REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

LA CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL USO DE PARADOJAS EN EL SÉPTIMO GRADO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Autor: Carlos Alberto Berrío Pérez

Bogotá D.C.

2015

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

LA CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DEL USO DE PARADOJAS EN EL SÉPTIMO GRADO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Autor: Carlos Alberto Berrío Pérez

Directores de tesis:

Mary Falk de losada (PhD.)

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez (PhD.)

Bogotá D.C.

2015

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Junio 13 de 2015

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar debo agradecer a Jesucristo por premiarme con la persona que tengo y que ha sido mi motivación y mi apoyo permanente. Agradezco a los profesores Mary Falk y Osvaldo Rojas porque desde el momento en que aceptaron ser mi directores de tesis, este proyecto pasó a ser una realidad.

Al profesor Osvaldo un excelente maestro y un excelente ser humano. Nunca alcanzarán mis palabras para agradecerle su apoyo permanente, su paciencia, sus acertados comentarios, observaciones y correcciones. A la profesora Mary por los cambios de rumbo que produjo en mi vida académica. Para mí siempre fue muy grato trabajar bajo su dirección y disciplina.

Agradezco a mi gran amigo, siempre he podido contar con él, quien me acompañó siempre durante mi maestría, por soportarme con su paciencia en todo momento. Este logro no es sólo mío, también es de él. Ha compartido conmigo los altibajos de mi vida. Un inmenso agradecimiento. A mis viejos por su infinito amor y su constante ayuda durante toda mi vida y mis fracasos.

Agradezco a la Universidad Antonio Nariño por el apoyo que me brindó durante este período. También agradezco a los profesores de la maestría que me acompañaron durante este proceso. Lo más hermoso de esta maestría ha sido darme cuenta una vez más que aunque muchas cosas han pasado en estos dos años, la vida me ha regalado a un ser hermoso a mi alrededor, quien ha llenado mi vida y mi soledad. Gracias amigo.

SÍNTESIS

Este trabajo analiza la incidencia que tiene la aplicación del enfoque teórico de la resolución de problemas, para motivar el estudio de la conservación del área a través del uso de las paradojas geométricas, en los grados séptimos de la Institución Educativa Distrital Cedid Ciudad Bolívar. La investigación se sustenta en la visualización matemática y en la comunidad de práctica de Wenger (2002), para comprender dichas paradojas. Se diseñan actividades, donde se integra los contenidos de números enteros, fracciones y geometría, para explicar coherentemente las inconsistencias de estas paradojas. Estas actividades se realizan con los estudiantes de dos grupos de grado séptimo, a través de problemas retadores, donde se les posibilita emplear su creatividad para desarrollarlas y discutirlas en pequeños equipos de trabajo. Con la implementación se promueven espacios académicos nuevos para los estudiantes, pues le permite generar un mejor desempeño en el rendimiento académico de las clases de matemáticas y desarrollar óptimas competencias junto con un progreso de las relaciones sociales al interior de nuestras aulas en la localidad de Ciudad Bolívar, armonizadas por la paz y la tolerancia ciudadana.

ABSTRACT

This paper analyzes the impact of the application of the theoretical approach to problem solving, to encourage the study of the conservation of the area through the use of geometric paradoxes in grades seventh of School District Cedid Ciudad Bolivar. The research is based on the mathematical visualization and community practice Wenger (2002), to understand these paradoxes. Activities, where the contents of whole numbers, fractions and geometry is integrated coherently explain the inconsistencies of these paradoxes are designed. These activities are conducted with two groups of students from seventh grade through challenging problems, where it enables them to use their creativity to develop them and discuss them in small teams. By implementing new academic spaces for students are promoted, it allows you to generate a better performance in the achievement of math and develop optimal skills along with a progress of social relations within our classrooms in the town of Ciudad Bolivar, harmonized for peace and civic tolerance.

TABLA DE CONTENIDOS PÁG.

INTRODUCCIÓN

Aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser, constituyen pilares básicos del aprendizaje que la educación debe crear y desarrollar (Delors, 1997). El aprendizaje de la Matemática contribuye a estos pilares y es importante en los diferentes niveles educativos. Esto está dado por la posibilidad que brinda al estudiante de aplicar los conocimientos adquiridos a la solución de problemas cotidianos, con ello a su mejor inserción en el mundo, y por los procesos y formas de pensamiento que desarrolla.

En la escuela se han implementado propuestas de enfoques, metodologías, introducción de medios, diferentes formas de organizar la enseñanza y evaluar su aprendizaje, las cuales han generado importantes transformaciones en los currículos de las últimas décadas. A pesar de todo, persisten dificultades en temáticas tan básicas como geometría, trabajo con fracciones y números enteros.

Estos contenidos al ser fundamentales para la formación matemática de los estudiantes, son la base para lograr resultados satisfactorios en grados posteriores. En consecuencia, se requiere que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas y a situaciones de la vida real. Estas temáticas son propicias para experimentar, explorar, descubrir propiedades y establecer relaciones entre ellas.

En matemáticas, la geometría es una de las ramas que posee mayores aplicaciones en la naturaleza y en la vida. Esta tesis está dirigida a lograr un aprendizaje significativo y sólido de ella, donde se imbrique con las fracciones y los números enteros. En este sentido, es tangible la integración entre la geometría, las fracciones y los números enteros. Para lograr esta integración, se propone un proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría sustentado en el uso de las paradojas geométricas.

Este proceso, específicamente la conservación del área en la Educación Básica ha ocupado a los investigadores, tanto nacional como internacionalmente, valorándose los resultados alcanzados en diferentes reuniones y congresos. Se destacan entre ellos: ICME, CERME, PME, RELME, CIAEM, ECME y el Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones en Colombia, entre otros. En los anteriores eventos, estas temáticas han sido tema central, donde se socializan sus aportes.

Específicamente en el XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética en el 2002, se exponen las paradojas en la matemática. En este congreso se aportan elementos de las implicaciones que han tenido éstas en la evolución de las matemáticas, a través de una exposición de varias paradojas que más han influenciado en su progreso.

En la literatura científica consultada, varios son los autores que han indagado y aportado a estas temáticas. Se destacan: Flores (s.f), Movshovitz-Hadar y Hadass (1990,1991), Kondratieva (2009), Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994), Sullivan y Panasuk (1997), Castro y Pérez (2002), Batanero y otros (s.f), Macho (2012), Valdés, (s.f) y Farlow (2014), entre otros.

Estos investigadores aportan estrategias y alternativas, demuestran las implicaciones del uso de las paradojas en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, pero en el ámbito universitario. Se carecen de investigaciones sobre esta temática en la Educación Básica Colombiana.

Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994) consideran que las paradojas cautivan, engañan, provocan, divierten, exasperan, seducen, despiertan la curiosidad y motivan. Estos autores exponen cómo las paradojas en la historia de las matemáticas han inspirado la clarificación de conceptos básicos y han introducido grandes resultados que han permitido la evolución de las matemáticas. Sus trabajos se dirigen también al ámbito universitario.

Kondratieva (2009), expresa que las paradojas tienen por objeto dar a conocer una inconsistencia o contradicción y llevan un reto especial. Toda su experiencia con las paradojas es al nivel de la educación universitaria, no se evidencia una reflexión para tal aplicación en la educación básica y no considera las paradojas geométricas.

Macho (2012) opina que las paradojas juegan un papel decisivo en el desarrollo de las matemáticas. Expone las paradojas geométricas del Cuadrado de Ball y del Triángulo de Curry, clasificándolas como magia e ilusión, debido a las aparentes pérdidas o ganancias de área. No se registra evidencia de cómo aplicarlas en la Educación Básica, y cómo podría solucionarse estas paradojas con los estudiantes en un aula regular.

Farlow (2014) expresa que el estudio de las paradojas amplía la mente, y que las buenas paradojas son las que no se pueden resolver sin ampliar la comprensión de la teoría. Las paradojas son responsables de la refinación de los conceptos básicos y a la vez son generadoras de la introducción de nuevas ideas. Expresa que no hay un consenso en el acuerdo de qué es una paradoja. Considera en sus investigaciones la Paradoja de Curry, y realiza dos exposiciones de ella, en una usa la sucesión de Fibonacci y en la otra utiliza la comparación de pendientes de segmentos de recta.

La experiencia del autor de esta tesis, al desarrollar los contenidos programáticos en la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar, encuentra que están organizados de la siguiente manera: primer y segundo periodo, números enteros; tercer periodo fracciones, en paralelo con la geometría. Esto evidencia que no hay una integración de dichas temáticas.

Estos temas aparentan ser independientes y no guardan relación alguna entre ellos. La situación más crítica se concreta en la geometría, hay una confusión extremadamente grave con relación al perímetro y el área. El desarrollo de los temas de la geometría en el grado séptimo, consiste principalmente en el estudio de perímetros y áreas en los diferentes polígonos, tales como: cuadrados, rectángulos, triángulos, paralelogramos, trapecios y rombos, donde se enfatiza principalmente en la solución de ejercicios.

En una primera instancia se realiza un estudio del perímetro, en cada una de las figuras anteriores y posteriormente el cálculo de áreas. En este proceso es limitado el trabajo con transformaciones de figuras geometrías en otras para dar cuenta de la conservación del área.

Por otra parte, se prioriza de entrada la medición y el cambio en las unidades de medida. Es escasa la preocupación por una construcción que devele y permita resolver el conflicto entre el perímetro y el área. En estos dos conceptos se carece de una construcción robusta. Es deficiente la enseñanza de la geometría enfocada en los procesos de comparación, descomposición y recomposición de las figuras.

Con relación al desarrollo de los números enteros y las fracciones, sólo se evidencian propiedades aritméticas, más no una construcción asociada para la comprensión de tales propiedades. La suma, resta, multiplicación y división es lo primordial para dar cumplimiento al programa y a las exigencias del MEN.

A través de la observación científica, encuesta, entrevista y la experiencia de 15 años de trabajo del investigador, se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Limitados conocimientos precedentes geométricos y aritméticos en los estudiantes.
- Se carece de una comprensión adecuada del concepto de área en los estudiantes.
- Escasa motivación por la clase de matemáticas.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la conservación del área de las figuras geométricas en los estudiantes de séptimo grado?

Se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en el séptimo grado.

Se infiere como **objetivo general**: implementar actividades basadas en problemas retadores sustentadas en la visualización para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la conservación del área, donde se integre las fracciones y los números enteros, usando paradojas geométricas con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza aprendizaje del área a través de las paradojas geométricas.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Qué investigaciones se han realizado sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, específicamente del área, a través de las paradojas geométricas en el grado séptimo?
2. ¿Qué presupuestos teóricos sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, específicamente del área, a través de las paradojas geométricas en el grado séptimo?
3. ¿Cómo elaborar actividades basadas en problemas retadores, para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la conservación del área en las figuras geométricas, a través de las paradojas en los estudiantes del grado séptimo?
4. ¿Cómo analizar la viabilidad de las actividades elaboradas?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, específicamente del área, a través de las paradojas geométricas en el grado séptimo.

2. Determinar los fundamentos teóricos, que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente del área, a través de las paradojas geométricas en el grado séptimo.
3. Elaborar actividades basadas en problemas retadores para favorecer la enseñanza aprendizaje de la conservación del área, a través de las fracciones y los números enteros, usando paradojas geométricas en los estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar.
4. Valorar la viabilidad de las actividades elaboradas.

Metodología de la investigación

La investigación es de corte cualitativo, donde se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Métodos teóricos:

Análisis-Síntesis: presente en todo el proceso de investigación, tanto en los fundamentos teóricos, como en el análisis de los resultados del diagnóstico relacionados al proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, a través de las paradojas en el grado séptimo, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados y la elaboración de las conclusiones y generalizaciones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La observación científica: obtener información sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, específicamente a través de las paradojas en el grado séptimo, a través de la observación a clases y otras actividades docentes.

Encuesta: a los profesores y estudiantes de las Instituciones Distritales de Ciudad Bolívar para obtener información sobre las dificultades acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, a través de las paradojas en el grado séptimo.

Entrevista: a especialistas para conocer su punto de vista sobre las dificultades presente en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, a través de las paradojas en el grado séptimo.

Los métodos **Matemáticos estadísticos** se utilizan para el procesamiento de la información obtenida a través de los métodos y técnicas del nivel empírico, en diferentes momentos de la investigación.

La población está por los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar y la muestra los grupos 703 y 704.

El **aporte práctico** radica en actividades basadas en problemas retadores, sustentadas en la visualización para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la conservación del área, donde se integre las fracciones, la geometría y los números enteros a través del uso de paradojas geométricas en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y los anexos.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se hace referencia a las investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y del área a través de las paradojas geométricas en el grado séptimo en el mundo y específicamente en Colombia,

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en el grado séptimo

El proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en el grado séptimo presenta dificultades en diferentes países, varios son los investigadores que abordan esta temática y aportan posibles soluciones. A continuación se precisan algunas investigaciones, sus aportes, carencias y su significado para esta investigación.

González y Vílchez (2002) como producto de varias reflexiones y acciones sobre la práctica misma de la enseñanza de la Geometría en la Educación Básica motivan a los docentes con diferentes software. Estos autores tienen el propósito de iniciar a los docentes en la planificación, diseño y producción de materiales multimedia con la intención de apoyar la didáctica de estos contenidos. Esta acción en la educación implica preparar al docente, de tal modo que pueda emprender esas innovaciones y a la vez integrarlas al currículo que desarrolla, con la intención de abordar los contenidos geométricos a nivel elemental y enseñarlos de forma sencilla, bien logrados y ajustados al nivel del estudiante.

Expresan que para lograr aprendizajes verdaderamente significativos en los niños, los docentes necesitan exponer los conocimientos de la geometría desde una variedad de actividades planeadas, sencillas, vivénciales, motivadoras e interesantes. Por parte de los estudiantes se requiere una participación activa, interesada, y comprendiendo que las actividades ofrecidas por el maestro son verdaderos desafíos. El autor de esta tesis comparte estos criterios, para lograr un aprendizaje significativo en las clases, también serán tenidos en cuenta en las actividades propuestas.

Gamboa y Ballestero (2010) presentan los resultados obtenidos de un cuestionario dirigido a los estudiantes de secundaria de Costa Rica para conocer su percepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Los resultados evidenciaron que las clases de geometría siguen un sistema tradicional de enseñanza, en donde los docentes presentan la teoría, desarrollan ejemplos y aportan ejercicios que deben ser resueltos por los estudiantes.

Consideran los investigadores que desde esta perspectiva tener éxito en geometría requiere saber utilizar la calculadora, realizar cálculos, poseer capacidad para memorizar definiciones, fórmulas, teoremas y cumplir con ejercicios para desarrollar habilidad práctica. En estas actividades prevalecen la aplicación de fórmulas y los aspectos memorísticos, trayendo como consecuencia que procesos tan importantes como la visualización, la argumentación y la justificación no tengan un papel preponderante en la enseñanza de esta disciplina.

Mecina (2012), expresa que el empleo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) por parte de los profesores de Matemáticas es algo ineludible, ya que son herramientas muy importantes para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la sociedad del conocimiento actual. Su uso en el campo escolar y en la escuela es necesario debido al auge en el ámbito social del mundo actual, generando nuevos procesos y recursos innovadores a nivel educativo.

En este artículo presenta una página web, «Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria», creada por la investigadora para proveer esta labor en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. En su página incluye información sobre varios recursos ya elaborados como contenidos didácticos en geometría, actividades interactivas, recursos web, vídeos, presentaciones y curiosidades matemáticas; además de pautas para elaborar recursos propios tales como blogs y redes sociales. El autor de esta tesis considera las TIC como un recurso importante para la preparación del profesor y para clase, pero es del criterio que primeros se debe hacer uso de los recursos tradicionales y manipulativos, por las potencialidades que poseen para el trabajo en el aula.

Ruiz (s.f), manifiesta que en las etapas de la educación obligatoria es necesario el uso de material didáctico por parte de los estudiantes para experimentar las relaciones y las propiedades de los objetos geométricos. Estos medios pueden ser materiales o virtuales y deben cumplir la condición de permitir movimiento a los objetos de tal modo que se puedan apreciar sus propiedades independientemente de su posición.

En la aula se puede utilizar gran variedad de recursos, tales como la papiroflexia, los geoplanos, los mosaicos, el tangram, los poliminós, materiales de construcción de sólidos y software de geometría dinámica, según el concepto geométrico a considerar teniendo presente la edad de los estudiantes. Este artículo exhibe algunos de estos recursos y sugiere cómo pueden ser empleados por los docentes para la enseñanza de la Geometría elemental. También propone recurrir básicamente a aplicaciones y programas accesibles de internet, para que los profesores puedan cómodamente encontrarlos. Las ventajas de la era de la información deben aprovecharse en la educación y deben estar al alcance una multitud de materiales que pueden ser utilizadas en el aula de matemáticas.

Ding, Fujita y Jones (2005), en el CERME 4 declaran que la educación matemática es objeto de considerable investigación a nivel internacional, sobre todo en cuanto al rendimiento de los estudiantes, además evalúan los métodos de enseñanza y los planes de estudio. En todo esto, y tal como es de esperar, el papel de los maestros se ha convertido en una influencia clave para el aprendizaje de los estudiantes.

Debido a que el desarrollo de la capacidad de los estudiantes en el razonamiento geométrico sigue siendo un tema de gran preocupación, esta investigación se orienta hacia las sugerencias de la escuela secundaria preparados por profesores de gran experiencia de China y Japón, países que se seleccionaron porque representan algunas similitudes y contrastes interesantes. Este es un espacio de investigación futura y también tiene que centrarse en lo que los profesores realmente hacen en las clases y cómo pueden hacer uso de los consejos que están aquí disponibles y la forma en que se podrían estructurar nuestras lecciones de geometría.

Marchett, Medici, Vighi y Zaccomer (2005), en el CERME 4 presentan una investigación llevada a cabo de los conceptos de perímetro y el área en estudiantes de cuarto y quinto año de primaria. El documento se centra en las preconcepciones y los procedimientos espontáneos de los niños.

El estudio muestra que el conflicto perímetro-área es un obstáculo epistemológico que causa dificultades en la comprensión de estos conceptos geométricos importantes. De hecho, es sólo por el reconocimiento y la comprensión de estos que se puede identificar las estrategias de enseñanza para superar dicho conflicto entre el perímetro y el área. El trabajo está destinado a revelar en los estudiantes su razonamiento, su comportamiento, su enfoque y sus conclusiones al enfrentar diferentes tipos de actividades.

Según estos autores la experimentación confirma claramente la existencia de dificultades con los conceptos de perímetro y el área, ampliamente discutido en la investigación. En general, el aspecto bidimensional predominó sobre el unidimensional.

También plantean que en las respuestas de los niños se confirma la importancia de trabajar por primera vez el concepto de perímetro y área, y sólo posteriormente en su medición. Las actividades causaron dificultades en los alumnos, generaron un conflicto entre sus conocimientos y aptitudes ya adquiridos en la geometría. Los niños se acercaron al problema de una manera más pertinente y adecuada.

Los procedimientos que utilizan permiten información importante para el diseño de las actividades, que les ayudará a distinguir los dos conceptos de perímetro y área. El autor de esta tesis comparte estos criterios, los cuales serán tenidos en cuenta en las actividades propuestas.

Vigh (2005), en el CERME 4 presenta una serie de actividades, experimentadas en una escuela primaria italiana, enfocada principalmente en el trazo de segmentos de línea recta diagonales sobre el papel cuadriculado. Argumenta que el papel cuadriculado es una herramienta que puede ser utilizada para mediar diferentes conceptos geométricos y que representa mucho conocimiento matemático en algunos casos, pues facilita el aprendizaje de la geometría llevando al estudiante a modificar sus acciones y conocimientos, mientras que en otros casos puede ser un obstáculo.

Discute los resultados de su experimentación y sus implicaciones para la enseñanza de la matemática, en especial con el dibujo de un segmento de línea con los puntos finales en las intersecciones de la cuadrícula, pues resultaron ser un obstáculo difícil para los estudiantes. Insiste en los riesgos a largo plazo con relación a la falta de comprensión y conceptualización de algunos aspectos contenidos en papel cuadriculado.

Concluye expresando que la escasa conciencia del maestro ante los hechos matemáticos modelados en el papel cuadriculado significa que el potencial matemático del artefacto no puede ser plenamente explotado. Debe estar en manos de todos los que trabajan en las matemáticas, desde el jardín infantil hasta la universidad.

Lemonidis (s.f), declara que las figuras geométricas son elementos básicos que han desempeñado un papel importante en la historia de la Geometría y de las Matemáticas en general. En la enseñanza de la geometría, expresa, se utiliza la figura geométrica como una herramienta necesaria para el fundamento de los conceptos geométricos.

Esto ha ocurrido en la enseñanza de la geometría a nivel mundial, con excepción de la década del 60, donde se observó una tendencia de la desaparición y utilización de la figura geométrica, en el marco de la algebrización de la geometría.

Debido a los resultados negativos surgidos por el movimiento de la matemática moderna se regresó a la enseñanza de la geometría, donde la figura geométrica tiene un papel preponderante. En Grecia, en ese período en particular, la geometría se mantuvo leal a la geometría euclidiana y así, siempre se usaron las figuras geométricas.

Esta investigación, trata del análisis de algunas de las características básicas de las figuras geométricas y describe la forma en la cual los estudiantes aprenden los conceptos geométricos. Además da importancia a que las cifras juegan un papel esencial y que los errores de muchos estudiantes se deben al fenómeno de prototipo de las figuras siempre utilizadas.

Zodik y Zaslavsky (2007) dirigen su investigación a caracterizar la elección y el uso de los ejemplos del maestro en el aula de matemáticas. Consideran el dilema de los profesores que subyacen a sus ejemplos en la geometría. Los problemas geométricos suelen ir acompañados de figuras y de diagramas que representan determinados casos matemáticos concretos.

Un diagrama puede ser exacto, incompleto o incluso engañoso. El artículo presenta varios ejemplos de diagramas usados en las clases de geometría y puntualiza en el impacto que esto causa en los estudiantes y su relación con el aprendizaje. Algunos diagramas son útiles en la medida en que pueden reducir considerablemente la demanda cognitiva del problema, mientras que otros pueden elevar su nivel de dificultad. Las opciones específicas podrían reflejar un objetivo pedagógico, como el mantenimiento de la necesidad de contar con los datos del problema y no en las particularidades de una representación visual específica.

Insisten en que independientemente de las decisiones que los maestros hacen, existe el peligro de transmitir algunos mensajes contradictorios a los estudiantes: por un lado, se proporciona un diagrama con el fin de transmitir alguna información útil con respecto a la situación del problema y por otro lado, a los estudiantes se les comunica ignorar algunas partes y a no confiar en todo lo que ven en un diagrama.

Semana y Santos (2010), en el CERME 6 analizan la influencia de los informes escritos en el contexto de la evaluación del aprendizaje y como esto ayuda a los estudiantes en su aprendizaje de la geometría y en el desarrollo de sus habilidades de explicación y argumentación. Presentan los resultados de un estudio de caso cualitativo que implica estudiantes portugueses del grado octavo.

Sugieren que el uso de informes escritos mejora las capacidades y, por lo tanto, la comprensión de los conceptos y procesos geométricos. Estos beneficios para el aprendizaje se han mejorado a través de la aplicación de algunas estrategias de evaluación y de retroalimentación del saber oral y escrito.

En muchos casos, en la primera versión de los informes, los estudiantes dieron explicaciones de procedimiento en lugar de proporcionar una justificación matemática. En la segunda versión del informe, los estudiantes presentaron argumentos matemáticos para las decisiones tomadas y de los resultados obtenidos en la realización de las tareas utilizando un lenguaje simbólico matemático adecuado, provocando un alto nivel de demanda y por consiguiente de aprendizaje.

Estos investigadores expresan que la retroalimentación, tanto oral como escrita, permite a los estudiantes identificar aspectos a mejorar en los informes y proporciona pistas sobre lo que los estudiantes pueden hacer para desarrollar sus primeras producciones. De hecho, la retroalimentación admite a los estudiantes producir un mejor informe en la segunda versión, especialmente en relación con la explicación y justificación de las estrategias adoptadas, promoviendo el desarrollo de la reflexión y la autoevaluación de las destrezas en los estudiantes.

1.2. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje del área a través de las paradojas geométricas

Movshovitz-Hadar y Hadass (1990) realizan un estudio acerca del papel que las paradojas matemáticas pueden desempeñar en la educación del pregrado de matemáticas para los profesores. La investigación reveló que las paradojas aumentan el desarrollo del conocimiento matemático. Los resultados obtenidos del estudio a través de respuestas escritas y video-clases son analizados y discutidos por los investigadores.

Los resultados indican que el modelo de tratar con paradojas tiene una relevancia en aquellos aspectos de la educación matemática, que apalean directamente a los conflictos cognitivos, la motivación, las ideas falsas y el aprendizaje constructivo. Las paradojas matemáticas proporcionan un terreno conveniente para una revisión no rutinaria de los materiales de la escuela secundaria, por lo que la incorporación de éstas en la escuela secundaria merece un estudio serio y cuidadosamente planificado.

Enfatizan que trabajar en las resoluciones de las paradojas agudiza la sensibilidad de los estudiantes para la detección de sus dificultades matemáticas, los errores e inexactitudes; papel crucial como una oportunidad de aprendizaje en tanto que tratar con el desafío de una paradoja puede mejorar el conocimiento de la heurística en la resolución de problemas.

Movshovitz-Hadar y Hadass (1991), trata de un informe sobre un estudio en Israel del papel de las paradojas en las matemáticas para la educación del pregrado de matemáticas de los profesores. El estudio examinó el potencial de las paradojas para uso pedagógico en el papel constructivo del razonamiento falaz.

Afirman que una paradoja ubica al estudiante en una situación intelectualmente insoportable, ya que cuando se enfrenta a la paradoja, experimenta un fuerte golpe educativo que tiene el potencial de cambiar la forma del concepto construido, de tal modo que si posee un conocimiento procedimental puede experimentar una transición a una etapa de comprensión relacional. Trabajar en paradojas y sus resoluciones puede agudizar la sensibilidad de los maestros y estudiantes para las matemáticas y constituye una oportunidad de aprendizaje, en donde las actividades de clarificación de las paradojas ofrecerán a los futuros profesores de matemáticas permitir estudiar cuestiones fundamentales en las matemáticas y su historia.

Sullivan y Panasuk (1997) en su investigación sobre los números de Fibonacci y los rompecabezas de áreas indagan por la falta o la ganancia de unidades de área. Los investigadores revelan que esto lleva consigo a una indagación y exploración de la secuencia de Fibonacci estrechamente relacionada con la geometría plana y en conexión con el álgebra.

Usan dócilmente el concepto de pendiente para explicar las paradojas geométricas, aunque su aporte fuerte está en buscar esa conexión estrecha entre el álgebra y la geometría plana, tema central y objeto del presente artículo. Los conceptos, la solución y una extensión que profundiza la comprensión hacia otras temáticas de la sucesión de Fibonacci son grandes interrogantes planteados para estudiantes y docentes de matemáticas, para vislumbrar una de las conexiones entre el álgebra, la geometría y las secuencias de Fibonacci por medio de paradojas geométricas.

Kondratieva (2009), cataloga en su artículo a las paradojas como un tipo especial de rompecabezas que tienen por objetivo dar a conocer y hacer hincapié en una inconsistencia o contradicción. Muchas paradojas han influido en la forma de las matemáticas como se conoce hoy en día y sugiere la posibilidad de incorporar el estudio de las paradojas en los cursos de matemáticas, pero cuestiona en qué momento de su exposición serán los estudiantes más beneficiados por ellas y cómo puede llevarse a cabo esto en el salón de clases.

Discute en su investigación la naturaleza y el papel de las paradojas, así como las ventajas de aprovecharlas en la enseñanza de las matemáticas, presentando varios paradojas tanto en el contexto histórico y de aula. Concluye que el estímulo pedagógico del uso de las paradojas en el salón de clases está subestimado en la actualidad y manifiesta que un estudio constante del impacto de las paradojas en los estudiantes permite desarrollar un sistema de enseñanza que tendrá una ventaja completa sobre la curiosidad natural de la mente hacia los problemas.

Muestra que las paradojas matemáticas llevan a un reto especial y proporcionan al estudiante la oportunidad de perfeccionar su comprensión incompleta. Hoy en día, la práctica de usar paradojas en los cursos de matemática no es común, a pesar de que el tema intriga a muchos estudiantes. La construcción de un portafolio de actividades retadoras en donde se incluyan las paradojas beneficiará plenamente a los estudiantes.

Freire (2010) tiene como uno de los objetivos principales de su investigación presentar en un idioma agradable, lúdico y comprensible para los estudiantes de pregrado y postgrado, así como también para los profesores de matemáticas, lo interesante que existe en el universo la exploración de curiosidades y paradojas en varias partes de las matemáticas. Expresa que muchos estudiantes y profesores de matemáticas despiertan el interés por el estudio de las matemáticas, la física y otros campos relacionados con las ciencias cuando se les muestra un problema que por lo general es una buena paradoja.

Pretende que este trabajo sea utilizado como una herramienta auxiliar para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tanto en los campos de la escuela primaria y secundaria, pues el uso de las curiosidades y las paradojas sugeridas en el presentado artículo pueden ayudar a desmitificar las matemáticas con el objetivo de cautivar e invitar a un mayor número de jóvenes hacia la Reina de las Ciencias.

Kleitman (2007) afirma claramente que en el mundo de las matemáticas, innumerables mentes brillantes dedican sus vidas en un esfuerzo por demostrar lo que parece imposible. Curiosamente, a través de una gran cantidad de pruebas establecidas que han impactado enormemente al mundo científico, una serie de pruebas falsas también han sobrevivido al escrutinio de los grandes matemáticos.

En este artículo, el objetivo del profesor Kleitman (2007) es explorar algunas de estas pruebas de falacia y aprender de las lecciones que pueden extraerse de su presencia. Sin embargo, en lugar de simplemente despedir a tales pruebas de falacia como errores desafortunados, estas lecciones son valiosas, pues se puede aprender a través de ellas en la comprensión del porqué de tales pruebas y como tomaron la cara de prueba real.

Este autor analiza la paradoja de Curry, donde estudia los triángulos que allí se describen, y asocia a los lados de estos triángulos elementos de la sucesión de Fibonacci y a través de la identidad D'Ocagne's explica la ganancia de área. Sin embargo expresa, se puede ver que los dos triángulos de medidas 3x5 y 8x2, no tienen la misma pendiente para su hipotenusa y por lo tanto no encajan en una línea recta, y es lo que justifica la diferencia de una unidad de área.

Flores (s.f), expresa en su artículo que la actual reforma en la enseñanza de las matemáticas propone cambiar la idea del profesor como un agente que transmite un conocimiento único y preestablecido, por lo cual él debe participar de este cambio y afrontar un cambio actitudinal con relación al conocimiento matemático y su relación con la enseñanza.

Este autor propone el empleo de paradojas matemáticas como una vía para provocar conflictos cognitivos en los estudiantes, de manera que se vean abocados a revisar de manera crítica sus concepciones y a adoptar nuevas soluciones. Presenta una secuencia de actividades para ser explotadas en la formación de profesores y el análisis de éstas en diversos campos de la matemática. Muestra la riqueza interpretativa al incorporar este tipo de actividades a la formación inicial y permanente de profesores de Matemáticas de la enseñanza secundaria.

Los comentarios que presenta pretenden mostrar la necesidad de profundizar en el significado y la red de conceptos matemáticos que se necesitan para resolver una paradoja, esperando con ello, diseñar módulos de formación de profesores de matemáticas de secundaria, que contemplen el conocimiento matemático en toda su extensión y con toda la riqueza de formas de análisis y representación posibles. En la tesis se retoma esta investigación, por la importancia que tiene contar con docentes capaces de utilizar en sus clases las paradojas, en aras de motivar y lograr aprendizajes en sus estudiantes.

Batanero, Contreras, Cañadas y Gea (s.f), reflexionan sobre el provecho de las paradojas para crear situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas. Afirman que en el desarrollo histórico de las matemáticas aparecen numerosas paradojas que se reproducen, a veces, en las intuiciones erróneas de los estudiantes. Analizan una de estas paradojas, el dilema de los tres prisioneros, donde muestra los contenidos de probabilidad que pueden emplearse al trabajar con la misma y los posibles razonamientos erróneos de los estudiantes.

Estos investigadores justifican en su artículo que varios son los autores que plantean el interés de utilizar paradojas sencillas para diseñar situaciones motivadoras en el aula, que puedan beneficiar el desarrollo de la motivación de los estudiantes y hacerles descubrir conexiones entre la historia y la vida cotidiana. Una vez resuelta una paradoja produce generalmente un aprendizaje, bien sea de un concepto que no se conocía o de una relación entre conceptos que aparecía oculta en el problema, que mediante orientaciones apropiadas del docente permiten que los estudiantes construyan conocimiento matemático.

1.3. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en Colombia

Martínez y Lascano (2001) ponen de manifiesto la dificultad que existe en los estudiantes para el reconocimiento y la apropiación de algunos atributos que están presentes en la interpretación de la fracción como una relación parte-todo. Estas evidencias se expusieron en el desarrollo de una experiencia de aula, con el propósito diseñar, aplicar y analizar una secuencia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la fracción desde dicha interpretación.

Los resultados de la investigación revelan la necesidad de realizar un trabajo didáctico más profundo para abordar de manera específica la fracción como una relación parte-todo y permitir que los estudiantes la reconozcan y se apropien de ella.

Martínez y Lascano (2001) insisten en establecer relaciones de equivalencia, de orden e insertar fracciones entre dos fracciones para favorecer en los estudiantes un acercamiento al concepto de densidad y a la idea del continuo, características propias del sistema de los números racionales y posteriormente de los números reales.

Rico (s.f) expone los resultados de su investigación sobre la construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica. En una primera etapa indaga e identifica los diferentes significados de la fracción que tienen los estudiantes. Este autor apoya su trabajo en la didáctica de las matemáticas y la formación de maestros, donde diseña e implementa unidades didácticas utilizando diferentes herramientas para construir distintos significados de la fracción. El impacto de esta investigación genera en la educación una superior transformación en los procesos de enseñanza a través de experiencias de aprendizaje significativas en los docentes en formación.

Este autor evaluó el impacto de las unidades didácticas en el concepto de la fracción y realizó un contraste entre los conocimientos previos del estudiante y los logros alcanzados en la implementación de las mismas. Se reconocen avances significativos en las dificultades detectadas en los estudiantes, así como profundización en sus conocimientos, tanto de matemáticas y en didáctica. Los futuros docentes, como estudiantes, tienen la oportunidad de reflexionar sobre la construcción de los conjuntos numéricos, los sistemas de representación y cómo las manipulaciones simbólicas permiten construir diferentes algoritmos y procedimientos que explican o resuelven una misma situación problema.

Rodríguez y Sarmiento (2002) ilustran algunas reflexiones en torno al diseño e implementación de una propuesta de aula en la que se utiliza el tangram y el plegado como recursos pedagógicos, para la enseñanza y el aprendizaje en el grado sexto de las fracciones propias bajo la interpretación de la fracción como una relación parte-todo. Los investigadores hacen alusión a una serie de aspectos que se consideran importantes en la interpretación de la fracción como una relación parte-todo.

Los estudiantes lograron responder a la mayoría de los puntos propuestos en las guías. Con respecto a la capacidad de los estudiantes para identificar fracciones y explicitar los numerales asociados a las representaciones gráficas, se observa, que los que trabajaron con el plegado, escribían de manera correcta y empleaban menos tiempo que los estudiantes que trabajaron con el tangram.

Estos autores observaron que en el plegado los estudiantes pueden realizar la división de la unidad de acuerdo a los pliegues en la hoja y tienen presente la congruencia de las partes, donde se les facilita dicha identificación. Pretendieron propiciar con el plegado que el estudiante, al realizar divisiones en partes congruentes, pudiera visualizar la posibilidad de llevar a cabo adiciones de fracciones sin recurrir al algoritmo numérico.

Obando (2003) presenta algunos aspectos relativos al desarrollo de la enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Su investigación giró en torno a los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales concentrando la atención en aquellos que conciernen a las relaciones parte-todo.

Detectó que la forma actual como se orientan tales procesos en la escuela, es la fuente de conceptualizaciones erróneas por parte de los estudiantes. Con base en este análisis y apoyado en metodologías propias de la Didáctica de las Matemáticas desarrolló una propuesta de trabajo que puede desencadenar procesos de aprendizaje más significativos para los estudiantes de los grados séptimos.

