

REPÚBLICA DE COLOMBIA
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

**FORTALECIMIENTO DE LA HABILIDAD MATEMÁTICA: VISUALIZACIÓN EN
ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO**

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en
Educación Matemática

Autor: Elizabeth González González

Bogotá D.C.

2016

REPÚBLICA DE COLOMBIA
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

**FORTALECIMIENTO DE LA HABILIDAD MATEMÁTICA: VISUALIZACIÓN EN
ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO**

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Autor: Elizabeth González González

Directores de tesis:

Oswaldo Jesús Rojas Velázquez (Ph.D.)

Mary Falk de Lozada (Ph.D.)

Bogotá D.C.

2016

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre de 2016

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos a:

- A los doctores Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, por su gran colaboración, dedicación y entrega para con el desarrollo del presente proyecto.
- A la Dra. Mary Elizabeth Falk de Losada, por su colaboración y asesoría en el desarrollo del proyecto, ya que fue ella quien direccionó las ideas de la presente tesis.
- A todos los profesores participes en mi formación académica al Dr. Gerardo Chacón, al Dr. Rafael Lamonedá, a la Dra. Diana Carolina Pérez Duarte y al Dr. Mauro García.
- A mi familia, por su colaboración y paciencia durante el proceso de mi formación profesional.
- A las directivas del colegio Campestre San Diego, quienes muy amablemente me permitieron llevar a cabo y con éxito esta investigación.
- A todos mis compañeros, amigos y demás personas que de una u otra forma colaboraron con la elaboración del proyecto.
- Y al autor de quien permite que los sueños se hagan realidad, a Dios, que me ha animado y motivado a lo largo de mi vida y me ha dado la fortaleza en los momentos difíciles.

DEDICATORIA

A Dios el artífice de mi vida, el dueño y el apoyo de mi existencia, quien conoce mis anhelos, prepara los triunfos y los concede. Este es uno de ellos.

A mis padres, quienes pensaron siempre en ayudarme a labrar un futuro mejor.

A mis hermanos, quienes presentan la amistad verdadera y que me enseñan a diario que la unidad y el apoyo incondicional se demuestran en todos los momentos de la vida.

A todos los profesores y amigos, de quienes además de todo lo que me enseñaron aprendí, que más que ser una excelente profesional es importante ser un mejor ser humano.

SÍNTESIS

En los últimos tiempos, el estudio y el desarrollo de la habilidad visualización en el pensamiento y razonamiento matemático es objeto de numerosas investigaciones, pues le permite al estudiante descubrir las relaciones entre objetos matemáticos, manipular mentalmente figuras en el espacio, relacionar e interpretar imágenes visuales necesarias para la comprensión de temáticas complejas como las pertenecientes a la parte algebraica, geométrica (demostraciones sin palabras) e inclusive interviene de forma favorable en la resolución de problemas retadores en la Educación Básica. De esta manera la visualización contribuye a desarrollar ideas previamente desconocidas y realizar comprensiones avanzadas.

Este trabajo tiene como propósito fortalecer la habilidad matemática visualización, y utilizar las potencialidades que ella ofrece para el logro de un proceso de enseñanza-aprendizaje robusto de los contenidos en grado séptimo. La investigación se lleva a cabo en estudiantes del Colegio Campestre San Diego, quienes participan en el desarrollo de las actividades, sustentadas en la comunidad de práctica de Wenger y en la teoría de resolución de problemas. La implementación de las actividades, sirve como motivación para el estudio de la matemática, constituye una base para el logro de un robusto aprendizaje de los contenidos del grado, mejora la percepción visual de los estudiantes, favorece el desarrollo del pensamiento lógico matemático y el pensamiento espacial, y propicia en ellos la resolución de problemas retadores de la matemática y del contexto.

ABSTRACT

MATHEMATICAL SKILL'S STRENGTHENING: VIEWING IN THE SEVENTH GRADERS

In the last times, the study and development in the thinking and mathematical Reasoning skill, is object of many investigations today, because it allows to the students discover the relationship and connections among the mathematical objects, use mental math in space figures, match and interpret visual and necessary images to understand complex topics like in Algebra, Geometry and also solve difficult problems in the Basic Education in a best way. This way the viewing is very important because it helps to develop unknown ideas and to achieve advance understandings.

The purpose of this work is to give advantage to the mathematical viewing skill and use it to achieve a solid and strong objective in the teaching-learning Process in seventh grade topics. The Investigation is carried out in the Campestre San Diego School students who participate actively in all activities; they were supported in the Wenger's Practice Community and the Problem Solving theory.

The activities implemented are useful like an incentive to mathematics' study, it's the base to achieve a solid learning of these topics and the students improve the Visual Perception, give advantage to the logical mathematical and space skill development.

ÍNDICE	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE	12
1.1. Investigaciones sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica.....	12
1.1.1. Mathematical abilities and mathematical skills	13
1.1.2. Habilidades propias de matemática según bases curriculares de básica 2012	14
1.1.3. Planning, teaching and assessing the curriculum for pupils with learning difficulties. Developing skills	15
1.1.4. Develop problem solving skills in secondary mathematics classroom through digital game design	16
1.1.5. Competencias básicas en educación matemática	17
1.1.6. Pisa 2003. Pruebas matemáticas y solución de problemas	19
1.2. Investigaciones sobre el desarrollo de la habilidad matemática visualización en la Educación Básica.....	21
1.2.1. Mathematics framework for Philippine basic education	21
1.2.2. Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático	22
1.2.3. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para los maestros	24
1.2.4. La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional	25
1.2.5. El grado de visualización un indicador del desarrollo del pensamiento visual .	26
1.2.6. Effect of instruction based on origami spatial visualization, geometry and geometric reasoning achievement.....	29
1.2.7. Las figuras de análisis en el aula de matemática	31
1.2.8. When Less is More, Visualizing Basic Inequalities	32
1.3. Investigaciones sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas, específicamente sobre la visualización en la Educación Básica en Colombia	32
1.3.1. La visualización en tareas de rotación y traslación sobre el plano del videojuego.....	32
1.3.2. Transition to numerical algebraic thinking through teaching strategy algeblocks.....	34
1.3.3. El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.....	35
1.3.4. La visualización en la resolución de patrones	36

Conclusiones del capítulo 1.....	37
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	39
2.1. Desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica	39
2.2. La teoría de la resolución de problemas.....	44
2.3. Comunidades práctica de Wenger	52
2.4. La visualización para la construcción del conocimiento matemático.....	57
2.5. Aprendizaje por descubrimiento	64
2.6. La percepción visual	73
Conclusiones del capítulo 2.....	75
CAPÍTULO 3. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD VISUALIZACIÓN.....	77
3.1. Estructura de las actividades.....	78
3.2. Actividades basadas en problemas para favorecer la habilidad matemática visualización.....	79
3.2.1. Actividad 1. Me familiarizo con la visualización.....	80
3.2.2. Actividad 2. Integrando las habilidades de la visualización.....	89
3.2.3. Actividad 3. Estimulando las habilidades de la visualización	97
3.2.4. Actividad 4. Visualizo y completo.	109
3.2.5. Actividad 5. Aplico a profundidad la visualización.....	120
Conclusiones del capítulo 3.....	128
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	129
4.1. Análisis de los resultados de la habilidad matemática visualización en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego	129
4.1.1. Actividad 1. Me familiarizo con la visualización	129
4.1.2. Actividad 2. Integrando las habilidades de la visualización.....	135
4.1.3. Actividad 3. Estimulando las habilidades de la visualización	140
4.1.4. Actividad 4. Visualizo y completo	146
4.1.5. Actividad 5. Aplico a profundidad la visualización.....	151
4.1.6. Resultados de la encuesta de satisfacción.....	157
Conclusiones el capítulo 4	159
CONCLUSIONES	161
RECOMENDACIONES.....	166
BIBLIOGRAFIA	167

