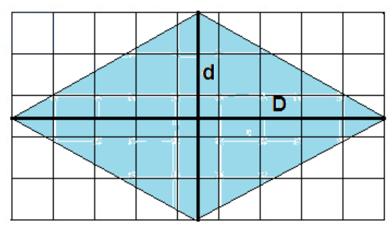
El perímetro del hexágono regular es equivalente al producto del número de lados por la longitud, $P = 6\ ladosx\ 6\ cm = 36\ cm$, por tanto $A = \frac{Pxa}{2} = \frac{36\ cm\ x\ 3\sqrt{3}cm}{2} = 18x3\sqrt{3}cm^2 = 54\sqrt{3}cm^2$.

Ejercicio guiado

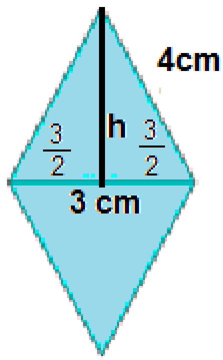


Halle el perímetro y el área del siguiente rombo que tiene lado de longitud 4 cm y diagonal menor de longitud 3 cm.

Recordar que el rombo tiene todos los lados iguales, por tanto el perímetro será: ___________________.



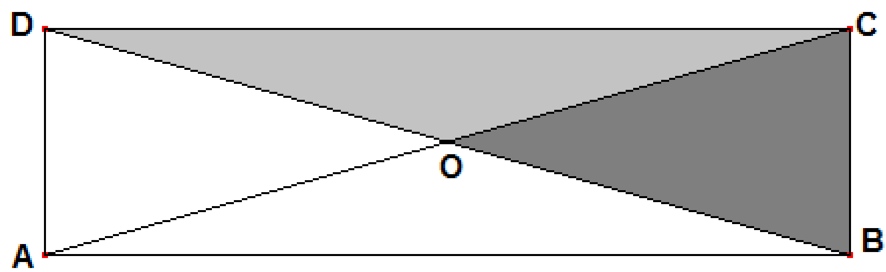
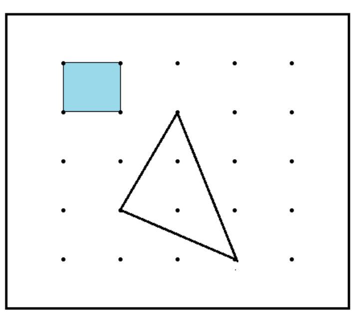
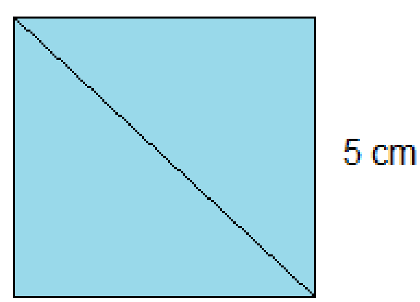
El área del rombo corresponde a la mitad del área del rectángulo, en donde *d* es la altura y *D* es la longitud de la base. La fórmula para hallar el área del rombo es: $A_r =$ ________

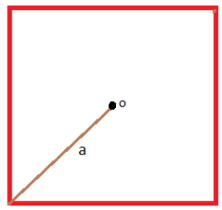
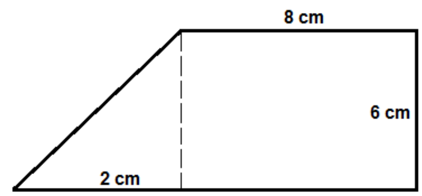
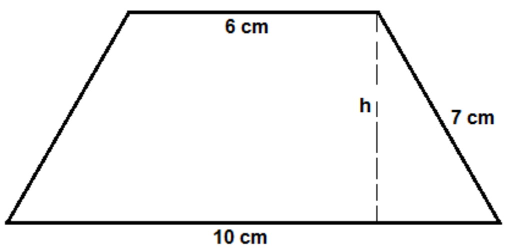
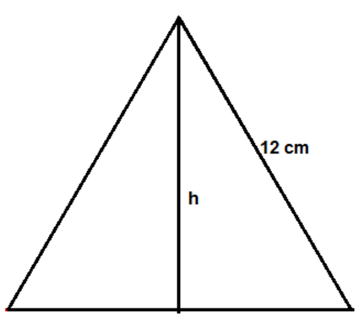


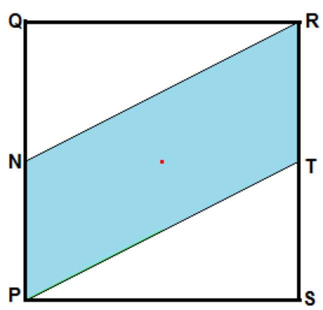
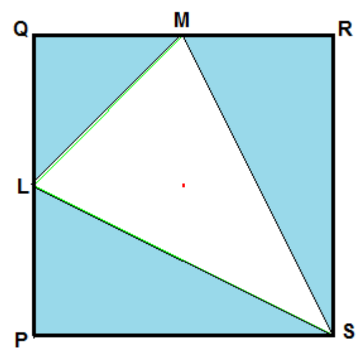
Para hallar la base o longitud de la diagonal mayor se halla *h* que es la altura del triángulo superior y se relacionan mediante $D = \_h$. Utilizando el Teorema de Pitágoras: $(4\ cm)^2 = h^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ el valor de *h* es: ____.

De lo anterior *D*= ----------. Por tanto teniendo $d = 3\ cm\ y\ D = --$, y se halla el área del rombo, así: ________________________________ $cm^{2.}$

Ejercicios propuestos

<table>
<tr><td colspan="2">1. ¿A qué parte del área del rectángulo ABCD corresponde cada una de las áreas de los triángulos DOC y COB?

</td></tr>
<tr><td>2. ¿Cuál es el área, en cm^2 de la región triangular de la figura si el área

sombreada es 1 cm^2?</td><td>3. Hallar la longitud de la diagonal, el perímetro y el área del cuadrado.

</td></tr>
</table>

4. Siendo $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Halle el perímetro y el área del cuadrado.  	5. Hallar el perímetro y el área del trapecio rectángulo. 
6. Hallar el perímetro y el área del trapecio isósceles  	7. El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcular las longitudes de los lados no paralelos y el área.
8. Hallar el perímetro y el área del triángulo equilátero dado.  	9. Si los lados no paralelos de un trapecio isósceles se prolongan, quedaría formado un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Sabiendo que la altura del trapecio es un medio de la altura del triángulo, calcular el área del trapecio.

10. ¿Cuál ha de ser la longitud del lado de una mesa cuadrada para que su área sea igual a la de otra mesa rectangular que tiene 16 decímetros de largo por 4 decímetros de ancho?	11. El área de un cuadrado es 2304 cm^2. Calcular el área del hexágono regular cuyo perímetro sea igual al perímetro del cuadrado.
12. *PQRS* es un cuadrado. *N* y *T* son los puntos medios de *PQ* y *RS* respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado corresponde a la región sombreada? 	13. *PQRS* es un cuadrado. *L* y *M* son los puntos medios de *PQ* y *QR* respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado corresponde a la región sombreada? 

3.4.3. Taller 3. Circunferencias

Nombre: ___________________________ **curso:** _________ **Fecha:** ___________

Pre-requisitos.

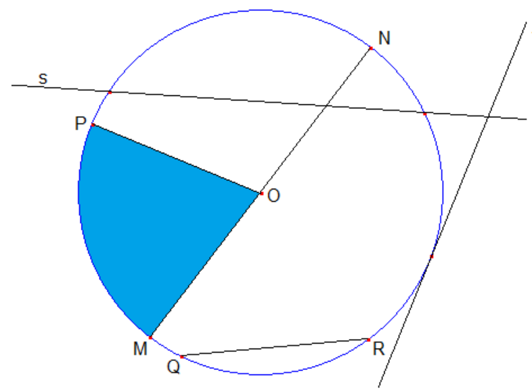
Se requieren tener claros los siguientes conceptos:

- Elementos de la circunferencia.
- Conceptos básicos de área
- Longitud de la circunferencia.

Conceptos básicos.

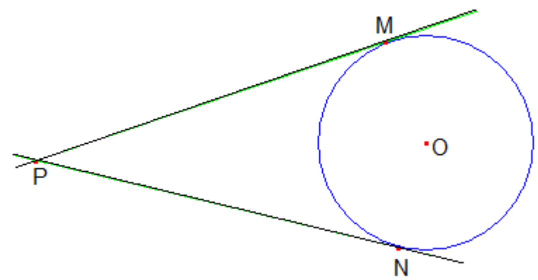
Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del centro, su medida, el perímetro es la longitud total la figura formada por los puntos.

- El círculo es la región plana delimitada por la circunferencia, es decir el conjunto de la circunferencia y sus puntos interiores.



- El centro (O), es el punto del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.
- Radio es un segmento que va del centro a un punto de la circunferencia. $\overline{OP}$, es un radio. También se conoce por este nombre a la longitud de este segmento.
- Cuerda es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. $\overline{QR}, \overline{MN}$ son cuerdas.
- Diámetro, una de las cuerdas que pasa por el centro, $\overline{MN}$ es un diámetro. Mide el doble del radio. También se conoce con este nombre a la longitud de tal segmento.

- Tangente es una recta que corta a la circunferencia en un solo punto. La recta t es una tangente.
- Secante es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos. La recta s es una secante.
- Sector circular es una parte de del círculo limitada por dos radios y el arco comprendido. La región AOB es un sector circular.
- Arco es una parte de la circunferencia. $\widehat{QR}$ es un arco.



- Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes, $PM = PN$
- Para hallar el área de un circulo se puede proceder así: consideremos el círculo como un polígono regular de infinitos lados, por tanto se harían dos consideraciones:
  - El perímetro de la circunferencia $p = 2\pi r$
  - En la medida en que aumenta el número de lados la longitud de la altura de cada uno de los triángulos tiende a ser igual a la longitud del radio $a = r$. De lo anterior:

$$A_{circulo} = \frac{pxa}{2} = \frac{2\pi rxr}{2} = \pi r^2$$

Metodología.

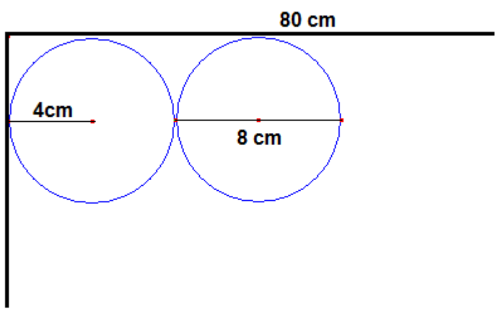
d. En un primer momento se dará del cuerpo del taller a los estudiantes, la parte correspondiente a los prerrequisitos, ejercicio resuelto y ejercicio guiado para que con su desarrollo esté mejor preparado al desarrollo de los ejercicios y problemas a resolver. Estos elementos se entregarán fotocopiados, por lo menos dos días antes de la aplicación de la segunda parte.

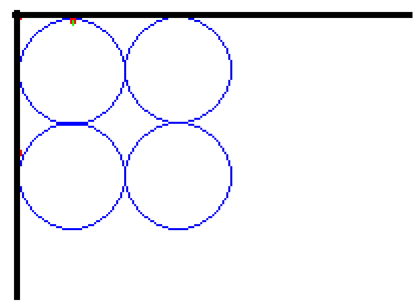
e. El día de la aplicación de la segunda parte se entregará por escrito copia a cada estudiante de los ejercicios o problemas a resolver, para que individualmente lo realicen. Lo harán en un tiempo aproximado de 45 minutos. Después de realizado el taller en forma individual, se pedirá a los estudiantes que en grupos de a tres, socialicen sus respuestas unificando criterios para que cada grupo dé una solución a cada ejercicio. Se dará a cada grupo nueva copia del taller u hojas en blanco para que allí se escriban las soluciones conjuntas finales. Para finalizar esta segunda parte se hará una puesta general del desarrollo de los ejercicios o problemas por dos de los grupos que en el desarrollo del taller presenten una solución creativa, más sencilla o con menor complejidad que la presentada por los otros grupos. Durante el desarrollo del taller se aplica los métodos de trabajo independiente en un primer momento y de trabajo colaborativo. Como parte de la preparación para la aplicación y de la continuidad para el siguiente taller se pedirá a los estudiantes que resuelvan las actividades del numeral 15.

Ejercicio resuelto

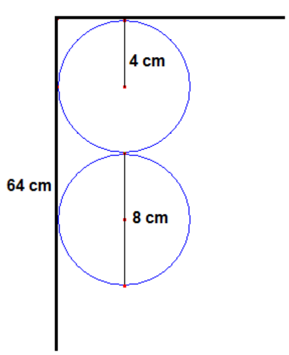
En una lámina metálica rectangular que tiene 80 centímetros de largo por 64 centímetros de ancho, ¿cuántos agujeros de 4 centímetros de radio se pueden abrir, si las circunferencias han de ser tangentes, y cuál es en decímetros cuadrados el área de los espacios que quedan? La solución al problema se facilita realizando una ilustración.

En la lámina se deben hacer agujeros de 4 cm de radio siendo estos tangentes. Los agujeros se representan con circunferencias tangentes y estas se alinean tanto horizontal como verticalmente. El número de circunferencias (agujeros) será la suma de tantas filas como el número de circunferencias haya en una columna, donde se sabe cuántas circunferencias hay por fila. Veamos cuantas circunferencias habría por fila.





El radio de cada agujero es de 4 cm y por tanto su diámetro es de 8cm, que es lo que abarca horizontalmente. Entonces se podrán hacer tantos agujeros como este 8 en 80, es decir 10 agujeros, horizontalmente.



De manera similar se puede hallar el número de agujeros que se pueden realizar verticalmente. Habrá tantos agujeros como esté 8 en 64, por lo tanto serán 8 agujeros los que hay verticalmente. El número total de agujeros será la suma de cada fila. Hay tantas filas como agujeros verticales:

$$\mathbf{10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 8x10 = 80}$$

En total en la lámina de $80x64$ se pueden abrir 80 agujeros.

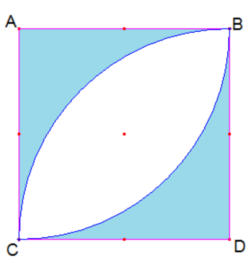
Cada agujero tiene un área de $A = \pi r^2 = \pi(4\ cm)^2 = 16\pi\ cm^2$, como son 80 agujeros tendrán un área total de $16\pi\ cm^2 x 80 = 1280\pi\ cm^2$. El área total de la lámina es de $80\ cm\ x\ 64\ cm = 5120\ cm^2$, por lo tanto el área de los espacios que quedan es de $5120\ cm^2 - 1280\pi\ cm^2$, haciendo una aproximación para π se tendría: $5120\ cm^2 - 1280\ (3.14) cm^2 = 5120 cm^2 - 4019.2 cm^2 = 1100.8\ cm^2$

Los múltiplos y submúltiplos de las medidas de superficie en el sistema métrico decimal, aumentan o disminuyen, como múltiplo de 100; como la respuesta se pide en *dm²*, entonces:

$$1100.8\ cm^2 x \frac{dm^2}{100 cm^2} = 11.008\ dm^2,$$

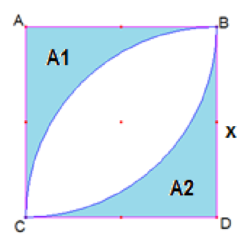
El área de los espacios que quedan, sería de 11 *dm².*

Ejercicio guiado



Hallar el área de la región sombreada en el cuadrado.

