REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO A TRAVÉS DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Autor: Ángela Patricia Tafur

Bogotá D.C.

2015

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LAS TRANSFORMACIONES EN EL PLANO A TRAVÉS DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Autor: Lic. Ángela Patricia Tafur

Director de tesis: Osvaldo Jesús Rojas Velázquez (PhD.)

Bogotá D.C.

2015

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Junio 12 de 2015

AGRADECIMIENTOS

Inspirados en la búsqueda de un cambio trascendental en nuestras vidas, requiere también de la compañía virtuosa de quienes, de una oportuna y loable intervención, influyen en perfeccionar cada uno de nuestros pasos y contribuyen dándonos el impulso necesario para fortalecer nuestras ambiciones conducentes al éxito personal.

La vida y lo que hagamos en ella no es más que el mejor espacio para encontrar y mostrar las realidades que en nuestros sueños hemos forjado y que Dios nos ha permitido plasmar en ese proyecto que nunca debemos dejar de fortalecer; es por tanto que debo agradecer a Dios por toda su generosidad al darme la vida, la salud y los medios para alcanzar este importante logro. A mi madre como mi más fiel apoyo, confidente y asesora espiritual, quien desde el primer momento lo entregó todo en el alcance de mis proyectos. A mis hermanas Alejandra y Luisa, quienes por siempre han sido mi mano derecha y apoyo incondicional, dando todo de sí, fortaleciendo constantemente mis ambiciones, cooperantes por demás en mí ayuda, con mucho amor y lealtad. A mis grandes amigos Álvaro, Gabriel y Andrey, de persistencia en buscar mi comodidad y cooperadores para que mi ejercicio y esfuerzo fuera menos tedioso. A la profesora Gleira Martínez, dándome gran apoyo y facilitadora en mis urgencias y requerimientos, solucionando siempre mis necesidades de forma inmediata y oportuna, haciéndolo todo con mucha entrega y amabilidad.

A los doctores María Falk de Losada y Osvaldo Rojas Vásquez, grandes asesores, quienes me brindaron desinteresadamente todo el apoyo y con gran sapiencia se convirtieron en mi constante luz y guía para permitirme entrar en el conocimiento sin

temor a dudas y dándome la absoluta seguridad de obtener un saber pleno de confianza.

A la Comunidad Educativa de la Institución Colegio Nuestra Señora de la Paz, quienes de manera desinteresada y sin que yo perteneciera a ella, me brindaron toda su colaboración dándome la oportunidad y los medios necesarios para desarrollar allí las prácticas exigidas como trabajo de grado para optar al título de “magister en educación matemática”, y especialmente a los estudiantes quienes prestaron su incansable colaboración, formando parte de mi mejor medio de apoyo al desarrollar mis planes para alcanzar los objetivos planeados.

DEDICATORIA

Es para mí más que complaciente poder dedicar este importante logro en mi profesionalización, a quienes de manera ferviente permanecieron paso a paso en todo el recorrido de mi caminar, hasta culminar exitosamente este anhelado objetivo, que sin ellos habría sido seguramente muy difícil. Por su inagotable y desinteresada colaboración, desde la más significativa persuasión hasta la más fructífera asesoría, que colmaron de positivas contextualizaciones en perfeccionar cada vez mejor todo el desarrollo de mi proceso pedagógico. A Dios en su infinita bondad, al brindarme esta trascendental oportunidad en la construcción de mi proyecto de vida; a mi familia al ser mi inagotable compañía cooperadora y facilitadora en todas mis instancias del quehacer diario y a mis más cercanos amigos, que como tales me expresan su alegría de ver que mis logros son realidades que acrecientan el orgullo de ser cada vez mejores en nuestro contexto profesional.

SÍNTESIS

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría plana, específicamente en la construcción del significado robusto del concepto de transformaciones en el plano: traslación, rotación, simetría axial y homotecia; es insuficiente el reconocimiento de sus propiedades, dificultando la apropiación de dichos conceptos.

Esta investigación se encamina al diseño de actividades materializadas a través de problemas no rutinarios, resueltos bajo el marco de las fases propuestas por De Guzmán (1991), la visualización, la representación y la heurística como herramientas didácticas, que se sustentan en las comunidades de práctica de Wenger (1998), para el trabajo con los estudiantes al interior del aula de clase. Este diseño está dirigido a favorecer la construcción de significados robustos de cada una de las transformaciones en el plano, en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la paz, mediante la implementación de actividades conformadas por problemas pragmáticos, matemáticos y de su cotidianidad, no rutinarios.

ABSTRACT

In the process of teaching-learning of plane geometry, specifically in the construction of robust meaning of the concept of plane transformations: translation, rotation, axial symmetry and homothecy; is insufficient the recognition of their properties, preventing the appropriation of these concepts.

This research is aimed to design of materialized activities through non-routine problems solved within the framework of the phases proposed by De Guzman (1991), the visualization, the representation and heuristics as teaching tools that are based on communities of practice of Wenger (1998) for work with students inside the classroom. This design is intended to promote the construction of robust meanings of each of the transformations in the plane, in the seventh grade students of School "Colegio Nuestra Señora de la paz" by implementing activities formed by pragmatic problems, mathematical and their daily lives, not routine.

ÍNDICE Pág.

INTRODUCCIÓN

El sistema educativo actual, tiene la obligación de rescatar y dar un mayor auge dentro de sus currículos académicos a la potenciación y el desarrollo de saberes-ser (conocimientos) y saberes-hacer (técnicas) en el estudiante, donde se contribuya al desarrollo integral del estudiante. La enseñanza aprendizaje de la Matemática, en particular de la geometría aporta desde el aula a esa formación integral.

El aprendizaje de la Geometría resulta básico desde las primeras edades, no sólo por la posibilidad que brinda al hombre de aplicar los conocimientos adquiridos a la solución de problemas cotidianos y con ello a su mejor inserción en el mundo, sino además por los procesos y formas de pensamiento que desarrolla. Su aprendizaje constituye una herramienta que potencializa en el estudiante, entre otras habilidades, las de razonamiento, representación, visualización y pensamiento lógico.

Arranz y Cruz (2006) plantean que *"La Geometría es una parte importante de la cultura del hombre, no es fácil encontrar contextos en que la Geometría no aparezca de forma directa o indirecta"*[1]*.* Por otra parte en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM 1991) se plantea que: *"El estudio de la Geometría debe equipar a los estudiantes con la capacidad para reconocer y aplicar de manera eficaz los conceptos geométricos y los métodos más adecuados a una situación de problemas en particular"*[2]*.* En los NCTM 2000, se afirma que: "*La Geometría ofrece*

[1] Arranz, J. y Cruz, M. (2006). Una reflexión personal sobre la didáctica de la geometría. Recuperable el 9 de enero de 2014 de la URL: http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/textos/didac.htm
[2] Camacho, M. y Morales, A. (s.f). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1269208974.pdf

[3] Camacho, M. y Morales, A. (s.f). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de

medios para describir, analizar y comprender el mundo y ver la belleza en sus estructuras"[3]. En cualquier contexto pertinente al área de la Geometría, esta no debe perder vigencia dada la aplicabilidad que tienen sus temáticas a la vida cotidiana. Una de estas temáticas lo constituyen las transformaciones en el plano, máxime si se contextualiza a problemas cotidianos.

Por citar uno de estos contextos, en el arte existen muchos referentes clásicos que comprueban la magnitud y belleza en distintas obras y que en pequeñas cantidades pululan de manera artesanal y hasta decorativa, donde se reflejan las transformaciones en el plano. Las transformaciones en el plano visualizadas desde tantos puntos de referencia, constituyen valiosas herramientas, que no solo fortalecerán la cultura, sino que enaltecerán y dignificarán aún más el saber humano. Este saber ha de ser inherente a un ciudadano que corresponda a las exigencias actuales propias de un mundo de constantes cambios.

En las transformaciones que lleva a cabo el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, ocupa un papel significativo la autonomía dada a las Instituciones Educativas para dosificar el currículo de Matemática en correspondencia a los lineamientos curriculares, en los que se dividen los contenidos por pensamientos. Uno de estos es el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

En algunas instituciones se toma la iniciativa en correspondencia al pensamiento planteado de fragmentar la intensidad horaria de la Matemática en sus partes: aritmética, estadística y geométrica. Precisamente a esta última parte se le asigna un

[3] Camacho, M. y Morales, A. (s.f). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1269208974.pdf

10% efectivo del total de horas clases del año lectivo, lo cual demuestra la escasa trascendencia que se le da a la temática.

En los lineamientos curriculares del MEN, se les da importancia a la geometría, pero el tiempo destinado a su enseñanza es bastante limitado. Por tal motivo resulta inverosímil creer que en un lapso tan corto se logren comprender los conceptos geométricos, en particular los de transformaciones en el plano: traslación, rotación, simetría y homotecia, de manera inteligible y significativa, máxime si son abordados desde la teoría y no desde experiencias prácticas que permitan verlos como algo tangible.

Dicha necesidad tan apremiante, requiere entonces de un trabajo desde el aula, que aun con las problemáticas propias de cada realidad sociocultural, se priorice los procesos de resolución de problemas no rutinarios. Este proceso debe apoyare en herramientas didácticas, la conformación de equipos de trabajo y el fomento del liderazgo, la participación y la identidad, dando respuesta a los fines de la educación para el siglo XXI.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría y en particular la construcción de los conceptos de las transformaciones del plano, son aspectos que han ocupado a los investigadores en reuniones, congresos y otros eventos, tales como: la Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 2011), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), el International Congress on Mathematical Education *(*ICME*),* las reuniones latinoamericanas de Matemática educativa (RELME), los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros. En estos eventos esta temática es tema central de discusión.

El estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) 1995, centra su estudio en las “Perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI”. En este se aborda la identificación de los retos más importantes y las tendencias emergentes para el futuro; los impactos didácticos potenciales en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, a partir de la aplicación de nuevos métodos de enseñanza y de materiales didácticos. En el estudio ICMI 2001, se considera la geometría como una herramienta vital para el entendimiento y como la parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICME 2008 centra su atención en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD).

Vale la pena reconocer, que muy acertadamente importantes investigadores ansiosos de encontrar la esencia y trascendencia de la Geometría y de la construcción del concepto de las transformaciones en el plano, a nivel internacional y en Colombia, desde muchos años atrás han ofrecido sus experiencias motivadoras. Entre los que se destacan: Van Hiele (1957), Bishop (1989), De Villiers (1991, 1999), Barcia (1999), Campistrous y Rizo (1980-2009), Sánchez (2006), Jeffrey, Dimitry, Humphrey y Atebe Uyo (2008), Galante, García y López (2008), Panaoura y Gagatsis (2009), Coronel (2010), entre otros. Estos autores proponen estrategias, alternativas, procedimientos, entre otras formas, en aras de favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, en particular de la construcción del concepto de las transformaciones en el plano, en el salón de clases.

Tres investigaciones de las más consecuentes con la temática a abordar son las de Galante (s.f), Sánchez (2006) y Coronel (2010). El primer autor plantea la comprensión de los procesos de comunicación de los contextos: lenguaje natural, lenguaje geométrico y lenguaje musical; específicamente el de la composición en el proceso enseñanza-aprendizaje de las transformaciones geométricas como situación didáctica novedosa experimental. Se refiere a la reconstrucción de mosaicos por identificación e iteración de figuras geométricas.

Sánchez (2006) primero propone introducción teórica (definiciones, clasificaciones y desglosamiento de cada uno de sus tipos), luego enfatiza en las composiciones de transformaciones y su presencia en el mundo artístico. También desarrolla una unidad didáctica interactiva con el software Cabri desde un enfoque intuitivo, que favorece la visualización, la manipulación, la conceptualización y la comprensión.

Coronel (2010) se refiere a los conceptos teóricos y propiedades básicas sobre las transformaciones en el plano, también analiza actividades de aplicación, como lo son los teselados y el origami. Su trabajo se dirige a comprender las diferentes representaciones para las transformaciones en el plano, donde se proponen actividades para la construcción de estos conceptos.

A través de la aplicación de métodos empíricos como la encuesta (ver anexo 1) y la experiencia de la investigadora, se pudo constatar que existen las siguientes dificultades:

- Son limitados los conocimientos previos necesarios que poseen los estudiantes para la construcción del concepto de las transformaciones en el plano y en el trabajo con ejercicios y problemas intra y extramatemático.

- Es limitada la utilización y aprovechamiento de los instrumentos tradicionales y los software existentes para el estudio de las diferentes transformaciones en el plano.
- Son insuficientes las habilidades de representación geométrica y de la visualización que tienen los estudiantes para la construcción del concepto de las transformaciones en el plano y la resolución de ejercicios y problemas.
- Es escasa la motivación de los estudiantes por las transformaciones en el plano.
- La construcción del concepto de las transformaciones en el plano no se implementa a partir de los conocimientos previos que poseen los estudiantes y de las experiencias en la vida relacionada con la temática.

Las valoraciones anteriores y el interés por la resolución de estas problemáticas conducen a la formulación del siguiente **problema de investigación**: ¿cómo favorecer la construcción de significado robusto de los conceptos de las transformaciones en el plano en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Colegio “Nuestra Señora de la Paz” de Villavicencio?

El **objeto de estudio** será entonces: el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica Secundaria.

En **objetivo general de la investigación** se encamina hacia el favorecimiento de la construcción de significado robusto del concepto general de transformación, de la traslación, rotación, simetría y homotecia en los estudiantes de grado séptimo de la

Institución Educativa Colegio “Nuestra Señora de la Paz” mediante la elaboración de actividades conformadas por problemas no rutinarios.

En correspondencia con el objetivo general, se precisa como el **campo de acción**: el proceso de enseñanza-aprendizaje diseñado para lograr la construcción de significado robusto de los conceptos de las transformaciones en el plano en la Educación Básica.

En función de darle cumplimiento al objetivo de la tesis se propone la siguiente **hipótesis de trabajo**: actividades basadas en la resolución de problemas no rutinarios y en contexto, sustentados en el trabajo con la heurística; la utilización de la visualización como herramienta didáctica; y la conformación de equipos de trabajo, donde se fomente el liderazgo, la participación y la identidad, favorece la construcción de significado robusto del concepto general de transformación en el plano, de la traslación, rotación, simetría axial y homotecia en los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Colegio “Nuestra Señora de la Paz” de Villavicencio.

En aras de lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

- Determinar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica Secundaria, particularmente de la construcción del concepto de las transformaciones en el plano.
- Analizar los presupuestos teóricos y geométricos que sustentan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica Secundaria,

particularmente de la construcción del concepto de las transformaciones en el plano.

- Elaborar un sistema de actividades determinadas por problemas no rutinarios para favorecer la construcción de significado robusto del concepto general de transformación, de traslación, rotación, simetría y homotecia en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Colegio "Nuestra Señora de la Paz" de Villavicencio.
- Valorar la viabilidad de la propuesta mediante su aplicación en la práctica escolar.

Metodología de la investigación

En la investigación se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. En la tesis se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Histórico-lógico: se emplea con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica secundaria, en particular de la construcción del concepto de las transformaciones en el plano, donde se propicie su visualización y representación.

Análisis-síntesis: existe una interrelación entre dichos procesos presentes en la investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del diagnóstico relacionados con la enseñanza aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica Secundaria, en particular con la construcción del concepto robusto de las transformaciones en el plano, lo que permite establecer el significado de los hechos para interpretar, sintetizar los resultados y la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.

Del nivel empírico fueron empleados:

Encuesta: a los profesores y los estudiantes, para determinar las insuficiencias en el proceso de construcción del concepto de las transformaciones en el plano.

Entrevista: a docentes con amplia trayectoria para conocer su opinión sobre las insuficiencias en la construcción del concepto de las transformaciones en el plano.

Los métodos **estadísticos y matemáticos**, en particular el cálculo porcentual para el procesamiento de la información obtenida a través de los métodos y técnicas del nivel empírico, en diferentes momentos de la investigación.

La **significación práctica** del presente trabajo, viene dada por el sistema de actividades basadas en problemas no rutinarios, sustentadas en la visualización como estrategia didáctica y en la comunidad de práctica de Wenger (1998) para favorecer la construcción de significado robusto del concepto de las transformaciones en el plano, que propicia la preparación hacia las competencias matemáticas, en los estudiantes de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz.

Esta investigación consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y 8 anexos. El capítulo 1 se dedica al estado del arte sobre las investigaciones acerca de la Geometría y de la construcción del concepto de las transformaciones en el plano en la Educación Básica. En el capítulo 2 se dedica al marco teórico, el cual está dado por la teoría de la resolución de problemas, elementos de la heurística, de la visualización y de la comunidad práctica de Wenger (1998). En el capítulo 3 se elaboran las actividades determinadas por problemas no rutinarios encaminadas a la construcción de significado robusto del concepto general de transformación en el plano, y en el capítulo 4 se constata los resultados de su implementación.

CAPITULO 1 ESTADO DEL ARTE

En el presente trabajo, se adopta como estado del arte algunas investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría. También se valora el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano en varios países y escuelas, por último se realiza un análisis de esta temática específicamente en Colombia. En cada uno de los epígrafes se hace hincapié en los aspectos que se consideran relevantes para la presente investigación y se muestra un panorama real de la situación actual de la geometría y su enseñanza al interior de las aulas.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica Secundaria

En este epígrafe se realiza un estudio de las investigaciones más representativas por algunos países y escuelas. Son varios los autores que han incursionado en el desarrollo de la geometría en el aula y del pensamiento geométrico, que por supuesto propician un aprendizaje de los contenidos geométricos. A continuación se hace referencia a algunas de estas investigaciones hechas en el mundo.

Castela y Guzmán (2005) realizan una comparación de la enseñanza de la geometría en Chile y en Francia (proyecto ECOS-CONYCIT). En este estudio se presentan diferencias que conciernen a los ámbitos siguientes: la concepción de la geometría, los aspectos de la actividad matemática puestos en evidencia, la organización del aprendizaje, la extensión de los programas, la importancia dada a las aplicaciones de matemáticas y a la modelación. Se ofrecen los paradigmas geométricos, que permiten analizar las concepciones de la geometría.

Patsiomitou (2008) estudia el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes a través de procesos de transformación y las técnicas de interacción en un entorno de Geometría dinámica-geómetra, a través de una experiencia didáctica llevada a cabo en una escuela secundaria de Matemáticas, donde se tuvo como objetivo explorar las formas en que los estudiantes desarrollan un problema (representaciones, el razonamiento y la resolución de problemas, toma de decisiones y recibir retroalimentación sobre sus ideas y estrategias en un entorno SGD). Este autor se apoya en las formas en que los estudiantes desarrollan una prueba rigurosa, a través de la construcción que une las representaciones visuales activas y las formas de desarrollar según los niveles de Van Hiele.

Se tuvieron en cuenta dos grupos: experimental (software) y de control (lápiz y papel). El investigador observa las acciones de los estudiantes y los procesos de pensamiento durante el proceso de investigación, y ofrece una descripción y análisis de estos procesos.

Una valoración de los resultados del procedimiento experimental reveló, que los estudiantes son llevados a desarrollar estrategias para la resolución de problemas con el software, a desarrollar esquemas mentales a través de la construcción de esquemas, a mejorar su reacción visual reflectante (RVR) mediante la creación / diseño de la actividades como significados de Vinculación de representaciones activas Visuales (lVAR) y a desarrollar su nivel de Van Hiele de pensamiento geométrico a través de la combinación de la IVAR, en las actividades con las preguntas formuladas durante el procedimiento de software.

Los investigadores Uyo, H. y Uyo A. (2008) en su trabajo de grado “Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele y la concepción en Geometría plana”, el estudio tiene como objetivo tanto para explorar y explicar los niveles de pensamiento geométrico de un grupo seleccionado de estudiantes de los grados 10, 11 y 12 en Escuelas de Nigeria y Sudáfrica. El estudio pretende además proporcionar una profunda descripción de las prácticas de enseñanza de Geometría, que posiblemente contribuyeron a los niveles de conceptualización geométrica, mostrada por este grupo de estudiantes de la escuela secundaria. Este estudio de caso colectivo, se presenta en dos volúmenes, se orienta dentro de una interpretación paradigma de investigación y caracterizado por ambos métodos cualitativos y cuantitativos.

En el texto de García y López (2008) “La enseñanza de la Geometría”, nace gracias al Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) cuya misión es la de contribuir al mejoramiento de la educación en México. Se compone de cuatro libros que buscan brindar a los profesores herramientas creativas para mejorar la enseñanza en sus salones de clase, proponiendo formas novedosas de apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Los dos primeros tratan sobre la promoción y el desarrollo de las habilidades de escritura, mientras que los otros dos abordan temas puntuales de las Matemáticas: los números decimales y la Geometría, éste último entre otros capítulos, incluye tareas en la enseñanza de la Geometría de conceptualización, de investigación y de demostración. Propone varias habilidades por desarrollar entre las cuales se tiene: visuales, de comunicación, de dibujo, de razonamiento, de aplicación y transferencia, y los niveles de razonamiento geométrico. Además fortalece el enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría.

Por su parte Mori y Onaga (2009) plantea que *“La integración y la aplicación de la Geometría en otros campos del conocimiento permiten instigar ideas y proponer aplicaciones prácticas para que podamos enfrentar problemas reales, en general, de naturaleza interdisciplinar. El trabajo hecho a partir de la exploración de los objetos del mundo físico, de obras de arte, pinturas, dibujos, esculturas y artesanía posibilitará que los alumnos establezcan conexiones entre la matemática y otras áreas del conocimiento”*[4]. Criterios estos que son compartidos por la autora de esta tesis y son significativos para el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el aula.

Panoura y Gagatsis (2009) en su trabajo exponen que los estudiantes al enfrentarse en la resolución de tareas geométricas específicas y al comparar su razonamiento geométrico, se encontraron estrategias y errores comunes al momento de presentar sus soluciones. Esta experiencia deja ver las dificultades y fenómenos en la transición de la Geometría natural (los objetos de este paradigma de la Geometría son objetos materiales) a la Geometría axiomática Natural (definiciones y axiomas son necesarios para crear los objetos en este paradigma de la Geometría) y a la inconsistencia del contrato didáctico implícito en la educación primaria y secundaria.

Estos resultados subrayan la necesidad de ayudar a los estudiantes a que se muevan progresivamente de la Geometría de la observación a la Geometría de la deducción. La autora de esta tesis, considera que se hace necesaria la utilización de un software educativo, el cual, mediante su acción de arrastre permite el paso de la Geometría de las formas a la Geometría de las propiedades de manera natural.

[4] Mori, I. y Onaga, D. S. (2009). *Matemática: Ideias e Desafios.* 15. ed. São Paulo: Saraiva. p. 16

Cañadas, Durán, Gallardo, Martínez, Molina, Peñas y Villegas (2009) en su estudio poseen interés y preocupación común por la enseñanza de la geometría, el cual concluye con un libro sobre el trabajo de la geometría plana a través del papel, un material cercano y de bajo costo, donde los estudiantes puedan realizar actividades con solo dobleces, pintados y recortes. También proponen una serie de tareas variadas con indicaciones para el profesor, se incluyen las soluciones a las tareas planteadas y se presentan las tareas en forma de fichas para que el profesor pueda fotocopiarlas y llevarlas directamente al aula. Criterios que se comparten en esta tesis y se consideran útiles para la enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano, en particular para la simetría.

En palabras de Torres (s.f) "*La Geometría ha de tener un carácter significativo, experimental, intuitivo, logrando en el niño que los elementos geométricos, tengan significado concreto para él, por la motivación e interés que puede despertar y por ser fuente inagotable de objetos susceptibles de observación y manipulación; propiciando la organización mental del espacio que le rodea y orientación en él. Es por esta razón que la necesidad de la enseñanza de la Geometría en el ámbito escolar, responde primeramente a cambiar su enfoque netamente formal, propio en la educación secundaria y media, ya que en la primaria es de carácter memorístico; es así como el aspecto intuitivo, se convierte en requisito indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse, hacer estimaciones, apreciaciones y cálculos de objetos en el espacio...; quedando de esta manera expuesta la innegable presencia de la Geometría en múltiples ámbitos del sistema* *productivo de nuestras actuales sociedades (producción industrial, diseño, arquitectura, topografía, arte, naturaleza, etc...)…"*[5]

En respuesta al llamado de una Geometría en las aulas aplicable en la realidad inmediata del estudiante, que erradique su concepción reduccionista a la construcción de figuras o la demostración de teoremas, otorgándole un enfoque dinámico, lúdico y tecnológico; estos estudios corroboran la necesidad de mantener la Geometría en el currículo de la escuela. Según Rojas (2009) los mismos se pueden dividir en dos grupos:

- Los que analizan la necesidad de retomar las formas tradicionales de enseñar la Geometría.
- Los que consideran que el enfoque tradicional se debe modificar e introducen nuevos métodos y medios (recursos tecnológicos) en la enseñanza de la Geometría.

En el CIAEM 2011, Ballestero y Gamboa (2011) hacen un estudio de 79 profesores donde consultan aspectos relacionados con sus creencias, sus percepciones y sus convicciones, sobre ciertos aspectos inmersos dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el nivel respectivo: actitudes y capacidades necesarias para ser exitoso al estudiar geometría, estrategias y recursos utilizados, donde parten de lo que el docente ha aprendido tanto de su experiencia profesional como de la realidad de aula (Este estudio se retoma por la significación que tiene).

[5]Torres, M (s.f). Perspectives en l´Ensenyament de la Geometria pel segle XXI, Documento de discusión para un estudio ICMI, PMME-UNISON. Febrero. 2001.Recuperable el 12 de abril de 2014 en la URL: http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Por su parte en el CIAEM 2015 a desarrollarse en México la temática de la geometría en la escuela está presente en minicursos que van desde la enseñanza de la geometría con regla, compás e instrumentos, hasta con el uso del GeoGebra.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano, en particular sobre la construcción de su concepto en la Educación Básica

Jaime y Gutiérrez (1996) resaltan el papel de los medios, recursos o materiales didácticos para la enseñanza de las transformaciones en el plano, donde destacan la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), los libros de textos, las obras de arte, el trabajo con regla y compás, el trabajo con dobleces, entre otros, los cuales brindan al estudiante diferentes situaciones de aprendizaje. Estos autores plantean que *"… es posible presentar su estudio en diferentes contextos como el campo elemental de los materiales manipulativos tradicionales (espejos, plegado, regla y compás), el informático, el de los problemas reales (trabajando en situaciones relacionadas, con la arquitectura, la publicidad, la industria, el arte, la química), o el puramente matemático (en el que se estudian las propiedades algebraicas que permiten organizar las diferentes isometrías)"*[6]. Estos aspectos son considerados en el desarrollo de las actividades de la presente tesis.

Las transformaciones isométricas: translaciones, rotaciones y reflexiones, simetría axial y central tiene varias aplicaciones en las Matemáticas, Química, Física, Artes Plásticas, en la Música, entre otras. Esto es confirmado por Jaime y Gutiérrez (1996), al plantear que *"… las isometrías constituyen una de las áreas de las matemáticas*

[6] Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Madrid: Editorial Síntesis. p. 9

con mayor variedad de aplicaciones, tanto en otras partes de las matemáticas como fuera de ellas"[7]. Aspectos estos que son tenidos en cuenta en las actividades propuestas en la tesis, pues se presentan algunas actividades que son contextualizadas.

Galante (s.f) realiza una investigación sobre el papel de la música para aprender las transformaciones geométricas, estudia la interacción entre los siguientes contextos: el lenguaje natural, el lenguaje geométrico y el lenguaje musical. En este trabajo se proporcionan nuevos instrumentos que propician conceder situaciones didácticas y para una comprensión más profunda de los procesos de comunicación. Nace de la consideración de que las transformaciones geométricas se utilizan generalmente en los procesos de composición y el *"… papel de la música para aprender transformaciones geométricas"*[8], es en realidad un nuevo estudio. En el campo de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1986) se supone, que frente a una situación no docente de enseñanza-aprendizaje, incluyendo la situación, como el maestro de instrumentos musicales, mientras que la transmisión de los conocimientos del lenguaje musical (teórico-práctica), no tenía la intención de transmitir la transformación geométrica.

El texto "Problemas en el plano y Geometría sólida V.1" de Prasolov (s.f) es considerado como único en su género por su incalculable valor para la Geometría elemental, pues se presenta de una manera completa y transparente, sosteniendo que en la escuela primaria se enseñan las bases del futuro estudio geométrico del

[7] Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Madrid: Editorial Sínteses. P.9
[8] Galante (s.f). The role of the music to learn geometrical transformations.Palermo, Italia. Recuperable en la URL: http://math.unipa.it/~grim/21_project/Galante189-194.pdf

estudiante. El libro contiene problemas geométricos no estándar de un nivel más alto que el de los problemas que se ofrecen en la escuela secundaria. Está dirigido a estudiantes de secundaria, profesores de Matemáticas, clubes de Matemáticas, y los estudiantes universitarios.

Con relación al estudio de las transformaciones isométricas, Mabuchi (2000) afirma que *"… la presencia del tema en los currículos es bastante notable. Entre tanto, los libros didácticos abordan el tema de manera tímida, superficial y desconectada*"[9]. Estos criterios son compartidos en esta tesis, pues se considera que esta temática, en algunos de los libros de textos colombianos de la Educación Básica, presenta esta dificultad.

Beltrametti, Esquivel y Ferrari (2002 y 2005) realizan un estudio para analizar los progresos del pensamiento geométrico en los estudiantes del profesorado en Matemática que cursan la asignatura Geometría Métrica en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE. Su objetivo es analizar las posibilidades y progresos de los estudiantes en la construcción del concepto de transformaciones rígidas del plano, empleando el modelo de Van Hiele y el Cabrí Géométre. En sus resultados muestran que el trabajo con el SGD es factible para seguir el siguiente proceso: diseñar, explorar, modelizar, conjeturar, definir, argumentar y demostrar, para lograr en los estudiantes un aprendizaje por descubrimiento. En la tesis se toma esta investigación, a pesar de no estar dentro del campo de acción, por la importancia que reviste tener profesores con un buen

[9] Mabuchi, T. (2000). Transformações Geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado ás práticas escolares nem à formação de professores. (Tesis de Maestría no publicada), Pontifícia Universidade Católica – SP). Recuperado el 18 de enero de 2012 de http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/setsuko_mabuchi.pdf p.192

dominio del contenido y la metodología, para el tratamiento de esta temática en la escuela. Se considera que primero se les debe enseñar a los futuros profesores las potencialidades de los medios tradicionales y el trabajo con dobleces en el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano y luego complementar con los SGD.

Según Ripplinger (2006) en el aula se deben trabajar situaciones, que permitan a los estudiantes explorar, conjeturar y en algunos casos se llegue hasta la validación, donde se aplique propiedades que son de su dominio. La Geometría *"… es una parte de las ciencias matemáticas que podría ser más explorada en la enseñanza básica. La geometría proporciona que trabajemos de manera más dinámica*"[10]. Criterios estos que comparte la autora de esta tesis y que se logran con el uso primero en las clases de los medios tradicionales, donde los estudiantes manipulen y luego el uso de los SGD, lo cual permite el tránsito hacia una enseñanza dinámica de la geometría en el aula.

Las transformaciones isométricas están presentes en los currículos de diferentes países y son varios los autores que justifican su presencia, Imenes y Lelis (2009) plantean que el pensamiento geométrico se refuerza con éstas, y citan algunas razones para el estudio de la simetría: "*La ampliación de la percepción geométrica, su presencia en la naturaleza, su importancia en las artes visuales, y su uso en la matemática, posibilita descubrir y demostrar propiedades geométricas y*

[10] Ripplinger, G. (2006). *A* Simetria nas práticas Escolares. (Tesis de Maestría no publicada), Universidade Federal do Paraná. Recuperado el 15 de febrero de http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080//dspace/handle/1884/3951 p.20

algebraicas"[11]. Estos criterios son compartidos en la tesis y son consideradas en la propuesta de actividades.

Por otra parte Imenes y Lellis (2009) plantean que: "*La simetría está presente en ornamentos, tejidos, dibujos en cerámicas, bordados, de las más diversas culturas. Montar una exposición con ornamentos simétricos de varias procedencias sería un interesante ejemplo de pluralidad cultural, mostrando que todos los pueblos tienen preocupaciones estéticas que, muchas veces, usan las mismas ideas matemáticas"*[12]. Estas ideas son consideradas en las actividades de esta tesis y sobre todo en los problemas a realizar en la casa, donde se requiere que los estudiantes expongan ante sus pares, las situaciones relacionadas con la temática.

Souza y Pataro (2009) consideran que *"… el estudio de simetría tiene como objetivo auxiliar en conceptualizaciones de semejanza y congruencia, buscando que los alumnos desarrollen la capacidad de percibir si dos figuras poseen o no la misma forma y mismo tamaño, independiente de la posición que ellas ocupan en el plano"*[13]. Estos criterios se comparten por la autora de esta tesis, pues se considera que la simetría contribuye a que los estudiantes identifiquen cuando las figuras geométricas son semejantes o congruentes.

Coronel (2010) produce un cuaderno de trabajo exclusivo para los maestros de Matemáticas, en el que aborda conceptos teóricos y propiedades básicas sobre las transformaciones en el plano y algunas actividades de aplicación, como lo son los teselados y el origami; los gráficos se trabajan con GeoGebra, donde permite la

[11] Imenes, L. M. y Lellis, M. (2009). *Matemática*. São Paulo: Moderno. p. 58
[12] Ibidem.
[13] Souza, J. R. y Pataro, P.R. M. (2009). *Vontade de Saber Matemática*. São Paulo: FTD. p. 57

visualización de las propiedades. La autora de esta tesis, comparte este criterio y considera necesario un enfoque artístico, haciendo uso de las transformaciones en el plano, para una transversalización adecuada de la temática.