ANEXOS	179
Anexo 1. Encuesta diagnóstica	179
Anexo 2. Solicitud permiso a padres de familia	182
Anexo 3. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 1	183
Anexo 4. Evidencia fotográfica de la actividad 1	184
Anexo 5. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 2	185
Anexo 6. Evidencia fotográfica de la actividad 2	186
Anexo 7. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 3	187
Anexo 8. Evidencia fotográfica de la actividad 3	188
Anexo 9. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 4	189
Anexo 10. Evidencia fotográfica de la actividad 4	190
Anexo 11. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 5	191
Anexo 12. Evidencia fotográfica de la actividad 5	192
Anexo 13. Encuesta de satisfacción a estudiantes	193

INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), a través de su Sistema Educativo Nacional tiene como objetivos fundamentales fomentar las capacidades de razonamiento, sistematizar los procesos y fortalecer las estructuras mentales en los estudiantes, haciendo énfasis permanente en innovación, excelencia académica y calidad en todos los procesos académicos. En este proceso es importante la labor del docente, quien debe fomentar el desarrollo y fortalecimiento de las habilidades cognitivas para encausar de manera efectiva la información, que conlleve al estudiante a tomar decisiones e interactuar asertivamente en su entorno sociocultural.

Algunas instituciones en la actualidad distorsionan el fin de la educación, enfocándose a enseñar contenidos de forma tradicional, limitando el desarrollo de las habilidades para pensar, fomentar la creatividad de los estudiantes, tomar decisiones, hacer inferencias, entre otras. Este hecho es más evidente en las diferentes ramas de la matemática y de sus aplicaciones que se estudian en el grado, pues requieren un alto nivel de abstracción, de relación de partes con el todo, de análisis de problemas, examinación de alternativas procedimentales y hasta la consideración racional de los errores, porque de ellos también se aprende.

Se quiere formar en el estudiante una estructura mental sólida, que le permita realizar comprensiones y abstracciones avanzadas y luego que sea capaz de argumentar sus ideas socializando resultados de una serie de actividades contextualizadas, activas, retadoras, motivantes y creativas. El diseño y ejecución de estas actividades realizadas debe llevar una lógica en su estructura didáctica y

metodológica coherente con los niveles y que además genere en el estudiante un aprendizaje significativo, consciente y sistemático de manera que comprenda, explique y aplique la matemática como una herramienta para resolver diversidad de problemas reales de su quehacer cotidiano.

Al respecto Sánchez (1995) plantea que los problemas de rendimiento en el área de matemática de Educación Básica, aumentan conforme se alcanzan niveles más avanzados de escolaridad, se vuelven apremiantes en la universidad y además están presentes en el desempeño de las personas en su vida profesional. Además reporta que las dificultades tienen relación con la carencia de habilidades para procesar información y, por tanto, sugiere que es en el desarrollo de habilidades de pensamiento donde deben buscarse las soluciones de la deficiencia en el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos. Una de las habilidades básicas de la matemática, que aporta a mejorar estas dificultades es la visualización.

Para Hitt (2002) “La visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado”¹.

El desarrollo de la habilidad de visualización constituye uno de los sustentos para lograr un proceso de enseñanza aprendizaje robusto de los contenidos de grado séptimo, y a su vez el trabajo en el aula contribuye a su desarrollo. La habilidad de

¹ Hitt. F. (2002) Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American. Chapter and Cinvestav-IPN. México 2002. p. 8.

visualización le propicia a los estudiantes oportunidades para pensar y hacer matemática. Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) expresan que "... la visualización posibilita crear en la mente una imagen visual de un concepto abstracto"². Cuestiones estas básicas para fortalecer el conocimiento de los estudiantes en este grado.

En las últimas décadas ha sido una tendencia en la enseñanza de las matemáticas el desarrollo y el fortalecimiento de las habilidades matemáticas con el objetivo principal de solucionar problemas, entre ellas está la habilidad: visualización. Esta habilidad es una poderosa herramienta para mejorar la comprensión de una variedad de conceptos matemáticos, además la visualización cumple otro papel importante, como el de apoyar el crecimiento del pensamiento matemático.

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, el desarrollo de las habilidades matemáticas, específicamente la habilidad visualización, en la Educación Básica ha ocupado a los investigadores, en diferentes reuniones y congresos. Estas temáticas han sido abordadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros. En estas reuniones se ofrecen cursos, conferencias y se

² Domenicantonio, R. Costa, V. y Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Unión, Revista Iberoamericana de Educación. Septiembre de 2011, Número 27, páginas 75-87, ISSN: 1815-0640

presentan ponencias que reflejan las dificultades y avances de las temáticas referidas en la escuela.

En el ICME 13, Rivera (2016) lidera el grupo tema de estudio (TSG) 20, con el propósito de intercambiar problemas y experiencias relacionados con la visualización en el aprendizaje y enseñanza de la matemática, que lo lleven a un conocimiento significativo. En el CIAEM, Chalé (2015) puntualiza “... *No hay duda de la participación de los aspectos visuales en el proceso de construcción del conocimiento matemático, además la visualización puede ser central, no solamente en áreas que están asociadas con las imágenes visuales (tal como la geometría), sino también en aquellas donde un argumento simbólico formal es necesario (por ejemplo el álgebra)*”³.

También en el CIAEM, Acevedo (2015) presenta “... *algunos resultados de la investigación, que buscaba aprovechar dichos procesos y habilidades de visualización en una aproximación metodológica que pretende acercar intuitivamente a estudiantes a los conceptos de rotación y traslación*”⁴.

La visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemática ha tenido un desarrollo creciente, avalado en las investigaciones de autores, como: Zimmermann y Cunningham (1991), Guzmán (2002 y 2010), Arcavi (2003), Presmeg (2006), Cantoral (2002) entre otros. En sus estudios, estos investigadores aportan propuestas de modelos didácticos, estrategias didácticas, metodologías y

³ Chale, S. (2015). La visualización en la resolución de patrones. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, p 5.

⁴ Acevedo, J (2015). La Visualización en tareas de Rotación y Traslación sobre el plano del videojuego. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, 2015. p 2.

actividades, todas dirigidas a minimizar las dificultades en la enseñanza aprendizaje de los contenidos matemáticos en la escuela.

La tendencia en la enseñanza de la Matemática ha sido la de fortalecer la formación y desarrollo de habilidades, Cantoral (2002) reconoce que la visualización como habilidad, es un *“... aspecto que está siendo descuidado en la enseñanza - aseverando que- si queremos lograr que nuestros alumnos aprendan matemáticas, inevitablemente tienen que visualizar”*⁵. En este proceso se hace necesario implementar estrategias, plantear propuestas, sugerencias y actividades dirigidas a mejorar resultados en competencias matemáticas (ICFES y PISA), y que empleen estrategias en la visualización, que fomenten el razonamiento visual y espacial en el contexto de la resolución de problemas. De Guzmán (2010) sostiene que *“Al ser nuestra percepción prioritariamente visual no es de extrañar que el apoyo en lo visual esté presente en las tareas de matematización”*⁶.

Por su parte Presmeg (2006) afirma que: *“... hay pocos estudios específicos que relacionen visualización con talento matemático, pocos han aportado evidencias empíricas para saber qué aspectos de instrucción ayudan a profesores a mejorar la instrucción de estos alumnos”*⁷.