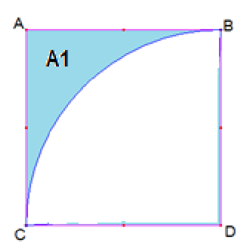
Como no se da el valor del lado del cuadrado, se puede asignar *x.* Al mismo tiempo se nombra cada una de las dos partes sombreadas, así:



¿Qué figuras o parte de ellas se observan si se quita la región A2?

____.

Si se quita la región A2 se tendría, la gráfica a la derecha.



¿Qué porción de círculo sería la región blanca, sin sombrear?

____

¿Cuál es el área de la región sin sombrear?

____

Conociendo el área de la región sin sombrear, ¿cómo se halla el área de la región A1?

____

En proporción, relacionando la región A1 y la región A2, ¿cómo son? __________________

Entonces el área de la región sombreada, será: ___________________________

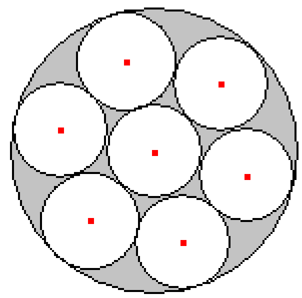
Ejercicios propuestos

1. Hallar el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.
2. Hallar el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.
3. Calcular el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.
4. Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 37.68 m.
5. En un cuadrado de 2 m de lado se inscribe un círculo y en este círculo un cuadrado y en éste otro círculo. Hallar el área de la región comprendida entre los dos círculos.
6. En una circunferencia de radio igual a 4 m se inscribe un cuadrado y sobre los lados de éste y hacia el exterior se construyen triángulos equiláteros. Hallar el área de la estrella así formada.

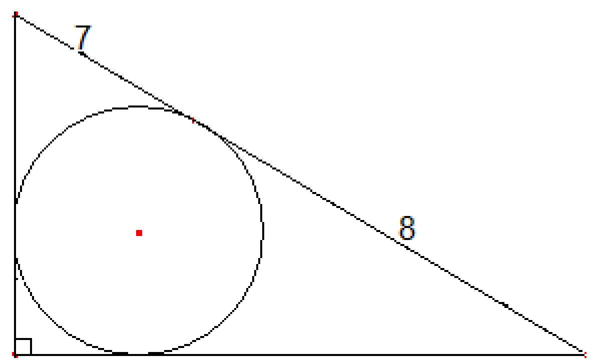
7. Los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia miden 4 cm y 3 cm respectivamente. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

8. Calcular el área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de 8 m de diagonal.

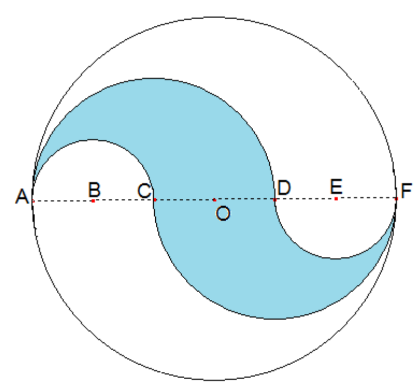
9. Cada uno de los círculos pequeños tiene radio uno. El círculo central interior es tangente a cada uno de los otros seis y cada uno de estos seis círculos es tangente al círculo exterior y a sus círculos vecinos. Hallar el área de la región sombreada.



10. Se inscribe una circunferencia en un triángulo rectángulo. El punto de tangencia de la circunferencia y la hipotenusa divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitud 7 y 8 respectivamente. Hallar el área del triángulo.

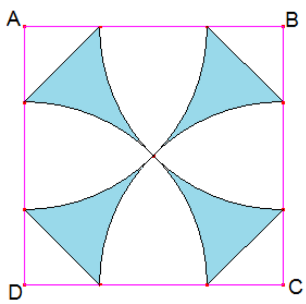


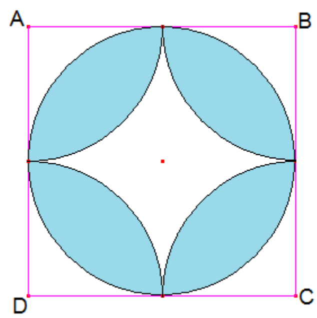
11. Hallar la razón entre el área de la región sombreada y el área del círculo, donde $AC = CD = DF$, con B, O, E puntos medios de AC, CD y DF respectivamente.



12. Hallar la diferencia que hay entre el área del hexágono regular circunscrito a un círculo de 10 centímetros de lado y la del hexágono regular inscrito en el mismo.

13. Hallar el área de la región sombreada en las siguientes gráficas, las cuales están inscritas en un cuadrado:





14. Para el siguiente taller se requiere que se realicen las siguientes actividades:

    a. Elaborar en cartulina un cubo de 10 centímetros de lado, dejando una de las caras sin cerrar, debe quedar hermético.

    b. Conseguir una botella, preferentemente plástica, de un litro.

    c. Buscar y traer un cilindro y un cono que tengan el mismo radio interior y la misma altura.

    d. Traer arena preferentemente seca.

    e. Observar, ojala fotografiar, en un almacén o tienda elementos que vengan empacados en cajas. Conveniente preguntar o conocer las dimensiones de la caja y la cantidad de elementos que contiene y sus características de peso o tamaño.

f. Calcular cuántas cajitas de 4.5 cm de anchas por 8.5 cm de largas y 10 cm de altas caben en un empaque de madera de 40 cm ancha, 50 cm de larga y 25 cm de alta.

3.4.4. Taller 4. Volúmenes

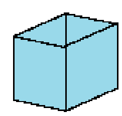
Nombre: ________________________ **curso:** ________ **Fecha:** __________

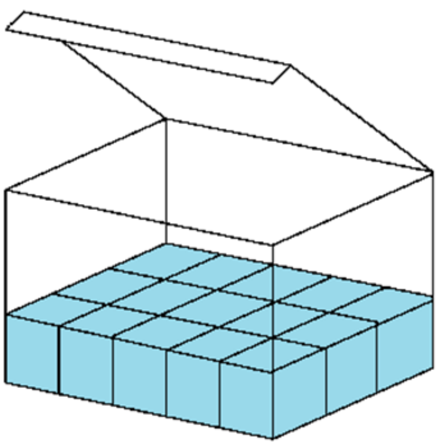
Pre-requisitos.

Se debe tener claros los siguientes conceptos:

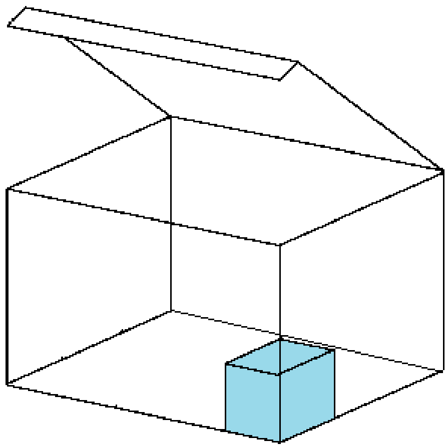
- Áreas de figuras geométricas.
- Conceptos básicos de volumen.

Conceptos básicos.



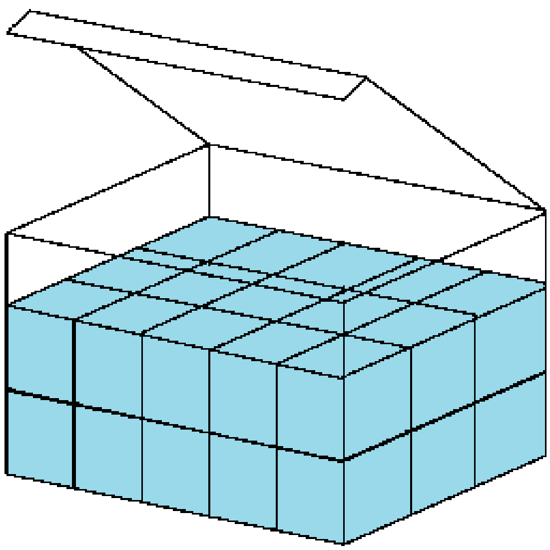


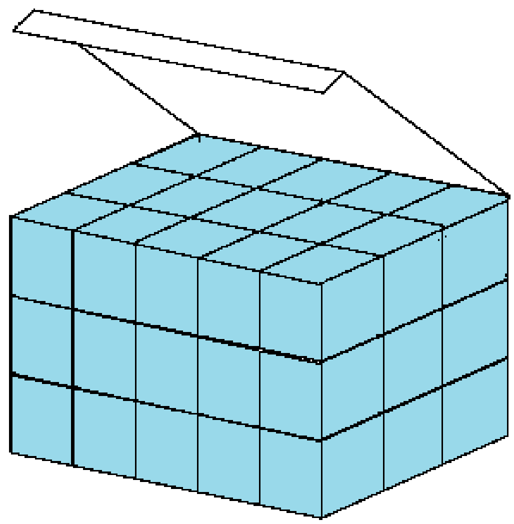
Cuando se trabaja con volúmenes, se está trabajando con unidades de volumen, se contemplan las tres dimensiones del espacio físico: el largo, ancho y espesor (altura o profundidad). Se quiere conocer cuántos cubos, como éste caben en una caja como la siguiente, sabiendo que caben un número exacto de veces a lo largo, ancho y alto.



Se empiezan a encarrar y se hace una primera pila en la base de la caja. Se toma como unidad de medida uno de los cubos.

Se observa que en la base de la caja se hacen tres filas de cinco cubos, en total en la primera pila se pueden acomodar 15 cubos.





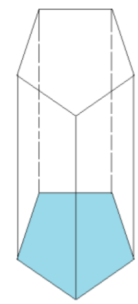
Se siguen acomodando y se hacen una segunda y tercera pilas cada una con 15 cubos. El total de cubos es $15 + 15 + 15 = 45$. La caja tiene forma de un paralelepípedo. Se observa que en la caja hay 5 cubos de frente, 3 de fondo y 3 de alto. El frente de la caja es el mismo largo y el fondo el ancho. El número de cubos se puede calcular multiplicando el largo por el ancho por el alto, lo cual daría el volumen del paralelepípedo.

$$V = lxax\boldsymbol{h}$$

Se puede decir también que su volumen es el área de la base, $B = lxa$, por la altura:

$$V = l\ x\ a\ x\ h = B\ x\ h$$

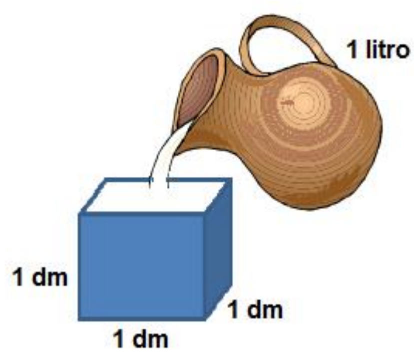
Volumen de un prisma



El volumen de un prisma es similar al de un paralelepípedo, se hace más general, pues su base ya no solo es un paralelogramo, sino cualquier polígono, por ello su volumen es:

$$V_{prisma} = \acute{a}rea\ de\ la\ base\ x\ altura = B\ x\ h$$

Relación entre las medidas de capacidad y volumen.



Si se toma una jarra que contiene un litro de algún líquido y éste se vierte en un recipiente cúbico de arista 1 dm, el líquido ocupará exactamente el espacio del recipiente cúbico.

$$1\ litro = 1dm^3$$

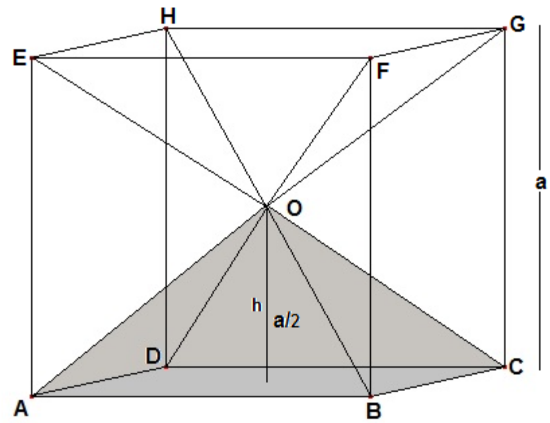
Volumen de un cubo.

El cubo (hexaedro) es un paralelepípedo en el cual todas las aristas tienen la misma longitud, por tanto su volumen V sería:

$$V = largo\ x\ ancho\ x\ alto = axaxa = a^3$$

Volumen de una pirámide.

Si se construye una pirámide en un cubo, de tal forma que una cara del cubo sea la base de la pirámide y el centro del cubo (*O*), sea el vértice de la pirámide, se tendría:



$$V_{cubo} = a^3$$

$$V_{pirámide} = \frac{a^3}{6}$$

Pues se tendrían en el cubo seis pirámides como la pirámide de base cuadrada ABCD y vértice *O.* La base de la pirámide ABCD tiene por área a^2, a la que se denominará *B.*

$$V_{pirámide} = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2 a}{6} = \frac{B\ a}{6}$$

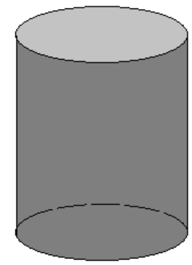
En este caso la altura *h* de la pirámide es $h = \frac{a}{2}$.

$$V_{pirámide} = \frac{B\frac{a}{2}}{\frac{6}{2}} = \frac{B\ h}{3}.$$

Es decir que el volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

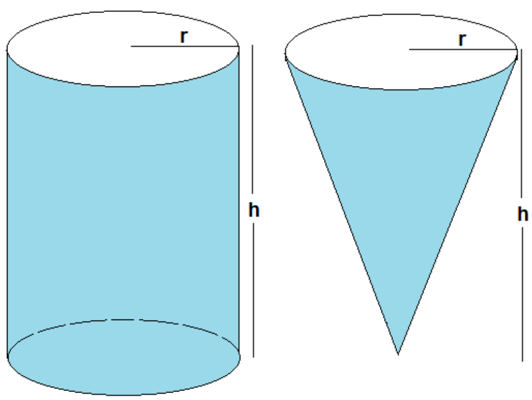
Volumen de un cilindro.

El volumen de un cilindro se puede tomar como el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular de infinitos lados (circunferencia):



$$V_{cilindro} = B\ x\ h = (\pi\ x\ r^2)x\ \boldsymbol{h}$$

Volumen de un cono.



Se puede partir de una experiencia práctica para dar una fórmula para el volumen de un cono. Es necesario tener un cilindro y un cono, los cuales deben tener la misma base, por tanto iguales radios, así mismo deben tener la misma altura. Si se llena de algún líquido el cono y éste se vierte en el cilindro, se necesitará llenar el cono dos veces más y vértelas en el cilindro, en este momento el líquido habrá llenado el cilindro.

Es decir:

$$V_{cilindro} = 3V_{cono}$$

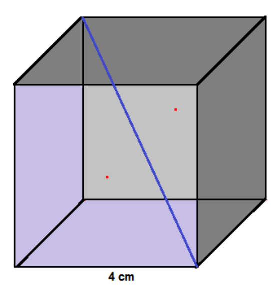
$$\frac{V_{cilindro}}{3} = V_{cono} = \frac{B\ x\ \boldsymbol{h}}{3}$$

Metodología.

- En un primer momento se dará del cuerpo del taller a los estudiantes, la parte correspondiente a los prerrequisitos, ejercicio resuelto y ejercicio guiado para que con su desarrollo esté mejor preparado al desarrollo de los ejercicios y problemas a resolver. Estos elementos se entregarán fotocopiados, por lo menos dos días antes de la aplicación de la segunda parte.