Díaz y Bazán (2011) desarrollan una propuesta sobre la enseñanza de las transformaciones isométricas en el primer nivel de educación media de adultos, lo cual es equivalente al grado séptimo, con el objetivo de diseñar y aplicar un modelo didáctico, que propicie aprendizajes geométricos establecidos en el currículo mediante uso de TIC. En el desarrollo del trabajo combinan la metodología cualitativa y cuantitativa, donde aplican un pre y pos test, una encuesta opinión y observación participante. El análisis de los resultados mostró que los estudiantes mayoritariamente lograron altos porcentajes de aprobación para las transformaciones isométricas, con la utilización del software de geometría dinámica Cabri II, el cual fue un factor determinante en el aprendizaje del tema abordado y a su vez en la motivación de los estudiantes. Se concuerda que el uso del Cabri II, ayuda al aprendizaje de las transformaciones en el plano, pero primero debe de realizarse un trabajo con instrumentos y con objetos tradicionales.

En el CERME 7 (2011) un grupo de trabajo se ocupa de la investigación y el desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría desde preescolar hasta la enseñanza universitaria, incluyendo cualquier tipo de geometría. En el grupo se invita a los participantes a mirar las contribuciones realizadas en el CERME 3, 5 y 6. En el debate se hace referencia a los paradigmas y registros de representación, los cuales fueron considerados y discutidos dentro de un marco teórico común en Geometría en lo que respecta a la epistemología, la psicología y la semiótica.

Cheuquepán y Barbé (2012) aducen que *"… los resultados obtenidos por el grupo experimental superan en un 65% a los resultados del grupo control, el programa de tutorías tiene un impacto positivo sobre el rendimiento de los estudiantes y el concepto vector es fundamental en el tratamiento de las isometrías del plano*"[14]. Se considera que el uso de los SGD puede contribuir al proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano y algunas de estas ideas se consideran en las actividades.

Mashingaidze (2012) realiza un estudio sobre las transformaciones geométricas, el cual se dirige a exponer al estudiante a buenas experiencias prácticas con transformaciones geométricas. En el trabajo se plantea la necesidad que los estudiantes posean dominio de los conocimientos previos o conocimiento asumido y un adecuado desarrollo de una serie de habilidades. Este autor aduce que los temas matemáticos dependen de otros, de ahí la importancia de que los estudiantes posean contenidos previos como: la construcción de formas, simetría, propiedades de las figuras, semejanza y congruencia. Como resultado muestra dificultades en los estudiantes para identificar o decidir el tipo de transformación.

Moraes y Santos (2013) dirigen su estudio a identificar los libros Didácticos de Matemática del 6º año de Educación Primaria que trabajan el tema de transformaciones isométricas de acuerdo con las recomendaciones de los Parámetros Curriculares Nacionales (PNC). Estos autores utilizan una Metodología cualitativa con estudio exploratorio y la muestra fue compuesta de nueve libros

[14] Cheuquepán, D. y Barbé, J. (2012). Dinamización matemática. Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Marzo de 2012, Número 29, páginas 131-154 ISSN: 1815-0640. Recuperable el 21 de febrero en la URL: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo12.pdf p.132

recomendados por el Plano Nacional del Libro Didáctico 2011 – 2013. En sus resultados muestran que a pesar de la importancia de las transformaciones isométricas, el tema no es abordado en algunos libros, ni todos los libros atienden las recomendaciones de los PCN y en su mayoría estudian solo la simetría.

Thaqi, Giménez, y Rosich (s.f) desarrollan un estudio sobre las transformaciones geométricas con maestros de primaria en Kosovo y España, donde se revela la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes, más que diferencias culturales. Se realiza una investigación etnográfica como estudio de caso, con dos grupos separados de los futuros profesores, a través de dos cursos de la geometría euclidiana clásica. Thaqi, Giménez, y Rosich (s.f) apuntan que los deficientes resultados comunes a ambos países sobre las transformaciones geométricas muestran el limitado dominio de los contenidos previos, no sólo debido a la falta de conocimiento matemático, sino a escasas tareas en el aula sobre las transformaciones en la vida. Estos autores plantean que los estudiantes de ambos países tienen un limitado concepto acerca de las transformaciones geométricas y concluyen que la visualización no es suficiente para entender estos conceptos, es necesaria la contextualización y el comunicación oral para discutir acerca de los tipos de transformaciones isométricas. En la tesis se retoma esta investigación, pues es en la primaria donde se crean las bases para un adecuado aprendizaje en los estudiantes sobre las transformaciones isométricas, en el que el docente debe poseer dominio del contenido y de su metodología.

Miquilena, Sangronis y Coello (s.f) se basan en investigación descriptiva y documental, que se dirige a desarrollar un software educativo como herramienta de apoyo docente para el proceso de enseñanza del contenido transformaciones en el plano, en los estudiantes de grado octavo. El estudio se desarrolla en cuatro fases. En la fase 1, se realizó el estado del arte y se diseñaron, validaron y aplicaron tres instrumentos, para recolectar información sobre los elementos inherentes al proceso de enseñanza del contenido transformaciones en el plano. En la fase 2 y 3, se diseñó el software, además de la elaboración de dos instrumentos para su validación. En la fase 4 se valida el software a través de una prueba piloto y de expertos. El análisis de los resultados muestra que los estudiantes presentan una actitud positiva hacia el estudio del contenido transformaciones en el plano, cuando se utiliza el computador, mientras que en los profesores, un alto porcentaje desarrolla el contenido con ausencia de las TIC.

En la literatura revisada se pudo constatar que son limitadas las investigaciones sobre la construcción del concepto de las transformaciones en el plano en la Educación Básica.

1.3. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de geometría, en particular sobre la construcción del concepto de las transformaciones en el plano en la Educación Básica en Colombia

En los Lineamientos Curriculares se establecen cinco tipos de pensamiento matemático en correspondencia con las áreas de la matemática en la escuela, en el caso específico de la geometría se le asocia el pensamiento espacial y el métrico. El contenido geométrico está presente en todos los grados de la escuela colombiana. En la mayoría de los colegios la temática se dicta en el último periodo académico, aunque se debe destacar que existen algunas instituciones que imparten como una asignatura.

Por otra parte en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, se precisa que: *"En especial, la geometría euclidiana es un campo muy fértil para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo, de la deducción formal a partir de axiomas, por tener una articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano y lo académico"*[15]. Con relación a lo planteado, se es del criterio que la enseñanza de la geometría en el grado séptimo contribuye a estos fines.

Rodríguez (1999) interrelaciona conceptos geométricos con mecanismos articulados, específicamente; los pantógrafos sirve para describir transformaciones tales como las traslaciones y las dilataciones, labor que ayudó a comprender los conceptos por su presentación de manera inteligible y significativa, trabajados desde la experiencia que permite verlos como algo tangible. Aunque se relacionan ideas algebraicas con ideas geométricas, además de elementos del algebra vectorial, se considera necesario el soporte visual que brinda un software educativo para que de esta manera sea asequible a estudiantes de un nivel escolar básico y/o de media.

Castiblanco y Moreno (2004) apoyados por el Ministerio de Educación Nacional y diferentes Universidades en todo el país desarrollan un proyecto dirigido a la incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia, para estudiantes de la Educación

[15] Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperable el 11 de enero de 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf p.57

Preescolar, Básica y Media. En este proyecto, abordan los software de geometría dinámica sus características y principios fundamentales para trabajar con geometría dinámica en el aula. Estos autores plantean que "*La Geometría Dinámica se coloca a medio camino entre el mundo sensible (perceptible por los sentidos), en este caso esencialmente visual, y el mundo matemático, esencialmente abstracto*"[16]. En el proyecto se describen experiencias relacionada sobre triángulo, cuadriláteros y sus propiedades.

Castiblanco y Moreno (2004) aducen que "*Con lápiz y papel nos quedamos con los prototipos de las figuras, razonamos sobre los dibujos (mundo físico), pero el cuadrado pertenece al mundo de las ideas. Cabri coloca un puente entre el mundo físico y el mundo de las ideas, en el sentido que permite visualizar los invariantes geométricos al arrastrar las figuras y observar las figuras que se mantienen bajo el movimiento, visualizando las características que hacen que un cuadrado sea un cuadrad*o"[17]. La autora de esta tesis concuerda con estas ideas y se tiene en cuenta para el desarrollo de las actividades.

Acevedo (2009) desarrollan un proyecto sobre la Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videojuego. En la propuesta se aprovechan los procesos y habilidades de visualización, a partir del reconocimiento de las características propias de la geometría. Se enfoca en la habilidad perceptual para desarrollar conceptos y en la aplicación de los conceptos de movimientos rígidos en el plano, en

[16] Castiblanco, A. y Moreno, L. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Recuperable el 13 de febrero de 2015 de la URL: http://186.113.12.12/discoext/collections/0019/0002/02550002.pdf p.89
[17] Ibidem

el caso de la traslación y rotación a través de la solución de problemas en la interacción con el videojuego Tetris.

Camacho (2010) valora los criterios que utiliza un docente de Matemáticas para evaluar sus cursos en el grado noveno, en el aula de Geometría. El proceso de búsqueda de la información se realiza a través de guías académicas, diario del docente, evaluaciones, cuadernos de algunos estudiantes, algunas filmaciones de clases y ciertos elementos que permita realizar un análisis acerca de aquellas prácticas evaluativas. Se considera importante el proceso evaluativo dentro de la clase de Geometría, en el desarrollo de esta tesis este proceso se tiene en cuenta en cada una de las actividades propuestas.

Morales y Majé (2011) abordan el desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática formular y resolver problemas en estudiantes de grado séptimo de la educación básica secundaria, a través del objeto matemático cuadriláteros y el uso de la Geometría Dinámica. Desarrollan una propuesta didáctica en torno a los cuadriláteros, la cual se sustenta en las comunidades de aprendizaje articuladas a partir de la forma de entender la clase en la propuesta de Bishop (2005) y el modelo teórico propuesto por los esposos Van Hiele. Estos autores elaboran actividades en las que se tuvo en cuenta el contexto social y económico de la región, relacionado con el proyecto escuela y café que se ejecuta actualmente en la Institución Educativa José Eustasio Rivera.

En el trabajo investigativo de Niño (2011) su propuesta va encaminada a la comprensión de las ecuaciones de las cónicas básicas (circunferencia, parábola e hipérbola), desde la utilización de los conocimientos geométricos, en particular las transformaciones del plano, para una posterior comprensión de las demás cónicas por medio de homotecias, traslaciones, simetrías y semihomotecias. Se considera que tanto el abordaje de las transformaciones en el plano, como el uso de los asistentes geométricos tuvieron un papel menor y por ende el desarrollo de los contenidos pudo haber quedado falto de profundidad en la conceptualización.

Rivera (2011) en su trabajo propone estrategias didácticas cuyo objetivo es priorizar las construcciones geométricas con regla y escuadra y el software de GeoGebra en la ilustración y caracterización de las relaciones existentes entre las propiedades geométricas del plano y las propiedades y operaciones de los números reales. La autora de la presente tesis, comparte estos discernimientos, pero estima necesario que para lograr un mejor desarrollo de estos temas se pudo haber tenido en cuenta tanto aspectos psicosociales, afectivos y económicos propios de la realidad del estudiante e implícitamente mostrar la aplicabilidad en su entorno.

Acevedo y Camargo (2011) desarrollan un proyecto de investigación que hace uso del videojuego en tareas de acercamiento a los conceptos geométricos de rotación y traslación, donde hacen uso de los beneficios del entorno visual del videojuego. Estos autores plantean que dentro de estos beneficios se tienen: dinamizar la reflexión, desarrollar competencia de resolución de problemas y estimular capacidad deductiva. También presentan un marco analítico para identificar procesos y habilidades de visualización que se desarrollan al aprovechar el videojuego como mediador visual, se ilustra los efectos del uso del Tetris en la resolución de tareas desarrolladas.

Montes (2012) en su investigación presenta una propuesta didáctica que busca generar la comprensión y el aprendizaje del concepto geométrico de movimiento rígido en el plano, donde toma como referente el entorno visual del videojuego Pac-Man, en el cual hace uso del trabajo manual y la manipulación de objetos concretos. Se refiere a movimientos de traslación, rotación y reflexión axial, donde contempla visiones y aportes desde el campo disciplinar de las Matemáticas, para llegar a la construcción de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales necesarios para la comprensión del tema en estudiantes de séptimo grado. Estos criterios son compartidos en esta tesis, y además se considera este juego un recurso motivador y a la vez potencializador de las temáticas abordadas; pero se es de la opinión que para lograr un mayor desarrollo de las transformaciones en el plano, se pudo haber utilizado algún otro juego para las no rígidas.

Acero y Chaparro (2015) realizan un experimento de enseñanza que permite describir un proceso de matematización en los estudiantes de grado séptimo, en el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones geométricas. Estos autores sustentan su trabajo en la Educación Matemática Realista y la Fenomenología Didáctica propuesta por Freudenthal (1983). La implementación de la propuesta permita diversificar las prácticas escolares que aportan a la estructura multiplicativa, sustentada en el concepto de la unidad similar por medio de trasformaciones geométricas, que intentan desarrollar y comprender tópicos matemáticos como: la razón y la proporción desde la semejanza y la congruencia.

Con respecto a la construcción del concepto de las transformaciones en el plano en la Educación Básica en Colombia, se pudo constatar que son limitados los trabajos investigativos realizados, pero si se considera necesario retomar algunas investigaciones sobre la construcción de conceptos en el área de la geometría, vale destacar los trabajos realizador por Pérez (2011) y Tafur (2014).

Pérez (2011) elabora actividades teórico-práctico, sustentado en el modelo de comunidad de práctica de Wenger (2008), donde se favorece la construcción de significado para el concepto de área de algunas figuras planas en la asignatura de Geometría de sexto grado. Pérez (2011) sugiere diseñar actividades, donde los estudiantes tengan ciertas dificultades que los motiven a esforzarse para solucionarlas, pero no del grado que produzcan frustración y abandono.

Por su parte Tafur (2014) plantea que en la construcción del concepto de volumen, es limitado el reconocimiento de las propiedades de las figuras planas, es escaso el dominio de las propiedades de los sólidos geométricos elementales y son insuficientes las habilidades requeridas para la manipulación, la representación y la visualización. Tafur (2014) dirige su estudio a favorecer la construcción de significado robusto del concepto general de volumen y el de volumen de cuerpos geométricos especiales en los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz, mediante la elaboración de actividades conformadas por problemas no rutinarios. A través de la implementación de las actividades se favorece, la motivación, la participación, el compromiso y el interés de los estudiantes y se logra la construcción de significado robusto del concepto de volumen.

Conclusiones del capítulo 1

Los resultados de las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría, específicamente de las transformaciones en el plano, en la Educación Básica Secundaria, apuntan a que:

- En el trabajo en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en el aula se destacan las teorías de Piaget, el constructivismo y el modelo Van Hiele.
- En las investigaciones revisadas, es escaso el enfoque de las transformaciones en el plano como referente temático en la resolución de problemas reto; aunque podría considerarse una falencia en cuanto a la investigación en geometría, se considera un aspecto positivo para poder ahondar en este aspecto del proceso enseñanza-aprendizaje. Aun así, en su gran mayoría coinciden en la importancia de las TIC potencializando la visualización, y en conjunto con equipos de trabajo se obtienen mejoras significativas evidentes en la evaluación de las temáticas.
- En Colombia son varias las investigaciones y proyectos realizados a favor de la enseñanza aprendizaje de la geometría. En algunas escuelas se le asigna un turno a la semana y de esta forma se evita que quede renegada a lo último del currículo.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se asumen la teoría de la resolución de problemas, condiciones, fases, caracterización de los problemas no rutinarios y problemas retos, la heurística, el proceso de representación, la visualización y su significado y las posturas de la teoría de comunidad de práctica de Wenger (1998).

2.1. La teoría de la resolución de problemas

La resolución de problemas, ha venido presentando no solo una marcada trascendencia en la academia, sino una necesidad imperiosa de la escuela moderna. Se han retomado muchos métodos heurísticos para servir de soporte y coadyuvar los procesos educativos en casi todas las áreas de las ciencias, con la intención de dotar a los educando con las herramientas para su desarrollo escolar y para afrontar situaciones futuras de la vida real. Numerosas investigaciones en el campo de la educación de las Matemáticas comprueban y demuestran la importancia de enseñar a resolver problemas en la potenciación del desarrollo del pensamiento productivo y creativo de los estudiantes.

Hoy por hoy la resolución de problemas se ha extendido más allá del plano numérico, hasta el punto de enfatizar, que *"la solución de problemas de Geometría desarrolla en el alumno la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas".*[18] Particularmente la resolución de problemas de geometría plana aporta al desarrollo de estas capacidades y también la de explorar, representar y describir.

---

[18]Ardila, A. (2014).*Transformación Curricular de Matemática en la Educación Básica General Panameña.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Recuperable el 15 de abril de 2015 de la URL: http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2014.pdf p.89

La Geometría concibe al estudiante como un sujeto activo, que se plantea preguntas, que formula, demuestra y valida hipótesis, que comprueba o reelabora vías de resolución a partir de la interacción con los individuos de su entorno y grupo estudiantil, que al cambiar su juicio sobre el objeto de conocimiento lo modifica y lo recrea. Algunos investigadores como Arons (1979), Raths y Colbs (1997), Reyes (2004), entre otros confirman que los estudiantes que incursionan en la Educación Superior poseen una marcada estrechez al momento de razonar, pensar crítica y creativamente, debido muchas veces en la repetición de los triviales ejercicios encontrados en los materiales de estudio de los curso, mal llamados problemas al estar enunciados en un lenguaje puramente verbal.

Dentro de este contexto, se acepta la fértil literatura dedicada a los aspectos fundamentales de la resolución de problemas, innumerables autores que han aportado a esta temática desde el siglo pasado hasta nuestros días. Pólya (1945) es considerado el padre de la teorías de resolución de problemas modernas, quien con sus importante aportes a la resolución de problemas y con más de 253 artículos escritos sobre el tema, introduce los métodos heurísticos de razonamiento abandonados anteriormente por su poco rigor matemático.

Fridman (1972), Krulik y Rudnik (1980) retoman las teorías de Pólya (1965) y resumen que en la definición de problema existe ciertas limitaciones de los investigadores anteriores en no plantearse realmente una definición exacta de problema como base central de sus teorías. Por su parte Schoenfeld (1985) a pesar de ser un seguidor de la corriente de Pólya (1965) enfoca sus investigaciones en el lado psicológico del aprendizaje.

Mayer (1986), Garret (1995), Guzmán (1991) con una mejora y unificación de varias teorías anteriores de las cuales toma lo positivo, generan su propio modelo de resolución basado en fases o pasos principales. También aportan al desarrollo de esta teoría Labarrere (1996), Campistrous y Rizo (1996), Álvarez (1996), Jinfa Cai, Sriraman y English (2010), los cuales hacen referencias a definiciones, fases en su resolución y son partidarios de implementar la actividad de resolución de problemas en el salón de clase, para buscar mejoras en el aprendizaje.

Disímiles son las definiciones encontradas y revisadas en la investigación realizada sobre problemas. Alguna llegan al punto de expresar el problema como una situación en la cual se pueden identificar metas a hallar aun cuando el camino hacia ellas no queda muy claramente definido, otras van más allá del solo planteamiento de la problemática y resumen las condiciones que deben existir para que estos problemas involucren a los individuos resolutores de las mismas.

Montenegro (2000) acota *"… un problema se puede considerar como una meta con su correspondiente conjunto de medios para alcanzarla. En los problemas matemáticos, la meta es obtener una información; los medios son la información suministrada y el conjunto de operaciones que se realizan para alcanzar la meta deseada…"*[19]; la tesis de este autor pudiera crear confusiones a partir de los múltiples puntos de coincidencia con la definición de ejercicio, no se consideran situaciones de frustración en la búsqueda de la solución y se presupone que seguir

[19] Montenegro, I. (2000). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el proceso de aprendizaje. Universidad pedagógica nacional. URL http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted11_06arti.pdf

un número de pasos ordenados concluyen directamente en la resolución del problema.

Bransford y Stein (s.f) expresan: *"…un problema es un obstáculo que separa la situación actual de una meta deseada, consecuentemente, resolver un problema consiste en pasar de una situación a la otra"*[20]. En este trabajo se asume lo dicho planteado por Krulik y Rudnik (1980), al plantear que *"…un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma…"*[21]*.* Estos dos últimos autores hacen un resumen y a la vez amplían el concepto situándolo en un nivel en el cual las competencias del individuo se ponen a prueba para poder llegar al fin deseado.

Al analizar las definiciones anteriores, se puede encontrar que de una forma u otra todas se refieren a que existen unas premisas, que deben cumplirse para que una situación llegue a ser problémica para un grupo de individuos o estudiantes:

- Se requiere de la existencia de condiciones iniciales o finales que expresen la necesidad de transformación, la situación debe crear una motivación en los resolutores para generar un compromiso a su terminación y al consecuente hallazgo de la meta.
- El camino que permite transitar de una situación a otra debe ser desconocido o, al menos, no ha de tener una solución inmediata, de esta manera se estimula la

[20]Blanco, J. (1996). La resolución de problemas: una revisión teórica, revista SUMA[21] febrero 1996, pp. 11-20. Recuperable en la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf
21 Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). Problem solving: a handbook for teachers. Boston: Allyn and Bacon.

indagación, investigación e incluso la asociación con respecto a otras áreas del saber que no necesariamente tienen que ser las Matemáticas.

- Deben existir el o los estudiantes que quieran resolverlo, teniendo en cuenta que lo que puede ser considerado una situación problema para unos puede no serlo para otros, aquí entran a jugar parte las teorías del umbral de dificultad individual, en el cual se debe tener mucho en cuenta del grado de experticia del individuo o los individuos involucrado en la completitud de la tarea.
- Que el estudiante o el grupo estudiantil disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades, motivación.

Según Blanco (1996), se le da el nombre de modelo de resolución de problemas a *"…la doctrina que clasifica y analiza las fases del proceso de resolución de problemas, las sugerencias y estrategias heurísticas, y los distintos aspectos de orden cognoscitivo, emocional, cultural, científico, etc. que intervienen en el proceso…"*[22].

Guzmán (1991) seguidor de las teorías de Pólya (1965), es un matemático español que hizo importante aportes a la enseñanza y a la didáctica de la Matemática en España y en otros países de Europa, donde deja como legado su modelo de resolución de problemas el cual se centra en el pensamiento eficaz (Pólya lo denomina pensamiento productivo). La mencionada propuesta de Guzmán (1991) se le conoce también como síntesis de los modelos de (Wallas 1926, Dewey 1888, Pólya1945, Schoenfeld 1985) y cuenta con cuatro fases bien identificadas:

[22]Blanco, J. (1996). La resolución de problemas: una revisión teórica, revista SUMA[21] febrero 1996, pp. 11-20. Recuperable en la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf

familiarizarse con el problema, buscar estrategias, llevar adelante la estrategia y revisar el proceso y sus consecuencias, las cuales serán detalladas a continuación:

Familiarizarse con el problema: al inicio de la actividad, se debe actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Se debe hacer una lectura progresiva para llegar a tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender a fondo la situación, si no se logra una comprensión total de la problemática se debe volver a realizar una lectura y continuar con la fase de familiarización hasta que se llegue a un entendimiento total de la actividad a realizar.

Se realiza un coqueteo matemático con la situación, se enmarca en el contexto afín al área de conocimiento en el cual se desea hallar la solución, se humaniza el problema para lograr perder el miedo natural del individuo o los individuos al fallo, se enfocan a los individuos a la comprensión de los aspectos que circundan a la situación problemática. Los individuos se plantean interrogantes sobre que conocimiento relacionado con la situación problemática, se inquieren los datos obtenidos del planteamiento de la situación, se observan situaciones concretas, se rescatan las ideas previas sobre el tema, los docentes se enfocan en realizar dinámicas motivantes o que despierten el interés sobre el caso a resolver, entre otras.

Buscar estrategias: una vez analizado y entendido el caso-problema se continúa con la búsqueda de estrategias que permitan hallar su solución. Se toman notas de las ideas que surjan alrededor de la problemática y que se hallen relacionadas con el área de incidencia del problema.

Se formulan hipótesis, se realizan graficaciones o esquemas que posibiliten hallazgos parciales o totales en las subsiguientes etapas de la solución, se revisan y se asocian teoremas que establezcan lazos entre los datos y sus conexiones. El docente sugerirá con preguntas y esquemas necesarios la utilización de estrategias, sin intentar resolver las situaciones creadas, posibilitando en los estudiantes desarrollar sus capacidades creativas en el intento de hallar las posibles soluciones, y los razonamientos que conllevan a fortalecer los lazos entre el conocimiento adquirido en clases y los conceptos geométricos.

Llevar adelante la estrategia: después de analizar y escoger aquellas estrategias que aparentemente conllevan a hallar la solución, se debe ejecutar las que cumplan con el mayor número de requisitos para la conclusión de la actividad. Si no se acierta se debe volver a la fase anterior y una vez allí escoger otra pauta o impulso y se reinicia de nuevo el trabajo.

Los estudiantes deben poner en marcha las estrategias y realizar las operaciones. Aplican las que consideran necesarias para resolver la situación problemática. Posteriormente, el docente orientará a los estudiantes leer nuevamente las situaciones que se plantearon en el problema, verificar la incógnita, recordar los pasos alternativos para resolver problemas e intentar resolverlos paso a paso, con diferentes estrategias, si surge un error lo verifican entre todos y buscan otro camino.

Revisar el proceso y sus consecuencias: al encontrar la solución se ha llegado a la fase más importante, revisión del proceso, y se extraerán las consecuencias de él. Se debe reflexionar sobre el camino seguido, analizar si se pueden extender estas ideas a otras situaciones. Tratar de llevar a cabo el modelo anterior en los problemas posteriores. Una vez terminado de resolver las situaciones problemáticas, se vuelve a revisar y se piensa en lo que se ha hecho para obtener ese resultado.

Luego de la aplicación de este método de resolución de problemas surgen muchas interrogantes que ayudan a crear una sólida base y edifican lazos con el conocimiento matemático empleado una vez hallada la solución del o los problemas. En ocasiones es interesante hacer una retroalimentación por parte de los docentes formulándoselas esas interrogantes a los estudiantes, donde se analice las respuestas de los mismos, para incidir en los problemas detectados de una manera más efectiva, como por ejemplo:

¿Era adecuada la estrategia; se ha seguido correctamente; la solución está de acuerdo con el problema? ¿Hay otras formas de resolver, permite generalizar conclusiones, interesan variaciones del problema? ¿Qué se hizo para lograr el resultado del problema? ¿Se han resuelto las situaciones problemáticas? ¿Cuál fue el primer paso?

¿Son correctos los pasos realizados? ¿Por qué se utilizó esa operación? ¿Cómo se obtuvieron los pasos que teníamos que seguir para resolver los problemas? ¿A qué conclusiones se ha llegado? ¿Recuerdan cómo hicimos para iniciar la resolución del problema? ¿Todos han utilizado las mismas estrategias para resolverlo? ¿En qué momentos de la vida cotidiana se pueden seguir estos mismos procedimientos o pasos? ¿Para qué otras situaciones similares pueden ser de utilidad?

Por otra parte las estrategias son entendidas como aquellas tácticas, recursos, algoritmos y hasta “trucos” que posibilitan reformar el problema en una situación conocida y evidente, cuyo proceso de solución sea más asimilable. En el libro “How to solve it" Pólya (1965) describe alrededor de 19 estrategias, siendo las más conocidas:

Analogía o semejanza: para usar esta estrategia de resolución de problemas es importante tener en cuenta el nivel de razonamiento lógico de los estudiantes, pues así como favorece la creatividad, complementa el proceso de aprendizaje, fomenta la imaginación y estimula el intercambio de ideas entre los educandos, puede ser limitada y las ganancias son pocas cuando hay cierta dificultad para generalizar, matematizar y para la abstracción o el pobre el razonamiento de los estudiantes. Los docentes cuando dictan Geometría al estimular o plantearles a los estudiantes las posibilidades del uso de esta estrategia deben orientarles cómo encontrar la información relevante, buscar una semejanza con otros problemas y sobre todo poder realizar un resumen conceptual relacionada con la situación.

Organización, codificación (esquema, notación, lenguaje, figura, diagrama, gráfico y modelos manipulativos): el empleo de este recurso heurístico es muy común en problemas de Geometría, Probabilidades y Estadísticas, aunque no exclusivo para este tipo de problemas, muchas veces una figura ayuda a resolver situaciones algebraicas de una manera fácil y elegante. Este método tiene relevancia en la solución de problemas geométricos, también es muy útil en problemas donde hay que verificar que se han incluido todas las posibilidades y no se ha repetido ninguna. Esta estrategia de resolución tiene la ventaja de permitir de una manera más sencilla memorizar la información que se está trabajando, aunque trae desventajas pues muchas veces hay modelos complejos que en estudiantes con pobre nivel para visualizar cometen errores que les impiden resolver las situaciones problémicas.

Ensayo y error: La utilización de esta pauta heurística, también conocida como prueba y error conlleva a la realización de una operación, grupo de operaciones o alternativas de solución y verificar si los resultados hallados son correctos, en caso positivo entonces se ha llegado la solución al problema, en caso contrario se intenta realizar alternativas diferentes hasta que se obtenga la solución o cuando se acaben todas las alternativas y sea imposible hallar la solución por medio de esta estrategia. Este método de soluciones contempla las siguientes limitaciones: no se intenta descubrir el porqué de la solución, simplemente hallarla; no es utilizable para generalizar soluciones a otros problemas, está enfocado a encontrar solo una solución al problema, lo que puede dejar fuera otras soluciones e incluso la solución óptima; muchas veces puede ser costoso el obtener una solución por esta vía con respecto al tiempo dedicado a hallarla, y otros posible recursos.

Trabajar marcha atrás o considerar el problema resuelto: este método consiste en dar por sentado que el problema está resuelto y comenzar a ir generando los pasos que desencadenaron estas soluciones en orden inverso. Esta es una estrategia muy poderosa en la resolución de problemas, pues en muchas ocasiones hay problemas que exclusivamente se resuelven usando este método[23], aunque tiene ciertos inconvenientes en su uso, pues se recomienda cuando se conoce el

---

[23]. Molero y Salvador (). Resolución de problemas, Estrategias heurísticas. Recuperable en la URL http://www2.caminos.upm.es/departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Problemas/ESTRATEGIAS%20HEUR%C3%8DSTICAS.pdf

resultado final del problema, pero no los pasos para llegar a la solución. Algunos investigadores recomiendan su empleo cuando no queda otra alternativa.

Experimentación: es considerada como uno de los métodos más fructíferos en la resolución de problemas, es una de los cimientos fundamentales en los descubrimientos en todas las ciencias. Parte del análisis de un número de particularidades de un fenómeno, experimentando con ellos para intentar encontrar una característica común, una ley o leyes que de manera general los defina, y a través de conjeturas se llegan a ciertas hipótesis las cuales deben ser confirmadas o refutadas mediante razonamientos lógicos.

Modificar el problema: esta estrategia a la hora de resolver una situación, suele ser también hallada en la literatura especializada como el método de "divide y vencerás". Consiste en lograr de manera consciente y sistemática la descomposición, división en unidades problémicas más sencillas, y así sucesivamente hasta que esas submetas o subproblemas casi se resuelvan por si solos o el esfuerzo en cada uno de ellos sea el mínimo. Este método de resolución de problemas es ampliamente utilizado para resolver problemas computacionales y se conoce como algoritmos (DYV).

Conjeturar: las conjeturas son la espina vertebral de muchos de los descubrimientos matemáticos. Esta estrategia guarda mucha similitud y tiene estrecha relación con otros métodos heurísticos, inicialmente al conjeturar partimos de afirmaciones lógicas y razonables, corazonadas matemáticas, intuiciones y también de experimentaciones, luego cuando se llega a una conclusión o posible regla general, se intenta refutarla o demostrar que es verdadera la presunción.

Hacer recuento: esta estrategia está estrechamente relacionada con otras estrategias como: **organización, experimentación, hacer conjeturas, exploración, entre otras**; y la misma permite examinar todas las posibilidades que presenta el problema, al contar ya sea ordenadamente o al azar pero sistemáticamente todas las ocurrencias posibles de casos.

Exploración: esta estrategia suele ser utilizada conjuntamente con otras estrategias descritas anteriormente. Se centra en dos características principales que suelen aparecer en muchos problemas como son los **casos límites** y la **simetría**. Son muchos los problemas que se resuelven mediante la simetría, de la cual no estamos hablando de manera geométrica, sino de manera lógica. La resolución de problema utilizando los casos límites tiene cierto parecido con una de las estrategias que estudiaremos más tarde, se parte de algo que se quiere demostrar y se analizan los casos en los cuales se lleva al límite a la situación que se está enfrentando. En este punto se puede tener un concordancia con lo que se está resolviendo o una incongruencia con lo cual la situación analizada no se cumple.

Técnicas generales: reducción al absurdo o contradicción; inducción matemática y principio del palomar de Dirichlet. Estas técnicas por lo general son muy utilizadas en análisis matemático para llegar a conclusiones o demostraciones de definiciones.

- En el método de reducción al absurdo se parte inicialmente de que la situación que se quiere solucionar no es verdadera, ósea se cumple la negación de la condición, se continua resolviendo el problema haciendo deducciones correctas sobre la negación y en algún momento se llega a un absurdo en lo planteado, confirmado que el punto de partida es falso, por lo tanto es verdadero.

- El método de inducción matemática es uno de los métodos más utilizados en demostraciones matemáticas.
- El principio del palomar de Dirichlet.