En concordancia con lo planteado, esta investigación se enfocará a estudiar el desarrollo de las habilidades de pensamiento, específicamente la visualización. Y

5 Cantoral, R. (2002). Desarrollo del tiempo matemático. Conferencia: “Visualización y pensamiento matemático; estrategias de enseñanza”. México, p. 146.

⁶ De Guzmán, G. (2010). Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora. <https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionValencia2010/Visualizacion.pdf>, p 5.

⁷ De Guzmán, G. (2010). Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora. <https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionValencia2010/Visualizacion.pdf>, p 8.

consecuentemente, el propósito es fortalecer la visualización, en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego.

A través de los resultados de encuestas diligenciadas a docentes (ver anexo 1) y la experiencia de siete años de trabajo de la autora de la investigación, se pudo constatar como dificultades las siguientes:

- ✓ Los estudiantes presentan dificultad para establecer regularidades y patrones de comportamiento, usar distintas formas de visualización y llevar a cabo procesos de generalización.
- ✓ Existe docentes que desconocen las potencialidades que puede ofrecer la habilidad matemática visualización.
- ✓ Es limitada la habilidad de visualizar información en el contexto de la resolución de problemas.
- ✓ Los docentes carecen de estrategias y métodos para fortalecer la habilidad de visualización en los estudiantes.

Además a continuación se evidencia lo manifestado por algunos docentes que orientan matemáticas, lo cual nos corrobora la pertinencia de la investigación (ver Figura 1).

2. ¿Conoce los tipos de habilidades que ofrece la visualización? Si No
 Si marco Si especifique los tipos que conoce y desarrolla en clase: Abstracción

3. ¿Cuáles son las dificultades que usted observa en los estudiantes con respecto al desarrollo de la habilidad visualización?
No son capaces de Abstrger o retomar datos de situaciones gráficas

4. ¿Cómo lograría usted el desarrollo de la habilidad visualización en los estudiantes según su experiencia?
Plantando estrategias en la solución de problemas donde puedan poner en practica esta habilidad

5. ¿Cómo evidenciaría o explicaría a través de una situación matemática el uso de la visualización en el contexto de resolución de problemas?
A través de un gráfico donde el estudiante obtenga los datos del mismo para lograr resolverlo.

2. ¿Conoce los tipos de habilidades que ofrece la visualización? Si No
 Si marco Si especifique los tipos que conoce y desarrolla en clase: Comprensión, ejecución y familiarización

3. ¿Cuáles son las dificultades que usted observa en los estudiantes con respecto al desarrollo de la habilidad visualización?
falta de interés, falta de motivación de lo que proyectan y es necesario sentir que el tema es bueno

4. ¿Cómo lograría usted el desarrollo de la habilidad visualización en los estudiantes según su experiencia?
Por medio de captar su atención aplicando un tema que permita trabajar de forma dinámica.

5. ¿Cómo evidenciaría o explicaría a través de una situación matemática el uso de la visualización en el contexto de resolución de problemas?
Presentando ejercicios donde tengan que calcular superficies de distintos geometros.

Figura 1. Resultados de la encuesta diagnóstica a dos docentes.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo estructurar actividades de tal forma que se fortalezcan la habilidad visualización, en estudiantes de grado séptimo del colegio Campestre San Diego?

Se tiene como **objeto de estudio** el desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica y se infiere como **objetivo general** fortalecer la habilidad

matemática visualización, en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego y a su vez se pretende como **objetivo específico**:

- ✓ Detectar errores y dificultades presentes en el proceso de visualización.
- ✓ Evaluar si las actividades y metodologías implementadas logran un aprendizaje eficaz y significativo.
- ✓ Presentar una metodología que logre el afianzamiento de la habilidad matemática de visualización.

Con respecto al objetivo general, el **campo de acción** se refiere al desarrollo de la habilidad matemática visualización en la Educación Básica.

Para lograr el cumplimiento del objetivo y la solución del problema anteriormente mencionado, se tiene la siguiente **hipótesis científica**: actividades basadas en problemas retadores, en la comunidad práctica de Wenger, la percepción y el aprendizaje por descubrimiento como un medio para la construcción del conocimiento matemático, propician el desarrollo de la habilidad matemática visualización en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego.

Como guía para el desarrollo de la tesis se presentan las siguientes tareas de investigación, con el fin de lograr resolver el problema y lograr el objetivo propuesto.

- ✓ Determinar el estado del arte referente a las habilidades matemáticas, específicamente sobre la visualización en la Educación Básica Secundaria.
- ✓ Determinar el marco teórico que sustenta el desarrollo de las habilidades matemáticas, específicamente sobre la visualización en la Educación Básica Secundaria.

- ✓ Diseñar actividades basadas en problemas retadores, que propicien el desarrollo de la habilidad matemática de visualización en los estudiantes de grado séptimo del colegio Campestre San Diego de la Educación Básica Secundaria.
- ✓ Valorar la viabilidad de las actividades expuestas para el fortalecimiento de la habilidad mencionada.

Metodología de la investigación

Para el desarrollo de la presente investigación se tiene en cuenta aspectos como:

- ✓ Tipo de metodología. En la tesis se asume la investigación cualitativa, pues es un diseño flexible a partir de la información, que no implica un manejo estadístico riguroso, pues su estructura se orienta más al proceso, que a la obtención de resultados numéricos.
- ✓ Enfoque de investigación-acción. La investigación es un proceso dialógico que debe romper la relación de dependencia intelectual por un modelo de relación horizontal con las personas investigadas.
- ✓ Población y la muestra. La población la conforman los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego de la ciudad de Duitama y la muestra por el grupo de estudiantes de grado séptimo C. Se implementarán las actividades al grado 7C el cual consta de 31 estudiantes.

El aporte práctico radica en un sistema de actividades basadas en problemas retadores, la colaboración y la interacción a través de la comunidad de práctica de Wenger, los referentes de la percepción y el aprendizaje por descubrimiento, para

fortalecer la habilidad visualización, en estudiantes del Colegio Campestre San Diego de la ciudad de Duitama.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y 13 anexos.

Los capítulos se han desarrollado de la siguiente manera:

- ✓ El capítulo 1, hace referencia a las investigaciones sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica, específicamente la habilidad visualización en estudiantes de grado séptimo, en el mundo y en Colombia.
- ✓ El capítulo 2, precisa el marco teórico en el cual se sustenta la investigación: la teoría de resolución de problemas y problemas retadores, el aprendizaje por descubrimiento, la percepción, las Comunidades de Práctica de Wenger.
- ✓ El capítulo 3, explicita la estrategia a desarrollar y se propone un sistema de actividades encaminadas a fortalecer la habilidad visualización en los estudiantes de grado séptimo.
- ✓ Por último, el capítulo 4 presenta un análisis de los resultados obtenidos al aplicar las actividades que fueron diseñadas para lograr el fortalecimiento de la visualización.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

La actividad matemática, se manifiesta cuando el individuo está en condiciones de plantearse, interpretar y resolver un problema o situación poniendo en funcionamiento las destrezas o habilidades que dispone en cuanto al contenido de los conceptos, propiedades y procedimientos de carácter esencialmente matemáticos. El desarrollo de las habilidades permite generar estructuras cognitivas, estimular y desarrollar la capacidad para organizar y relacionar las ideas y afianzar capacidades mentales cada vez más complejos, que permitan al estudiante entender y explicar los eventos de su entorno matemáticamente. En este capítulo se abordan las investigaciones relacionadas al desarrollo de las habilidades matemáticas, particularmente de la visualización en el mundo y en Colombia, en la Educación Básica.