- El día de la aplicación de la segunda parte se entregará por escrito copia a cada estudiante de los ejercicios o problemas a resolver, para que individualmente lo realicen. Lo harán en un tiempo aproximado de 45 minutos. Después de realizado el taller en forma individual, se pedirá a los estudiantes que en grupos de a tres, socialicen sus respuestas unificando criterios para que cada grupo dé una solución a cada ejercicio. Se dará a cada grupo nueva copia del taller u hojas en blanco para que allí se escriban las soluciones conjuntas finales. Para finalizar esta segunda parte se hará una puesta general del desarrollo de los ejercicios o problemas por tres de los grupos que en el desarrollo del taller hayan dado las soluciones siguiendo caminos diferentes. Durante el desarrollo del taller se aplica los métodos de trabajo independiente en un primer momento y de trabajo colaborativo. Como parte de la preparación para la aplicación y de la continuidad para el siguiente taller se pedirá a los estudiantes que resuelvan el problema 15, realizando una gráfica y planteando ecuaciones que permitan su solución.

Ejercicio resuelto



Calcular el área de superficie total y el volumen de un cubo de 4 cm de arista. Calcular la diagonal.

El volumen del cubo está dado por:

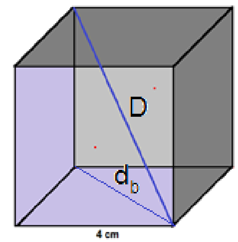
$V = a^3; V = (4\ cm)^3 = 64\ cm^3$

Cada cara lateral del cubo es un cuadrado, el cubo (hexaedro) tiene 6 caras, por tanto el área de superficie total será el área de cada cara por el número de caras:

$$(4cmx4cm)6 = 16cm^2x6 = 96\ cm^2$$

Para calcular la diagonal del cubo se calcula primero la diagonal de la base, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d_b = \sqrt{(4\ cm)^2 + (4\ cm)^2} = \sqrt{16cm^2 + 16cm^2} = \sqrt{32\ cm^2}$$

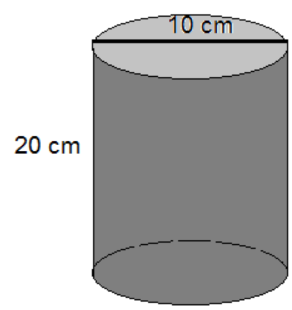


Volviendo a utilizar el teorema de Pitágoras se halla la diagonal del cubo (hipotenusa) con la diagonal de la base y la arista del cubo (catetos).

$$D = \sqrt{\left(\sqrt{32\ cm^2}\right)^2 + (4\ cm)^2} = \sqrt{32\ cm^2 + 16cm^2} = \sqrt{48\ cm^2} = 4\sqrt{3}cm$$

Ejercicio guiado

Calcular la cantidad de hojalata que se necesita para hacer 10 latas cilíndricas cerradas de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.



Observe el cilindro:

¿Qué figuras geométricas conforman el cilindro?

____

Las tapas del cilindro tienen forma circular.

El área de cada tapa es: ______________________________.

Por tanto el área de las dos tapas es: ____________________________.

La pared del cilindro, será su área lateral, la cual al ser desdoblada tiene la forma de:

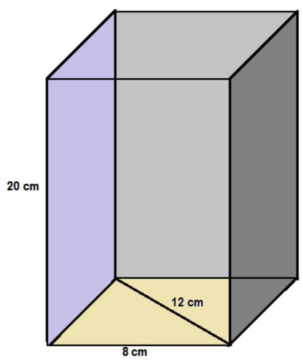
___________________________.

El área lateral del cilindro está dada por la altura del cilindro y la longitud de la circunferencia correspondiente, esto es: ________________________________

La cantidad de hojalata que se necesita para hacer una lata cilíndrica es: ____.

La cantidad total de hojalata es: ______________________________.

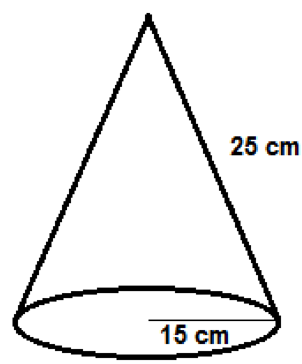
Ejercicios propuestos



1. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma cuya base es un rectángulo que tiene de largo 8 cm y de diagonal 12 cm, y su altura es de 20 cm.

2. Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 75.36 cm. Calcular el área total y el volumen.

3. Para una fiesta se han hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón se habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de altura inclinada (generatriz)?



4. Una pirámide está limitada por una base cuadrada de 40 cm de lado y por cuatro triángulos equiláteros. Calcular:

   a. Su superficie total.

   b. Su altura.

c. Su volumen.

5. ¿Cuál será el área de un cubo si se duplica, triplica o cuadriplica la arista?

6. Un aprendiz de carpintero tiene que hacer una caja semejante a otra cuyas dimensiones son: altura, 30 centímetros; ancho, 48 centímetros; longitud 60 centímetros. Esta caja ha de tener 4 centímetros menos en su altura, y las restantes dimensiones iguales, pero el aprendiz hace la caja con 4 centímetros menos en cada dimensión. ¿Cuál es el error cometido o la diferencia entre los volúmenes de las dos cajas?

7. El agua contenida en un recipiente cilíndrico de 35 centímetros de diámetro y de 1 metro de altura ha de envasarse en otro también cilíndrico y de 80 centímetros de diámetro. ¿Hasta qué altura subirá el agua?

8. ¿En qué proporción están las áreas de la superficie interior y exterior de una esfera hueca de 35 milímetros de espesor, si el diámetro exterior tiene 1 metro?

9. Se inscribe un cubo en una esfera; expresar su arista en función del radio de la esfera.

10. ¿Cómo variaría el volumen de un cono si se duplicara:

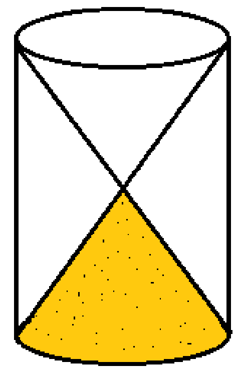
    a. la altura?

    b. el diámetro?

    c. la altura y el diámetro?

11. Un rectángulo de 4 cm por 7 cm se rota alrededor del lado largo para generar un cilindro y se rota alrededor del lado corto para generar otro cilindro. ¿Cuál es la razón entre los volúmenes de estos cilindros?

12. Un reloj de arena consta de dos conos idénticos contenidos en un cilindro recto de radio 2.5 cm y altura 6 cm. El cono inferior está lleno de arena. ¿Cuál es la razón entre el volumen de la parte llena de arena y el volumen del cilindro?



13. Se vierten 5 litros de cierto líquido en un recipiente en forma de cilindro recto de 10 cm de radio. De manera similar se vierten 5 litros del mismo líquido en otro recipiente en forma de prisma de base rectangular de 20 cm de ancho por 25 cm de largo. Los dos recipientes tienen suficiente altura para contener el líquido. ¿Cuál es la diferencia de altura alcanzada por los líquidos en los dos recipientes?

14. Si el lado de un cuadrado aumenta 5cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?

3.4.5. Taller 5. Ecuaciones

Nombre: ________________________ **curso:** ________ **Fecha:** __________

Pre-requisitos.

Se debe tener claros lo siguiente:

- Conceptos básicos de ecuaciones y métodos de solución.
- Conceptos de áreas y volúmenes.

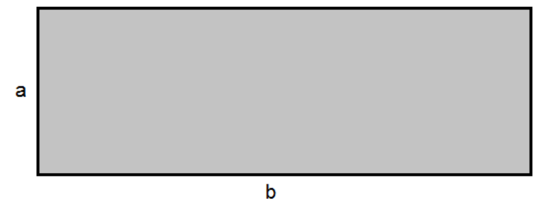
Metodología.

a. En un primer momento se dará del cuerpo del taller a los estudiantes, la parte correspondiente a los prerrequisitos, ejercicio resuelto y ejercicio guiado para que con su desarrollo esté mejor preparado al desarrollo de los ejercicios y problemas a resolver. Estos elementos se entregarán fotocopiados, por lo menos dos días antes de la aplicación de la segunda parte.

b. El día de la aplicación de la segunda parte se entregará por escrito copia a cada estudiante de los ejercicios o problemas a resolver, para que individualmente lo realicen. Lo harán en un tiempo aproximado de 45 minutos. Después de realizado el taller en forma individual, se pedirá a los estudiantes que en grupos de a tres, socialicen sus respuestas unificando criterios para que cada grupo dé una solución a cada ejercicio. Se dará a cada grupo nueva copia del taller u hojas en blanco para que allí se escriban las soluciones conjuntas finales. Para finalizar esta segunda parte se hará una puesta general del desarrollo de los ejercicios o problemas por dos de los grupos que en el desarrollo del taller presenten una solución creativa, más sencilla o con menor complejidad que la presentada por los otros grupos. Durante el desarrollo del taller se aplica los métodos de trabajo independiente en un primer momento y de trabajo colaborativo.

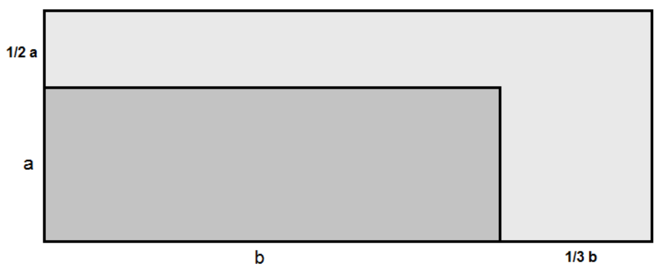
Ejercicio resuelto

Cuando la base de un rectángulo se prolonga un tercio y la altura la mitad, la relación entre estas dos longitudes es de 4 a 3, el mismo resultado se obtiene prolongando 5 metros estas dos dimensiones; ¿cuál será la base, la altura y el área de este rectángulo?

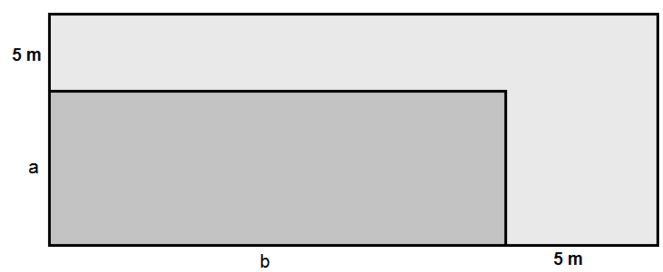


El rectángulo original tiene de base *b y* de altura *a.*

Se plantean dos cuestiones: la primera que se obtienen rectángulos equivalentes si a la base se le agrega un tercio de su longitud y



a la altura la mitad, en relación a prolongar la base y la altura en 5 m. La segunda es que los rectángulos resultantes guardan la misma relación, de 4 a 3, entre la base y la altura



De lo anterior se plantean las ecuaciones siguientes:

Ecuación 1.

$$\frac{b+\frac{1}{3}b}{a+\frac{1}{2}a}=\frac{4}{3}$$

Ecuación 2

$$\frac{b+5}{a+5}=\frac{4}{3}$$

Este sistema de ecuaciones tiene diversas formas para ser resuelto, una de ellas es:

$$\frac{b+\frac{1}{3}b}{a+\frac{1}{2}a}=\frac{4}{3}, \qquad y \qquad \frac{b+5}{a+5}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{3b+b}{3}}{\frac{2a+a}{2}}=\frac{4}{3}, \qquad y\ ,\frac{b+5}{a+5}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{8b}{9a}=\frac{4}{3}, \qquad y \quad 3b+15=4a+20$$

$$-36a+24b=0, \qquad y \qquad -4a+3b=5$$

$$\begin{array}{r} -36a+24b=0 \\ \underline{32a-24b=-40} \\ -4a=-40 \end{array}$$

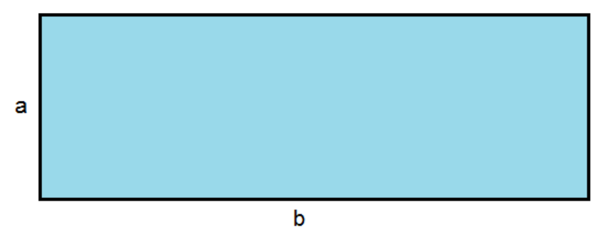
$$a=10$$

$$b=15$$

Luego la base del rectángulo es de 15 cm, la altura de 10 cm y el área de 150 cm^{2}.

Ejercicio guiado

Busca las dimensiones de un rectángulo del que conocemos su perímetro, 34 m, y su área, 60 m^2.

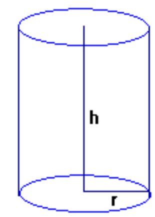


La ecuación para perímetro del rectángulo es: ___________________

La ecuación para el área es: _________________________.

Utilice alguno de los métodos para resolver el sistema de ecuaciones, muestre su procedimiento.

Ejercicios propuestos



1. El área de superficie total de un cilindro es 12π cm^2, y entre su radio y la altura suman 14 cm. Halla el volumen de dicha figura.

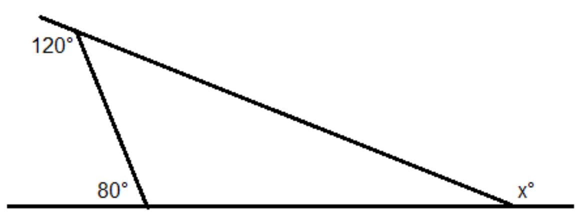
2. Si el lado de un cuadrado aumenta 5 cm, su área se multiplica por 4. ¿Cuál era el lado inicial del cuadrado?

3. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 28 cm y la hipotenusa es 14 cm menor que la suma de los dos catetos. Calcula el cateto desconocido.

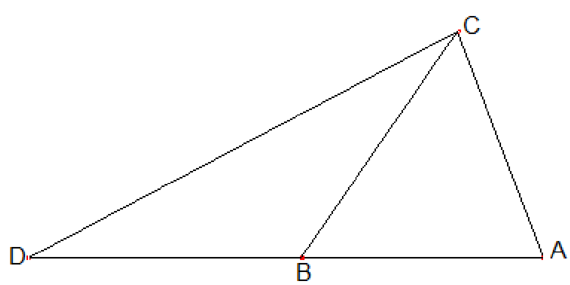
4. Tenemos una parcela rectangular. Si su largo disminuye en 80 m y su ancho aumenta en 40 m, se convierte en un cuadrado. Si disminuye en 60 m, su largo y su ancho aumenta en 20 m, entonces su área disminuye en 400 m2. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

5. El lado de un rombo mide 5 cm, y su área 24cm^2. Calcula la longitud de sus diagonales.

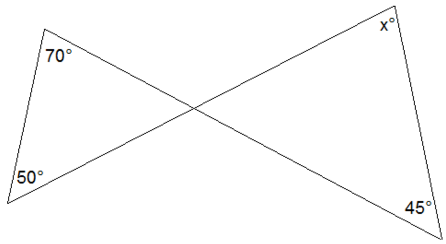
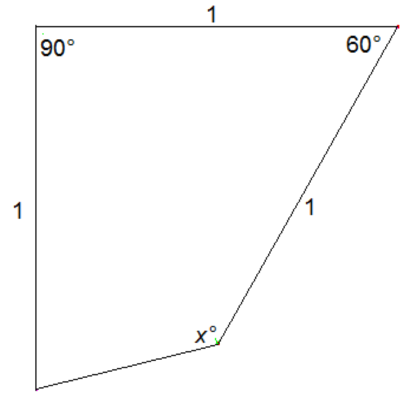
6. Dado el gráfico siguiente, halle el valor de x



7. En el esquema $AB = AC$ y $BD = BC$. Hallar la medida del $\angle CDB$ dado que $\angle BAC = 70°$.



8. Hallar el valor de x.

9. Un rectángulo mide 72 metros de base y 5 de altura. ¿Cuáles serían las medidas de la base y altura de un rectángulo semejante, de área tres veces mayor?