Es importante acotar aspectos relevantes que encierran las Geometrías como asignatura que fomenta, desarrolla y potencia un pensamiento evolutivo, racional en la resolución de problemas:

- Los problemas de Geometría entrañan un rol coadyuvante en el aprendizaje matemático, creando pautas en el pensamiento de los estudiantes para resolver situaciones no solo del área científica. Se debe recordar que históricamente la Geometría era la base de todos los procesos demostrativos en Matemáticas, donde muchas ramas del conocimiento de las Matemáticas: el álgebra, el análisis matemático, el cálculo infinitesimal e integral, tienen la manera de enfrentar y plantear de una manera “más fácil” los nuevos problemas matemáticos.
- La escasez de problemas triviales en Geometría, los pocos que se resuelven utilizando una única estrategia y la gran cantidad de aquellos que necesitan la combinación de varios recursos heurísticos, hacen de este campo un caldo de cultivo para generar y estimular en los estudiantes el pensamiento creativo, la voluntad de resolver situaciones cada vez más complejas, y un gran manejo de la frustración al impulsarlos al estudio y empoderamiento de conceptos matemático-geométricos avanzados, para la resolución de problemas.

2.1.1. Caracterización de los problemas no rutinarios

En la investigación se realiza una caracterización de los problemas no rutinarios.

Viar (2007) considera como un buen problema aquel que ha de: *"… representar un desafío para quien lo intenta resolver; no deja bloqueado de entrada a quien lo ha de resolver; tiene interés por sí mismo; estimula en quien lo resuelve el deseo de proponerlo a otras personas y proporciona al resolverlo un determinado placer difícil de explicar pero agradable."*[24]

En la clasificación de problemas no rutinarios se coincide con muchos autores que exponen sus ideas sobre la redundancia que esta denominación encierra, dado que en las definiciones anteriores de problema analizadas, aportadas por autores que han tratado el profundamente el tema incluyendo la definición aportada en esta tesis, se considera problema a aquellas "situaciones" en las que la vía de solución no es obviamente alcanzable a través de una rutina de pasos lógicos o algoritmo, en las cuales se necesita un nivel de experticia en el tema de la problemática a resolver, trayendo posible situaciones de frustración al no ser resueltas, y en dependencia del compromiso de los individuos involucrados en su resolución un grado de satisfacción personal al concluir estas tareas.

El planteamiento que define que un problema es no rutinario cuando una situación exige cierto grado de creación y originalidad por parte del estudiante deja un ambiguo espacio en la definición de problemas, ya que se puede confundir por parte de docentes y estudiantes a las versiones los ejercicios expresados en lenguaje verbal como problemas. Su resolución puede exigirle un verdadero esfuerzo, pero no lo hará, si no tiene razones para ello.

---

[24] Viar, R. (2007). Estrategias en la resolución de problemas. Recuperable en la URL https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CCoQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.unizar.es%2Fttm%2F2004-05%2FEstrategiasRosaViar.doc&ei=SSBjU9CGMIKayASj5oK4Bg&usg=AFQjCNE04bXu0SLZXqX2hy31oB_2a72thg&bvm=bv.65788261,d.aWw

Un problema no rutinario deberá:

- Tener un sentido y un propósito, desde el punto de vista del estudiante.
- Estar relacionado, de modo natural, con objetos o situaciones familiares.
- Servir a una finalidad comprensible para él.

2.2. Fundamentos del proceso de representación geométrica de las transformaciones en el plano

Primeramente es necesario a que se llama representaciones. Cuando hablamos de representaciones se refiere *"… a las imágenes concretas de los objetos y fenómenos del mundo externo y sus propiedades que surgen en la conciencia del hombre"*[25].

Las transformaciones geométricas en el plano han estado presente en la naturaleza desde el comienzo mismo de la vida en nuestro planeta, las hojas de los árboles, la disposición y simetría de los receptáculos de la miel en las colmenas de las abejas, las telarañas, etc. en todas estas maravillas de la naturaleza se puede encontrar una transformación geométrica de manera natural. De igual manera desde tiempos antiguos en la arquitectura se nota la simetría existente en los frisos de las fachadas de los templos, en la disposición de las columnas, y el trazado de las ciudades.

Durante el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano, se hace necesario:

- Ofrecerle las diferentes definiciones a los estudiantes, donde se utilicen los instrumentos tradicionales.

[25] Colectivo de autores. (1988). Psicología. Libro de textos. La Habana: Pueblo y Educación, p. 71.

- Resolver problemas y realizar ejercicios, donde se potencie el trabajo con los instrumentos tradicionales en aras de desarrollar habilidades en su manejo.
- Resolver ejercicios y/o problemas donde se utilicen el Software de Geometría dinámico (SGD), de forma tal que le permita visualizar lo que no es capaz de ver mediante el trabajo con los instrumentos tradicionales.

2.3. Referentes teóricos de las transformaciones en el plano

Son diversas las situaciones en las cuales se hace necesario la aplicación de las transformaciones en el plano para pasar de "contemplar" a "describir"; si bien es cierto que la visualización no garantiza que el estudiante realice validaciones de las propiedades geométricas, es sabido que ayuda al razonar lógicamente acerca de las figuras.

Existen numerosas definiciones sobre transformaciones en el plano, entre las más completas encontramos la citada por Rodríguez (1999) *"… operación u operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura (imagen) de la primitivamente dada. El transformado se llama Homólogo del original…"*[26] y la de Rincón (1994), que considera una aplicación que transforma una figura a otra y que exige determinadas propiedades.

En el presente trabajo se toma ésta última definición general y las siguientes definiciones de traslación, reflexión, rotación y homotecia del libro: "Un recorrido por la Geometría" de Rincón (1994).

[26] Rodríguez, M. (1999). Estudio de las traslaciones y dilataciones a través de mecanismos. Monografía para optar al título de Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.

Clasificación de las transformaciones en el plano

Las trasformaciones geométricas son aquellas aplicaciones o mapeos a partir de operaciones geométricas que permiten generar un nuevo objeto geométrico a partir de un objeto geométrico original, previamente establecido, al nuevo objeto creado se le suele denominar en la literatura relacionada como homólogo del objeto original.

Las transformaciones pueden ser clasificadas tomando en cuenta varias consideraciones relacionadas a orientación, forma del cuerpo geométrico homólogo con respecto al original, entre otras.

Clasificaciones de las transformaciones geométricas según la forma del homólogo con respecto al objeto geométrico original.

Transformaciones isométricas[27]: En este tipo de transformaciones, como su nombre de origen griego lo indica (***iso****-(igual)* ***metría****-(medida)*), la figura geométrica resultante conserva las dimensiones y los ángulos de la figura geométrica primitiva, por lo no que conlleva a una deformación de la figura obtenida.

Transformaciones isomórficas: En las transformaciones consideradas de este tipo la figura homóloga conserva la forma de la figura previa, así como los ángulos, aunque de manera general[28] no hay conservación de las dimensiones, pero si una proporcionalidad con respecto al cuerpo geométrico original. En esta categoría caen la homotecia, la semejanza y las isométricas. (Figura 1).

[27] Estos tipos de transformaciones están estrechamente vinculadas con las transformaciones directas e indirectas y también suelen ser llamado movimientos del plano.
[28] Las transformaciones isométricas son un caso especial de las transformaciones isomórficas.

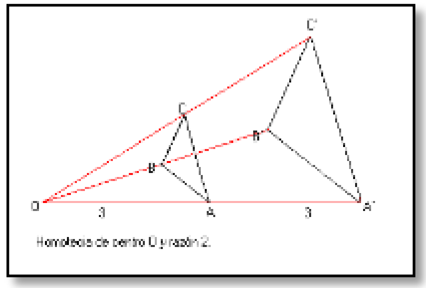


Figura 1. Transformaciones isomórficas.

Transformaciones anamórficas: En este tipo de transformaciones hay un cambio de forma con respecto al cuerpo geométrico previo. En esta categoría se agrupan la homología, la afinidad y la inversión.

Algunas transformaciones tienen la propiedad de ser:

Involutivas: la doble aplicación de la misma transformación genera el elemento original.

Recíproca: la cual transforma la imagen en la figura original.

2.3.1. Traslación

En Geometría, hablando en un lenguaje más riguroso una traslación es definida como una isometría (aplicación o función matemática) entre dos espacios topológicos caracterizados por un vector $\vec{u}$ (direccional), en otras palabras un segmento orientado desde un origen O hasta un extremo o final F, en la cual a cada punto A de una figura o cuerpo geométrico le corresponde un punto A' tal que se cumple:

$$\begin{cases} T_{\vec{u}} \rightarrow R^n \rightarrow R^n \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \\ A \rightarrow A' \rightarrow T(A) = P + \vec{u} \end{cases}$$

En otras palabras una traslación se define como el conjunto de movimientos directos sin cambio de orientación o dimensiones de los objetos desplazados, los cuales son desplazados por el vector direccional dado, y por el carácter de isometría cumple con las siguientes condiciones e igualdades.

Condiciones

El objeto trasladado según el vector direccional es idéntico al objeto inicial.

Hay una conservación de la orientación del objeto inicial.

Congruencia o igualdades

Distancia(A, B) = distancia (A', B') identidad entre las distancias, siendo A y B dos puntos cualesquiera del objeto geométrico.

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB}$$

Supongamos que se tiene una dirección NN´ y una longitud α. Sea además A un punto del plano. El punto A´ es tal que AA´ es paralela a NN´ y AA´ = α. Entonces decimos que A´ es la traslación de A de distancia α y dirección NN´. (Ver Figura 2).

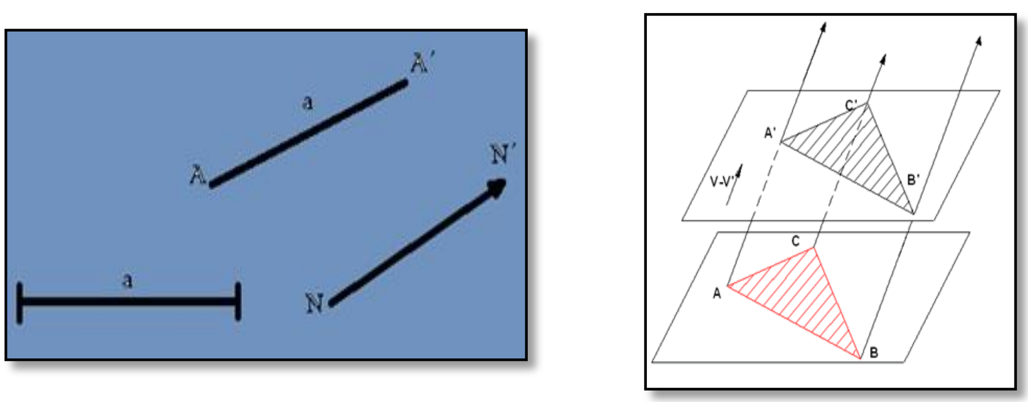


Figura 2. Congruencia o igualdades.

De la misma manera, si F es una figura del plano (triángulo relleno con líneas rojas, Figura 7) y Vi es un punto cualquiera sobre dicha figura, al tomar todas las traslaciones Vi´ del conjunto de los puntos V se obtiene una figura F´ (triángulo subrayado en negro), se afirma decir que F´ se obtiene “deslizando” la figura F una distancia α en la dirección Vi Vi´.

Para realizar una traslación primeramente se necesita una distancia (longitud) y una orientación (vector direccional), seguidamente a cada punto de la figura geométrica se le aplicará el vector trasladándolo hasta el final (extremo), donde se ubica cada punto de la figura original en la misma dirección y distancia sin rotar, voltear, en fin “desplazándole” de tal manera que el sentido de los vértices de ambos objetos será idéntico.

2.3.2. Reflexión

Sean L una recta que llamaremos el eje de reflexión y A un punto a un lado de la recta. Sea A´ el punto tal que el segmento AA´ es perpendicular a L y, si M es el punto de corte de AA´ y L, entonces AM = MA´ (Figura 3). El punto A´ es la reflexión del punto A sobre la recta L.

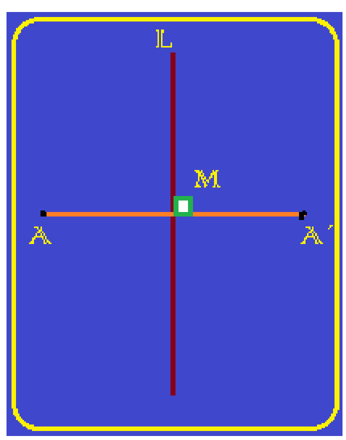


Figura 3. Reflexión de un punto.

Si tenemos una figura F, y reflejamos cada punto sobre la misma recta, el conjunto de puntos obtenidos forman la reflexión F´ de la figura F. en la Figura 4 se ven algunos ejemplos de reflexiones: la circunferencia F se refleja en la circunferencia F´ (el lector puede demostrar que F´ es en efecto una circunferencia), el ∆ABC se refleja en el ∆A´B´C´, etc.

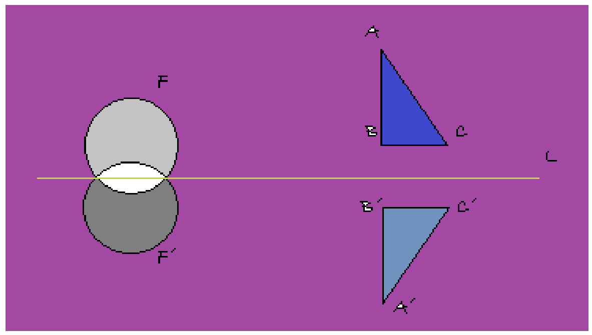


Figura 4. Reflexión de triangulo y circunferencia.

Con regla y compás podemos construir la reflexión de un punto dado sobre una recta dada, trazando una perpendicular a la recta desde el punto y trasladando la distancia de la recta al punto con el compás al otro lado de la recta. Así, es posible construir la reflexión de una recta, hallando la reflexión de dos de sus puntos y análogamente para cualquier figura geométrica.

2.3.3. Rotación

Sean O un punto que llamaremos el centro de rotación, α un ángulo, y seleccionamos una dirección o sentido de rotación (por ejemplo, en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Sea A un punto arbitrario. El punto A´ tal que OA = OA´ y ∠AOA´ = α, medido en el sentido indicado (Figura 5), es la rotación de A con centro en O y ángulo α.

Como en las transformaciones anteriores, si se toman las rotaciones de todos los puntos de una figura F con centro en el mismo punto y el mismo ángulo y dirección, se obtiene una figura F´ que será la rotación de F.

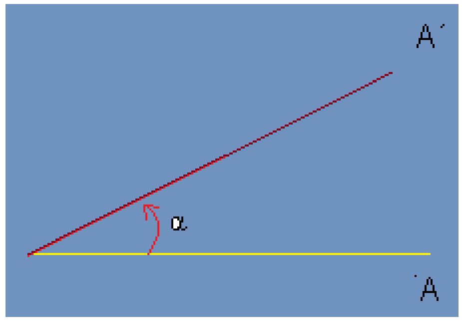


Figura 5. Rotación de A con centro en O y ángulo α.

Teorema I: la suma de dos rotaciones de ángulos α y β respectivamente es una rotación de ángulo α + β si α + β ≠ 360°o es una traslación si α + β = 360°.

2.3.4. Homotecia

Es la última transformación que se verá en este aparte, que a su vez una de las más importantes.

Para realizar una homotecia se requiere un punto O (Figura 6) al que llamaremos el centro de homotecia, y una razón K (un número) que será la razón de la homotecia.

Sea P un punto cualquiera (ver Figura 10), y K un número positivo. Los puntos P´ y P´´ son dos puntos sobre la recta OP, P´ al mismo lado de P con respecto a O y P´´ al otro lado, tales que

$$K = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP''}{OP}$$

Entonces P´ es la imagen homotética u homotecia de P con centro en O y razón K y P´´ es la homotecia de P, con centro en O y razón – K. Así, si F es una figura cualquiera, la figura F´ formada por las homotecias de cada uno de los puntos de F es la homotecia de F.

Teniendo la razón K, el centro O y un punto P, es posible construir el punto P´, homotecia de P. Basta hallar OP´ utilizando el hecho que OP´ = K * OP.

Intuitivamente podría verse que la homotecia, transforma una figura en otra semejante, de tal forma que lo único que cambia es el tamaño.

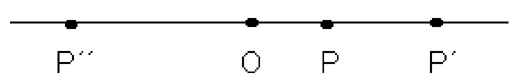


Figura 6. Homotecia de P con centro en O y razón K.

Teorema II: la homotecia de una recta es una recta.

Teorema III: la homotecia de una circunferencia es una circunferencia.[29]

2.4. La visualización y su significado para las transformaciones en el plano

Dentro del marco teórico se considera a la visualización y su significado para las transformaciones en el plano y se asume la definición dada por Zimmermann y Cunningham (1991) al plantear que: *"… la visualización Matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la*

[29] Rincón, G. (1994). Un recorrido por la geometría, capítulo 6. Colombia.

comprensión Matemática"[30]. Se aduce esta definición porque estos autores consideran a la visualización en el plano externo como ilustración y en el plano interno como producto de la imaginación del hombre, cuestiones que son atinadas para el objetivo que se quiere en la tesis.

Siendo coherentes con la definición anterior, en el artículo "Geometría en la resolución de problemas"[31] se destacan las bondades en el aprendizaje de los problemas de geometría, de las cuales exponen cuatro, todas encaminadas a la visualización; aspecto que se potencializa a través de los medios tradicionales, dobleces y programas de geometría dinámica:

- La visualización del problema, que se traduce en aspectos tales como: el problema está plasmado en una imagen que se tiene presente; la figura permite recordar las características de los objetos construidos y el trazado de unas líneas puede arrojar claridad en el proceso de encontrar la solución, aunque existe el riesgo de la pérdida de generalidad al dibujar las figuras.
- La facilidad para compaginar la intuición y el rigor: en los problemas de Geometría se aprecia muy bien esta dualidad. Los procesos matemáticos, como los procesos científicos en general, atraviesan dos etapas: en primer lugar hay una fase "intuitiva" en la que se busca, se imagina, se conjetura sobre cuál puede ser la solución del problema; en esta etapa se puede actuar sin rigor, aunque un dibujo mal hecho, nos conduzca a resultados erróneos. En segundo

---

30 Nápoles y Negrón (s.f). El Papel de la Historia en la Integración de los Marcos Geométrico, Algebraico y Numérico en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Revista virtual, Matemática Educación e Internet. URL: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV4n12003/PapeldeLaHist/pag1.htm

31 Geometría en la resolución de problemas. Recuperable en la URL: http://euclides.us.es/da/investiga/geomresolpro.pdf

lugar está la fase "demostrativa" en la que, por métodos rigurosos, hay que probar que la solución encontrada es verdaderamente la solución del problema; aquí es donde el rigor se hace imprescindible.

- La posibilidad de empezar con casos sencillos: muchos problemas de Geometría pueden replantearse con formas más simples, lo que permite en muchos casos obtener soluciones particulares que pueden generalizarse o aportar ideas para resolver el caso general.
- Consideremos el problema resuelto: la visualización de un problema geométrico permite, en muchos casos, suponer que hemos encontrado la solución y analizar qué propiedades la relacionan con los datos del problema y si éstas son reversibles, es decir, ver si es posible usando estas relacionas hallar la solución a partir de los datos.

En cuanto a tendencias actuales de investigación en geometría y visualización se continúa relatando la realización de investigaciones sobre la influencia de la visualización en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de los diferentes conceptos de la Geometría. Se menciona la importancia de mostrar una figura al estudiante; no mostrárselo solo en un contexto sino realizarle diferentes rotaciones para que pueda observar sus diferentes propiedades.

2.5. Fundamentos de la teoría de comunidad de práctica de Wenger

La teoría de comunidades de práctica de Wenger (1998-2007); es una de las teorías socioculturales. Esta teoría se enfoca en el aprendizaje de los estudiantes y se dirige a cómo la práctica social mejora su desarrollo cognitivo y social. También afirma que en la interacción social, en diferentes roles culturales, y en las ciencias, se origina el conocimiento.

Todo proceso de enseñanza aprendizaje tiene un origen social y donde existen personas experimentadas y aprendiz. En este proceso *"La contribución de una persona más experimentada, como guía durante el aprendizaje es fundamental; esta persona debe brindar apoyo gradual según se van desarrollando las competencias del aprendiz. La interacción entre el individuo que está aprendiendo y la persona más experimentada activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo"*[32]. Aspectos estos que tienen cierta importancia en la teoría de comunidades de práctica, dados por su origen social y sus fines.

El salón de clase es una verdadera comunidad de práctica y constituye un momento de interacción social. En este proceso los estudiantes pueden participan en actividades de grupo, donde polemizan del significado del contenido de las tareas, y como consecuencia aprenden.

Como ya se dijo el aprendizaje es un proceso social de participación, que comprende las experiencias individuales y colectivas de los estudiantes en la sociedad. La teoría de Wenger (1998), es un intento por desarrollar esa perspectiva. Según Wenger (1998), la naturaleza del conocimiento y del aprendizaje se sustenta en cuatro presupuestos:

1) Somos seres sociales. Este hecho, lejos de ser una verdad trivial, es un aspecto esencial del aprendizaje.

[32] Lerman, 1996; Blanton y Stylianou, (2003)

2) El conocimiento es una cuestión de competencia en relación con ciertas empresas valoradas como, por ejemplo, descubrir hechos científicos, ser cordial, entre otras.
3) Conocer es cuestión de participar en la consecución de estas empresas, es decir, de comprometerse de una manera activa en el mundo.
4) El significado es la capacidad de experimentar en el mundo y el compromiso con él como algo significativo, es lo que debe producir el aprendizaje.

La participación social como un proceso de aprender y de conocer, es uno de los componentes necesarios para caracterizar una teoría social del aprendizaje. Según Wenger (1998), estos componentes están dados en: significado, práctica, comunidad e identidad, los cuales se explican a continuación y se muestran en la Figura 7.

1) Significado: capacidad sobre el aprendizaje, y definido como la posibilidad individual y colectivamente, de considerar el mundo, las *experiencias* y la vida como algo que tiene sentido y es valioso.
2) Práctica: son los recursos históricos y sociales, los marcos de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo en la acción.
3) Comunidad: son las configuraciones sociales donde la participación es reconocible como competencia y la persecución se define como valiosa.
4) Identidad: es el cambio que produce el aprendizaje en quiénes somos y de cómo crea historias personales el devenir en el contexto de las comunidades.

Figura 7. Elementos de la comunidad de práctica.

Estos cuatros componentes contextualizado a la resolución de problemas no rutinarios sobre transformaciones en el plano permiten ver que el aporte de los estudiantes propicia la construcción del conocimiento colectivo, a través del intercambio de ideas e información. También promueven que la participación de los estudiantes en las diferentes actividades propicia un aprendizaje robusto sobre las transformaciones en el plano, de forma tal que genera en cada grupo un compromiso mutuo para cumplir con su objetivo.

En esta tesis se aduce que comunidad de práctica es "*… un grupo de personas que comparten un interés, un conjunto de problemas, o una pasión sobre un tema, y quienes profundizan su conocimiento y experiencia en el área a través de una interacción continua que fortalece sus relaciones*"[33]

Según Camargo (2010), plantea que *"… una comunidad de práctica se conforma libremente y por el tiempo que se requiera para llevar a cabo la empresa que se propone, pero también puede existir al interior de una organización social*

[33]Wenger, Etienne; Richard McDermott, William Snyder (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge*. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1-57851-330-8.

institucionalizada. En el segundo caso, probablemente se adapta a condicionantes de la institución tales como los tiempos de iniciación y terminación, la inclusión de nuevos miembros sólo en ciertos momentos o la definición de la empresa por agentes externos".[34]

Para Wenger, McDermott y Snyder (2002), una comunidad de práctica posee cinco fases en su desarrollo: potencial, coalescencia, madurez, gestión, transformación.

En el trabajo de investigación, los niveles de participación son: el coordinador que es el profesor, quien organiza la investigación y contacta a los grupos de trabajo; y el grupo de estudiantes que conforman los grupos de trabajo, que es el núcleo. Para lograr la pertenencia a una comunidad de práctica de clase, donde los estudiantes pueden construir su conocimiento, se deben activar en ellos la participación, la imaginación y la alineación, como se muestra en la Figura 8 (Wenger 2007).

Figura 8. Elementos de pertenencia a una comunidad de práctica.

[34] Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

La participación: se define como la interacción que puede surgir al debatir un tema determinado o sea nace al discutir temas relacionados con el trabajo de investigación referido a las transformaciones en el plano.

La imaginación es un aspecto cognitivo que permite comprender el entorno circundante, o sea percibir más fácilmente el mundo que nos rodea permitiendo llegar a soluciones propias sobre problemas de transformaciones en el plano.

La alineación es el hecho de coordinar y programar actividades, que permitan que los estudiantes se apropien del problema que tienen que resolver y temas planteados en las actividades a desarrollar.

El proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano constituye una verdadera comunidad de práctica, donde se pone de manifiesto la participación, la imaginación y la alineación para lograr la pertenencia a esta comunidad en el aula.

Los tres modos de Wenger (1998) de pertenencia: la participación, la imaginación y la alineación, con sus respectivos componentes son valorados en el ICME 11, en el Topic Study Group 37. También en este estudio se ilustran la relación entre: la identificación y negociabilidad, la participación, y el diseño, que permiten durante todo el proceso de enseñanza un diálogo permanente entre el conocimiento teórico y el práctico. Este proceso favorece la experimentación, búsqueda y exploración del contenido geométrico, también estimula y propicia el desarrollo del pensamiento geométrico, donde los estudiantes se convierten en investigadores y ofrecen estrategias, las cuales se aplican a la resolución de problemas relacionado con las transformaciones en el plano.

La comunidad de práctica en una clase de matemática desarrolla la creatividad, también invita a los estudiantes a dialogar y a realizar verdaderos debates profesionales e enriquecedores, donde se integren las áreas del contenido matemático escolar. El proceso que se desarrolla en las comunidades de práctica contribuye a transformar la enseñanza tradicional y propicia un aprendizaje donde el estudiante tiene un papel activo en la construcción de su propio conocimiento.

Es importante reconocer que *"El conocimiento matemático en el ámbito de estas comunidades es creado, compartido, organizado, actualizado y transmitido dentro y entre ellas. En este espacio se favorece la interrelación entre los estudiantes del grupo, se ajustan sus intereses, se modifica sus relaciones con los demás, ganan una identidad y por ende se desarrollan habilidades matemáticas. Desde las clases de matemática, una comunidad de práctica cobra sentido en la medida que permite la construcción del conocimiento y a su vez multiplicarlo, donde el estudiante posee una participación activa en el aprendizaje, lo cual propicia un aprendizaje para la vida"*[35]*.*Estos elementos son necesarios para el desarrollo de una comunidad de práctica en el aula de matemática referida a la resolución de problemas no rutinarios sobre las transformaciones en el plano.

Camargo (2010) afirma que en las comunidades de práctica en el aula de matemática *"…los estudiantes pueden considerarse a sí mismos capaces de producir matemáticas y hay un reconocimiento público a la posibilidad de desarrollar competencias matemáticas a través de actividades conjuntas y de los roles*

[35] Guzmán, A. (2013). El desarrollo de competencias ciudadanas en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática. Un estudio en el Colegio Distrital Alfonso Reyes Echandía. Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

asumidos. Los estudiantes reconocen el valor de trabajar colectivamente hacia el logro de significados comunes, comparten vías de comportarse, lenguajes, hábitos, valores y herramientas; las clases se llevan a cabo con la participación activa de los estudiantes y, por momentos, se ve que todos están comprometidos en la misma actividad"[36].

En este proceso a través del desarrollo de las actividades se ayuda a los estudiantes a construir un aprendizaje robusto sobre las transformaciones en el plano y resolver diversos problemas vinculados a la vida. También se les propicia reforzar, potencializar y entender mejor esta temática, donde debe aclarar sus dudas, y de esta forma lograr que los estudiantes integren las habilidades de razonamiento, en especial las geométricas.

En las comunidades de práctica en el aula de matemática, específicamente en las clases de geometría, los estudiantes deben de aprender en un proceso de interrelación con sus compañeros y en el grupo. El papel del profesor va estar dado en aportar sus conocimientos, para lograr que los estudiantes aprendan. Todos estos criterios dados en este epígrafe son necesarios para la resolución de problemas no rutinarios sobre transformaciones en el plano en una verdadera comunidad de práctica en el salón de clases.

Conclusiones del capítulo 2

Varios son los investigadores que han trabajado la teoría la resolución de problemas y han ofrecido fases o estrategias para su resolución. En esta tesis se asume el modelo de Guzmán que posee 4 fases: familiarizarse con el problema, buscar

[36] Ibídem, p. 14.

estrategias, llevar adelante la estrategia y revisar el proceso y sus consecuencias. En cada una de estas etapas se proponen preguntas o impulsos heurísticos para la resolución del problema.

Se valora la representación geométrica como una modelación de la realidad objetiva para destacar las relaciones de posición, de orden, de tamaño, así como las transformaciones en el plano. Elementos estos necesarios a tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones en el plano.

Se aborda las definiciones de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) y la homotecia, además de cada una de estas se valoran las propiedades. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones en el plano se hace énfasis primero en la utilización de los instrumentos tradicionales y posteriormente que los estudiantes hayan desarrollado las habilidades necesarias, se debe trabajar con software de geometría dinámica (SGD).

La resolución de ejercicios sobre las transformaciones en el plano son considerados como procesos no algorítmicos, por tal motivo la heurística tiene un significativo papel en la resolución de éstos, pues la idea es plantearle a los estudiantes impulsos que faciliten la búsqueda independiente de soluciones y los lleve al redescubrimiento del contenido geométrico.

Se retoma la utilidad que posee la visualización para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones en el plano, pues esta dado que este proceso el plano externo se refleja como una ilustración y en el plano interno como el producto de la imaginación de los estudiantes.

Se considera la comunidad práctica de Wenger (1998) como un referente teórico y una metodología para la implementación de las actividades, donde la participación, la imaginación y la alineación, son tres elementos importantes para que los estudiantes logren la pertenencia a una comunidad práctica de clase.

CAPITULO 3. DISEÑO DE ACTIVIDADES

En este capítulo se aborda la estructura de las actividades basadas en resolución de problemas no rutinarios, propuestas para el favorecimiento del proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano. Para tal efecto se han diseñado he implementado cinco actividades, cada una de las cuales están compuestas por una serie de ejercicios y/o problemas pragmáticos, matemáticos y de su cotidianidad. Algunos de estos problemas fueron extraídos de los textos de olimpiadas matemáticas, transformaciones geométricas tomo I, XVII y XIX competencias y olimpiadas de matemáticas (México), cuadernillos Pruebas Saber 9º y el resto elaborado por la autora de la tesis; todos encaminados a la aplicación de los conceptos relacionados con las transformaciones en el plano a través de la teoría de Wenger (1998).

3.1. Estructura de las actividades basadas en resolución de problemas no rutinarios sobre las transformaciones en el plano

En la tesis se proponen actividades que se sustentan y desarrollan sobre el marco teórico asumido en el capítulo 2. En cada una de las actividades se refleja:

- **Contenido sobre las transformaciones en el plano**: son aplicaciones que a partir de operaciones geométricas permiten generar un nuevo objeto geométrico al original. Se realiza un análisis sobre el contenido de las transformaciones isométricas (reflexión, rotación y traslación), también de la homotecia, que constituyen como un objetivo importante del grado séptimo.

- **Resolución de problemas**: considerado como una teoría que incita al estudiante a pensar, indagar, explorar, razonar frente a situaciones desconocidas para él, considerando que éste posee las herramientas necesarias para llevar de manera exitosa su resolución. En este proceso el estudiante debe estar motivado y el profesor debe fortalecer dicha motivación como ejercicio pragmático y útil en la optimización de su trabajo. Se coincide con Falk (1980), en que el profesor debe hacerlo a través de *"… una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"*[37].
- **Representación geométrica**: se considera como una modelación de la realidad objetiva para destacar las relaciones de posición, de orden, de tamaño en las transformaciones en el plano.
- **La visualización**: es el proceso de formar imágenes y utilizarlas de manera efectiva para la interpretación o reinterpretación geométrica, descubrimiento y comprensión de los objetos matemáticos. Este proceso en su interrelación le permite al estudiante apropiarse de las transformaciones en el plano.
- **Comunidad de práctica**: referido a un grupo de estudiantes en la clase de matemática que tienen intereses comunes, profundizan sus conocimientos sobre las transformaciones en el plano a través de la resolución de problemas no rutinarios y retadores y explican sus experiencias a sus compañeros. Con el fin de lograr la pertenencia a la comunidad durante la clase es necesarios tener presente tres elementos: participación, imaginación y alineación.

[37] Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.pág 16.

La interrelación que se desarrolla entre estos componentes que forman parte del marco teórico, (Ver Figura 9): contenido sobre las transformaciones en el plano, resolución de problemas, representación geométrica, visualización y comunidad de práctica, en cada una de las actividades, genera un aprendizaje robusto de las transformaciones en el plano en los estudiantes de Básica Secundaria.

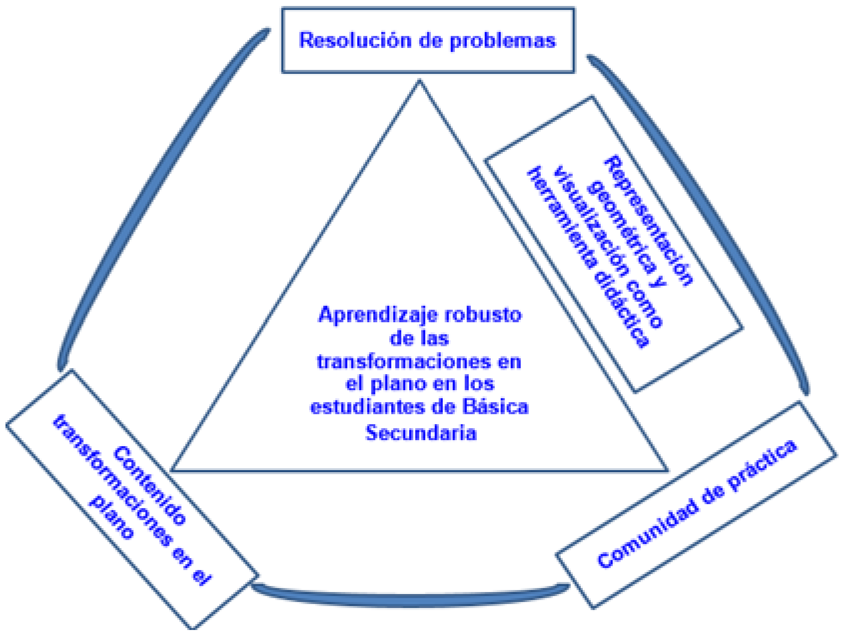


Figura 9. Esquema que refleja los sustentos teóricos en las actividades.