Enfatiza que un trabajo desde la fracción como una relación parte-todo y fundamentada en los tres aspectos, medida, magnitud y el tipo de unidad; permite desarrollar en los estudiantes procesos de aprendizaje más constructivos y autónomos, en lo relativo a las relaciones de orden, de equivalencia y a la operación aditiva en los números racionales. Esta investigación también reveló la debilidad que hay desde esta perspectiva de las fracciones para conceptualizar los aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los números racionales, expresando que queda abierta la posibilidad para una nueva investigación.

Bolívar (2013) manifiesta que una de las grandes dificultades de los estudiantes de primaria en el área de las matemáticas son los números fraccionarios, y que tal dificultad puede solucionarse con el uso de material lúdico apropiado. Con esta propuesta brinda a los estudiantes la posibilidad de mirar claramente y desde sus diferentes perspectivas, la concepción del número fraccionario, las equivalencias y su representación gráfica.

En su investigación muestra como el juego y la manipulación de materiales le permiten al estudiante aprender significativamente empleando todos los sentidos. Valora éstos como mediadores hacia el aprendizaje de las fracciones y privilegia el trabajo en equipo para dotar a los estudiantes de herramientas conceptuales y procedimentales, fundamentales para comprender el concepto de fracción. Proporciona al profesor herramientas que le permitan explicar de manera lúdica el concepto de número fraccionario, al igual que la manera correcta de operarlos, generando en el estudiante aprendizajes significativos.

Con estos juegos buscaba aplicar la teoría de Ausubel, del aprendizaje significativo. Concluyó, que la lúdica, significa acción, produce diversión, placer y alegría y la cataloga como una excelente metodología para atraer atención, de tal manera que se interioricen los conceptos y se aprenda significativamente.

López (2012) presenta una aproximación histórica acerca del concepto de fracción, e incluye una revisión de los significados de este concepto en medida, relación parte-todo, cociente, operador y razón, dando soporte teórico a su propuesta didáctica de aula, que gira alrededor de la relación parte-todo. La propuesta diseñada para el grado séptimo contiene actividades en los contextos continuo y discreto, con el propósito de dinamizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. El propósito principal del trabajo es el planteamiento y la aplicación de una serie de actividades didácticas alrededor del concepto de fracción, destacando precisamente la conceptualización más que lo algorítmico, para tratar de dar significado a los procedimientos y operaciones que realizan los estudiantes.

Demuestra en su investigación que partiendo de un diagnóstico, en el cual se revelan las falencias en la conceptualización de la fracción, se puede mejorar la comprensión de este concepto mediante el desarrollo de actividades bien planeadas en el que se consideran los contextos continuos y discretos de las fracciones, para lograr mejores resultados en las pruebas aplicadas al respecto.

La consideración de propuestas didácticas basadas en actividades que dependen de la propia construcción realizada por los estudiantes, genera espacios de participación activa e interacción, lo cual contribuye al dinamismo de las clases. Los estudiantes reconocen y valoran las propuestas de enseñanza que tratan de darles más participación y protagonismo en el proceso de enseñanza y aprendizaje por medio de actividades que incluyan manipulaciones, dibujo, expresión oral y escrita.

Hurtado (2012) manifiesta que los estudiantes de grado sexto del colegio San Agustín de Aguazul del Departamento de Casanare, no logran dar significado a las fracciones cuando tienen que comprender los enunciados de los problemas que se proponen en el aula y aplicar las operaciones adecuadas para resolverlos. Utiliza la resolución de problemas como metodología para resolver esta situación, realizando un análisis epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el concepto de fracción y aplica una propuesta didáctica que les permitió a los estudiantes participar y ser protagonistas de su propio aprendizaje, pues ellos tenían que leer, analizar, proponer y argumentar las soluciones a cada uno de los problemas que se les planteaban. Teniendo en cuenta estos avances, se puede asegurar que lograron dar significado a la fracción.

Proponer actividades para valorar el estado del aprendizaje de los estudiantes, permite diseñar nuevas actividades y revisar estrategias para superar dificultades de enseñanza en el tema que se desarrolla. Así mismo es preciso hacer un seguimiento permanente a los logros alcanzados por los estudiantes. La socialización de los resultados modificó positivamente el ambiente de aprendizaje, por cuanto los estudiantes pudieron expresar sus aportes y a la vez aclarar sus dudas.

1.3.1. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza aprendizaje del área en el grado séptimo en Colombia

Cruz y Montenegro (2011) expresan que investigaciones en didáctica de las matemáticas han identificado dificultades con relación al aprendizaje de los contenidos temáticos, los procesos y los contextos que tienen correspondencia con el pensamiento y los sistemas geométricos. Comúnmente esto está asociado a causas epistemológicas, cognitivas, curriculares y didácticas. Revelan en su investigación que para resolver la situación anterior es necesario el uso de materiales manipulativos, pues permiten fortalecer los conocimientos adquiridos por los estudiantes a medida que avanzan en su proceso de aprendizaje y potencian las capacidades humanas que facilitan los procesos de enseñanza, aunque también aclaran que no todos los juegos son significativos para la construcción de la matemática.

Estos autores plantean que serán significativos si por medio de una actividad bien planeada favorecen la apropiación de un conocimiento matemático y a futuro facilita la comprensión de un objeto matemático abstracto. La implementación de actividades con materiales manipulativos requiere de un análisis especial debido a los muchos factores que se deben estudiar, para ver si en verdad se pueden utilizar en pro de un conocimiento matemático.

Por otra parte la investigación de Jovel y Rodríguez (2011) surge como respuesta a los conocimientos geométricos que expresan sobre el concepto de área los estudiantes de grado sexto. Realizan su indagación a través de las de teorías de Artigue, Vinner, la EMR y el Modelo Van Hiele. Estos autores parten de la premisa de que el estudiante posee una concepción sobre conceptos matemáticos, en este caso el área, y que es manifestada por la forma como aborda y justifica sus procedimientos relacionados con el concepto cuando enfrenta una situación problema planteada por el docente en el aula.

Precisan de que un concepto matemático no es únicamente su definición, debe constar de otros elementos al ser enseñado, debido a que sufre transformaciones didácticas y su comprensión implica un mínimo de procesos de pensamiento; no se alcanza de momento. En su enseñanza, se deben tener en cuenta la naturaleza descontextualizada del conocimiento formal y la contextualizada del conocimiento personal.

Rodríguez y Jovel (2011) establecen que los patrones y regularidades que se observan en los estudiantes de grado sexto de la educación básica al clasificar figuras geométricas son de tipo cualitativo. Lo cual permitió la identificación del concepto de área que ellos poseen.

Los estudiantes aplican principalmente la habilidad visual y usan elementos básicos de lógica que les proporcionó ordenar sus ideas para elaborar razonamientos al reconocer atributos del área. Tienden a fijarse en aspectos cualitativos más que cuantitativos. Utilizan estrategias de clasificación cualitativas frente al concepto de área y reconocen que las transformaciones geométricas, como rotación y traslación, generan figuras congruentes y, por ende, de igual área.

El cálculo directo del área no es usual. En sus mediciones, ni el área ni la longitud son de uso común; más que medir prefiere contar y usan términos del lenguaje en vez del lenguaje propio de las matemáticas. En problemas no rutinarios, los estudiantes reconocen con sus palabras atributos que son relevantes para el área.

La investigación revela la importancia de que en la enseñanza del concepto matemático de área en estudiantes de grado sexto se empleen secuencialmente guías didácticas que contengan estrategias cualitativas. En ese proceso las guías le permitan al estudiante encontrar por iniciativa propia patrones y regularidades para llegar a comprender la naturaleza de este concepto, contribuyendo a su formación adecuada, y evitándose de esta manera la aritmetización y el uso prematuro e inadecuado de fórmulas.

Gutiérrez (2011) presenta los principales elementos didácticos centrales de la enseñanza de la geometría en los diferentes niveles educativos de la escuela secundaria. Opta por modelo de Van Hiele, pues es el más efectivo para organizar y estructurar la enseñanza de la geometría en los diferentes niveles de la educación.

Se inclina en uno de sus componentes, las fases del aprendizaje, que permiten organizar los contenidos de las secuencias de la enseñanza de las matemáticas escolares. Proporciona una propuesta específica, que se centra en describir el aprendizaje de los conceptos geométricos, basada en la distinción que hay entre las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales, para exponer el papel crítico que deben jugar los ejemplos en las clases de geometría. Reflexiona sobre la necesidad que los profesores deben tener en cuenta en las representaciones gráficas, físicas y mentales utilizadas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Montes (2012) presenta una propuesta didáctica que busca generar la comprensión y el aprendizaje del concepto geométrico de movimiento rígido en el plano, en estudiantes de séptimo grado, tomando como referente el entorno visual del videojuego Pac-Man y hace uso del trabajo manual y la manipulación de objetos concretos en la educación básica. Las actividades propuestas son fruto del estudio y del análisis de textos matemáticos, de los documentos oficiales emitidos por el MEN y de la experiencia laboral docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y particularmente de la geometría.

Argumenta que se necesita acercar cada vez más el carácter científico de los conceptos a las consideraciones pedagógicas y didácticas de los mismos, para lo cual se hace indispensable pensar cada temática en contexto, buscar referentes con los que los estudiantes estén familiarizados y en la medida de las posibilidades apelar a sus gustos y preferencias. Deja entrever una matemática que posibilite el establecimiento de pequeñas comunidades, en la que se reconozca el valor de la discusión y la concertación, el derecho a la diferencia y a la argumentación como único medio para la construcción de saberes desde el conocimiento propio respetando el conocimiento ajeno.

González (2013) propone una estrategia pedagógica mediante el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), donde se tiene en cuenta que estas por sí solas no son útiles ni eficaces en la educación para mejorar los procesos de enseñanza de la geometría en el grado octavo de las escuelas rurales. Para alcanzar este objetivo elabora un módulo educativo computarizado basado en el modelo pedagógico de Escuela Nueva, constituido por una unidad en la cual incluye aspectos teóricos de los triángulos y propone una serie de actividades cuya intención es que se facilite el aprendizaje del estudio de la trigonometría y sus aplicaciones.

Al incluir las TIC se logra que los estudiantes tuvieran una mayor atención, un mejor desempeño en clase, reflexión, motivación, gusto por la asignatura y por lo anterior un aprendizaje significativo. Expresa en la investigación que es muy difícil en tan poco tiempo lograr una motivación, ya hay dificultades propias para aprender matemáticas debido a la forma como se les ha venido enseñando ésta desde la primaria, por lo cual resulta importante implementar las TIC desde los primeros años escolares. Propone de requerir cada vez más de docentes comprometidos, innovadores e investigadores que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes, en especial de aquellos a quienes se les dificulta, planeando actividades que sean agradables y enriquecedoras para ellos.

Conclusiones del capítulo 1

En la literatura consultada se deduce que el desarrollo de las clases consiste en exposiciones clásicas y en una serie de ejercicios resueltos por el docente. Los estudiantes después aplican en principio a otros ejercicios las mismas estrategias usadas. La resolución de problemas está completamente abandonada y el protagonismo está centrado en el maestro. Por tal motivo, se propone usar paradojas geométricas en el aula de clases, pues se verá, que ellas motivan y seducen a la mayoría de los estudiantes. Al intentar solucionar el secreto que ellas guardan, se deben integrar las temáticas propias del grado séptimo, tales como son: los números enteros, las fracciones y la geometría, pues para comprender las inconsistencias implica que se integren dichas temáticas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordan los referentes teóricos en los cuales se sustentan las actividades. Se asume la teoría de la resolución de problemas, la visualización matemática, la comunidad práctica de Wenger (2002) y lo referente a funciones y a características de una paradoja.

2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas. Problemas retadores

En este apartado se presenta la teoría de la resolución de problemas en el ámbito escolar, propuesta que ha sido estudiada por varios autores, en diversos campos de la didáctica de la matemática.

Desde de esta perspectiva de la didáctica de la matemática se sustenta como propósito central que el estudiante posea habilidades para resolver problemas, que imite el quehacer de los matemáticos en el sentido de que indague, experimente, cambie de estrategia y reflexione sobre su actuar en el aula cuando enfrente diversos tipos de actividades enmarcadas en la resolución de problemas (Pochulu y Rodríguez, 2012)

Al respecto, Mazarío (s.f) expresa: "… aceptar que resolver problemas es un elemento vital en el aprendizaje de la Matemática, implica la necesidad de que se tenga una idea clara de lo que se entiende por problemas y cómo los incorporamos en las clases"[1].

El origen de esta línea de la didáctica se debe en principio al matemático George Polya, pero con el tiempo los siguientes especialistas en educación y didáctica de las matemáticas se han dedicado a profundizar en dicha temática y han aportado elementos propios al desarrollo de esta teoría. Los más influyentes según Castro (s.f) y Pochulu y Rodríguez (2012) son: Krulik y Rudnik (1987); Kilpatick (1967); Schoenfeld (1985,1992); Borasi (1986); Rico (1988) Carrillo (1995); Puig (1996); Campistruos y

[1] Mazarío, I y otros. (2009). Reflexiones sobre un tema polémico: la resolución de problemas. Monografía. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Departamento de Matemática. Edit. Universitaria Cuba. Ciudad de La Habana, p. 12.

Rizo (1996); González (1998); Cobo y Fortuny (2000); Socas (2001); Koichu, Berman y Moore (2003); Lesh y Harel (2003), entre muchos otros.

El concepto de problema y su definición es bastante complejo, sin embargo, varios investigadores han planteado su propia definición dependiendo del enfoque que necesiten destacar. Todas las definiciones concuerdan, en que un problema es una situación que presenta dificultades para la cual no hay una solución inmediata. Además, establece una tarea educativa que ha de ocupar una posición privilegiada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En esta tesis se asume la definición dada por Polya (1981). Este autor plantea que tener un problema *"… significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata"*[2].

En consecuencia de la definición, hay allí unos elementos básicos que se tienen que identificar, en lo que significa tener un problema según este enfoque. Ellos son:

1. Un sujeto que tiene como intención solucionarlo, pues se encuentra motivado por diversas razones. En el ámbito escolar son de índole académico.
2. Cumplir con el objetivo de resolverlo, pero para llegar a cumplir dicho objetivo no existe en principio un camino que conduzca inmediatamente a su solución.
3. Genera situaciones como: angustia, desafío y provocación. Ha de encontrar nuevas relaciones entre los elementos que posee y dispone para tratar de desenmarañar lo oculto en la situación que enfrenta.
4. Satisfacción por hallar la solución.

[2] Polya G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*, Combined Edition. John Wiley & Sons. Chapther 5, p. 117.

Las distintas definiciones de problema que existen comparten características comunes, algunas de las cuales coincide con las aportadas por el autor de esta tesis, éstas según Pochulu y Rodríguez (2012) son:

- *"Existe un sujeto que ha de resolverlo.*
- *Existe un punto de inicio y una meta por lograar.*
- *Existe un cierto bloqueo que impide acceder a la meta fácilmente"[3].*

Todos los autores antes mencionados también han definido el proceso de resolución de problemas y han aportado fases para su resolución. En la investigación se asume las cuatro fases para la resolución de problemas de Polya (1973), que constituyen la metodología general en la teoría para enfrentar un problema y con la puesta en práctica se podrá ir mejorando al aplicarlo. Las fases que describe Polya (1973) para la resolución de problemas son las siguientes: *"Comprender el problema, diseñar un plan, llevar a cabo el plan, mirando hacia atrás"[4].*

A continuación se hace un análisis de cada una de estas fases. También se precisa como desempeñan su papel el estudiante y el maestro.

Comprender el problema. Entender el problema que se quiere resolver es de suma importancia en el contexto escolar, siendo así, es papel del maestro motivar al estudiante para que entienda, que si comprende el problema podrá resolverlo de forma más eficiente. Igualmente, se debe encaminar al estudiante en la búsqueda de la solución.

[3] Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática.* Editorial Universitaria Villa Maria.Prov.de Buenos Aires, Argentina, p. 155.
[4] Polya, G. (1973). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Stanford University, Second Edition, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, p. 5-16.

El maestro dedicará de su clase un cierto tiempo para exponer el problema de una manera atractiva e interesante, al grado tal que el enunciado verbal del problema quede comprendido. Y evidenciar que fue entendido.

Leer el problema detenidamente e identificar en el proceso lo que se conoce y qué se busca, tratando de encontrar las relaciones existentes entre si, así en principio no sea tan evidente la solución al problema. Según la situación planteada se puede realizar si es necesario un dibujo, para tratar de comprenderlo gráficamente y utilizar adecuadamente una notación.

Diseñar un plan. En esta etapa es el momento de concebir la idea de un plan, que será fundamental para encaminar a la solución del problema. Es natural que los estudiantes gasten un buen tiempo en ello, podrá ser una tarea ardua y difícil; ya que, siempre en este proceso se han de presentar muchas dudas. La lluvia de ideas irá tomando forma poco a poco, hasta el momento en que surja la idea brillante y podrá ser el inicio de la ejecución del mismo.

Aquí la función del maestro es orientar las ideas de sus estudiantes, que serán útiles para ser encaminadas a trazar el plan. Es claro, que las ideas no llegan por si solas y deben ellos hacer recuerdo de los conocimientos previos y de las experiencias pasadas. La sola memoria no basta para originar una buena idea, pero es imposible tener alguna sin recordar hechos del pasado y relacionados con el problema que se enfrenta. Vale la pena preguntar ¿Se conoce algún problema relacionado?

En el surgimiento de las ideas es viable transformar y modificar el problema, ya o que se tiene la libertad de poder utilizar otros problemas de la experiencia que se posee. El peligro aquí radica en que las varias transformaciones posibles pueden desviar y alejar completamente a los estudiantes del problema originalmente planteado. Por tal motivo, el maestro debe, en todo momento, guiar la iniciativa de los estudiantes, pero sin que tampoco impida el surgimiento de nuevos problemas para la investigación en aula, pues redunda en beneficio de ellos.

Es un derecho de los estudiantes plantear cuestiones como: ¿puede enunciarse el problema de forma diferente? y tal modificación del problema podrá originar un problema complementario y apropiado que será guía para ayudar a la solución del problema.

Llevar a cabo el plan. Esta etapa requiere de paciencia y serenidad, ya que como se dice es la ejecución del plan, cuya idea no surgió de buenas a primeras. Es importante recordar que este plan está compuesto de las ideas netamente originales de los estudiantes, no debe provenir del maestro y estará focalizado hacia la solución del problema. Aquí se necesita de los conocimientos construidos por los estudiantes y de sus habilidades de pensamiento.

Lo anterior, no implica que los estudiantes presenten dificultades, y si las hay el maestro deberá servir de apoyo para que las ideas no pierdan su fuerza. Los estudiantes podrán, como es natural, volver a ordenar sus ideas sin perder de vista el rumbo de la solución al ejecutar el plan.

El plan suministra una línea general, pero ello no implica un desarrollo completamente lineal del pensamiento o de las ideas, lo más importante aquí es que los pasos sean claros, correctos y detallados en el sentido de que cada acción matemática esté sujeta a explicación, para dar cuenta de cada proceder y actuar. El profesor es quien insiste en que los estudiantes justifiquen cada paso, ya sea oralmente o por escrito.

Mirando hacia atrás. Es la etapa más trascendental, porque es la confrontación del resultado obtenido, por medio de haber trazado un plan y haberlo ejecutado. Además ella tiene otras implicaciones, tales como ¿podemos utilizar el resultado obtenido y su proceso de solución para generar nuevos problemas para ser indagados en el aula?

Debe siempre el maestro en el salón exigir a sus estudiantes una vez han obtenido la solución exponer, en la medida de lo posible, claramente su razonamiento y verificación del resultado. Asimismo permitir la discusión para encontrar seguramente otras formas de solución al problema, hallar otra posible respuesta o detectar errores en la solución del mismo. Proceder así permite que los estudiantes verifiquen la variedad de ideas que surgen al enfrentar una misma situación.

Confirmar que no hay un único camino que conduce a la solución, fortalece los conocimientos de los estudiantes y desarrolla posibilidades y aptitudes para resolver problemas. El papel del maestro es hacer comprender a sus estudiantes que ningún problema tiene solución por única vía, además que cualquier solución está sujeta a ser mejorada.

A continuación se describe lo que significa tener un buen problema, según Escudero (1999) es una situación que presenta las siguientes características[5]:

1. *"No son cuestiones con trampas ni acertijos".* A los estudiantes, cuando se les plantea un problema, tienden a pensar que debe haber un algoritmo para abordarlo siguiendo un procedimiento sistemático, pues siempre están acostumbrados a que su maestro proceda de tal manera. También piensan de seguro que habrá un truco para resolver la situación. La práctica en la resolución de problemas hace que este pensamiento habitual vaya cambiando con el tiempo. (Escudero, 1999).

2. *"Pueden o no tener aplicaciones, pero el interés es por ellos mismos".* El interés de trabajar en la resolución de problemas en el aula de clase siempre ha de estar bajo la motivación de que ello fortalece el desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes. Es parte de dicho propio proceso. A pesar de ello, los problemas matemáticos llevan consigo a desarrollar procesos que más tarde, como se dijo anteriormente, se pueden aplicar a muchas otras situaciones que enriquecen la práctica misma en la solución de problemas. (Escudero, 1999).

3. *"Representan un desafío a las cualidades deseables en un matemático".* Es obvio que, existen unas cualidades que diferencian a las personas que solucionan problemas, pero éstas están

[5] Escudero, J. (1999). *Resolución de problemas matemáticos.* Centro De Profesores y Recursos. Salamanca, p. 11 y 12

determinadas en principio por la disciplina y la dedicación. Es objetivo que todo maestro debe generar en el aula las condiciones generales para que la resolución de problemas se vuelva cotidiana en los desarrollos de todas las actividades invitando a los estudiantes a imitar las cualidades propias de los matemáticos. (Escudero, 1999).

4. *"Una vez resueltos apetece proponerlos a otras personas para que a su vez intenten resolverlos".* Sucede con los buenos problemas matemáticas que generan el interés de ser contados por quien los resuelven. Pero esto genera que otras personas también deseen resolverlos y buscar sus propias soluciones. Así se van formando cadenas que explican su difusión. (Escudero, 1999).

5. *"Parecen a primera vista algo abordable, no dejan bloqueado, sin capacidad de reacción".* Desde el punto de vista de la resolución de problemas se deben plantear situaciones que estén al alcance de nuestros estudiantes y brindarles las herramientas necesarias para que ellos puedan enfrentarlos y resolverlos. Por eso, es imposible que se enfrente en una aventura superior a sus fuerzas. (Escudero, 1999).

6. *"Proporcionan al resolverlos un tipo de placer difícil de explicar pero agradable de experimentar".* El placer es fundamental en todo desafío intelectual, al ser asumido con gusto. La enseñanza de las matemáticas debe incorporar esos factores a la práctica de aula y promover tal valor hacia futuros estudios. No olvidar que las matemáticas para la mayoría de los estudiantes son de las materias que menos les agradan. Por ello es necesario que introduzcamos actividades diseñadas didácticamente con la intención de llamar la atención a los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas y hacer que en ellos aumente el aprecio por ella. (Escudero, 1999).

Estas características de los problemas expuestas anteriormente serán tenidas en cuenta para el desarrollo de las clases de matemáticas en el aula y para el diseño de las actividades propias de esta investigación.

2.1.1. Los problemas retos en la escuela

A continuación se cita la definición que caracteriza a un problema retador según Pérez, (2004), al plantear que: *"Los problemas retadores son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento"*[6].

Igualmente, el mismo investigador expone que *"Los problemas retadores exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior*[7]*"*.

Es indiscutible que los elementos y las relaciones descritas anteriormente, tales como la indagación, el razonamiento, la exposición de su actuación y la integración de conceptos para lograr una comprensión profunda de la matemática en la educación básica, deberán surgir en el progreso mismo de las actividades que se proponen para el desarrollo de esta tesis.

A distinción de los problemas retadores se presenta a continuación lo que se entiende por un problema no rutinario. Él tiene como característica elemental generar cierto grado de creación y originalidad por parte del estudiante. La resolución puede requerirle un verdadero compromiso de investigación, pero no lo realizará si no tiene motivos para ello. Un problema no rutinario sería:

- *"Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*

[6] Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[7] Ibídem

- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- *Darle una buena base matemática".*[8]

Para que los problemas generen motivación e interés en los estudiantes deben tener tres características especiales, *"… que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"*[9]*,* estas cuestiones han de considerarse y reflexionarse para el diseño de las actividades sobre las paradojas geométricas de la presente tesis.

2.2. Fundamentos de la visualización para el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría

En la investigación se analizan algunas paradojas geométricas, que están conformadas por figuras tales como cuadradas, rectángulas y triángulos, a las que se les realizan determinados trazos con unas medidas muy específicas. Estas medidas al ser cortadas de la manera preestablecida y a través de procesos de composición y recomposición para formar una nueva figura, a partir de estas piezas cortadas sucede que se gana o se pierde aparentemente área con respecto a la figura original.

Estos hechos llaman la atención fuertemente, porque se gana o se pierde área con solo realizar unos pocos movimientos de piezas, que resultan de los cortes realizados a la figura original. Explicar lo que acontece aquí, significa que habrá que enlazar unas nuevas conexiones entre el concepto de área de la geometría plana, los números enteros positivos, las fracciones positivas y la pendiente de un segmento de recta.

Para la búsqueda de la comprensión de estos conceptos, es significativa la visualización, pues es considerada por los docentes una herramienta poderosa para lograr en los estudiantes un robusto

---

[8]Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de noviembre de 2012 de http:www2minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/
[9]Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. p. 16.

aprendizaje matemático. Pero parece ser que, no hay una conceptualización de lo que significa y lo importante que resulta, cuando se intentan relacionar los tópicos anteriores para ser enseñados y abordados con el propósito de explicar coherentemente las paradojas geométricas presentadas a los niños.

A continuación se realiza un análisis, donde se indaga cómo la visualización es considerada por los matemáticos y cómo en el ámbito escolar se puede usar para potencializar su uso en el aula. También se precisa este término y se deja claro que no significa lo mismo que ver.

Los docentes de matemáticas frecuentemente usan dibujos y gráficas para acompañar el desarrollo de sus actividades en el aula, con la intención de hacer explícitas sus exposiciones de las temáticas frente a sus estudiantes. El objetivo de situar los temas al nivel de los niños se debe a lo abstracto de los temas que se desarrollan.

Varios son los investigadores que han aportado definiciones acerca de la visualización matemática. Entre los que se destacan Zimmermann y Cunningham (1991), Norma Presmeg (2006), Abraham Arcavi (2003) y Duval (1999), entre otros.

En la investigación se asumen las definiciones dadas por Abraham Arcavi (2003) y Miguel De Guzmán, (1996). Ya que considero son las más completas para las intenciones de las actividades a desarrollar en la investigación, además comprenden los aspectos que se encuentran más relevantes en todas las demás definiciones de visualización.

Entre tanto, la definición de Arcavi (2003) complementa la definición de Miguel de Guzmán en lo concerniente a la visualización matemática para la interpretación y aplicación de los conceptos matemáticos en la resolución de problemas. Veamos las diferentes versiones de la definición de visualización matemática expuestas por los investigadores mencionados anteriormente.

Zimmermann y Cunningham (1991), plantea que: *"… la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática"*[10] . También plantean que: *"Tomamos el término visualización para describir los procesos de producción o uso de representaciones geométricas de conceptos matemáticos, principios o problemas, tanto si se dibujan a mano, como si se generan por ordenador"* [11]

Se encuentra un enfoque más profundo de la visualización en las investigaciones de Presmeg (2006), su definición de visualización incluye explícitamente imágenes mentales de las representaciones que se pueden hacer de los diferentes tipos de objetos. *"La visualización incluye procesos tanto de construcción como de transformación de imágenes visuales que nos hacemos en la mente y todas las inscripciones de naturaleza espacial que podrían estar implicadas en el quehacer matemático"*[12] (Presmeg, 2006. Citada por Souto, 2009).

La investigadora Souto (2009) expresa: *"Duval señala que la visualización requiere un "entrenamiento especial", específico para cada registro y que no puede limitarse a la construcción de imágenes visuales. Explica que la construcción pone atención en enfocar sucesivamente en algunas unidades y propiedades, mientras que la visualización consiste en comprender directamente el conjunto de la configuración de las relaciones y en determinar qué es relevante en ella. Y apunta que lo más frecuente*

---

[10] Zimmermann and Cunningham, (1991). What Is Mathematical Visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Eds. MAA Notes Number 19, 1991, p. 3.
[11] Ibídem, p. 1.
[12] Souto, B. (2009). Visualización en matemáticas un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas. Facultad de Ciencias Matemáticas Universidad Complutense de Madrid. Departamento de Álgebra. p. 19.

es encontrar estudiantes que únicamente logran una aprehensión local de las imágenes, sin ser capaces de "ver" la organización global relevante"[13].

Por su parte De Guzmán, (1996), aduce que *"… la visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático"*[14]

Arcavi (2003) plantea que la: *"Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión"*[15]

Se observa desde la perspectiva de Arcavi (2003) que la visualización no sólo es una herramienta fundamental para la comprensión de los conceptos matemáticos, sino que también lo es para la comunicación matemática. Pensamiento que considero fundamental y será tomado en cuenta para la realización de la presente investigación, que como tal estará dirigida a potencializar el razonamiento visual, considerado un recurso alternativo para los estudiantes a la hora de resolver y explicar coherentemente las inconsistencias de las paradojas geométricas.

Históricamente ramas como la psicología también han indagado sobre el papel que desempeña la visualización en el desarrollo cognitivo de los humanos, pero tales estudios han concluido según Miguel

[13] Souto, B. (2009). Visualización en matemáticas un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas. Facultad de Ciencias Matemáticas Universidad Complutense de Madrid. Departamento de Álgebra, p. 18.
[14] De Guzmán, M. (2001). *El Rincón de la Pizarra.* Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p. 17.
[15] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics **52:** 215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 217.

de Guzmán a que *"Para ellos la visualización es una técnica…. Tiene mucho más que ver con componentes afectivos que con componentes propiamente cognitivos."*[16]

La visualización en las matemáticas pretende y está dirigida hacia otro enfoque. Ella tiene que ver con que *"Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa"* [17]

Se desprende de la frase anterior, que la visualización matemática en la educación desempeña una herramienta poderosa, porque los conceptos e ideas se pueden exhibir mediante representaciones intuitivas en donde la geometría juega un papel preponderante e importante.

Queda claro que la visualización matemática no significa lo mismo que ver o que se halla al mismo nivel de una mera visión somera de las relaciones que se quieren establecer por medio de un diagrama, un dibujo o un gráfico. En la visualización se ha de revelar y contemplar la lectura de lo que se quiere comunicar, pues para De Guzmán (1996) es *"… una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta"*[18]*.*

Por ejemplo, conceptos básicos de la geometría tales como los de orden y de distancia surgen de situaciones que son concretas y visuales. Todo docente de geometría conoce la utilidad de atender a tal origen concreto cuando quiere manejar con destreza conceptos con un mayor nivel de complejidad. Al respecto De Guzmán afirma *"Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles*

---

[16] De Guzmán, M. (2001). *El Rincón de la Pizarra.* Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p. 16.
[17] Ibídem, p. 16.
[18] Ibídem, p. 18.

representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas”[19].

En educación matemática, desde la primaria, la visualización se ha empleado principalmente como ayuda para comprender algún concepto, no es de extrañar en lo más mínimo que el apoyo continuo de lo visual esté también aquí presente en la investigación. El enfoque que aquí se hará en las actividades, permitirá comprender la potencia de la visualización matemática para la comprensión y la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de séptimo grado de la educación básica, en donde se conjugará la geometría, las fracciones y los números enteros para revelar las inconsistencias en las paradojas a estudiar.

A pesar de que la visualización matemática ha sido históricamente una herramienta muy poderosa y se ha caracterizado por desempeñar un papel trascendental en las matemáticas, sufrió una fuerte crisis debida al movimiento Formalista de la matemática. (Souto, 2009).

Las tendencias matemáticas formalistas dominantes, durante una parte del siglo 20 confinaron a un segundo plano a la visualización matemática, mostrándola en algunos casos con gran desconfianza y en otros con sospecha. *“Todos estos hechos condujeron a crear una corriente hacia la formalización a ultranza, no sólo en lo que se refiere a la fundamentación de la matemática, lo que parecía estar plenamente justificado, sino incluso en lo que se refiere a la intercomunicación en la comunidad matemática, y, lo que ha sido mucho peor, en lo que atañe a la educación matemática a diversos niveles”*[20].

Por lo tanto, las consecuencias fueron muy serias y se creó un ambiente de desconfianza con respecto a la visualización. Algunos patrocinaron intensamente que se relegara totalmente de ella. A nivel

[19] De Guzmán, M. (2001). *El Rincón de la Pizarra.* Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p.16.
[20] Ibídem, p. 30.

educativo la organización de los libros de texto tenía que acomodarse a los lineamientos de esta fuerte corriente, afectando no sólo la enseñanza de las matemáticas en la universidad, sino que también como ocurrió en muchos países del mundo (excepto Grecia y Uruguay), afectó la escuela primaria y secundaria. (Lemonidis, (s.f)). El llamado movimiento de la matemática moderna.

La visualización matemática a pesar de haber sufrido esta crisis por muchos años, sobrevivió a ella, y actualmente existe una fuerte tendencia hacia su reforma en las matemáticas, en especial para los expertos en Didáctica de la Matemática, ya que están investigando el papel de la visualización en la educación matemática y como puede favorecer ella el aprendizaje de las matemáticas.

Evidencia de esto es citada por De Guzmán (1996):

"En Junio y en Agosto de 1994 el Zeitschrift für Didaktik der Mathematik publicó dos números monográficos de la revista dedicados al tema de la visualización. Los artículos que en ellos se publican así como la extensa bibliografía recopilada por W.S. Peters es una buena muestra del interés por el tema de muchos de los que investigan los problemas actuales de la educación matemática…..Entre las obras recientes se podría destacar la recopilación de artículos: Zimmermann and Cunningham, (1991), "Visualization in Teaching and Learning Mathematics"[21]

Como la visualización matemática se ha convertido en un tema central de la educación matemática, en el presente trabajo de investigación se espera hacer uso de la visualización de la mejor manera para beneficiar el aprendizaje de los estudiantes.

Pero ¿qué papel cumplirá la visualización para comprender las inconsistencias de las paradojas que serán analizadas por los estudiantes? De Guzmán expresa *"Efectivamente una visualización incorrecta puede conducir a errores por diversos motivos. Unas veces porque la figura nos puede sugerir una*

[21] De Guzmán, M. (2001). *El Rincón de la Pizarra.* Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p. 31 y 32.

situación que en realidad no tiene lugar"[22]*.* Esta es la situación presentada en las paradojas del tipo geométrico que se analizaran en esta investigación, que mediante procesos de descomposición y recomposición de figuras ocurre aparentemente ganancia o pérdida de área.

Una paradoja según Kondratieva (2009) en el sentido amplio es *"una declaración que se ve mal y contradictoria.....su presencia facilita el proceso de comprensión de las cosas en un intento para corregir un error y hacerlo con sentido"*[23]*.*

Son muchos los obstáculos que seguro en este ejercicio de visualización encontraran los estudiantes al principio del desarrollo de las actividades, pero la posibilidad de que se incluya el error no invalida la intención de las actividades. Los estudiantes deben aprender a usar creativamente la visualización como una herramienta para la comprensión. Esta es la esencia de la visualización matemática. (Zimmermann and Cunningham, 1991)

Lo que se quiere es potenciar los diferentes procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática a través del uso de las paradojas geométricas. Un ámbito escolar fundamentado sobre esta perspectiva de interacción en el aula de clase, debe exhibir estudiantes motivados y a la vez angustiados, por la presencia de estas paradojas geométricas sencillas, que tienen la intención de provocar conflictos cognitivos en el educando.

Proporcionará la bienvenida a nuevas formas de interacción en las relaciones entre el docente y los estudiantes, así como también entre ellos. La enseñanza se vuelve más productiva y la teoría más significativa para los estudiantes. La calidad académica de estas nuevas relaciones dependerá en gran medida de los antecedentes de la motivación que el docente debió provocar en los estudiantes. (Kondratieva, 2009).

[22] De Guzmán, M. (2001). *El Rincón de la Pizarra.* Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p.35.
[23] Kondratieva, M. (2009). *Understanding mathematics through resolution of paradoxes.* Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, Canada, p.1.

2.3 Teoría de la comunidad práctica de Wenger

¿Qué es una Comunidad de Práctica? *"Las comunidades de práctica son grupos de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o una pasión sobre un tema, y que profundizan en su conocimiento y experiencia en esta área mediante la interacción de forma permanente"* [24] (Wenger, 2002).