1.1. Investigaciones sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica

Las habilidades básicas del pensamiento, son capacidades mentales necesarias para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en el grado séptimo. Por ello, el aplicar los procesos específicos que llevan un orden secuencial en el desarrollo de contenidos matemáticos escolares, conlleva a la resolución de problemas y/o ejercicios de una forma dinámica, lógica y esquematizada, para luego llegar a un aprendizaje más perdurable, significativo y de mayor aplicabilidad en la toma de decisiones (Zerpa, 2011). A continuación se hace referencia a las investigaciones sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica.

1.1.1. Mathematical abilities and mathematical skills⁸

Borovik y Gardiner (2006) insisten en que para desarrollar las habilidades matemáticas con eficacia, hay que aprovechar estas capacidades en los momentos apropiados, ya que pueden responder a procedimientos y algoritmos formales. En este proceso hay momentos que pueden ser motivados por el descubrimiento de una nueva actividad matemática: la generalización; y es lo que pretende la investigación, desarrollar en el estudiante habilidades que pueda utilizar en grados superiores para la solución de problemas en contexto.

En Gran Bretaña los maestros de la escuela secundaria prefieren utilizar en sus clases de matemáticas ejemplos cercanos a los problemas que aparecen en los exámenes reales de competencias con el propósito de conocer la estructura y nivel de los mismos, en la mayoría de ocasiones deben desglosar el problema a algunos estudiantes para su comprensión y solución (Borovik y Gardiner, 2006).

Para estos investigadores resulta sorprendente que algunos estudiantes tienen una capacidad de gran alcance para la visualización, que les permite al instante "ver" la solución; otros la observan después de tener dificultades para expresar su respuesta. En este proceso existen niños a esta edad que poseen la capacidad para abreviar, o para "comprimir" el proceso de pensamiento y puede conducir a un niño a no ser comprendido por un profesor sencillamente porque no da todos los detalles de la solución, omitiendo aquellas que son demasiado evidentes y poco interesantes para

⁸ Borovik, A. y Gardiner, T. (2006). Mathematical Abilities and Mathematical Skills. World Federation of National Mathematics Competitions Conference 2006 Cambridge, England 22–28 July 2006. Recuperable el 10 de abril de 2016 en la URL: <http://www.wpr3.co.uk/wfnmc> <http://www.maths.manchester.ac.uk/~avb/pdf/abilities2007.pdf>

él. Los criterios dados por Borovik y Gardiner (2006) son considerados para el desarrollo de las actividades de la presente tesis.

1.1.2. Habilidades propias de matemática según bases curriculares de básica 2012⁹

El documento hace énfasis en el desarrollo de los conceptos y las habilidades básicas en Matemática, en la cual afirma la necesidad de que el estudiante las descubra y las fortalezca, explorando y trabajando primeramente en ámbitos numéricos y geométricos. De esta manera se construye una base sólida para comprender los conceptos de número y sus operaciones, y también los conceptos relacionados con medición, datos y geometría.

“En la Educación Básica se busca desarrollar el pensamiento matemático. En este desarrollo, están involucradas cuatro habilidades interrelacionadas: resolver problemas, argumentar y comunicar, representar y modelar. Todas ellas tienen un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver los problemas propios de la matemática (rutinarios y no rutinarios) y de otros ámbitos”¹⁰.

Al resolver problemas los estudiantes se ven obligados a aplicar diferentes estrategias para su solución como ensayo y error, transferencia desde problemas similares ya resueltos, entre otras. Además comparan diferentes vías de solución, las socializan y evalúan la pertinencia y validez de su respuesta.

⁹ Henriquez, E. (2014). Habilidades propias de matemática según bases curriculares de básica 2012. Recuperado el 9 de octubre de 2016 en la URL: <https://prezi.com/7le8yg5klq6u/habilidades-propias-de-matematica-segun-bases-curriculares-de-basica-2012/p.1>

¹⁰ Henriquez, E. (2014). Habilidades propias de matemática según bases curriculares de básica 2012. Recuperado el 9 de octubre de 2016 en la URL: <https://prezi.com/7le8yg5klq6u/habilidades-propias-de-matematica-segun-bases-curriculares-de-basica-2012/>, p.10.

La habilidad de comunicar y argumentar se emplea al intentar convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos, también en la capacidad de detectar afirmaciones equivocadas. Las dos últimas habilidades consisten en construir modelos, ya que las matemáticas suelen requerir del manejo de conceptos y métodos matemáticos avanzados, y sumado a esto, manejar una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto.

Cuando el estudiante resuelve un problema puede enfrentarse a situaciones desafiantes que demandan, para su solución, el uso de diferentes habilidades, destrezas y conocimientos que no siguen esquemas prefijados y, de esta forma, ayuda a desarrollar la confianza en sus capacidades, de aprender y de enfrentar situaciones forjando actitudes positivas hacia el aprendizaje.

1.1.3. Planning, teaching and assessing the curriculum for pupils with learning difficulties. Developing skills¹¹

El estudio proporciona orientación sobre el desarrollo de habilidades, a través del currículo. Explica y da ejemplos de clave, habilidades funcionales, habilidades para el aprendizaje, las habilidades de pensamiento, habilidades personales y otras prioridades que pueden ser importantes en la planificación del plan de estudios para los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Expone los fuertes vínculos que presentan las habilidades de resolución de problemas con las habilidades de pensamiento.

¹¹ Qualifications and Curriculum Authority (2009). Developing skills, Planning, teaching and assessing the curriculum for pupils with learning difficulties, Printed in Great Britain. Recuperado el 8 de septiembre de la URL http://dera.ioe.ac.uk/19905/1/P_scales_developing_skills.pdf

Esta investigación se dirige a ayudar a los estudiantes con dificultades de aprendizaje a desarrollar un pensamiento más eficaz e independiente. También propone que el personal docente puede planear maneras para tomar parte en las actividades de resolución de problemas que motivan, desafían y estimulan la atención de los estudiantes. La investigación también implica, la percepción, el pensamiento, la acción y la evaluación. Estos aspectos se tienen en cuenta en el diseño de las actividades de la presente tesis.

1.1.4. Develop problem solving skills in secondary mathematics classroom through digital game design¹²

Tam (2010) en su estudio examinó el uso del diseño de juegos digitales y su proceso de desarrollo en el aula de matemática secundaria para desarrollar en los estudiantes "habilidades de resolución de problemas matemáticos. A través del juego los estudiantes fueron capaces de adquirir nuevos conceptos matemáticos y aplicar los distintos conocimientos adquiridos para resolver diferentes problemas en todo el diseño de las actividades. El proceso de desarrollo del juego fue motivador y promovió en los estudiantes actitudes e intereses en el aprendizaje. Sin embargo, las habilidades complejas requeridas en el desarrollo del proceso de juego hicieron desalentar a algunos estudiantes.

Según Tam (2010) se espera que las instituciones prepararen a los educandos para un mundo diferente, un siempre cambiante de la sociedad basada en el conocimiento, donde las habilidades matemáticas son cada vez más importantes.

¹² Tam, L. (2010). Develop problem solving skills in secondary mathematics classroom through digital game design. (Thesis). University of Hong Kong, Pokfulam, Hong Kong SAR. Retrieved from http://dx.doi.org/10.5353/th_b4746926.

Parece que hay una falta de correspondencia entre las habilidades y conocimientos que se enseña en la escuela y las habilidades necesarias para llevar una vida exitosa en nuestra sociedad.