10. Un círculo tiene 12 metros de radio, ¿Cuánto mide el radio de otro círculo de área cinco veces mayor?

11. El perímetro de un triángulo es de 54 cm. Calcular sus lados si están en la razón $2:3:4$.

12. Calcular la distancia de los centros de dos circunferencias tangentes exteriores sabiendo que la sumas de los cuadrados de los radios es de 25 cm^2 y el producto de los radios es de 12 cm.

13. El área de un triángulo mide 600 cm^2 y la base es el triple de la altura, ¿cuáles son las medidas de la base y de la altura?

14. Un rectángulo tiene de área 4800 cm^2. Si la base y la altura están en proporción 4 a 3, ¿cuál es la medida de la base y cuál la medida de la altura de cualquiera de los triángulos que resultan de trazar una diagonal al rectángulo?

3.4.6. Prueba final

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Maestría en Educación Matemática

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ____

CURSO: _______________ FECHA: ___________________

PRUEBA DE GEOMETRÍA

Tenga en cuenta las siguientes indicaciones.

- Esta es una prueba abierta con 21 preguntas.
- Es conveniente usar lápiz. En caso de cometer algún error borre cuidadosamente.
- Los diagramas pueden no estar a escala, se dan como ayuda visual.
- Utilice las hojas que se le suministran para el desarrollo de cada problema.
- Solo utilice lápiz y el papel suministrado, no se permite ninguna otra ayuda (ni calculadora, ni celulares).

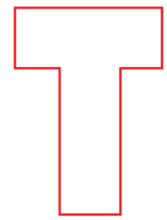
Las preguntas de la evaluación final son tomadas de las pruebas clasificatorias de Olimpiadas de la Universidad Antonio Nariño.

Esta prueba no es un examen, no se trata de pasar o perder. No se espera que resuelvas todos los problemas, cada problema resuelto representa una victoria. Si se te dificulta algún problema, ánimo!, continúa con los demás, muestra tus capacidades.

1. **Problema**

Elisa está entrenándose en natación. Cuando ella comenzó, hacía 10 trayectos de un extremo de la piscina al otro en 25 minutos. Ahora ella puede hacer 12 trayectos de un extremo de la piscina al otro en 24 minutos. ¿En cuántos minutos ha mejorado su tiempo de hacer uno de estos trayectos?

2. Problema



La letra T está formada colocando juntos dos rectángulos de 2 centímetros x 4 centímetros, como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de T, en centímetros?

3. Problema

El círculo X tiene un radio de π . El círculo Y tiene una circunferencia de 8π . El círculo Z tiene un área de tiene un área de 9π . Hacer una lista de los círculos en orden del menor al mayor radio.

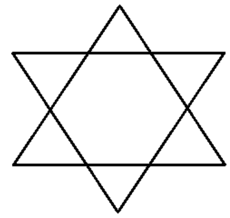
4. Problema

Se inscribe un triángulo cuyos lados están en la proporción 3 : 4 : 5 en un círculo de radio 3. ¿Cuál es el área del triángulo?

5. Problema

Una esfera está inscrita en un cubo cuya superficie tiene un área de 24 metros cuadrados. Luego se inscribe un segundo cubo dentro de la misma esfera. ¿Cuál es el área, en metros cuadrados, de la superficie del cubo interno?

6. Problema

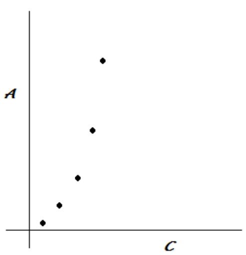


Un hexagrama unitario está compuesto por un hexágono regular de lado de longitud 1 y sus seis extensiones triangulares equiláteras, como se muestra en el diagrama. ¿Cuál es la razón entre el área total de las seis extensiones y el área del hexágono original?

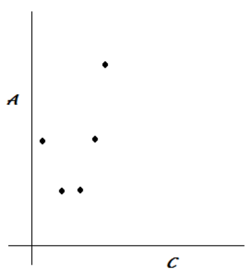
7. Problema

Amanda Calculadora dibuja cinco círculos con radios 1, 2, 3, 4 y 5. Luego para cada círculo ella señala el punto (C, A) , donde C es la longitud de la circunferencia y A su área. ¿Cuál podría ser su gráfico?

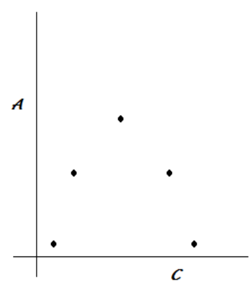
(A)



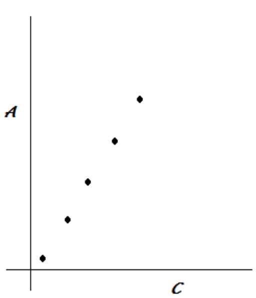
(B)



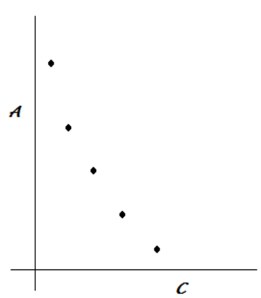
(C)



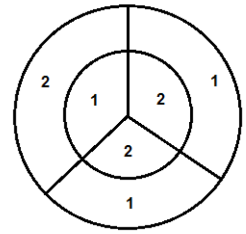
(D)



(E)

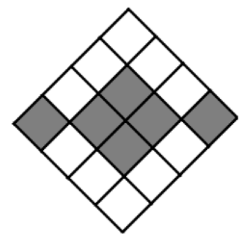


8. Problema



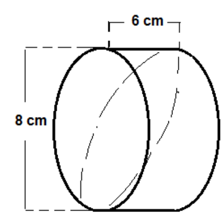
En el tablero de dardos mostrado en la figura, el círculo exterior tiene radio 6 y el círculo interior tiene radio 3. Los tres radios dibujados dividen cada círculo en tres regiones congruentes, con los puntajes correspondientes que se muestran. La probabilidad que un dardo caiga es proporcional al área de la región. Cuando se lanzan dos dardos, la puntuación es la suma de los puntajes en las regiones donde caigan. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea impar?

9. Problema



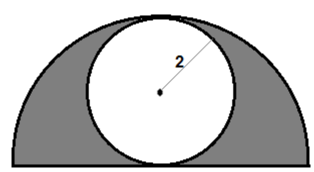
En la figura, ¿cuál es la razón entre el área de los cuadrados grises y el área de los cuadrados blancos?

10. Problema



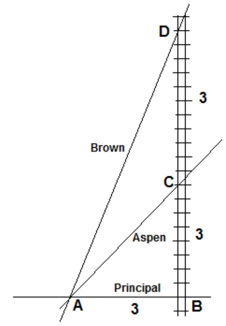
Diego corta una cuña de un cilindro de 6 centímetros de salchichón como se muestra en la figura por la curva punteada. ¿Qué alternativa es más próxima al volumen de la cuña en centímetros cúbicos?

11. Problema



Un círculo de radio 2 está inscrito en un semicírculo, como se muestra. La región dentro del semicírculo que esta fuera del círculo aparece sombreada. ¿Qué fracción del área del semicírculo es el área de la región sombreada?

12. Problema

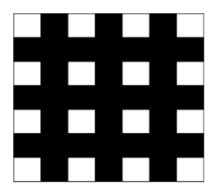


La porción triangular de terreno ACD yace entre la Calle Aspen, la Calle Brown y una vía de tren. La Calle principal va en dirección este-oeste, y la vía del tren va en dirección norte-sur. Los números en el diagrama indican distancias en millas. Se puede ignorar el ancho de la vía del tren. ¿Cuál es el área, en millas cuadradas, de la porción de terreno ACD?

13. Problema

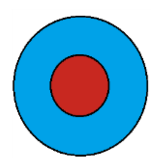
Se aumenta el largo de un rectángulo en 10% y se disminuye el ancho en 10%. ¿Qué porcentaje del área inicial es la nueva área?

14. Problema.



El diagrama representa un piso de 7 pies por 7 pies que está recubierto con baldosas negras de 1 pie cuadrado y con baldosas blancas de 1 pie cuadrado. Note que las esquinas tienen baldosas blancas. Si se va a recubrir un piso de 15 pies por 15 pies del mismo modo, ¿cuántas baldosas blancas se necesitarán?

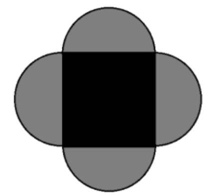
15. Problema.



Dos círculos de 1 centímetro y 3 centímetros de diámetro tienen el mismo centro. El círculo más pequeño está pintado de rojo, y la porción fuera del círculo más pequeño y dentro del círculo más grande está pintado de azul. ¿Cuál es la razón entre el área pintada de azul y el área pintada de rojo?

16. Problema.

Una región está limitada por arcos semicirculares construidos en los lados de un cuadrado cuyos lados miden 2/π, tal como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de esta región?

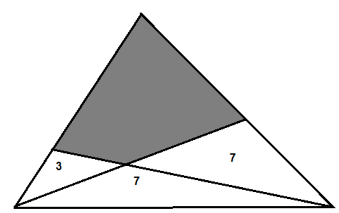


17. Problema.

En un triángulo con lados de longitudes enteras, la longitud de un lado es igual a tres veces la longitud de un segundo lado, y la longitud del tercer lado es 15. ¿Cuál es el mayor perímetro que el triángulo puede tener?

18. Problema.

Se particiona un triángulo en tres triángulos y un cuadrilátero trazando dos rectas desde dos vértices hasta los lados opuestos. Las áreas de los tres triángulos son 3, 7, y 7, como se muestra. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



19. Problema.

¿Cuál de las siguientes figuras tiene el mayor número de ejes de simetría? Triángulo equilátero, rombo no cuadrado, rectángulo no cuadrado, trapecio isósceles y cuadrado.

20. Problema.

Un triángulo equilátero con lados de longitud 10 se llena completamente con triángulos equiláteros con lados de longitud 1 que no se superponen. ¿Cuántos triángulos pequeños se requieren para esto?

Finalmente se aplicará la prueba anterior a los estudiantes de la muestra del colegio oficial Francisco Javier Matiz, con el fin de verificar y contrastar los resultados arrojados en el estudio. Se formularán los problemas escogidos anteriormente, son los que han tenido el mayor porcentaje de error en las pruebas de olimpiadas, se les presentarán a dichos estudiantes en forma abierta, sin distractores. Se analizarán los resultados y se concluirá.

Conclusiones del capítulo 3

Se presentó la tipología de errores de Franchi, L. y Hernández, A. (2004) de la cual se hace mención especial, por ser la tipología que, analizada, mejor se relaciona con el problema planteado.

Se conoce que aproximadamente un 30% de las preguntas de olimpiadas son de geometría, se hace una selección de ellas de las 10 pruebas clasificatorias nacionales del Primer Nivel y del Nivel Intermedio de los años 2007 a 2010, lo que arroja un total de 82 problemas, de los cuales se seleccionan 20, se analiza de cada uno el ítem errado escogido por el 30% o más de los participantes en cada una de las pruebas. De cada uno de los ítems seleccionados se estudian las posibles causas que llevaron a producir el error, este error se tipifica y se procede a categorizar.

Se analizan los temas de los 20 problemas y se procede a clasificarlos en 5 grandes temas: fracciones, perímetros y áreas, circunferencias, volúmenes y ecuaciones, esto para proceder a elaborar una herramienta que permita minimizar los errores detectados. Las herramientas son talleres con una estructura que en su desarrollo fortalezcan la deducción, la construcción de significados y conceptos geométricos.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se ofrece la propuesta de una nueva categoría de errores y se realiza un análisis del desarrollo de cada uno de los talleres, para minimizar el error de los estudiantes en las preguntas de geometría de las pruebas de olimpiadas. Se aplica una prueba final, donde se valoran los resultados y una encuesta de satisfacción sobre las actividades realizadas.

4.1. De la clasificación de errores

Se puede observar que para pruebas de selección múltiple se presume el proceso seguido por los estudiantes para dar como respuesta el ítem de mayor error, es decir en el mismo ítem que “erró” el mayor número de estudiantes. De acuerdo a la tabla 4 de la página 68 y la tipificación de errores de Franchi, L. y Hernández, A. (2004) se puede decir que se manifiestan las categorías de: errores propios del lenguaje geométrico, errores gráficos, errores de prerrequisitos y errores de tecnología. No se pueden determinar con certeza si el estudiante cometió errores de razonamiento, errores de transferencia, errores de técnica o errores azarosos, pues en esta clase de pruebas no se puede seguir el proceso realizado por el estudiante.

Se incluye a esta tipología una categoría que se puede denominar de trivialización, caracterizada por “*…una compulsión en nuestros estudiantes de identificar alguna palabra clave que le dice qué hacer con los datos del problema y proceder a efectuar una operación directa sobre los números que se encuentran en el enunciado, sin hacer un esfuerzo por comprender todos los pormenores. Otra tendencia preocupante es la* *de buscar una respuesta que cumple sólo una de las muchas condiciones dadas en el enunciado"*[40], como aclara Falk, M. (2001).

4.2. Taller 1. Fracciones

Para la realización de este primer taller se motiva a los estudiantes, comentándoles sobre la importancia de los problemas en matemáticas. A cada estudiante se le da una copia del taller para que lo empiecen a trabajar (ver Figura 4), y se dispone de un tiempo de 45 minutos.

En un segundo momento se les solicita que se reúnan en grupos de hasta tres estudiantes, se les da una copia en blanco del taller para que allí plasmen las soluciones a las que llegaron en consenso, durante un tiempo de 30 minutos.

Para finalizar un representante de cada grupo pasa al tablero para socializar la solución dada a cada uno de los ejercicios. En el Anexo 4, se puede observar uno de los talleres desarrollados por un estudiante.

[40] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VIII, No 1, pág. 15-26.

Figura 4. Desarrollo individual del primer taller.

Este primer taller está basado principalmente en ejercicios sobre fracciones que permitirán un mejor desempeño en los problemas geométricos en donde se apliquen conceptos de la fracción como parte de un todo. A continuación se valoran los resultados del taller:

- Hay dominio del concepto de fracción parte todo, buena cantidad de estudiantes distinguen el todo y sus partes, donde se escribe correctamente el numerador y el denominador de cada fracción.

- Los estudiantes tienen la capacidad de representar gráficamente una fracción dada y dado un conjunto de elementos determinan adecuadamente la fracción solicitada.
- Hay un buen desempeño cuando dado el todo se pide hallar una fracción, bien sea una fracción menor o mayor que la unidad.
- Los estudiantes reconocen en buen porcentaje por su nombre las figuras planas y manejan adecuadamente las fracciones como porcentaje.

En el desarrollo del taller aún persisten las siguientes insuficiencias:

- Se presenta cierta dificultad cuando dado un conjunto de elementos se pide señalar algunos subconjuntos en términos de fracciones.
- Se presenta cierta dificultad, cuando se pide representar gráficamente una fracción mayor que la unidad.
- Se presenta cierta dificultad al establecer relaciones entre las áreas de una figura que tiene varias divisiones.
- Les es muy difícil, complicado, hallar la razón en un problema geométrico. No se presenta alguna clase de razonamiento o intento de resolver el problema.

Como actividad para relacionar este taller con el siguiente se deja como ejercicio el último del taller, el cual es un problema de relación entre áreas. Debido al tiempo y en la medida en que los talleres son más complejos se les entrega previamente la copia de los prerrequisitos, del problema resuelto y del problema guiado para que los repasen, los desarrollen y se preparen.

4.3. Taller 2. Perímetros y áreas

Para este segundo taller se le entrega una copia de los problemas propuestos (ver Figura 5), para que sean desarrollados en grupos de dos estudiantes.