Una Comunidad de Práctica no es lo mismo que un conjunto de personas que se definen por alguna característica, no es sinónimo de trabajo en grupo o equipo. Su afiliación no es meramente una cuestión que tiene que ver con categoría social, de hechos relacionados con la lealtad o simplemente por mantener relaciones personales con otras personas. *"La forman porque mantienen relaciones de participación mutua muy densas que se organizan en torno a lo que han venido a ser allí"*[25] (Wenger, 2001).

Wenger (2002) plantea que los estudiantes en comunidades de práctica se ayudan mutuamente en la resolución de sus problemas, discuten sus situaciones, sus aspiraciones y sus necesidades. Reflexionan sobre temas comunes, exploran ideas y actúan como cajas de resonancia. Crean herramientas, normas, diseños, manuales y otros documentos, o pueden simplemente desarrollar un entendimiento tácito que comparten. Se acumulan conocimientos debido al valor del aprendizaje que encuentran al aprender juntos. También se acumula por la satisfacción personal debido a que entienden la perspectiva del otro y por la pertenencia a un grupo de personas.

Con el tiempo, desarrollan una perspectiva única sobre su tema, así como un cuerpo de conocimiento común, prácticas y enfoques específicos. También amplían las relaciones personales, las formas y las normas establecidas de interacción, lo cual se dirige a desarrollar un sentido de identidad común.

---

[24] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p. 4.
[25] Ibídem, p.101.

Lo que pretende Wenger (2001) con su teoría es asociar Práctica y Comunidad, pues esto provoca una caracterización más manejable del concepto de Práctica y además define un tipo especial de Comunidad: una Comunidad de Práctica. Hay tres dimensiones de esta relación por medio de las cuales la Práctica es una fuente de coherencia para una Comunidad, pero para los propósitos de la investigación de la tesis desarrollaré la relación de "Compromiso Mutuo" entre los miembros de una Comunidad.

Una particularidad de la práctica como fuente de coherencia de una Comunidad es el Compromiso Mutuo de sus miembros y las relaciones de participación. Se debe posibilitar el compromiso mutuo como un componente esencial de la práctica. Estar incluido en lo que es importante, es una necesidad para poder participar en la práctica de la comunidad y será el compromiso que se adquiera lo que define su afiliación. *"Cada miembro de una comunidad encuentra un lugar único y adquiere una identidad propia que se van integrando y definiendo cada vez más por medio del compromiso en la práctica"*[26].

Se debe insistir en que estas relaciones se originan del compromiso asumido con la Práctica. Entre tanto que *"…la paz, la felicidad y la armonía no son propiedades necesarias de una comunidad de práctica. Los desacuerdos, los retos y la competencia pueden ser formas de participación". "…la rebelión suele ser señal de mayor compromiso que la conformidad pasiva"*[27].

Una comunidad de práctica es un lugar en donde existe compromiso mutuo mediado por medio de la acción participativa, en donde se fortalecen las relaciones interpersonales, en donde surge un espacio para compartir y negociar aprendizaje y conocimiento. El trabajo académico en comunidad es la clave de una posible verdadera transformación y que tendrá efectos reales en la vida de los estudiantes. Entre tanto, cambiara rotundamente el trabajo de aula de los docentes y sus prácticas pedagógicas.

---

[26] Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Paidós. Barcelona, España, p. 103.
[27] Ibídem, p. 104.

Lo que despierta el interés en esta investigación reposa en la participación activa de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, tal como lo expresa Wenger (2001) de manera explícita en sus investigaciones al respecto de las comunidades de práctica *"Centrar el interés en la participación tiene unas profundas repercusiones para lo que significa comprender y apoyar el aprendizaje. Para los individuos, significa que el aprendizaje consiste en participar y contribuir a las prácticas de sus comunidades y para las comunidades, significa que el aprendizaje consiste en refinar su práctica"*[28].

Las Comunidades de Práctica son muy variadas. Ahora se describirá y se explorará las características fundamentales que tienen en común, pues conocer estas variaciones ayuda a las personas a reconocerlas, a pesar de las diferentes formas que ellas adquieren. Al respecto Wenger expresa *"Ellas son tan diversas como las situaciones que ellas traen a la existencia y las personas que las habitan"*[29].

Algunas Comunidades de Práctica se catalogan como pequeñas e íntimas, mientras que otras, se componen de cientos de personas. Para el caso de esta investigación en donde la intención es hacer del aula de clase una Comunidad de Práctica la podemos considerar pequeña debido a la cantidad de estudiantes.

Compartir de una buena práctica requiere de interacción regular. Por tanto, esta pequeña comunidad de práctica se compone de estudiantes que viven y han compartido generalmente en el mismo lugar, en el sentido de provenir y haber sido educados en Instituciones Distritales de Educación Primaria anexas al CEDID Ciudad Bolivar; aunque Wenger (2001) exprese abiertamente que *"La proximidad geográfica no*

---

[28] Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Paidós. Barcelona, España, p. 25.
[29] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p. 24.

es suficiente para desarrollar una práctica" [30], pero él manifiesta también que *" el compromiso mutuo exige interacción y la proximidad geográfica puede ayudar a ello"* [31].

Así que la proximidad geográfica permite reunir regularmente en las aulas del CEDID a los estudiantes. Además de esto proporcionará a sus miembros, compartir construcción de conocimiento que se generará por ellos mismos debido al compromiso académico que deberán asumir para desarrollar con éxito las actividades propuestas.

La Comunidad de Práctica se cataloga como homogénea, en el sentido de estar compuesta por personas de la misma institución, del mismo grado escolar y de la misma condición social. *"La homogeneidad no es un requisito ni un resultado del desarrollo de una comunidad de práctica"* [32] manifiesta Wenger pero también en el desarrollo de su teoría expresa *"… es más fácil comenzar una comunidad entre personas con antecedentes similares, pero que tienen un problema en común. Esto será una fuerte motivación para la construcción de una práctica común"*[33].

A pesar de haber varias teorías acerca del aprendizaje y que cada una enfatiza en aspectos diferentes del mismo, se asume en esta tesis la propuesta de Wenger, quien afirma "*Mis supuestos sobre lo importante de aprender y sobre la naturaleza del conocimiento, de conocer y de los conocedores se puede resumir sucintamente como sigue: somos seres sociables. Este hecho, lejos de ser una verdad trivial, es un aspecto esencial del aprendizaje"*[34].

Lo primordial e interesante de esta teoría es que considera el aprendizaje como una participación social. Entendiendo la participación no solo localmente y con determinadas personas, sino que esta se halla

[30] Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Paidós. Barcelona, España, p. 101.
[31] Ibídem, p.101
[32] Ibídem, p.103
[33] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p. 25.
[34] Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Paidós. Barcelona, España, p. 21.

inmersa en un *"… proceso de mayor alcance consistente en participar de una manera activa en las prácticas de la comunidad y en construir identidad en relación con ella"*[35].

Esta teoría social del aprendizaje integra los siguientes componentes: Significado, Práctica, Comunidad e Identidad y los combina de tal modo que definen a la participación social como un proceso que permitirá construir aprendizaje y conocimiento.

Uno de los objetivos de la tesis es que se deberá valorar el trabajo de aula bajo la perspectiva de Comunidades de Práctica y procurar que los estudiantes tengan acceso a recursos que posibiliten su aprendizaje robusto de la matemática y que se involucren en la construcción de su propio conocimiento. Este diferente marco de referencia conceptual tendrá un preciado valor teórico, pues como profesores, de una u otra manera, debemos generar nuevas formas para promover el aprendizaje en aulas de clase.

Como en este enfoque las prácticas sociales son muy preciadas, el conocimiento se considera desde una visión social, así como individual. *"Puede haber discrepancias, puede haber rebeldes, pero es a través de un proceso de participación comunitaria, incluyendo todas las controversias, que un cuerpo de conocimiento se desarrolla"*[36]. Por lo tanto, participar en la Comunidad de Práctica, incluso cuando se va en contra de la corriente principal que sus miembros profesan producirá también conocimiento.

Valorar la naturaleza colectiva del conocimiento es importante en esta época en la que casi todos los campos cambian demasiado rápido. Hoy se requiere de múltiples perspectivas. Necesitamos de los demás para complementar y desarrollar nuestras propias experiencias. *"Este carácter colectivo de los conocimientos no significa que las personas no cuentan con el suyo propio. De hecho, las mejores*

[35] Ibídem, p.22.
[36] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p.10.

comunidades dan la bienvenida a personalidades fuertes y animan a desacuerdos y a debates."[37]. La controversia y los desacuerdos en una Comunidad la harán importante, eficaz y productiva.

Desde esta perspectiva *"el conocimiento no es estático. Esta continuamente en movimiento. De hecho, nuestro conocimiento colectivo de cualquier campo está cambiando a un ritmo acelerado"*[38]. Lo que era verdad ayer debe ser adaptado hoy para dar entrada a nuevos factores, datos, inventos y a nuevos problemas. Este dinamismo no significa que un dominio de conocimiento carece de un núcleo estable.

Esto implica que una de las tareas principales de una Comunidad de Práctica es establecer una línea de base común y ajustarla para que sus miembros puedan enfocar sus energías creativas en los temas más avanzados a los que se enfrentaran. Lo anterior es necesario y esencial para estar en el juego, estar a la vanguardia y mantener una ventaja competitiva.

"… para mantenerse al día con la cantidad en constante avance y velocidad de cambio del conocimiento, estas personas deben trabajar como una comunidad"[39], por lo que el conocimiento construido por los estudiantes ha de actualizarse constantemente y deberá apreciarse su evolución tal como lo exclama el propio Wenger (2002) en sus investigaciones.

Esta interacción ayuda a los miembros a disponer de información, a obtener nuevas ideas y a estar al corriente de pensamientos nuevos. Pero esto depende de las habilidades, la comprensión, la asignación de la responsabilidad y las relaciones entre los estudiantes.

La Comunidad de Práctica que debe generarse en el aula de clase requiere de una cuidadosa siembra por parte del docente en el siguiente sentido. Se debe lograr una valoración de los aprendizajes que se crean, se debe disponer de tiempo y de recursos disponibles para el desarrollo de las actividades

---

[37] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p. 10.
[38] Ibídem, p.10.
[39] Ibídem, p.11.

propuestas, se debe fomentar la participación, también la eliminación de barreras y será difícil ver su progreso en la ausencia de un compromiso activo y muto. Si no se consideran medidas en este sentido son pocas las posibilidades de alcanzar su pleno potencial.

Todas las comunidades de práctica comparten una estructura básica, pues *"Una comunidad de práctica es una combinación única de tres elementos fundamentales: un dominio de conocimiento, una comunidad de personas y una práctica común"*[40].

Ahora se desarrolla brevemente estos tres conceptos fundamentales de la teoría de Wenger (2002) y se muestra se aplican estos para el desarrollo de la tesis.

- "El dominio" es lo que crea la base común y origina un sentido de identidad. Afirma su propósito y da valor a sus miembros. Atrae a los estudiantes para contribuir y participar, orienta su aprendizaje y da sentido a sus acciones al interior del aula. Les permite decidir exactamente lo que vale la pena compartir, cómo presentar sus ideas, las actividades que se persiguen y les faculta reconocer el potencial de las ideas que surgen.

Es vital por parte de los estudiantes y del docente el Compromiso Mutuo a un dominio, ya que esto genera un sentido de responsabilidad ante un conjunto de conocimientos establecidos y los que se originan debido al desarrollo de una buena Práctica. El dominio guía las preguntas que se hacen y la manera en que se organiza el conocimiento. Esto ayuda a resolver lo que desean compartir.

El dominio va más allá de una simple meta, es su razón de ser. Es lo que une a las personas y orienta su aprendizaje cuando se asume con responsabilidad por todos sus miembros. Define la identidad de la

[40] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p. 27.

Comunidad y da valor a los logros de sus miembros. *"En este sentido, la identidad de la comunidad depende en buena parte sobre la importancia de su dominio"*[41].

Un dominio no es un conjunto fijo de problemas, no es meramente una cuestión de pasar, éste evoluciona con la Comunidad misma. En él temas de actualidad irán surgiendo periódicamente. Una o dos preguntas candentes se perseguirán en determinados momentos. A medida que estos problemas se resuelven aparecen otros nuevos.

"Las comunidades más exitosas prosperan donde las metas y necesidades se cruzan con las pasiones y aspiraciones de los participantes"[42]. Si el dominio de una Comunidad deja de atraer a sus miembros, la Comunidad va a la deriva. De otro lado, si el tema carece de relevancia para la Comunidad esta quedará marginada y tendrá una influencia limitada. *"Esta intersección de significado personal y la relevancia es una potente fuente de energía y valor"*[43]. Dominios que proporcionan una conexión tal apasionan e inspiran pensamiento crítico y un espíritu de investigación que son las características primordiales de toda Comunidad de Práctica.

- "La comunidad" es fundamental para una estructura social de conocimiento efectivo. Es un conjunto de personas que se relacionan, aprenden juntos, construyen relaciones y en ese sentido desarrollan pertenencia y Compromiso Mutuo.

"Tener otros que comparten su visión global del dominio y sin embargo llevar a sus perspectivas individuales sobre un problema determinado crea un sistema de aprendizaje social que va más allá de la suma de sus partes. Los miembros construyen sus ideas sobre las ideas de los otros"[44].

---

[41] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p.31.
[42] Ibídem, p.32.
[43] Ibídem, p.32.
[44] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p. 34.

Por tanto, para construir una Comunidad de Práctica, los estudiantes deben interactuar regularmente sobre cuestiones para fortalecer su dominio. Además, estas interacciones estarán basadas en tener una cierta continuidad. Dicha regularidad en los miembros despliega una comprensión compartida del dominio y un acercamiento más profundo de su Práctica.

En este proceso, se deben construir en el aula de clase relaciones de valor basadas en el respeto mutuo y la confianza. Así en el tiempo, un sentido de identidad común se crea. Ellos irán ganando una reputación, al generar sus propias especialidades o estilos para enfrentar las situaciones problemas que se desarrollaran en esta tesis.

Aunque la participación de los estudiantes es voluntaria, sin duda deberá siempre fomentarse por parte del docente, al generar motivación por el desarrollo de las actividades. Sin embargo, el éxito de la comunidad depende en gran manera de la energía que genera la propia comunidad, fundamentada en las relaciones de sus miembros.

"Una comunidad efectiva de práctica ofrece un lugar de exploración donde es seguro decir la verdad y hacer preguntas difíciles"[45]. La confianza es clave para este proceso. Las reuniones deben ser intensas, ricas en contenido y con la participación de sus miembros en buenas discusiones. Las comunidades eficaces no son necesariamente sin conflicto. De hecho será más fuerte una comunidad y se hace más productiva cuando se utiliza el conflicto como una manera de profundizar en sus relaciones y aprendizaje.

- "La Práctica" consiste en compartir un cuerpo básico de conocimientos que crean una base común, permite a los estudiantes trabajar juntos de manera efectiva. La Práctica de una comunidad explora el cuerpo de conocimiento existente y los últimos avances en el campo.

[45] Ibídem, p.37.

La Práctica según Wenger (2002) *"Denota un conjunto de formas socialmente definidas de hacer las cosas en un dominio específico: un conjunto de enfoques comunes y normas compartidas que crean una base para la acción, la comunicación, la resolución de problemas y el desempeño"*[46]. Además de la definición anterior la práctica también incluye libros, artículos, bases de conocimiento, sitios web y otras fuentes que los miembros desean compartir. También connota una cierta forma de comportarse.

El desarrollo de una Práctica exitosa depende de un equilibrio entre las actividades, la exploración de ideas y la producción de un conocimiento conjunto. El objetivo de interactuar entre los estudiantes y la creación de productos de conocimientos se deben complementar entre sí. Por un lado, la Práctica centra las actividades de la comunidad y por otro lado, da vida y legitimidad la producción de conocimiento por parte de los estudiantes.

Además de buscar una Práctica exitosa en la Comunidad, debe existir un proceso mediante el cual la Comunidad valida y aprueba nuevos conocimientos en Comunidad para que puedan ser aceptados. A pesar de ello expresa Wenger que *"ponerse de acuerdo sobre las normas y mejorar la práctica inevitablemente implica desacuerdos y conflictos"*[47].

2.4 Las paradojas en la enseñanza de la matemática

Según Flores (s.f), actualmente la enseñanza de las Matemáticas para el National Council of Teachers of Mathematics (NCTN) 1991, necesita de una Matemática orientada para todos los estudiantes, además de una metodología basada en diferentes tipos de actividades que promuevan la participación activa de los estudiantes y con un énfasis protagónico centrado en él mismo.

[46] Wenger, E. and et. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America, p.38.
[47] Ibídem, p.40.

Con esta nueva visión de la enseñanza de las matemáticas se ha de recalcar en el aula el “proceso de hacer Matemáticas”, pues hoy día no se considera el conocimiento matemático como algo completamente terminado. Esto provocó por mucho tiempo en algunos docentes y estudiantes la posibilidad de realizar cuestionamientos o plantear dudas acerca del conocimiento matemático y su enseñanza. (Vilanova y otros, s.f).

Con esta visión se desea superar la visión academicista, que por largos años se ha considerado de las matemáticas. Esta disciplina se ha considerado encerrada en sí misma e independiente de las demás áreas del conocimiento. En la nueva visión del NCTM esta comprender su metodología basada en la deducción lógica que siempre la ha caracterizado. (Flores, s.f)

Se procura que en la escuela se establezcan nuevos tipos de relaciones en el aula, entre los estudiantes, el docente y el conocimiento; buscando diferentes estrategias que apunten hacia la nueva visión de la enseñanza de las matemáticas. Deben proponerse que los estudiantes “hagan matemáticas”, en el sentido de que exploren, indaguen, expongan su proceder y analicen sus avances (Pochulu y Rodríguez, 2012).

Generalmente los profesores con experiencia desarrollan habitualmente la enseñanza de las matemáticas como una transmisión. Las Facultades de Educación deben proponerse cambiar esta perspectiva de los docentes, y hacerles entender que su función en el ámbito escolar es ser educador matemático.

También se necesita romper la visión unidimensional de las matemáticas, en donde al parecer ser no existe una relación entre sus diferentes áreas. Se debe formar en la resolución de problemas, mostrando que éstos pueden examinarse de varias formas, y permitir que se aumente la riqueza explicativa e interpretativa de los problemas, admitiendo confluir a la misma vez varias áreas de las matemáticas (Shiraman, 2010). Un ejemplo de esto lo constituye el uso de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas.

A continuación se exponen algunas reflexiones que han realizado diferentes investigadores de matemáticas en el mundo. Este análisis se realiza sobre el uso de las paradojas en los docentes de matemáticas y como se provoca un cambio de actitud con respecto al aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Es de resaltar que Flores (s.f) propone que *"…desde el paradigma de formación de profesores basado en la reflexión en la acción, se están proponiendo la utilización de paradojas, metáforas, etc. como base para suscitar la reflexión…"*[48].

La idea de utilizar las paradojas en la enseñanza de las matemáticas no es nueva en la educación matemática. Investigaciones realizadas por Flores (s.f), Movshovitz-Hadar y Hadass (1990,1991), Kondratieva (2009), Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994), Sullivan y Panasuk (1997), Castro y Pérez (2002), Batanero y otros (s.f), Macho (2012); Valdés, (s.f), y Farlow (2014), entre otros, demuestran las implicaciones del uso de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas.

La investigaciones de Movshovitz-Hadar y Hadass, (1990,1991), Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994) aseveran que el modelo de tratar con paradojas tiene una relevancia en aquellos aspectos de la educación matemática que apalean directamente a los conflictos cognitivos, la motivación, las ideas falsas y el aprendizaje constructivo.

Sostienen que las paradojas matemáticas proporcionan un terreno conveniente para una revisión no rutinaria de los materiales de la escuela secundaria, por lo que la incorporación de éstas en la escuela secundaria merece un estudio serio y cuidadosamente planificado.

---

[48] Flores, P. (s.f).*Paradojas Matemáticas Para La Formación De Profesores.* Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. SAEM THALES, p.4.

Enfatizan que trabajar en las resoluciones de las paradojas es una oportunidad de aprendizaje, pues tratar con el desafío de una paradoja puede mejorar el conocimiento de la heurística en la resolución de problemas.

Kondratieva (2009) cataloga a las paradojas como un tipo especial de rompecabezas que tienen por objetivo dar a conocer y hacer hincapié en una inconsistencia o contradicción. Expresa que muchas paradojas han influido en la forma de las matemáticas como se conocen hoy en día.

Sugiere la posibilidad de incorporar el estudio de las paradojas en los cursos de matemáticas. Pero cuestiona en qué momento de su exposición serán los estudiantes más beneficiados por ellas y cómo puede llevarse a cabo esto en el salón de clases.

Esta autora plantea en sus investigaciones la naturaleza y el papel de las paradojas, así como las ventajas de aprovecharlas en la enseñanza de las matemáticas. El estímulo pedagógico del uso de las paradojas en el salón de clases está subestimado en la actualidad y manifiesta que un estudio constante del impacto de las paradojas en los estudiantes permite desarrollar la construcción de un portafolio de actividades retadoras para los estudiantes.

Esto demuestra a groso modo, con estas dos investigaciones la importancia que tiene el uso de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Las sugerencias serán tenidas en cuenta para el diseño de las actividades que se tienen propuestas a desarrollar con los estudiantes del grado séptimo. Estas actividades tendrán como intención provocar conflictos cognitivos en los estudiantes para fortalecer sus conocimientos matemáticos construidos.

Haciendo referencia a los investigadores Flores (s.f), Kondratieva (2009), Kleiner y Movshovitz-Hadar (1990,199), Castro y Pérez (2002) entre otros, establecen criterios con respecto a qué se entiende por paradoja en un sentido didáctico. Criterios que son compartidos y pertinentes para el autor de esta tesis, que se propone como objetivo llevarlas al aula.

Según Philip Davis (1965, citado por Valdés, s.f) destacó lo que se ha calificado como la mayor paradoja matemática, cuando afirma: *"Es paradójico que, mientras la Matemática tiene reputación de ser una de las materias que no tolera las contradicciones, en realidad posee una prolongada historia de coexistencia exitosa con las contradicciones"*[49].

Watzlawick y otros (1981, citado por Flores (s.f)), manifiestan que una paradoja se define como *"… una contradicción que resulta de una deducción correcta a partir de premisas congruentes"*[50].

Kondratieva (2009) declara que *"Una paradoja en el sentido amplio es un inesperado surgido repentinamente, una declaración que se ve mal y contradictoria….su presencia facilita el proceso de comprensión de las cosas en un intento para corregir un error y hacerlo con sentido"*[51].

Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994) exponen que *"una paradoja ha sido descrita como una verdad que se coloca en la cabeza para llamar la atención. Sin lugar a dudas, las paradojas cautivan. También engañan, provocan, divierten, exasperan y seducen. Más importante aún, despiertan la curiosidad, y motivan"*[52].

Los criterios de Castro y Pérez (2002) establecen que *"una paradoja es algo que a primera vista parece ser falso, pero que en realidad es cierto; o que parece ser cierto pero que en rigor es falso; o sencillamente que encierra en sí mismo contradicciones…"*[53]. Este hecho no solo ocurre en las matemáticas, se presenta también en las ciencias y lleva consigo a un cuestionamiento de cada época particular.

---

[49] Valdés, C. (2011). Paradojas en la problematización del cálculo. Universidad de La Habana. Cuba. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, p.1.

[50] Watzlawick, P., Bavelas, J.B. y Jakson, D. (1981). *Teoría de la comunicación humana*. Herder, Barcelona.

[51] Kondratieva, M. (2009). *Understanding mathematics through resolution of paradoxes.* Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, Canada, p.1.

[52] Kleiner, I and Movshovitz-Hadar. (1994). *The Role of Paradoxes in the Evolution of mathematics.* December, p.1.

[53] Castro, I. y Pérez, J. (2002). Las Paradojas En Matemáticas. Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, p.1.

Lo transcendental de las matemáticas radica en que, en sus más difíciles paradojas, halla un nuevo camino que posibilita el origen de las más bellas y profundas teorías. Kasner y Newman sustentan: *"El testamento de la ciencia es un flujo continuo, de tal manera que la herejía del pasado es el evangelio del presente y el fundamento del mañana"*[54].

Paradojas geométricas clásicas

El exponer paradojas a los estudiantes de la educación básica pretende como único objetivo fortalecer la construcción de los conceptos matemáticos, además de exhibir relaciones entre varias temáticas con la intención de explicar estas con satisfacción. En esta investigación se pretende llevar al aula de séptimo grado las siguientes paradojas geométricas: La Paradoja de Ball, La Paradoja de Hooper, La Paradoja de Curry y Los Triángulos de Curry. También las diseñadas por el autor de la tesis.

Todas estas paradojas aparentan la pérdida o la ganancia de una unidad de área en procesos de descomposición y recomposición de figuras. Lo importante aquí es que estas paradojas cumplen con las siguientes características: son sorprendentes, no tienen una solución trivial, despiertan la curiosidad y motivan el deseo de resolverlas, pues simplemente son actividades retadoras.

En la literatura científica todas estas paradojas son explicadas matemáticamente con la Sucesión de Fibonacci y El Número de Oro, también mediante el uso de Ecuaciones Cuadráticas, como puede verse en: Gardner (1982), Gardner (1987), Sullivan y Panasuk (1997); y Koshy (2001). Claramente evidenciándose la relación entre la geometría plana, el álgebra y las sucesiones de Fibonacci para explicar las inconsistencias que presentan estas paradojas.

Al tener presente que las paradojas deben ser explicadas por niños de grado séptimo de la Educación Básica y los elementos con los que ellos cuentan aparentemente son muy limitados a nivel matemático,

[54] Ibídem, p. 1.

se propone resolverlas por medio de la conexión que existe entre la geometría plana y la pendiente de segmentos de recta.

La sustentación matemática que se pretende, busca comprender las inconsistencias en las paradojas geométricas. También permite mostrar a los estudiantes las conexiones entre diversas áreas de las matemáticas y que estas se evidencian al resolver actividades retadoras al interior del aula.

Realizar actividades de aula para trabajar con paradojas trae implicaciones no sólo al nivel de la didáctica, sino también al nivel de los conocimientos. Este proceso tiene la intención de fortalecer las discusiones con los estudiantes, que son los que tienen un papel protagónico en las nuevas visiones de la enseñanza de las matemáticas. (Flores (s.f) y Kondratieva (2009)).

Características de las paradojas en la enseñanza de la matemática.

Las paradojas matemáticas llevan un reto especial, un mensaje escondido, pensando en que proveen al estudiante la oportunidad para refinar su comprensión de la matemática. Lo productivo de tal experiencia, al usar paradojas en el aula, depende en gran medida del docente y de la motivación que genere en sus estudiantes. En la práctica docente el uso de paradojas en los cursos de matemáticas al nivel de la educación básica no es muy común, a pesar de que ellas guardan un mensaje oculto que cualquier estudiante desearía resolverla. Las investigaciones muestran que la práctica pedagógica es distinta y está mediada por actividades desafiantes debido a que la incorporación de las paradojas beneficia plenamente a los estudiantes.

Las características de las paradojas son en esencia: sorprendentes, no tienen una solución trivial, despiertan la curiosidad, motivan el deseo de resolverlas, actividades retadoras.

Funciones de las paradojas en la enseñanza de la matemática.

Al emplear paradojas en el aula se propone que el docente sea cuidadoso y perceptivo, pues la aplicación de las paradojas en los procesos de enseñanza es un reto, pero a la misma vez es un valioso ejercicio de creatividad si se utiliza de manera reflexionada.

Estas son algunas recomendaciones sugeridas por Kondratieva para la mejora de los cursos en donde se usan las paradojas matemáticas. Todas estas sugerencias son asumidas en el proceso de la elaboración y desarrollo de las actividades para la presente tesis.

1. *"Construir una colección de paradojas e incluirlas en el portafolio de enseñanza como un reto específico de la actividad en el aula"[55].*

La función del docente no solo consiste en motivar a sus estudiantes para que deseen resolver las paradojas que se consideran en el salón de clases. Debe mediante bibliografía apropiada recopilar un conjunto de paradojas, que estén al alcance de los estudiantes y cumpliendo con la exigencia de ser motivadoras y cautivadoras al nivel de actividades que han de clasificar como retadoras.

2. *"Enseñe paradojas para ilustrar un punto específico. Asegúrese de que la esencia de la paradoja sea entendida en el contexto del material siendo estudiado"[56].*

La enseñanza de una paradoja debe estar orientada a ilustrar el progreso de un tema específico que se esté abordando con los estudiantes. El desarrollo de las actividades contenidas en la presente tesis, deben girar en torno a la conservación del área. Por tal motivo se han seleccionado un conjunto de paradojas geométricas, en donde aparentemente no se cumple el principio de conservación del área, y mediante un estudio profundo en ellas comprender las inconsistencias involucradas para dejar claro la conservación del área.

3 "Permitir a los estudiantes algunas veces tiempo para pensar por su cuenta"[57].

[55] Kondratieva, M. (2009). *Understanding mathematics through resolution of paradoxes.* Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, Canada, p.7.
[56] Ibídem, p.7.

En el desarrollo de la comprensión de las inconsistencias de una paradoja es lógico que a los estudiantes se les de la opción de participar en las actividades propuestas, ya que él es el protagonista en la construcción de su propio conocimiento. Además la resolución de problemas según Polya (1973) así lo exige y el maestro debe orientar sus ideas con la intención de guiarlo en la solución.

4 *"Involucrar a los estudiantes en una discusión. Hacer que ellos desarrollen sus conclusiones, llevándolos a una resolución"[58].*

En el proceso de resolución de las inconsistencias de las paradojas, habrá momentos en que los estudiantes trabajen en pequeños grupos, para compartir con sus compañeros los avances que adquirieron a nivel individual y así socializar sus soluciones. Después se irán conformando grupos más grandes, bajo la misma estrategia, para alcanzar un consenso de solución grupal. Lo exige el modelo de Práctica de Wenger (2002) en donde se considera el conocimiento un construcción de interacciones sociales.

5 *"Indicar una resolución clara"[59].*

Al realizar las actividades a desarrollar en la tesis bajo las consideraciones anteriores, se procede a finalizar con las explicaciones del por qué se gana o se pierde área en las paradojas geométricas seleccionadas. Se espera que las inconsistencias de las paradojas sean aclaradas de una vez por todas y se comprendan dichas soluciones al integrar diferentes conceptos matemáticos, que es la intención de esta investigación.

6 *"Recuerde que el objetivo es desequilibrar al alumno en una manera estéticamente valiosa, y a continuación, hacer uso de su curiosidad natural"[60].*

---

[57] Kondratieva, M. (2009). *Understanding mathematics through resolution of paradoxes.* Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, Canada, p.7.
[58] Ibídem, p.7.
[59] Ibídem, p.7.

En las palabras de Kleiner y Movshovitz-Hadar (1994) se desea que uno de los objetivos de esta tesis sea que las paradojas geométricas que se lleven al aula de clases *"... cautivan, engañan, provocan, divierten, exasperan y seducen. Más importante aún, despiertan la curiosidad, y motivan"*[61].

Despertar la curiosidad en los estudiantes es motivo de todo maestro de matemáticas escolares, pues a través de ella se sentirán atraídos a resolver el secreto de las paradojas.

De esta manera los estudiantes, que están habituados a un razonamiento matemático único, correcto y que nunca se les ha producido contradicciones en el conocimiento construido hasta ahora, se sientan obligados a buscar las interpretaciones más amplias de afirmación y razonamiento, para profundizar en los conceptos matemáticos ligados con estas paradojas geométricas que se desarrollaran en las actividades. (Flores, s.f)

Como afirman Kasner y Newmann (citados por Castro y Pérez, 2002): *"Quizás la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en la matemática". "Afortunadamente para esta ciencia, las paradojas siempre han estado presentes en su quehacer, ellas se han convertido en un verdadero reto, fuente de inspiración y creación, que le ha permitido adquirir no sólo un alto grado de desarrollo, sino también la ha obligado a cambiar sus conceptos de rigor y precisión, !bienvenidas sean las paradojas!."*[62]

Conclusiones del capítulo 2

Para que el estudiante asuma un papel protagónico en la construcción de su propio conocimiento, se propone integrar la resolución de problemas de Polya y la comunidad de Wenger. El docente deberá asumir la función de ser un guía en los procesos involucrados bajo estas perspectivas de trabajo en el aula. La relación docente y estudiante girará en torno a una nueva forma de comprender que las

---

[60] Kondratieva, M. (2009). *Understanding mathematics through resolution of paradoxes.* Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland, Canada, p.7.

[61] Kleiner, I and Movshovitz-Hadar. (1994). *The Role of Paradoxes in the Evolution of mathematics.* December, p.1.

[62] Castro, I. y Pérez, J. (2002). Las Paradojas En Matemáticas. Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, p.20.

matemáticas están enfocadas principalmente a solucionar problemas, y que por tal motivo se deben integrar varias áreas, con la intención de fortalecer y enriquecer las formas de explicación y avanzar hacia esta nueva metodología de trabajo en el aula. La indagación, la exploración y el dar cuenta de todo proceder matemático serán piezas fundamentales en este nuevo camino que ahora enfrento con mis estudiantes.

CAPITULO 3. ACTIVIDADES PARA ENSEÑANZA DEL ÁREA A TRAVÉS DE LAS PARADOJAS EN EL SÉPTIMO GRADO

En este capítulo se muestra la estructura de las actividades y como estas son contentivas del marco teórico asumido. También se describen las actividades, conformadas en cuatro grupos: geometría, fracciones, números enteros y paradojas. En total se referencian 19 actividades a realizar con los estudiantes.

3.1. Estructuras de las actividades

Las actividades están diseñadas con la intención de ser problemas atractivos y motivadores para el estudiante. Se busca que el estudiante en el desarrollo de las mismas sea capaz de:

- Hallar soluciones a través del empleo de diferentes estrategias.
- Exponer los razonamientos matemáticos empleados de forma escrita o verbal y argumentar claramente la utilización de los mismos.
- Llegar a conclusiones y validar sus respuestas.

Estas actividades se dirigen a promover un aprendizaje autónomo en el estudiante, a desarrollar nociones fundamentales de conocimientos matemáticos y a generar un aprendizaje significativo. Se busca despertar el interés del estudiante por las matemáticas desde problemas sencillos hasta problemas con más grado de dificultad y por ultimo ser capaces de explicar las inconsistencias en las paradojas geométricas que se analizarán en desarrollo de la presente tesis.

El docente intervendrá cuando sea necesario y las condiciones lo ameriten para guiar la solución de los estudiantes a cada una de las actividades planeadas en el salón de clases.

Las actividades que se presentan están basadas en problemas retadores para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la conservación del área, de tal modo que permitan comprender las inconsistencias de las paradojas, al integrar la geometría, las fracciones y los números enteros al nivel de un grado séptimo. Estas actividades se refieren a contenidos de geometría, de fracciones, de paradojas y de números enteros. En su mayoría se estructuran en objetivo, materiales y desarrollo de la actividad.

Para el desarrollo de las actividades se hace necesario considerar de forma general algunas sugerencias metodológicas. Estas sugerencias están dadas en que se debe:

- Entregar inicialmente a cada grupo de estudiantes la guía para el desarrollo de la actividad.
- Abordar la resolución de los problemas empleando la metodología de trabajo, de Polya (1973).
- Desarrollar trabajo en grupo, entendido este como parte de una comunidad académica, que permite la socialización entre ellos, quienes contribuyen a la resolución del problema por medio de consenso grupal y creativo en donde cada uno de sus integrantes aporta a la solución del mismo.

A continuación se describen las actividades que componen la tesis.

Actividades de geometría:

Actividad 1: Comparación de figuras geométricas.

Actividad 2: La relación triangulo – cuadrado – rectángulo.

Actividad 3: La relación rectángulo – paralelogramo – triangulo.

Actividad 4: Relación rectángulo – trapecio – paralelogramo.

Actividad 5: Relación hexágono - triángulos – rombos – trapecios.

Actividad 6: Calculo de áreas y Problemas Retadores.

Actividad de fracciones:

Actividad 1: Representación de fracciones.

Actividad 2: Fracciones Equivalentes.

Actividad 3: Comparación de fracciones.

Actividad 4: Razones entre áreas y Problemas Retadores.

Actividad 5: Representación Angular de las Fracciones.

Actividades de números enteros:

Actividad 1: Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales (TIPO 1).

Actividad 2: Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales (TIPO2).

Actividad 3: Problemas retadores y Formulación de Modelos.

Actividades de paradojas:

Actividad 1: La fracción mediante.

Actividad 2: Generamiento de Fracciones Equivalentes.

Actividad 4: Un triángulo mágico.

Actividad 4: Un cuadrado extraño.

3.2. Actividades de geometría

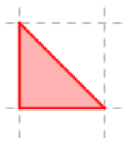
3.2.1. Actividad 1: comparación de figuras geométricas

Objetivo: Medir diferentes superficies por medio del recubrimiento total de una figura geométrica utilizando un patrón de medida como pueden ser triángulos, cuadrados, paralelogramos, trapecios y rombos.