El objetivo del estudio realizado en países orientales es investigar si se puede aprovechar el proceso creativo de diseño de juegos digitales y el proceso de desarrollo para ayudar a la nueva generación en desarrollar el importante problema referido a fortalecer habilidades en matemáticas. En la tesis no se hace uso de tecnología para aprovechar el proceso creativo en los estudiantes, este proceso se lleva a cabo con materiales manipulables, para la resolución de los problemas que conforman las actividades.

1.1.5. Competencias básicas en educación matemática¹³

En el estudio se presentan ejemplos de preguntas realizadas en la evaluación diagnóstica (Junta de Andalucía), donde González (2003) acentúa el desarrollo de competencias como proceso continuo a lo largo de la vida escolar, las cuales constituirían una referencia válida tanto en la Educación Primaria, como en segundo año de la Educación Secundaria Obligatoria.

“... Además de lo establecido anteriormente, la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Educación Primaria y Secundaria debe tener en cuenta las siguientes consideraciones (González y Gallego (1997)):

a). La mayor parte de lo que se haga en el aula debe tener sentido para los alumnos;

¹³ González, M. (2003). Competencias básicas en educación matemática. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga

b). *Educación en matemáticas / aprender matemáticas requiere de un proceso constructivo y activo en el que se reduzca a lo indispensable la asimilación pasiva de información.*

c). *Se ha de conceder importancia a los conocimientos intuitivos, a las relaciones entre las matemáticas y la realidad o a valorar la potencialidad de preguntar ¿por qué?;*

d). *Mediante la MOTIVACIÓN adecuada, se debe procurar que el alumno se implique en las actividades, es decir, se debe conseguir la “devolución” al alumno de la responsabilidad de lo que se hace en el aula (el alumno debe “hacer suyas” las tareas).*

e). *Hay que atender a dos frentes simultáneamente y en el siguiente orden de importancia o atención:*

- *Comprensión, utilidad y significados del conocimiento matemático (intención motivadora y de conexión con las experiencias y conocimientos de los alumnos);*

- *Aspectos culturales e instrumentales del conocimiento matemático (elementos básicos, terminología, conceptos, validación, institucionalización, consolidación, práctica y extensión del conocimiento matemático; intención "cultural", "informativa" e "instrumental" del conocimiento)"¹⁴*

González (2003) aduce que la matemática ostenta unos valores formativos innegables, tales como:

¹⁴ González, M. (2003). Competencias básicas en educación matemática. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga, p. 48.

- ✓ La capacidad para desarrollar el pensamiento del estudiante para determinar hechos, construir relaciones, deducir consecuencias, potenciar el razonamiento y la capacidad de acción simbólica, el análisis crítico, la curiosidad, la persistencia al no darse por vencido en la solución de problemas. También la incredulidad, pues se cuestiona constantemente la lógica y la veracidad de sus conjeturas, la rigurosidad en la medida que permite demostrar de manera formal sus resultados, la imaginación, la creatividad, la sistematicidad, entre otros.
- ✓ Permiten potenciar el trabajo científico en la medida en que se combina el uso de habilidades en la solución de situaciones con el ejercicio de la crítica y discusión de argumentos e ideas.

1.1.6. Pisa 2003. Pruebas matemáticas y solución de problemas¹⁵

En este estudio se expone la falta de dominio del conocimiento matemático en la solución de pruebas en las que intervienen problemas jerarquizados según la integración de habilidades simultáneas que un estudiante debe escoger y usar a la vez. La preocupación empieza por los profesores de primaria al conocer los resultados de PISA y por las carencias estructurales y conceptuales que se detectan desde esos niveles. Esta preocupación se agudiza al observar los resultados de los estudiantes en la educación secundaria, de sus carencias y su repercusión sobre la enseñanza de las matemáticas.

“Este concepto de competencia en el estudio PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que

¹⁵ Alvariño, J. (2005). Pruebas de matemáticas y solución de problemas. Madrid 2005, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) Ministerio de Educación y Ciencia. España.

en el dominio formal de los conceptos y destrezas, es decir, pone el acento en capacidades, habilidades y ejecución de procedimientos. Destaca el aspecto funcional y pragmático del conocimiento matemático que se subraya en este estudio.

Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso. Los tipos de competencias seleccionados permiten establecer variables de proceso para el estudio PISA; esas competencias son:

- 1. Pensar y razonar.*
- 2. Argumentar.*
- 3. Comunicar.*
- 4. Modelar.*
- 5. Plantear y resolver problemas.*
- 6. Representar.*
- 7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones”¹⁶.*

Estas competencias son tenidas en cuenta en esta tesis para la elaboración de las actividades y se fortalecen en la medida en que se aplican y se socializan las actividades propuestas.

¹⁶ Alvariño, J. (2005) Pruebas de matemáticas y solución de problemas. Madrid 2005, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) Ministerio de Educación y Ciencia. España

1.2. Investigaciones sobre el desarrollo de la habilidad matemática visualización en la Educación Básica

1.2.1. Mathematics framework for Philippine basic education¹⁷

Brawner (2011) presenta recursos para diseñar e implementar programas de matemáticas orientados a capacitar a los estudiantes a "aprender a aprender" y hacer que desarrollen sus capacidades utilizándolas en su la vida cotidiana. Además proporciona a los estudiantes las habilidades esenciales en el razonamiento, toma de decisiones y resolución de problemas para ayudar a dar sentido a aspectos del contexto que cambia rápidamente. Las estrategias tienen en cuenta sólo los grados 1-10.

Con respecto a la geometría en Educación Básica, se enfatiza permitir a los estudiantes utilizar la visualización espacial, el razonamiento y modelos geométricos para resolver problemas rutinarios y no rutinarios. Brawner (2011) también invita a explorar características y propiedades presentes en varias formas geométricas tridimensionales y formular relaciones geométricas entre las transformaciones y luego usar pruebas geométricas para desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior, lo que se conoce como (HOTS).

Estas habilidades de orden superior en la visualización permiten realizar y validar conjeturas sobre las transformaciones y combinaciones de formas, a la vez que comprender las propiedades geométricas de figuras y demostrar varias conexiones geométricas y algebraicas.

¹⁷ Brawner, F. (2011). Mathematics framework for Philippine basic education. Science Education Institute, Department of Science and Technology (SEI-DOST) and the Philippine Council of Mathematics Teacher Education (MATHTED), Inc., Manila, Philippines.

Según Brawner (2011) dentro de los problemas propuestos se le pide al estudiante describir los patrones y caminos de las imágenes dentro de un mosaico, usar características y propiedades de dos y tres figuras geométricas tridimensionales y mostrar descripciones de lugares, para resolver problemas del mundo real, además de investigar y predecir resultados de combinar las subdivisiones de figuras y utilizar estos resultados para resolver problemas relacionados.

Las actividades obligan al estudiante a usar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y adentrarse en la relación que presenta con la parte algebraica, en algunas ocasiones se debe construir pruebas informales de las ideas y relaciones geométricas. Es criterio de la autora de esta tesis, considerar las habilidades de orden superior de Brawner (2011), para el desarrollo de las actividades.

1.2.2. Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático¹⁸

Ramírez (2012) presenta un estudio referido a las habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes, que presentan un talento para la matemática, donde intervienen estudiantes de secundaria, además de describir las capacidades visualizadoras de los estudiantes y analizar la evolución de estas en cada uno de ellos. Su investigación la desarrolla en campo de la geometría, enfatizando en que trabajar con imágenes facilita de manera esencial el razonamiento numérico y geométrico y se pueden concatenar más propiedades de las figuras y cuerpos sólidos.