Se busca fomentar en los estudiantes un aprendizaje para la vida, cuyos insumos básicos de partida sean sus pre-saberes, experiencias, curiosidad, imaginación e interés de aprender. Durante la solución de las situaciones dispuestas en cada uno de los cinco instrumentos, a través del trabajo individual y/o colaborativo, se da respuesta a los objetivos de esta investigación.

Cada una de las actividades se estructura en título, objetivo, sugerencias metodológicas, materiales y medios a utilizar, desarrollo de la actividad y evaluación.

3.2. Actividades para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones en el plano

En este epígrafe se describe la intención en el proceso de concepción de cada uno de los cinco instrumentos, que constituyen situaciones contextualizadas teniendo en cuenta que potencializarán la aprehensión de contenidos específicos de las transformaciones en el plano. Este proceso se lleva a cabo a través de la resolución de problemas no rutinarios, donde a los estudiantes se les brindan las herramientas apropiadas para enfrentar estos problemas en la temática que ocupa esta investigación.

Cada instrumento lleva implícito el propósito para que el estudiante, a medida que dé solución, avance en el aprendizaje de las transformaciones en el plano (desde el trabajo con lápiz y papel), haciendo uso de la visualización, representación, creatividad, imaginación, relaciones y análisis de transformaciones, entre otras.

El cuerpo de las respectivas actividades se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en el siguiente orden:

Actividad 1: “Desplazamientos” (Anexo 1).

Actividad 2: “El zoom” (Anexo 2).

Actividad 3: “Reflejos” (Anexo 3).

Actividad 4: “Vueltas y más vueltas” (Anexo 4).

Actividad 5: “Evaluando conceptos” (Anexo 5).

Conclusiones del capítulo 3

Las cuatro actividades y la evaluación (individual y grupal) propuestas, se sustentan en problemas no rutinarios, donde se utiliza la representación geométrica y la visualización con el fin de lograr un **aprendizaje robusto** de la construcción de los conceptos de traslación, homotecia, simetría axial y rotación en los estudiantes.

Con la resolución de problemas de la geometría plana, específicamente sobre la construcción de los conceptos de traslación, homotecia, simetría axial y rotación se fomenta la matematización, la representación, la visualización y las heurísticas, favoreciendo la concatenación de temáticas a su entorno, facilitando la resolución de problemas de índole pragmáticos, matemáticos, geométricos y contextualizados.

CAPÏTULO 4. VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se aborda el contexto de la implementación de las actividades y el análisis de la implementación de las actividades, donde se valora en cada una de ellas el desarrollo de la actividad, la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades. También se refleja los resultados de la encuesta de satisfacción.

4.1. Contexto de la implementación de las actividades

Este trabajo de tipo descriptivo, realiza una propuesta de actividades en respuesta a la problemática planteada; fue aplicada a los estudiantes de la Institución Educativa Colegio “Nuestra señora de la Paz” de Villavicencio-Meta, específicamente al grado 7-1 en la jornada mañana del año académico 2015-2016. Las edades de los estudiantes del grupo oscilan entre los 11 y 13 años, quienes se encuentran en los estratos sociales 1 y 2. Se decidió trabajar únicamente con el grupo 7-1, por ser este grado donde se aborda la temática específica según el plan de estudios.

Como instrumentos aliados se tienen fotografías para el análisis de los procesos abordados por los estudiantes, tanto individual como colectivamente durante la ejecución de las diferentes actividades, y la elaboración de las correspondientes sugerencias o recomendaciones en pro de su aplicación.

4.2. Análisis de los resultados de la implementación de las actividades en el contexto escolar

4.2.1. Actividad 1: “Desplazamientos”

En el análisis de esta actividad se realiza una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes debidamente autorizados por sus padres, (Ver anexo 2), en la resolución de cada uno de los problemas y retos planteados, también se logra captar varias imágenes donde se muestra el trabajo de los estudiantes, (Ver anexo 3 de la tesis).

Desarrollo de la actividad: Se inició con un grupo de 24 estudiantes, quienes muy motivados y por supuesto llenos de curiosidad por la nueva actividad con una nueva profesora. Conformando ocho grupos de tres estudiantes cada uno, dado a que la investigación se sustenta en la teoría de "comunidad de práctica" formulada por Wenger (1998), sin desconocer que es aplicable aquí también la metodología de resolución de problemas, propias De Guzmán (1995). Seguidamente se hace entrega de la guía a cada grupo, aclarándose ante todo que las letras mayúsculas A, B, C… denotan las figuras originales, mientras que las letras A', B', C'… A'', B'', C''…, denotan las figuras transformadas.

El comienzo como tal fue un poco complejo, pues los niños al momento de ojear el contenido de la guía, les generó cierta sorpresa y confusión, creando en ellos algún desconsuelo y prevención, probablemente por no evidenciar plenamente gran parte del lenguaje técnico de la geometría. Al observar la docente la situación, les hace claridad en que lo extenso de la guía obedece especialmente a la cantidad de gráficos que contiene, más no a la cantidad de trabajo que ésta puede exigirles en sí.

Para generar confianza ante la situación se pide a un representante de un grupo leer el contexto de la primera situación, hasta la pregunta del literal **a**. Realizada la lectura, la docente hace aclaraciones generales buscando encontrar en los estudiantes sus preconceptos y obtener sus propios referentes, con el fin de asegurar y despejar sus dudas y con esto generar la confianza necesaria para aislarles de sus preocupaciones.

Como manifestación del reconocimiento de la pregunta, los niños inician a desarrollarla de forma dinámica, en lo que fue bastante notoria la participación, dejándose ver en ellos su gran imaginación y emotividad. Aquí se hicieron evidentes dos tipos de solución. Por una parte los estudiantes tomaron como unidad de medida del segmento, la cuadrícula en la que aparecían las figuras y por otra parte, simplemente toman sus medidas con la regla (Ver Figura 10).

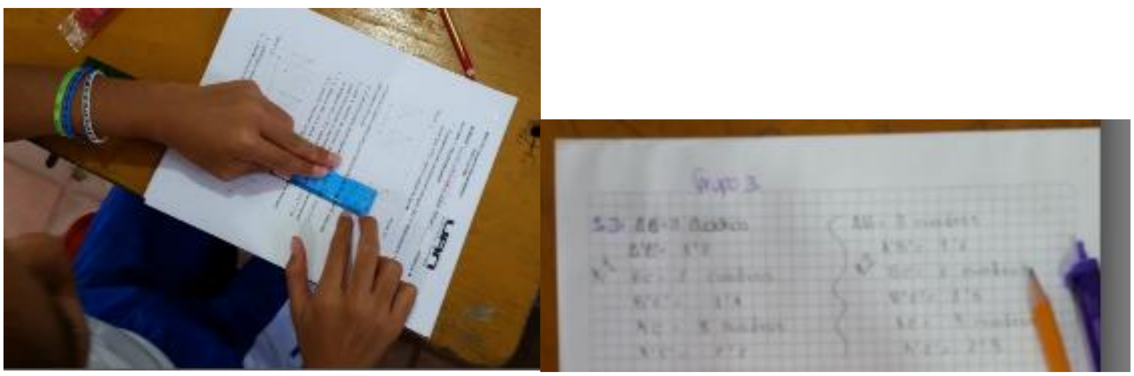


Figura 10. Soluciones al problema 5.b.

Es de aclarar, que al comparar los resultados de las mediciones entre cada uno de los grupos se encontraron pequeñas diferencias en sus respuestas, si se tiene en cuenta el tipo de unidad de medida que utilizaron.

En el literal **b** de la primera situación, los niños al leerla, reclamaron de la docente el que se les diera la total claridad de los términos dados en el paréntesis, para tener seguridad a la hora de desarrollar el ejercicio formulado aquí. Desarrollado el ejercicio los participantes se mostraron muy conformes al no haber encontrado dificultades, aunque la docente, al pasar por los grupos observó, que para los estudiantes no les quedó con suficiente claridad la relación de posición entre el segmento BC y B’C’ de la figura 1.1. La respectiva corrección solo se dio al momento de hacer la socialización general.

Para la situación dos, las preguntas de los literales **a** y **b** no presentaron dificultad al momento de su solución, pues lo relacionaron fácilmente con lo aclarado en el literal **a** de la primera pregunta.

En la pregunta del literal **c**, los niños mostraron dudas acerca de lo referente al significado de la dirección de la flecha; aclarándoseles que ésta indicaba el punto o lugar a donde se debería proyectar o dirigir algo. De esta manera encontraron con facilidad que la distancia entre los puntos de la figura original y la figura traslada eran iguales a la medida de la flecha, la cual, según ellos iba hacia la derecha en forma diagonal y “hacia arriba un cuadrito” (Esto para la figura 1.3).

Para la figura 1.4, indicaron que también la distancia entre los puntos de la figura original y la figura traslada eran iguales a la medida de la flecha, la cual, según ellos iba hacia la izquierda de forma oblicua “hacia arriba un cuadrito”. En la pregunta del literal **d** no hubo dificultad, en razón a que ya habían resuelto uno similar en el literal b de la segunda pregunta.

Para la pregunta tres, los niños no la entendían, por lo que la docente optó por mostrar el segmento AB con un lápiz, haciendo uso de preguntas heurísticas como: ¿hacia dónde indica la flecha PP’ que se debe desplazar el lápiz?; ¿cuántas unidades se debe desplazar?; ¿cómo desplazarías el lápiz? Encontrándose entonces que sus respuestas fueron: la flecha PP´ indica que debe desplazarse hacia la derecha 4 unidades, y se desplazaría corriéndose 4 cuadros sobre la cuadricula dada; a esta última respuesta la docente preguntó: ¿cómo garantizas que se conserve la inclinación que tiene el lápiz? Contestando los estudiantes, luego de unos minutos, que para verificar dicha inclinación, debe observarse que cada extremo del lápiz trasladado se encuentre a igual distancia de los extremos correspondientes al lápiz inicial, lográndose así entonces la respuesta acertada del punto.

Para la pregunta del literal **a** de la situación cuatro, los niños encontraron cierto desconcierto al observar dos flechas y no una como en los casos anteriores, notándose así el no haberse leído la situación indicada en el contexto, a lo que la docente exige, primero que todos deben hacer la lectura pertinente. Luego de acatar la sugerencia observaron que era necesario iniciar desplazando el paralelogramo ABCD, como lo indicaba la flecha EF, para lo que los niños movieron cinco unidades hacia la derecha cada punto del paralelogramo, y de esta forma unirlos después con líneas rectas, obteniendo así el paralelogramo A'B'C'D', el cual se desplaza tres unidades hacia abajo, según lo indicaba la flecha GH, obteniéndose así el paralelogramo A'' B'' C''D''. Se evidencia entonces que los estudiantes no trasladan la figura como un todo sino punto por punto.

Las preguntas de los literales **b**, **c, d** y **e** no presentaron dificultad alguna en su solución**.** En la pregunta del literal **f** los niños unieron con una línea recta cada vértice de la figura original con su respectiva imagen, para así establecer, con la ayuda de la regla, cuántos centímetros se había desplazado; luego indicaron que dicho desplazamiento se había hecho hacia la derecha y en diagonal hacia abajo, dos cuadros.

Para el literal **a** de la situación cinco, los estudiantes se sorprendieron por considerar una respuesta bastante elemental y rápidamente la visualizaron sin alguna dificultad.

Aquí argumentan que el ladrillo simplemente se desplazó dos espacios hacia la izquierda.

En el literal **b**, se encontró que seis grupos contestaron correctamente, pues los otros hicieron su desplazamiento hacia la izquierda correctamente, pero al hacerlo hacia arriba, uno no trasladó el ladrillo seis espacios hacia arriba como debería ser, sino cuatro y el otro desplazó el ladrillo, de dos en dos desde la última posición, y como no le alcanzó la pared para contar hacia arriba, entonces desplazó dos ladrillos hacia la derecha y bajó uno, seguramente para completar los seis que se le pedía (Figura 11).

Figura 11. Soluciones al problema 5, literal c.

En el literal **c**, la mayoría de los estudiantes a partir de la situación dada, hicieron el proceso correctamente (primero indicaron con el esfero el recorrido del ladrillo y luego sumaron de forma vertical cada uno de los desplazamientos), pero como dos de los grupos había desarrollado mal los desplazamientos en el literal **b**, entonces solo cuatro grupos respondieron a la pregunta pertinente de manera acertada (25cm +25cm+5cm+5cm+5cm+5cm+5cm+5cm=80cm). Es de destacar que los otros dos grupos obtuvieron la respuesta 142,5 cm, pues hicieron su recorrido en forma de zigzag, sumando los medios ladrillos en dicho recorrido

(25cm+25cm+5cm+12,5cm+5cm+12,5cm+5cm+12,5cm+5cm+12,5cm+5cm+12,5cm +5cm = 142,5cm), como se puede apreciar en la Figura 12.

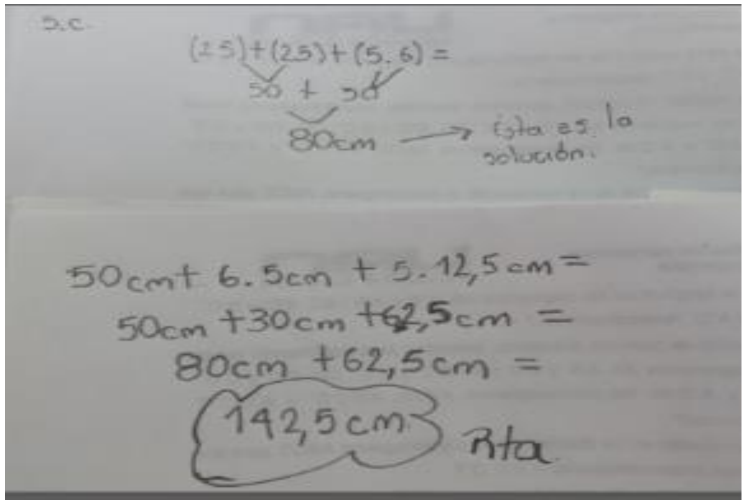


Figura 12. Soluciones del problema 5.c.

En las preguntas formuladas en el literal **d**, los niños encontraron dificultades para comprenderlas. Sólo tres grupos, luego de la orientación dada, a través de preguntas heurísticas tales como: ¿Cuántos ladrillos en total conforman la pared?, ¿y si recurres al coloreado de los ladrillos “iguales” en posición vertical por cada columna?, ¿Cada cuántos lugares aparece un ladrillo exactamente igual a éste?, le recomiendo volver sobre el literal **a** para entender la pregunta, ¿y si la pared fuese más pequeña, se sigue cumpliendo lo que has dicho?, inicia con la construcción de una pared más pequeña, ¿si se realizara la construcción desde “cero” con respecto a éste ladrillo (escoger cualquier ladrillo) como le indicarías a un maestro de construcción el proceso a seguir?, entre otras. Las explicaciones entre ellos, lograron dar solución así: para la primera pregunta manifestaron que las traslaciones en sentido vertical se realizaron teniendo en cuenta que cada uno de los tres ladrillos de la parte inferior y los cuatro de la penúltima fila se trasladaron tres veces hacia arriba. Respecto de la segunda pregunta, las magnitudes en sentido vertical solo fueron posibles de dos en dos. Para la tercera pregunta, los estudiantes encontraron mayor facilidad puesto que ya venían con la experiencia del análisis del sentido vertical, expresando que en horizontal se repiten uno a uno, desarrollando el ejercicio de manera visual; concluyendo así para la cuarta pregunta que las magnitudes de las traslaciones para reproducir la pared original se realizaron en sentido vertical, de a dos en dos y en sentido horizontal, de uno en uno. Otro de los grupos contestaron las preguntas uno y tres; para la primera contaron en zigzag los ladrillos de arriba hacia abajo argumentando incorrectamente que había ocho por cada una de las cuatro columnas, para un total de 32 ladrillos; en la tercera pregunta contestaron correctamente el que las traslaciones se desplazaban horizontalmente uno a uno.

En la pregunta del literal **a,** de la situación seis, los estudiantes no tuvieron dificultad alguna para identificar el diseño de la baldosa empleada, en consecuencia su respuesta fue correcta. Para la pregunta del literal **b,** uno de los grupos no visualizaron que el contorno del corredor tenía medias baldosas, por lo que las contaron como enteras, obteniendo como resultado que necesitaron 27 baldosas y no 20 que era lo que en verdad había empleado.

El desarrollo a la pregunta del literal **c**, no presentó dificultad en su solución, pues no hubo interrogantes durante su proceso, evidenciando luego de una inspección por parte de la docente, que su respuesta era la verdadera.

En un primer momento dos de los grupos por su afán de dar respuesta a la actividad propuesta en el literal **d**, tomaron la hoja formato para dibujo y ampliaron sobre ésta la representación del paralelogramo dado hasta el punto que cubriera la mayor superficie posible de la hoja. Seguros de su procedimiento corrieron a mostrárselo a la docente, quien al ver la solución comprendió que no habían leído a conciencia la actividad y les pidió entonces que la volvieran a leer, pero esta vez sin prisa, así entonces sonrieron y preguntaron, ¿la descripción de los desplazamientos significa que se emplean varios paralelogramos y no uno?, o sea que ¿funciona como en el embaldosado de arriba? a lo que la docente contesta afirmativamente. Los demás grupos no presentaron dificultad para solucionarlo pues desde el principio lo trabajaron como si estuvieran haciendo un piso, manifestando además que los espacios en la hoja se cubrían luego con pedazos de la baldosa o paralelogramo.

La solución a la pregunta del literal **a**, de la situación siete, fue bastante sencilla para todos los grupos gracias a la visualización, tanto así que casi en coro respondieron que el diseño se obtuvo desplazando 7 veces y media la unidad básica dada hacia la derecha, iniciando con la mitad de la unidad básica.

Para el literal **b**, los grupos dieron como ejemplo las cenefas puestas en el contorno de los baños y cocinas, además de los guarda escobas que se colocan en las casas.

Las opiniones para el literal **a**, de la situación ocho, fueron diversas, unos mencionaron que las velas fueron forradas con papel decorativo, otros que los diseños fueron pintados a mano y seguían un patrón, o que simplemente lo había hecho una máquina programada para seguir patrones o diseños.

La pregunta del literal **b**, no representó para los grupos problema alguno, pues la respuesta se obtenía con tan solo observar las velas, así: en la primera vela de izquierda a derecha el motivo básico son cuadrados con 4 rectángulos fucsia: dos sin motivo y los restantes con dibujo donde cada par igual forman una diagonal; en la vela del medio el motivo básico es un rombo mientras que en la última, el patrón también es un cuadrado pero con cuatro corazones deformes y en la primera columna se encuentran las puntas y en la segunda la parte superior del corazón.

En la pregunta del literal **c**, los grupos manifestaron que el "dibujo" se repetiría menos veces, y que si hubiese sido forrado se emplearía menos papel o cinta. Un grupo escribió que si se redujera a la mitad la vela, el motivo decorativo se reduciría también a la mitad. Situaciones conjuntas con respuestas evidentes.

La solución a la pregunta del literal **d,** fue dada inmediatamente por los grupos, tanto así que los representantes de éstos llegaron a la vez para que se lo revisara. Constatando que habían encontrado su respuesta correctamente.

La actividad propuesta en el literal **e**, causó gran alegría en los estudiantes, de inmediato empezaron a trabajar pero de nuevo hubo dos grupos que por el afán de iniciar no se detuvieron a leer la situación completa: el primero forró con papel el recipiente cilíndrico dado, y para decorarlo tomaron distintos estiquer pegándolos al azar, incumpliendo así una de las condiciones, allí estipuladas; el segundo hizo casi todo bien, de no haber sido que tomó como contorno tan solo la parte superior del recipiente (borde). Para lo propuesto en el problema nueve, se le plantea como actividad en casa, para que sea entregado al siguiente día y luego ser socializado.

Para el proceso de socialización en la que se evidencia claramente el cuarto paso, para solucionar problemas, propuesto por Miguel de Guzmán (revisar el proceso y sus consecuencias) y el tercer componente de una comunidad práctica de Wenger (1998) (alineación), nos valimos de un video beam y de un televisor para reforzar la visualización de las gráficas y garantizar así un proceso más rápido y dinámico.

Con miras a fortalecer el objetivo propuesto se formularon una serie de preguntas heurísticas distribuidas a lo largo de las situaciones, con el único fin de establecer al final de la actividad y a modo de conclusión, las propiedades de la traslación trabajadas a lo largo de la guía.

Para la primera situación se preguntó ¿qué hay en común entre la medida de cada par de segmentos correspondientes? a lo que contestaron que eran iguales entre sí.

Para aclarar la relación de posición entre los segmentos BC y B´C´ de la pregunta **1.b**, fue necesario recordarles que cuando los segmentos, líneas, lados, rectas, entre otros están superpuestos (as) también son paralelas, así entonces cuando se prolongan los segmentos en cuestión, es como si uno estuviera sobre el otro, por lo que efectivamente son paralelos. Luego se les preguntó ¿qué hay en común entre la relación de posición de cada par de segmentos correspondientes? a lo que contestaron que todas son paralelas.

Como aquí nuevamente todos los grupos lo habían resuelto, entonces se les preguntó ¿qué tienen en común las longitudes de los segmentos AA´, BB´, CC´ con la flecha PP´? A lo que en coro contestaron que son iguales, seguidamente se les interrogó, y la relación de posición ¿cómo es? Respondiendo "paralelas profe".

Para la situación tres y los literales a, b, c, d, e y f, de la situación cuatro, todos querían pasar a compartir su solución, por lo que se sorteó quien lo haría en cada caso. Además, se formularon preguntas semejantes a las ya realizadas, con respuestas acertadas por parte de los estudiantes, tales como, ¿qué hay en común entre la medida de cada par de segmentos correspondientes? y ¿qué hay en común entre la relación de posición de cada par de segmentos correspondientes?)

Para la quinta situación, la docente se valió de los grupos que habían solucionado correctamente los literales **b, c, y d** para que explicaran a sus compañeros sus análisis, pues es claro que entre ellos emplean términos de fácil comprensión.

Para la retroalimentación de las soluciones dadas a las preguntas de los literales presentes en cada una de las situaciones 6, 7 y 8, fue muy divertida pues varios grupos expresaron sus opiniones enriqueciendo así sus apreciaciones y corrigiendo las equivocadas como lo sucedido con el **6.b,** donde el grupo que había contestado que se habían empleado 27 baldosas exclamaron, “¡qué pena! contamos las medias baldosas de los bordes como si fueran completas”.

Para la actividad propuesta en el noveno problema, las fotografías más representativas correspondían a pisos, tejas, rejas, cintas, encaje y malla de voleibol. Expresando que se les dificultó encontrar ejemplos similares al del florero, aun así los más representativos fueron: pocillos, aros y materas (Figura 13).

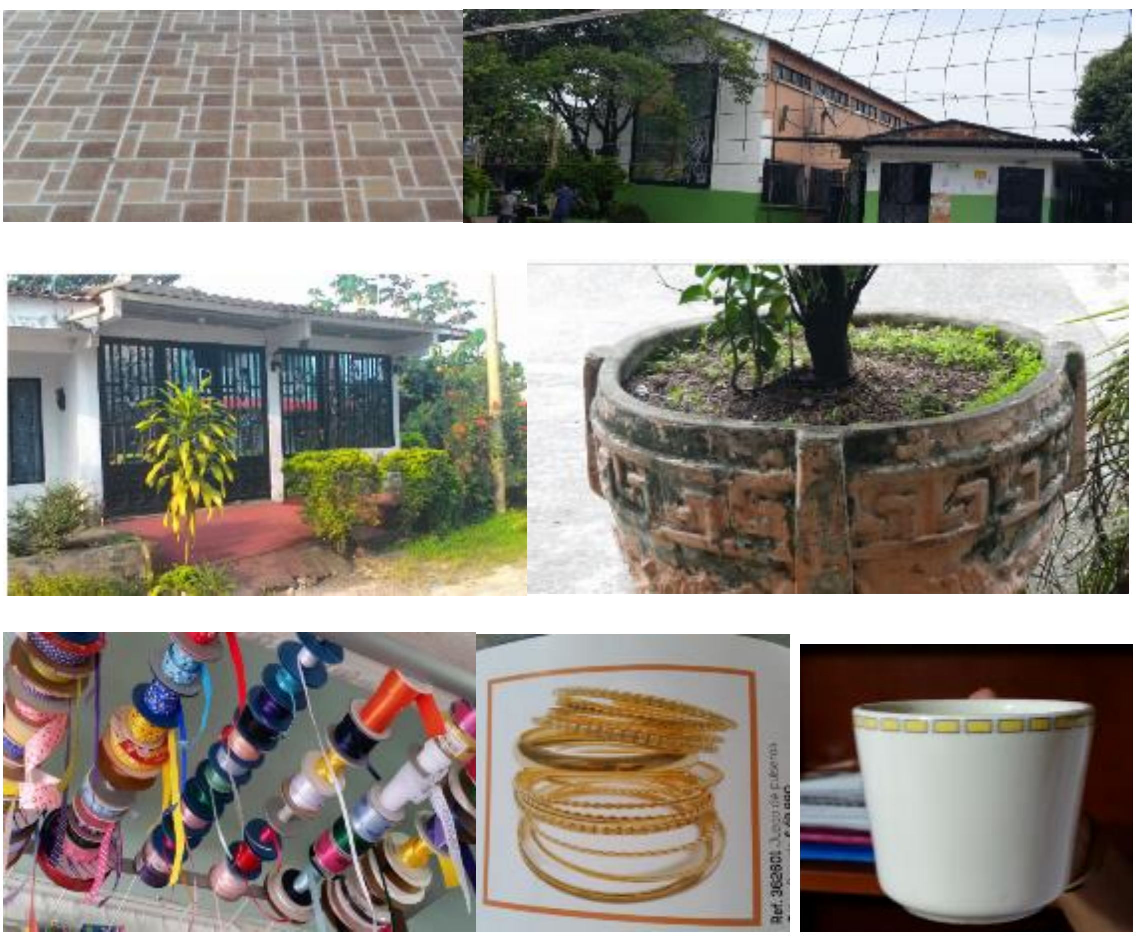


Figura 13. Solución a la actividad 9.

Para finalizar y a modo de conclusión se les preguntó ¿Cómo deben ser los desplazamientos de las figuras?, ¿Qué tienen en común estos desplazamientos?, ¿qué cambia en ellos? A lo que contestaron: son siempre en líneas “derechas” (rectas), pueden ir hacia abajo, hacia arriba, hacia la derecha, hacia a la izquierda o en diagonal, tienen en común que la figura no cambia y todo se “mueve” según las unidades que “muestre” la o las flechas, cambiando únicamente la posición.

A continuación se valora en esta actividad la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes el tener otra educadora en el aula les generó curiosidad. Les llamo la atención que se le facilitara un kit personal de materiales para que cada uno escogiese el que considerara más adecuado para trabajar. La docente solo cumplirá el papel de guía aclaradora, dado a que en dicho kit el estudiante encuentra todo lo necesario para resolver los problemas planteados.

Logros: la experiencia de trabajar en equipo desde el inicio de la actividad evidencio la cooperación entre los estudiantes, pues siempre se mostraron muy dispuestos a expresar lo realizado y en algunos casos corregirse entre sí mismos. Además, el disponer de materiales para uso personal ayudó a que el estudiante se atreviera a experimentar cada posible solución que se le ocurriera hasta lograr dar respuesta a lo solicitado. Es una acción arriesgada que al mismo tiempo generaba mucha confianza en el estudiante. Muestra de estos logros se reflejan en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta de Fotos de actividades y dentro de ella evidencia de la actividad 1.

Dificultades: la poca capacidad de comprensión lectora de los estudiantes hizo que el desarrollo de la actividad fuese más dispendiosa; en algunos apartes de la actividad, el afán por terminar rápido llevó a unos pocos estudiantes a copiarse de la solución dada por sus compañeros de otros equipos. Por último, los estudiantes al no estar acostumbrados a desarrollar ese tipo de problemas, se mostraron ciertamente agotados por las extensas jornadas de trabajo.

4.2.2. Actividad 2: "El zoom"

En el análisis de esta actividad se realiza una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas y retos planteados, también se logra captar varias imágenes donde se muestra el trabajo de los estudiantes (Ver anexo 4 de la tesis).

Desarrollo de la actividad: En razón a que esta actividad inició y se desarrolló durante el cese de actividades por el paro nacional del magisterio, seis estudiantes dejaron de asistir; sin embargo los diez y ocho restantes se mantuvieron durante todo el proceso, con quienes en este momento fueron distribuidos en seis grupos de tres integrantes.

La primera parte de la actividad (trabajo en grupo) se llevó a cabo en la sala de sistemas para tener a la mano la proyección de la actividad, así en caso de presentarse duda en alguna situación (gráfica o pregunta) fuese más fácil encaminarlos a su comprensión, a través de preguntas heurísticas. Apenas recibieron la guía por grupo la ojearon y exclamaron: "es parecida a la anterior", situación que los alegró y motivó a continuar.

Las preguntas formuladas en los literales **a y b** de la primera situación, no presentaron inconvenientes en su solución, por el contrario manifestaron que eso era similar a lo realizado en la guía anterior por lo que les fue muy fácil desarrollarlas.

En cuanto al literal **c**, la dificultad estuvo solo en cuanto confirmaron a qué se refería la palabra "cociente", luego se observaron dos resultados: quienes dividieron las longitudes de cada par de segmentos correspondientes dados en el orden en que aparecían su resultado fue dos, y quienes lo hicieron al contrario su resultado fue 0.5, eso sí igual para todos los tres cocientes. Ejemplo: OC **/** OC´ **=** 5cm **/** 2.5cm **=** 2cm y OC´ **/** OC **=** 2.5cm **/** 5cm **=** 0.5cm. Para la figura 1.2.

La pregunta del literal **d,** fue comprendida por todos, aunque se demoraron en darle solución ya que no recordaban cómo se ubicaba el transportador para medir los ángulos por lo que la docente tuvo que intervenir y dar una asesoría al respecto, al final todos lograron respuestas acertadas, concluyendo que la relación que existe entre cada par de ángulos correspondientes es que son congruentes.

Casi en coro los estudiantes exclamaron para dar respuesta a la pregunta del literal **e** "el primer triángulo es más grande que el segundo" a lo que la docente respondió y ¿Cuánto es más grande?, respondiéndole, cómo así profe! toca medir también? a lo que les contestó, sí.

Luego de unos minutos volvieron a exclamar, profe! ¡el triángulo pequeño es la mitad del grande! y sin pedir permiso uno de ellos pasó al tablero a indicar en las figuras que se encontraban proyectadas en éste, que en la figura 1.1 por ejemplo, el segmento AC **=** 1.2cm, mientras que el segmento AC´ **=**2.4; el segmento BA **=**1.85cm mientras que el segmento B´A´**=** 3.7cm y el segmento BC = 2cm mientras que el segmento B´C´ =4cm.

Lo solicitado en el literal **f**, fue de fácil comprensión para los estudiantes, pues ninguno preguntó nada y al pasar por los grupos se observó que lo hacían bien, tanto así que se percataron mediante el proceso de la visualización que en la primera figura de la situación la figura original era el triángulo pequeño mientras que para la segunda la figura original era el triángulo grande.

En el literal **a** de la situación dos, la respuesta fue de inmediato: cuatro grupos contestaron, profe! los tres puntos pasan por la misma recta, y los otros dos grupos complementaron, son colineales. En cuanto a la segunda pregunta del mismo literal, trazaron la recta y dijeron que sucedía lo mismo.

Para dar respuesta a la pregunta formulada en el literal **b**, los estudiantes en cada grupo se dispusieron a medir los segmentos solicitados y encontraron los segmentos OA y AB miden lo mismo (1.8cm) al igual que los segmentos OA´ y A´B´, que también miden lo mismo (3,6cm); por otro lado también 4 de los grupos argumentaron que el segmento OA´ era el doble del segmento OA, así como que el segmento AB era la mitad del segmento A´B´.

La operación matemática para dar respuesta a la segunda pregunta del literal **c,** fue rápidamente realizada pero en cuanto ¿a qué conclusión puede llegar? Los niños expresaron que los resultados de las divisiones eran iguales por lo que aumentaban lo mismo, a lo que la docente respondió que sí, y que eso se podía expresar como que cada par de segmentos aumentaban de forma proporcional.

“Son paralelos en cada par de segmentos”, respondieron los estudiantes en cuanto a la relación de posición que se les preguntaba en el literal **d.**

La pregunta del literal **e** fue considerada por todos los grupos como de muy fácil solución, pues con solo visualizar la figura 1.3 se podía concluir que los ángulos eran iguales y que median 90°, es decir, eran rectos.

En la pregunta del literal **a**, rápidamente los estudiantes en cada grupo concluyeron luego de visualizar la figura, que la relación de posición entre cada par de segmentos correspondientes, era paralelo y lo confirmaban entre ellos.

La pregunta del literal **b**, no presentó dificultades en su solución pues ya estaban familiarizados con este tipo de situaciones.

Los estudiantes al leer la pregunta del literal **c**, argumentaron que era igual a la contestada en la **c** de la primera situación, que estaba fácil.

En el literal **d**, nuevamente la visualización juega un papel importante para dar solución a su pregunta, y así lo sintieron los estudiantes al expresar que a simple vista se veía que el cuadrado grande (cuadrado A´B´C´D´) era el cuádruplo del pequeño (cuadrado ABCD) pues cada lado del cuadrado grande media 4 cuadraditos, mientras que cada lado del cuadrado pequeño media dos cuadritos, indicándolo en la imagen que se encontraba proyectada en el tablero.