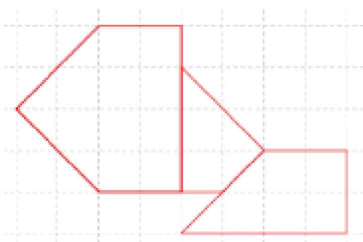
Material: La actividad impresa en papel, el tangram de 7 piezas, el tangram rectángulo, figuras en papel, papel en colores, tijeras y reglas.

Desarrollo de la actividad:

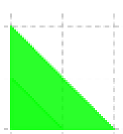
1. ¿Cuántas fichas como la muestra:



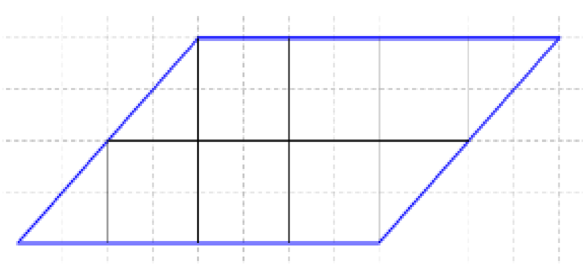
se necesitan para cubrir la siguiente figura?

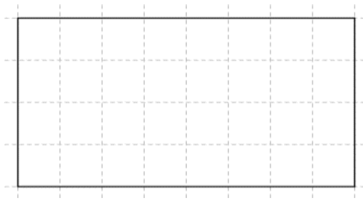


2. ¿Cuántas fichas como la muestra:

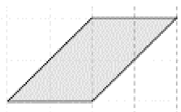


se necesitan para cubrir las figuras?

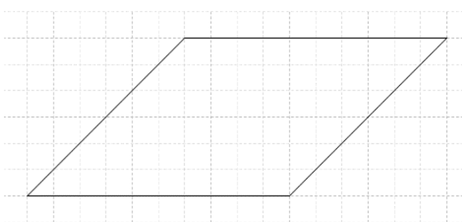




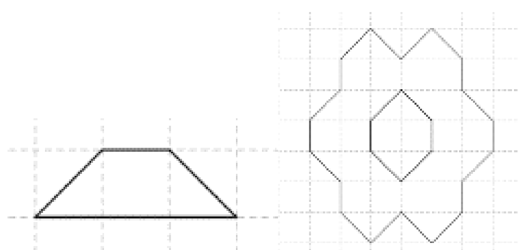
3. ¿Cuántas fichas como la muestra:



se necesitan para cubrir la superficie de la figura?

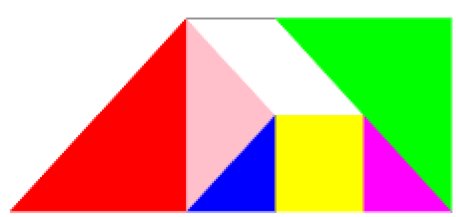


4. ¿Cuántas fichas como la muestra:

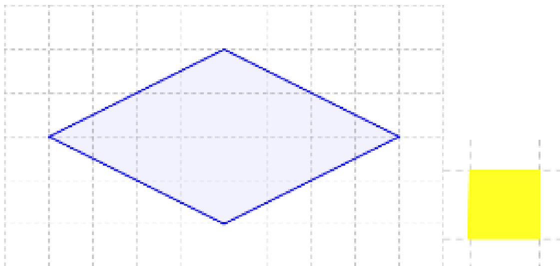


se necesitan para cubrir la superficie de la figura?

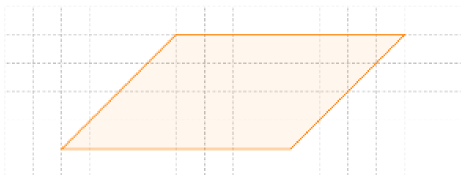
4. El trapecio rectángulo se construyó con las fichas del Tangram. ¿Cuántas fichas como la rosada se necesitan para cubrirlo completamente?

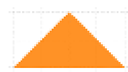


6. El rombo a continuación se necesita cubrir con la ficha amarilla. ¿Cuántas fichas como la amarilla se necesitan para cubrirlo completamente?

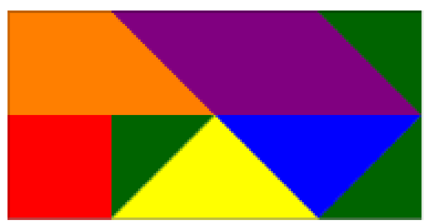


7. Se tiene el siguiente paralelogramo.



¿Cuántas fichas como la naranja se necesitan para cubrirlo completamente? 

8. El tangram rectángulo.



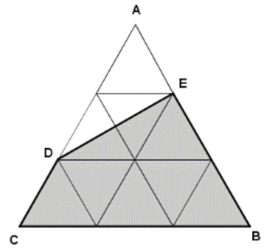
A. ¿Cuántas fichas como la verde se necesitan para cubrirlo completamente?

B. ¿Cuántas fichas como la roja se necesitan para cubrirlo completamente?

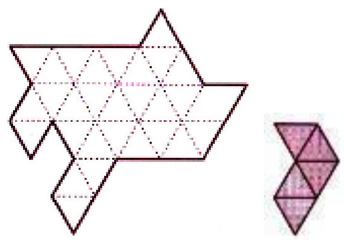
C. ¿Cuántas fichas como la amarilla se necesitan para cubrirlo completamente?

9. Un triángulo equilátero se cubre de la siguiente manera. ¿Con cuántas fichas triangulares pequeñas se cubre la zona sombreada de gris?[63]

[63] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2005). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p.5.



10. Reconstruir la figura de la izquierda con las piezas tal como una de las que se muestra. [64]



3.2.2. Actividad 2: la relación triangulo cuadrado - rectángulo

Objetivos: Descomponer y recomponer figuras geométricas tales como el triángulo rectángulo, el cuadrado y el rectángulo para comprender sus propiedades geométricas.

Construir el significado de área mediante la descomposición y la recomposición asociada a experiencias cotidianas.

Establecer relaciones entre figuras geométricas por medio de la descomposición y recomposición al formar nuevas figuras geométricas.

Material: La actividad impresa en papel, figuras en papel, papel en colores, tijeras y reglas.

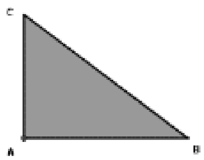
Desarrollo de la actividad:

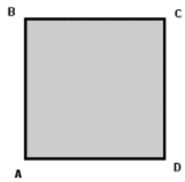
Observa las siguientes figuras:

TRIÁNGULO RECTÁNGULO– CUADRADO – RECTANGULO

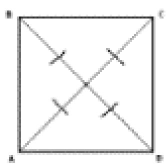
[64] Mathematical Calendar 2014. First Level, July. A monthly publication by Colombia Aprendiendo. Recreational Mathematics Projet.

Las denotaremos de la siguiente manera:





1. Utiliza el cuadrado en papel que recibiste y realiza en él los siguientes dobleces para verificar las siguientes propiedades:



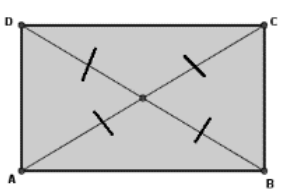
Hacer un doblez que pase por A y C y otra que pase por B y D. Desdoble.

A. ¿Qué se nota de las partes en que quedan divididas las diagonales?

B. ¿Lo puedes confirmar con dobleces y explicarlo?

C. ¿Son las diagonales en un cuadrado perpendiculares?

2. Utiliza el rectángulo en papel que recibiste y realiza en él los siguientes dobleces para verificar las siguientes propiedades:



Hacer un doblez que pase por A y C y otra que pase por B y D. Desdoble.

A. ¿Qué se nota de las partes en que quedan divididas las diagonales?

B. ¿Lo puedes confirmar con dobleces y explicarlo?

C. ¿Son las diagonales en un rectángulo perpendiculares?

3. A continuación se estudian las propiedades básicas de un rectángulo y de un cuadrado:

Con el rectángulo en papel que recibiste dibuja una diagonal en él.

A. ¿En cuáles figuras queda subdividido el rectángulo?

B. ¿En cuántos triángulos rectángulos queda dividido el rectángulo?

C. ¿Qué se puede decir acerca de esas figuras?

D. ¿Qué criterio usaste para sustentar tu respuesta?

E. ¿Tendrán estos triángulos igual área?

4. ¿Se cumpliría lo mismo si en vez del rectángulo se hubiera tomado un cuadrado? para tal efecto usa el cuadrado en papel que recibiste.

5. Ahora usa otro rectángulo en papel de los que recibiste y dibújale las dos diagonales.

A. ¿En cuáles figuras queda subdividido el rectángulo?

B. ¿Hay algunas figuras con la misma forma y tamaño?

C. ¿Todas las figuras tienen igual área?

E. Si tu respuesta es afirmativa, como sustentarías tu afirmación?

6. Usa ahora un cuadrado y proceda de la misma manera.

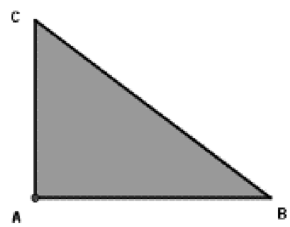
A. ¿En cuáles figuras queda subdividido el rectángulo?

B. ¿Hay algunas figuras con la misma forma y tamaño?

C. ¿Todas las figuras tienen igual área?

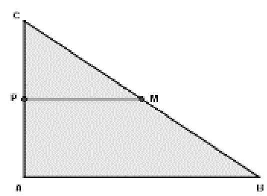
E. Si tu respuesta es afirmativa, ¿cómo sustentarías tu afirmación?

7. Dado el triángulo rectángulo de la figura, dibuja un rectángulo cuya área sea el doble del área del triángulo.



A. ¿Puedes encontrar el área de uno de los triángulos que compone al rectángulo?

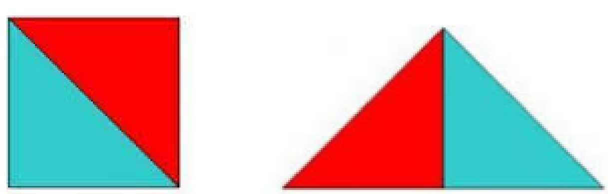
8. Muestra cómo se puede descomponer un triángulo en dos piezas y construir con ellas un rectángulo.



A. ¿Qué puedo concluir con respecto a las áreas de las figuras?

B. ¿Cómo deberían ser los catetos de un triángulo rectángulo para que, haciendo el mismo proceso anterior, se construya un cuadrado (o para que el rectángulo que se forme sea en efecto un cuadrado)?

9. Observa la siguiente transformación:



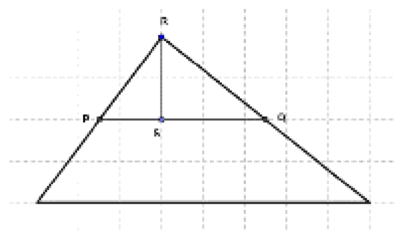
Así se ve que es posible descomponer un cuadrado y recomponerlo de manera que se forme un triángulo rectángulo.

A. ¿Este triángulo isósceles tiene algunas propiedades particulares?

B. ¿Cuáles son?

10. Veamos otra transformación: (¡debes realizar esta parte de la actividad con las figuras en papel que recibiste!).

Dado el triángulo de la figura, donde P y Q son puntos medios de los lados. Recorta a lo largo de los segmentos PQ y RS. Construye un rectángulo con las tres piezas.



A. ¿Qué relación hay entre la altura del triángulo original y la del rectángulo formado?

B. ¿Qué puedo concluir con respecto a las áreas de triángulo original y del rectángulo que se formó?

3.2.3. Actividad 3: la relación rectángulo – paralelogramo - triángulo

Objetivos: Descomponer y recomponer figuras geométricas tales como el rectángulo, el paralelogramo y el triángulo para comprender sus propiedades geométricas.

Construir significado para el concepto de área a través de la descomposición y la recomposición en figuras geométricas.

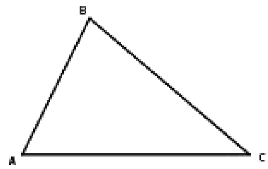
Material: El material de la actividad impreso, figuras en papel, papel en colores, tijeras y reglas.

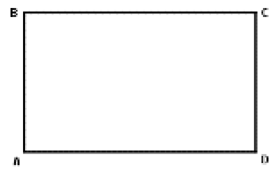
Desarrollo de la actividad:

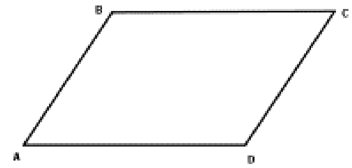
Observa las siguientes figuras:

TRIÁNGULO – RECTÁNGULO - PARALELOGRAMO

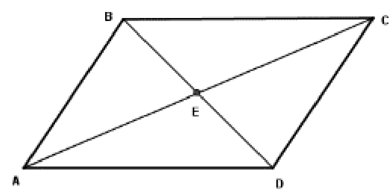
Las denotaremos de la siguiente manera:







1. Propiedades básicas: Sea E el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo.

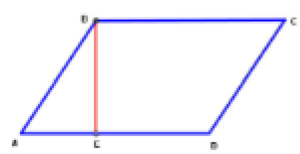


A. ¿Qué se puede decir acerca de E?

B. ¿Cómo se puede verificar esta propiedad?

Usa el paralelogramo en papel que recibiste para confirmar tu respuesta.

2. Elementos importantes: Se traza BE perpendicular a AD. BE es una altura del paralelogramo y AD es la base.



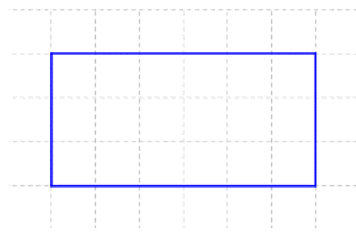
Ahora contesta las siguientes preguntas:

3. Traza un paralelogramo.

A. Mostrar cómo se puede descomponer un paralelogramo en dos piezas y armar con ellas un rectángulo.

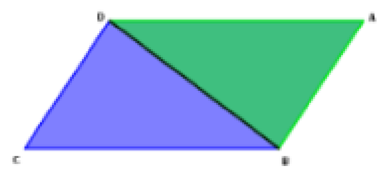
B. ¿Qué puedo concluir con respecto a las áreas de las figuras?

4. Dibuja un paralelogramo cuya área sea igual a la del rectángulo que se muestra.



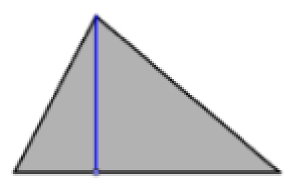
5. Dibuja otro paralelogramo de distinta forma al que dibujaste anteriormente pero con la misma área. Traza una de sus diagonales.

¿Qué observa al trazar la diagonal del paralelogramo?



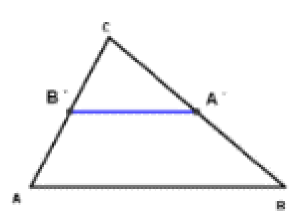
Explica tus respuestas.

6. Dado el triángulo de la figura:



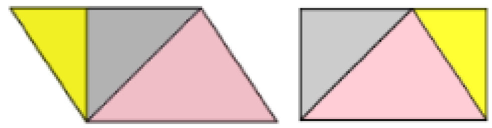
Dibuja un paralelogramo cuya área sea el doble del área del triángulo de la figura anterior.

7. Veamos la siguiente transformación (debes realizar esta parte de la actividad con las figuras en papel que recibiste!). En el triángulo de la figura, A' y B' son puntos medios de los lados. Recorta a lo largo de la línea A'B'. Construye un paralelogramo con las dos piezas.



A. ¿Qué relación existe entre la altura del triángulo original y la del paralelogramo formado?

8. Observa la siguiente transformación.



Se descompone el paralelogramo y se recomponen las piezas para formar un rectángulo.

A. ¿A qué es igual la suma de las áreas de los triángulos amarillo y gris?

B. ¿Qué relación existe entre el área del triángulo de color rosado y el área del rectángulo?

9. Realiza esta parte de la actividad con las figuras en papel que recibiste.

A. ¿Qué relación tienen las medidas de las alturas del rectángulo y del triángulo inscrito en él?

B. ¿Qué relación tienen las medidas de las bases del rectángulo y del triángulo inscrito en él?

C. Dobla adecuadamente y verifica que el triángulo inscrito en el rectángulo tiene como área la mitad del área del rectángulo que lo contiene.

D. ¿Se puede decir que el rectángulo tiene como área el doble del área del triángulo inscrito en él?

3.2.4. Actividad 4: relación rectángulo – trapecio – paralelogramo

Objetivos: Descomponer y recomponer figuras geométricas tales como el rectángulo, el trapecio y el paralelogramo para comprender sus propiedades geométricas.

Construir significado de área por medio de la descomposición y la recomposición mediante experiencias cotidianas.

Establecer relaciones entre figuras geométricas por medio de la descomposición y la recomposición al formar nuevas figuras geométricas.

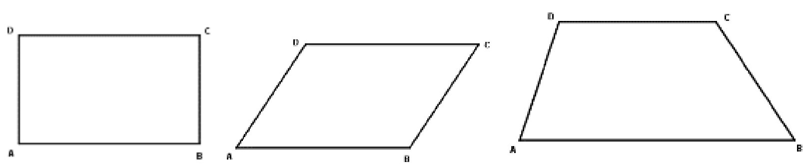
Material: La actividad impresa en papel, figuras en papel, papel en colores, tijeras y reglas.

Desarrollo de la actividad:

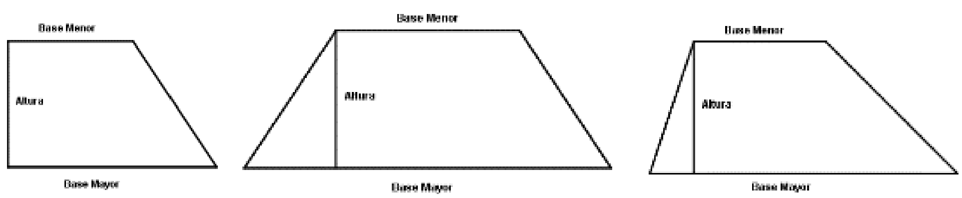
Observa las siguientes figuras:

RECTÁNGULO – TRAPECIO – PARALELOGRAMO

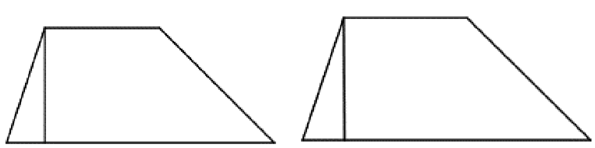
Las denotaremos de la siguiente manera:



Tipos de trapecios y elementos importantes



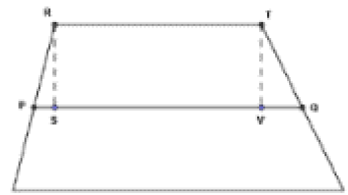
1. Dado los dos trapecios como los de la figura (o los que recibiste en papel!), construye con ellos un paralelogramo.



A. ¿Puedes calcular el área del trapecio a partir del área del paralelogramo que formaste?

2. Veamos la siguiente transformación (debes realizar esta parte de la actividad con las figuras en papel que recibiste!).

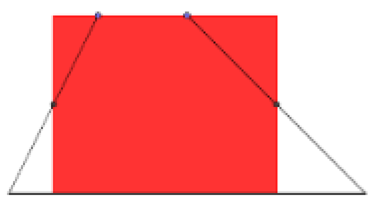
Dado el trapecio de la figura, en la que P y Q son los puntos medios de los lados. Recorta a lo largo de los segmentos PQ, RS y TV y con las cuatro piezas construye un rectángulo.



A. ¿Qué relación existe entre las alturas del rectángulo formado y la del trapecio?

B. ¿Calcula el área del trapecio a partir del área del rectángulo que formaste?

3. Transformación de un rectángulo en un trapecio. Observa la siguiente figura. ¿Se puede lograr siempre tal transformación?



A. Realiza transformaciones a trapecios isósceles.

B. Realiza transformaciones a trapecios rectángulos.

3.2.5. Actividad 5: relación hexágono - triángulos – rombos - trapecios

Objetivos: Descomponer y recomponer figuras geométricas tales como hexágonos, triángulos equiláteros, rombos y trapecios isósceles para comprender propiedades geométricas.

Construcción del significado de área por medio de la descomposición y la recomposición mediante experiencias cotidianas.

Establecer relaciones entre figuras geométricas por medio de la descomposición y la recomposición al formar nuevas figuras geométricas.

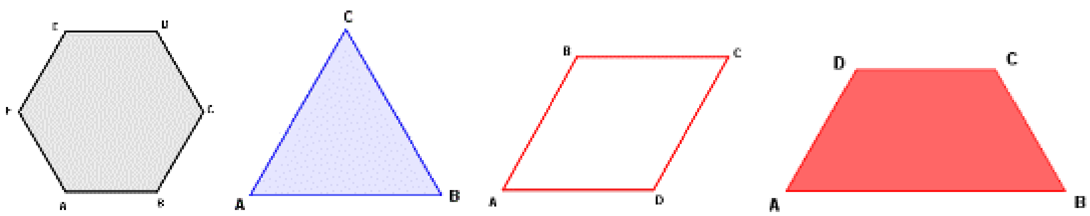
Material: La actividad impresa en papel, rompecabezas de las figuras propias para la actividad, figuras en papel, papel en colores, tijeras y reglas.

Desarrollo de la actividad:

Observa las siguientes figuras:

HEXÁGONO – TRIÁNGULO EQUILÁTERO – ROMBO – TRAPECIO ISOSCELES

Las denotaremos de la siguiente manera

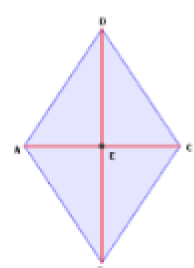


1. Toma el rombo en papel que recibiste y realiza sobre él lo siguiente:

Dobla el rombo a los largo de sus diagonales, primero una y luego la otra.

A ¿Qué se puede decir acerca de los ángulos formados por las diagonales?

B. ¿Qué se puede decir acerca de los triángulos en que queda dividido el rombo? C. ¿Qué se puede decir del punto E?

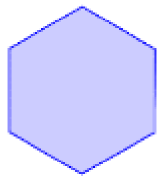


D. ¿Puedes calcular el área del rombo si conoces las longitudes de las diagonales?

E. Supón que tienes una figura en forma de cometa que no es un rombo. ¿Cómo se puede calcular el área de la cometa?

2. Debes realizar esta parte de la actividad con las figuras en papel que recibiste.

Observa el siguiente hexágono.

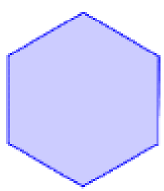


A. Descomponga el hexágono en seis triángulos equiláteros “iguales”

B. Hallar el área del hexágono, teniendo en cuenta los triángulos equiláteros que lo conforman.

Puedes también utilizar el rompecabezas.

3. Observa el siguiente hexágono



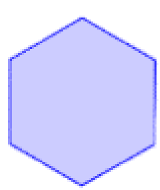
A. Descomponerlo en 3 rombos iguales.

B. ¿Qué se puede decir, con respecto al área del hexágono en términos de las áreas de los rombos?

C. ¿Qué se puede decir con respecto al área de los rombos en términos del área del hexágono?

Puedes también utilizar el rompecabezas.

4. Observa el siguiente hexágono



A. ¿Se puede descomponer el hexágono de la figura en trapecios iguales?

B. ¿Con cuántos trapecios está conformado el hexágono?

C. ¿Qué se puede decir con respecto al área del “hexágono” en términos de las áreas de los trapecios?.

D. ¿Qué se puede decir con respecto al área de los trapecios en términos del área del hexágono?

5. Formar un paralelogramo con los dos trapecios anteriores.

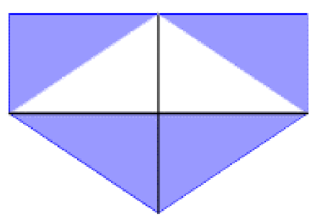
A. ¿Cuál es el largo de la base del paralelogramo que formaste?

B. ¿Qué relación hay entre la base del paralelogramo y la base de uno de los triángulos equiláteros en que se puede descomponer el hexágono?

C. ¿Qué relación hay entre la altura del paralelogramo y la de uno de los triángulos equiláteros?

Puedes también utilizar el rompecabezas.

6. Observa la siguiente transformación en la cual se descompone un rectángulo y se recomponen las piezas para formar un rombo.



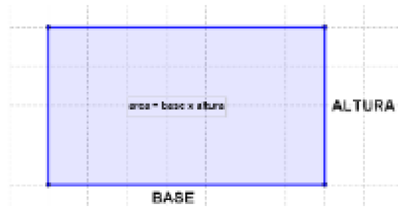
A. ¿Cómo la podrías llamar?

B. Idea una forma de calcular el área del rombo.

C. ¿Cómo se compara con la forma de calcular el área del rectángulo?

3.2.6. Actividad 6: cálculo de áreas

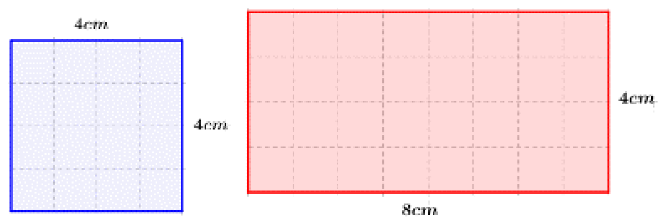
Objetivo: Hallar en diferentes figuras geométricas planas y en distintas situaciones el área correspondiente.



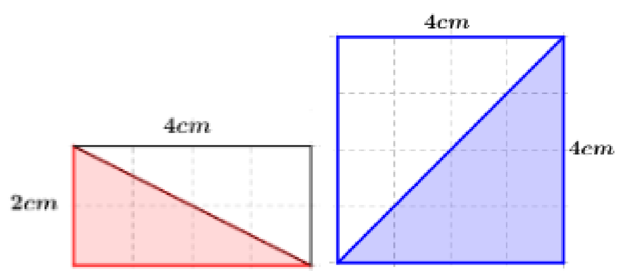
Material: La actividad impresa en papel, papel cuadriculado, papel, figuras en papel, tijeras y reglas.

Desarrollo de la actividad:

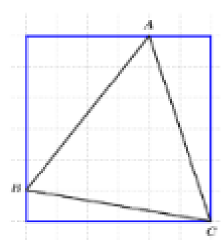
1. Hallar el área en cada caso:



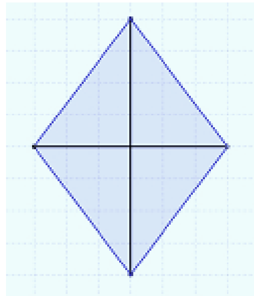
2. Hallar el área de los triángulos sombreados:

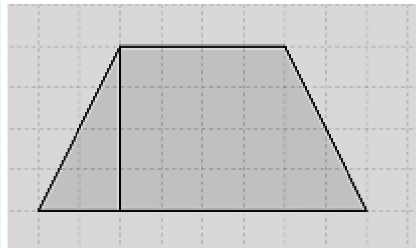


3. Hallar el área del triángulo ABC si cada cuadrito mide 1 cm de lado

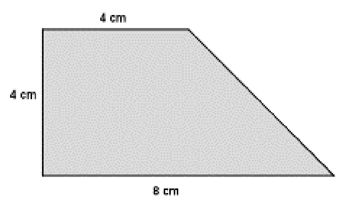


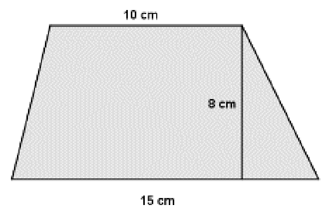
4. Averiguar el área de cada una de las figuras a continuación, si cada cuadrito mide 2 cm de lado

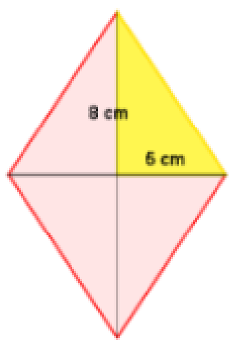


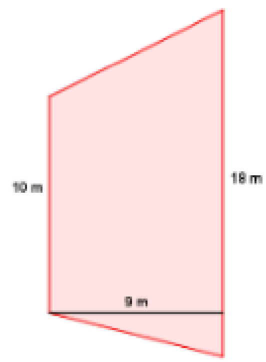


5. Hallar el área de cada figura:

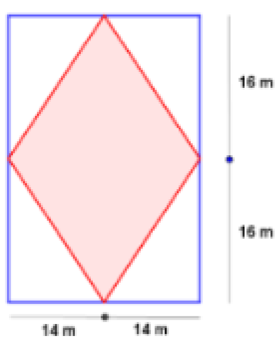


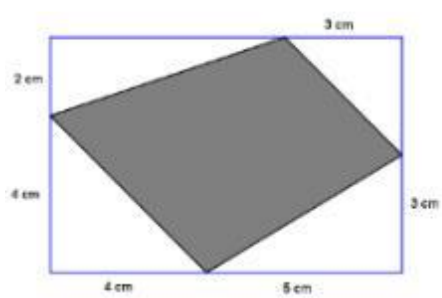






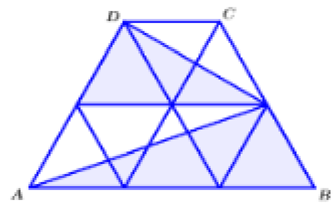
6. Hallar el área sombreada en cada uno de los casos a continuación:





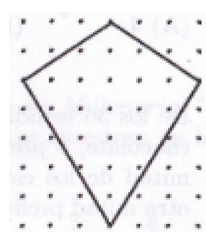
PROBLEMAS RETADORES.

1. El trapecio ABCD está formado por 8 triángulos equiláteros de área 1 cm^2. Determine el área de la región sombreada en el trapecio[65].



2. Para participar en el festival de cometas en el CEDID Ciudad Bolívar, Esteban hace una cometa, cuya maqueta aparece como en la figura. Esta se dibuja sobre una retícula donde la distancia entre los puntos vecinos es igual a 1 cm. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la cometa que planea realizar Esteban?[66]

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

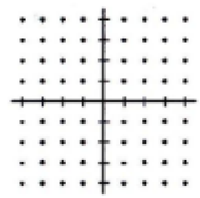


3. Esteban recubre la cometa con papel de color azul. El papel es cortado de una pieza rectangular que cubre toda la retícula. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel sobrante son recortados de las cuatro esquinas?[67]

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

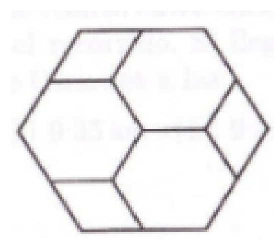
4. Los puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas: A (3,2), B (3,-2) , C (-3, -2) y D (-3,0). El área en unidades cuadradas, del cuadrilátero ABCD es[68]:

[65] Mathematical Calendar 2014. First Level, July. A monthly publication by Colombia Aprendiendo. Recreational Mathematics Projet.
[66] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2002). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p.15.
[67] Ibídem, p.15.



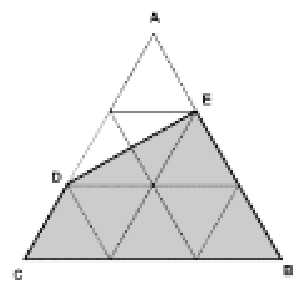
A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 24

5. Un hexágono regular se divide en tres hexágonos regulares más pequeños y tres rombos iguales, tal como se muestra en la figura. Si el área del hexágono grande es de 480 centímetros cuadrados, el área de cada uno de los rombos, en[69] cm^{2}, es:



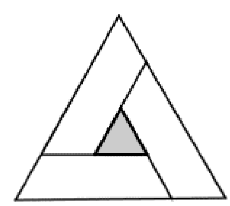
A) 40 B) 60 C) 75 D) 30 E) 45

6. El triángulo equilátero ABC tiene área 90 cm^{2}. El cuadrilátero sombreado de gris tiene un área de[70]:



A) 30 cm^2 B) 40 cm^2 C) 50 cm^2 D) 60 cm^2 E) 70 cm^2

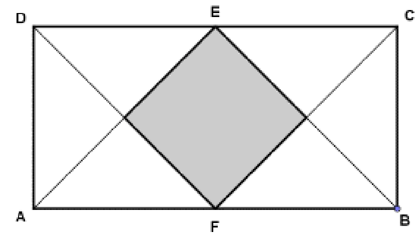
7. El triángulo equilátero exterior tiene 16 unidades cuadradas de área, el triángulo equilátero interior tiene 1 unidad cuadrada de área, y los tres trapecios son congruentes. ¿Cuántas unidades cuadradas tiene el área de uno de los trapecios?[71]



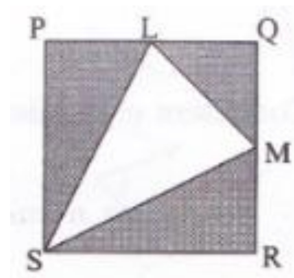
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 6

[68] Ibídem, p. 16.
[69] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2005). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p.10.
[70] Ibídem, p. 25.
[71] Ibídem, p. 26.

8. En el rectángulo ABCD; E es el punto medio del lado DC y F es el punto medio del lado AB. Si el área del rectángulo es 500 cm². ¿Cuál es el área de la figura rayada?[72]



9. Sea $PQRS$ un cuadrado con área 40 cm². Si L y M son los puntos medios de PQ y QR respectivamente. ¿El área de la región sombreada es?[73]



3.3. Actividades de fracciones

3.3.1. Actividad 1: representación de fracciones

Objetivo: Representar fracciones matemáticas asociadas al contexto de las áreas empleando diferentes propiedades de las figuras geométricas.

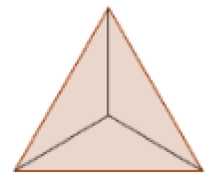
Material: La actividad impresa en papel, reglas y tijeras.

Desarrollo de la actividad:

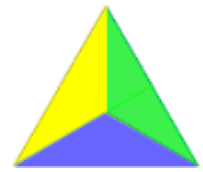
1. Escribe la fracción correspondiente a la región sombreada de color rojo en el triángulo equilátero.

[72] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2009). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 34.
[73] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2002). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 9.

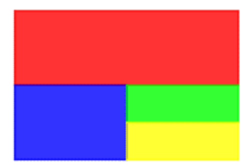
2. Representa la fracción correspondiente a la región de color café en el triángulo equilátero.



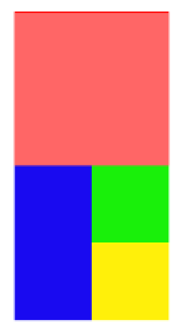
3. El triángulo equilátero mostrado a continuación se ha dividido en tres regiones de igual área. ¿Qué fracción corresponde a la región sombreada de color azul?



4. En un rectángulo se realizaron subdivisiones como se muestran en la figura. Se asocia a cada región un color particular. Determinar las fracciones del rectángulo que corresponden a cada región.



5. Se subdividió el siguiente rectángulo en regiones distinguidas por diferentes colores. ¿Qué fracción de la figura corresponde a cada una de las siguientes regiones?



A. La región coloreada de rojo.

B. La región coloreada de azul.

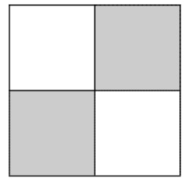
C. La región coloreada de amarillo.

D. La región coloreada de verde.

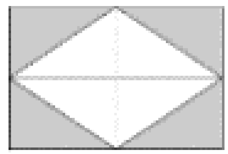
6. Ahora se subdivide un cuadrado en regiones distinguidas por colores.

¿Hay dos regiones diferentes que corresponden a la misma fracción del área total? ¿Cuáles son?

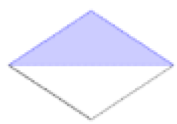
7. ¿Qué relación hay entre la región sombreada y la región blanca en la siguiente figura?



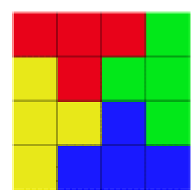
8. Determinar la fracción del rectángulo correspondiente a la región sombreada y a la región blanca.



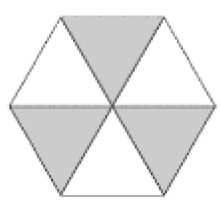
9. Un rombo se ha dividido en dos partes mediante una de sus diagonales. Hallar la fracción de la figura correspondiente a la región sombreada y a la región no sombreada.



10. Se ha divido un cuadrado en cuatro regiones iguales en área. ¿Qué se puede decir con respecto a la parte del cuadrado correspondiente a cada región?