¹⁸ Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

El autor también tiene en cuenta las habilidades sugeridas por Del Grande (1990), las cuales se relacionan a continuación:

- “1. Coordinación óculo-manual: es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.*
- 2. Identificación visual: es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. El estudiante centra la atención en la figura, sin distraerse con estímulos irrelevantes.*
- 3. Conservación de la percepción: es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, tales como forma y tamaño, a pesar de la variabilidad dada por el movimiento.*
- 4. Reconocimiento de posiciones espaciales: es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo, es decir el observador.*
- 5. Reconocimiento de relaciones espaciales: es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.*
- 6. Discriminación visual: es la habilidad que permite comparar dos o más objetos identificando sus semejanzas y diferencias.*
- 7. Memoria Visual: es la habilidad para recordar, las características visuales y de posición que tenía un conjunto de objetos que estaba a la vista pero que ya no se ve o que ha sido cambiado de posición”¹⁹.*

¹⁹ Del Grande (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6). pp. 14-20.

1.2.3. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para los maestros²⁰

Godino (2003) expone a los docentes los diferentes problemas retadores, en los cuales se puede apreciar el uso de la visualización en la parte estadística, que deben saber los estudiantes, pues presenta diversas gráficas que constituye un sistema diferente de representación de los datos. Por ejemplo, mientras el gráfico de sectores visualiza mejor la proporción que cada dato representa del total (frecuencia relativa, fracción como parte-todo), el gráfico de barras visualiza mejor la frecuencia absoluta, así como la idea de escala numérica para las frecuencias. En el caso de datos numéricos también visualiza mejor la tendencia central (moda) y dispersión.

También describe como en los contenidos y procesos geométricos de grados sexto a octavo (11-13 años) es conveniente usar la visualización, el razonamiento espacial, y la modelización geométrica para resolver problemas. También sugiere que es conveniente desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas; especificar posiciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación; aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.

En este documento se les pide a los estudiantes colocar cuatro cubos en posición de "T" y dibujar las vistas (alzado, planta y perfil) de la figura tridimensional. Estos problemas son característicos de la visualización e invitan a pensar, a manipular mentalmente un objeto tridimensional. La autora de esta tesis considera usar

²⁰Godino, J. (2003). Matemáticas y su Didáctica para Maestros Manual para el Estudiante. Proyecto Edumat-Maestros. Edición febrero del 2003. Recuperado el 10 de octubre de la URL: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

problemas retadores en los que intervienen figuras tridimensionales que incluyan diferentes tipos de vistas.

1.2.4. La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional ²¹

Montecino (2009), desarrolla la investigación con el fin de detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial e identificar si la visualización espacial es utilizada como herramienta en actividades que involucran lo tridimensional. La muestra en total fue de 76 estudiantes, de los cuales 59 se encontraban cursando séptimo y octavo básico y 17 grado tercero y cuarto.

“La primera actividad se aplicó a los niveles de séptimo y octavo año básico, con el fin de establecer un punto de referencia sobre las habilidades para desenvolverse en el espacio. Por otro lado, al indagar acerca de la visualización espacial de los estudiantes que se encuentran cursando los últimos años de enseñanza escolar, consideramos que el primer problema no era muy adecuado ya que anticipamos, por experiencias previas, que los estudiantes se entraparán en algunas propiedades, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , distinguiendo la presencia de obstáculos que pudiesen impedir hallar la solución del problema planteado. Es por esta razón que se decide aplicar el segundo problema a los estudiantes de tercero y cuarto medio.

Teniendo en cuenta que vivimos personalmente esta situación pudiendo constatar que no sólo a estudiantes de enseñanza escolar o superior les es difícil pensar en

²¹ Montecino, A. (2009). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional. México.

*tres dimensiones, sino que también a profesores, filósofos, psicólogos, que compartieron esa experiencia con nosotros. Sin embargo, para corroborar nuestras conjeturas iniciales sobre el primer problema, decidimos aplicarlo, durante el transcurso de la clase, a tercer año medio.”*²²

En los resultados obtenidos se pudo deducir la presencia de dificultades en los estudiantes en la representación de lo tridimensional y, más aún, acudir a ella para encontrar la solución de una problemática determinada, y al no formalizar la tridimensionalidad durante la enseñanza escolar se obstaculiza la comprensión de ésta. Se observó que la mayoría de los estudiantes no lograron desprenderse de un pensamiento bidimensional. En el proyecto de investigación que nos ocupa se tendrán en cuenta si se presentan dificultades coincidentes con el documento señalado.

1.2.5. El grado de visualización un indicador del desarrollo del pensamiento visual²³

Díaz (2010) presenta una propuesta metodológica para medir el grado de visualización en estudiantes en todos los grados de escolaridad los cuales frecuentemente están realizando actividades referentes a la resolución de problemas matemáticos. Se destacan en este documento los diferentes estilos cognitivos de los estudiantes y la sugerencia de interpretar gráficamente la acción de la fuerza de la

²² Montecino, A. (2009). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional. México, p. 3.

²³ Díaz, M, (2010). *El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 337-344). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

lógica (las generalizaciones) y de la fuerza del pensamiento visual, que intervienen en todo tipo de actividad matemática.

Los resultados de la investigación de Díaz, coinciden con lo que afirma Presmeg (1999), al señalar que no cualquier representación garantiza que el proceso de visualización sea efectivo y aunque la visualización es relevante en la actividad matemática, esta no es inmediata.

De lo anterior, surge como necesario el desarrollo del pensamiento visual autónomo tanto en estudiantes como profesores, pues se reconoce como una vía muy fructífera para el desarrollo del pensamiento matemático. También expresa el autor de documento que antes de emprender alguna acción en el sistema de enseñanza, es necesario determinar las habilidades y hábitos que pueden constituir la capacidad de visualizar. Porque sólo con este conocimiento se podrán ejercer acciones válidas para el desarrollo.

Se tendrán en cuenta los resultados obtenidos del estudio de Díaz y se observará si aquellos resultados son coincidentes en el desarrollo del proyecto.

1.2.6. The role of visual representations in the learning of mathematics²⁴

Arcavi (2003), sostiene que la visualización, se refiere al proceso de creación, interpretación y la reflexión sobre las imágenes y enfatiza en que este proceso está ganando un mayor terreno en las matemáticas y la educación matemática. En el desarrollo de su trabajo hace un intento por definir la visualización, ejemplificar y reflexionar sobre las diferentes potencialidades que ella ofrece. Al mismo tiempo

²⁴ Arcavi, A (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics. México.

presenta las limitaciones y las posibles fuentes de dificultad presentes en los estudiantes.

También es importante señalar que Arcavi (2003), presenta diversos ejemplos en los cuales la visualización está inmersa en problemas referidos a la parte geométrica y estadística y de alguna manera también se relacionan con la parte numérica y variacional.

Se tendrán en cuenta los aportes dados por Arcavi (2003), ya que en ellos realiza un cercano intento por definir la visualización y esclarecer la importancia que esta habilidad fortalece el pensamiento matemático.