Figura 5. Desarrollo individual del taller sobre áreas.

Para el desarrollo del taller los estudiantes presentan grandes dificultades, empezando por las actividades de los prerrequisitos, por lo cual se les brinda una explicación, pero las dificultades continúan al estudiar el ejercicio resuelto y el ejercicio guiado, pues conceptos como los de perímetro, área, triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras no les son claros o no los aplican adecuadamente. Les cuesta bastante el plantear el problema y dar los elementos básicos para buscar su solución, pues no relacionan los diferentes elementos del problema, entre ellos o con los conceptos que deben aplicar. En vista de la dificultad individual, se busca la solución de manera colectiva y mediante preguntas. A continuación se precisan los resultados del taller:

- En el primer problema logran obtener los elementos para mostrar que el área de cada uno de los triángulos equivale a una cuarta parte del área del rectángulo y de ahí concluir que dos figuras pueden tener diferentes forma pero la misma área.
- Después de trabajar con triángulos se les facilita el trabajo con problemas que los tengan, donde se recuerda la aplicación en triángulos rectángulos del teorema de Pitágoras.
- Hay un avance significativo en el análisis de la figuras, descomponen el trapecio en triángulo(s) y rectángulo para determinar su área.
- Se avanza de igual forma en determinar el área de polígonos a partir de la descomposición en triángulos.
- Es efectivo en la resolución de los problemas del taller el trabajo en grupos de dos, máximo tres personas y donde se socializan las posibles soluciones.
- Se modifica la tendencia a aplicar el teorema de Pitágoras a triángulos que no son rectángulos.

En el desarrollo del taller se puede constatar la siguiente insuficiencia:

- Se dificulta el desarrollo de los problemas en la medida que aparecen conceptos nuevos para aplicar, el caso en donde se tiene la diagonal de un cuadrado para hallar su lado, cuando aparecen trapecios y polígonos regulares a partir del pentágono.

Como enlace para el taller siguiente, sobre circunferencias se les deja el ejercicio 16, además de darles copia de los prerrequisitos, ejercicio resuelto y ejercicio guiado de dicho taller.

4.4. Taller 3. Circunferencias

En el desarrollo de este taller se puede apreciar la dependencia a utilizar la calculadora, cuando se trata de efectuar una operación, aún algo sencilla. Se les dificulta o les da pereza hacer manualmente el cálculo. Los estudiantes trabajan en grupos de a dos, donde intercambian sus criterios y conocimientos geométricos (ver Figura 6).

Figura 6. Desarrollo individual del taller sobre circunferencias.

En el análisis de los resultados de este taller se constatan los siguientes resultados:

- Desarrollo de habilidades de cálculo con números decimales y aproximación de irracionales, como pi.
- Desarrollo exitoso, de los nuevos problemas, donde aplican los contenidos desarrollados en los talleres anteriores.
- Aplican correctamente conceptos de longitud de la circunferencia y área del círculo.
- Plantean en lenguaje natural las áreas sombreadas entre figuras.
- Se logra una participación activa del estudiante en la construcción y socialización del contenido.

En este taller a pesar de los avances obtenidos por los estudiantes, se evidenciaron algunas insuficiencias:

- Hay dificultad para dibujar las gráficas, se da la confusión entre figuras inscritas y circunscritas.
- Se presenta dificultad con los nuevos conceptos, corona circular y la aparición de teoremas que relacionan rectas tangentes a circunferencias.
- Se presenta dificultades al relacionar los elementos de la circunferencia con los del polígono inscrito o circunscrito.
- Se presenta una dificultad adicional, la falta de continuidad en los talleres, en algunos estudiantes, los cuales no han asistido por diferentes circunstancias.

Como enlace para el siguiente taller se les propone un problema y tres actividades: la primera construir un cubo de 1 dm de arista y llevar una botella “de un litro”. La segunda observar en una tienda la relación entre una caja de jugos y las cajitas en la que viene empacado el jugo y si es posible llevar un cilindro y un cono que tengan el mismo diámetro y la misma altura.

4.5. Taller 4. Volúmenes

Este taller se contextualiza a las vivencias que poseen los estudiantes, relacionada con esta temática. En tal sentido, se realizaron dos experiencias que resultaron significativas, la primera de ellas consistió en que un estudiante solicitó en cooperativa una caja en donde venían empacadas cajitas de bebidas (ver Figura 7). Una estudiante tomó las medidas de la caja grande y un estudiante tomo las medidas de una de las cajitas de la bebida, se hallaron los volúmenes y se comparó con el número de cajitas que deberían venir empacadas (ver figura 8).

Figura 7. Experiencias para la construcción de volumen con cajas.

La segunda experiencia consistió (ver Figura 9) en que previamente se había solicitado a los estudiantes realizar un cubo de un decímetro de lado y a otros que llevaran una botella de un litro. Se toma uno de los cubos de un decímetro cúbico y se le pide a dos de los estudiantes que vertieran el litro de agua en el cubo, donde se hizo la relación entre las medidas de volumen y capacidad (ver Figura 9).

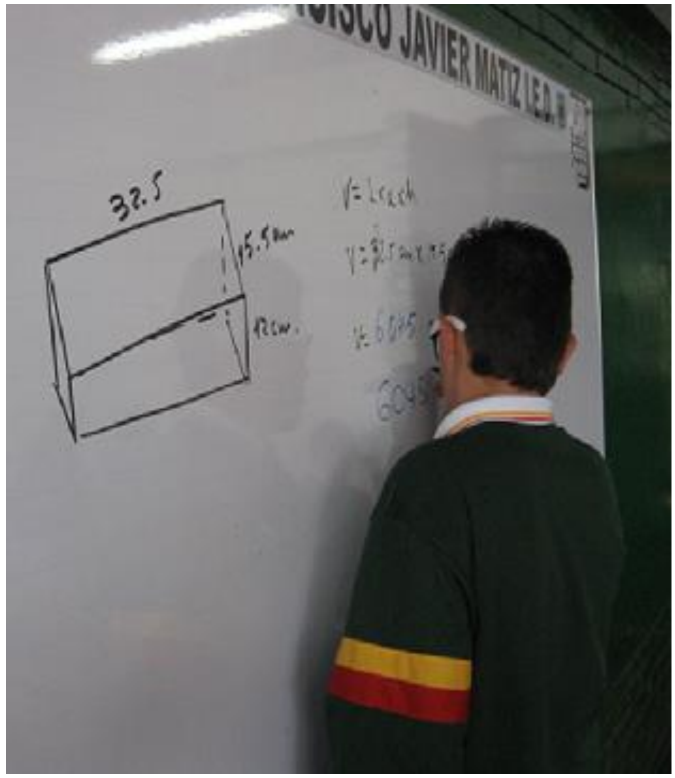


Figura 8. Socialización para el ejercicio de las cajitas.

Figura 9. Experiencias para la relación de medidas de capacidad y volumen.

Al realizar una valoración de los resultados de este taller se observó:

- Dadas las gráficas y la descomposición de cada cuerpo en sus superficies se les facilitan los análisis por la experiencia que tienen ya.
- En la medida en que encuentran elementos geométricos, que ya han trabajado se facilita su análisis, cálculo y desarrollo de los problema.

Después de haber precisado los logros, se aduce que en este taller los estudiantes presentaron ciertas insuficiencias, entre las que se tiene:

- Dificultades en los estudiantes para visualizar los elementos de los poliedros dados, con los cuales tiene que trabajar para dar la solución a los problemas.
- Limitaciones para realizar cálculo de forma manual.
- Dada la complejidad de la geometría del espacio y al tener mayores componentes para analizar y realizar operaciones, el trabajo se torna más lento, donde resuelven un menor número de problemas.

Para enlazar este taller con el siguiente se deja como trabajo el problema 15, además se les da copia del ejercicio resuelto y del ejercicio guiado.

4.6. Taller 5. Ecuaciones

Para la etapa en que se realiza este taller los estudiantes están en el desarrollo de su plan curricular de matemáticas, donde reciben el tema de solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, lo cual en cierta medida facilitó el desarrollo del taller, pero al observar los cuadernos de los estudiantes no hay un solo ejercicio relacionado con geometría. En valoración de los resultados alcanzados en este taller, se puede precisar que:

- Muestran un avance significativo en el análisis, reconocimiento y planteamiento de ecuaciones con elementos geométricos.
- Después del planteo de las ecuaciones que conduce a la solución del problema, se facilita su resolución.
- En la medida que el taller se desarrolló, las dificultades con los problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas, se superaron.

En este taller los estudiantes presentaron algunas insuficiencias, entre las que se tiene:

- Hubo que recordarles el desarrollo de un binomio, pues al realizar los cálculos estaban cometiendo errores. Por ejemplo en el cuadrado de un binomio solo escribían el cuadrado de cada uno de los términos, faltando el doble producto del primero por el segundo.

4.7. Resultados de la prueba final

Se aplica una prueba final a 36 estudiantes (ver Figura 10), a cada uno de ellos se le entregó el material para ser desarrollado de manera individual, en 90 minutos. La prueba consta de los 21 problemas seleccionados. Estos problemas se dividieron en tres grupos, de tal forma que cada estudiante solucionaba 7 problemas. Durante su desarrollo fueron pocas las preguntas, la prueba fue terminada en el tiempo estipulado.

Figura 10. Estudiantes durante la prueba final de la investigación.

Para presentar los resultados de la prueba final se tendrá en cuenta la tipificación de errores dada por Franchi, L. y Hernández, A. (2004) y las dos categorías que se han propuesto.

Tabla 5. Clasificación de los errores en la prueba final.

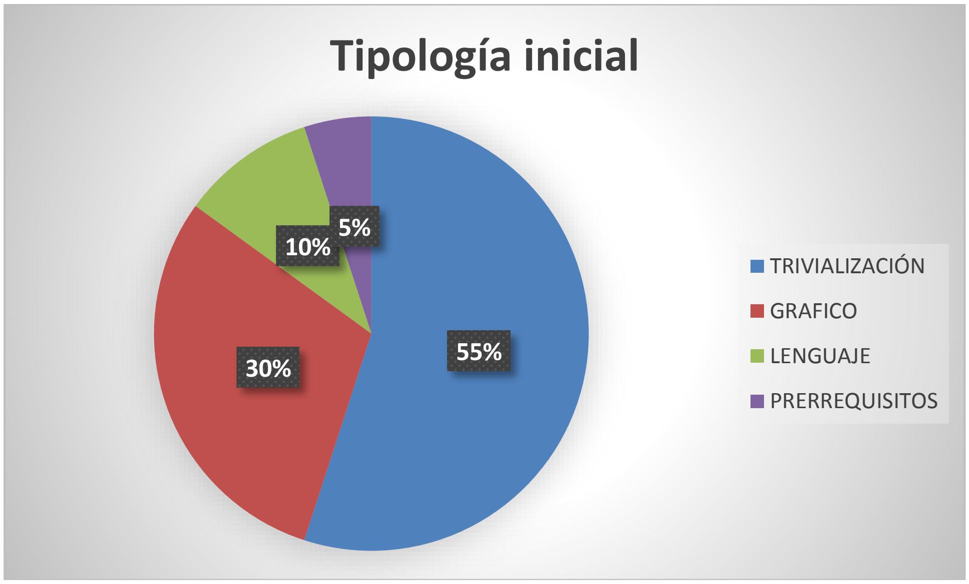
PROBLEMA	CORRECTA	PRERREQUISITO	LENGUAJE	GRÁFICOS	RAZONAMIENTO	TRANSFERENCIA	TÉCNICA	TECNOLOGÍA	AZAROSOS	TRIVIALIZACIÓN	DIGITACIÓN
1	41,7	0,0	0,0	0,0	25,0	0,0	25,0	8,3	0,0	0,0	0,0
2	25,0	16,7	0,0	33,3	8,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	33,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	25,0	16,7	0,0	16,7	0,0
4	8,3	25,0	0,0	0,0	25,0	0,0	16,7	16,7	0,0	0,0	0,0
5	0,0	25,0	16,7	25,0	16,7	0,0	0,0	8,3	0,0	0,0	0,0

6	0,0	25,0	0,0	0,0	25,0	0,0	0,0	16,7	0,0	0,0	0,0
7	0,0	58,3	0,0	0,0	33,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	0,0	25,0	16,7	0,0	16,7	0,0	0,0	25,0	0,0	0,0	0,0
9	25,0	0,0	0,0	25,0	16,7	0,0	0,0	16,7	0,0	0,0	0,0
10	0,0	25,0	0,0	8,3	16,7	0,0	0,0	25,0	0,0	0,0	0,0
11	0,0	25,0	8,3	8,3	16,7	0,0	16,7	16,7	0,0	0,0	0,0
12	25,0	0,0	0,0	16,7	16,7	0,0	16,7	16,7	0,0	0,0	0,0
13	0,0	33,3	0,0	25,0	0,0	0,0	25,0	8,3	0,0	0,0	0,0
14	66,7	8,3	0,0	0,0	0,0	0,0	16,7	0,0	0,0	0,0	0,0
15	16,7	16,7	25,0	0,0	25,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
16	16,7	16,7	0,0	16,7	8,3	0,0	16,7	16,7	0,0	0,0	0,0
17	25,0	16,7	16,7	8,3	0,0	0,0	0,0	16,7	0,0	0,0	0,0
18	0,0	41,7	16,7	8,3	8,3	0,0	0,0	16,7	0,0	0,0	0,0
19	16,7	25,0	16,7	16,7	8,3	0,0	8,3	0,0	0,0	0,0	0,0
20	8,3	8,3	16,7	25,0	0,0	0,0	8,3	16,7	0,0	0,0	0,0

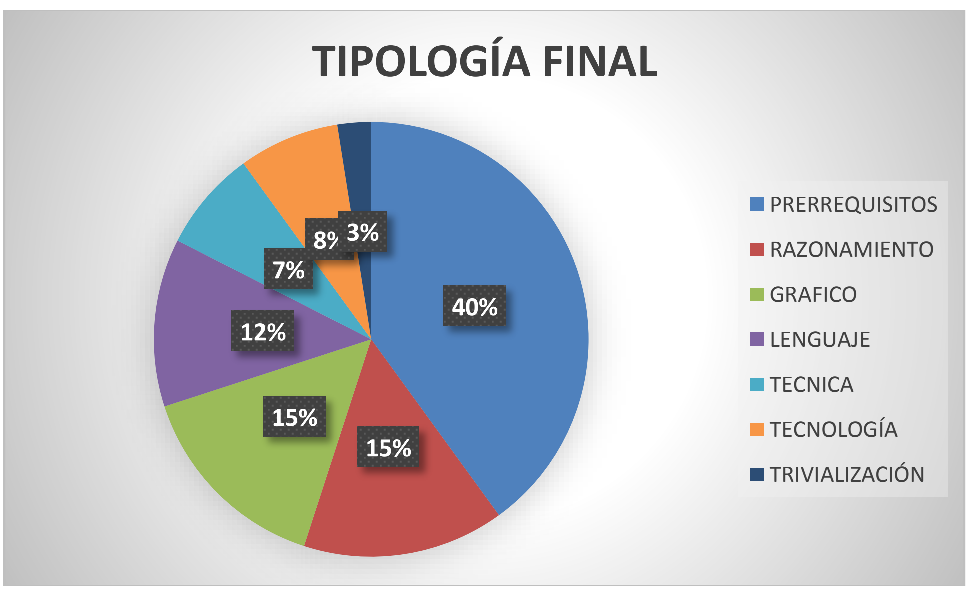
Luego de analizar los datos de la tabla, se puede inferir los siguientes resultados:

- La tipificación de errores en geometría dada por Franchi, L. y Hernández, A. (2004) se ajusta a los errores detectados.
- A pesar de no encontrar errores de transferencia, no se puede descartar esta categoría, pues los problemas presentados son de geometría o tomados de situaciones reales, pero claramente adaptados a una situación geométrica.
- No se puede tampoco descartar los errores azarosos, así no se haya detectado alguno pues se sabe que éstos aparecen en las pruebas escritas.
- Los errores de trivialización aparecen en menor porcentaje en las pruebas de carácter abierto.