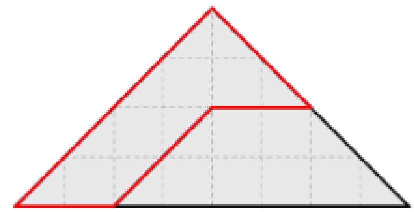


11. El hexágono regular se ha dividido en seis regiones iguales y se han sombreado algunas de ellas. Hallar la fracción de hexágono correspondiente a la región sombreada y a la región no sombreada.



PROBLEMAS RETADORES

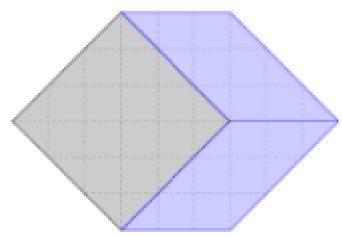
- ✓ Un triángulo rectángulo isósceles se subdivide en dos regiones como se muestra.



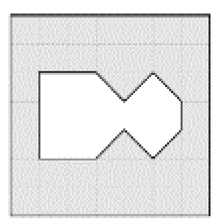
¿Las dos regiones representan la misma fracción del triángulo total?

¿Qué criterio uso para tal comparación?

- ✓ La figura muestra un hexágono subdividido en un cuadrado y en una región compuesta por dos paralelogramos iguales.



- ✓ ¿La región con forma de cuadrado corresponde a la misma fracción del hexágono que la formada por los dos paralelogramos iguales?
- ✓ ¿Qué criterio usó para tal comparación?
- ✓ ¿Qué fracción del área de la figura no está sombreada?[74]



[74] Calendario Matemático 2014. Primer Nivel, Junio. Publicación mensual de Colombia Aprendiendo. Proyecto Matemática Recreativa.

3.3.2. Actividad 2: fracciones equivalentes estudiadas mediante representaciones geométricas

Objetivo: Determinar que dos o más fracciones son equivalentes por medio de representaciones geométricas.

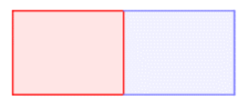
Emplear representaciones geométricas para establecer la equivalencia entre fracciones

Material: La actividad impresa en papel, papel y reglas.

Desarrollo de la actividad:

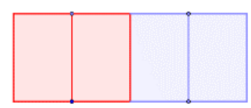
Representaciones geométricas para fracciones equivalentes.

Considere la siguiente representación para la fracción $\frac{1}{2}$

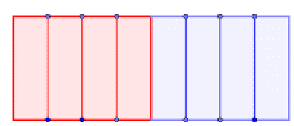


Ahora divida cada una de las subdivisiones anteriores en mitades.

Se observa que la fracción que representa la misma región sombreada es $\frac{2}{4}$



Si ahora se realiza la misma división en cada una de las subdivisiones anteriores, se ve que la fracción que representa la misma región sombreada es $\frac{4}{8}$.



La conclusión es que: Se ha obtenido para la misma región sombreada diferentes representaciones fraccionarias. Lo anterior nos permite escribir:

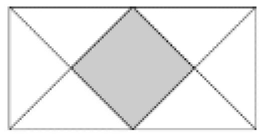
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

1. ¿Qué relación se puede observar entre los numeradores y denominadores de las fracciones?

2. ¿Hay alguna regla de formación?

Consideremos un rectángulo cuyo largo es 2 veces el ancho y en el cual se unen los vértices del rectángulo con el punto medio del lado opuesto.

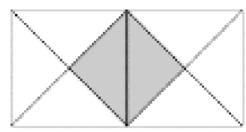
3. Qué figura constituye la región sombreada.



4. La fracción que representa la región sombreada es $\frac{1}{4}$. ¿Por qué?

Después se unen los puntos medios de los lados horizontales, para obtener:

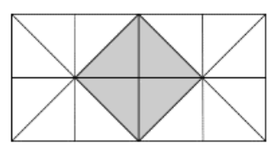
La fracción que representa la región sombreada es ahora: $\frac{2}{8}$



5. ¿En cuántos cuadrados ha quedado divido el rectángulo original?

Luego, se unen los puntos medios de los lados horizontales de los cuadrados y los puntos medios de sus lados verticales, para obtener:

La fracción que representa la región sombreada es ahora: $\frac{4}{16}$



Se ha obtenido para la misma región sombreada diferentes representaciones fraccionarias. Lo anterior nos permite escribir:

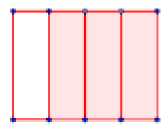
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$

6. ¿Qué relación se puede observar entre los numeradores y denominadores de las fracciones?

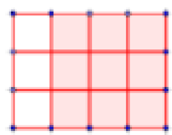
7. ¿Hay alguna regla de formación?

Supongamos que tenemos las siguientes dos fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{12}$.

Geométricamente la fracción $\frac{1}{4}$ se puede representar de la siguiente manera (la región blanca).



Geométricamente la fracción $\frac{3}{12}$ (la región blanca), se usa el mismo rectángulo de referencia.



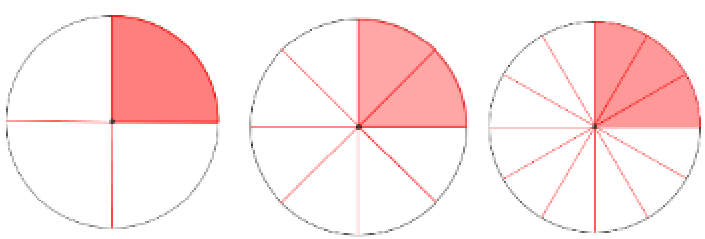
8. ¿Las representaciones geométricas de ambas fracciones cubren la misma región en el mismo rectángulo de referencia? y ¿Se permite escribir : $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$?

9. ¿Qué relación se puede observar entre los numeradores y denominadores de las fracciones?

10. ¿Hay alguna regla de formación?

Ahora se tienen las fracciones $\frac{1}{4}$,$\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$.

Cambiaremos de estilo de representación. Las podemos representar por medio de sectores circulares del siguiente modo:



11. Es posible escribir lo siguiente: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, ¿por qué?

12. ¿Qué relación se puede observar entre los numeradores y denominadores de las fracciones?

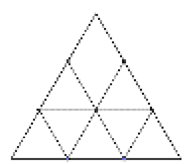
13. ¿Hay alguna regla de formación?

14. Obtener tres o cuatro diferentes representaciones geométricas para cada una de las siguientes fracciones: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, y\ \frac{3}{7}$

A. Explicar cómo hizo en cada caso.

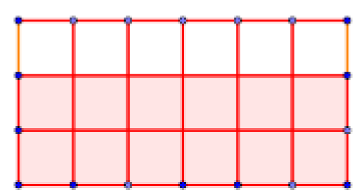
B. ¿Cuántas veces se puede repetir el proceso?

15. Utiliza el siguiente triángulo equilátero, el cual se ha dividido en nueve triángulos también equiláteros, para representar la fracción $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{9}$, y $\frac{3}{9}$.

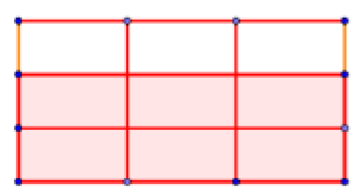


16. Usa el triángulo anterior para representar $\frac{6}{18}$, $\frac{12}{18}$ y $\frac{10}{18}$.

En el siguiente rectángulo la región blanca está compuesta por 6 de los 18 cuadrados pequeños, ella representa las 6/18 partes de la figura.



Ahora se eliminan unas subdivisiones de tal modo que la figura queda subdividida en tan solo en nueve partes iguales, en este caso rectangulares. Se aprecia que la misma región blanca corresponde a 3 de las nueve partes iguales que componen el rectángulo y por lo tanto también puede representarse como 3/9.



Ahora se eliminan otras subdivisiones de modo que la figura quede subdividida en partes iguales, en este caso 3 partes iguales. La región blanca cubre 1 de las 3 partes, de modo que también es posible expresar la relación entre la región blanca y la figura total como 1/3.

Lo anterior muestra que: $\frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Las tres fracciones anteriores expresan la misma relación y se llaman fracciones equivalentes. Hemos ilustrado cómo se puede obtener una a partir de la otra representándolas geométricamente.

17. ¿Cómo se puede obtener una a partir de la otra usando sus propiedades aritméticas?

18. ¿Qué se observa del numerador y denominador cuando ya no es posible simplificar la expresión más?

- ✓ Establecer un criterio geométrico para decir cuándo dos fracciones son EQUIVALENTES.

Obtener diferentes representaciones geométricas para cada una de las siguientes fracciones:

$$\frac{20}{30}, \frac{30}{40}, \frac{15}{50}, \frac{12}{45}, \frac{14}{28}, \frac{3}{7} \ y \ \frac{2}{5}.$$

3.3.3. Actividad 3: Comparación de Fracciones

Objetivo: Comparar dos o más fracciones por medio de su asociación con un segmento.

Emplear representaciones geométricas mediante segmentos para establecer el orden de las fracciones.

Material: La actividad impresa en papel, papel, reglas y compás.

Desarrollo de la actividad.

Orden entre fracciones.

Considere el siguiente segmento unitario

1. Divídalo en dos partes iguales.

A. Asocia las fracciones correspondientes con la longitud del segmento que va desde 0 hasta el punto sobre el segmento unitario que le corresponde.

Considere el segmento unitario anterior

2. Divídalo en 4 partes iguales.

A. Asocia las fracciones correspondientes con la longitud del segmento que va desde 0 hasta el punto sobre el segmento unitario que le corresponde.

3. Ahora dividiremos dicho segmento unitario en 5 partes iguales.

Para tal efecto se usa un compás y una regla.

Traza un segmento cualquiera que parte del 0, al que llamaremos OB.

Ahora con un compás y una abertura cualquiera y haciendo centro en O traza una circunferencia. Esta corta al segmento OB en el punto A.

Haciendo centro de nuevo en el punto A y con abertura igual que la anterior, traza otra circunferencia. Esta corta al segmento OB en el punto C.

Con centro en el punto C y conservando la abertura del compás traza una circunferencia. Esta corta al segmento OB en el punto D.

De nuevo y en el punto D traza una circunferencia, que ha de cortar al segmento OB en el punto E. Se debe conservar la abertura.

Traza otra circunferencia con centro en el punto E. Esta corta al segmento OB en el punto F.

Se han trazado un total de 5 circunferencias.

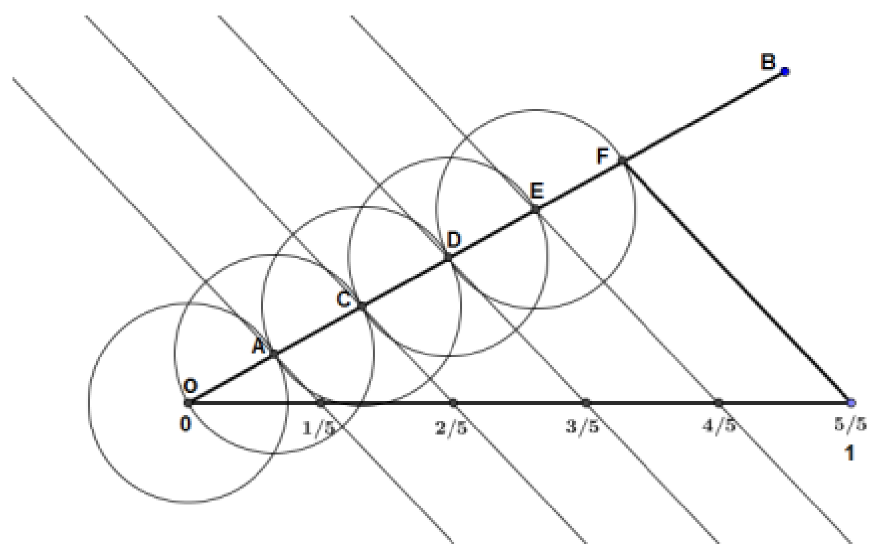
Ahora unir con una regla el punto F y el extremo del segmento unitario.

Traza paralelas por los punto E, D, C y A con respecto al segmento anterior.

Estas paralelas cortan al segmento unitario en 5 partes exactamente iguales.

Al asociar fracciones correspondientes con la longitud del segmento que va desde 0 hasta los puntos de corte, de las paralelas anteriores con el segmento unitario, estas son: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\ y\ \frac{5}{5}$.

La construcción es como se observa:



Actividad: Dividir el siguiente segmento unitario en 7 partes iguales, por medio de una regla y un compás.

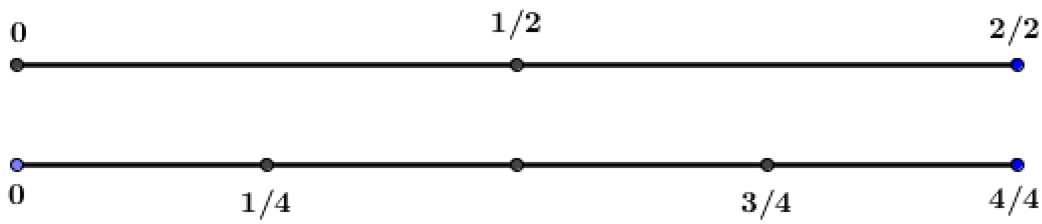
4. Asocia fracciones correspondientes con la longitud del segmento que va desde 0 hasta el punto de corte de las paralelas con el segmento unitario.

Regresa a las divisiones de un segmento unitario en dos, cuatro, cinco y siete partes iguales.

5. Coinciden algunos extremos de los segmentos asociados a determinadas fracciones en las cuatro realizaciones anteriores?

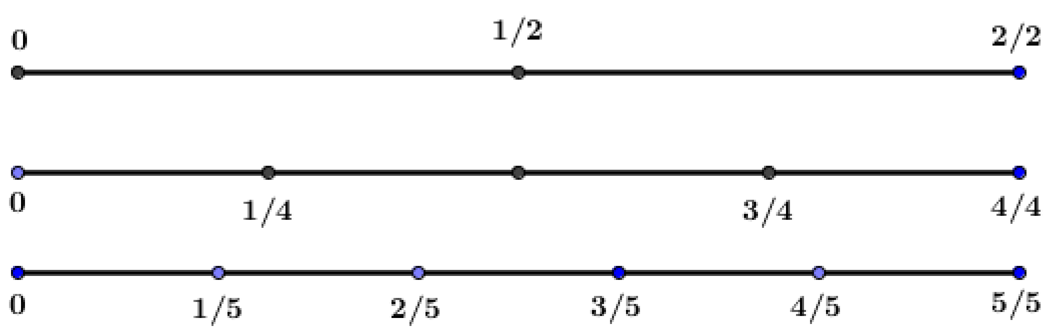
6. Señálalos y establezca que relación se puede dar con respecto a las fracciones.

Ahora observa lo siguiente cuando se dividió el segmento unitario en 2 y cuatro partes:



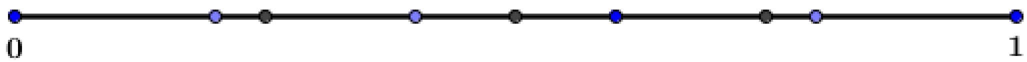
7. Ordene, de menor a mayor, las fracciones que resultan del proceso de subdividir un segmento unitario. Escríbalas en su orden.

También considere las divisiones del segmento unitario en 2, 4 y 5 partes iguales:



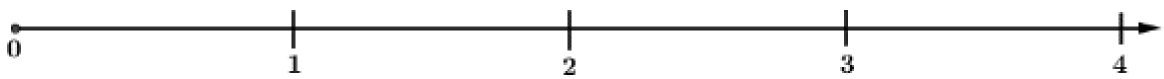
8. Ordene, de menor a mayor, las fracciones que resultan del proceso de subdividir un segmento unitario. Escríbalas en su orden.

En definitiva tenemos sobre un sólo segmento lo siguiente: Completarlo!



9. Termine completamente el segmento anterior con las divisiones del segmento en 7 partes iguales.

Ahora consideremos la siguiente recta numérica:



La flecha indica que esta se podrá extender tanto como queramos, según la necesidad matemática.

10. Divida cada segmento en 2 partes iguales.

A. Asocia las fracciones correspondientes con la longitud del segmento que va desde 0 hasta el punto sobre la recta numérica que le corresponde.

11. Proceda ahora a Dividirlos en 4 partes iguales.

A. Asocia las fracciones correspondientes con la longitud del segmento que va desde 0 hasta el punto sobre la recta numérica que le corresponde.

B. ¿Coinciden algunas longitudes de estos segmentos?

C. Establecer la relación entre sus fracciones asociadas.

D. No todos los segmentos presentan la misma longitud, con base a esto ordene las fracciones asociadas a ellos de "menos a mayor" en dicha recta numérica.

Actividad:

12. Compara las siguientes dos fracciones $\frac{1}{2}\ y\ \frac{1}{3}$.

Para tal efecto usa el siguiente segmento unitario:

A. Considera divisiones apropiadas para poder establecer la comparación y explique su procedimiento.

13. Use el siguiente segmento unitario cada vez que compare cada par de las siguientes fracciones:

$\frac{2}{3}\ y\ \frac{2}{5}, \frac{3}{4}\ y\ \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\ y\ \frac{3}{7}$.

14. Hallar un número que esté ubicado en la mitad de los siguientes dos números $\frac{2}{3}$ y 1.

A. Encontrar un número que esté ubicado en la mitad de los siguientes dos números $\frac{2}{3}$ y el número hallado en el anterior.

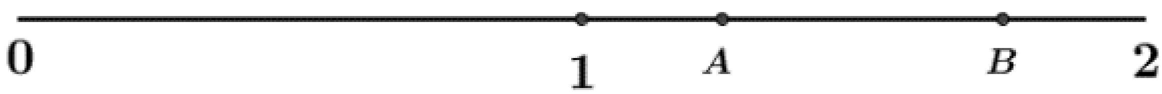
B. ¿Es posible hallar otro número entre $\frac{2}{3}$ y el número hallado anteriormente?

C. ¿Se podrá repetir siempre este proceso?

D. ¿Hasta dónde se podrá realizar?

15. Ubicar un número que esté en la mitad de los siguientes dos números $\frac{4}{3}$ y 2.

16. En el segmento de recta, la longitud del segmento entre 1 y A es igual a la longitud del segmento entre B y 2. Asimismo la longitud del segmento entre 1 y A es la mitad de la longitud del segmento entre A y B.



A. ¿Cuál es la fracción asociada con el segmento desde O hasta el punto A?

B. ¿Cuál es la fracción asociada con el segmento desde O hasta el punto B?

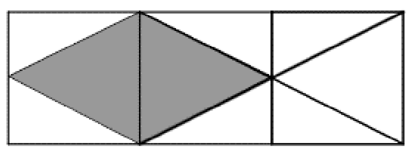
3.3.4. Actividad 4: razones entre áreas

Objetivo: Calcular razones entre áreas por medio de representaciones geométricas según sea el caso.

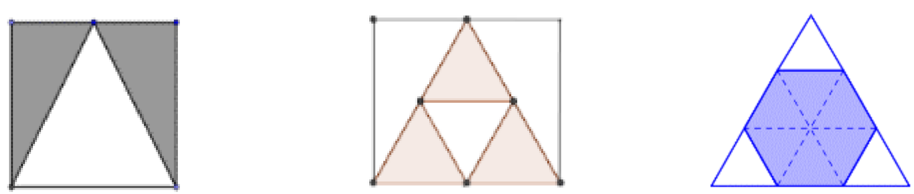
Material: La actividad impresa en papel, papel cuadriculado y reglas.

Desarrollo de la actividad:

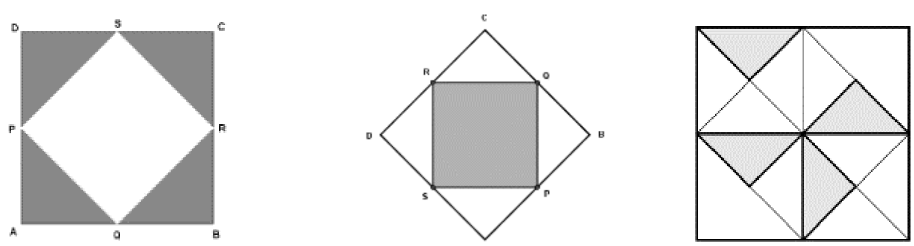
1. Hallar la razón entre el área de la región sombreada y el área de la figura total.

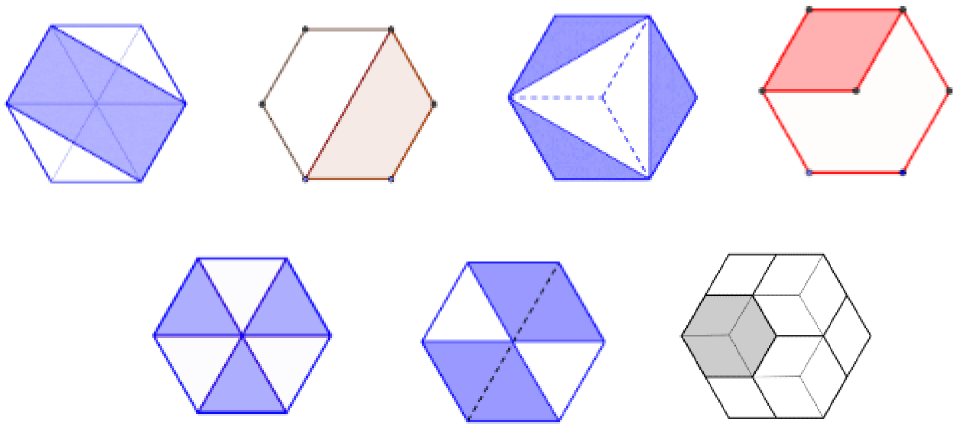


2. Encontrar la razón entre el área de la región sombreada y el área de la figura total.



3. Hallar la razón entre el área de la región sombreada y el área de la figura total.

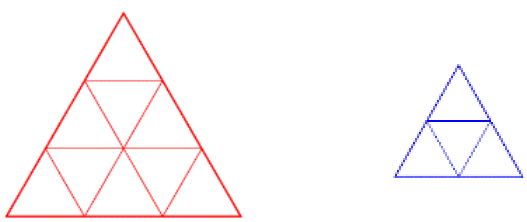




4. En la figura, ¿cuál es la razón entre el área de los cuadrados grises y el área total de la pieza?[75]

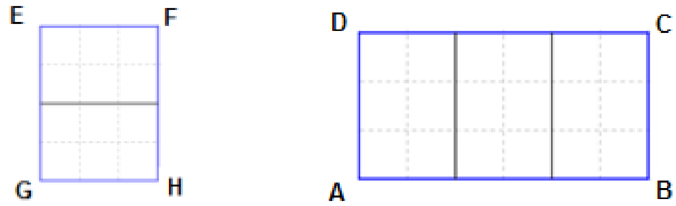
Razones entre áreas: fracciones mayores que uno.

5. Hallar la razón entre el área de la región roja y el área de la región azul.

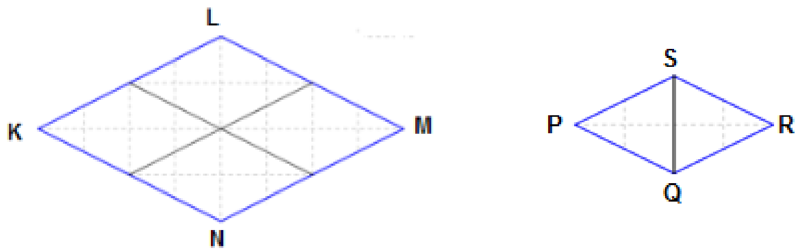


6. Encontrar la razón entre el área del rectángulo ABCD y el área de la figura EFGH.

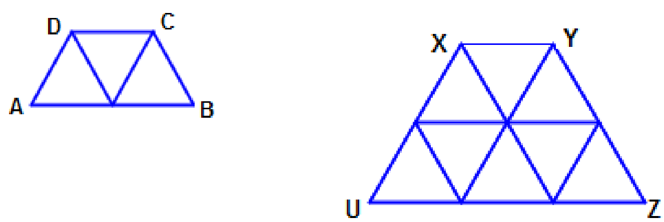
[75] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2009). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 27.



7. Es la razón entre el área del rombo KLMN al rombo PQRS mayor que 1? Justifica tu respuesta.

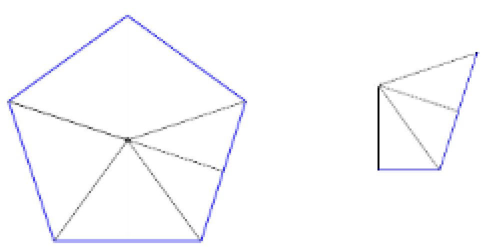


8. Es la razón del área del trapecio XYZU al trapecio ABCD mayor que 1? Justifica tu respuesta.



9. ¿Cuál es la razón entre las áreas de las siguientes dos piezas?

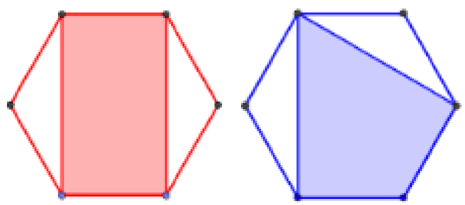
Explica tu respuesta



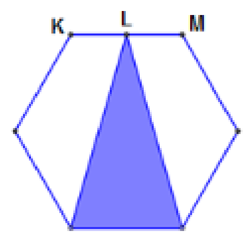
Problemas retadores.

1. Calcular la razón entre el área de la región sombreada y el área total del círculo. Si los diámetros de los dos semicírculos pequeños son $\frac{1}{2}$ del diametro del círculo grande.

2. Observa las siguientes dos figuras. ¿La fracción que representa el área de la parte sombreada en cada una de ellas es la misma o diferente? Explica tu respuesta.



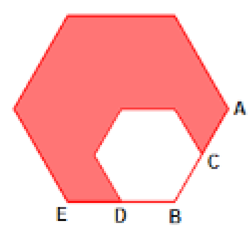
3. La fracción que representa el área de la parte sombreada en el siguiente hexágono regular, siendo L punto medio de KM, es:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{6}$ E) $\frac{4}{5}$

Explica tu respuesta.

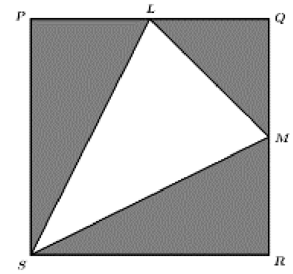
4. La fracción que representa el área de la parte sombreada, al ser C y D puntos medios de los lados BA y EB respectivamente, en el siguiente hexágono regular es:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

Explica tu respuesta.

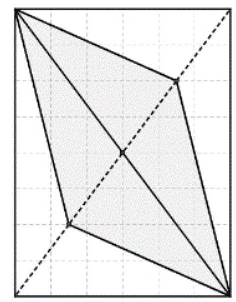
5. Sea $PQRS$ un cuadrado. L y M son los puntos medios de PQ y QR respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado corresponde a la región sombreada?[76]



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

Explica tu respuesta.

6. La diagonal de un rectángulo ha sido dividida en cuatro partes iguales. Determine la razón entre el área sombreada y el área no sombreada.[77]



3.3.5. Actividad 5: representación angular de las fracciones

Objetivo: Emplear la representación angular de las fracciones positivas para estudiar la equivalencia y la desigualdad entre ellas.

Material: La actividad impresa en papel, papel cuadriculado, colores y reglas.

Intento con esta parte del trabajo en investigación aportar elementos para ayudar a los estudiantes a comprender un poco mejor las diferentes propiedades de las fracciones basándome en la geometría de los segmentos de línea recta.

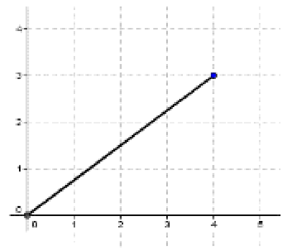
Desarrollo de la actividad:

"Lo que se busca con esta representación es fomentar y fortalecer la visualización matemática". (Arcavi, 2003f). La fracción $\frac{a}{b}$ estará representada por el punto reticular (b, a).

[76] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2002). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 9.
[77] Mathematical Calendar 2013. Fifth Level, August. A monthly publication by Colombia Aprendiendo. Recreational Mathematics Projet.

Representar la fracción $\frac{3}{4}$.

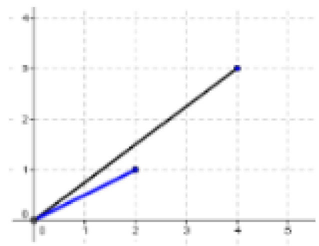
$$\frac{3}{4} \Leftrightarrow (4,3)$$



Comparar $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ por medio de esta representación.

1. Asocia a cada fracción su correspondiente punto.

Al trazar los correspondientes segmentos de recta se tiene:



2. ¿Se observa visualmente que la inclinación asociada al punto $(4,3)$ es mayor que la inclinación asociada al punto $(2,1)$?

Por tanto $\frac{3}{4}$ [ ] $\frac{1}{2}$.

3. En esta visualización, ¿las fracciones puestas en orden creciente de magnitud, son representadas por segmentos en orden también creciente en inclinación?

4. ¿"Visualmente, el segmento más empinado es la fracción más grande?"[78].

5. ¿Las fracciones puestas en orden decreciente de magnitud, son representadas por segmentos en orden también decreciente en inclinación?

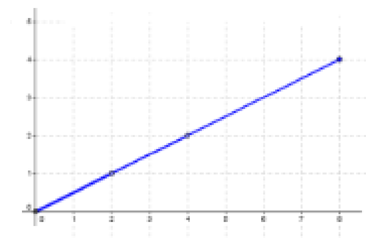
[78] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics **52:** 215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 7.

6. ¿“Visualmente, el segmento menos empinado es la fracción menos grande”?.

- ✓ Establece un criterio para el orden en las fracciones positivas.

Gráficamente verifica la equivalencia entre las siguientes fracciones:

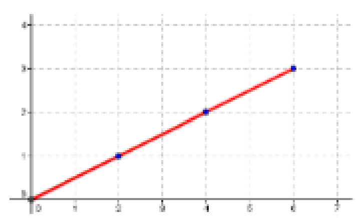
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$



7. ¿El segmento que contiene a los puntos $(2,1), (4\ ,2)\ y\ (8,4)$ que son los asociados a dichas fracciones pasa por el origen?

8. Establece un criterio para la equivalencia entre fracciones positivas.

Gráficamente la “simplificación” y la “amplificación” pueden ser visualizadas. Consideremos las fracciones $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$



9. Qué significa que la fracción $\frac{1}{2}$ es irreducible.

10. ¿Por qué las fracciones $\frac{2}{4}\ y\ \frac{3}{6}$ no son consideradas fracciones irreducibles según este criterio de visualización?

“Se aprovechó la visualización para llevar la geometría a la ayuda de lo que parecen ser propiedades puramente simbólicas y/o algebraicas. Muchas matemáticas pueden ser hechas sobre esta base.”[79]

COMPARACION DE FRACCIONES

Comparar las siguientes fracciones mediante la inclinación de los segmentos de recta asociados a cada punto correspondiente:

$$\frac{1}{2}\ y\ \frac{1}{3},\frac{2}{5}\ y\ \frac{1}{4},\frac{3}{8}\ y\ \frac{2}{5},\frac{3}{4}\ y\ \frac{3}{5},\frac{2}{3}\ y\ \frac{2}{4},\frac{3}{5}\ y\ \frac{2}{3},\frac{2}{3}\ y\ \frac{2}{7},\frac{4}{7}\ y\ \frac{2}{5},\frac{3}{4}\ y\ \frac{1}{2},\frac{3}{7}\ y\ \frac{1}{2}$$

EQUIVALENCIA

Verificar la equivalencia de las siguientes fracciones mediante un segmento de recta que pase por el origen y que contenga los puntos asociados a cada fracción.

$$\frac{1}{2}\ y\ \frac{2}{4},\frac{2}{5}\ y\ \frac{4}{10},\frac{3}{4}\ y\ \frac{6}{8},\frac{2}{8}\ y\ \frac{3}{12},\frac{2}{3}\ y\ \frac{6}{9},\frac{3}{6}\ y\ \frac{2}{4},\frac{4}{14}\ y\ \frac{2}{7},\frac{6}{15}\ y\ \frac{2}{5},\frac{5}{10}\ y\ \frac{1}{2},\frac{3}{7}\ y\ \frac{6}{14}$$

Hallar fracciones equivalentes a las siguientes fracciones: $\frac{1}{2},\frac{9}{12},\frac{2}{7},\frac{10}{15}\ y\ \frac{4}{10}$, por medio de un segmento de recta que pase por el origen y que contenga a varios puntos látice.

3.3.6. Actividad 6: representación angular de las fracciones negativas

Objetivo: Emplear la representación angular de las fracciones negativas para estudiar la equivalencia y la desigualdad entre ellas.

Material: La actividad impresa en papel, papel cuadriculado, colores y reglas.

---

[79] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics **52:** 215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 7.

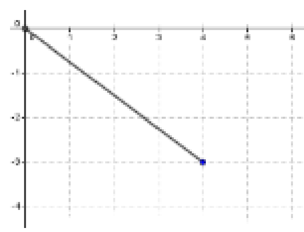
Intento con esta parte del trabajo en investigación aportar elementos para ayudar a los estudiantes a comprender un poco mejor las diferentes propiedades de las fracciones negativas basándome en la geometría de los segmentos de línea recta.

Según Arcavi (2003) *"Lo que se busca con esta representación es fomentar y fortalecer la visualización matemática"*[80].

Desarrollo de la actividad:

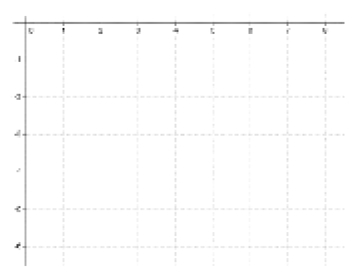
Representar la fracción $-\frac{3}{4}$.

$$-\frac{3}{4} \Leftrightarrow (4,-3)$$



Comparar $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{4}$ por medio de esta representación.

1. Asocia a cada fracción su correspondiente punto.



2. ¿Se observa visualmente que la inclinación asociada al punto $(2,-1)$ es menor que la inclinación asociada al punto $(4,-3)$?

3. "Visualmente, el segmento menos inclinado se asocia con la fracción mayor"

Por tanto $-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{4}$.

[80] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics **52:** 215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 6.

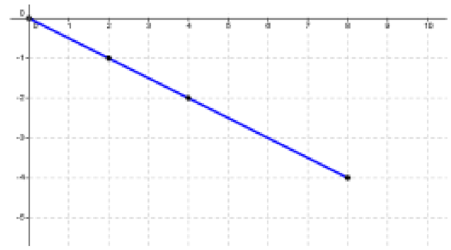
4. *“Visualmente, el segmento más inclinado se asocia con la fracción menor”.*

Por tanto $-\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{2}$.

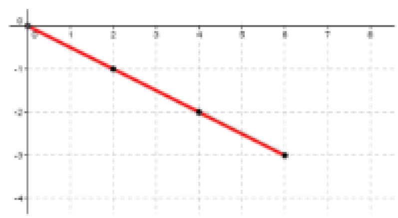
- ✓ Establece un criterio para el orden en las fracciones negativas.

Gráficamente, verifica la equivalencia entre las siguientes fracciones:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{4}{8}$$



5. ¿El segmento que contiene a los puntos $(2,-1),(4\,,-2)\; y\; (8,-4)$ que son los asociados a dichas fracciones pasa por el origen?



6. Establece un criterio para la equivalencia entre fracciones negativas.

También gráficamente la equivalencia entre las siguientes fracciones puede ser visualizada.

Consideremos las fracciones $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6}$

7. Qué significa que la fracción $-\frac{1}{2}$ es irreducible.

8. ¿Por qué las fracciones $-\frac{2}{4}\ y\ -\frac{3}{6}$ no son consideradas fracciones irreducibles según este criterio vía la visualización?

ACTIVIDAD

9. COMPARACION DE FRACCIONES

Comparar las siguientes fracciones mediante la inclinación de los segmentos de recta asociados a cada punto correspondiente:

$$-\frac{1}{2}\ y\ -\frac{1}{3},-\frac{2}{5}\ y\ -\frac{1}{4},-\frac{3}{8}\ y\ -\frac{2}{5},-\frac{3}{4}\ y\ -\frac{3}{5},-\frac{2}{3}\ y\ -\frac{2}{4}$$

10. EQUIVALENCIA

Verificar la equivalencia de las siguientes fracciones mediante un segmento de recta que pase por el origen y que contenga los puntos asociados a cada fracción.

$$-\frac{1}{2}\ y\ -\frac{2}{4},-\frac{2}{5}\ y\ -\frac{4}{10},-\frac{3}{4}\ y-\frac{6}{8},-\frac{2}{8}\ y\ -\frac{3}{12},-\frac{2}{3}\ y\ \frac{6}{9}$$

11. Halla fracciones equivalentes a las siguientes fracciones:

$-\frac{1}{2},-\frac{9}{12},-\frac{2}{7},-\frac{10}{15}\ y\ -\frac{4}{10}$, por medio de un segmento de recta que pase por el origen y que contenga a varios puntos reticulares.