1.2.7. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis²⁵

En este trabajo De Guzmán (2008) responde a preguntas relacionadas con la habilidad la cual estamos investigando, ellas son: ¿qué es la visualización en Matemáticas?, ¿cuáles son los diferentes tipos de visualización?, ¿cuál ha sido el papel de la visualización a lo largo del tiempo?, ¿cuál es la situación actual de la visualización en el ámbito escolar y universitario? Además examina algunas de las influencias que la visualización ha tenido en el desarrollo de las matemáticas y su enseñanza, en particular, la exploración de su estado actual. También analiza el papel particular que pueda tener en lo que se refiere al análisis matemático y las dificultades que rodean el uso correcto de la visualización, con o sin el ordenador. Por último, muestra ejercicios de visualización con el fin de presentar ejemplos de su

²⁵ De Guzmán, M. (2008). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. Recuperado de la URL: <http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf>

papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Él puntualiza en que esta habilidad ha sido una técnica utilizada generalmente por los matemáticos más creativos de todos los tiempos para presentar sus contribuciones a las ciencias, es decir, implícitamente a través de estas pequeñas muestras extraídas de la historia de las

La visualización como estructura fundamental del conocimiento humano, está muy fuertemente condicionada por elementos representativos visuales, intuitivos, simbólicos, y dada la naturaleza de las matemáticas y sus efectos de obtener una imagen, del mundo a nuestro alrededor, ya que todo a nuestro alrededor está influenciado por las imágenes.

Para esta investigación el aporte de Guzmán será tenido en cuenta sobre todo en el marco teórico ya que expone la visualización a lo largo de la historia, la importancia que tiene en el ámbito escolar y su continuidad en el universitario.

1.2.6. Effect of instruction based on origami spatial visualization, geometry and geometric reasoning achievement²⁶

En Turquía Arici & Aslan (2013) realizan un trabajo, a un grupo de 184 estudiantes, el cual tiene como objetivo de identificar el efecto de la instrucción basada en la geometría del origami, la visualización espacial, el aprendizaje de geometría y el razonamiento geométrico.

Para el desarrollo de su investigación fue necesario dividir el grupo en dos: un grupo de control (94 estudiantes), el cual recibe instrucción regular durante una unidad de

²⁶ Arici, S & Aslan, F. (2013). Effect of instruction based on origami spatial visualization, geometry and geometric reasoning achievement. Recuperable el 7 de octubre de 2014 de la URL: <http://link.springer.com/article>.

geometría en un salón de clases de grado décimo, el otro grupo experimental (90 estudiantes), para recibir la instrucción basada en origami, esto se llevó a cabo durante 4 semanas.

La prueba de visualización espacial (SVT) se utiliza para medir esta habilidad en los estudiantes. Los resultados indicaron que la instrucción basada en origami tuvo efecto significativo en todas las variables dependientes (visualización espacial, el aprendizaje de geometría y razonamiento geométrico).

La autora de esta tesis considera que el origami o rompecabezas geométricos puede ser integrado como una herramienta útil en las lecciones de construcciones geométricas en la sección de bachillerato y de forma más enriquecedora en la escuela primaria pues con una buena mediación por parte del docente permite que el aprendizaje de la geometría sea eficaz.

La autora pudo constatar, según su experiencia y la literatura revisada, la limitada disponibilidad de tiempo en la escuela, para abarcar los temas geométricos; por lo cual la geometría se orienta de manera teórica, en ocasiones de forma superficial y sin mostrar su aplicabilidad. También es notorio como en la mayoría de planteles educativos esta temática se ubica en la última etapa del periodo escolar, es limitado el uso de los instrumentos tradicionales para la construcción en las clases, es decir, no se le da el sentido e importancia que tiene dentro del contexto y el conocimiento matemático lo cual impide que la enseñanza propicie un aprendizaje significativo en los estudiantes.

1.2.7. Las figuras de análisis en el aula de matemática²⁷

Micelli & Crespo (2011) conceden una gran importancia a las figuras de análisis en la geometría, ya que plantean la necesidad de que estas existan en el aula de clase, pero al mismo tiempo hacen evidente los obstáculos que podrían presentar los estudiantes al realizar dichas figuras y más si con estas se desea que él confronte propiedades. En este proceso de análisis la visualización interviene directamente sobre la figura realizada. En esta investigación se comparte el criterio que “... *la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas*”²⁸.

Micelli & Crespo (2011) plantean que para “... *esbozar una figura de análisis, es necesario tener un conjunto de conocimientos de la Geometría (figuras, cuerpos geométricos, construcciones geométricas, etc.) y un conjunto de habilidades (intelectuales y prácticas) que le permitan, a partir de la imaginación, sintetizar en una figura una situación dada y explicarla.*”²⁹.

La autora tiene en cuenta lo expuesto por Micelli & Crespo (2011) al momento de presentar rompecabezas e imágenes y figuras geométricas para que el estudiante pueda a partir de una figura realizar razonamientos apropiados. Para este proceso el estudiante debe poseer una base de conocimientos geométricos (conceptos, figuras geométricas, trazos válidos, entre otras) y habilidades en el uso de instrumentos.

²⁷ Micelli, M & Crespo, C. (2011). Las figuras de análisis en el aula de matemática. Recuperable el 7 de octubre de 2014 de la URL: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf>. pp. 719-737. México.

²⁸ Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. París: Flammarion. p. 27.

²⁹ González, M., García, L. y Lamothe, M. (2005). Resolución de problemas geométricos a través de la modelación gráfica. Instituto Superior Pedagógico “Raúl Gómez García”, Guantánamo, Cuba.

1.2.8. When Less is More, Visualizing Basic Inequalities³⁰

Los investigadores Alsina y Nelsen presentaron hacia el año el 2009, un libro en el cual se orienta la utilización de la visualización como herramienta fundamental, para mejorar el entendimiento de temáticas matemáticas abordadas en Educación Básica y en primaria. Los aportes de estos autores en la visualización abarcan otros campos diferentes a la geometría. Además incluyen la explicación del porqué de cada demostración visual e invitan al lector a solucionar otros problemas en los cuales intervienen la visualización para su solución y posteriormente presentan la solución.

La visualización permite la comprensión de demostraciones y resolución de problemas geométricos ya que influye en la actividad intelectual sobre la cual se debe sustentar la matemática escolar y universitaria. Se tendrán en cuenta lo expuesto por estos autores en la apropiación de conceptos de geometría, sus propiedades y mejorar el desarrollo de las destrezas matemáticas.

1.3. Investigaciones sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas, específicamente sobre la visualización en la Educación Básica en Colombia

1.3.1. La visualización en tareas de rotación y traslación sobre el plano del videojuego³¹

La Universidad Pedagógica Nacional presentó un proyecto titulado *La visualización en tareas de Rotación y Traslación sobre el plano del videojuego*, el cual tenía por

³⁰ Alsina, C. y Nelsen, R. (2009). *When Less is More, Visualizing Basic Inequalities*. Dolciani Mathematical Expositions # 36. United States of America: The Mathematical Association of America.

³¹ Acevedo, J (2015). *La Visualización en tareas de Rotación y Traslación sobre el plano del videojuego*. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática.

objetivo, identificar procesos y habilidades de visualización que desarrollan los estudiantes de primaria y básica al aprovechar el videojuego como mediador visual dentro de una institución relacionando así la actividad geométrica y particularmente aquellas asociadas a habilidades y procesos de visualización.

La Figura 2, corresponde a la interacción del estudiante con el videojuego, en la fase de elaboración en la operación proyección de relaciones espaciales y virtuales al analizar el proceso del procesamiento visual.

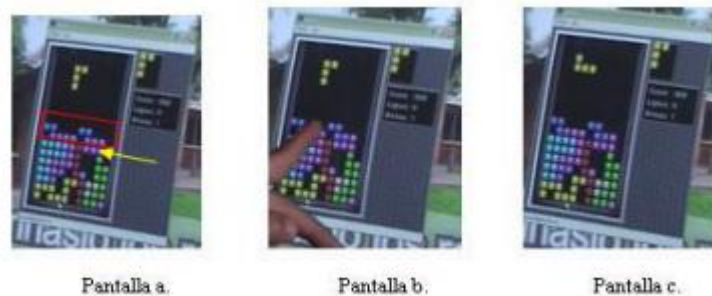


Figura 2. Visualización en tareas de Rotación y traslación.