Es oportuno mostrar los resultados comparativos del análisis de las 20 preguntas seleccionadas de geometría de las pruebas de Olimpiadas en las PCN-PN y PCN-NI del 2007 al 2011 con los obtenidos de las respuestas de los estudiantes del grado 901 al aplicarles las mismas preguntas pero de forma abierta. Los resultados aparecen en las gráficas 1 y 2.



Gráfica 1. Resultados de la tipología de las 20 preguntas de geometría, de las olimpiadas.



Gráfica 2. Resultados de la tipología de las 20 puntas de geometría, estudiantes de 901.

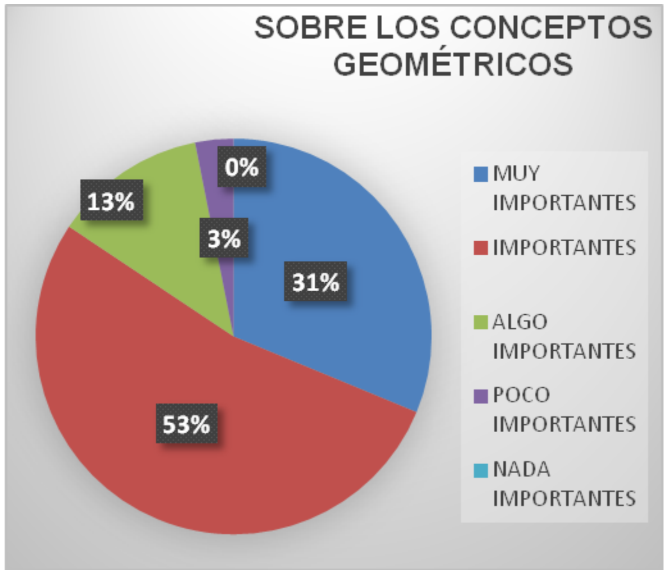
De la gráficas 1 y la gráfica 2, se puede concluir:

- Que el error predominante en las pruebas de olimpiadas es el de trivialización, lo cometen más de la mitad de los participantes. Este aparece también en las pruebas de noveno aunque en mucho menor porcentaje.
- Que los errores de tipo gráfico, del lenguaje geométrico y de lenguaje geométrico están presentes en buen porcentaje en ambos pruebas.
- Que los errores de prerrequisito son manifiestos en las pruebas de los estudiantes de noveno, faltan conceptos fundamentales para resolver los problemas. Otro error es el mal uso de las implicaciones lógicas lo que le lleva a cometer errores al aplicar teoremas, son los errores de razonamiento.

4.8. Resultados de la encuesta de satisfacción

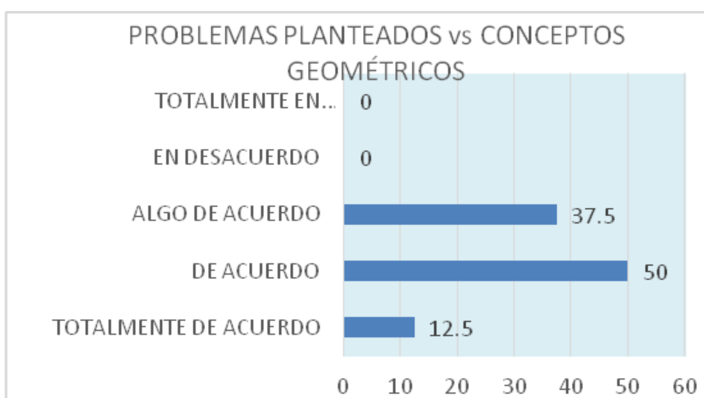
Finalizada la aplicación de los talleres y la prueba final, se le aplica a cada uno de los 36 estudiantes que presentaron la prueba final, una encuesta en la que plasmará su opinión sobre el desarrollo general de los talleres (ver Anexo 2), los resultados obtenidos se presentan a continuación.

La **pregunta 1** es referida a la importancia de los conceptos geométricos tratados en los talleres. En esta ocasión los estudiantes consideran en su mayoría (84%), que los conceptos vistos y aplicados en los talleres de geometría son importantes. Los resultados se ilustran en la Gráfica 3.



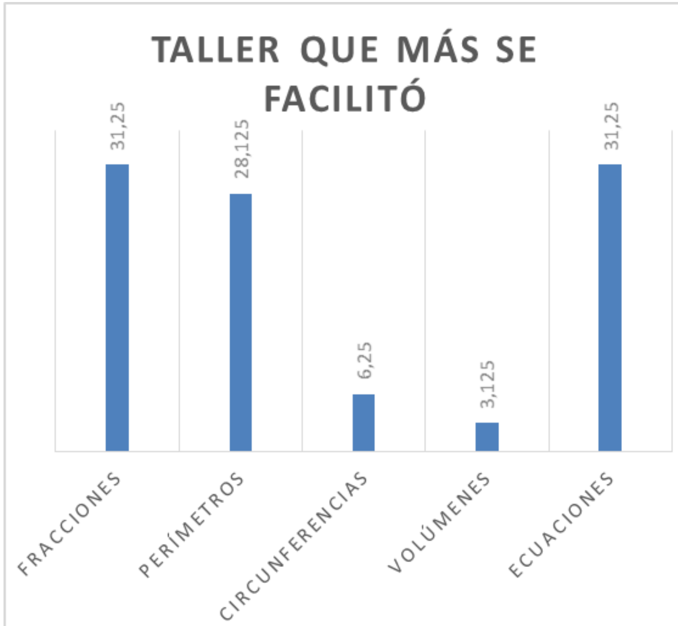
Gráfica 3. Resultados de la pregunta 1.

En el análisis de la **pregunta 2** (ver Gráfica 4), la cual se refiere a la relación entre los conceptos geométricos y los problemas planteados, se infiere por las respuesta de los estudiantes, que existe una relación entre los conceptos que se construyeron en los talleres y su aplicación con los problemas planteados.



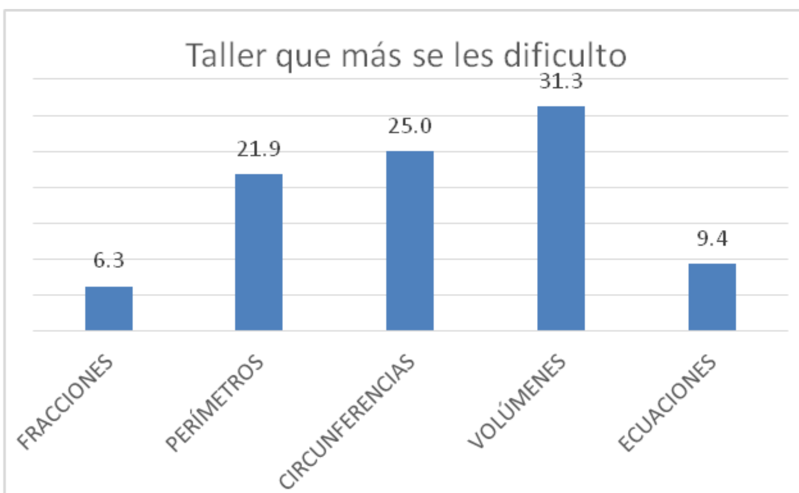
Gráfica 4. Resultados de la pregunta 2.

Con relación a la **pregunta 3** (ver Gráfica 5), donde los estudiantes tenían que dar su criterio sobre el taller que más se les facilitó, en tal sentido consideraron que fueron los talleres de fracciones y el de ecuaciones.



Gráfica 5. Resultados de la pregunta 3.

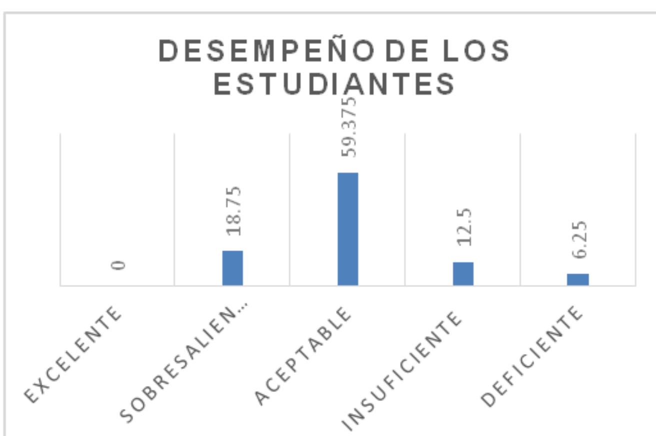
Los motivos de esta selección están dados, en primer lugar el taller de fracciones es basado en ejercicios y de gran parte gráfica, en el cual se pretendía recordar y reforzar conceptos básicos de la fracción. Por otra parte el taller de ecuaciones va asociado con el tema que ellos estaban tratando en sus clases de algebra, que era precisamente solución de sistemas de ecuaciones lineales. Como resultado de la **pregunta 4** (ver



Gráfica 6. Resultados de la pregunta 4.

Gráfica 6), se pudo constatar que los estudiantes en la medida en que se avanza en los talleres perciben mayor dificultad, pues son más los elementos que tienen que analizar y su pensamiento espacial de cierta manera se ha limitado a dos dimensiones, de tal forma que cuando se enfrentan a elementos en tres dimensiones se le dificulta la interpretación.

La **pregunta 5** (ver Gráfica 7) se hace a manera de autoevaluación. Cada estudiante valora su participación en las actividades, donde recuerda que éstas tenían varios aspectos: el trabajo de preparar los prerrequisitos, desarrollar los problemas de tarea y su participación en el desarrollo de las actividades en clase relacionadas con la solución de los problemas propuestos. Los estudiantes plantean que la mayoría participó activamente. Un grupo expresa que sus acciones mostraron más compromiso, pues consultaron en la red, preguntaron a otros maestros, en clase participaron y explicaron a los compañeros. Otro pequeño grupo que se calificaron con insuficiente o deficiente, lo hacen porque estuvieron ausentes de algunas de las actividades y les fue difícil nivelarse, o que por falta de interés no cumplieron con todas las actividades.



Gráfica 7. Resultados de la pregunta 5.

La **pregunta 6**, se refiere a que los estudiantes determinen la percepción del grado de complejidad de la temática de los talleres.

Gráfica 8. Resultados de la pregunta 6.

Para las dos terceras partes de los estudiantes (ver Grafica 8) hay una percepción de que los talleres planteados y desarrollados son de difícil comprensión, análisis y aplicación. Es reconfortante el cambio que hubo, pues al principio, desde el primer taller se les escuchaba que eran temas muy difíciles, que no los habían visto, ni les habían enseñado.

El punto de vista fue cambiando, un tercio de los estudiantes lo ven como aspectos que se pueden comprender, analizar y desarrollar para darle solución. Por primera vez se enfrentaban a problemas geométricos diferentes y en un margen amplio de temas, en contraste a los ejercicios que se referían a un solo tema, razones y proporciones en triángulos. En el tema de ecuaciones que se estaba estudiando, no habían trabajado algunos tipos de problemas geométricos. Entre otras cosas manifiestan: "… estaba acostumbrado a operaciones, no a problemas;… fáciles de entender, difíciles de solucionar;… para los que estudian se les facilita;… eran nuevos para mí;… al principio complicado, pero luego con las explicaciones más sencillo”[41].

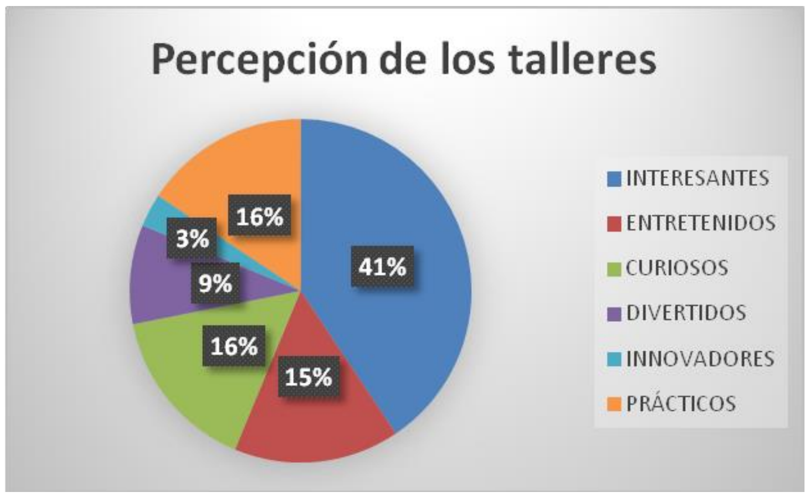
En **la Pregunta 7** (ver Gráfica 9), los estudiantes en un porcentaje amplio consideran que los temas abordados en los talleres son importantes, lo cual justifican cuando expresan: “… en el futuro será de ayuda,… para la profesión que pienso llevar,… estamos más preparados,… nos enseñan mucho y son interesantes para la vida,… nos sirven para 11 y para el ICFES,… nos ayuda a desarrollar el cerebro”[42].

Grafica 9. Resultados de la pregunta 7.

[41] Opiniones de los estudiantes en la pregunta 6.

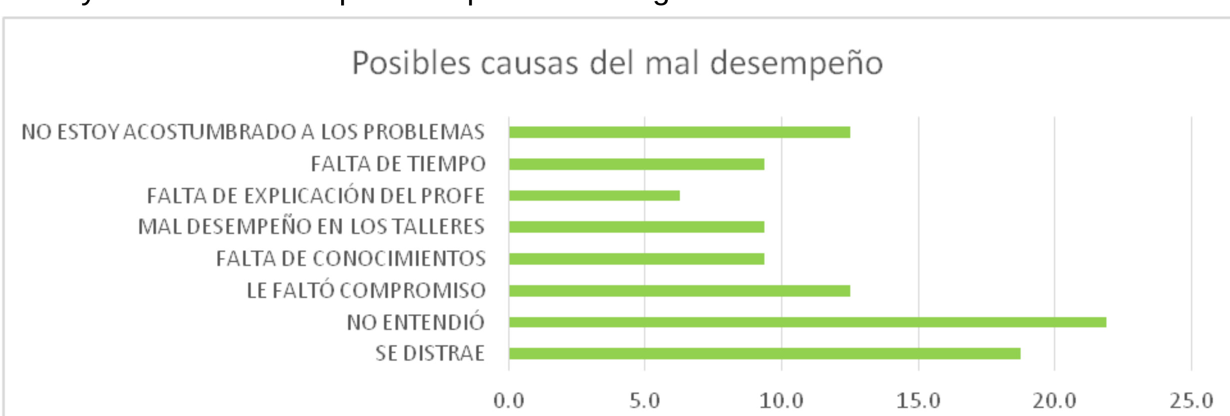
[42] Opiniones de los estudiantes en la pregunta 7.

En la **pregunta 8** (ver Gráfica 10), los estudiantes deben responder sobre la percepción de los talleres. Para más de la mitad de los estudiantes, los talleres son interesantes, entretenidos y curiosos; ellos manifiestan que no habían enfrentado talleres con actividades o problemas de este tipo. Los problemas que han tenido que resolver son los que les han planteado en el tema que están viendo en álgebra, sobre sistemas de ecuaciones y son los que se plantean en el álgebra de Baldor.