3.4. Actividades sobre números enteros

3.4.1. Los Números Enteros y La Ecuación Diofántica Lineal Tipo I. Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales

Objetivo: Consolidar las operaciones con números enteros.

En este apartado practicáremos el manejo operativo con los números enteros a través de la multiplicación y la suma. Para tal propósito estudiaremos la solución de las Ecuaciones Diofánticas Lineales, es decir, la solución en números enteros de ecuaciones que tienen dos letras (a veces llamadas variables).

Material: hojas de cuadritos, reglas y colores.

Desarrollo de la actividad:

Esta vez analiza la solución de la siguiente ecuación $2x + 3y = 5$

1. Construye una tabla, en donde al asignar valores tanto a x como a y que satisfagan la igualdad.

Es claro que $x = 1$ y $y = 1$ es una solución, pues $2 * 1 + 3 * 1 = 2 + 3 = 5$. Además, $x = -2$ y $y = 3$ también es solución, ya que $2 * (-2) + 3 * 3 = -4 + 9 = 5$.

Ahora si $y = 5$, ¿qué valor debe tener *x?* para que se cumpa la ecuación. También si $x = -8$, ¿qué valor debe tener y*?* para que se cumpa la ecuación.

Halla valores de x y de y para el último registro.

Valores de x	Valores de y
1	1
-2	3
	5
-8	

2. Con los valores generados de la tabla anterior forma parejas ordenadas de la siguiente manera: La primer componente es el valor de x en la tabla y la segunda componente es el valor de y en la tabla.

Escribe las parejas ordenadas asociadas: $(,), (,), (,), (,)\ y\ (,)$

3. Representa gráficamente estas parejas ordenadas en una hoja cuadriculada de cuadritos. Recuerda trazar dos líneas perpendiculares, a una la llamaremos el eje de las x y a la otra la llamaremos el eje de las y.

Ubique los números enteros en los ejes.

4. Ubica los puntos anteriores en el plano:

¿Qué figura geométrica determinan las soluciones de tal ecuación?

Sustenta completamente tu respuesta.

5. Regresa a la tabla de los valores asignados a x y y.

¿Qué nota usted en la columna de los valores asignados para x?

¿Qué nota usted en la columna de los valores asignados para y?

¿Puedes dar una regla para obtener todos los demás valores de x a partir de un valor particular de x?

¿Puedes dar una regla para obtener todos los demás valores de y a partir de un valor particular de y?

Luego, entonces: Si partimos de un (x, y) particular, ¿se podrá determinar los demás valores por medio de las reglas que diste?

Formula una ley para generar las demás soluciones!

Indica por medio de flechas apropiadas: cómo sería un desplazamiento que lleva del punto correspondiente a una solución a los puntos correspondientes de las demás soluciones de la ecuación.

6. Representa gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación en el plano. ¿Qué se puede decir sobre los puntos que corresponden a soluciones?

7. **Actividad**.

Hallar valores para x y y en los números enteros que satisfagan las siguientes ecuaciones.

1. $2x + y = 1$. Construye la tabla.

Valores de x	Valores de y

¿Es x =1 y y = -1 una solución?, verifica.

Además, x = 2 y y = - 3 también es solución.

Si y = 5, ¿qué valor debe tener x?

Si x= 4 ¿qué valor debe tener y?

Encuentra la otra pareja de valores.

Proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

2. $x + y = -1$. Construye la tabla.

Valores de x	Valores de y

¿Es x = 3 y y = -4 una solución?, verifica.

Además, x = 2 y y = - 3 también es solución.

Si y = -2 ¿qué valor debe tener x?

Si x= 0 ¿qué valor debe tener y?

Halla la otra pareja de valores.

Proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

3. $2x + 3y = 3$. Construye la tabla.

Valores de x	Valores de y

¿Es x = 6 y y = - 3 una solución?, verifica.

Además, x = 3 y y = - 1 también es solución.

Si y = 1, ¿qué valor debe tener x?

Si x= -3 ¿qué valor debe tener y?

Obtener la otra pareja de valores.

Proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

4. $2x + 4y = 6$. Construye la tabla y proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

5. $3x + 6y = 15$. Construye la tabla y proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

3.4.2. Los Números Enteros y La Ecuación Diofántica Lineal Tipo II. Solución de Ecuaciones Diofánticas Lineales

Objetivo: Consolidar las operaciones con números enteros.

Material: hojas de cuadritos, reglas y colores.

En este apartado practicáremos el manejo operativo con los números enteros a través de la multiplicación y la suma. Para tal propósito estudiaremos la solución de las Ecuaciones Diofánticas Lineales, es decir, la solución en números enteros de ecuaciones que tienen dos letras (a veces llamadas variables).

Desarrollo de la actividad:

Ahora analiza la siguiente ecuación $2x - 3y = 5$

1. Construye una tabla, en donde al asignar valores tanto a x como a y que satisfagan la igualdad.

Es claro que $x = 1$ y $y = -1$ es una solución, pues $2 * 1 - 3(-1) = 2 + 3 = 5$ Además, $x = 4$ y $y = 1$ también es solución, ya que $2 * 4 - 3 * 1 = 8 - 3 = 5$

Ahora si $y = 3$, ¿qué valor debe tener *x?*

También si $x = 10$ ¿qué valor debe tener y? para que se cumpla la ecuación.

Halla valores de x y de y para el último registro.

Valores de x	Valores de y
1	-1
4	1
	3
10	

2. Con los valores generados de la tabla anterior forma parejas ordenadas de la siguiente manera: La primer componte es el valor de x en la tabla y la segunda componente es el valor de y en la tabla.

Escribe las parejas ordenadas asociadas:

$(,), (,), (,), (,)\ y\ (,)$.

3. Representa gráficamente estas parejas ordenadas en una hoja cuadriculada de cuadritos. Recuerda trazar dos líneas perpendiculares, a una la llamaremos el eje de las x y a la otra la llamaremos el eje de las y.

Ubique los números enteros en los ejes.

4. Ubica los puntos anteriores en el plano:

¿Qué figura geométrica determinan las soluciones de tal ecuación?

Sustenta completamente tu respuesta.

5. Regresa a la tabla de los valores asignados a x y y.

¿Qué nota usted en la columna de los valores asignados para x?

¿Qué nota usted en la columna de los valores asignados para y?

¿Puedes dar una regla para obtener todos los demás valores de x a partir de un valor particular de x?

¿Puedes dar una regla para obtener todos los demás valores de y a partir de un valor particular de y?

Luego, entonces: Si partimos de un (x, y) particular, ¿se podrá determinar los demás valores por medio de las reglas que diste?

¡Formula una ley para generar las demás soluciones!

Indica por medio de flechas apropiadas: cómo sería un desplazamiento que lleva del punto correspondiente a una solución a los puntos correspondientes de las demás soluciones de la ecuación.

6. Representa gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación en el plano. ¿Qué se puede decir sobre los puntos que corresponden a soluciones?

7. Actividad

Hallar valores para x y y en los números enteros de tal modo que satisfagan las siguientes ecuaciones.

1. Sea $2x - y = 3$. Construye la tabla.

Valores de x	Valores de y

¿Es x = 2 y, y = 1 una solución?, verifica.

Además, x = 3 y, y = 3 también es solución.

Si y = 5, ¿qué valor debe tener x?

Si x= 5 ¿qué valor debe tener y?

Encuentra la otra pareja de valores.

Proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

2. Sea $x - y = 1$. Construye la tabla.

Valores de x	Valores de y

¿Es x = -2 y, y = -3 una solución?, verifica.

Además, x =-1 y, y = -2 también es solución.

Si y = -1, ¿qué valor debe tener x?

Si x= 1 ¿qué valor debe tener y?

Halla la otra pareja de valores.

Proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

3. Sea $2x - 3y = -1$. Construye la tabla.

Valores de x	Valores de y

¿Es x = -5 y, y = -3 una solución?, verifica.

Además, x = -2 y, y = -1 también es solución.

Si y = 1, ¿qué valor debe tener x?

Si x= 4 ¿qué valor debe tener y?

Encuentra la otra pareja de valores.

Proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

4. Sea $2x - 4y = 8$. Construye la tabla y proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.
5. Sea $3x - 6y = 9$. Construye la tabla y proceda a los demás pasos que se realizaron anteriormente.

3.4.3. Actividad 3: Problemas retadores y formulación de modelos

Objetivo: Consolidar las operaciones de los números enteros en la solución de problema retadores.

Material: hoja de cuadritos, reglas y colores.

Desarrollo de la actividad:

Problema 1. **Compra de un balón de fútbol**

Un balón de microfútbol tiene un costo de 17000 pesos. La persona que desea comprar el balón solo tiene billetes de 2000 pesos; y la persona encargada de la caja sólo dispone de billetes de 5000 mil para las vueltas.

¿Es posible bajo estas condiciones comprar el tan anhelado balón de microfútbol?

¿De qué maneras se puede realizar esto?

Problema 2. **Compra de frutas**

Con 5200 pesos se compró 20 unidades de frutas, entre guayabas y tomates de árbol. Los precios de cada fruta son los siguientes: una guayaba cuesta 300 pesos y un tomate de árbol tiene un costo de 200 pesos.

¿Cuántas guayabas y cuántos tomates de árbol se compraron?

Problema 3. **¿Cómo será el marco?**

Los lados de un marco para fotos vienen dados por números enteros. ¿Cuál será la longitud de dichos lados de tal modo que el perímetro y la superficie de este marco para fotos sean numéricamente iguales? [81].

Problema 4. **Encuentra el número**

[81] Perelman, Y. Algebra recreativa.

Piensa en dos números enteros. Su producto es 24 y su suma es 11. ¿Cuál es el mayor de los números?[82]

Problema 5. **¿Cuántos números?**

Hallar el número de números enteros positivos con dos dígitos tales que la suma de sus dos dígitos sea 7.[83]

Problema 6. **Encuentra las parejas**

Si (x, y) es una pareja de enteros no negativos tales que $3x + 4y = 96$, ¿cuántas de tales parejas (x, y) hay en total?[84]

Problema 7. **Animales extraños**

En un planeta muy lejano, hay animales muy extraños. Los politris, que tienen tres cabezas y los monodarios que tienen sólo una cabeza. Una manada de 24 animales entre politris y monodarios tiene 36 cabezas. Cuántos monodarios hay en la manada?[85]

3.5. Actividades sobre paradojas

3.5.1. Actividades para comprender las paradojas geométricas: la fracción mediante

Objetivo: Construir por medio de la visualización matemática la fracción mediante entre dos fracciones positivas.

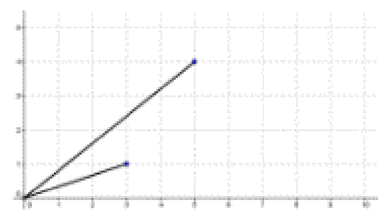
Materiales: Hojas cuadriculadas de cuadritos, lápices de colores y reglas.

Desarrollo de la actividad:

[82] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2002). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 14.
[83] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2005). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 16.
[84] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2002). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá, p. 11.
[85] Ibídem, p. 22.

Ahora visualizaremos una propiedad de las fracciones positivas llamada la "propiedad mediante" por medio de la ayuda de la geometría, se utilizara "*el plano reticular para fines de visualizar tal propiedad"* [86] y evidenciarla de una forma bastante atractiva.

¿Existe una fracción tal que su numerador sea 5 y su denominador 8 entre las fracciones $\frac{1}{3}\ y\ \frac{4}{5}$?



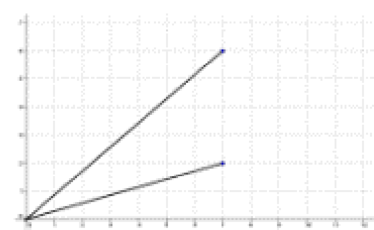
¿Cómo es posible lograr tal fracción?

¿Existen más fracciones entre estas dos?

Buscar al menos una fracción entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{8}$.

También busca al menos una fracción entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{4}{5}$.

¿Cuáles fracciones se encuentran entre $\frac{2}{7}$ y $\frac{6}{7}$?



Hallar "fracciones mediantes" entre los siguientes pares de fracciones.

$\frac{1}{3}\ y\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\ y\ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\ y\ \frac{3}{8}, \frac{3}{5}\ y\ \frac{2}{3}$ y $\frac{2}{3}\ y\ \frac{4}{5}$.

[86] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics **52:** 215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 7.

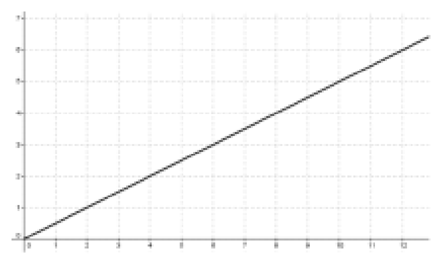
3.5.2. Actividades para comprender las paradojas geométricas: generación de fracciones equivalentes

Objetivo: Generar fracciones equivalentes por medio de segmentos de líneas recta que pasan a través del origen y que contienen puntos asociados a fracciones equivalentes.

Materiales: Hojas papel cuadriculado de cuadritos, lápices de colores y reglas.

Desarrollo de la actividad:

Traza una línea recta que parta del origen y que contenga al punto (2,1).



¿Cuáles otros puntos reticulares están sobre la recta trazada?

¿Qué se nota acerca de las fracciones que corresponden a estos puntos?

¿Alguien puede decir cuál es el último?

¿Cuál es la distancia vertical y cuál la distancia horizontal entre un punto reticular en la recta y el siguiente?

¿Cuál es la distancia vertical y cuál la distancia horizontal entre el origen y el segundo punto reticular?

¿Cuál es la distancia vertical y cuál la distancia horizontal entre el origen y el tercer punto reticular?

¿Cuál es la distancia vertical y cuál la distancia horizontal entre el segundo punto reticular sobre la recta y el cuarto más alejado del origen?

¿Existe un punto reticular cuyas distancias horizontal y vertical desde el punto (2,1) sean 10 y 5?

¿Existe un punto reticular cuyas distancias horizontal y vertical desde el punto (2,1) sean 3 y 4?

Actividad: Traza una línea recta que parta del origen y que contenga al punto asociado con cada fracción.

$\frac{5}{10}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{3}\ y\ \frac{4}{12}.$

Discutir, ¿cuál es el punto reticular más próximo al origen sobre la recta?

¿Cómo se relacionan su numerador y denominador?

¿Cuál es la distancia vertical y cuál la distancia horizontal entre un punto reticular en la recta y el siguiente?

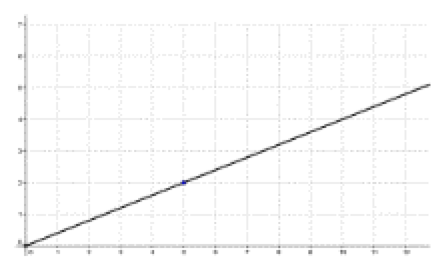
Hallar la razón que se pide (distancia vertical a distancia horizontal)

¿Hay algún punto reticular sobre la recta que es el más alejado del origen?

Ubicación de puntos en una línea recta que pasa por el origen.

¿Están los puntos (5,2) y (8,3) sobre una misma línea recta que pasa por el origen?

Se traza una recta que parte del origen y que contenga al punto $(5\ ,2)$.



¿Cuáles otros puntos reticulares están sobre la recta trazada?

¿Cuál es la distancia vertical y cuál la distancia horizontal entre un punto reticular en la recta y el siguiente?

¿Existe un punto reticular cuyas distancias horizontal y vertical desde el punto (0,0) sean 8 y 3?

¿El punto (8,3) pertenece a la recta trazada anteriormente?

¿Están los puntos (0,0), (5,2) y (8,3) contenidos en una misma línea recta?

3.5.3. Actividades para comprender las paradojas geométricas: un triángulo mágico

Objetivo: Explicar las inconsistencias que aparecen en las siguientes paradojas geométricas que evidencian la no conservación del principio del área.

Materiales: Papel cuadriculado de cuadritos, lápices de colores y reglas.

Desarrollo de la actividad: Un triángulo mágico.

Se construye un triángulo como el que aparece a continuación y asociado a determinados puntos reticulares y adjunto a él se muestra un triángulo con una reorganización diferente pero con las mismas piezas.

1. ¿Cuáles son los puntos reticulares que definen los vértices de estos triángulos?

2. ¿Cuáles son los puntos reticulares del punto A, en primer triángulo?

3. ¿Existe un punto reticular sobre la prolongación del segmento OA en el primer triángulo con coordenadas (8,6)?

4. ¿Existe un punto reticular sobre la prolongación del segmento OA en el primer triángulo con coordenadas (12,9)?

5. ¿Pertenece el punto reticular (9,7) a la prolongación del segmento OA en el primer triángulo?

6. ¿El segmento con extremos reticulares (4,3) y (9,7) pertenece a la prolongación del segmento OA en el primer triángulo?

7. ¿Puede concluirse que OAB es un segmento en el primer triángulo?

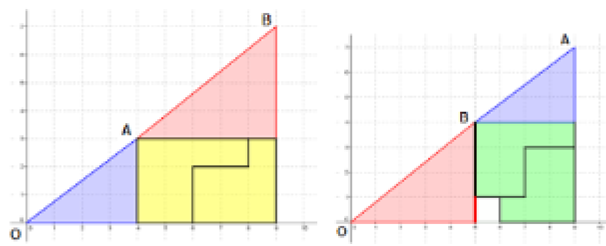
8. ¿En la primera figura los segmentos OA y AB están definidos por dos razones diferentes?

9. ¿Cuáles son las razones que definen a estos segmentos?

10. ¿Son las razones calculadas anteriormente equivalentes?

Problema retador.

¿Por qué no se cumple "el principio de la conservación del área" en esta situación cuando se practican en estos triángulos las siguientes subdivisiones?



3.5.4. Actividades para comprender las paradojas geométricas: un cuadrado extraño

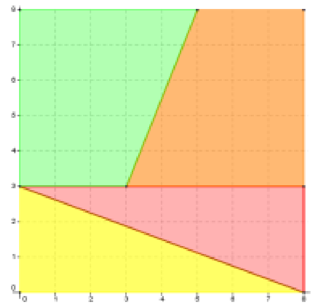
Objetivo: Explicar las inconsistencias que aparecen en las siguientes paradojas geométricas que evidencian la no conservación del principio del área.

Materiales: Papel cuadriculado de cuadritos, lápices de colores y reglas.

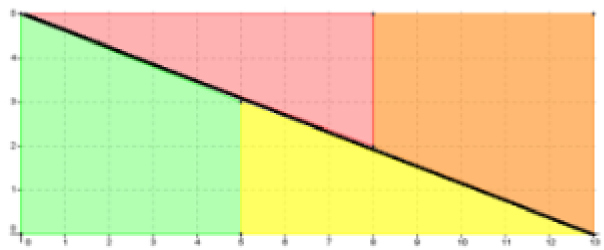
Desarrollo de la actividad:

Problema retador: un cuadrado extraño.

Se construye un cuadrado como el que aparece a continuación y asociado a determinados puntos reticulares.



Este cuadrado se transforma en el siguiente rectángulo:



1. ¿Por qué hay una ganancia de una unidad de área con sólo intercambiar las piezas que conforman el cuadrado?

Explica con tus propias palabras por qué no se cumple “el principio de la conservación del área” en esta situación.

Conclusiones del capítulo 3

La aplicación de las actividades de la presente tesis permite sostener que el diseño de las mismas logre motivar y generar comprensión de conceptos matemáticos, que están estructuradas de una manera tal que no susciten dificultad y no generen inconvenientes al ser abordadas por los estudiantes.

Su diseño debe lograr el que los estudiantes no abandonen el deseo por resolver los problemas allí planteados, lo que significó todo un desafío para el autor de la tesis. Sin embargo esto representa un avance significativo para la cualificación docente.

Se espera que los estudiantes deban reflejar un avance en el aprendizaje de las matemáticas, aumentar el agrado por la asignatura y su deseo por aprenderla. Se brindará el espacio de aula de tal manera que la experiencia con relación al desarrollo de las actividades fortalezcan la participación, la autonomía y la confianza en sus conocimientos y mejoren su actitud hacia la matemática.

CAPITULO 4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA

En este capítulo se realiza un análisis del desarrollo de las actividades realizadas por los estudiantes, donde se valora en cada una de ellas su implementación, motivación por el aprendizaje, logros y dificultades.

4.1. Valoración de los resultados obtenidos de la investigación

4.1.1. Desarrollo de la actividad 1: Representación de fracciones

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Se le entregó la guía de la actividad y comenzó su desarrollo al interior de cada grupo. Los estudiantes mostraron interés y agrado al trabajar en la actividad propuesta, además de esto manifestaban que era la primera vez que recibían así una clase de matemática. No se evidenció dificultad en la comprensión de las primeras preguntas de la actividad y cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada una de ella, pero en general, en cada curso se observó diferentes soluciones para una misma situación. En este proceso los estudiantes demuestran su creatividad a través de la resolución exitosa de los problemas que conforman la actividad.

La socialización se presenta en el sentido de que los grupos de estudiantes comparaban sus soluciones y constataban las respuestas sugeridas por cada uno de ellos. Muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figura 1.

Figura 1. Solución dada por un grupo de estudiantes.

Problemas retadores. En esta parte los estudiantes lograron demostrar sus habilidades para enfrentar cada de los problemas que se plantearon. Emplearon diferentes tipos de subdivisiones en las regiones correspondientes, para dar cuenta del objetivo de la actividad. También se evidenciaron soluciones distintas a los problemas, esto se muestra en el anexo fotográfico de la actividad 1 de las fracciones que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis. Una descripción detallada de la actividad se refleja en el anexo 1 Representación de fracciones, que está en el CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad. Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos del CD que se anexa a la tesis.

Motivación por el aprendizaje: los estudiantes mostraron gran expectativa en el desarrollo de la actividad, pues fue retador para ellos subdividir las figuras en regiones de igual forma. Se observó discusiones entre ellos, donde plantearon que la figura debía quedar igualmente dividida.

El entorno del aula de clase, mediada por una educación tradicional se irá transformando, con el propósito de que por medio de estas actividades se generen ambientes de trabajo al interior de las aulas mucho más dinámicos. La consolidación de la participación de los estudiantes al interior de los grupos conformados surge de un modo natural.

El papel del docente se centra en un observador de las acciones de los estudiantes e interviene de vez en cuando para poder guiar el trabajo original de los estudiantes, pues el eje central del desarrollo de la actividad es el estudiante mismo.

Logros: el desarrollo mismo de la actividad permitió que se originara la cooperación y la discusión entre ellos, que las ideas que aportaban permitían enfrentar y solucionar cada situación planteada. La socialización es el eje motriz de la actividad misma, en los diferentes grupos se comunicaban las formas en que se podían resolver los problemas.

Se logró desarrollar la creatividad al encontrar para una misma situación diferentes soluciones y explicaciones. La visualización estuvo presente allí, pues en algunos grupos con sólo observar detenidamente las figuras podían asociar la fracción correspondiente a la región sombreada según era el caso, y cuando se les pedía la explicación, el procedimiento era inmediato. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 1 de fracciones, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se lograron varios aspectos académicos, se constatan las siguientes insuficiencias:

Varios grupos de estudiantes no lograron subdividir las figuras de manera adecuada para poder hallar la fracción correspondiente a cada región. Enfrentarse solos al desarrollo de una actividad matemática, sin la guía de una clase tradicional, les produjo un reto.

En los problemas retadores, a pesar de no ser resueltos en su totalidad, ellos mostraron ánimo y destreza al poder subdividir una figura en regiones de igual área.

4.1.2. Desarrollo de la actividad 2: Fracciones Equivalentes

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Recibieron la actividad y comenzó el trabajo en grupos, donde los estudiantes se esforzaron por trabajar la actividad propuesta. Hubo dificultad en la comprensión de algunas preguntas de la actividad, esto se origina porque no hay una buena comprensión lectora. Cada grupo de estudiantes planteó sus propias soluciones de manera independientemente a cada pregunta, en general esto se observó en cada curso, y se confrontaron las diferentes soluciones para una misma situación planteada en la socialización de la actividad.

Los estudiantes, por medio de la socialización, comparaban sus soluciones con las de los demás grupos y constataban las respuestas sugeridas por cada uno de ellos. Muestra del trabajo realizado se visualiza en las Figuras 1 y 2, y en el anexo fotográfico de la actividad 2 de las fracciones de CD.

Figura 1. Solución por un estudiante.

Figura 2. Solución por un estudiante.

En esta actividad los estudiantes lograron exponer sus habilidades para enfrentar cada uno de los problemas que se plantearon. Usaron diferentes tipos de subdivisiones en las regiones correspondientes a cada situación y una vez más, se evidencian soluciones distintas a dichos problemas. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 2 Fracciones Equivalentes, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos del CD que se anexa a la tesis. A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: Los estudiantes expresaron gran expectativa en el desarrollo de la actividad, pues fue retador para ellos evidenciar la equivalencia de las fracciones mediante la ayuda de las representaciones geométricas. Se observó discusiones entre ellos que alucian a que las figuras debían quedar igualmente divididas.

El entorno del aula de clase, mediada por una educación tradicional se irá transformando, con el propósito de que las actividades que se desarrollan deben generar ambientes de trabajo de aula más dinámicos y se consolide la participación de los estudiantes al interior de los grupos conformados.

El papel del docente se concentra en un observador de las acciones de los estudiantes e interviene para ofrecer niveles de ayuda a los estudiantes, que presentan dificultades. El eje central en el desarrollo de la actividad es el estudiante mismo.

Logros: el desarrollo mismo de la actividad permitió la cooperación y discusión entre ellos, además del aporte de ideas para enfrenar y solucionar cada situación planteada. La socialización es eje motriz de la actividad misma, pues en los diferentes grupos los miembros participaban de diversas maneras en la solución de los problemas.

Se logró, aún más, desarrollar creatividad en los estudiantes debido a que se puede encontrar para una misma situación diferentes soluciones y explicaciones. La visualización se evidencia allí, en algunos grupos con sólo observar detenidamente las figuras asociaban la fracción correspondiente a la situación planteada, según era el caso. Cuando se pedía la explicación, el procedimiento de los estudiantes era inmediato. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 2 de fracciones, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se logró un avance en lo referente a las fracciones equivalentes, de lo que ya se sabe no es tan fácil su comprensión, hubo insuficiencias en el siguiente sentido:

Varios grupos de estudiantes no lograron comprender la equivalencia entre fracciones, cuya correspondencia se evidencia a través de las diferentes subdivisiones causadas en una misma región determinada.

Enfrentarse solos al desarrollo de esta actividad matemática, sin la guía de una clase tradicional, les produjo angustia, pero a la vez para muchos fue un reto académico.

A pesar de no ser resuelta en su totalidad la actividad, en los diferentes problemas los estudiantes mostraron ánimo y destreza, que se ha ido adquiriendo como esfuerzo por parte de ellos.

4.1.3. Desarrollo de la actividad 3: Comparación de Fracciones

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Se le entrega la guía de trabajo y la actividad se comienza a desarrollar al interior de cada grupo. Las primeras preguntas no causaron mayor dificultad alguna, pues para los estudiantes no les resulta difícil dividir un segmento en dos o en cuatro partes iguales. La mayor dificultad radicó en el momento de dividir un segmento en tres partes iguales, así como también en el caso de cinco partes iguales. En esta parte de la actividad el maestro interviene, muestra el proceso de cómo se divide un segmento en partes iguales.

El docente expone ante todo el grupo como se puede dividir un segmento en dos y en cuatro partes iguales, usando la regla y el compás. También se aclara la parte de la guía que consiste en dividir un segmento en 5 partes iguales y la asociación de las fracciones con la longitud de los segmentos correspondientes. Es de mencionar que el manejo del compás género mucho contratiempo para el normal desarrollo de la actividad, sin embargo los estudiantes mostraron gran desempeño al tratar de abarcar esta parte de la actividad.

Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones de manera independiente a cada pregunta. Se comprobó diferentes soluciones para una misma situación planteada y en la socialización los grupos de estudiantes comparaban sus soluciones con las de los demás grupos y constataban las respuestas sugeridas por los otros. Muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figura 3 y en el anexo fotográfico de las fracciones 3 del CD que se anexa a la tesis.

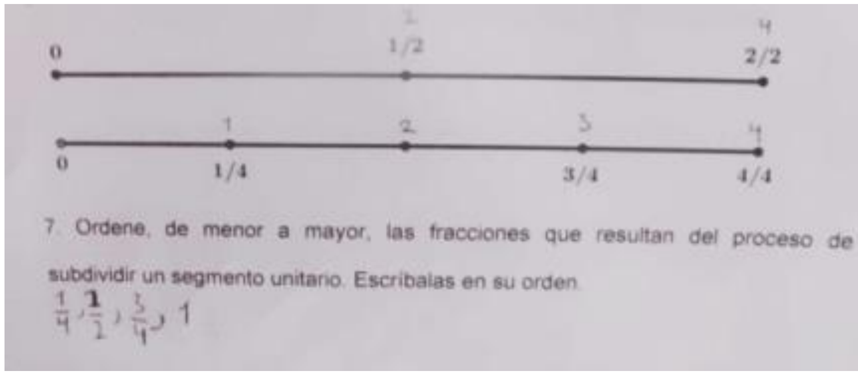


Figura 3. Solución por un grupo de estudiantes.

En el desarrollo de la actividad los estudiantes lograron exponer sus habilidades para enfrentar cada uno de los problemas que se plantearon. Usaron diferentes tipos de subdivisiones en los segmentos correspondientes y se evidenció soluciones distintas para cada situación. Se puede observar las construcciones de las fracciones sobre la recta numérica y el orden establecido por ellos mismos. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 3 Comparación de Fracciones, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos del CD que se anexa a la tesis. A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: los estudiantes expresaron gran expectativa en el desarrollo de la actividad, ahora se inicia una nueva forma de enfrentar las fracciones, compararlas. Se asocia a un segmento sobre una línea recta, una fracción. Es la primera vez que van a dividir un segmento en 3 y en 5 partes iguales. Al inicio de la actividad hay la dificultad de dividir un segmento en ese número de partes y para tal efecto, se usan una regla y un compás, y se explica el método que se usará en la actividad. Se observó discusiones entre ellos referidas al manejo adecuado del compás, que para muchos de ellos era la primera vez que lo utilizaban.

El entorno de un aula de clase, mediada por una educación tradicional, se está transformando con el propósito de generar ambientes de trabajo de aula más dinámicos y con el fortalecimiento de la participación de los estudiantes al interior de cada grupo conformado.

Logros: el desarrollo mismo de la actividad permite que se genere la colaboración y la discusión entre ellos, además que aporten ideas para enfrentar y solucionar cada problema de la actividad. La socialización como eje motriz de la actividad misma, permitió que entre los diferentes grupos se comunicaran las formas en que se podían solucionar los problemas.

Hay desarrollo de la creatividad en los estudiantes en el sentido de encontrar para una misma situación diferentes soluciones y explicaciones. La equivalencia entre fracciones se pudo fácilmente establecer en algunos grupos de estudiantes y la visualización es evidente, en algunos grupos con sólo observar detenidamente los segmentos podían asociar la fracción correspondiente a la situación planteada, según era el caso. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 3 de fracciones, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se logró un avance en lo referente a las fracciones equivalentes, que como ya se sabe no es tan fácil su comprensión, se constataron las siguientes insuficiencias:

El manejo del compás fue la principal dificultad en el desarrollo de esta actividad, ello implicó que se utilizara el mayor tiempo en la manipulación de este. Varios grupos de estudiantes no lograban comprender la equivalencia entre las fracciones, correspondientes a un determinado segmento.

Enfrentarse solos al desarrollo de esta actividad matemática, sin la guía de una clase tradicional, les produjo angustia y a la vez un reto académico. A pesar de no ser resueltos en su totalidad, todos los problemas de la actividad, los estudiantes mostraron ánimo y destreza que se ha ido adquiriendo como esfuerzo por parte de ellos durante este proceso.

4.1.4. Desarrollo de la actividad 4: Razones entre Áreas

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. En el desarrollo de ésta los estudiantes demostraron habilidad al subdividir una figura geométrica y exponen razones equivalentes para una razón inicial. Hubo comprensión en la mayoría de las preguntas de la actividad. Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones de manera independiente a cada pregunta, el trabajo en general de cada curso se constató por diferentes soluciones para una misma situación planteada, evidenciándose el desarrollo de su creatividad.

Los grupos de estudiantes comparaban sus soluciones y confrontaban las respuestas sugeridas por los demás grupos. Muestra del trabajo realizado se visualiza en las Figuras 4 y 5, además del anexo fotográfico de la fracciones 4 que se encuentra en el CD en la carpeta Fotos de actividades.

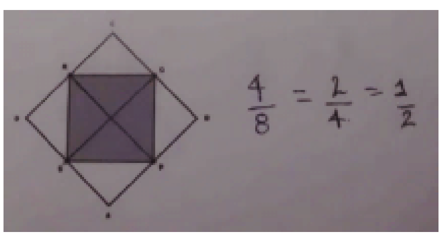


Fig. 4. Solución por un estudiante.

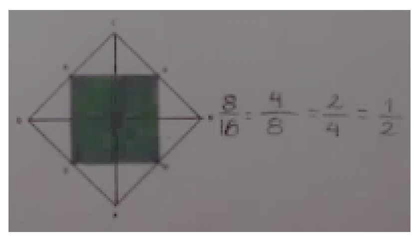


Fig. 5. Solución por un estudiante.

Problemas retadores. Los estudiantes demostraron y afianzaron sus habilidades para desarrollar cada uno de los problemas. Usaron diferentes tipos de subdivisiones en las regiones correspondientes, además exponen soluciones diferentes a los problemas. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 4 Razones entre Áreas, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se realiza un análisis de la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes sigue siendo una gran expectativa el desarrollo de las actividades, ahora aparecen nuevos problemas geométricos que ponen a prueba su habilidad matemática y evidencian la comprensión matemática adquirida en este tiempo de avance de las actividades. El entorno de una clase transformada en ambientes de trabajo dinámicos y la consolidación de la participación de los estudiantes al interior de los grupos se perfilan aún más. El papel del docente y sus acciones en el aula son mediados por intervenciones que están dirigidas a guiar el trabajo de los estudiantes.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que las ideas surgieran, para aportar y emprender la solución de cada problema de la actividad. La socialización fue fundamental, pues se compartían las formas en que se resuelven los problemas de la actividad.

Se logra un desarrollo más profundo de la capacidad de subdividir una figura geométrica en regiones iguales, de tal modo que se pueda hallar la razón entre áreas de una manera más rápida. Se esforzaban por expresar las soluciones a los problemas planteados. Es de destacar el avance, pues llegan a plantear que si dos figuras son idénticas, ellas tienen la misma medida de área.

La actividad es un reto y que ellos solos en principio deben resolverla, con la excepción de cuestiones que deben ser aclaradas por parte del docente. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 4 de fracciones, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se lograron varios avances en el aprendizaje de las matemáticas, existieron algunas insuficiencias:

Los estudiantes presentaron inconvenientes al momento de encontrar las razones equivalentes. Se requiere en la socialización entre el docente y los estudiantes, después de aplicada la actividad, enfatizar en la equivalencia de fracciones.

La filmación de pequeños videos, para evidenciar las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, genera un estado emocional en los estudiantes diferente a su comportamiento diario.

4.1.5. Desarrollo de la actividad 5: Representación Angular de Fracciones Positivas

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. El objetivo que se pretende con el desarrollo de la actividad, consiste en emplear la representación angular de las fracciones positivas para estudiar la equivalencia y la desigualdad entre ellas. Se aportan elementos para ayudar a los estudiantes a comprender un poco mejor las diferentes propiedades de las fracciones mediante la geometría de los segmentos de línea recta. Además es parte del trabajo, utilizar la visualización para afianzar en la construcción de los conceptos matemáticos.