Aquí en el literal **e**, los niños primero se cercioraron de qué era área, y cómo se hallaba para un cuadrado, luego sí 3 grupos dieron el valor numérico así: área del cuadrado pequeño o ABCD = 2cm x 2cm = 4cm^2 y el área del cuadrado grande o A´B´C´D´ = 4cm x 4cm = 16cm^2 , mientras que los otros tres grupos simplemente sumaron los cuadritos que cubrían la superficie de cada cuadrado, obteniendo para el cuadrado grande o A´B´C´D´ un área igual a 16 cuadraditos y para el cuadrado pequeño o ABCD un área igual a 4 cuadraditos. De lo anterior podemos afirmar que los tres primeros grupos hicieron caso omiso a la sugerencia dada y se limitaron a aplicar el algoritmo matemático (Figura 14).

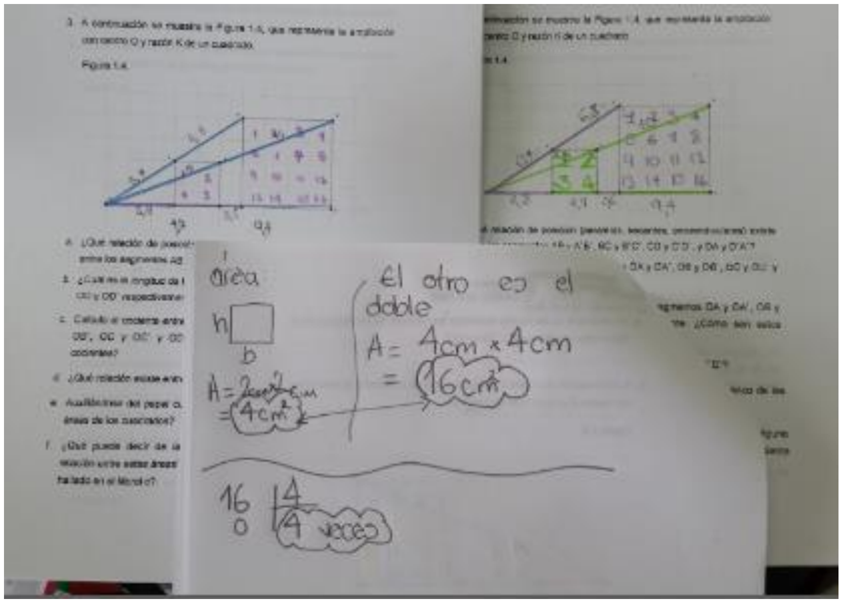


Figura 14. Solución al punto 3.e.

Las tres preguntas planteadas en el literal **f**, fueron contestadas con rapidez y acertadamente en cada uno de los grupos; para la primera y segunda pregunta argumentaron que el área del cuadrado grande era cuatro veces el área del cuadrado pequeño ya que 4 x $4cm^2$ = $16cm^2$, así como que el cuadrado pequeño "cabía" según ellos, exactamente 4 veces en el cuadrado grande. En cuanto a la tercera pregunta contestaron que sí, ya que el lado del cuadrado A´B´C´D´ era 2 veces el lado del cuadrado ABCD.

La solución a la pregunta del literal **g**, no se hizo esperar, argumentando que al igual que en la pregunta **1.f** cambia el tamaño de la figura pero no su forma ni los ángulos (refiriéndose a la medida), y los lados de la figura dada aumentan o disminuyen en la "misma cantidad", a lo que completé diciendo que aumentaban o disminuían en la misma proporción.

En el literal **h**, al igual que en el anterior literal, contestaron acertadamente la pregunta pero no con los términos pertinentes, pues manifestaron que lo grande (la ampliación) o pequeño (reducción) de la circunferencia en comparación a la dada, dependía de la amplitud del compás (figura 15).

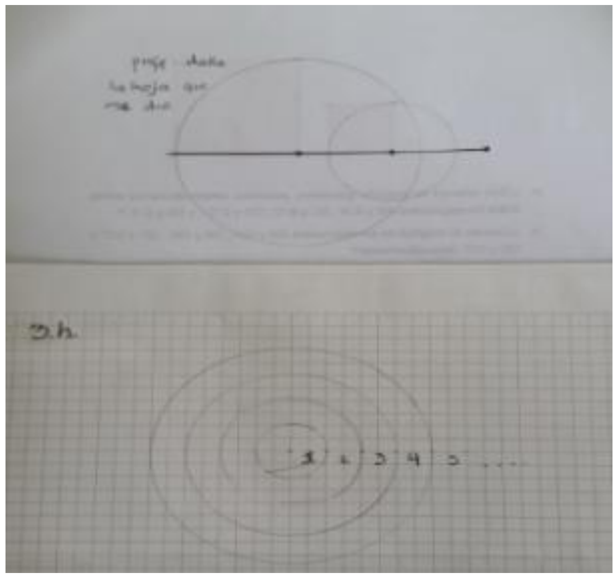


Figura 15. Solución 3.h

Los literales **a** y **b** de la situación cuatro, fue de fácil solución para cada uno de los grupos, pues ya estaban familiarizados con este tipo de preguntas ya que se han formulado en otras situaciones planteadas en la guía.

Para el literal **c**, tampoco se presentó dificultad en su solución pues ningún integrante de algún grupo preguntó algo. Lo único que se observó al pasar por los grupos fue que confirmaban el resultado de la división con ayuda de la calculadora del celular.

La relación existente para la pregunta del literal **d,** fue que para 2 grupos las medidas de los lados del triángulo del medio, (triángulo A´B´C´) equivalía a la mitad de las medidas de los lados correspondientes del triángulo grande (triángulo ABC), y las medidas de los lados del triángulo pequeño (triángulo A´´B´´C´´) equivalía a la mitad de las medidas de los lados correspondientes en el triángulo del medio, así para el resto de los grupos las medidas de los lados del triángulo del medio era el doble de las medidas de los lados correspondientes en el triángulo pequeño y las medidas de los lados del triángulo grande el doble de las medidas de los lados correspondientes en el triángulo del medio. Para el caso es lo mismo.

La respuesta a la pregunta del literal **e**, fue afirmativa, porque si se une con una línea cada par de puntos (vértice) correspondientes y se prolonga el punto donde se unen las tres (interceptan) es a lo que llamamos centro, y de ahí lo único que se debe hacer es dividir la longitud del segmento OA´´ entre la longitud del segmento OA.

Fue muy gratificante leer lo escrito en cada grupo a la hora de dar respuesta a la pregunta del literal **a** de la situación 5, pues se evidencia que tienen la idea de lo que sucede en dicho movimiento o transformación en el plano.

El literal **a** de la situación seis, fue contestada de inmediato, incluso antes de ser registrada la respuesta en la hoja, así unos grupos contestaron C, B, D, A y E, porque los ordenaron de mayor a menor, mientras que los otros manifestaron que era E, A, D, B y C, si se ordenaban de menor a mayor.

La pregunta del literal **b**, no fue solucionada por algún grupo, por más que realizaron varias operaciones entre los datos dados, sin embargo cuando leyeron la actividad propuesta en el literal **c**, se percataron que en efecto al solucionar ésta, le estarían dando respuesta a la anterior que curiosamente respondieron en cuestión de minutos, 2 grupos lo ordenaron de menor a mayor (3,5cm; 7cm; 10,5cm; 14cm, y 17,5cm), ubicando su punto de centro de homotecia hacia la izquierda, mientras que los restantes lo ordenaron al contrario (17,5cm; 14cm; 10,5cm; 7cm y 3,5cm), indicando el punto de centro de la homotecia hacia la derecha. (Figura 16).

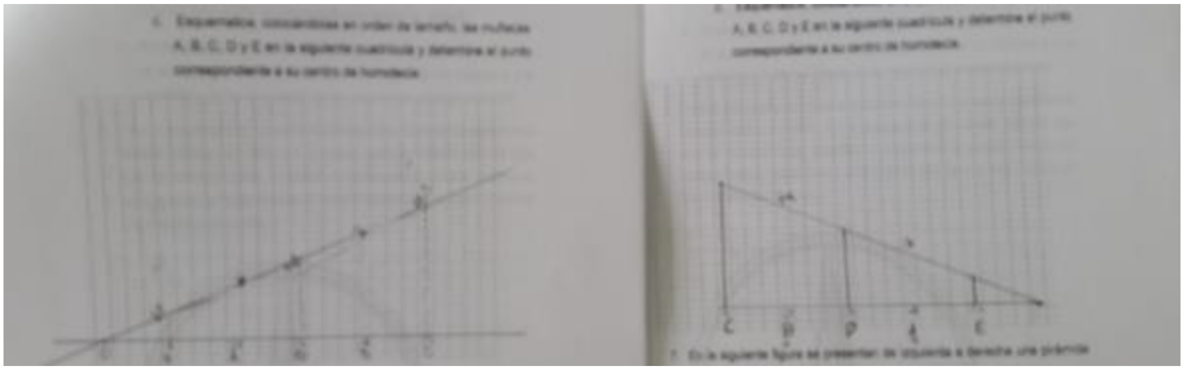


Figura 16. Esquematización 6.c.

Para dar respuesta a las preguntas del literal **a** de la situación siete, los estudiantes tomaron los dos cubos, ubicando uno encima del otro, luego partieron el alambre dado en 4 pedazos de gran longitud y lo ubicaron a lo largo de los vértices superiores de cada uno de los cuatro lados verticales del cubo grande pasando por los vértices superiores de los lados del que estaba encima y prolongándose hasta que se encontraran los cuatro pedazos de alambre que hacen las veces de recta en el punto buscado, es decir, el centro de homotecia. Argumentaron que solo había ese.

En el literal **b**, los estudiantes tomaron los cubos más pequeños y el alambre, y repitieron el proceso descrito anteriormente para encontrar el único centro de homotecia existente que se localiza en la parte de adentro en toda la mitad de los cubos concéntricos y en cuanto a la razón de semejanza, expresaron que aumentaba cada tres centímetros.

La solución a este literal **c**, fue fácil para ellos pues comprendieron tan rápidamente lo que debían hacer que se valieron de la pirámide presente en la gráfica, para argumentar que efectivamente las soluciones dadas en los literales **a** y **b** coincidían con sus representaciones.

La situación planteada en el punto ocho no presentó problema alguno en su solución.

Para el punto 10, fue fascinante escuchar a algunos estudiantes comentar que iban a escoger como ejemplo de homotecia: 1. tomar una foto, a las fotos iguales pero de distinto tamaño que aparecen expuestas en foto Herrera; Bolitas de icopor de diferentes tamaños. Un grupo trajo como ejemplo además de los descritos la foto de una gota de agua al caer a una poseta y juguetes (Figura 17).

Figura 17. Solución actividad 10.

Para la socialización, hicimos nuevamente uso del video beam garantizando una mayor efectividad en el proceso, como se muestra a continuación para algunas preguntas en cada situación:

Como en los literales: **a** de la primera, tercera y cuarta situación, además del **d** de la segunda situación se preguntaba sobre la relación de posición de los pares de segmentos correspondientes existentes en cada caso, entonces se puntualizó en el tipo de respuestas que se dio en cada caso y se llegó a la conclusión que en todos los grupos la respuesta es que eran paralelos.

En cuanto a lo solicitado en el literal **f**, sobre las cosas o propiedades que cambian o no en las figuras 1.1 y 1.2, las opiniones de cada grupo enriquecieron la respuesta hasta concluir que cambia el tamaño de la figura pero no su forma, ni los ángulos pues siempre serán congruentes, así mismo los lados o segmentos homólogos o correspondientes de la figura aumentan o disminuyen según su razón o factor, donde si es decimal significa que la figura dada se reduce, pero si es entero positivo aumenta la figura dada.

La docente pide a los grupos que contestaron acertadamente el literal **b** de la situación dos, que mediante la visualización de la figura 1.3 muestre a sus compañeros que no lograron establecer las comparaciones solicitadas las obtenidas por ellos.

La docente en el literal **f** de la situación tres, añadió que la medida de cada segmento del cuadrado ABCD correspondía a la mitad de la medida de los lados o segmentos que conforman el cuadrado A´B´C´D´.

Para el literal **h** de la situación tres y luego de una nutrida participación se concluye que las dos formas de dar solución consisten en: fijar el compás y trazar una circunferencia pequeña, luego abrir el compás el doble del radio anterior fijándolo nuevamente en el centro de la circunferencia anterior y trazar la nueva, luego se repite las veces que se quiera y así se obtiene la ampliación (de la más pequeña a la más grande) y la reducción (de la de afuera que es la más grande hasta llegar al centro que es la más pequeña. Para el literal b los estudiantes dan una respuesta parcial expresando que para construir la circunferencia no era necesario.

En el literal **a** de la situación cinco, los niños entre si enriquecían la definición que hasta el momento habían construido sobre lo que es una homotecia, concluyendo entre todos quela homotecia es aquella en la que se cumple:

- La distancia del centro a cada vértice y su homólogo aumenta o disminuye lo mismo (proporcional).
- Las divisiones deben dar igual (razón).
- Las áreas cambian.
- Siempre hay un punto que se une con todos los vértices de las figuras (centro).
- Las figuras y sus imágenes tienen la misma forma pero pueden ser más grandes o más pequeñas (semejantes).
- Las medidas de los ángulos siempre es la misma en la figura y su imagen.

En la actividad propuesta para el punto ocho los grupos describieron su procedimiento así: se debe medir desde el centro del logo hasta cada punta de las flechas, las que median igual, lo dividieron en tres, porque decía la tercera parte y al obtener el resultado (1,4cm) lo midieron desde el centro sobre cada flecha y por ultimo con el compás trazaron una circunferencia al interior de la original con el mismo centro (concéntrica). Durante este último trazo, dijeron tener dificultades con el manejo del compás por lo pequeña que era la circunferencia resultante.

Para la situación nueve, se solicitó a uno de los estudiantes, quien dio solución al literal **A,** que indicara el proceso realizado en la imagen proyectada en la pizarra;

para que a partir de ahí y a través de preguntas heurísticas los estudiantes se percataran que las respuestas a las preguntas formuladas en los dos literales (a y b) se daban simultáneamente durante la construcción. El punto dado permitía encontrar el diámetro de la circunferencia, que debía ser trazada en la reducción, mediante el trazo de rectas tangentes (toca en un solo punto a la circunferencia) a la circunferencia original.

Para la situación 10 se le pidió a un representante de cada grupo que pasara al frente a compartir con sus compañeros uno de los ejemplos que habían traído y por qué había sido escogido; para lo cual, recurrieron a las conclusiones expuestas en el literal a de la situación cinco.

A continuación se valora en esta actividad la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades.

Motivación por el aprendizaje: el patio salón como lugar de trabajo para el desarrollo de las situaciones 6 y 7, fue una gran elección ya que el amplio espacio, ventilación e iluminación suficientes generaron un gran ambiente para el trabajo a realizar al igual que la disposición de los participantes al encontrarse en un ambiente diferente al aula y además contar con la disponibilidad de materiales suficientes.

Logros: Se encontraron entre los importantes:

- Reconocieron las propiedades que permanecen y las que no permanecen constantes.
- Dieron solución a la totalidad de la actividad con muy pocas intervenciones del docente.

- Se observó dinamismo en la solución de los problemas con aportes concretos por parte de cada integrante del equipo de trabajo.
- Relacionaron la temática propia de la actividad con la realidad de su entorno.
- Establecer mejores relaciones interpersonales al haber compartido la actividad de forma cooperante.

Muestra de estos logros se reflejan en el CD que se anexa a la tesis, en la carpeta Fotos de actividades y dentro de ella evidencia de la actividad 2.

Dificultades: la más notoria, el no manejo del algoritmo de la división (decimales); el manejo inadecuado del compás; deficiente detenimiento en la observación del seguimiento de los procesos en los problemas no rutinarios y, el asombro por encontrar un material novedoso con el que deberían trabajar, los llevó a alejarse por instantes de aquello que en realidad tendrían que desarrollar.

4.2.3. Actividad 3: "Reflejos"

En el análisis de esta actividad, se realiza una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas y retos planteados, igualmente se logra captar varias imágenes donde se muestra su trabajo (Ver anexo 5 de la tesis).

Desarrollo de la actividad: Para esta actividad nuevamente se trabajó con los 18 estudiantes en forma grupal, desarrollándose con mayor fluidez en la comprensión de lo solicitado en cada literal para cada situación.

Para el literal **a** de la situación uno, los estudiantes, en cuatro de los grupos, encontraron, con ayuda de la regla, las distancias requeridas, concluyendo que dichas distancias eran iguales, dando así respuesta a la pregunta, y como es común que entre ellos comenten sus respuestas, entonces fue interesante ver cómo los integrantes de los dos grupos restantes le mostraban a sus compañeros, que sin necesidad de medir, se podía visualizar claramente que las distancias eran iguales, pues si se dividía cada gráfica por la recta **r** dada para cada una los triángulos de las dos primeras figuras y el cuadrado de la tercera, coincidían exactamente en cada caso.

En el literal **b**, los estudiantes argumentaron que tanto el segmento AA´ como los demás que unen la punta (vértice) de la figura original con la punta (vértice) correspondiente de la imagen, forman con la recta **r** en cada caso una perpendicular, ya que forman ángulos de 90°.

Para dar respuesta a la pregunta del literal **c**, los estudiantes sin excepción debieron consultar primero, qué era mediatriz y bisectriz, y una vez aclarado estos preconceptos contestaron que en todas las figuras la recta **r** con respecto al segmento AA´ y a los otros pares de puntos, es una mediatriz.

Para las preguntas del literal **d**, los grupos manifestaron que la recta **r** sí influía en la imagen obtenida en cada caso, y que se encuentra en la mitad de la distancia que separa la figura original de la imagen (Ver Figura 18).

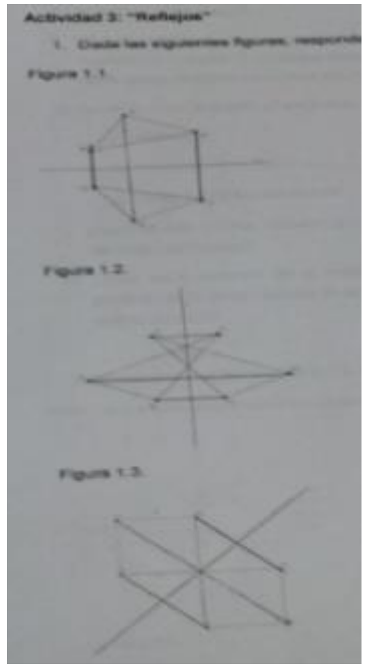


Figura 18. Procesos de la situación 1.1.

En la pregunta uno del literal **a** de la situación dos, los estudiantes no presentaron dificultad para solucionarla, argumentaron claramente que las longitudes eran iguales; sin embargo, para dar respuesta a la pregunta dos, se presentó el inconveniente, de que sin detenerse a observar las figuras respondieron, que cada par de segmentos correspondientes eran paralelos, tal como sucedía en los movimientos anteriores. Respuesta equivocada, que fue aclarada y corregida entre ellos mismos, a partir de preguntas heurísticas formuladas por la docente, en la socialización.

La respuesta a la pregunta del literal **b**, fue un ¡sí! contundente en todos los grupos; respuesta obviamente correcta.

La pregunta del literal **c**, tampoco presentó para los estudiantes dificultad, pues como bien lo argumentaron, no es necesario recurrir al transportador para afirmar que los ángulos miden 90° (ángulos rectos) en ambas figuras, ya que sí se podía encontrar la respuesta por simple observación.

En el literal **d**, 4 grupos expresaron que la figura imagen respecto de la recta **r**, se veía como si se hubiese volteado la figura original, tal como cuando nos vemos al espejo. Los dos grupos restantes no opinaron.

El literal **e**, fue contestado de forma inmediata y acertadamente, tanto que antes de escribir la respuesta en sus respectivas guías, algunos grupos exigían ser escuchados de primeras, exclamando “profe! No cambia la figura, ni la medida de sus lados, ni la medida de sus ángulos, por lo que el tamaño es el mismo, lo único que cambia sin embargo es que la figura imagen queda volteada”.

Para dar respuesta a lo solicitado en el literal **a**, de la situación tres, cuatro grupos doblaron la hoja por donde estaba la recta r y calcaron el segmento al otro lado de ésta. Los otros grupos sin embargo, valiéndose de la cuadrícula, contaron cuántos cuadritos había de la recta al punto B y lo ubicaron al otro lado de ésta a igual distancia, luego repitieron el mismo procedimiento para el punto A.

Para realizar la actividad propuesta en el literal **b**, los mismos grupos emplearon el procedimiento descrito en el literal anterior (Ver Figura 19).

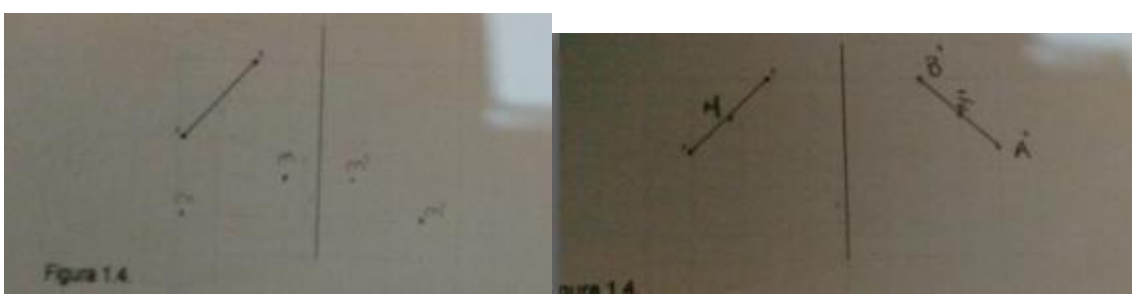


Figura 19. Soluciones a los literales a y b ce la situación 3.

La pregunta del literal **a**, de la situación cuatro no fue de difícil solución para los estudiantes, por el contrario, el tener que contar cuántos cuadritos cubría la superficie de cada figura fue como un juego para ellos (Ver Figura 20).

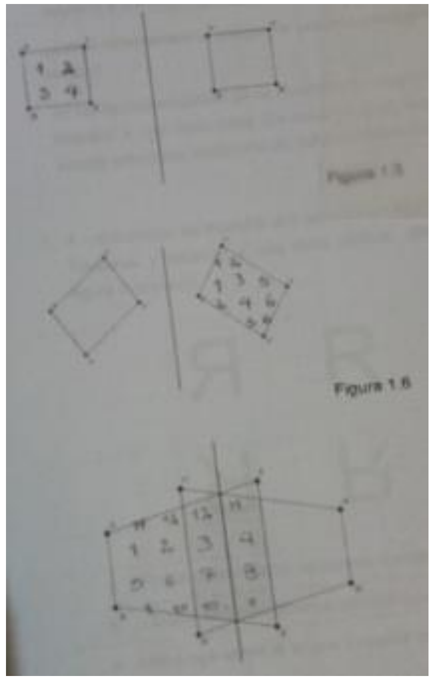


Figura 20. Procesos de algunos literales del problema 4.

Para dar respuesta a la pregunta del literal **b**, los estudiantes se valieron de lo contestado en el literal anterior, para argumentar que eran iguales en cada una de las figuras (1.5; 1.6 y 1.7).

Sí, fue la respuesta que los estudiantes dieron a la pregunta del literal **c**; y al preguntarles el por qué contestaron de inmediato de esta manera, afirmaron el que, era claro, ya que las figuras no cambiaban de tamaño.

En la pregunta del literal **d**, tan solo 3 de los grupos manifestaron que luego de doblar la hoja a lo largo de la recta **r**, ellos calcando la circunferencia al otro lado, encontraban la solución.

En la pregunta del literal **e**, los niños puntualizaron como características de las figuras planas las siguientes: es del mismo tamaño de la figura original, pues la medida de sus lados y ángulos son iguales, pero se encuentra volteada como cuando nos vemos al espejo.

En el literal **a** de la situación cinco, las respuestas fueron diversas: dos grupos manifestaron que la figura original era la ere que se encontraba al lado izquierdo de la parte superior de la cuadrícula, y que de ahí la reflejaron una vez hacia abajo, dada esta posición, la reflejan una vez hacia la derecha y finalmente una vez hacia arriba. Otros dos grupos, toman como figura inicial la ere que se encuentra al lado derecho del diagrama, a partir de la cual manifiestan en el siguiente estar reflejada hacia la izquierda, para luego reflejarse a partir de aquí una vez hacia abajo y finalmente de aquí reflejarse una vez hacia la derecha. Los dos grupos restantes toman también como figura inicial la ere ubicada en la parte derecha superior del diagrama, pero manifiestan que su primera reflexión se da hacia abajo, para luego en un segundo paso, a partir de aquí reflejarse una hacia la izquierda, de donde seguidamente se refleja hacia arriba (Ver Figura 21).

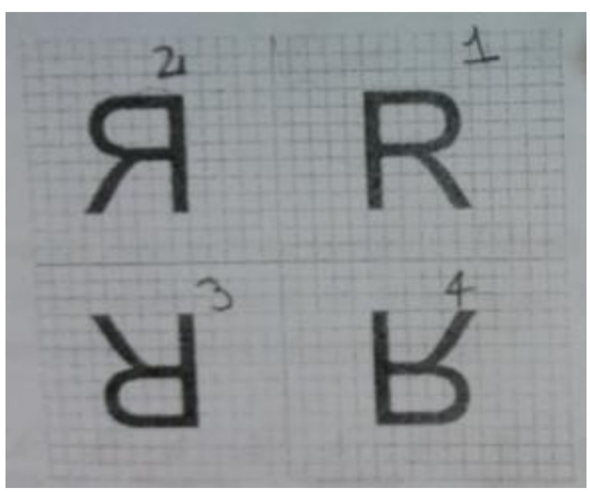


Figura 21. Secuencia de reflexión.

En el literal **b,** no se presentó dificultad para solucionar la pregunta, pues tan solo necesitaba de la visualización.

Para la actividad propuesta en el literal **c**, los estudiantes tomaron como ejemplo la situación descrita anteriormente, por lo que no se les dificultó su solución y al pasar la docente por los grupos a observar el proceso empleado, notó que los niños doblaban la hoja a lo largo de la línea vertical indicada en la hoja, luego calcaban la H y nuevamente doblaban la hoja por la línea horizontal resaltada en la cuadrícula calcando nuevamente la H obtenida anteriormente arriba. Seguidamente volvían a doblar la hoja por la línea vertical resaltada en la cuadrícula, para calcar la H obtenida anteriormente (Ver Figura 22).

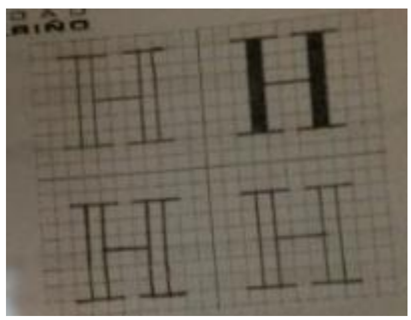


Figura 22. Solución al literal c.

En la pregunta del literal **d**, los estudiantes inicialmente pensaron que la recta **r** iba en diagonal en medio de las dos Z dadas, pero al realizar el doblez notaron que no coincidían, por lo que descartaron esta respuesta, procediendo a realizarla de forma similar al procedimiento seguido en el literal anterior. (Ver Figura 23).

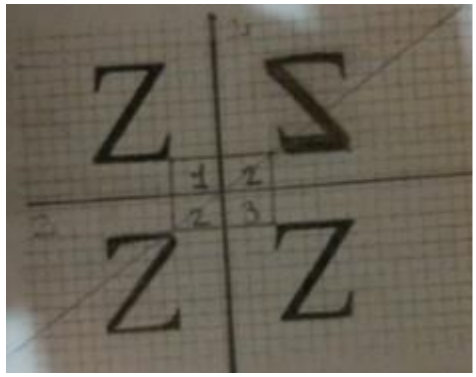


Figura 23. Solución al literal d.

Para el literal **a** de la situación seis, los estudiantes contestaron que sí lo podían ayudar. Y en el literal **b**, manifestaron que sólo había una manera de dividir el dibujo y consistía en cortar exactamente el dibujo por la mitad de forma horizontal. (Ver Figura 24).

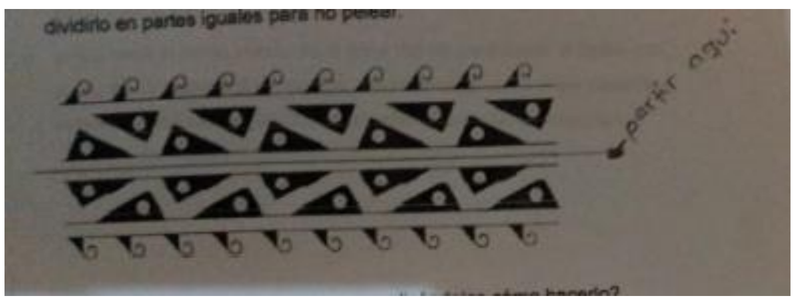


Figura 24. División simétrica del dibujo.

Para el literal **c**, los estudiantes argumentaron que sí era posible agrandar la figura, y que para lograrlo sería proyectando secuencialmente la figura inicial una o más veces, bien sea hacia la izquierda o hacia la derecha.

Para la pregunta de la situación siete, los niños contestaron de inmediato que el número sí era finito en algunos casos, ya que solo puede ser uno y no dos el centro de simetría, aunque las rectas sí podían ser varias.

Tanto el literal **a** como el literal **b** de la situación ocho, representó para ellos gran dificultad en su solución, tanto así que solo un grupo logró encontrar la respuesta correcta, así: para el literal **a**, contestaron que sí influía, y para el literal **b** argumentaron que el punto exacto a la orilla del río, para llenar el balde de tal forma que fuese el recorrido más corto entre la casa, el río y el establo era: el punto en el que se encontraban las líneas trazadas en cruz. (Ver Figura 25).

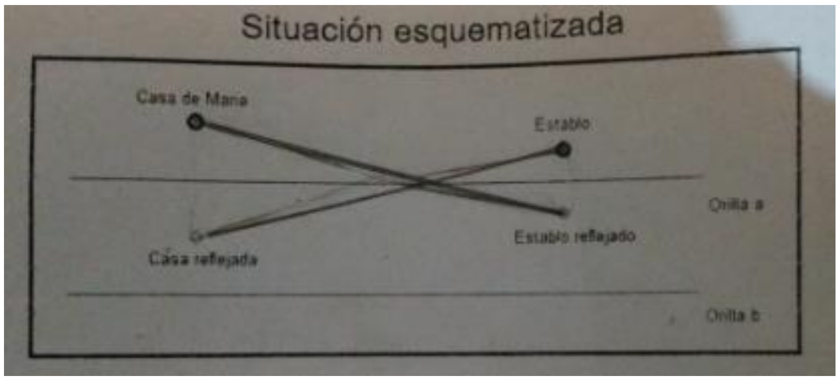


Figura 25. Solución a situación esquematizada.

Para la actividad propuesta en el punto nueve, los niños trajeron registros fotográficos de una casa en la piscina donde se observa el reflejo de su figura sobre las aguas de ésta. Otros presentaron la fotografía de su hermano, cuya imagen se observaba claramente con su figura reflejada en un espejo (Figura 26).

Figura 26. Ejemplos reales de simetría axial.

En la socialización, se puntualizó sobre aquellos problemas que fueron resueltos de forma incorrecta por la mayoría o totalidad de los grupos. Así entonces se inició proyectando sobre la pizarra las figuras 1.2 y 1.3 para que en esta ocasión sí se detuvieran a visualizar cómo se relacionaban, o mejor cómo era la relación de posición entre los segmentos homólogos que conforman la figura inicial y su imagen respectivamente, por lo que se les preguntó, si estos segmentos se prolongaban, qué sucedía entre ellos?, a lo que contestaron: se tocan en un punto, a lo que seguidamente se les preguntó, entonces quedan paralelas? respondiendo con un no rotundo y argumentando que eran secantes, pues las paralelas no se cruzan en algún punto, es decir que no se interceptan.

Luego en el literal **d** de la situación dos, se les pidió a uno de los grupos que habían realizado la descripción correcta de las transformaciones allí pedidas y que por favor explicara a los compañeros, para que aquellos que aún no lo entendían, lograran comprenderlo, sin embargo como algunos persistían en no entender el por qué la imagen quedaba "volteada ", entonces fue interesante ver, cómo una estudiante se levantó de su puesto y dijo: la recta hace las veces de espejo y sacando uno, lo ubicó sobre una de las rectas **r** y mostró cómo se reflejaba allí la figura, luego le dijo mírese y verás que te vez de frente no de espalda; logrando así aclarar sus dudas (Figura 27).

Figura 27. Proceso de explicación.

El literal **d** de la situación cuatro, fue socializado por uno de los integrantes de los grupos que lo solucionaron, y mientras esto sucedía los demás estudiantes que lo habían resuelto ayudaban a explicar las preguntas que les hacían los compañeros en voz baja.

Las distintas opciones de respuestas dadas en la situación cinco, fueron comentadas por quienes las desarrollaron, para que todos enriquecieran sus conocimientos y se percataran de las otras soluciones.

La situación ocho, fue explicada verbalmente por un representante del único grupo que le dio solución, pues refirió darle pena pasar al tablero (Ver Figura 28).

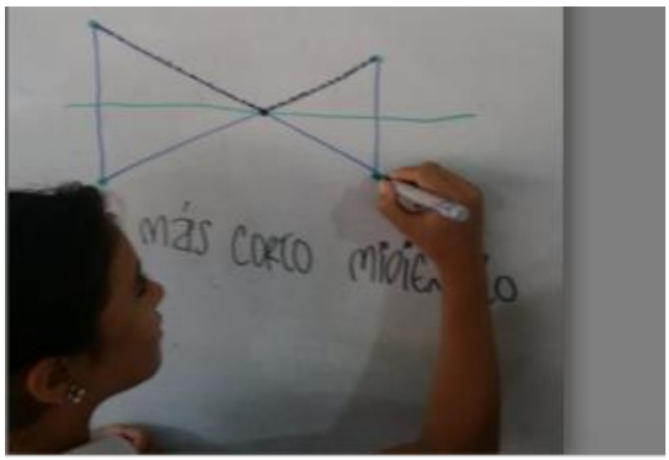


Figura 28. Explicación de la situación esquematizada.