Gráfica 10. Resultados de la pregunta 8

Las respuestas a las posibles causa del insuficiente desempeño, se les solicita en la **pregunta 9**. El hecho de alcanzar una evaluación deficiente, los estudiantes lo atribuyen a las causas que se expresan en la gráfica 11.



Gráfica 11. Resultados de la pregunta 9.

La mayor parte de las respuestas son una autocrítica. Los estudiantes manifiestan su deseo de tener más tiempo e ir más despacio en el desarrollo de los talleres, para entenderlos mejor. Además plantean no haber trabajado sobre problemas geométricos y los contenidos no eran recordados, y otros aducen que algunos de los temas no los habían visto, "son de pensar y analizar, pero queremos poder hacerlos"[43]

En la **pregunta 10**, se les indaga sobre el material aportado y utilizado en el taller. Es criterio de la mayoría de los estudiantes que les pareció bueno y "… me aporta ilustración; por las gráficas y las explicaciones; me aportaron mucho; me gustaron, deberían ser para todo el colegio; buena calidad, eran necesarios: las actividades prácticas me ayudan a entender el tema; lo tenemos como material para consultar"[44]

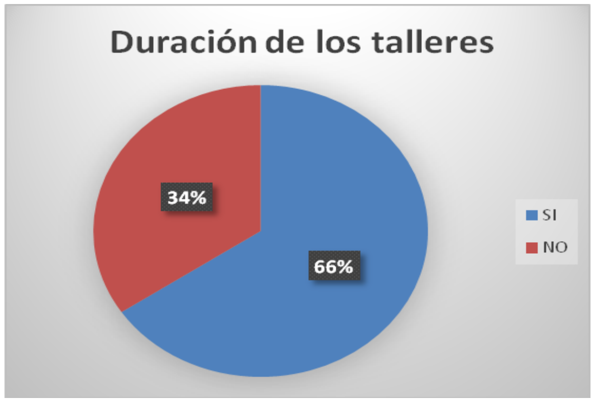
En la **pregunta 11**, el 90.6% de los estudiantes consideran importante continuar con los talleres, y en su totalidad son del criterio que el contenido geométrico de esta forma es más fácil para ellos, y piensan que "… puedo entenderlo mejor; me pongo a prueba y aprendo; me gusta, cada vez aprendo más; quiero aprender más".[45]

Por otra parte un pequeño porcentaje de estudiantes, con razón opinaba que se hicieran pero sin quitar otras clases, pues se solicitó a algunos docentes sus horas para aplicar los talleres, ya que la clase de geometría tiene solo una hora a la semana, tiempo muy corto para las actividades planeadas.

[43] Opiniones de los estudiantes en la pregunta 9.

[44] Opiniones de los estudiantes en la pregunta 10.

[45] Opiniones de los estudiantes en la pregunta 11.



Gráfica 12. Resultados de la pregunta 13.

En la **pregunta 12**, un 84.4% considera adecuada la metodología seguida en los talleres, donde resaltan el completar el trabajo individual con el colectivo, pues al socializar los procesos aprenden más, o sea en el intercambio con sus compañeros también aprenden. El resto de los estudiantes opina que hay que explicar más cada tema pues son algo difíciles.

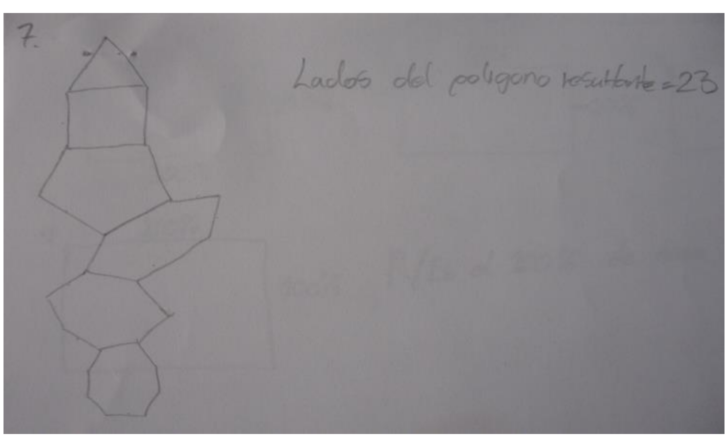
En la **pregunta 13** (ver Grafica 12), referida a la duración de los talleres, las opiniones parecen algo divididas, pero apuntan hacia un mayor tiempo de dedicación. En primer lugar la opinión por el sí (66%), los cuales consideraron que se pudieron concluir las actividades planeadas, se desarrollaron en su totalidad; se entendió y fue divertido, sería conveniente que continuaran. Los que opinaban que no, querían más tiempo para estudiar con más detenimiento, que para terminar las actividades no fuera de forma apresurada, y poder tener más explicaciones. Los estudiantes acordaron buscar un espacio fijo semanal para darle continuidad a la actividad y poderla compartir con los otros cursos.

Conclusiones del capítulo 4

Se puede concluir que la tipología de Franchi, L y Hernández, A. (2004) es parcialmente adecuada en sus categorías, cuatro de ellas, para clasificar los errores cometidos por los participantes en la pruebas de Olimpiadas del primer nivel y del nivel intermedio en la medida en que se prevé las causas del error cometido. A esta clasificación para pruebas de selección múltiple se adiciona la categoría de trivialización.

El resultado de los talleres es satisfactorio, pues los estudiantes partieron de cierto desánimo al ver el material que iban a estudiar y desarrollar, de la desesperanza al no poder solucionar los primeros problemas a la satisfacción de haber entendido y resuelto muchos de ellos. Están convencidos de poder mejorar, de que lo visto es de gran valor y con la ilusión de continuar, algo más despacio, y poder responder aquellos problemas que quedaron sin resolver. En el Anexo 3, se pueden observar varias fotos sobre el desarrollo general de las actividades.

De la prueba final, rescatar por ejemplo que de los tres



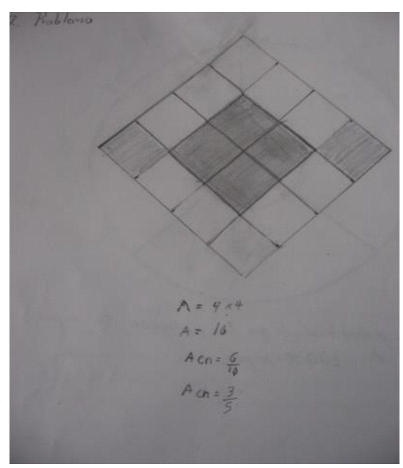


Figura 11. Muestra de dos soluciones a dos problemas por parte de los estudiantes.

Problemas con mayor porcentaje de error y en donde este superaba por mucho a los aciertos (ver Figura 11), dio un vuelco y en este caso los porcentajes de aciertos fueron por lo menos igual y mayores que el porcentaje de los errores. Solo en uno de los problemas los estudiantes cometieron el error de trivialización y en todo caso fue menor a otro error y éstos menores a los aciertos.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación para minimizar el error en la solución de los problemas de geometría, en los estudiantes del grado noveno, del colegio Francisco Javier Matiz, permitió dar respuesta a las tareas investigativas propuestas. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo general. Ellos son:

- Se realiza un análisis del estado del arte sobre el estudio del error en matemática, entre los investigadores se destacan: Kilpatrick, J. (1995), Radatz, H. (1979), Bell, A. (1986), Díaz, G. (1990), Sora, S. y Cáceres, S. (1991), Astolfi, J. (1999), Brousseau, G. (2003), Franchi, L. & Hernández, A. (2003) y otros. La mayoría de estos autores realizan tipificaciones orientada fundamentalmente hacia la aritmética. Se destaca con una propuesta dirigida a la geometría las autoras Franchi, L. & Hernández, A. (2003), las cuales proponen una tipificación especifica con 8 categorías, que son asumidas en esta tesis. Pues es la que mejor se ajusta a los errores cometidos por los estudiantes al desarrollar los problemas de geometría cuando las pruebas son de tipo abierto, dentro de esta tipología se puede incluir la categoría de trivialización.
- El marco teórico de la investigación lo constituye la teoría de la resolución de problemas. Numerosos investigadores, han realizado investigaciones, donde abordan los problema como propuestas didácticas, entre los que se destacan: Polya, G. (1965), Fridman, L. (1972), Schoenfeld, A. (1985), Sánchez, L. (1994), Garret, R. (1995), Labarrere, G. (1987), Campistrous, L. y Rizo C. (1996), Álvarez,

C. (1996), entre otros. Cada uno de ellos ofrece definiciones de problema, y proponen estrategias para la resolución. Por las características propias de la resolución de los problemas geométricos, el autor de esta investigación, propone una estrategia, sustentada en la heurística, la cual se ajusta al contexto geométrico, específicamente a los problemas de olimpiadas.

- Para las pruebas de selección múltiple de tipo geométrico sólo algunas de las categorías de la tipificación dada por Franchi, L y Hernández, A (2004) deben ser incluidas (errores de prerrequisito, errores propios del lenguaje geométrico, errores gráficos y de tecnología) y dentro de éstos, un nuevo tipo de error que se ha evidenciado, el que se ha denominado de trivialización, el cual es frecuente en la prueba de selección múltiple y en menor porcentaje en la de tipo abierto.
- La heurística en la resolución de problemas geométricos de olimpiadas en busca de una solución creativa y eficiente es importante, puesto que se tiene en cuenta la lógica de los principios, reglas, estrategias y del programa heurístico general.
- El tratamiento positivo del error, como una estrategia didáctica propicia un aprendizaje significativo sobre los contenidos geométricos y permite reafirmar los conocimientos ya existentes y lograr nuevos en las clases de geometría, particularmente en la preparación de estudiantes en la resolución de problemas de geométricos de olimpiadas.
- Como estrategia didáctica para minimizar el error en los problemas geométricos de olimpiadas, se elaboraron 5 talleres: fracciones, perímetros y áreas, circunferencia, volúmenes, y solución de ecuaciones e inecuaciones. La

estructura de estos talleres está dada por el tema, pre-requisitos, sistemas tecnológicos, metodología, y desarrollo de la actividad. En esta última fase se propone en primer lugar uno o más problemas resueltos, uno o más problema guiados y varios problemas para que el estudiante los resuelva. Esta estructura permite que el estudiante construya significativamente los conceptos.

- La implementación de los talleres permitió minimizar los errores detectados en la resolución de problemas geométricos, y con ellos mejorar los aciertos, lo cual se refleja en los resultados de los problemas de olimpiada de la prueba final. También se puede decir con certeza que en la medida que a los estudiantes se les proporcionen elementos que los motiven, que construyan significado de los conceptos al desarrollar sus actividades, serán más exitosos en la presentación de sus evaluaciones y en la vida.

RECOMENDACIONES

La implementación de los talleres para minimizar el error en la solución de los problemas de geometría, en los estudiantes del grado noveno, del colegio Francisco Javier Matiz, requiere considerar y poner en práctica las recomendaciones siguientes, para optimizar el proceso investigativo y los resultados obtenidos:

1. Impulsar desde nuestra perspectiva en los colegios y en lo posible en los centros de formación de maestros los conceptos básicos de psicología y pedagogía, como por ejemplo el paso de lo concreto a lo abstracto.

2. A pesar de que por circunstancias institucionales se dicte la geometría aparte de la aritmética o el álgebra debe existir coherencia temática, en cualquier tema debe haber aplicaciones y problemas referidos a la geometría.

3. En lo posible continuar con la utilización de los resultados de las pruebas de olimpiadas para determinar la evolución de los errores y hacer uso de las pruebas de carácter abierto de primaria, que pueden indicar cómo se construyen los conceptos en los pequeños, futuros bachilleres.

4. Buscar todas las posibles manifestaciones de lo que conoce el estudiante para detectar los errores, pasadas al tablero, quices, pruebas internas, entre otras.

BIBLIOGRAFÍA REFERENCIAS

Abella, G. (1994). *Un recorrido por la geometría.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemáticas.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Adda, J. (1987). *Erreurs provoqués par la représentations. Memorias CIEAEM.* Sherbrooke: Universidad de Sherbrooke.

Álvarez, C. (1966). *Hacia una escuela de excelencia.* La Habana: Editorial Academia.

Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., & Zuñiga, J. (2006). *Investigación Educativa I.* Chile. Recuperado el 9 de octubre de 2012, de http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/11/investigacion-educativa.pdf

Arce, J., Castrillón, G., & Soto, C. (1990). *Geometría 7.* Cali: Arias Poveda Editores.

Astolfi, J. (2001). *Conceptos clave en la didáctica de las disciplina.* Sevilla: Diada Editora. Colección Investigación y Enseñanza.

Astolfi, J. (2003). *El error, un medio para enseñar.* Sevilla, 2° Ed: Diada Editora.

Bagazgoitia, G. (1977). *La resolución de problemas en las matemáticas del nuevo bachillerato.* Euskal herriko.

Ballester, P. (1992a). *Metodología de la enseñanza de la matemática. Tomo I.* La Habana: Pueblo y Educación.

Ballester, P. (1992b). *Metodología de la enseñanza de la matemática. Tomo II.* La Habana: Pueblo y Educación.

Baruk, S. (1985). *L'age du capitaine. De l'erreur en mathématiques.* Paris: Editions du Seul.

Bell, A. (1976). *The learning of general mathematical strategies.* Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education.

Bell, A. (1986). *Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas.*

Beltrán, L., Rodríguez, B., & Dimaté, M. (2000). *Matemáticas 7.* Bogotá: Prentice Hall.

Bocco, M., & Canter, C. (2010). Errores en geometría:clasificación e incidencia en un curso preuniversitario. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-13.

Borassi, A. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the learning of Mathematics, 7*, 2 - 9.

Borassi, R. (1986). Algebraic Explorations of the error. *Matthematics Teacher, 79*, 246 - 248.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématiques.* Grenoble: Editorial La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brueckner, L. B. (1984). *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje.* Madrid: Rialp.

Bruño, G. M. (1965). *Geometría. Curso superior.* Medellín: Bedout.

Buswell, G. J. (1925). *Summary of Educational Investigations Relating.* Chicago: University of Chicago.

Callejo, M. y. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana., X*(2).

Campistrus, L., & Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Cantoral, R. F. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Cardona, A. (sin año.). *Geometría.* Medellín: Bedout.

Castelnuovo, E. (1997). *Didáctica de la Matemática Moderna.* México, D.F.: Editorial Trillas.

Centeno, J. (1988). *Números decimales.* Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de la Matemáticas.* Madrid: Pearson - Prentice Hall.

Clemens, S., O'Daffer, P., & Cooney, T. (1984). *Geometría, con aplicaciones y solución de problemas.* Wilmington, Delaware.: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática.* Holguín: Tesis en opción al grtado de Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISP José de la Luz y Caballero.

Cury, H. (2008). *Análise de erros, o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Auténtica Editora.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2011). *La didáctica y la dificultad en Matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Souza, S. (2009). Un análisis de los errores de los alumnos en clases virtuales de geometría. *Revista Iberoamericana de Educación*(51), 1-13.

Del Puerto, S., Minnaard, C., & Seminara, S. (2006). Análisis de errores una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 23*(38).

Diaz, I. (1990). *Detección y análisis de errores frecuentes en álgebra y trigonometría en la Universidad Antonio Nariño como base para una metodología especial para la enseñanza de la matemática básica.* Bogotá: Tesis de pregrado Universidad Antonio Nariño.

Digital, La Escuela. (s.f.). *Las figuras planas*. Recuperado el 20 de 03 de 2013, de http://www.escueladigital.com.uy/geometria/4_figplanas.htm#SEL

Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisas, 23*, 23 - 32.

Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (s.f.). *Los errores en el aprendizae de la.* Santa Fe: Univesidad Nacional del Litoral.