Para los estudiantes esta representación angular es la primera vez que la usan en su vida escolar. En principio se presentaron errores que tienen que ver con las formas de las expresiones que se usan en esta notación para las fracciones, pero a pesar de ello claramente se observa la asociación entre un punto reticular y la fracción que le corresponde. Se evidencia el trabajo de los estudiantes con relación a la equivalencia entre fracciones positivas. Muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figura 6 y en el anexo fotográfico de las fracciones 5. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 5 Representación Angular de Fracciones Positivas, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

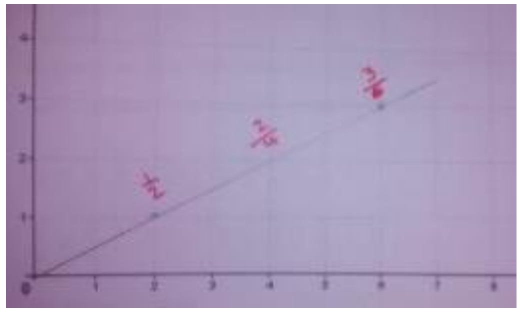


Figura 6. Solución por un grupo de estudiantes.

Otras pruebas que muestran la participación de los estudiantes en el desarrollo de la actividad, se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se realiza un breve análisis de la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante la actividad.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes sigue siendo una gran expectativa el desarrollo de las actividades, pero ahora aparece un estilo diferente para la forma de representación de las fracciones positivas. Por tanto será una oportunidad para aprender algo nuevo con relación a las fracciones. En juego están también nuevas oportunidades para que los estudiantes avancen en su comprensión de temáticas sobre la equivalencia y las desigualdades entre las fracciones. Se consolida aún más la participación de los estudiantes en cada grupo conformado. El papel del docente, al desarrollarse esta actividad, se centró en manifestar que esta nueva representación para las fracciones fortalecían las argumentaciones para explicar satisfactoriamente las paradojas geométricas que están planteadas para la finalización de la presente tesis.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que la participación y la colaboración entre los estudiantes se fortalezcan cada vez más. Las ideas que aportaban permitan enfrentar cada situación, además la socialización es eje impulsor.

Se ha logrado un desarrollo en las formas de sustentación de los grupos de trabajo, pues expresan las soluciones a los problemas planteados de la mejor manera y han progresado con relación a la equivalencia entre fracciones, que con esta representación se hace aún más evidente. La actividad fue para los estudiantes un reto, pues por sí solos deben resolverla, con la excepción de cuestiones que fueron aclaradas por parte del docente en el desarrollo de la misma. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 5 de fracciones, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se lograron avances con relación al aprendizaje de las matemáticas, aún persisten insuficiencias, las cuales pueden resumirse:

Evidenciar las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, a través de la filmación de pequeños videos, genera un estado emocional en los estudiantes diferente a su comportamiento diario.

En varios grupos establecían que la longitud del segmento asociado a cada fracción es la que determinaba su magnitud, contrario a lo que se pretende con esta representación. Es la inclinación asociada al punto reticular la que permite establecer el orden en las fracciones positivas.

Limitaciones en lo problemas matemáticos al establecer “la escritura correcta” para expresar que una fracción es mayor que otra.

4.1.6. Desarrollo de la actividad 6: Representación Angular de Fracciones Negativas

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. El objetivo que se pretende con el desarrollo de la actividad es utilizar la representación angular de las fracciones negativas para estudiar la equivalencia y la desigualdad entre ellas. Se aportan otros elementos de mayor significatividad para ayudar a los estudiantes a comprender un poco mejor las diferentes propiedades de las fracciones mediante la geometría de los segmentos de línea recta. Además, a través de la visualización se pretende afianzar en la construcción de los conceptos matemáticos.

Para los estudiantes esta representación angular es conocida y desarrollan ciertas habilidades. En la resolución se presentaron errores que tienen que ver con las formas de las expresiones que se usan en esta notación para las fracciones, se observa la asociación entre un punto reticular y la fracción.

Se evidencia el trabajo de los estudiantes con relación a la equivalencia entre fracciones negativas. Muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figura 7 y en el anexo fotográfico de las fracciones 6, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 6 Representación Angular de Fracciones negativas, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

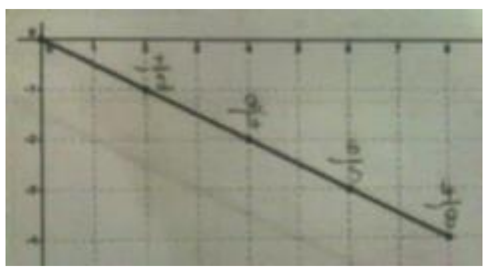


Figura 7. Solución por un grupo de estudiantes.

Para una mejor comprensión de los resultados, se realiza un breve análisis de la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad. Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes sigue siendo una gran expectativa el desarrollo de las actividades, pero ahora aparece un estilo diferente para la forma de representación de las fracciones negativas, lo cual es una oportunidad para aprender. En juego están también nuevas oportunidades para que los estudiantes avancen en su comprensión de temáticas sobre la equivalencia y las desigualdades entre fracciones negativas a un nivel de mayor profundidad. Se consolida aún más la motivación por aprender los contenidos.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que la participación y la colaboración entre los estudiantes se fortalezcan aún cada vez más durante la actividad. Las ideas que aportaban durante el trabajo en grupo permitan resolver exitosamente los problemas de la actividad.

El momento de la sustentación es superior al de otras actividades, los estudiantes expresan las soluciones a los problemas planteados de forma clara y precisa y han progresado con relación a la equivalencia entre fracciones, que con esta representación se hace aún más evidente.

Los problemas propuestos constituyen un reto para los estudiantes, pues por sí solos o en grupo logran resolverlos. La confianza en los diferentes tipos de soluciones expuestas se genera en los grupos con el mismo desarrollo de la actividad y la participación activa de los estudiantes. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 6 de fracciones, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar del interés de los estudiantes y el logro de avances, se constatan las siguientes insuficiencias:

Evidenciar las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, a través de la filmación de pequeños videos, genera un estado emocional en los estudiantes diferente a su comportamiento diario.

En varios grupos establecían que la longitud del segmento asociado a cada fracción es la que determinaba su magnitud, contrario a lo que se pretende con esta representación.

Existe limitaciones en la resolución de problemas matemáticos al establecer “la escritura correcta” para expresar que una fracción es menor que otra.

4.1.7. Desarrollo de la actividad 1: Comparación de Figuras Geométricas

En esta actividad participaron 73 estudiantes, distribuidos en grupos de a tres. El docente le entrega la guía de la actividad y se comienza su desarrollo al interior de cada grupo. Los estudiantes mostraron interés y agrado al trabajar en la actividad propuesta. Se mostró comprensión de las preguntas de la actividad. Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta, el trabajo en general de cada curso se confirmó de varias soluciones, para una misma situación planteada, donde se evidencia el desarrollo de la creatividad.

Mediante la socialización, los grupos de estudiantes comparaban sus soluciones y constataban las respuestas sugeridas por cada uno de ellos. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figura 8 y en el anexo fotográfico de geometría 1, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

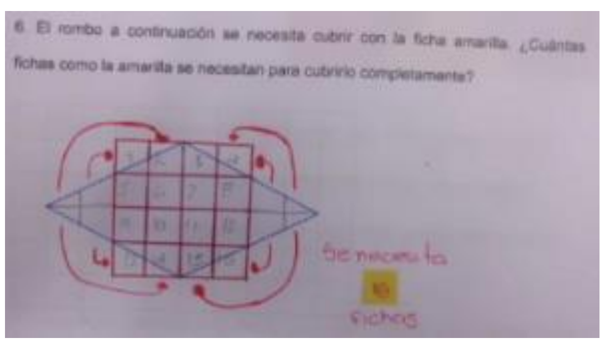


Figura 8. Solución por un grupo de estudiantes.

Problemas. En esta parte de la actividad los estudiantes lograron demostrar sus habilidades para enfrentar cada uno de los problemas que se plantearon. Usaron diferentes tipos de explicaciones para subdividir las regiones correspondientes. Se evidencian soluciones distintas a dichos problemas. Esto se muestra en el anexo fotográfico de geometría 1. Pero lo que llama la atención aquí es que hay grupos de estudiantes a quienes se les dificultó muchísimo reconstruir algunas figuras completamente. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 7 Comparación de Figuras Geométricas, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

Otras pruebas se muestran en la carpeta de geometría, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se descuben la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: Para los estudiantes fue de gran expectativa la actividad, pues fue retador para ellos cubrir las figuras puestas en la actividad. El entorno de una educación tradicional se transforma en ambientes de trabajo más dinámicos y se consolida la participación de los estudiantes al interior de los grupos.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que la cooperación entre ellos y las ideas que aportaban se utilizaran para resolver cada problema de la actividad. La socialización era eje motriz, pues entre diferentes grupos se compartían las formas en que se podían solucionar los problemas.

Se logra desarrollo la creatividad en el sentido de encontrar para un mismo problema diferentes soluciones y explicaciones. La visualización estuvo presente allí, pues en algunos grupos con solo observar detenidamente las figuras se podía llegar a cubrir mentalmente estas.

Emplearon distintas subdivisiones para los problemas planteados, esto como consecuencia del desarrollo de la actividad 1 de las fracciones, que paralelamente se aplicó con esta.

Incrementa el nivel de los problemas en la actividad y las soluciones son claramente ideas originales de los estudiantes como fruto de la participación. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 1 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora, se constatan las siguientes insuficiencias:

Varios grupos de estudiantes no lograban subdividir las figuras de manera semejante a las piezas con las que estas tenían que ser cubiertas.

Enfrentarse solos al desarrollo de una actividad matemática, sin la guía de una clase tradicional en donde el maestro es quien lidera la solución de los ejercicios, les produjo al principio dudas en su proceder.

4.1.8. Desarrollo de la actividad 2: Triángulo Rectángulo, Cuadrado y Rectángulo

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. El docente le entrega la actividad y se comenzó su desarrollo al interior de cada grupo. Muestran interés y agrado al trabajar en la actividad propuesta, pues es una oportunidad para el trabajo con papel. Se evidenció dificultad en la comprensión de algunas preguntas de la actividad. Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta, el trabajo en general de cada curso se constató de varias soluciones para una misma situación planteada.

Por medio de la socialización los grupos de estudiantes comparaban sus soluciones y constaban las respuestas sugeridas por cada uno de ellos. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en las Figuras 9 y 10, y en el anexo fotográfico de geometría 2, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

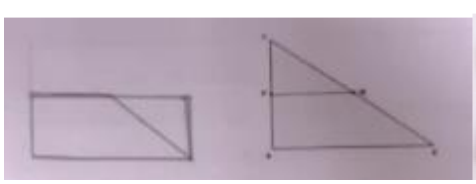


Fig. 9. Solución por un estudiante. Fig. 10. Solución por un estudiante.

Problemas. Usaron adecuadamente las figuras en papel que recibieron para enfrentar satisfactoriamente los problemas y se evidencian soluciones distintas para éstos. Transformaron figuras en otras y establecen que el área se conserva. Esto se muestra en el anexo fotográfico de geometría 2. En algunos grupos de estudiantes se les dificultaron algunos problemas. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 8 Triángulo, Cuadrado y Rectángulo, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

Otras pruebas se muestran en la carpeta geometría, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: Para los estudiantes fue de gran expectativa la actividad, pues los problemas ahora son de más nivel y buscan una mejor comprensión matemática. Llamo también la atención el que ahora debían recortar las figuras en papel que se les entregó. El entorno de una educación tradicional se transforma en un ambiente de trabajo de aula más dinámico, pues la interacción maestro-estudiante esta mediada por buscar soluciones originales para las situaciones planteadas y la participación entre los estudiantes es intermediada por sustentar y explicar su proceder.

Logros: la socialización es eje motriz, pues entre diferentes grupos se compartían las formas en que se podían solucionar los problemas. Se ha logrado un desarrollo en las formas de sustentación, se esfuerzan por expresar las soluciones a los problemas planteados de la mejor manera. La visualización volvió a estar presente, pues en algunos grupos con sólo observar detenidamente las figuras podían manifestar que se podía responder a la pregunta.

Realizaban la transformación inversa de una figura en otra. De esta manera sustentan que cuando una figura sufre transformaciones el área es igual. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 2 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora, existen insuficiencias, tales como:

Varios grupos de estudiantes no lograban comprender la conservación del área cuando una figura sufre transformaciones. Enfrentarse solos al desarrollo de una actividad matemática, sin la guía de un maestro, les produce al principio dudas en su proceder.

4.1.9. Desarrollo de la actividad 3: Triángulos, Rectángulos y Paralelogramos

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. El docente le entrega la guía de la actividad y esta se desarrolló al interior de cada grupo. Los estudiantes mostraron interés y agrado al trabajar en la actividad propuesta, pues constituye una oportunidad para continuar con el desarrollo de habilidades con el papel. Cada grupo de estudiantes estudiante planteó sus soluciones a cada pregunta de manera independiente, el trabajo en general de cada curso se evidenció varias soluciones para una misma situación planteada.

Mediante el diálogo, entre los diferentes grupos de estudiantes, las soluciones se justificaban y se rivalizaban las respuestas sugeridas por los otros grupos. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figura 11 y en el anexo fotográfico de geometría 3, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

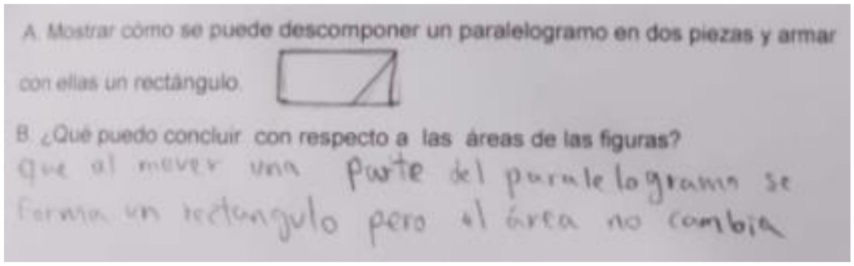


Figura 11. Solución por un estudiante.

Problemas. En esta parte de la actividad los estudiantes lograron demostrar sus habilidades para enfrentar cada uno de los problemas que se plantearon. Usaron adecuadamente las figuras en papel que recibieron y transformaron figuras en otras estableciendo que el área se conserva, de esta manera justifican que las figuras tienen igual área. Además, realizaban la transformación inversa.

En principio todas las transformaciones no causaron muchos inconvenientes, debido a que en varios grupos ya se habían realizado las transformaciones inversas de cada pregunta. Se evidencian soluciones diferentes en cada uno de los problemas. Esto se muestra en el anexo fotográfico de geometría 3. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 9 Triángulos, Rectángulos y Paralelogramos, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

Otras pruebas sobre la resolución de los problemas de esta actividad, se muestran en la carpeta geometría, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se desarrolla un breve análisis sobre la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes fue de gran expectativa la actividad, pues evidenciaron las relaciones que existen entre los triángulos, los rectángulos y los paralelogramos mediante transformaciones entre ellas. Ahora deben recortar las figuras en papel que se les entregaron, para explorar propiedades de las figuras geométricas de las que trata la actividad. El entorno de una clase transformada en ambientes de trabajo dinámicos y la consolidación de la participación de los estudiantes al interior de los grupos se perfilan aún más.

Logros: el desarrollo de la actividad permite que la participación tanto a nivel individual como grupal se fortalezcan aún más. A medida que avanzan las actividades, la socialización continua siendo el eje motriz, pues entre diferentes grupos se compartía las formas en que se podían resolver los problemas.

Sustentan su proceder y actuar en cada una de las transformaciones realizadas en el desarrollo de la actividad. Ya se avanzó a tal grado que la conservación del área es un poco más evidente a través de transformar figuras a partir de otras. Las soluciones a cada una de las situaciones planeadas evidencian un desarrollo de la actividad realizada de una manera autónoma y responsable por cada uno de los grupos. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 3 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora, se constatan algunas insuficiencias:

Realizar las transformaciones inversas de una figura en otra causó dificultades en algunos grupos de estudiantes.

Enfrentarse solos al desarrollo de una actividad matemática, sin la guía de un maestro, aún les produce dudas para proceder a resolver los problemas.

4.1.10. Desarrollo de la actividad 4: Trapecios y Paralelogramos

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Se les entrega la actividad y el material de las figuras en papel, y comienza el trabajo primero individual y en algunos omentos en sus grupos. Los estudiantes mostraron gran interés y agrado al trabajar en la actividad propuesta, pues constituye una oportunidad para mejorar el trabajo de nuevo con papel. Al recibir los trapecios en papel, y construir con ellos un paralelogramo, los estudiantes en general resolvieron la situación en principio sin inconveniente alguno. En cambio en otros grupos se intervino y se les explicó cuál era el propósito de esta parte de la actividad.

Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta de manera independiente y es evidente como para una misma situación los estudiantes optan por diferentes soluciones. Los estudiantes fueron creativos al desarrollar la actividad como tal, pues se encontró diferentes tipos de cortes para realizar transformaciones de un figura en otra. La participación de los diferentes grupos de estudiantes permitió que en la socialización de la actividad se pudieran comparar las diversas soluciones y constatar las respuestas sugeridas por los demás grupos. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figuras 12 y 13, y en el anexo fotográfico de geometría 4, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

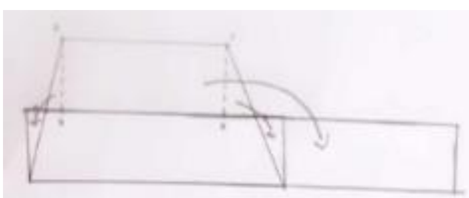


Figura 12. Solución por un estudiante.

Figura 13. Solución por un estudiante.

Problemas. En esta parte de la actividad los estudiantes consiguieron demostrar sus habilidades para enfrentar cada uno de los problemas que se plantearon. Usaron adecuadamente las figuras en papel que recibieron y transformaron figuras en otras estableciendo que el área se conserva. De esta manera justifican que las figuras tienen igual área.

Estos tipos de transformaciones se realizaron por los grupos de estudiantes sin muchos inconvenientes, y también se observa como en varios grupos se realizaban las transformaciones inversas de cada situación, proceso importante para la construcción de conceptos matemáticos. Se evidencian soluciones distintas a dichos problemas. Esto se muestra en el anexo fotográfico de geometría 4. En algunos grupos de estudiantes se les dificultaron algunos problemas. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 10 Trapecios y Paralelogramos, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad. Otras pruebas se muestran en la carpeta geometría, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes sigue siendo una expectativa el desarrollo de las actividades, ahora aparecen nuevas transformaciones geométricas. Por tanto solucionan problemas nuevos y que ponen a prueba sus habilidades, así como su comprensión. La clase y el aula se han convertido en ambientes de trabajo más dinámicos y la participación de los estudiantes al interior de los grupos se fortalece cada vez más.

Logros: la actividad permitió que la colaboración y las ideas que aportaban entre ellos permitían enfrentar cada situación. En los diferentes grupos los estudiantes exponían diversas formas en las que se podían solucionar los problemas.

Se logra un desarrollo en las formas de sustentación, se esfuerzan por expresar las soluciones a los problemas planteados. Se ha avanzado a tal grado que la conservación del área es más evidente al transformar figuras a partir de otras, pues saben que la actividad es un reto y que ellos solos en principio deben resolverla.

Hay en su proceder más seguridad, pues se ha ganado como fruto del desarrollo mismo de las actividades. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 4 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora, existieron insuficiencias en el siguiente sentido:

Evidenciar las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, a través de la filmación de pequeños videos, genera un estado emocional en los estudiantes diferente a su comportamiento diario.

4.1.11. Desarrollo de la actividad 5: Hexágono, Trapecios, Rombos y Triángulos

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Se pretende con esta actividad que los estudiantes descompongan un hexágono regular en triángulos equiláteros, en rombos y en trapecios isósceles, además de hallar relaciones entre estas descomposiciones. Sobre la descomposición de un hexágono regular en seis triángulos equiláteros, se observa que los grupos de estudiantes hábilmente construyen el hexágono con las piezas que recibieron. Concluyen que el área del hexágono, teniendo en cuenta los triángulos equiláteros que lo conforman es seis veces.

En la descomposición de un hexágono regular en 3 rombos iguales, los estudiantes adecuadamente construyen el hexágono con las piezas que recibieron. Al respecto del área del hexágono en términos de las áreas de los rombos, concluyen que el área del hexágono equivale a tres veces el área de cada uno de los rombos. Con relación a la descomposición de un hexágono regular en trapecios, expresan que se necesitan dos trapecios para cubrirlo. También manifiestan que el área del “hexágono” en términos, de las áreas de los trapecios, es dos veces su área. Y que el área de los trapecios en términos del área del hexágono es la mitad de éste.

Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta y es evidente que para una misma situación los estudiantes optan por diferentes soluciones, que en la socialización de la actividad se comparaban los estilos de las soluciones y se constataban las respuestas de los demás grupos. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figuras 14 y 15, y en el anexo fotográfico de geometría

5, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 11 Hexágono, Trapecios, Rombos y Triángulos, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.


Figura 14. Solución por un estudiante.

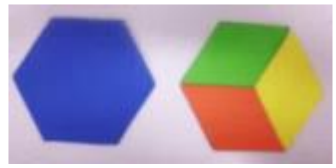


Figura 15. Solución por un estudiante.

Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se valora la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes esta actividad fue de una gran expectativa, pues se usó por primera vez un pequeño rompecabezas. También aparecen nuevas transformaciones geométricas y problemas, que ponen a prueba las habilidades matemáticas, así como su comprensión de estos. Se consolidan cada vez más el ambiente de trabajo dinámico y la participación de los estudiantes al interior de los grupos.

Logros: el desarrollo de la actividad evidencia que en los diferentes grupos los aportes para cada situación planteada se logran de manera independiente y autónoma.

Se esfuerzan por expresar de la mejor manera la solución a los problemas planteados en la sustentación, y en los momentos de socializar ante el grupo, exponen la metodología empleada para resolver cada uno de los problema de la actividad. El avance logrado es tal que la conservación del área es evidente al transformar figuras en otras.

La confianza de los estudiantes al interior de los grupos se ha generado por la participación de ellos en el desarrollo de las actividades. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 5 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora, se constatan las insuficiencias siguientes:

Evidenciar las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, a través de la filmación de pequeños videos, genera un estado emocional en los estudiantes diferente a su comportamiento diario.

Existen problemas al nivel de la escritura para poder expresar la solución de cada problema.

4.1.12. Desarrollo de la actividad 6: Cálculo de Áreas

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Es ahora el momento de realizar cálculos de áreas, en diferentes figuras geométricas, con la intensión de aplicar los conocimientos adquiridos en el desarrollo de las otras actividades de geometría y en las actividades de las fracciones. Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta de manera independiente y para una misma situación los estudiantes optan por diferentes soluciones, además se comparaban las soluciones de los problemas. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en las Figuras 16 y 17, y en el anexo fotográfico de geometría 6, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

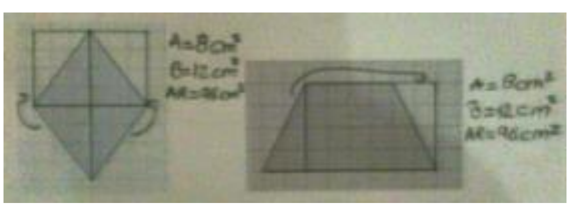


Figura 16. Solución por un estudiante.

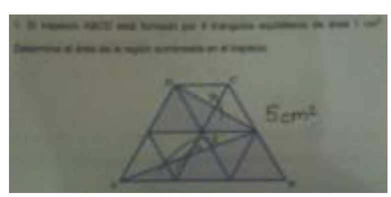


Figura 17. Solución por un estudiante.

Salvo en algunos estudiantes, se presentaron inconvenientes con el manejo adecuado de las unidades. Calcular el área de las figuras fue para los estudiantes un proceso de transformaciones en la figura. Se observa con detalle esta actuación en el anexo fotográfico de geometría 6 y en el video respectivo que se encuentra en el CD. Estas transformaciones se habían ya realizado en actividades anteriores de geometría. Aunque numéricamente se presentaron errores, es evidente la capacidad de los estudiantes para transformar figuras en otras, intensión de todas las actividades anteriores de geometría, pues en cada actividad siempre se trataron transformaciones de figuras en otras.

Problemas retadores. Al emplear diferentes tipos de soluciones, que dependen de la figura correspondiente, se evidencia creatividad por parte de los estudiantes. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 12 Cálculo de Áreas, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

A continuación se describe la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad. Otras pruebas del trabajo realizado por los estudiantes se muestran en la carpeta geometría que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes sigue siendo una gran expectativa el desarrollo de las actividades. Las transformaciones geométricas fueron un factor determinante para el cálculo de las áreas en esta actividad y nuevos problemas ponen a prueba la habilidad matemática de los estudiantes. La participación de los estudiantes al interior de los grupos fue definitiva para aportar en la solución de los problemas y la función del docente y su acción en el aula permiten orientar el trabajo de los estudiantes.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que las ideas que aportaban ayudaran a solucionar cada situación, pues la socialización aquí fue fundamental para el trabajo eficaz en el aula.

Se ha logrado un desarrollo cada vez más fino en la transformación de una figura en otra, para poder realizar cálculos de áreas. Expresan sus soluciones de la mejor manera y la conservación del área les permitió realizar cálculos de área de figuras complejas, de manera sencilla. La actividad fue un reto y ellos mismos la resolvieron mediante argumentaciones adecuadas. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 6 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

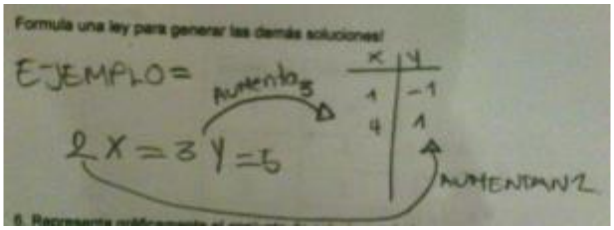
Dificultades: Se presentó insuficiencias en el siguiente sentido:

Determinadas figuras les causan dificultad para realizar cálculos de área.

Es limitado el manejo adecuado de las unidades de medida.

4.1.13. Desarrollo de la actividad 1: Ecuaciones Diofánticas Tipo 1 y Tipo 2

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Estas dos actividades se agrupan en una sola, pues tratan en principio de la misma temática, operaciones de suma y resta, combinadas con multiplicación de enteros, se denominan tipo 1 y tipo 2. Se precisa con esta actividad que los estudiantes adquieran habilidad operativa en la manipulación con los números enteros. Cada grupo de estudiantes planteó de manera independiente sus soluciones a cada pregunta y es evidente que para una misma situación los estudiantes optan por diferentes soluciones. En la socialización de la actividad los estudiantes comparaban sus soluciones y confrontaban las respuestas sugeridas por los demás. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figuras 18 y 19, y en el anexo fotográfico de los enteros 1 y 2, que se encuentran en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 13 Ecuaciones Diofánticas Tipo 1 y Tipo 2, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.



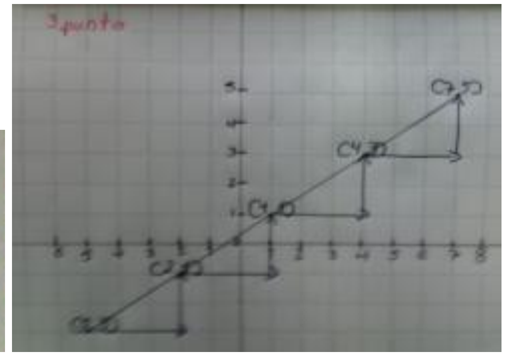


Figura 18. Solución por un estudiante. Figura 19. Solución por un estudiante.

Otras pruebas se muestran en la carpeta enteros, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes sigue siendo una gran expectativa el desarrollo de las actividades, ahora aparece una nueva actividad, en la que se ponen en juego las operaciones entre los números enteros, involucrando sumas, restas y multiplicaciones.

Esta parte inicial de las actividades, que se corresponden con las que tienen que ver con los números enteros, son dedicadas a la solución de las ecuaciones Diofánticas Lineales. Se coloca a prueba la habilidad en matemáticas de los estudiantes con los números enteros, tanto como también su comprensión. Debido a la participación de los estudiantes al interior de los grupos el entorno de un ambiente de trabajo dinámico emerge de forma natural.

Logros: en el desarrollo de la actividad las ideas que surgieron entre los estudiantes, permiten que al realizarse la socialización, los diferentes grupos aportaron de manera significativa a la resolución de los problemas.

Al sustentar las soluciones a las situaciones planteadas, se esfuerzan por expresar las respuestas de la mejor manera. Las operaciones entre números enteros por medio de la solución de ecuaciones Diofánticas lineales permiten a los estudiantes avanzar en la aritmética de dichos números.

La actividad fue un reto debido a que ésta es completamente innovadora para que ellos, pues se conjugan operaciones entre números enteros, ubicación de puntos en plano reticular y posibilita las relaciones entre los coeficientes de una ecuación Diofántica lineal para calcular soluciones enteras de ella. A excepción de cuestiones que fueron aclaradas por parte del docente, los estudiantes participaron activamente en el desarrollo de la actividad. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 1 de enteros, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se logró aprendizaje de las matemáticas, se constatan insuficiencias en el siguiente sentido:

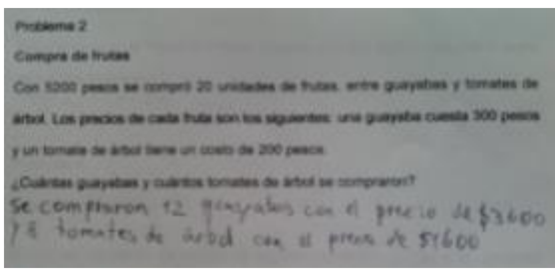
La filmación de pequeños videos, para evidenciar en vivo las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, genera estados emocionales en los estudiantes que no se corresponden con su actuar diario en el aula.

Persisten errores aún con las operaciones entre los números enteros.

4.1.14. Desarrollo de la actividad 3: Formulación de Modelos

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. La actividad tiene como objetivo que los estudiantes usen los números enteros para resolver situaciones en contexto, además se espera que formulen modelos matemáticos de las situaciones que se les plantean. Se precisa con esta actividad que los estudiantes adquieran habilidad en la manipulación operativa con los números enteros.

Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta de manera independiente y se evidenció para una misma situación que los estudiantes optan por diferentes soluciones. A través de la socialización los grupos de estudiantes comparaban sus soluciones y evidenciaban diferentes formas para enfrentar un problema. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figuras 20 y 21, y en el anexo fotográfico de los enteros 3, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 14 Formulación de Modelos, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.


Problema 2

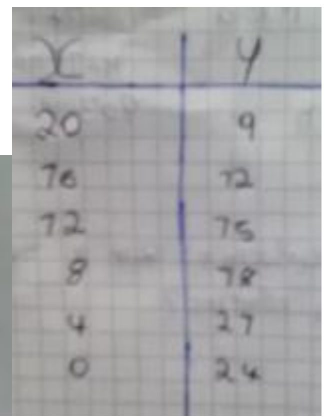
Compra de frutas

Con 5200 pesos se compró 20 unidades de frutas, entre guayabas y tomates de árbol. Los precios de cada fruta son los siguientes: una guayaba cuesta 300 pesos y un tomate de árbol tiene un costo de 200 pesos.

¿Cuántas guayabas y cuántos tomates de árbol se compraron?

Se compraron 12 guayabas con el precio de $3600
y 8 tomates de árbol con el precio de $1600

Figura 20. Solución por un estudiante.



x	y
20	9
16	12
12	15
8	18
4	21
0	24

Figura 21. Solución por un estudiante.

Otras pruebas se muestran en la carpeta enteros, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: la actividad les pareció muy interesante pues contenía unos problemas en contexto que para los estudiantes eran bien particulares. Ahora aparecen nuevas situaciones en donde ponen en juego la habilidad para manipular los números enteros, nuevos problemas que exigen un nivel de comprensión más elevado. El docente observa que en el aula su intervención en momentos adecuados permite a los estudiantes ganar confianza para expresar y sustentar sus soluciones ante todo el grupo.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió la emotiva participación de los estudiantes, pues las ideas surgidas en cada grupo de estudiantes aportaron para solucionar cada situación. La socialización fue fundamental, los diferentes grupos compartieron abiertamente las formas en que se podían solucionar los problemas.

Sustentan la solución de los problemas planteados de la mejor manera y se logra un manejo adecuado de los números enteros en situaciones de contexto, pues ellos la resolvieron solos, con excepción de algunos, los cuales fueron aclarados por parte del docente. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 2 de geometría, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora y se logró el objetivo, se constatan algunas insuficiencias:

Persisten "problemas de escritura" para dar a entender lo que quieren decir en las soluciones de los ejercicios.

4.1.15. Desarrollo de la actividad 1: La Fracción Mediante

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Con el desarrollo de la actividad se busca como objetivo primordial emplear la visualización matemática a fin de hallar la fracción mediante entre dos fracciones positivas. Los estudiantes usaron el plano reticular y asociaron a las fracciones los puntos correspondientes. También al usar el plano reticular expresan que existe una fracción asociada con cada punto del plano. Cada grupo de estudiantes planteó sus soluciones a cada pregunta de manera independiente y es evidente que para una misma situación los estudiantes optan por diferentes soluciones. Además fácilmente enlistan una serie de fracciones entre dos fracciones dadas.

En la socialización los grupos de estudiantes expresan sus soluciones y sustentan las respuestas, así como también defienden sus posturas. Una muestra del trabajo realizado se visualiza en la Figuras 22 y 23, y en el anexo fotográfico 1 de paradojas, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

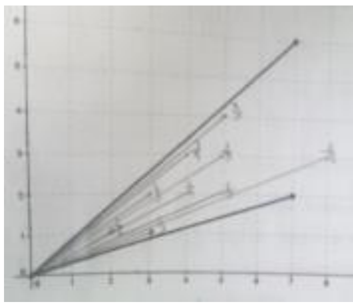


Figura 22. Solución por un estudiante.

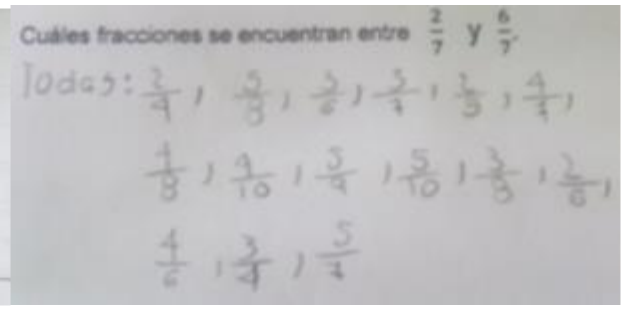


Figura 23. Solución por un estudiante.

Se observa de las tomas fotográficas anteriores una gran cantidad de puntos reticulares, es decir, que de igual manera existirán igual cantidad de fracciones asociadas a dichos puntos reticulares. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 15 La Fracción Mediante, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

A continuación se describen la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad. Otras pruebas se muestran en la carpeta paradojas, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes fue gran expectativa el desarrollo de la actividad, ahora es el momento de mostrar una serie de fracciones que existen entre otras dos fracciones dadas. Por tanto un problema nuevo surge y pondrá a prueba la habilidad matemática de los estudiantes, entre tanto que debe exhibir la construcción lograda en las actividades anteriores y relacionadas con las fracciones. Se mejora aún más la participación de los estudiantes en cada grupo conformado y el docente es consciente de que su labor en el aula es intervenir en momentos adecuados para que los estudiantes aporten ideas ricas en contenidos matemáticos.

Logros: la colaboración surgida entre ellos proporcionó ideas para que cada situación se abordara de la mejor manera, y en la socialización la calidad de la participación benefició el avance en el aprendizaje del grupo.

Se ha obtenido un progreso en el manejo del plano reticular, como se evidencia en la manera de hallar varias fracciones entre otras dos facciones dadas. También se observa como asignan fracciones equivalentes a determinados puntos reticulares. Asumen que la actividad es un reto y que ellos deben solos en principio resolverla. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 1 de paradojas, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que con la actividad se logra aprendizaje, existen algunas insuficiencias:

La filmación de pequeños videos, para evidenciar en vivo las soluciones a determinadas preguntas de la actividad, genera comportamientos no habituales en los estudiantes.

En algunos grupos la notación apropiada para las fracciones según el plano reticular presenta aún inconvenientes.

4.1.16. Desarrollo de la actividad 2: Generamiento de Fracciones Equivalentes

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. El objetivo de esta es generar fracciones equivalentes por medio de segmentos de líneas recta que pasan a través del origen y que contienen puntos asociados a fracciones equivalentes. Los estudiantes en actividades anteriores tanto de geometría como de fracciones ya habían enfrentado las fracciones equivalentes, por lo que se espera un trabajo más fluido en esta actividad. Se observa como generan buscar fracciones que son equivalentes por medio de una línea recta que pasa por el origen y que contiene a un determinado punto reticular. Evidencia del trabajo realizado se visualiza en la Figura 24 y en el anexo fotográfico 2 de paradojas, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

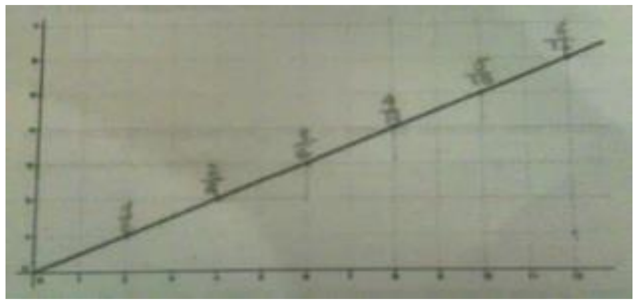


Figura 24. Solución por un estudiante.