A continuación se valora en esta actividad la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades.

Motivación por el aprendizaje: el haber desarrollado las dos actividades anteriores haciendo uso de materiales específicos proporcionó a los estudiantes mayor confianza, disponibilidad y habilidad en la resolución del planteamiento de los diferentes problemas. Al socializar el trabajo desarrollado, se mostraron más dispuestos a comunicar sus análisis y posteriores resultados, comparándolos y compartiendo con orgullo los conocimientos adquiridos.

Logros: en el desarrollo de esta actividad se pudo constatar que hubo:

- Satisfacción de los estudiantes al notar avances en el desarrollo de sus procesos y habilidades de visualización y representación. .
- fortalecimiento del sentido de cooperación y compañerismo entre los estudiantes.
- Desarrollo de mayor confianza en la participación y esfuerzo por encontrar respuestas correctas.
- Reconocimiento de las propiedades que permanecen y las que no permanecen constantes.
- Relación entre la temática propia de la actividad con la realidad de su entorno.

Muestra de estos logros se reflejan en el CD que se anexa a la tesis, en la carpeta Fotos de actividades y dentro de ella evidencia de la actividad 3.

Dificultades: tal vez, por mecanización de conceptos algunos estudiantes confundían definiciones (mediatriz y bisectriz); poca familiarización con las situaciones esquematizadas.

4.2.4. Actividad 4: vueltas y más vueltas

En el análisis de esta actividad se realiza una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas y retos planteados, también se logra captar varias imágenes donde se muestra el trabajo de los estudiantes (Ver anexo 6 de la tesis).

Desarrollo de la actividad:

La primera parte de la actividad, (trabajo en grupo), se llevó a cabo en el aula de clase considerando que el espacio era suficiente para el manejo del transportador y el compás. Al instante de recibir sus respectivas guías exclamaron con preocupación que era la más larga recibida hasta el momento; cinco de los grupos al ojearla rápidamente reconocieron, manifestando, de forma más calmada, que la cantidad de hojas se debía a que esta actividad poseía muchas más graficas que las anteriores y además algunas de las preguntas de los primeros puntos eran parecidas a las tres actividades ya trabajadas, por lo que se mostraron más tranquilos y rápidamente se dispusieron a resolver los problemas.

El primer problema se divide en cuatro situaciones: en la primera se presentaron dos respuestas, una de ellas fue casi inmediata ya que refirieron que se formaba una “L” y por ello eran 90º, al momento de responder a si los demás vértices del trapecio original habrían girado con el mismo ángulo, recurrieron a trazar segmentos desde un vértice y su homólogo, verificando visualmente que se seguia formando “L” en cada par de ellos. La segunda respuesta dada fue 270º (dos de los estudiantes que escogieron como original el trapecio en vertical inicialmente no tuvieron en cuenta la condición del sentido del giro, a lo cual la docente, al recomendarle leer nuevamente el enunciado, fácilmente corrigieron la medida del ángulo) (Ver Figura 29).

Figura 29. Procesos de la situacion 1.1.

En el literal b, dos de los grupos recurrieron al uso del compás, verificando de acuerdo con la abertura del mismo que las distancias entre cada par de vértices homólogos eran iguales; tres grupos recurrieron a calcar el trapecio, verificando por superposicion que las distancias eran las mismas; el grupo restante lo realizó trazando los segmentos y midiendo con regla, verificaron su hipótesis (las distancias son iguales).

En la situacion 1.2, para todos los estudiantes fue visualmente evidente la respuesta al literal a y lo expresaron asi: segmento AB y segmento A’B’= 3 cuadros, segmento AC y segmento A`C`= 2 cuadros y el otro par de segmentos eran iguales ya que unian los mismos dos vértices. De forma similar dieron respuesta al literal b; con la pregunta del literal c ya estaban familiarizados por cuanto traian de los literales 1.b,2.d,4.c (Actividad 1), 1.a, 2.d, 3.a, 4.a (Acticidad 2) y 1.1.d (Acticidad 3) la información que correlacionaron, respondiendo sin problemas que éstos son perpendiculares. En el literal d el 100% de los estudiantes contestaron que el sentido de giro es antihorario y por consiguiente para ellos la respuesta al literal **e** fue de 90º (Ver Figura 30).

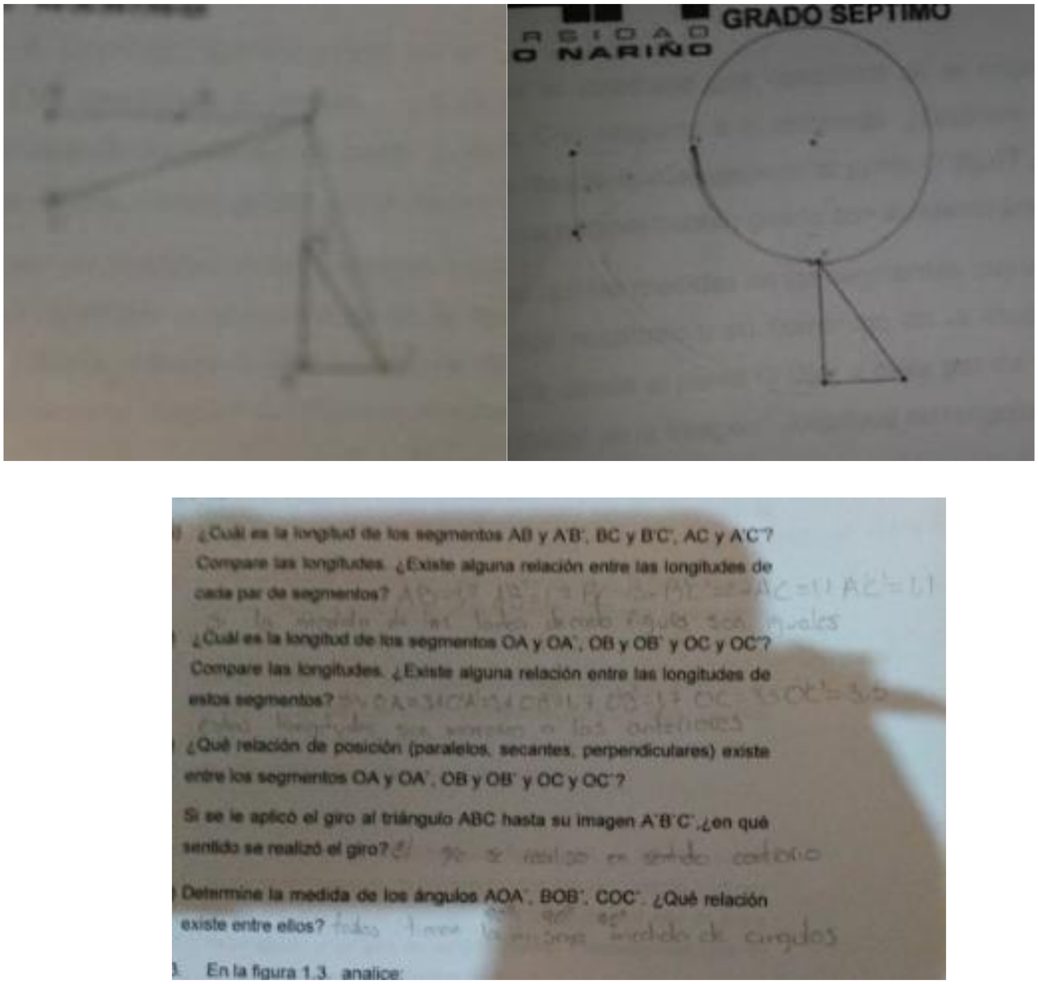


Figura 30. Soluciones graficas (arriba) y procesos escritos (abajo).

Para la situación 1.3. recurrieron al papel calcante para identificar el vértice imagen del vértice escogido en la figura original y dar respuesta así a los literales a, b, c y d de manera efectiva, aunque al momento de plasmar coherentemente sus ideas se les dificultó un poco. Con respecto al literal d, los estudiantes concluyeron que las formas, tamaños, medida de los lados, medidas de los ángulos y distancias hasta el punto fijo de las figuras son iguales y lo único que cambiaba era la posición de la figura original con respecto a su imagen (Ver Figura 31).

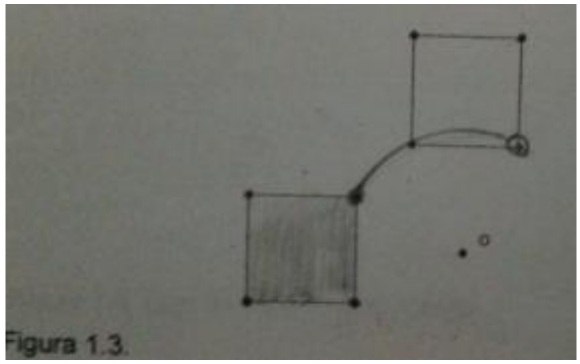


Figura 31. Procesos para situacion 1.3.

La situación 1.4, fue aún más inmediata de responder ya que visualmente se podían contar distancias (en cantidad de espacios) y valores numéricos de áreas (en cantidad de cuadros que se encontraban dentro de cada par de figuras), en el literal **c**, en la pregunta ¿Influye en éstas áreas el sentido del giro? Fue necesario que los estudiantes verificaran mediante el calcado y giro con alfiler, para considerar que no influìa el sentido de rotaciòn en las àreas de las figuras originales y sus imágenes. En el literal e, ademàs de lo expresado en la situacion 1.3, enunciaron entre las propiedades constantes, que sin importar el sentido y àngulo de giro el àrea de la figura y su imagen no cambian, y entre las propiedades cambiantes está: el sentido, el àngulo de giro y la posiciòn del punto fijo.

El problema número dos, al igual que el primero, se subdivide en cuatro situaciones en las cuales se presentaron las siguientes dificultades:

En la primera situación, al momento de medir ángulos diferentes de 90º y/o 180º y más aún respecto a una línea inclinada, los estudiantes presentaron ciertas dificultades, a lo que la docente orientó el proceso metódicamente, mediante preguntas heurísticas puntuales para encaminarlos a alcanzar el objetivo.

En la tercera situación, para determinar el centro de rotación de la figura 1.9, mostraron impaciencia y algo de estrés por no encontrarlo inmediatamente como en las otras dos figuras que lo lograron de forma inmediata. Determinar el ángulo de rotación de la figura 1.8 fue totalmente metódico (construcción paso a paso con regla y compás).

En la cuarta situación, cuatro de los grupos respondieron: "un giro de 180º en cualquier sentido cuyo punto fijo es D y posteriormente trasladarla 7 cuadros hacia la izquierda y finalmente un cuadro hacia arriba". Al solicitarles una nueva lectura y pedirles que respetaran las condiciones del problema, luego de varios intentos, la situación fue resuelta mediante socialización-solución conjunta ya que para la totalidad de los grupos no fue posible de solucionar solo con rotaciones sin la debida orientación.

En el tercer problema, aunque se plantearon las cuatro situaciones con circunferencias la mayoría de los literales a solucionar los realizaron con rapidez, llamando a la docente con urgencia, motivados por haber creído haber encontrado la solución, requiriendo de la docente su verificación, dado a que su solución no había necesitado orientación alguna, puesto que eran similares a los trabajados en los primeros dos problemas, como fue el caso de la primera y cuarta situación las que no requirieron de aclaraciones o intervenciones docentes (Ver Figura 32).

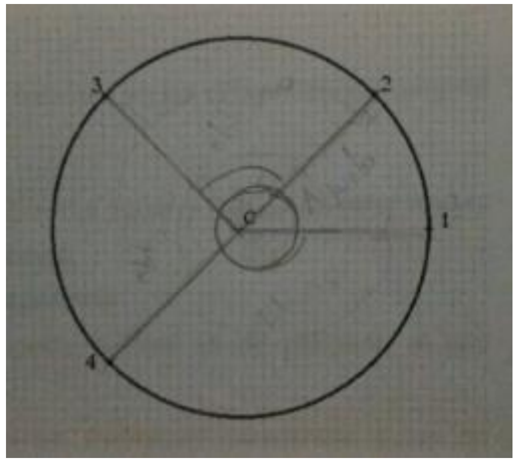


Figura 32. Solucion grafica a situacion 3.1.

En el desarrollo de la segunda situación, se presentó una ligera confusión en si el ángulo a determinar era el del punto verde en la circunferencia de la izquierda hasta la posición del punto verde en la circunferencia de la derecha, pero luego de preguntas orientadoras los estudiantes llegaron a la conclusión correcta (180º) al igual que las observaciones de que el punto verde es fijo, el radio de la circunferencia es el mismo, el área de las circunferencias por lo tanto es igual, conclusión verificada con ayuda de papel calcante y alfiler.

En la tercera situación, solo el literal b requirió algo de tiempo, más no de intervención por parte de la docente, para determinar el punto fijo el cual en realidad tenía dos respuestas (puntos donde se cruzaban las dos circunferencias); los otros dos literales tuvieron una solución generalizada y de forma correcta (Ver Figura 33). De forma similar le dieron solución a la situación cuatro (Ver Figura 34).

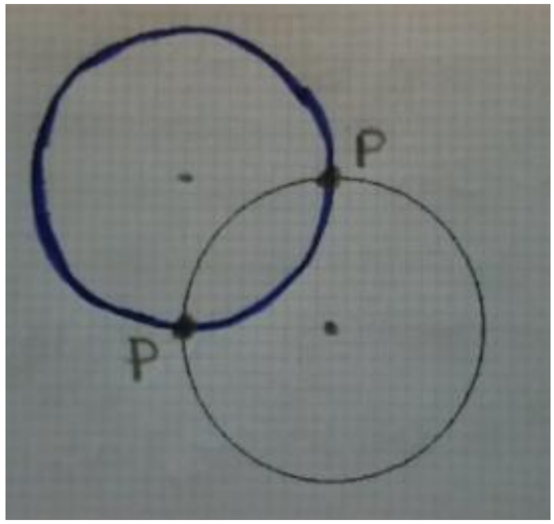


Figura 33. Solucion a la situacion 3.3.

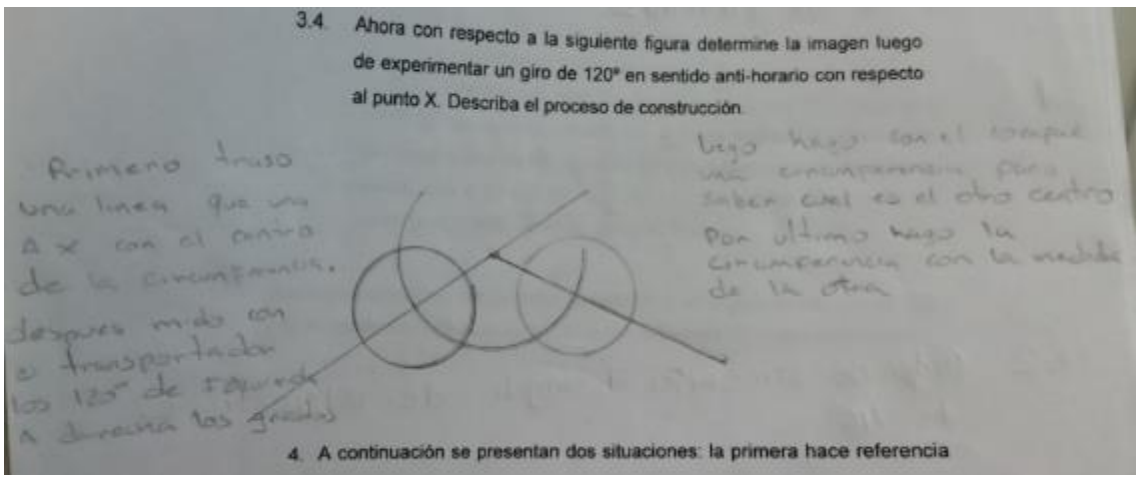


Figura 34. Solucion a la situacion 3.4.

El cuarto problema se divide en dos situaciones: en la primera de ellas, la dificultad radicó en lograr plasmar con claridad las ideas expresadas para el literal a; los literales b y c fueron resueltos con tal facilidad que algunos de los estudiantes expresaron que eran tan fáciles que no creían que fuese así, con respecto al literal d la gran mayoría de estudiantes decidió dibujar uno de los ejemplos escritos en el literal c y otros pocos optaron por construcciones abstractas netamente geométricas (Figura 35).

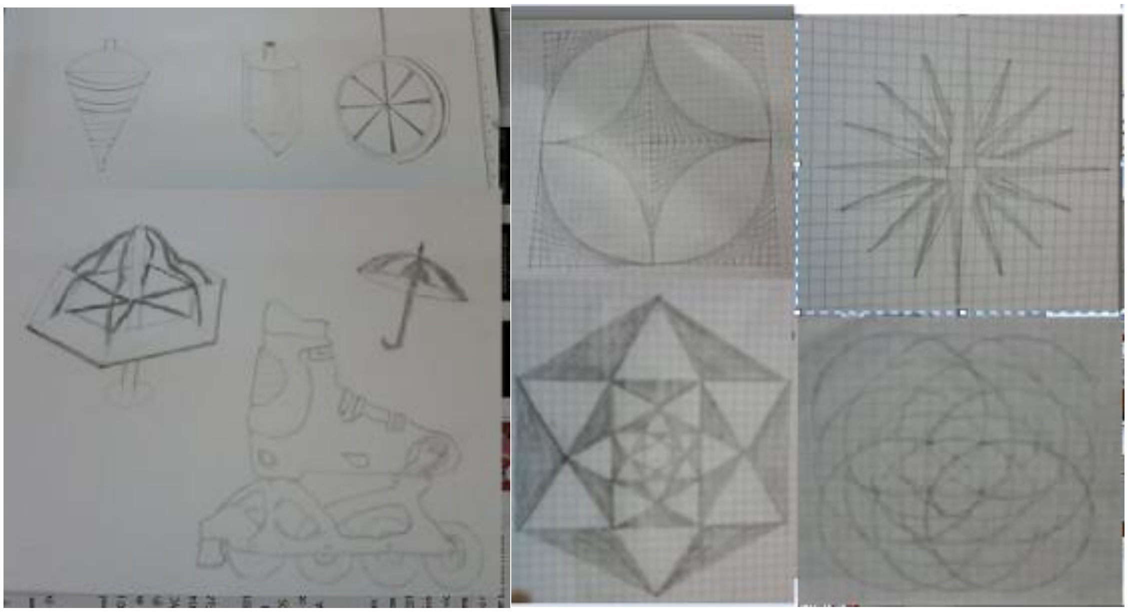


Figura 35. Ejemplos de su cotidianidad.

Los estudiantes en la solución de la segunda situación, requirieron una segunda y hasta una tercera lectura para lograr concluir que el ángulo de rotación se obtenía de la división de los 360º de la circunferencia, entre el total de lados del polígono, y para realizar el total de rotaciones optaron por calcar la figura y repetirla 10 veces marcando los vértices, luego uniéndolos y rebautizándolos; solución acertada sin que para ella hubiese habido intervención de la docente (Figura 36).

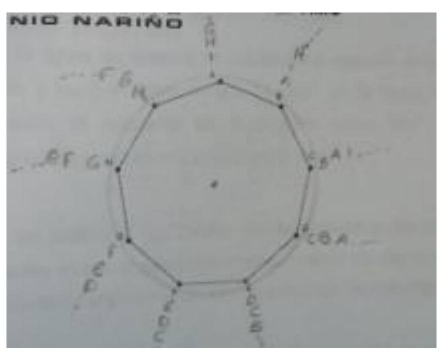


Figura 36. Solución al problema 4.2.

Durante el desarrollo del problema número cinco, las dificultades más marcadas radicaron en que tres de los estudiantes no conocían el funcionamiento de un reloj análogo y sus compañeros de equipo le explicaron con total desenvolvimiento su funcionamiento; la otra dificultad radicó en la solución del literal d, debido a que no se encontraban familiarizados con esta forma de “adelantar el reloj”, no obstante, sin la intervención de la docente pero sí con unos cuantos intentos lo lograron eficientemente.

El problema número seis, para todos fue muy fácil, pues de forma inmediata procedieron a contar el total de dientes del piñón 2, que faltaban por pasar por el plato, guiándose de la figura de la izquierda, la cual muestra que el sentido de giro del plato es anti horario, por lo cual procedieron a realizar el cálculo directamente sobre el piñón; algunas de las expresiones de los estudiantes fueron: “profe, este está muy fácil son 17 dientes que faltan por pasar y alcanzan para 2 vueltas, que son 14 y me sobran 3 dientes para la otra vuelta”; por otra parte afirman que “son 17 dientes los que faltan y 17 dividido en 7 son 2 y me sobran 3, así que son solo 2 vueltas completas” .. Ante la pregunta de la docente ¿Cuál sería el número de vueltas del piñón 1 si el plato girara en sentido horario? Fue casi instantánea la respuesta: “no da ni una vuelta” (Figura 37).

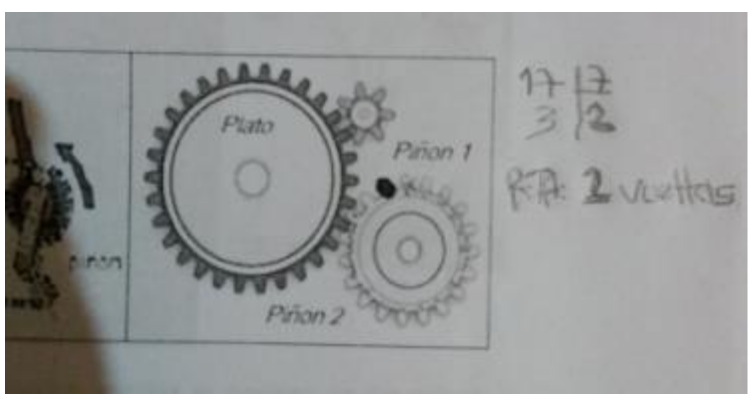


Figura 37. Proceso de solución al problema 6.

Al planteársele el literal a, de la situación 7, y al buscar su posible respuesta, algunos mostraban el proceso de desarrollo de manera gesticular, tal vez, con los ademanes querían mostrar el recorrido que mentalmente estaban haciendo y curiosamente se podían ver en esos movimientos casi el seguimiento del giro realizado en ambos sentidos; en otros casos, plasmaban el recorrido del giro tomando el referente gráfico propuesto (Figura 38).

Figura 38. Recorrido solución en el papel.

Después de ciertos experimentos y descartados los errores, encontraron que los asientos del kamikaze coincidían nuevamente al cabo de 180º, según términos particulares al momento de coincidir en la parte alta (superior) las dos filas de asientos.

Caso similar se presentó en el siguiente planteamiento del mismo literal, ya que en un primer intento de solución, los estudiantes llegaron sin inconvenientes a la distribución de la circunferencia descrita por la atracción en cinco sectores iguales (360º/5 =72º cada uno) pero al momento de dar respuesta a lo solicitado no tuvieron en cuenta la condición (coincidir el primer asiento de cada fila) y los grados hallados fueron 144. Luego de preguntas heurísticas de la docente cada grupo concluyó el proceso correctamente (72º / 8 asientos= 9º por cada asiento y posterior suma 144º + 9º= 153º) (Figura 39).

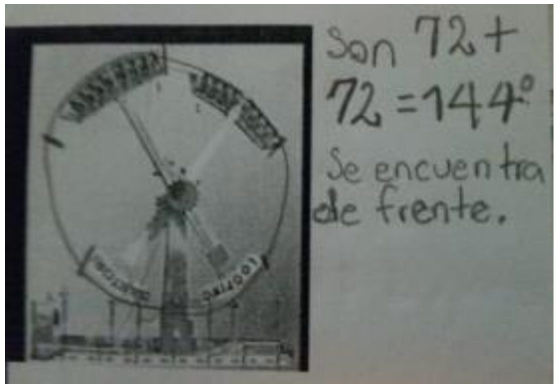


Figura 39. Solución aritmética incorrecta del problema 7.

En la situación número 8 se presentaron varias interpretaciones del planteamiento, las cuales se muestran a continuación en la Figura 40.

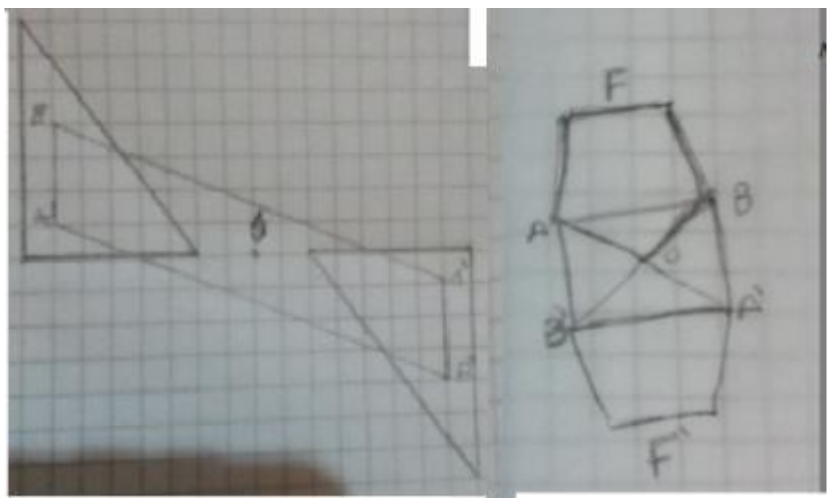


Figura 40. Algunas soluciones del problema 8.

Para la socialización, se hizo necesario dos jornadas de trabajo: para la primera de ellas se hizo uso de la sala de sistemas, garantizando mayor efectividad en el proceso de las primeras cuatro situaciones de la actividad; la segunda jornada se llevó a cabo en el aula de clase por falta de disponibilidad de la sala de sistemas.

Las situaciones 2.1 y 2.4 fueron las que más tiempo requirieron pero para satisfacción de los participantes fue posible resolverlos con paciencia y preguntas específicas como:

- Estudiante: ¿profe toca hacerlo así cómo está? ¿no podemos ponerlo derecho? Es que así es más fácil.
- Docente: ¿durante la lectura del enunciado se da la opción de realizarlo como lo planteas?
- Estudiante: no profe. Pero es que no recuerdo cómo se hace para medir los ángulos así.
- Docente: dime como aprendiste a medir un ángulo.
- Estudiante: primero trazo una línea con la regla, luego pongo esta rayita del transportador aquí (punto fijo) y veo que quede derecho (coincida con la cuadricula los 0º-90º-180º y 270º) y cuento los grados que necesito (sentido anti-horario)
- Docente: lo que me mostraste está muy bien, te felicito. Ahora vamos a realizarlo para uno de los extremos del segmento AB, paso a paso como me lo indicaste.

El proceso aunque dispendioso fue un éxito y luego el compañero lo “dibujó” en el tablero hasta el paso de ubicar el transportador y contar los grados solicitados, a lo que los estudiantes entusiasmados y ya con confianza lo realizaron.

En la situación 2.4, todos los estudiantes, luego de la aclaración de que se debía lograr únicamente haciendo rotaciones, preguntan si pueden hacerlo en otra hoja previamente para no dañar la hoja guía, a lo que la docente les pide no botarla ya que es evidencia del proceso. Paso seguido proceden a calcar la imagen y hacer uso del alfiler para realizar los giros con total certeza que el punto fijo no se corriera de lugar durante el proceso hasta lograrlo luego de múltiples ensayos.

La socialización del problema 7, fue un poco compleja ya que no se disponía del televisor para facilitar el proceso apoyándolo en la visualización a lo que se tuvo que recurrir a los trazos en el tablero, tomando así más tiempo de lo previsto (Ver Figura 41).

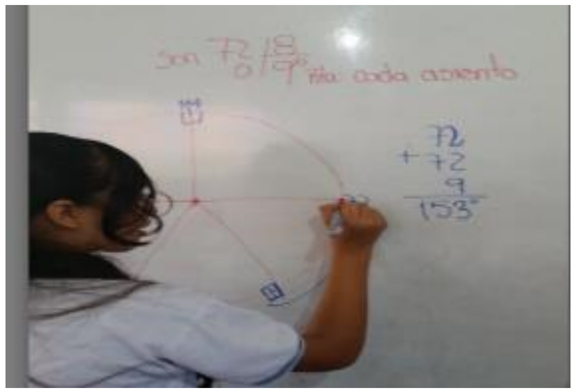


Figura 41. Socializacion del problema 7.

Para el último de los problemas los estudiantes el proceso de socialización se llevó a cabo a la par con su proceso de solución como se especificó con anterioridad.

Esta experiencia ha sido bastante constructiva en la medida en que fue un trabajo muy dinámico, de cooperación entre los equipos, y lo más importante encontrar la creatividad y visión lógica de hallar la solución a la mayoría de los problemas, puesto que con poca intervención de la docente se lograron las respuestas de manera casi inmediata. De igual manera el determinar las propiedades inherentes a esta transformación se dio de manera procesal y coherente (Ver Figura 42).

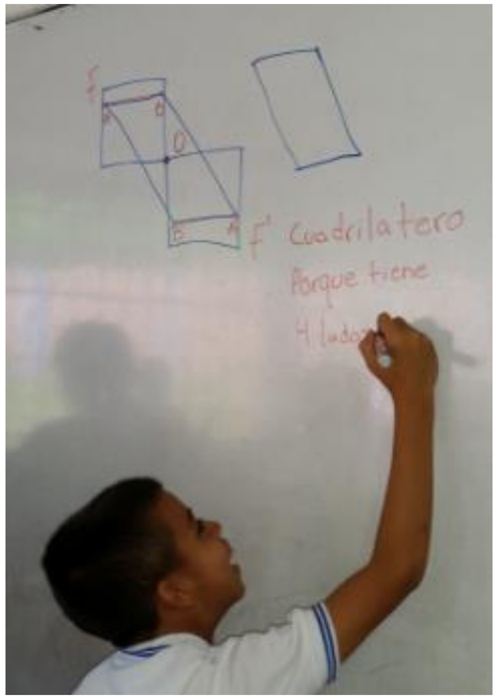


Figura 42. Solución del grupo 3.

A continuación se valora en esta actividad la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades.

Motivación por el aprendizaje: las pocas orientaciones y acompañamiento de la docente además de un gran trabajo colaborativo permitió mantener un ambiente de disposición e interés por parte de los estudiantes para encontrar los resultados. La disponibilidad de los implementos pedagógicos y la aplicación de los pre-saberes traídos de las actividades anteriores familiarizaron el ejercicio generando confianza y disposición.

Logros: mantener un clima de trabajo sin desgano y apatía. Creatividad y dominio en el desarrollo de la actividad. La interacción y cooperación propias de una comunidad de práctica. La aprehensión del concepto de rotación y la seguridad del mismo en la aplicación para la resolución de problemas. El compartir el saber en aras de su afianzamiento. Reconocimiento de las propiedades cambiantes y las que permanecen constantes. Relación entre la temática propia de la actividad con la realidad de su entorno. Encontrar mayor empatía y socialización entre pares. Muestra de estos logros se reflejan en el CD que se anexa a la tesis, en la carpeta Fotos de actividades y dentro de ella evidencia de la actividad 4.

Dificultades: las principales dificultades que se evidenciaron en la solución de la actividad radican en:

- Manejo de pre-conceptos y habilidades requeridas como el uso correcto del transportador, medición de ángulos en cualquier posición, manejo del compás y funcionamiento de un reloj análogo.
- Confusiones y procesos incoherentes generados por la poca comprensión lectora.
- Confusión y desánimo en el proceso al planteárseles situaciones diferentes a las trabajadas comúnmente.
- Muestras de cansancio y agotamiento dado la extensa actividad.

4.2.5. Actividad 5: Evaluando conceptos

En el análisis de esta actividad se realiza una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas y retos planteados en la prueba individual, también se logra captar varias imágenes donde se muestra el trabajo de los estudiantes (ver anexo 7 de la tesis).

En esta actividad participaron los 18 estudiantes. Se buscaba determinar a través de los resultados, qué tanto habían construido los conceptos de: traslación, homotecia, simetría axial y rotación. Para ello la actividad se dividió en dos partes: en la primera, se entregó a cada estudiante una prueba que constaba de ocho preguntas de selección múltiple con única respuesta, y aunque el tiempo estimado para ésta fue de 50 minutos los estudiantes terminaron antes de lo previsto.

La primera pregunta fue contestada de manera correcta por la totalidad de los estudiantes.

En la pregunta dos, cuatro de los estudiantes le solicitan a la docente papel calcante y alfiler para calcar la figura y realizar la rotación indicada respecto al punto fijo dado, y así determinar la posición solicitada, contestando que los elementos sugeridos no se les puede facilitar, que el único material del que podían disponer era el entregado: lápiz, borrador y hoja para procesos. Aquí nuevamente la totalidad de los estudiantes lograron contestar acertadamente.

En la tercera pregunta el 16.6% (3 estudiantes) contestaron erradamente.

En la cuarta pregunta, siete de los participantes manifestaron no entender la estructura de las opciones, manifestando la docente, que ésta consiste en leer las afirmaciones I, II y III y luego entre las opciones a, b, c y d escoger cuál o cuáles de las afirmaciones son correctas. Aquí cinco estudiantes (27.7%) no lograron contestar la pregunta acertadamente.

En la quinta pregunta, al observar las respuestas se pudo concluir que los cuatro estudiantes que no la contestaron correctamente, obedeció a que no tuvieron en cuenta la segunda parte de la información (reflejar la hora) por lo que escogieron erróneamente la opción d.

Respecto de la pregunta número seis, se observó que al momento de responder recurrieron al uso de la hoja de procesos para hacer evidentes los pasos estipulados en el enunciado, razón por la cual el 11.1% de los estudiantes erraron la respuesta.

La séptima pregunta no representó dificultad para los estudiantes, ya que el 100% de ellos respondieron acertadamente.

En la octava y última pregunta, ocho de los estudiantes (44.4%) lograron dar una respuesta acertada.