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana, VIII*(1), 21.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Intermedio. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Superior. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (Diciembre de 2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Intermedio.2005.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (Octubre de 2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Primer Nivel. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Franchi, L. H. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*(24), 63 - 71.

Franchi, L., & Hernández, A. (2004). *Tipoñogía de errores en el área de la geometría plana. Parte II* (Vol. 8). Mérida: Educere.

Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela*(5).

Garcés, F. (s.f.). *Áreas de figuras planas*. Recuperado el 2 de Mayo de 2013, de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0263-02/geometria/indice.html

Garret, R. (s.f.). Resolver problemas en la enseñanza de la Ciencias. (U. d. Bristol, Ed.) *Revista Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 16 - 26.

Gascón, J. (Diciembre de 1992). El papel de la resolución de problemas en la enseñanzae las matemáticas. *Educación Matemática*.

Guzman, M. (1987). *Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas.* Zaragoza: Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Hadamard, J. (1996). *The psicology of invention in the mathematical field.* Princenton: Princenton University.

Hernández D., A. ". (03 de 2009). *Proyecto Enseñanza Activa de las Matemáticas*. Recuperado el 13 de mayo de 2013, de http://proyectomatematicasactivas.blogspot.com/2009/03/jugamos-con-fracciones-y-operaciones.html

Jaime, F., & Pérez, J. (2004). *Olimpiadas C0lombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre metodología de enseñanza de la matemática.* Pueblo y Educación: La Habana.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1995). *Educación Matemática, Errores y dificultades de los estudiantes.* Bogotá: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamerica.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon .

Labarrere, A. (1987). *Bases pedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y Educación.

Majmutov, M. (1983). *Enseñanza problémica.* La Habana: Pueblo y Educación.

Mancera, E. (2000). *Saber matemáticas es saber resolver problemas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Martínez, M. (Octubre - diciembre de 1981). La enseñanza problémica. *Revista Educación*(43).

Mason, J. (1988). *Pensar matemáticamente.* Barclona : Labor.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidos.

Medina, N. (1984). *Taller de Geometría.* Bogot'a: Universidad Antonio Nariño.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares - Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Moise, E., & Downs, F. (1986). *Geometría Moderna.* Wilmington, Delaware, E.U.A.: Addison - Wesley Iberoamerica.

Monereo, C., Castello, M., Clariana, M., Palma, M., & Pérez, M. L. (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje.Formación del profesorado y aplicación en el aula.* España: Grao.

Movshovitz - Hadar, N., Zaslavski, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education, 10*, 163 - 172.

Ortiz, M. (1999). *La investigación en Educación Matemática en Colombia, 1991 - 1999.* Recuperado el 11 de 10 de 2012, de http://portales.puj.edu.co/didactica/PDF/EstadosdeArte/EducacionMatematicasMarinaOrtiz.pdf

Planas, N. (ABRIL de 2002). Enseñar matematicas dando menos cosas por supuestas. *Uno, revista de didáctica de las matemáticas.*(30), 114 - 124.

Pochulu, M. (2004). Analisis y categorización de errotres en el aprendizaje de matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Pochulu, M. D. (2005). Análisis y categorizazción de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1 - 14.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education, 10*, 163 - 172.

Radillo E., M., & Huerta V., S. (2012). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En R. S. Abrate, & M. D. Pochulu, *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemáticas.* (págs. 263 - 280). Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Rizo C., C. (2009). *La heurística y la didáctica.* Texto inedito.

Rohn, K. (1984). Consideraciones acerca de la enseñanza problémica en la enseñanza de la Matemática. *Boletín Sociedad Cubana de Matemática y Computación*.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador.* Holguín: Tesis doctoral no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero.

Secretaría de Educación de Bogotá. (1999). *Solución de problemas con estructuras aditivas y multiplicativas.* Bogotá: Secretaria de Educación.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemátivas en la Educación Secundaria.*

Socas, M. P. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno, revista de didáctica de las matemáticas.*(14), 7 - 24.

Sora, A., & Cáceres, A. (1991). *Estudio diagnóstico sobre los errores comunes y frecuentes en Geometría Euclidiana cometidos por los alumnos de noveno grado de Educación Básica Secundaria y algunas posibles estrategias didácticas y metodológicas para su corrección.* Bogotá: Tesis de pregrado Universidad Antonio Nariño.

Souza, S. (2009). Un análisis de los errores de los alumnos en clases virtuales de geometría descriptiva bajo las teorías del desarrollo del pensamiento gemétrico y del concepto figural. *Revista iberoamericana de Educación*, 1-13.

Torres F., P. (2000). *La instrucción heurística de la matemática escolar.* La Habana: ISP Enrique José Varona. Documento en soporte digital.

Universidad Antonio Nariño. (s.f.). *www.uan.edu.co.* Recuperado el 15 de 08 de 2012, de http://olimpia.uan.edu.co/olimpiadas/public/frameset.jsp

Valderrama, J. (1986). *Problemas de Olimpiadas, Nivel Superior, 1985.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Valderrama, J. (1986). *Problemas de Olimpiadas. Primer Nivel.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Vitutor. (s.f.). Recuperado el 25 de abril de 2013, de http://www.vitutor.net/2/1/9.html

Vitutor. (2010). *Ejercicios y problemas resueltos de áreas y volúmenes*. Recuperado el 05 de Abil de 2013

Vitutor. (2010). *Problemas y ejercicios de áreas*. Obtenido de http://www.vitutor.com/geo/eso/s_e.html

ANEXOS

Anexo 1. Relación de pruebas de olimpiadas 2007 al 2011

Objetivo: referenciar las pruebas que se tomaron como diagnóstico y fundamento para el trabajo.

Desarrollo: se realiza un análisis y de todas las preguntas que se hacen, se toman las preguntas de geometría de las pruebas de las Olimpiadas Colombiana de Matemáticas, en su Primer Nivel y Nivel Intermedio Clasificatorias Nacionales desde el año 2007 hasta el 2011. Las cuales se relacionan a continuación.

1. VIII Olimpiadas Bolivarianas y XXVI Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Primer Nivel – GRADOS 6 y 7. Marzo 6, 2007.
2. VIII Olimpiadas Bolivarianas y XXVI Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Nivel Intermedio – GRADOS 8 y 9. Marzo 6, 2007.
3. IX Olimpiadas Bolivarianas y XXVII Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Primer Nivel – GRADOS 6 y 7. Marzo 4, 2008.
4. IX Olimpiadas Bolivarianas y XXVII Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Nivel Intermedio – GRADOS 8 y 9. Marzo 4, 2008.

5. X Olimpiadas Bolivarianas y XXVIII Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Primer Nivel – GRADOS 6 y 7. Marzo 3, 2009.

6. X Olimpiadas Bolivarianas y XXVIII Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Nivel Intermedio – GRADOS 8 y 9. Marzo 3, 2009

7. XI Olimpiadas Bolivarianas y XXIX Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Primer Nivel – GRADOS 6 y 7. Marzo 2, 2010.

8. XI Olimpiadas Bolivarianas y XXIX Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Primer Intermedio – GRADOS 8 y 9. Marzo 2, 2010.

9. XII Olimpiadas Bolivarianas y XXX Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Primer Nivel – GRADOS 6 y 7. Marzo 1, 2011.

10. XII Olimpiadas Bolivarianas y XXX Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. PRUEBA CLASIFICATORIA NACIONAL. Nivel Intermedio – GRADOS 8 y 9. Marzo 1, 2011

Anexo 2. Encuesta sobre los talleres de Geometría

1. Considera que los conceptos geométricos vistos y aplicados en los talleres son:

Muy importantes	Importantes	Algo importantes	Poco importantes	Sin importancia

2. Considera que los problemas planteados están acordes con los conceptos geométricos abordados.

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Algo de acuerdo.	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo

3. De los talleres vistos, ¿cuál fue el que más se le facilitó en comprender y aplicar?

FRACCIONES	Perímetros y áreas	Circunferencias	Volúmenes	Ecuaciones

4. ¿Cuál de los talleres vistos le causó más dificultades en comprender y aplicar?

FRACCIONES	Perímetros y áreas	Circunferencias	Volúmenes	Ecuaciones

5. ¿Considera que su desempeño en los talleres fue?

EXCELENTE	SOBRESALIENTE	ACEPTABLE	INSUFICIENTE	DEFICIENTE

6. La comprensión y aplicación de los conceptos geométricos de los problemas planteados le parecieron:

De fácil análisis y desarrollo	De difícil análisis y desarrollo

Explique: ____

7. ¿Considera importantes los temas abordados en estos talleres de geometrías? Justifique su respuesta:

   SI: ________ NO: _________

   ____

   ____

8. Los talleres de geometría le han parecido:

a.	Interesantes
b.	Entretenidos
c.	Curiosos
d.	Divertidos
e.	Innovadores
f.	Prácticos

9. Si se calificaran los talleres y sacara una mala nota, en tu opinión, ¿a qué se debería?

   ____

   ____

10. ¿Cómo le pareció el material aportado y utilizado en los talleres? Explique.

   ____

   ____

11. ¿Considera importante continuar con los talleres? Explique.

   SI: ________ NO: _________

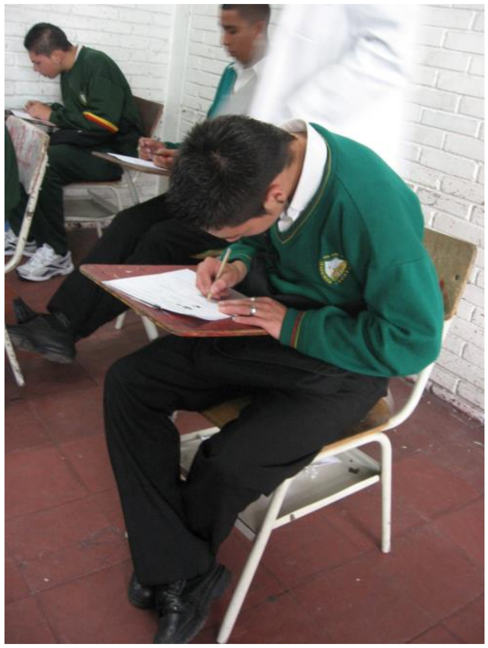
12. ¿Considera adecuada la metodología seguida en los talleres? Explique

SI: _________ NO: __________

13. ¿La duración de los talleres le pareció adecuada? Explique.

SI: _________ NO: __________

Anexo 3. Algunas fotos sobre el desarrollo de los talleres

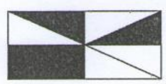


Anexo 4. Taller de fracciones realizado por un estudiante

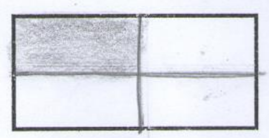
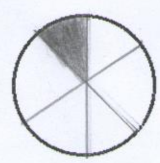
Mónica Yamile Urrego C. 901

Ejercicios propuestos

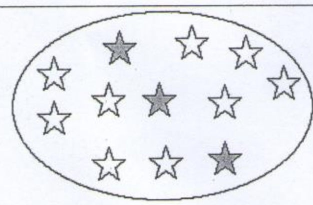
1. Escriba en palabras y en números a que parte del área total corresponde el área de la región sombreada:

	Escriba en palabras ocho cuartos	En números $\frac{8}{4}$
	Escriba en palabras dieciseis quintos.	En números $\frac{16}{15}$

2. En los siguientes recuadros sombree una región cuya área se indica:

a. Un cuarto del rectángulo	b. Un sexto del círculo
	

3. Tomando la unidad como un conjunto de objetos, diga a qué parte de la unidad corresponden las figuras sombreadas:

	Escriba en palabras	*En números*
	doce tercios	$\frac{12}{3}$

33

4. En el siguiente conjunto de canicas. ¿Qué parte corresponde a cada color?

	Canicas negras: ocho quinceavos — Escriba en palabras	$\frac{8}{15}$ — En número
	Canicas grises: Cuatro quinceavos — Escriba en palabras	$\frac{4}{15}$ — En número
	Canicas a rayas: Tres Quinceavos — Escriba en palabras	$\frac{3}{15}$ — En número

5. Si  es el todo. ¿Qué es  ?

~~a.~~ $1+\frac{1}{2}$ b. 2 c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{2}{5}$ e. 3

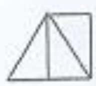
6. Si el área de  es la unidad. ¿Cuánto es $\frac{1}{3}$?

a.  La parte sombreada

d. 

~~b.~~  La parte sombreada

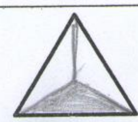
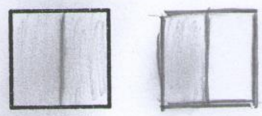
e.  La parte sombreada

c. 

7. Si el área de  es el todo. ¿A qué corresponde el área de la región sombreada  ?

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{3}$ ~~c.~~ $\frac{2}{3}$ d. $\frac{3}{2}$ e. 2

8. Dadas las siguientes figuras, dibuja una región cuya área es:

	$\frac{2}{5}$
 TRIÁNGULO EQUILÁTERO	$\frac{1}{3}$
	$\frac{3}{2}$

del área de la región dada.

9. Observa cada una de las siguientes composiciones:

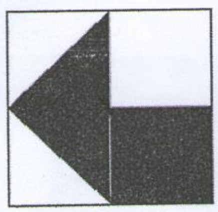


FIGURA 1.

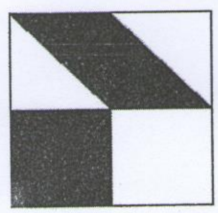


FIGURA 2

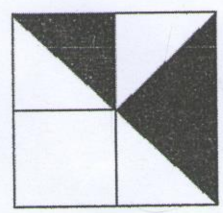


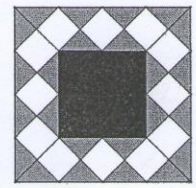
FIGURA 3

Complete la siguiente tabla de datos:

FIGURA	¿Qué formas geométricas reconoces?	Fracción de área sombreada	Porcentaje de área en blanco	Expresión decimal de la parte sombreada	Busca dos relaciones de equivalencia
1	Cuadrado Triangulo	$\frac{1}{2}$	50%	0.5	$\frac{2}{4}$ $\frac{8}{4}$
2	trapecio cuadrado triangulo	$\frac{1}{2}$	60 %	0.5	$\frac{2}{4}$ $\frac{8}{4}$
3	triangulo Cuadrado	$\frac{3}{8}$	75 %	0.75	$\frac{6}{16}$ $\frac{12}{36}$

23

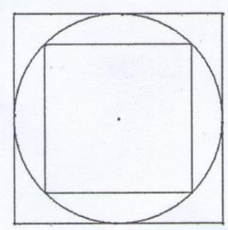
10. Indique si es falsa o verdadera (y justifique) cada una de las siguientes proposiciones en relación con el siguiente enunciado y gráfica.



"Betsy construye una bandera usando triángulos grises, cuadrados blancos pequeños, y un cuadrado central negro, tal como se observa en la figura. Si G es el área total de los triángulos grises, B el área total de los cuadrados blancos y N el área del cuadrado negro…."[1]

No	AFIRMACIONES	V	F
1	$G = B$		
2	$G = N$		
3	$2G = 3N$		
4	$3G = 2N$		
5	$B = N$		
6	$2N = B$		
7	$\frac{1}{3}B = \frac{1}{2}N$		

11. *Considere una circunferencia que tiene cuadrados construidos de tal manera que uno está exactamente dentro de la circunferencia y otro la encierra exactamente. ¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado mayor y el área del cuadrado menor?*[2]



[1] FALK DE LOSADA, María. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel intermedio. 2002. Universidad Antonio Nariño. Octubre 2006. Pág. 16
[2] FALK DE LOSADA, María. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Superior 2002.Universidad Antonio Nariño. Octubre de 2006. Pág.8

33