En el momento de indagar sobre la razón entre distancias verticales y horizontales entre diferentes puntos reticulares, los estudiantes hábilmente establecen trazos que dan cuenta de que dicha razón permanece constante en puntos que están sobre una misma línea recta, como se muestra en la Figura 25. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 16 Generamiento de Fracciones Equivalentes, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.

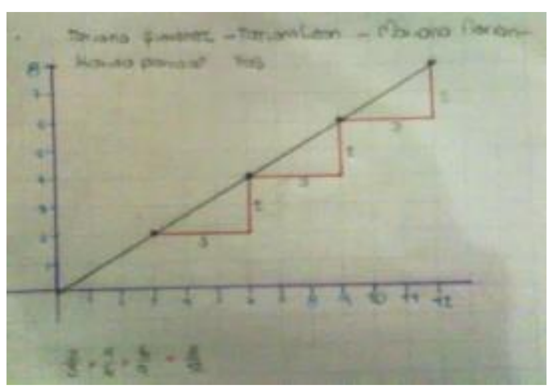


Figura 25. Solución por un estudiante.

Otras pruebas se muestran en la carpeta fracciones, que se encuentra en la carpeta paradojas, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se hace un breve análisis de la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: para los estudiantes esta actividad fue motivadora porque de nuevo se analizan fracciones equivalentes, solo que ahora aparecen nuevos elementos, como es la razón que interesara muchísimo. Tal razón es la distancia vertical a la distancia horizontal, que permanece constante cuando los puntos asociados están sobre una línea recta. Además es la pieza clave para resolver las paradojas geométricas que se analizarán y que serán la culminación de la propuesta.

Se pone en juego la construcción que los estudiantes ya habrán adquirido sobre fracciones equivalentes, además de una comprensión adecuada sobre el tema en cuestión. El entorno de un ambiente de trabajo dinámico y la consolidación de la participación de los estudiantes al interior de los grupos deberán permitir un desarrollo más fluido de las últimas actividades. Los estudiantes comprenden que la función del docente y su acción en el aula están mediadas por intervenciones dirigidas a guiar su trabajo original.

Logros: las ideas en los grupos permitieron enfrentar cada situación y en la socialización se expusieron los aportes entre los diferentes grupos, así como defender su propio trabajo.

Se ha avanzado a tal grado que fácilmente encuentran fracciones equivalentes y expresan relaciones entre los numeradores y los denominadores que componen una fracción. La razón, distancia vertical a distancia horizontal, aparece como determinante para establecer que una serie de puntos están sobre una misma línea recta.

La actividad fue resulta por ellos solos con excepción de cuestiones que fueron aclaradas por parte del docente. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 2 de paradojas, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: a pesar de que la actividad fue motivadora, se constatan insuficiencias:

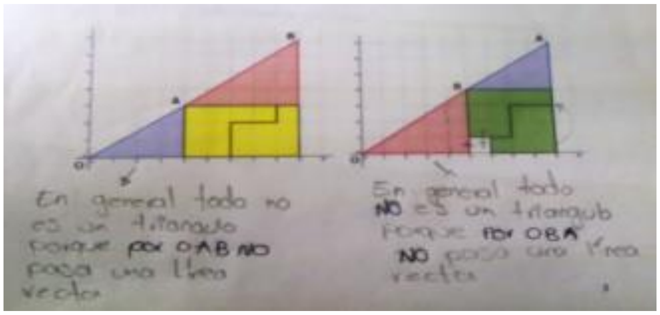
Para la mayoría de los estudiantes, el plano reticular, solo tiene extensión en la hoja que se les entregó y muy pocos grupos consideran una extensión infinita del plano reticular.

4.1.17. Desarrollo de la actividad 3: Un triángulo Mágico

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Se precisa como objetivo que los estudiantes puedan explicar las inconsistencias que aparecen en una Paradoja Geométrica que aparentemente evidencia la no conservación del principio del área. Toda paradoja es difícil de explicar, pero con una fundamentación matemática apropiada y dotando a los estudiantes con las herramientas necesarias se puede lograr que las expliquen por lo menos satisfactoriamente.

La paradoja que ahora los estudiantes enfrentarán se considera un problema retador. Se les presenta a los estudiantes como un triángulo mágico y se cuestiona lo siguiente: ¿Por qué no se cumple "el principio de la conservación del área" en esta situación?

Se puede evidenciar que se encontraron varias soluciones a la explicación de este problema retador. También se nota el esfuerzo de los grupos de estudiantes por explicar matemáticamente la inconsistencia. Evidencia de esto se observa en las Figuras 26 y 27, y en el anexo fotográfico paradoja 1, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 17 Un Triángulo Mágico, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.



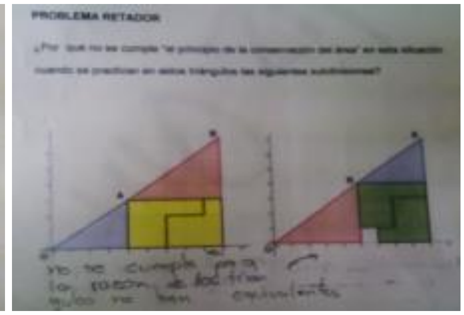


Figura.26. Solución al problema retador.

Figura. 27. Solución por un grupo estudiantes.

Otras pruebas se muestran en la carpeta paradojas, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se descuben la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: Esta actividad fue de gran expectativa para los estudiantes, ahora aparece una paradoja geométrica, que en la literatura científica es conocida como El Triángulo de Curry. En la presente investigación, se muestra a los estudiantes una versión modificada de ella por el autor de la tesis.

La llamamos un triángulo mágico, debido a que simplemente por el hecho de mover unas piezas y recomponerlas para conformar otro “triángulo igual” al original se gana una unidad de área. Esta es una “nueva transformación” geométrica que debe ser estudiada con sumo cuidado porque en todas las actividades de geometría anteriormente realizadas el área de las figuras siempre se conservaba. Por tanto es un nuevo problema y pondrá a prueba sus habilidades matemáticas, así como su comprensión lograda de ella, en todo este tiempo de la aplicación de las actividades.

El entorno de estas clases se reflejará en que los estudiantes puedan en principio explicar la inconsistencia de esta paradoja geométrica, así como también la consolidación de la participación de los estudiantes en el aula de clase.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que en todo este tiempo de aplicación de las actividades, se culminara en este problema que lo hemos clasificado como retador, pues una paradoja no es tan fácil de explicar. También en el intento por explicar su inconsistencia se refinaron conceptos matemáticos. Asimismo, la paradoja motivo a buscar su error y generó conocimiento matemático.

Las ideas que allí surgieron aportaron y permitieron enfrentar esta situación de una manera maravillosa como claramente se logró en las formas de sustentación, un esfuerzo es evidente por parte de los estudiantes para solucionar la paradoja que parece ser está en contradicción con el principio de la conservación del área.

Se ha avanzado a tal grado que la conservación del área, que aquí se pone en duda, quede ya establecida en los estudiantes, independientemente de las transformaciones que se realicen en toda figura. La actividad misma fue un reto y ellos la solucionaron correctamente. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 3 de paradojas, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: la actividad fue motivadora y se logró el objetivo, pero se constatan algunas insuficiencias:

La manera como escriben, no permite realmente percibir lo mucho que se ha alcanzado con la aplicación de estas actividades y con la culminación de este problema retador.

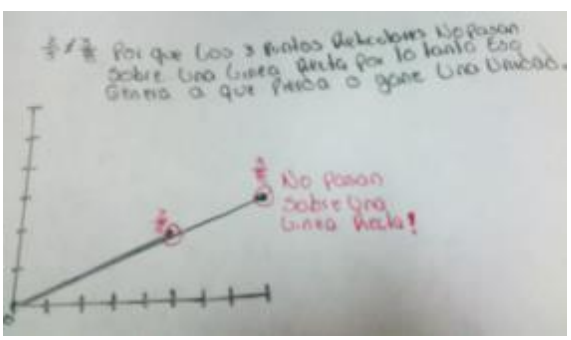
4.1.18. Desarrollo de la actividad 4: Un cuadrado extraño

En esta actividad participaron 73 estudiantes, en grupos de a tres. Se precisa como objetivo que los estudiantes puedan explicar las inconsistencias que aparecen en la siguiente paradoja geométrica que evidencia la no conservación del principio del área. Esta paradoja posee ciertas dificultades en su explicación, pero con la fundamentación matemática apropiada y adquirida en este tiempo de aplicación de las actividades se espera que los estudiantes logren explicarlas al menos satisfactoriamente.

La paradoja que ahora los estudiantes enfrentan se considera un problema retador. Se le llama un cuadrado extraño y se indaga ahora ¿Por qué hay una ganancia de una unidad de área con sólo intercambiar las piezas que conforman el cuadrado?

En el desarrollo de la actividad realizada por los estudiantes se evidencia el esfuerzo logrado por ellos para explicar las inconsistencias que hay en dicha paradoja.

En esta situación, es evidente que hay varias formas en que los grupos de estudiantes proponen como entender la inconsistencia planteada por esta paradoja. Esto es evidenciado en las Figuras 28 y 29, y en el anexo fotográfico paradoja 2, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades. Una descripción detallada de la actividad se muestra en el anexo 18. Un Cuadrado Extraño, que se encuentra en CD, en la carpeta desarrollo de las actividades.



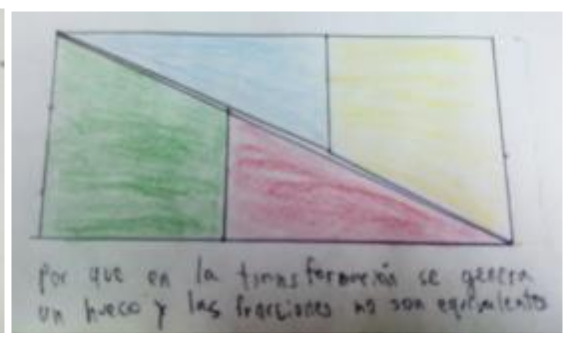


Figura.28. Solución por un grupo de estudiantes. Figura. 29. Solución por un grupo estudiantes.

Otras pruebas se muestran en la carpeta paradojas, que se encuentra en la carpeta videos, del CD que se anexa a la tesis. A continuación se realiza un breve análisis de la motivación por el aprendizaje, los logros y las dificultades durante el desarrollo de la actividad.

Motivación por el aprendizaje: esta actividad fue de gran expectativa para los estudiantes, ahora aparece de nuevo una paradoja geométrica, que en la literatura científica es conocida como El Cuadrado de Ball, aquí se presenta a los estudiantes la paradoja tal cual.

Es importante estudiarla debido a que simplemente por el hecho de mover unas piezas y componerlas para conformar un rectángulo y que originalmente se partió de un cuadrado, se gana una unidad de área. Esta es una "transformación" geométrica que debe ser estudiada con sumo cuidado. En las actividades de geometría anteriormente realizadas el área de las figuras siempre se conservaba. Por tanto es un nuevo problema y pondrá a prueba la habilidad matemática de los estudiantes, así como su comprensión lograda de ella en todo este tiempo de la aplicación de las actividades. El entorno de estas clases se reflejará en que los estudiantes puedan en principio explicar la inconsistencia de esta paradoja geométrica.

Logros: el desarrollo de la actividad permitió que en todo este tiempo de aplicación de las actividades, se culminara en este problema que lo hemos clasificado como retador, pues esta paradoja posee dificultades para ser explicada. También en su intento por explicar su inconsistencia se refinaron conceptos matemáticos y se motivaron por buscar su error.

Las ideas que surgieron aportaron y permitieron enfrentar la paradoja de una manera elegante, las diferentes formas de sustentación evidencian la riqueza que adquirieron los estudiantes en este tiempo de aplicación de las actividades, y se observa en lo anterior un esfuerzo por solucionar el problema planteado por esta paradoja.

Se ha avanzado a tal grado que la conservación del área, que aquí se pone en duda, quede ya establecida en los estudiantes, independientemente de las transformaciones que se realicen en toda figura. La actividad misma es un reto y ellos la solucionaron por si mismos de una manera estéticamente hermosa. Reflejos de estos logros se muestran en las evidencias de la actividad número 4 de paradojas, que se encuentra en el CD que se anexa a la tesis en la carpeta Fotos de actividades.

Dificultades: la actividad fue motivadora y se logró el objetivo, pero se constatan insuficiencias:

La manera como escriben, no permite realmente percibir lo mucho que se ha alcanzado con la aplicación de estas actividades.

4.2. Valoración de los resultados obtenidos en la práctica escolar de la investigación a través de la encuesta de satisfacción

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron en la encuesta de satisfacción realizada (Ver Anexo 1), se logra confirmar que este tipo de actividades desarrolladas en la investigación es muy aceptada por los estudiantes de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar, así mismo, esto permitió que los estudiantes se apropiaran de una metodología para la resolución de problemas. En este proceso su rendimiento escolar mejorara en el primero y segundo periodo del año escolar en curso. Los estudiantes evidenciaron un gusto por el aprendizaje de las matemáticas. A continuación se describen las respuestas que se obtuvieron al finalizar la aplicación de las actividades de la presente tesis en los grupos de la muestra.

Grupo 703. Con respecto a la pregunta: ¿considera usted que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la matemática?, el 3% de los estudiantes la califican con 1, el 6% de los estudiantes la califican con 2, el 33% de los estudiantes la califican con 3, el 36% de los estudiantes la califican con 4 y el 21% de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

Con respecto a la pregunta: ¿Cree usted que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia? En este sentido el 9 % de los estudiantes la califican con

1, el 3 % de los estudiantes la califican con 2, el 33 % de los estudiantes la califican con 3, el 30 % de los estudiantes la califican con 4 y el 24 % de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

Ante la pregunta: ¿las actividades propuestas constituyeron un reto para usted? El 0 % de los estudiantes la califican con 1, el 6 % de los estudiantes la califican con 2, el 24 % de los estudiantes la califican con 3, el 36 % de los estudiantes la califican con 4, el 33 % de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

Con respecto a la pregunta: ¿considera usted que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente matemático? En las respuesta el 6 % de los estudiantes la califican con 1, el 11 % de los estudiantes la califican con 2, el 11 % de los estudiantes la califican con 3, el 26 % de los estudiantes la califican con 4 y el 46 % de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

En relación a la pregunta: ¿se sintió usted motivado a desarrollar los retos de forma natural y autónoma? Aquí el 3 % de los estudiantes la califican con 1, el 9 % de los estudiantes la califican con 2, el 15 % de los estudiantes la califican con 3, el 21 % de los estudiantes la califican con 4 y el 52 % de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2). Esto se muestra en la carpeta de los resultados de las encuestas del curso 703, en el CD adjunto a la tesis.

Grupo 704: Con respecto a la pregunta: ¿considera usted que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la matemática? En esta pregunta el 0 % de los estudiantes la califican con 1, el 0 % de los estudiantes la califican con 2, el 11 % de los estudiantes la califican con 3, el 47 % de los estudiantes la califican con 4 y el 42 % de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

Con respecto a la pregunta: ¿cree usted que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia? Aquí el 0% de los estudiantes la califican con 1, el 2% de los estudiantes la califican con 2, el 16% de los estudiantes la califican con 3, el 29% de los estudiantes la califican con 4 y el 53% de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

A la pregunta: ¿las actividades propuestas constituyeron un reto para usted?, el 5% de los estudiantes la califican con 1, el 5% de los estudiantes la califican con 2, el 13% de los estudiantes la califican con 3, el 29% de los estudiantes la califican con 4 y el 47% de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

A la pregunta: ¿considera usted que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente matemático?, el 0% de los estudiantes la califican con 1, el 3% de los estudiantes la califican con 2, el 16% de los estudiantes la califican con 3, el 34% de los estudiantes la califican con 4 y el 47% de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2).

Y por último a la pregunta: ¿se sintió usted motivado a desarrollar los retos de forma natural y autónoma?, el 3% de los estudiantes la califican con 1, el 5% de los estudiantes la califican con 2, el 26% de los estudiantes la califican con 3, el 45% de los estudiantes la califican con 4 y el 21 % de los estudiantes la califican con 5 (Ver Anexo 2). Esto se muestra en la carpeta de los resultados de las encuestas del curso 704, en el CD adjunto a la tesis.

Conclusiones del capítulo 4

El desarrollo de las actividades en los diferentes grupos de trabajo permitió el avance en los distintos tipos de pensamiento logrado por los estudiantes al realizar una evaluación de los análisis de los comentarios. Se percibe en los resultados observados alcances satisfactorios con relación al avance matemático conseguido por ellos, al formalizar una valoración cualitativa de cada una de las actividades que adelantaron los estudiantes.

Las actividades impactaron positivamente a los estudiantes, lo cual se notó durante todo el tiempo de aplicación de las actividades. Se percibió en su aplicación entusiasmo y disposición para aprender. Los estudiantes planteaban soluciones diferentes a una misma situación. También se presentó dificultades en la solución de algunos de los problemas, más sin embargo había motivación por desarrollar el problema y superar la dificultad.

Para valorar el buen desempeño de las actividades desarrolladas por los estudiantes se tienen presente los resultados de las encuestas realizadas, cuyos análisis confirma el éxito de las actividades en cada equipo de trabajo. Se logra constatar que este tipo de actividades logra motivación hacia el estudio de la matemática.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación en actividades conformadas por problemas retadores y que motiven el estudio de ésta materia en los estudiantes de grado séptimo, de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar, permitió dar respuesta a las tareas de investigación propuestas. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos que resultan determinantes para el logro de los objetivos de éste trabajo, y ellos son:

- Desde los diferentes planteamientos mostrados en el estado del arte, en los cuales se precisan varias investigaciones sobre el estudio de la geometría y el uso de las paradojas en el aprendizaje de la matemáticas, en especial las que tiene ver con el área de las figuras geométricas, se requieren de actividades conformadas por problemas retadores, donde se hace necesario que su diseño inicie con situaciones sencillas y que evolucionen hacia problemas retadores, que puedan estimular y confrontar al estudiante, para encaminar sus esfuerzos hacia la consecución de la solución satisfactoria de los problemas planteados.
- Al asumir en la investigación como marco teórico la resolución de problemas de Polya (1973), la visualización matemática de Arcaví (2003) y la comunidad práctica de Wenger (2002), para sustentar las actividades conformadas por los diferentes tipos de problemas, que se proponen en esta tesis, se favoreció la construcción del significado de la conservación del área en los estudiantes del grado séptimo.
- La selección de las actividades que se aplicaron a los estudiantes, proyectan y generan en ellos saberes matemáticos que negociaron y compartieron con sus compañeros por medio de la socialización, y reflejan la adecuada elección de los problemas retadores.

- La realización de estas actividades en la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar permitió motivar y desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, además proporcionó el desarrollo en los estudiantes de habilidades matemáticas para la solución de problemas.
- Con los resultados de las actividades realizadas durante el primer y segundo periodo académico en la institución, tiempo de duración de la aplicación de las actividades, se pudo constatar que las matemáticas son agradables, dignas de estudiar y de profundizar en ellas, propiciando motivación y mejoras en el aprendizaje de los estudiantes.

RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades propuestas en los estudiantes del grado séptimo en la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar requiere considerar y adaptar en práctica las siguientes recomendaciones, para optimizar el proceso investigativo y los resultados obtenidos:

- Elaborar una revisión detallada y a profundidad de cada una de las actividades a realizar con los estudiantes, pues algunos problemas propuestos en la presente investigación generaron inconvenientes, originando desmotivación en ellos, lo que conlleva a que cada uno de los problemas retadores que se propongan deben ser escogidos cuidadosamente.
- Continuar con el enfoque teórico sobre la resolución de problemas a partir de problemas retadores, con la intención de lograr motivación hacia el estudio de la matemática, de tal forma que los estudiantes de grado séptimo mejoren su rendimiento académico en el área de matemáticas.
- Implementar este enfoqué teórico en otros grado de la Institución Educativa Distrital CEDID Ciudad Bolívar, con el objetivo de lograr óptimos resultados por medio de actividades bien diseñadas y organizadas para contribuir a un mejoramiento académico de los estudiantes creando un ambiente adecuado para el aprendizaje de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, Y. (s.f). Construcción del concepto de fracción con estudiantes de Licenciatura en Educación Básica. Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga (Santander, Colombia). Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/2316/1/ConstruccionAcevedoAsocolme2012.pdf

Batanero, C., Contreras, J., Cañadas, G., Gea, M. (s.f). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. Novedades Educativas, 261, 78-84. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Novedades_Batanero.pdf

Bolívar, L. (2013). Los juegos didácticos como propuesta metodológica para la enseñanza de los números fraccionarios en el grado quinto de la institución educativa centro fraternal cristiano. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. Medellín, Colombia. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/9618/1/79321383.2013.pdf

Calendario Matemático 2014. Primer Nivel, Junio. Publicación mensual de Colombia Aprendiendo. Proyecto matemática recreativa.

Castro, I. y Hernando, J. (2002). Las Paradojas En Matemáticas. Universidad Sergio Arboleda, Bogotá. Recuperable el 03 de noviembre de 2014 de la URL: http://www.usergioarboleda.edu.co/matematicas/memorias/memorias13/Paradojas%20en%20Matem%C3%A1ticas.pdf

Charalambos, L. (s.f). A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure. School of Education of Florina. Aristotle University of Thessaloniki.

Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://mathslife.eled.uowm.gr/sites/default/files/usersfiles/11_1.pdf

Cruz, G. y Montenegro, C. (2011). Aproximación al tratamiento escolar de la geometría a través de materiales manipulativos. En P. Perry (Ed.), Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 345-354). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperable el 03 de abril de 2015 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/3860/1/CruzAproximacionGeometria2011.pdf

De Guzmán, M. (2001). El Rincón de la Pizarra. Cap. 0, el papel de la visualización. Ediciones Pirámide. Madrid, España.

Ding, L., Fujita, T. y Jones, K. (2005). CERME 4. Developing geometrical reasoning in the classroom: learning from highly experienced teachers from China and Japan. University of Southampton, University of Glasgow, University of Southampton. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG7.pdf

Escudero J. (1999). Resolución de Problemas Matemáticos. Centro de Profesores y Recursos. Salamanca

Farlow, S. (2014). Paradoxes in Mathematics. DOVER PUBLICAT IONS. Mineola, New York. United States.

Flores, P. (s.f). Paradojas Matemáticas Para La Formación De Profesores. Departamento de Didáctica de la Matemática, Campus Universitario de Cartuja, Universidad de Granada. SAEM THALES. Recuperable el 03 de febrero de 2014 de la URL: http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Paradojas.pdf

Freire, C. (2010). Jogos, Desafios e Paradoxos Para Sala De Aula: Uma Ótima Ferramenta Para Motivar Seus Alunos. Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho. X

Encontro Nacional de Educação Matemática. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/MC/T21_MC1311.pdf

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Heredia, Costa Rica y San Carlos, Costa Rica. Revista Electrónica Educare Vol. XIV, N° 2, [125-142], ISSN: 1409-42-58, Julio-Diciembre, 2010. Número publicado el 15 de diciembre del 2010. . Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf

Gardner, M. (1956). Mathematics, Magic and Mystery. Dover Publications. New York.

Gardner, M. (1982). Aha! Paradoxes to puzzle and delight. W. H. Freeman and Company. New York. United States of America.

Gardner, M. (1987). Mathematical Puzzles & Diversions. THE SECOND scientific american book of. The university of chicago press. University of Chicago Press Edition. United States of America.

González, A. (2013). La aventura de aprender geometría en el grado octavo utilizando un módulo educativo computarizado de escuela nueva. Universidad Nacional de Colombia Manizales, Colombia. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/9749/13/8411507.2013.pdf

González, Á. y Vílchez N. (2002). “Enseñanza De La Geometría Con Utilización De Recursos Multimedia”. Aplicación a la Primera Etapa de Educación Básica. Sector San Jacinto. Trujillo. Venezuela. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/14318/1/vilchez_nieves2.pdf

Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 3-14).

Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperable el 03 de abril de 2015 de la URL: http:// funes.uniandes.edu.co/3811/1/GutiérrezReflexionesGeometria2011.pdf

Hurtado, M. (2012). Una Propuesta Para La Enseñanza De Fracciones En El Grado Sexto. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

Jovel, D. y Rodríguez, M. (2011). Concepción de área en estudiantes de grado sexto. En P. Perry (Ed.), Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 229-236). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/3845/1/JovelConcepciónGeometria2011.pdf

Kleiner, I y Movshovitz, N. (1994). The Role of Paradoxes in the Evolution of Mathematics. Amer.Math.Monthy 688, December. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Kleiner-Hadar963-674.pdf

Kondratieva, M. (2009). Understanding mathematics through resolution of paradoxes. Department of Mathematics and Statistics, Memorial University of Newfoundland. Canada. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.amt.edu.au/icmis16pcankontradieva.pdf

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers With Applications. JOHN WILEY & SONS. Framingham State College. New York.

López, J. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo. Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf

Macho, M. (2012). Historias de matemáticas. Matemáticas a través de la paradoja. Revista de Investigación. Pensamiento Matemático. Vol II, número 2. 1 de octubre de 2012. Universidad del País Vasco, España. Recuperable el 03 de febrero de 2015 de la URL: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_II_num_2/hist_4_paradoja.pdf

Marchett, P., Medici, D., Vighi, P. y Zaccomer, E. (2005). CERME 4. Comparing perimeters and areas: children's' preconceptions and spontaneous procedures. University of Parma, Italy. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG7.pdf

Martínez, C. y Lascano, M. (2001). Acerca De Dificultades Para La Enseñanza Y El Aprendizaje De Las Fracciones. REVISTAEMA, VOL. 6, Nº 2, 159-179. Recuperable el 03 de mayo de 2014 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/1127/1/75_Martínez2001Acerca_RevEMA.pdf

Mathematical Calendar 2013. Fifth Level, August. A monthly publication by Colombia Aprendiendo. Recreational Mathematics Projet.

Mathematical Calendar 2014. First Level, July. A monthly publication by Colombia Aprendiendo. Recreational Mathematics Projet.

Mazarío, I y otros. (2009). Reflexiones sobre un tema polémico: la resolución de problemas. MONOGRAFÍA. Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Departamento de Matemática. Edit. Universitaria Cuba. Ciudad de La Habana.

Montes, S. (2012). Una Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De Transformaciones Geométricas En El Plano Con Estudiantes De Grado Séptimo Haciendo Uso Del Entorno Visual Del Juego Pac-Man.

Universidad Nacional de Colombia. Bogotá D.C., Colombia. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/7739/1/sergioandresmontesalarcon.2012.pdf

Movshovitz-Hadar, N. and Hadass, R. (1990). Preservice Education Of Math Teachers Using Paradoxes. Educational Studies in Mathematics 21: 265-287, 1990. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. Recuperable el 03 de diciembre de 2014 de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED307135.pdf

Movshovitz-Hadar, N. y Hadass, R. (1991). More about mathematical paradoxes in preservice teacher education. Teaching & Teacher Education. Vol.7, No. 1. pp. 79-92. Printed in Great Britain. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.academia.edu/2431660/More_about_mathematical_paradoxes_in_preservice_teacher_education

Northrop, E. (1944). Riddles in MATHEMATICS A Book of Paradoxes. D. VAN NOSTRAND COMPANY. PRINCETON, NEW JERSEY.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revistaema, VOL. 8, Nº 2, 157-182. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2002). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá.

Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2005). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá.

Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2009). Una publicación de la Universidad Antonio Nariño. Bogotá.

Peña, A. (2012). Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la ESO. SUMA 69, Artículos Marzo 2012. pp. 37-48. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://revistasuma.es/IMG/pdf/69/037-048.pdf

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Compiladores). (2012). Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Buenos Aires. Argentina.

Polya, G. (1981).Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. Combined Edition. Stanford University. John Wiley & Sons.

Polya, G. (I973). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Stanford University, SECOND EDITION, Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

Professor Kleitman. Mathematical Fallacy Proofs .Xing Yuan, Spring 2007. 18.304. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-304-undergraduate-seminar-in-discrete-mathematics-spring-2006/projects/fallacy_yuan.pdf

Rodríguez, C. y Sarmiento, A. (2002). El tangram y el plegado: dos recursos pedagógicos para aproximarse a la enseñanza de las fracciones propias. REVISTAEMA, VOL. 7, Nº 1, 84-100. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/1149/1/83_Rodríguez2002El_RevEMA.pdf

Rodríguez, M. y Jovel, D. (2011). El concepto de área: acercamiento basado en las concepciones de estudiantes de educación básica. Revista Perspectivas Educativas, Journal of Educational Perspectives. Ibagué, Colombia. Vol. 4. Enero – Diciembre. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.ut.edu.co/academico/images/archivos/fac_cien_educ/Publicaciones%20FCE/4.%202011.pdf

Rouse, B. (1947). Mathematical Recreations & Essays. Late fellow of trinity college, Cambridge. Revised By H. s. M. COXETER. Past fellow of trinity college, Cambridge. New York. The Macmillan Company.

Ruiz, N. (s.f). Medios y recursos para la enseñanza de la geometría en la educación obligatoria. Didáctica de las Matemáticas. Revista Electrónica de Didácticas Específicas, ISSN: 1989-5240. Revista Electrónica de Didácticas Específicas, nº 3, pp. cv-cv. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.didacticasespecificas.com/files/download/3/articulos/30.pdf

Semana, S. y Santos, L. (2010). CERME 6: Written report in learning geometry: explanation and argumentation. January 28th-February 1st 2009, Lyon France. Recuperable el 09 de diciembre de 2014 de la URL: http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-10-semana-santos.pdf

Souto, B. (2009). Visualización en matemáticas un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas. Facultad de Ciencias Matemáticas Universidad Complutense de Madrid. Departamento de Álgebra. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.mat.ucm.es/invesmat/wp-content/uploads/2011/11/trabajo-master-curso-2008-09-blanca-souto.pdf

Sullivan, M. and Panasuk, R. (1997). Fibonacci Numbers and an Area Puzzle: Connecting Geometry and Algebra in the Mathematics Classroom. School Science and Mathematics. Volume 97(3), March 1997. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://lib.gen.in/46cd6f4fce8b47e2ec51d7ece9f7a9df.pdf

Valdés, C. (2011). Paradojas en la problematización del cálculo. Universidad de La Habana. Cuba. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/CP-valdes.pdf

Vigh, P. (2005). CERME 4. “Measurement” on the squared paper. University of Parma, Italy. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG7.pdf

Vilanova, S. y otros. (s.f). La Educación Matemática: El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. OEI – Revista Iberoamericana de Educación. Recuperable el 03 de octubre de 2014 de la URL: http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Paidós. Barcelona, España.

Wenger, E. McDermott, R., and Snyder, W. (2002). Cultivating Communities of Practice. HARVARD BUSINESS SCHOOL PRESS. Boston, Massachusetts. Printed in the United States of America.

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful?. Instituto de Tecnología de Israel, Haifa. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 265-272. Seoul: PME. Recuperable el 11 de diciembre de 2014 de la URL: http://www.emis.de/proceedings/PME31/4/264.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta de satisfacción a estudiantes

Apreciado estudiante, ya terminamos las actividades, a partir de su experiencia como participante, responda las siguientes preguntas de 1 a 5, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación.

a. ¿Considera usted que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la matemática?

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

b. ¿Cree usted que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

c. ¿Las actividades propuestas constituyeron un reto para usted?

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

d. ¿Considera usted que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente matemático?

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

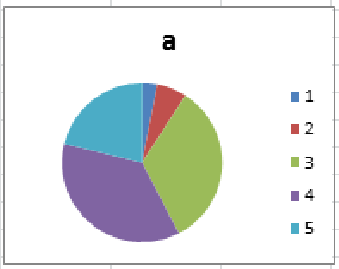
e. ¿Se sintió usted motivado a desarrollar los retos de forma natural y autónoma?

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

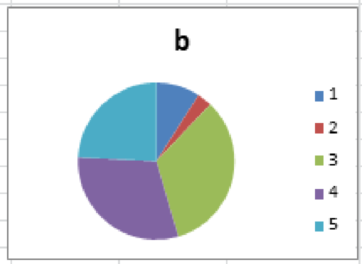
Anexo 2. Resultados de la encuesta de satisfacción a estudiantes

CURSO 703

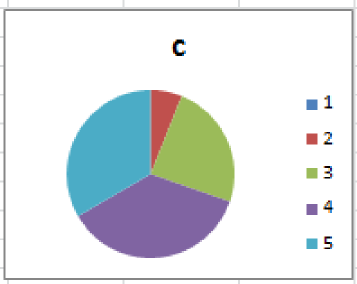
CURSO 703						
	1	2	3	4	5	CALIFICACION
PREGUNTA						
a	1	2	11	12	7	
b	3	1	11	10	8	
c	0	2	8	12	11	
d	2	4	4	9	16	
e	1	3	5	7	17	



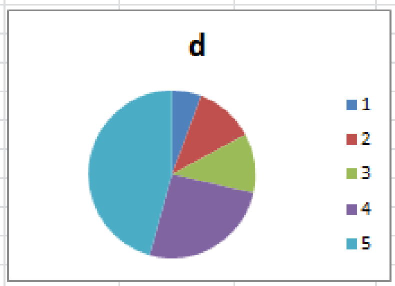
PREGUNTA a



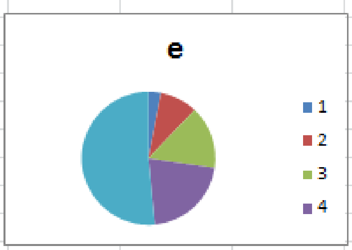
PREGUNTA b



PREGUNTA c



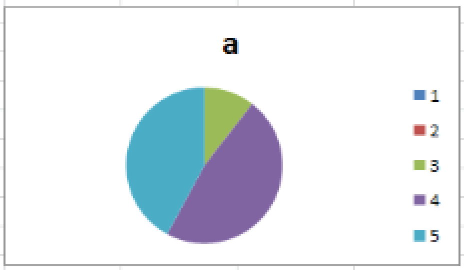
PREGUNTA d



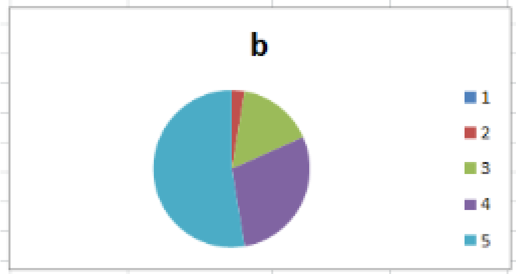
PREGUNTA e

CURSO 704

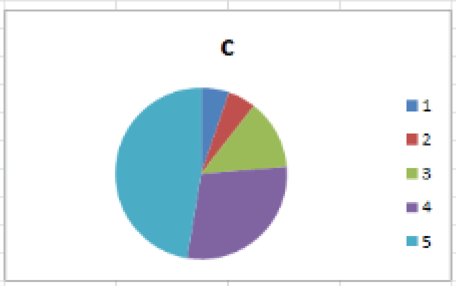
CURSO 704						
	1	2	3	4	5	CALIFICACION
PREGUNTA						
a	0	0	4	18	16	
b	0	1	6	11	20	
c	2	2	5	11	18	
d	0	1	6	13	18	
e	1	2	10	17	8	



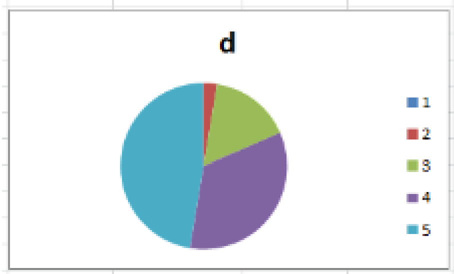
PREGUNTA a



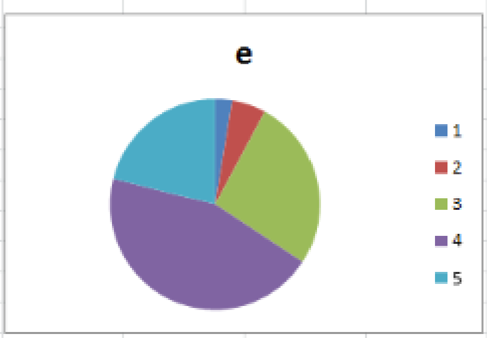
PREGUNTA b



PREGUNTA c



PREGUNTA d



PREGUNTA e