En la socialización, se partió de la constatación de los procesos o mecanismo utilizado para encontrar la respuesta correspondiente a la marcada para cada ítem, y no fue señalada como producto del azar.

Para la primera pregunta, todos querían expresar su proceso de solución, no obstante solo dos procesos fueron los evidenciados: el primero descartaron la opción C, puesto se mencionaba la izquierda y en este lado del plano no existía figura alguna. La opción A la descartan ya que la cantidad de unidades son muy pequeñas y al contarlas en la figura no coincidían y la opción de igualmente no la tuvieron en cuenta porque al trasladar la figura las cuatro unidades quedaba muy distante del eje Y. El segundo proceso tenido en cuenta, determinan la opción B, en razón a que al trazar la figura original sobre el gráfico y posteriormente contar las unidades trasladadas, éstas coincidían con la opción elegida.

En la pregunta número dos, todos iniciaron a dar sus respuesta deliberadamente pero coincidiendo en que, lo habían calcado en la hoja dada y colocando la punta del lápiz en la esquina (vértice) F, y que luego la voltearon al revés, hacia arriba, obteniendo así fácilmente la respuesta B, Aquí se evidencia que fueron muy concretos puesto que hicieron uso de la manipulación, es decir fueron prácticos en la búsqueda de la respuesta.

Para la tercera pregunta, uno de los estudiantes que contestó erradamente, consideró que su confusión radicó en que como todas las opciones eran similares, sólo se detuvo a verificar el reflejo de las figuras uno y dos, ya que fueron las que ya se habían trabajado en la pregunta uno y dos, por lo que al encontrar en la respuesta A, una coincidencia con su pensar no le permitió verificar con las otras opciones. Otros estudiantes, realizaron el proceso de verificación muy similar al expresado por el anterior estudiante, con la diferencia de éstos sí constataron con las demás figuras (3 y 4 en cada una de las opciones). Finalmente, el estudiante J. P., consideró que había sido muy fácil, pues al levantar la primera hoja y observarla a trasluz y comparada con una de las figura de la siguiente hoja constata que la opción D era la correcta.

En la cuarta pregunta, se dio confusión en razón a la poca familiaridad de los estudiantes con este tipo de preguntas, considerándolas de mucha información, razón expuesta por dos estudiantes quienes respondieron erróneamente. Para quienes contestaron bien, tomaron dos procesos diferentes de solución: unos descartaron la respuesta A, B y D, debido a que la información I, no correspondía al gráfico, puesto que el perímetro es la suma de los lados y notoriamente una figura era más grande que la otra, señalando así entonces la respuesta correcta; el otro procedimiento optado fue, que luego de leer la información I, II y III, y al relacionarla con la gráfica, recordaron que durante la socialización de la actividad zoom, una de las conclusiones correspondía a que la información II era verdadera.

En la quinta pregunta, de los catorce estudiantes que contestaron correctamente, expresaron que la primera parte de la información fue fácil de ubicar en el reloj, pero al momento de realizar el reflejo, necesitaron hacer uso de la hoja dada, la que al verla por el respaldo, la imagen coincidía con la opción B. De los otros 4 estudiantes, solo uno de ellos manifestó a la docente las razones por las cuales su opción había sido la D y no la B, que era la correcta. Consideró que luego de leer la primera información, se dispuso a dibujar en el reloj la hora: 11.10, yéndose inmediatamente a su opción determinada.

Para la sexta pregunta fue muy gratificante verificar que la gran mayoría de los estudiantes dieron sus respuestas producto de procesos concretos, evidenciando una correcta comprensión lectora; al preguntarle a los dos estudiantes que dieron una respuesta errada, uno de ellos expresa que no leyó el enunciado y que solo se guio por el doblez indicado en el gráfico, el otro estudiante manifestó que por temor de no terminar a tiempo marcó al azar.

En la séptima pregunta al cuestionar a los estudiantes por los procesos seguidos para encontrar la solución, se evidenciaron dos formas: la primera, luego de leer el enunciado y las respectivas opciones, procedieron a trazar en lápiz los ejes de simetría y contando el total de partes en que se dividió, descartando así la opción A y D; la opción C, la descartaron relacionándola con lo trabajado en los floreros cilíndricos. La otra forma consistió en verificar la veracidad de cada opción: la opción A la descartaron realizando un doblez por cada eje de simetría; la opción b fue automática ya que no se podía “estirar” en una sola tira.

En la octava pregunta se evidenció que aunque relacionaron lo planteado con lo trabajado con anterioridad en la actividad zoom (tubos encajados y cubos concéntricos), sus respectivos argumentos fueron incorrectos, uno de ellos manifestó que había realizado la división 10/1=10 cajas, otro realizó el producto 1*10=10 cajas; los demás estudiantes a pesar de insistírseles a opinar se abstuvieron, por lo que se hizo necesaria la intervención de la docente. La estrategia de solución consistió en iniciar por leer y explicar frase por frase del enunciado; en la primera se les preguntó ¿Qué es un cubo?, algunos de ellos expresaron que era como un dado; paso seguido, se preguntó por las características de éste, respondiendo que todos los lados eran iguales. Respecto a la segunda frase se hizo necesario aclarar que una arista equivale a decir que es un lado. Por último, se procedió a representar un primer cubo con arista 1 cm, un segundo cubo con arista 2 cm, un tercer cubo de arista 3 cm; en este punto de la explicación varios estudiantes exclamaron: "¡¡¡¡ profe, ya entendí, ya entendí!!!! O sea profe que el cubo que sigue sus lados mide 4 cm, y el que sigue mide 5 cm y así hasta llegar al que mide 10 cm de lado"; la docente ante la intervención grupal respondió: efectivamente, lo han entendido correctamente, preguntando: ¿Cuántas cajas distintas se pueden realizar con las tres dimensiones iguales?, " ¡¡¡diez!!!" Exclamaron, exclamación correcta.

Toda esta actividad fue observada y valorada por el Magister Fernando Pérez y la Magister Beatriz Villarraga, designados por la Universidad Antonio Nariño, para constatar la implementación de las actividades.

En el análisis de la segunda parte de esta actividad se realiza una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes en la resolución de cada uno de los problemas y retos planteados en la prueba grupal, también se logra captar varias imágenes donde se muestra el trabajo de los estudiantes (ver anexo 7 de la tesis).

En la segunda parte de la prueba se trabajaron cuatro preguntas de respuesta abierta y a diferencia de la primera parte se volvió al trabajo grupal, estimándose como tiempo suficiente para su desarrollo una hora.

Para dar solución a lo solicitado en el literal a de la pregunta uno, en un primer instante todos los grupos se dirigen a la docente argumentando que estaba muy fácil porque el rectángulo se formaba con tan solo quitar el cuadrito que se encuentra en la parte superior de la figura (polígono), y colocarlo en el espacio que está a la derecha de la parte superior de éste. Al escuchar la docente dicha respuesta les pide el favor que vuelvan a leer y que el polígono irregular dado, es como la ficha de un rompecabezas en madera, el cual no se puede modificar; acto seguido preguntan que si lo pueden hacer con ayuda de cualquiera de los movimientos ya trabajados o solo con rotación, contestándoles, que podían emplear cualquiera de los trabajados ya desarrollados. Al finalizar y luego de dar solución a las demás situaciones, cuatro grupos lograron construir el rectángulo solicitado, los dos restantes quedaron en la mitad. (Ver Figura 43).

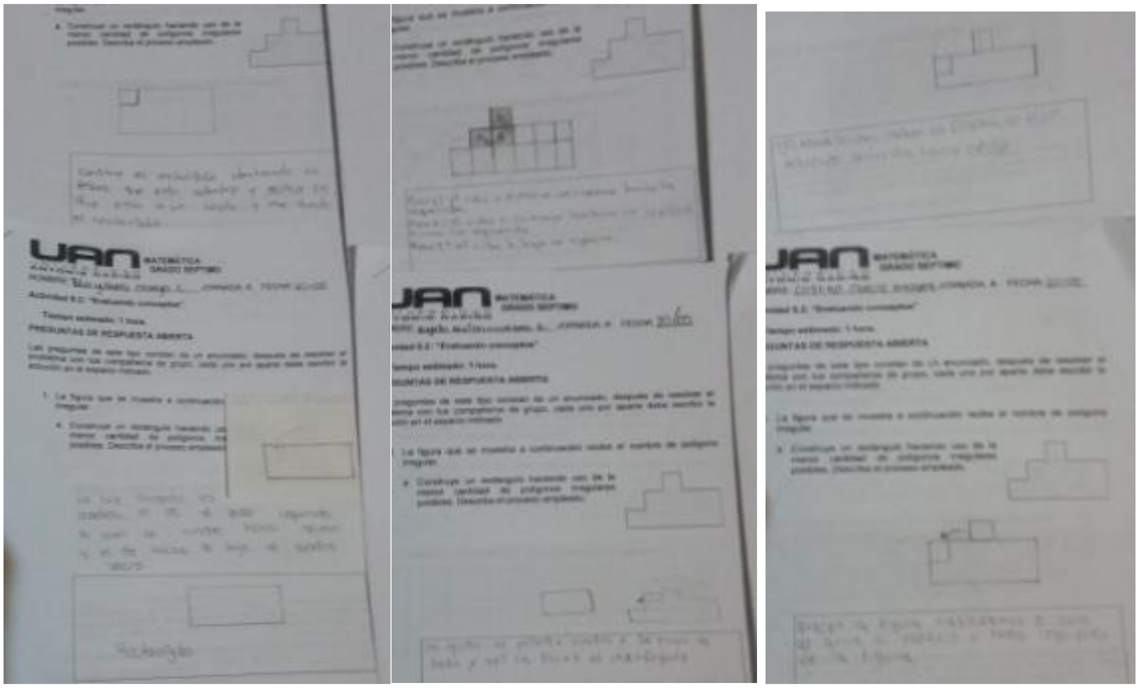


Figura 43. Primeras soluciones del problema.

En la pregunta del literal b, los cuatro grupos que lograron dar solución al literal anterior, dieron solución correcta a éste, los demás simplemente escribieron: no sé. (Ver Figura 44).

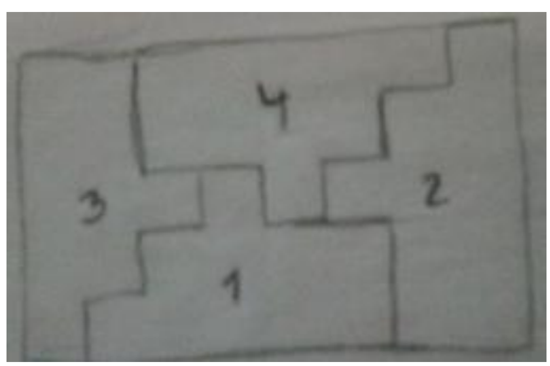


Figura 44. Solución correcta del problema 1.

La actividad propuesta para el literal a de la situación dos, fue resuelta con gran habilidad por parte de cada uno de los grupos, y mientras lo hacían se observó que en su totalidad calcaron el diseño dado, para luego volverlo a calcar en el espacio dado uno seguido del otro (Ver figura 45).

Figura 45. Friso solicitado.

Para dar respuesta a la pregunta del literal b, los estudiantes emplearon el proceso descrito en el literal anterior, obteniendo que en total se necesitaron de 12 baldosas para hacer el piso (Ver Figura 46).

Figura 46. Embaldosado.

En la pregunta del literal a de la situación tres, los estudiantes en su totalidad la relacionaron con el punto de las muñecas trabajado en la guía de homotecias, por lo que dibujaron dos puertas: una correspondiente al auto real y la otra al auto de juguete ubicando en cada una de ellas los datos suministrados en la situación, sin embargo aunque todos manifestaron que había que realizar una división para dar solución a la pregunta solo dos grupos lograron plantear la regla de tres y encontrar que la altura del automóvil real era de 100 cm.

Curiosamente la respuesta a la pregunta formulada en el literal b, fue dada sin problema alguno luego de que la docente ayudara a los estudiantes a comprender a través de preguntas heurísticas tales como: ¿Qué significa factor?, ¿Cuántas veces aumenta el largo de la puerta del auto de juguete respecto a la puerta del auto real? a que se refería el factor de conversión solicitado. Encontrando que dicho factor era 25 cm, pues como bien lo argumentaron ellos, 350 / 14 = 25 porque 25 x 14 = 350.

La solución a la actividad propuesta en el literal c, solo fue dada por un grupo que dio solución a la pregunta del literal a, tomando cada cuadrito como 25 cm, el otro grupo lo represento como una igualdad (Ver Figura 47).

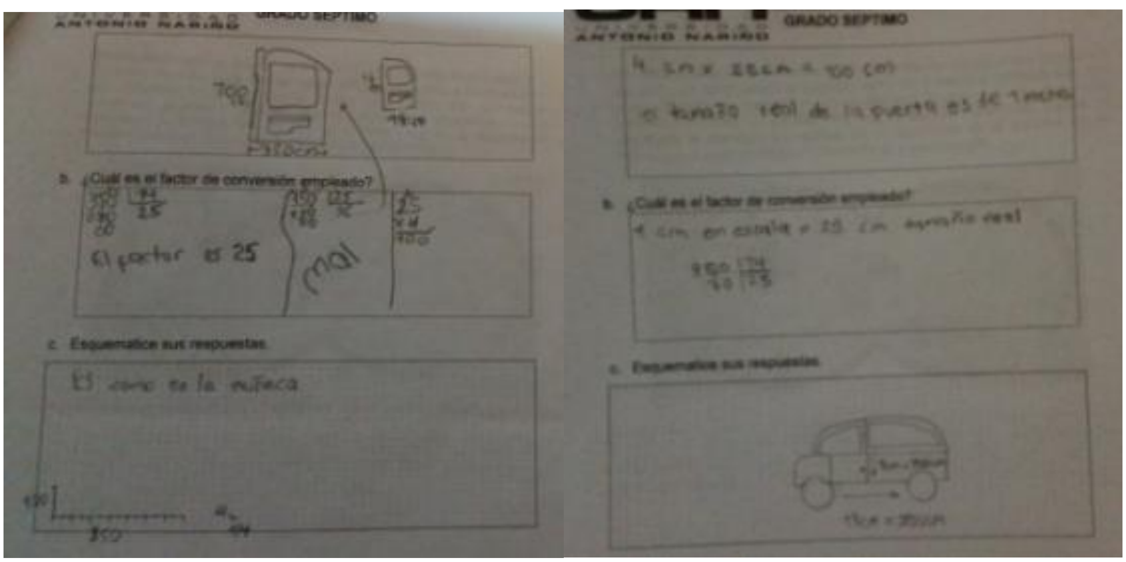


Figura 47. Soluciones de los unicos los gupos que lo lograron.

La actividad propuesta en la situación cuatro, no representó para 5 de los grupos alguna dificultad, pues fácilmente se dispusieron a calcar la habitación dada y con ayuda de un alfiler la rotaron 180° encontrando la posición de los objetos en dicha alcoba. Luego los dibujaron. El grupo restante buscó erradamente dar solución a través de la reflexión trazando su eje por todo el centro de la escalera (Ver Figura 48).

Figura 48. Solucion errada de la situacion 4.

En el momento de la socialización se pidió a unos de los representantes de los grupos que había logrado dar solución a la actividad de los literales a y b, que pasara a socializar su solución, así entonces el estudiante pasó con su guía y comentó que para lograrlo necesitó 4 polígonos de los dados y que la clave estuvo en cómo los ubicaba de forma tal, que al igual que en un rompecabezas éstos encajarán perfectamente, procediendo así a dibujarlos en el tablero. Aquí los dos grupos que habían llegado a la mitad del proceso exclamaron ¡hay! ¡Íbamos bien! (Ver Figura 49).

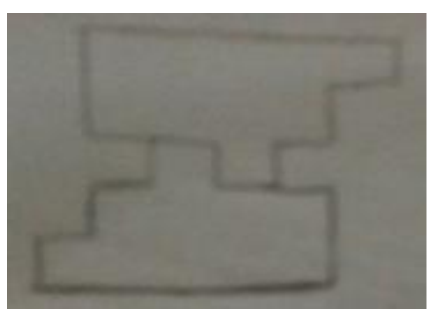


Figura 49. Procesos incompletos de construcción del rectángulo.

Para dar respuesta a la pregunta expuesta en el literal a de la situación tres, se partió de donde los cuatro grupos que no dieron solución habían llegado, pues lo que les faltó tan solo fue un algoritmo matemático (regla de tres) que fue explicado por uno de los grupos que lo realizó.

Una vez aclarado lo que les faltó para dar respuesta al literal **a**, la solución a la actividad propuesta en el literal **c**, se dio sin dificultad, tanto así que pasó al tablero un estudiante de uno de los grupos que no le había dado solución anteriormente.

En la situación cuatro, todos los estudiantes de los cinco grupos que lo habían resuelto, querían pasar a explicar la solución, por lo que fue necesario sortear quien lo haría. Logrando así que el grupo que había tratado de dar solución equivocadamente, pudiera aclarar sus dudas y de esta manera resolverlo correctamente (Ver Figura 50).

Figura 50. Solucion al problema 4.

A continuación se valora en esta actividad la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades.

Motivación por el aprendizaje: lograr sentirse seguros de responder a un cuestionario tipo ICFES, que sería tomado de conceptos previamente identificados. Un estado de ánimo expectante de seguridad y confianza. El regocijo y emoción por hacer todo rápido, bien hecho y completo por ser el último día de actividades. La seguridad de haber alcanzado los objetivos propuestos.

Logros: la disposición y emotividad; el apoyarse en los procesos aplicados anteriormente para hallar las respuestas correctas, a lo cual se mostraron animados, muy satisfechos y seguros. También en el en el desarrollo de esta actividad se pudo constatar:

- Satisfacción de los estudiantes al notar avances en el desarrollo de sus procesos.
- Habilidades y destrezas en el desarrollo de los procesos.
- La empatía y cordialidad construida entre pares, gracias al acompañamiento en el desarrollo de los procesos.
- El 83% (15 estudiantes) de los participantes construyeron un significado robusto acerca de los conceptos de: traslación, homotecia, simetría axial y rotación y el 16.6% (3 estudiantes) restante se apropiaron de forma parcial de los conceptos de homotecia y rotación; construyendo un concepto robusto para la traslación y la simetría axial.

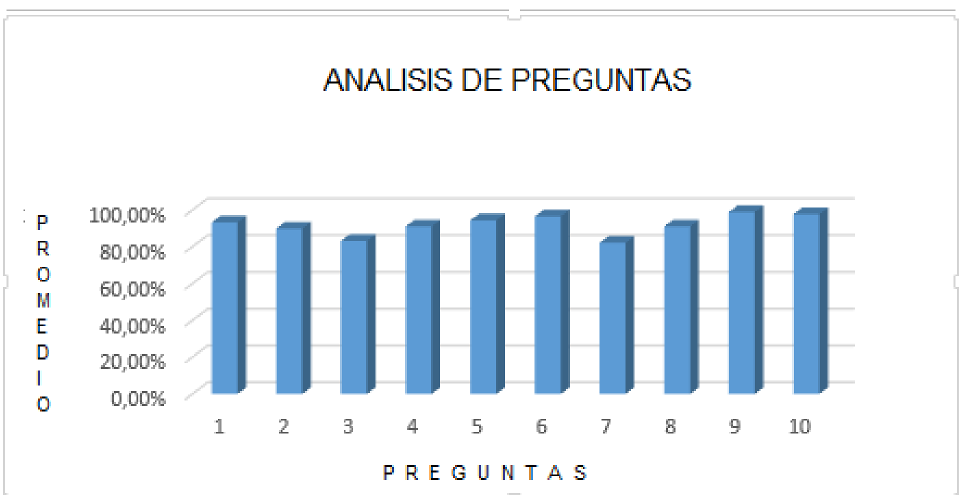
Muestra de estos logros se reflejan en el CD que se anexa a la tesis, en la carpeta Fotos de actividades y dentro de ella evidencia de la actividad 5.

Dificultades: En esta actividad las dificultades radicaron en:

- La falta de comprensión lectora, generando confusiones al momento de dar solución en el cuarto, quinto y octavo problema.
- No encontrar materiales para el desarrollo de la actividad.
- La falencia lectora que condujo a la reiteración del proceso en los problemas y la necesidad de utilizar más tiempo del presupuestado puntualmente en los problemas 1 y 3.

1.3. Resultados de la encuesta de satisfacción

En la Figura 51 se observan los promedios de cada una de las preguntas en una valoración de 1 a 5.



VALORES

1	93,32%
2	90%
3	83,32%
4	91,10%
5	94,44%
6	96,66%
7	82,22%
8	91,10%
9	98,88%
10	97,76%

Figura 51. Resultados de la encuesta de satisfacción.

Las preguntas que se encuentran en el rango entre el 95% y el 100%, fueron en total tres (6, 9 y 10); las cuales hacen referencia a la coherencia entre la estructura de las actividades y el de la evaluación, ya que las pudieron relacionar con problemas previamente trabajados; la preferencia por el trabajo en pequeños grupos, y cómo éste favoreció, según su parecer tanto el desarrollo de las actividades como la construcción de conceptos, gracias a la posibilidad de comparar procesos–resultados obtenidos por cada uno y la efectividad de cada uno, además de la confianza suscitada al interior de cada comunidad de práctica que permitió la corrección y explicación. Finalmente, consideraron que el papel desempeñado por la docente durante el desarrollo del total de las actividades fue fructífero respecto de la construcción de conceptos y avances en sus procesos lectores, aunque al inicio de la implementación esta nueva forma de aprendizaje los desconcertó un poco, debido a que no recibían respuestas directas a sus dudas sino que cada uno era encaminado a encontrar su propia respuesta; proceso que tardaron en entender.

Las preguntas con un porcentaje menor al 85% fueron la 3 y la 7, las cuales están encaminadas a determinar el nivel de dificultad que representó para cada uno de los problemas propuestos durante las actividades; algunos manifestaron que el nivel de dificultad radicó en no saber manejar algunos de los materiales, otros expresaron no conocer la totalidad de términos empleados, un tanto más coincidieron en que sus dificultades radicaron, en no saber realizar los algoritmos necesarios y la gran mayoría coincidió en que se debía a su escasa habilidad en el proceso de comprensión lectora. Con respecto a la séptima pregunta, (Finalizado el desarrollo de las actividades ¿Cree usted reconocer las diferentes transformaciones del plano presentes en su entorno?), el promedio obtenido es el más bajo de la encuesta, dando soporte a una de las conclusiones (el 16.7% (3 estudiantes) se apropiaron de forma parcial de los conceptos de homotecia y rotación; construyendo un concepto robusto para la traslación y la simetría axial); algunas de sus razones fue la dificultad que representó en medir ángulos con transportador; encontrar algunos centros de rotación; confusión al encontrar los factores de conversión por sus incipientes bases aritméticas y su bajo nivel de su capacidad lectora.

Del análisis general de la encuesta se constata que en general a los participantes les agradó la estructura de las actividades y el cómo se desarrollaron.

Conclusiones del capítulo 4

Los resultados de cada actividad, se determinan a partir del desarrollo, motivación por el aprendizaje, logros y dificultades; su desarrollo se describe inicialmente en lo que habrán de solucionar los estudiantes para seguidamente expresar, cómo a través de la socialización de cada uno de los problemas, se genera el conocimiento y la construcción del concepto de traslación, homotecia, simetría axial y rotación respectivamente.

Los estudiantes manifiestan un gran sentido de cooperación con el fin de alcanzar la resolución de problemas, dando a saber sus interpretaciones para así dar solución a las dudas presentes entre ellos.

Al resolver los problemas, los estudiantes muestran preferencia por lo concreto, es decir, la manipulación de objetos (cuando era posible), pues tratan de resolver todos los problemas con este proceso, para después con la ayuda de la visualización y la representación obtener con más rapidez y nivel de confiabilidad los resultados.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre la construcción de significado robusto del concepto de transformaciones en el plano en los estudiantes participantes de séptimo grado de la Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la paz, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos permiten enfatizar en algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo de este trabajo, ellos son:

- En la geometría plana, específicamente en la construcción del concepto de transformaciones en el plano (traslación, rotación, simetría axial y homotecia) se destacan los investigadores Van Hiele (1957), Bishop (1989), De Villiers (1991, 1999), Barcia (1999), Campistrous y Rizo (1980-2009), Sánchez (2006), Jeffrey, Dimitry, Humphrey y Atebe Uyo (2008), Galante, García y López (2008), Panaoura y Gagatsis (2009), Coronel (2010), los cuales comparten opiniones, como la necesidad de continuar con la temática en el currículo escolar, enfatizan en la urgencia de desarrollar un proceso de enseñanza que dé prioridad a la aplicación de la temática en la resolución de situaciones prácticas y problemas no rutinarios; desligándose de esta manera de la geometría netamente cartesiana.
- La enseñanza de la geometría plana, específicamente sobre la construcción del concepto de transformaciones en el plano (traslación, rotación, simetría axial y homotecia) abordada desde la identificación de las propiedades, facilita el proceso de resolución de problemas, no solo de índole matemático, sino además de la vida real.

- El trabajo con regla, compás y lápiz y preguntas específicas permite al estudiante identificar con mayor facilidad las características y propiedades propias de cada transformación en el plano, complementando de esta manera la habilidad de visualización que a simple vista no siempre permite percibirlas.
- El proceso de representación en la geometría plana propicia con respecto a la realidad objetiva la modelación ya sea mental, a través de dibujos o recurriendo a la interacción con los objetos; dichos aspectos son necesarios para la construcción de significado robusto de los conceptos de transformaciones en el plano.
- Al culminar el proceso de implementación de las actividades, se obtuvieron los siguientes resultados:
    - La disposición de un kit de materiales personal permitió hacer más efectivo el desarrollo de las actividades, permitiendo mayor precisión y exactitud en ellas.
    - El uso de los materiales didácticos concretos generan mayor disposición, seguridad y agilidad al momento de la resolución de los problemas.
    - Se constató el carácter social para la construcción de cualquier concepto, específicamente el de transformaciones en el plano ya que en el trabajo por grupos (3 estudiantes) y/o en la socialización de las actividades se vislumbran aportes, cooperación para diferenciar e identificar posiblemente la(s) estrategia(s) más acertadas a utilizar por los estudiantes para la resolución de los problemas y es en este momento donde se percatan de sus errores, rectificándolos.

- Al momento de la resolución de los problemas de las pruebas se constató que aprendieron de los errores cometidos, al punto de buscar las estrategias de solución más precisas, demostrando la construcción de los conceptos de traslación, rotación, simetría axial y homotecia.
- El deseo de hacer las cosas siempre de manera correcta y en la búsqueda de una plena satisfacción, al darse cuenta de los avances en el desarrollo de sus procesos y el mismo estimulo en el esfuerzo para encontrar las respuestas requeridas, les fue favorable a los estudiantes el haber fortalecido su sentido de cooperación, compañerismo, dinamismo, confianza mutua y agrado de compartir sus esfuerzos.
- Uno de los grandes alcances claramente identificados fue el progreso y cambio actitudinal de los estudiantes quienes inician al comienzo de los procesos de socialización con notorias precauciones y dudas dadas por su timidez, pero al empezar a notar que sus argumentos eran válidos y aceptadas por todos reflejaron un cambio absoluto, mostrándose participativos y dinámicos. Fue importante valorar el que los errores que se cometían eran respetados sin que declarara rechazo alguno, al contrario las discusiones suscitadas permitieron descubrir importantes conclusiones.
- Durante el desarrollo y proceso evaluativo fue notorio además concluir los positivos alcances en el buen ejercicio lector, ya que se mostraron bastante diligentes en este aspecto al notárseles mayor facilidad deductiva e interpretativa vista en la aplicación que daban en sus problemas prácticos.
- El 83,3 % (15 estudiantes) de los participantes a todas las actividades construyeron un significado robusto acerca de los conceptos de traslación,

homotecia, simetría axial y rotación; el 16.7% (3 estudiantes) restante se apropiaron de forma parcial de los conceptos de homotecia y rotación; construyendo un concepto robusto para la traslación y la simetría axial.

- La intervención del docente fue apropiada y oportuna al momento de orientar el proceso, despejando dudas y enrumbando al estudiante de tal manera que encontrara con mayor facilidad y destreza el camino conductor al encuentro de sus respuestas correctas, de tal manera que pudiesen afianzar y obtener con seguridad su objetivo.
- La encuesta de satisfacción refleja claramente la curiosidad al encontrarse con una nueva forma de abordar la temática planteada y su notoria aceptación gracias a esta metodología práctica y llamativa. Dejaron ver el aprecio, agrado y valoración por sus propios avances dada la motivación y el trabajo compartido entre pares y la docente.

RECOMENDACIONES

Una vez terminado el proceso de implementación se hizo necesario hacer hincapié en poner en práctica las siguientes recomendaciones, con el fin de optimizar los resultados en la construcción de significado robusto del concepto de las transformaciones en el plano, estas son:

- Las actividades están diseñadas de forma no sistemática-secuencial, por ende pueden llevarse a la práctica según se considere pertinente, pues no se altera o afecta la construcción del significado robusto de los conceptos.
- Propiciar en el aula un ambiente de comunidad de práctica, donde cada aporte por pequeño que sea genera conocimiento, pues del error también se aprende y además facilita los procesos de aprendizaje.
- El uso de material didáctico en la construcción de conceptos fortalece las capacidades de visualización y representación, potenciando el pensamiento geométrico en el estudiante.
- Para dar inicio a la implementación de las actividades se ha de comprometer al estudiante para que desempeñe un papel dentro de la comunidad de práctica, el cual estará supeditado al reconocimiento de sus habilidades y dificultades.
- El ejercicio de actividades en equipos de trabajo, permite en los estudiantes un mayor desarrollo socio-afectivo entre pares, de tal manera que les genera mayor confianza, dinamismo y seguridad al momento de buscar sus objetivos, esto no exige entonces, por supuesto, tener siempre presente este formato, teniendo en cuenta además sus sugerencias, inquietudes y puntos de vista que apunten al mejoramiento y fortalecimiento del proceso.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Abarca, R. (2005). Software para el aprendizaje de la Geometría plana y espacial en estudiantes de diseño. Trabajo investigativo en opción al grado de Magíster en Educación Mención Informática educativa, Universidad de Chile. Chile. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/abarca_r/sources/abarca_r.pdf

Abarca, S. (s.f). *Método de enseñanza de resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Universidad La Habana. Cuba.

Abdón, I. (2000). Evaluemos competencias Matemáticas 7°-8°-9°. Magisterio. Colombia.

Acero, L. y Chaparro, A. (2015). La constitución de la Unidad Similar a partir de las formas geométricas de la sección áurea concebida como proceso de matematización. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperable el 22 de abril de 2015 de la URL: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/508/231

Acevedo, J. (2009). *Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videojuego, como práctica socialmente compartida.* Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/741/

Acevedo, J. y Camargo, L. (2011). *El tetris como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación).* En Perry, Patricia (Ed.), Memorias 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 333-344). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/3859/

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. Tesis para optar al título de Doctor en Pedagogía, Universitat de Barcelona. Brasil. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/41422/1/TOL119.pdf

Alsina, C. (s.f). *Geometría y realidad.* Universidad Politécnica de Cataluña. España. Recuperable el 9/12/13 en la URL: http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/documents/geometria_realidad.pdf

Alsina, C. et al (1991). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. España. Editorial Síntesis.

Ardila, A. (2014).*Transformación Curricular de Matemática en la Educación Básica General Panameña.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Recuperable el 15 de abril de 2015 de la URL: http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2014.pdf

Argudín, Y. (2006). *Educación basada en competencias: nociones y antecedentes.* Trillas. México.

Arranz, J. y Cruz, M. (2006). Una reflexión personal sobre la Didáctica de la Geometría. Recuperable el 9 de enero de 2014 de la URL: http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material098/geometria/textos/didac.htm

Arteaga, S. (2007). Las concepciones de profesores de primaria sobre la Geometría y la enseñanza de los polígonos. Tesis en opción al grado de Magister en Desarrollo

Educativo, Universidad Pedagógica Nacional. México, D.F. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://biblioteca.ajusco.upn.mx/pdf/23777.pdf

Asami, Y. (2010). *A study of problem solving oriented lesson structure in mathematics in japan*. Recuperado el 23 de 10 de 2014, de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/17b/CERME7_WG17B_Asami_Johansson.pdf

Ballester, P. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I y II. La Habana: Pueblo y Educación.

Ballestero, E. y Gamboa, R. (2011). Enseñanza y aprendizaje de la geometría: la perspectiva del profesor. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM. Recuperable el 13 de febrero de 2015 de la URL: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2373.pdf

Bauer, J. (s.f). The State of Secondary Geometry: A Reflection in Light of the NCTM1 Standards. Árticulo. Wayne State College, Nebraska. Recuperable el 5/12/13 en la URL: http://academic.wsc.edu/faculty/jebauer1/state_of_secondary_geometry.pdf

Bello, W. (2013). Situaciones problema que generan motivación hacia el estudio de las matemáticas en particular para la selección del énfasis lógico–matemático, Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño, Bogotá D.C. Actividad 11.

Beltrametti, M. y otros (2005). Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes del profesorado en Matemáticas. Universidad Nacional del Nordeste.

Argentina. Recuperable el 8/12/14 en la URL: http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-019.pdf

Beltrametti, M., Esquivel, M. y Ferrari, E. (2002). Teoría de Van Hiele y Cabri-Géomètre en la construcción del concepto de transformaciones rígidas del plano. Recuperable 19 de febrero de 2015 de la URL: http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-017.pdf

Blanco, H. (2009): Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Recuperable el 8/12/14 en la URL: http://www.escueladigital.com.uy/geometria/5_cuerpos.htm.

Blanco, J. (1996). La resolución de problemas: una revisión teórica, revista SUMA[21] febrero 1996, pp. 11-20. Recuperable el 10/12/13 en la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf

Bohórquez, L. (2004). Aprendizaje del concepto de área: incidencia del trabajo en colaboración, la resolución de problemas y el Cabri-Geometry en la comprensión de aspectos asociados al concepto de área. Trabajo en opción de grado de Magister en Educación, Universidad de los Andes. Colombia. Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://cife.uniandes.edu.co/tesis/luis_angel_bohorquez.pdf

Bransford, J. y Stein, B. (1988): *Solución ideal de problemas*. Editorial Labor, Barcelona. España.

Camacho, M. y Morales, A. (s.f). Algunas características del curriculum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1269208974.pdf

Camacho, W. (2010). *Prácticas evaluativas en la clase de geometría en grado noveno.* Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de Octubre de 2010). Bogotá, Colombia. Universidad de Granada. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/1047/

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

Cañadas, M., Durán, F., Gallardo, S., Martínez, M., Molina, M., Peñas, M. y Villegas, J. (2009). *Geometría plana con papel.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/932/

Castela, C. y Guzmán, I. (2005). *Comparación de la enseñanza de la geometría en los sistemas escolares chileno y francés.* En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 295-301). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperable el 10 de enero de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/5951/

Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de magisterio de la E.N.M.P.N. Tesis en opción de grado de Magister en Matemática Educativa, Universidad pedagógica nacional. Tegucigalpa M.D.C. Recuperable el 8/12/13 en la URL:

http://www.upnfm.edu.hn/bibliod/images/stories/Tesis/sepnov2010/idania_castellanos.pdf

Castiblanco, A. y Moreno, L. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Recuperable el 13 de febrero de 2015 de la URL: http://186.113.12.12/discoext/collections/0019/0002/02550002.pdf

CERME7: Grupo de Trabajo 4. Geometría Enseñanza y Aprendizaje. Recuperable el 12 de febrero de 2015 de la URL: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/?id=call-for-papers

Cheuquepán, D. y Barbé, J. (2012). Dinamización matemática. Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Marzo de 2012, Número 29, páginas 131-154 ISSN: 1815-0640. Recuperable el 21 de febrero en la URL: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo12.pdf

Colectivo de autores. (1988). *Psicología.* Libro de textos. La Habana: Pueblo y Educación.

Conde, R y Conde Y. (2005). El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos. V Congreso Internacional Virtual de Educación. Recuperable el 12 de febrero de 2014 en la URL: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/24662/Documento_completo.pdf?sequence=1

Coronel, A. (2010). Transformaciones en el plano. Cuaderno de trabajo N° 1, Alianza de Matemáticas y Ciencias del Turabo (AMCT), Universidad del Turabo. Puerto Rico.

Recuperable el 8/12/13 en la URL: http://www.suagm.edu/turabo/pdf/amct/Publicaciones/Cuaderno-Transformaciones-PlanoProfa-A-Coronel.pdf

Coronel, A. (2010).Transformaciones en el plano. Recuperable el 11 de febrero de 2015 de la URL: http://www.suagm.edu/turabo/pdf/amct/Publicaciones/Cuaderno-Transformaciones-PlanoProfa-A-Coronel.pdf

Cuadernillo Pruebas Saber 9º 2012, bloque 1. Preguntas 10, 11 y 12. Recuperable en la URL: http://www2.icfes.gov.co/examenes/component/docman/doc_view/478-4-matematicas-9-2012?Itemid

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Díaz, D. y Bazán, K. (2011). Enseñanza de las transformaciones isométricas en el primer nivel de educación media de adultos: resultados de una experiencia. Recuperable el 9 de febrero de 2015 de la URL: www.redalyc.org/pdf/979/97923680003.pdf

Díaz, J. (2003). Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática. Grupo de Investigación: Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática. Universidad de Granada. España. Recuperable el9/12/13 en la URL: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/fundamentos_tem.pdf

Educación artística: libro para el docente. (2010). México. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://cuestionarios.dgme.sep.gob.mx/docentes_nov_10/educacionartistica.pdf

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperable el 11 de enero de 2015 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf p.57

Falk, M. *(1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá:* Universidad Antonio Nariño.*pág 16.*

Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Vanezolana, VIII(1), 21.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Intermedio. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Superior. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Nivel Intermedio. 2005.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones. Primer Nivel. 2002.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Franchi, L. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere* (24), 63 - 71.

Franchi, L., y Hernández, A. (2004). *Tipoñogía de errores en el área de la geometría plana.* Parte II (Vol. 8). Mérida: Educere.

Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela* (5).

Galante, D. (s.f.). The role of the music to learn geometrical transformations. Palermo, Italia. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://math.unipa.it/~grim/21_project/Galante189-194.pdf

García, S. y López, O. (2008). La enseñanza de la Geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa. México. Recuperable el 19 de febrero de 2014 de la URL: http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf

Garret, R. (1995). Resolver problemas en la enseñanza de las Ciencias. Alambique. *Monografía. La resolución de problemas.* No.5. Año II. Julio, Barcelona. España, pp. 6-15.

Geometría en la resolución de problemas. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://euclides.us.es/da/investiga/geomresolpro.pdf

Gualdrón, E. y Gutiérrez, A. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. Artículo publicado en la SEIEM/06. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/GualdronGut06.pdf

Guzmán, A. (2013). El desarrollo de competencias ciudadanas en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática. Un estudio en el Colegio Distrital Alfonso Reyes Echandía. Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

Guzmán, M. de (2001). La actividad subconsciente en la resolución de problemas. Red Científica. Recuperable el 15 de octubre de 2014 de la URL: http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html

Imenes, L. M. y Lellis, M. (2009). *Matemática*. São Paulo: Moderno.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Madrid: Editorial Sínteses.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon.

Labarrere, A. (1987). *Bases pedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1996). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Lakoff, G. (2008). Citas matemáticas. Recuperable el 23 de enero de 2014 de la URL: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=6272:g-lakoff&catid=110:citas-matemcas&directory=67

Lesh, R., y Zawojewski, J. (2007). *Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Mabuchi, T. (2000). Transformações Geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado ás práticas escolares nem à formação de professores. (Tesis de

Maestría no publicada), Pontifícia Universidade Católica – SP). Recuperado el 18 de enero de 2012 de la URL: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/setsuko_mabuchi.pdf p.192

Mapas de progreso del aprendizaje. Matemática: Geometría. Ministerio de Educación de Perú. Recuperable el 2 de abril de 2014 en la URL: http://www.ipeba.gob.pe/estandares/Mapasprogreso_Matematica_Geometria.pdf

Mashingaidze, S. (2012). The Teaching of Geometric (Isometric) Transformations at Secondary School Level: What Approach to Use and Why? Published by Canadian Center of Science and Education. Asian Social Science; Vol. 8, No. 15; 2012, ISSN 1911-2017. Recuperable el 23 de febrero de 2015 en la URL: http://ccsenet.org/journal/index.php/ass/article/download/22662/14641

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, Resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Editorial Paidos.

Mazarío, I. y otros. (2000). Resolución de problemas. Universidad de Matanzas. Cuba. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/index/assoc/HASH68af.dir/doc.pdf

Miquilena, J., Sangronis, D. y Coello, Y. (s.f). Software educativo geotras: Una herramienta de apoyo docente para el proceso de enseñanza del contenido transformaciones en el plano.

Molero y Salvador (s.f). Resolución de problemas, Estrategias heurísticas. Recuperable el 9 de enero de 2015 de la URL:

http://www2.caminos.upm.es/departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Problemas/ESTRATEGIAS%20HEUR%C3%8DSTICAS.pdf

Montenegro, I. (2000). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el proceso de aprendizaje. Universidad pedagógica nacional. Recuperable el 5/12/13 en la URL http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted11_06arti.pdf

Montes, S. (2012). Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego Pac-Man. Tesis en opción al grado de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/7739/1/sergioandresmontesalarcon.2012.pdf.

Moraes, M. y Santos, D. (2013). Las transformaciones isométricas en los libros didácticos del 6º año recomendados por el PNLD. Recuperable el 12 de febrero de 2014 de la URL: www.clame.org.mx/documentos/alme26.pdf

Morales, C. y Majé, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Ciencias de la Educación. Universidad de la Amazonia. Recuperable el 12 de abril de 2014 en la URL: http://www.elitv.

Mori, I. y Onaga, D. S. (2009). *Matemática: Ideias e Desafios.* 15. ed. São Paulo: Saraiva.

Murillo, A. (s.f). Geometría Fractal o el diseño de la naturaleza, Universidad de otoño. España. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://www.cdlmadrid.org/cdl/htdocs/universidaddeotono/unioto/matematicas/Introfractal.pdf

Nápoles y Negrón (s.f). El Papel de la Historia en la Integración de los Marcos Geométrico, Algebraico y Numérico en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Revista virtual, Matemática Educación e Internet. URL: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV4n12003/PapeldeLaHist/pag1.htm

NCTM (1990). Sugerencias para resolver problemas, México, Trillas.

Niño, C. (2011). Transformaciones geométricas del plano como herramientas para generar familias de cónicas. Trabajo final en opción al grado de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/5288/1/claudialeonorninocubillos.2011.pdf

Panoura, G. y Gagatsis, A. (2009). The geometrical reasoning of primary and secondary school students. Árticulo.University of Cyprus. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-08-panaoura-gagatsis.pdf

Patsiomitou, S. (2008). The Development of Students Geometrical Thinking through Transformational Processes and Interaction Techniques in a Dynamic Geometry Environment. University of Ioannina, Greece. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://proceedings.informingscience.org/InSITE2008/IISITv5p353-393Pats457.pdf.

Pérez, D. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Pérez, S y Guillén, G. (2006, 2007), Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la Geometría y su enseñanza. Universidad de Valencia. España. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&ved=0CDEQFjAB&url=http%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F2748854.pdf&ei=XsOlUu7hAtDmkAfDrYDwCg&usg=AFQjCNGJlJhmohpc3YONNNVX6xbzaGhOSg&bvm=bv.57752919,d.eW0

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Second edition. Princeton university press, new Jersey.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Rincón, G. (1994). Un recorrido por la Geometría, capítulo 6. Colombia.

Ripplinger, G. (2006). *A Simetria nas práticas Escolares.* (Tesis de Maestría no publicada), Universidade Federal do Paraná. Recuperado el 15 de febrero de http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080//dspace/handle/1884/3951

Rivera, O. (2011). Ilustración de algunas relaciones existentes entre las propiedades geométricas del plano y las propiedades y operaciones de los números reales. Tesis para opción al grado de Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/4759/1/PARA_COMITE_EVALUADOR.pdf

Rodríguez, M. (1999). Estudio de las traslaciones y dilataciones a través de mecanismos. Monografía para optar al título de Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador.* Holguín: Tesis doctoral no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero.

Sanabria, G. (s.f). Resolución de problemas geométricos. Recuperable el 20 de febrero de 2014 de la URL: http://www.cientec.or.cr/matematica/2010/ponenciasVI-VII/prob_geomv2.pdf

Sánchez, M. (2006). Geometría interactiva aplicada al estudio de los movimientos en el plano. España. Recuperable el 11 de febrero de 2014 de la URL: http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/guia_profesor.pdf

Sanz, S. (2005). Comunidades de práctica virtuales: acceso y uso de contenidos. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento Vol. 2 - N.º 2. Recuperable el 09 de febrero de 2014 de la URL: http://www.uoc.edu/rusc/2/2/dt/esp/sanz.pdf

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving, p. 28. In: F. R. Curcio (Ed.) Teaching and Learning: A problem Solving Focus. Reston, VA: NCTM.

Souza, R. y Pataro, M. (2009). *Vontade de Saber Matemática*. São Paulo: FTD.

Sriraman, B. y Engish, L. (2010). *Theories of Mathematics Education.* New York: Springer.

Tafur, A. (2014). Construcción del concepto de volumen a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado octavo. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Thaqi, X., Giménez, J. y Rosich, N. (s.f). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. Recuperable el 19 de febrero de 2015 en la URL: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_Xhevdet.pdf

Torres, M (s.f). Perspectives en l´Ensenyament de la Geometriapelsegle XXI, Documento de discusión para un estudio ICMI, PMME-UNISON. Febrero. 2001. Recuperable el 12 de abril de 2014 en la URL: http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Vergnaud, G. (1992). *El niño las Matemáticas y la realidad.* Trillas. México.

Viar, R. (2007). Estrategias en la resolución de problemas. I.E.S. “Conde de Aranda” ALAGON. España. Recuperable el 13 de febrero de 2014 de la URL: http://www.unizar.es/ttm/2007-08/ESTRATEGIASI.pdf

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Revista de didáctica de las Matemáticas: NUMEROS, volumen 78. Recuperable el 15 de febrero de 2014 de la URL: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf

Waldegg, G. (1998). La Educación Matemática ¿Una disciplina científica? Instituto de Investigaciones en Educación. Colección pedagógica universitaria N°. 29. México. Recuperable el 03 de febrero de 2014 de la URL: http://www.uv.mx/cpue/coleccion/No_29_Coleccion.html

Wenger, E, McDermott, R. y Snyder, W. (2002) (en inglés). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge*. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1-57851-330-8.

Wenger, E. (2007): *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

Werner, E. (2001). Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad. Paidós. España. Recuperable el 10 de abril de 2014 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S

XIX Competencias regionales de matemáticas, Septiembre de 2000 primer nivel (problema 19). Recuperable en la URL: http://oc.uan.edu.co/math/Crm00pn/crmpn00.htm

XIX Olimpiada matemática provincial de Albacete. Febrero-Mayo de 2008 Nivel 12/14 primera fase (problema 4: las cajas). Recuperable en la URL: http://scmpm.blogspot.com/p/problemas-de-la-olimpiada-matematica.html

XVII Competencias regionales de matemáticas nivel intermedio (martes 29 de septiembre, 1998, pregunta 11). Recuperable en la URL: http://oc.uan.edu.co/math/Crm98ni/crmni98.htm

Yaglom, I. (1975). Geometric transformations I. Traducido por Allen Shields. Universidad de Michigan, Estados Unidos; pág. 23 y 24. Editorial Committee.

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta a profesores de Matemática

Objetivo: Determinar las insuficiencias que presenta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría plana, específicamente sobre la construcción de significado robusto de los conceptos de las transformaciones en el plano (traslación, homotecia, simetría axial y rotación).

Desarrollo: Estimado profesor (a), la presente encuesta reviste una gran importancia para perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría plana, específicamente sobre la construcción de significado robusto de los conceptos de las transformaciones en el plano (traslación, homotecia, simetría axial y rotación), motivo por el cual es necesario tener presente sus valiosas opiniones. Por lo tanto usted ha sido seleccionado para realizar la misma, con vista a la realización de una investigación sobre este tema en el grado séptimo. Por su ayuda, muchas gracias.

I. Datos Generales.

Lic.: Sí __ No__

Años de Experiencia: ______

Total de veces que ha trabajado el grado: ______

Institución: ____

II. Cuestionario.

1. Marque con una X los medios de enseñanza que usted utiliza en las clases de geometría del espacio.

____ Tablero.

____ Regla, escuadra, compas, transportador

____ Objetos concretos.

____ Cuerpos geométricos.

____ Guía de trabajo.

____ Software de geometría dinámica.

____ Otros. ¿Cuáles? ____

2. ¿Cuáles son las dificultades que usted le aduce al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la geometría plana en las Instituciones, específicamente sobre la construcción de significado robusto de los conceptos de las transformaciones en el plano (traslación, homotecia, simetría axial y rotación).?

3. Mencione alguna de las causas que han provocado las dificultades anteriores.

4. ¿Puede ofrecer un ejemplo que propicie un robusto proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría plana?

Anexo 2. Evidencia de permisos de padres

Señor (a) padre de familia.
Institución Educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz.

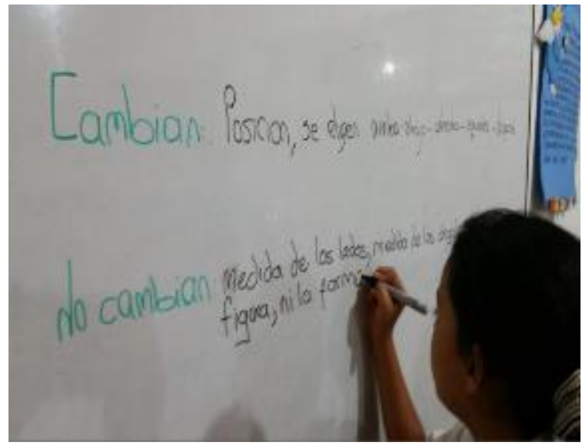
Cordial saludo:

Como requisito para optar al título: Magister en Educación Matemática que adelanto en la Universidad Antonio Nariño de Bogotá estoy desarrollando las prácticas pertinentes, en las cuales, con la autorización correspondiente de la rectora de esta Institución. Participan en ella los estudiantes del grado 7-1 por lo que es necesario un registro fotográfico y/o videos, en los cuales su hijo (a): ____ aparecería en ellas; para lo cual necesito su autorización como fundamento legal en tal procedimiento.
Agradezco su colaboración.
Atentamente:

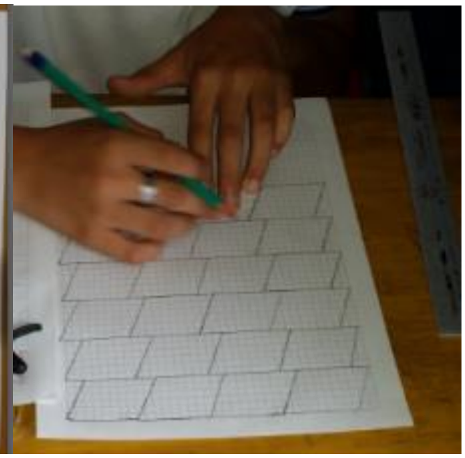
______________________	______________________	______________________
RECTORA	LIC. ANGELA TAFUR	PADRE DE FAMILIA

Anexo 3. Evidencias de la actividad 1

Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad desplazamientos



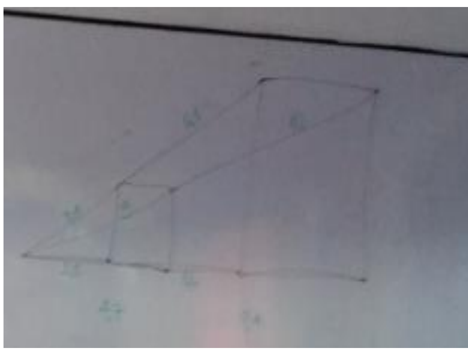





Anexo 4. Evidencias de la actividad 2

Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad zoom.

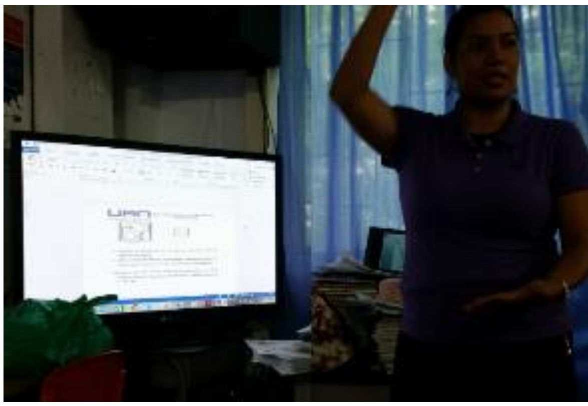






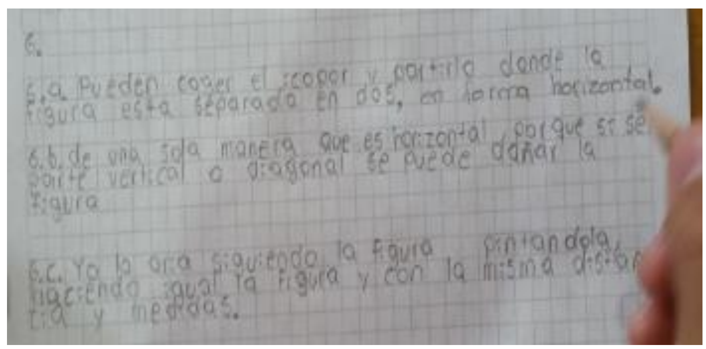


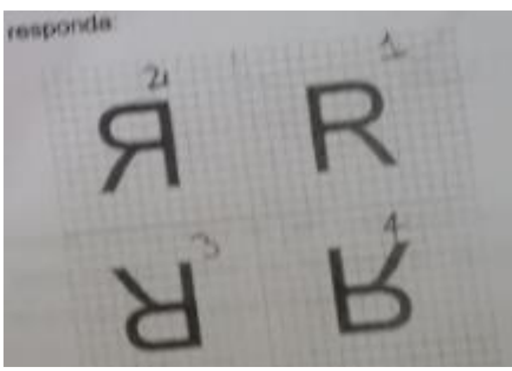


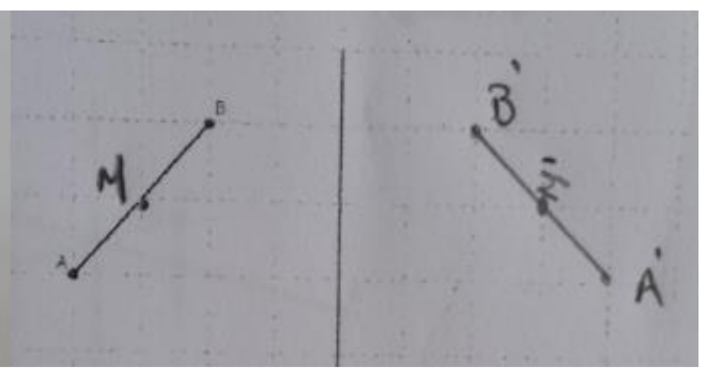



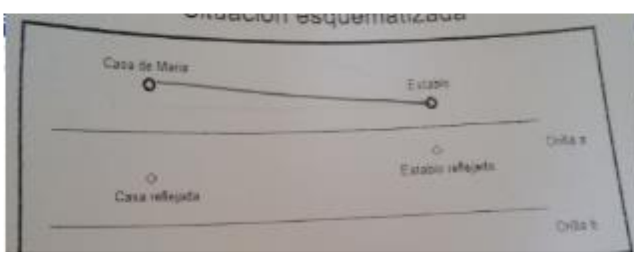

Anexo 5. Evidencias de la actividad 3

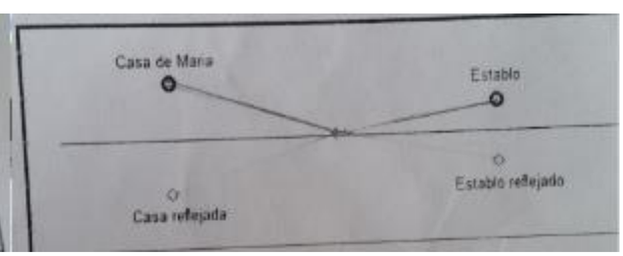
Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad reflejos.



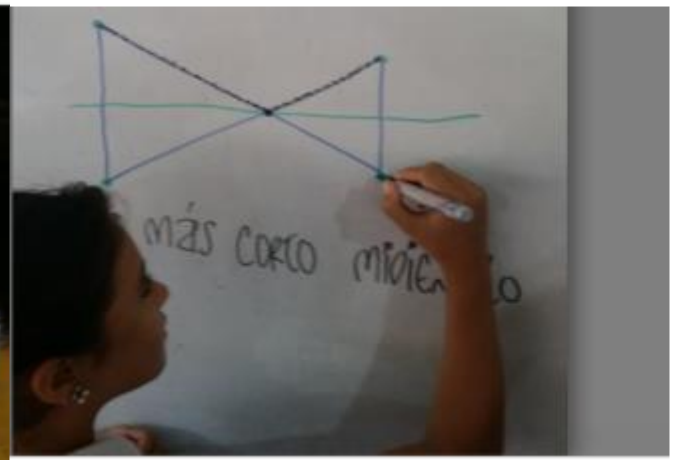
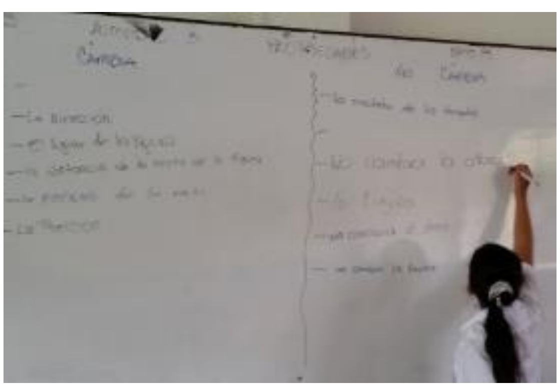






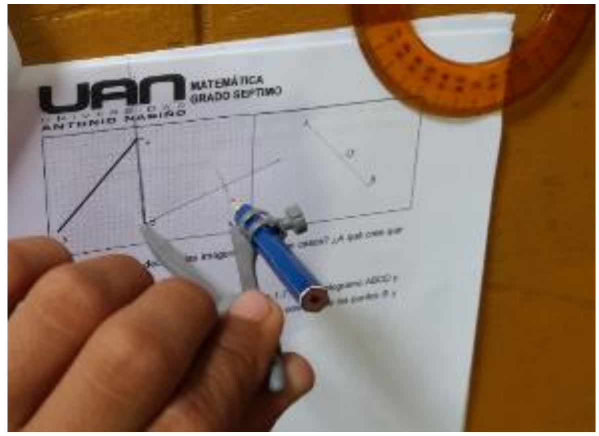


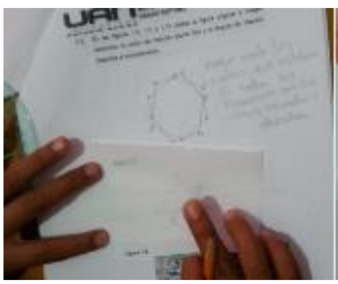


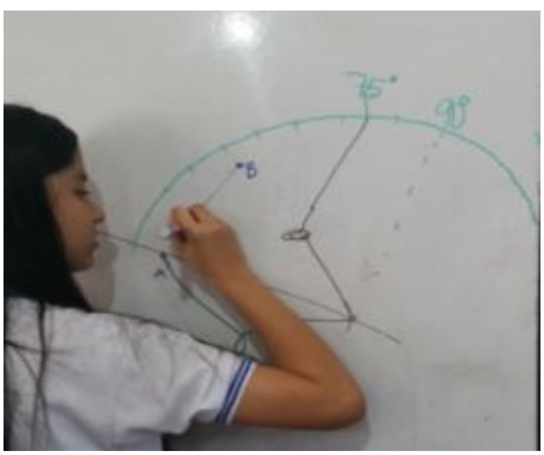




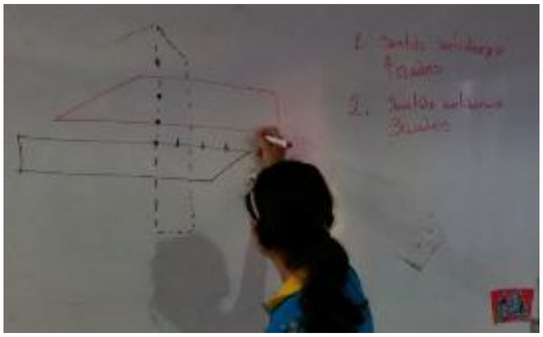

Anexo 6. Evidencias de la actividad 4

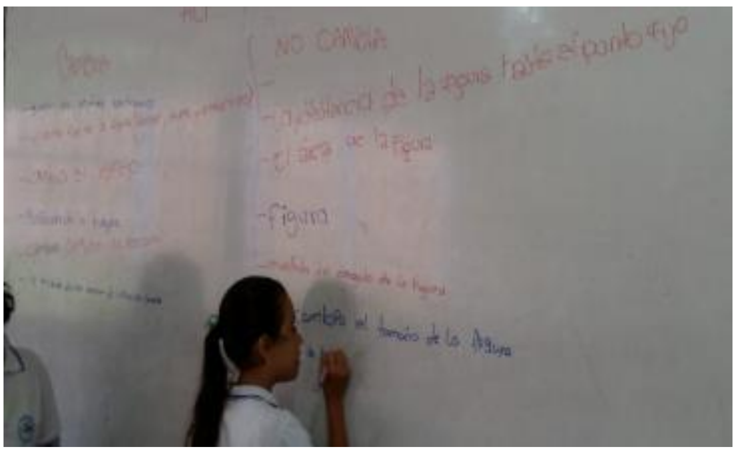
Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad vueltas y más vueltas.

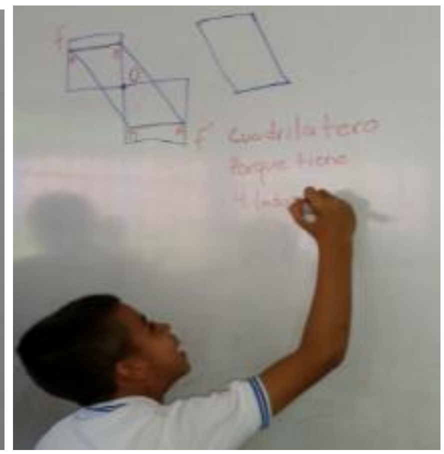






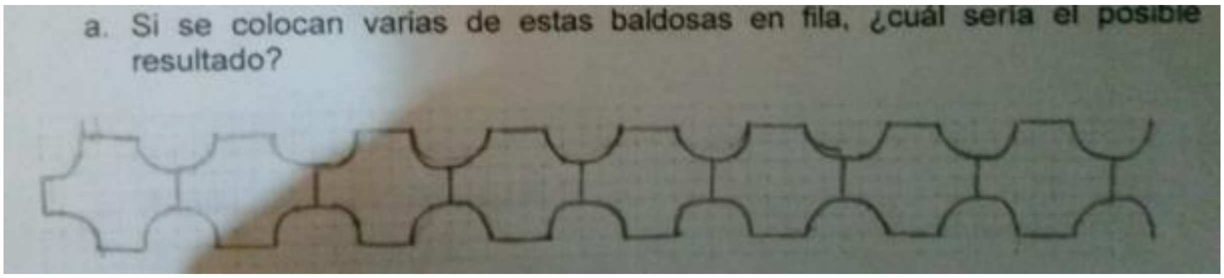


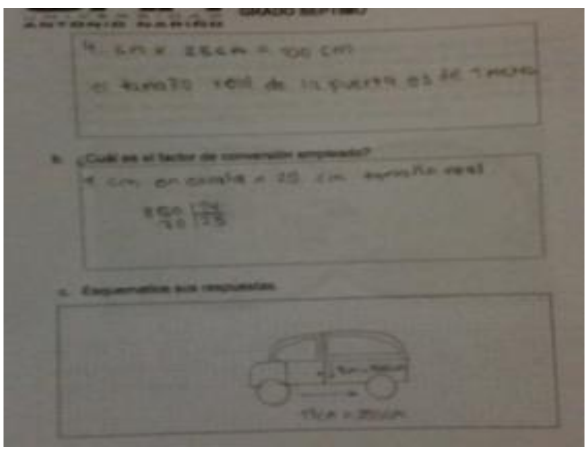

NO CAMBIA
-figura

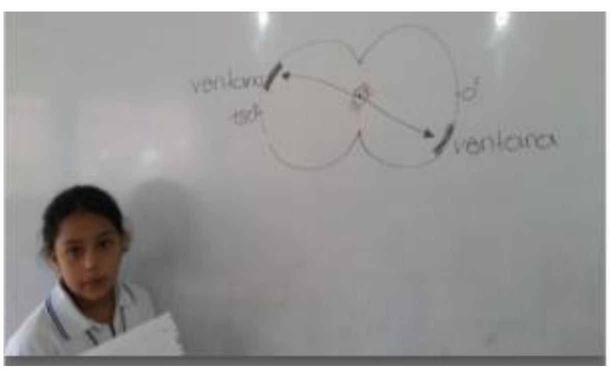

Cuadrilatero
Porque tiene

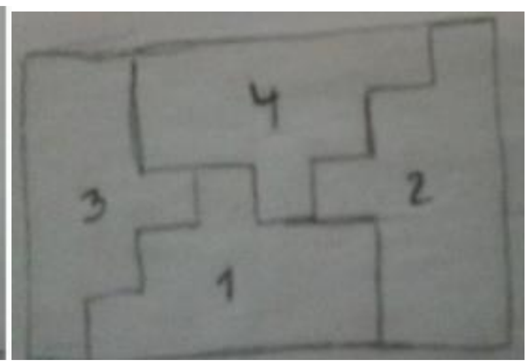
Anexo 7. Evidencias de la actividad 5

Objetivo: mostrar los registros fotográficos del desarrollo de la actividad evaluando conceptos.


a. Si se colocan varias de estas baldosas en fila, ¿cuál sería el posible resultado?




ventana
ventana


4
3
2
1

Anexo 8. Encuesta de satisfacción

Objetivo: mostrar los registros fotográficos de la encuesta de satisfacción.

Apreciado estudiante, ya terminamos las actividades, a partir de su experiencia como participante, responda las siguientes preguntas de 1 a 5, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación.

1. ¿Considera usted que la estructura de las actividades desarrolladas motivan el estudio de la geometría?

   1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

2. ¿Cree usted que su desempeño en la asignatura de geometría mejoraría si actividades con esta estructura se repitieran con frecuencia?

   1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

3. ¿Las actividades propuestas constituyeron un reto para usted?

   1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

4. ¿Considera usted que durante el desarrollo de las actividades se vivió un verdadero ambiente geométrico?

   1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

5. ¿Se sintió usted motivado a desarrollar los retos planteados en las actividades?

   1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

6. ¿Considera usted que la prueba final es coherente con lo trabajado en las actividades?

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

7. Finalizado el desarrollo de las actividades ¿Cree usted reconocer las diferentes transformaciones del plano presentes en su entorno?

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

8. ¿Considera usted que el lugar destinado al desarrollo de las actividades fue el adecuado?

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

9. ¿Considera usted que el trabajo por equipos favoreció el desarrollo de las actividades y la construcción de conceptos?

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

10. ¿Considera usted que el rol desempeñado por la docente durante el desarrollo de las actividades favoreció en el estudiantes la construcción de conceptos?

1☐ 2☐ 3☐ 4☐ 5☐

Gracias por sus sinceras respuestas.