Se menciona en el estudio, los obstáculos y las dificultades que presentan los estudiantes cuando baja una figura y no es posible hacer línea con la ficha que baja tal como se observa. Acevedo (2015) expresa que la “... profesora pregunta sí con la ficha que baja puede o no hacer línea para verificar que el estudiante pueda anticipar consecuencias y plantear una estrategia adecuada, lo que conlleva a valorar el potencial de las habilidades y procesos de la visualización en el reconocimiento de algunas propiedades matemáticas de dichas isometrías. El acercamiento a características visuales en el reconocimiento de las figuras geométricas que muestran el giro o el desplazamiento de una figura referenciada, así como las posiciones que ocupa en un plano (tablero de Tetris), las posiciones relativas al

*observador (o jugador), y las relaciones de las figuras entre sí, son importantes en las transformaciones que realizan internamente los estudiantes*³².

Se tendrá en cuenta para el desarrollo de la investigación las temáticas transformaciones en el plano cartesiano ya que esta permite desarrollar la visualización en los estudiantes de básica.

1.3.2. Transition to numerical algebraic thinking through teaching strategy algeblocks³³

Tangarife (2013) afirma que para lograr una transición lógica del pensamiento numérico de grado sexto y séptimo al pensamiento algebraico de grado octavo (trabajo de campo realizado en Manizales), con la construcción de bloques y figuras geométricas para representar, generalizar, formalizar patrones y regularidades en situaciones matemáticas serán potencializados por medio de la ayuda visual. Además añade *"En términos de la teoría piagetiana, sólo en la etapa de las operaciones formales se puede esperar que vaya desapareciendo la dependencia de los referentes concretos. Frecuentemente todos necesitamos funcionar en un nivel más concreto, y a menudo es útil una introducción de distintos sistemas de representación"*³⁴.

Con respecto a lo anterior Piaget ubica a los estudiantes de grado séptimo, aquellos que tienen aproximadamente más de 12 años en la etapa de operaciones formales

³² Acevedo, J (2015). La Visualización en tareas de Rotación y Traslación sobre el plano del videojuego. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, p. 9.

³³ Tangarife, D. (2013). Transition to numerical algebraic thinking thinking through teaching strategy algeblocks. Universidad Nacional De Colombia Sede Manizales Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Colombia.

³⁴Tangarife, D. (2013). Transition to numerical algebraic thinking thinking through teaching strategy algeblocks. Universidad Nacional De Colombia Sede Manizales Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Colombia, p. 15.

“... los cuales se caracterizan por la presencia de operaciones sobre expresiones verbales abstracciones con más de una clase de reversibilidad”³⁵.

Se considera en el estudio los aportes de Tangarife (2013) en lo referente a lo que pueden hacer los estudiantes con respecto a la teoría Piagetiana.

1.3.3. El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos³⁶

Vélez (2002) señala que las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos, de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras.

“Por tal razón es necesario incorporar tempranamente a los estudiantes en el estudio de los conceptos fundamentales de ese campo y de las técnicas y métodos de estimación y de aproximación, lo cual se logra articulando la búsqueda de soluciones no exactas, de intervalos de valores aceptables, de problemas de estimación de posibles valores en el contexto de medidas de longitudes, áreas y volúmenes y de modelos matemáticos”³⁷.

Se ha visto que la visualización en Colombia se utiliza en el campo variacional con los sistemas algebraicos y analíticos, pero en este estudio se considera su importancia dentro de la geometría, ya que son pocos las experiencias de aula relacionadas con esta rama y que según la autora de la tesis considera importante ya

³⁵ Falk. M. (2013). Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX. Segunda parte: Estructuralismo. p. 157.

³⁶ Vélez, C. (2002). El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. M.E.N. Asociación Colombiana de Facultades de Educación. 2002-2006.

³⁷ Vélez, C. (2002). El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. M.E.N. Asociación Colombiana de Facultades de Educación. 2002-2006.

que en grados más avanzados se integra la parte geométrica con la algebraica como la trigonometría, entre otras.

1.3.4. La visualización en la resolución de patrones³⁸

Chalé (2015) comparte una serie de actividades geométricas que los docentes pueden aplicar a sus estudiantes de bachillerato, él realiza un taller con profesores en ejercicio cuyo propósito está en valorar las aproximaciones visuales en la resolución de secuencias figúrales de patrones. Haciendo notar que más adelante la aproximación visual será considerada como el puente que conecta el trabajo del razonamiento de los estudiantes y la simbolización algebraica. Además comparte como el aporte de los diversos análisis visuales han sido ignorados, por lo que propone un análisis de los ejercicios que se pueden hacer en el aula. A continuación un ejemplo de lo expuesto en el taller se puede observar en la Figura 3.

1. Considera la siguiente lista ordenada de figuras:

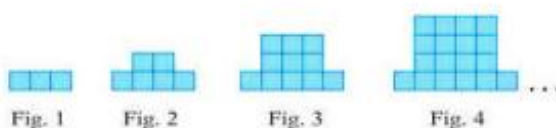


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

a) ¿Qué figura sigue en la lista? _____

b) ¿Qué se hace para pasar de una figura a la siguiente? _____

c) Dibuja en tu cuaderno la figura que ocupa la posición número 10.

d) ¿Cuántos cuadrillos forman la figura que va en la posición número 20? _____

e) ¿Cuál es el patrón que rige esta sucesión? _____

39

Figura 3. Problema que involucra la visualización.

³⁸ Chale, S. (2015). La visualización en la resolución de patrones. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, p. 3.

³⁹ Chale, S. (2015). La visualización en la resolución de patrones. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, p. 3.

Con respecto a la visualización Chalé (2015) agrega *“Desde nuestro particular punto de vista, pensamos que en un primer acercamiento a la matemática, la visualización debe jugar un papel importante, y que una de las maneras como el estudiante puede introducirse a este apasionante mundo, es a través de tareas donde lo visual esté presente y juegue un rol importante. La información que nos proporcionan los elementos visuales, serán una herramienta importante en el proceso de pensamiento, pero habrá momentos en que deberá ser abandonada o disminuida en la medida en que deje de ser la base de información fundamental, dependiendo esto de las necesidades del problema o situación a resolver”*⁴⁰.

Se tendrá en cuenta para el desarrollo de la investigación las temáticas secuencias geométricas y patrones, ya que según el anterior estudio permite desarrollar la visualización en los estudiantes de básica.

Conclusiones del capítulo 1

Las investigaciones mostradas anteriormente, apuntan principalmente a fortalecer la habilidad visualización en el área de matemáticas, estas mismas se enfocan en el uso de esta habilidad sobre todo en el campo geométrico en la Educación Básica secundaria abordada en diferentes países a nivel mundial y en el lugar donde se realiza la investigación, Colombia. De esta manera los autores que más se destacan son: Guzmán (2008), Falk (2013), Acevedo (2015), Vélez (2002), Tangarife (2013), Montecino (2009), Del Grande (1990), Godino (2003), Arcavi (2003), Ramirez (2012), Tam (2010), Borovik y Gardiner (2006), Henriquez (2014), Alvariño (2005), Brawner (2011), Alvariño (2005), Marín y Guerrero (2005), González (2003).

⁴⁰ Chale, S. (2015). La visualización en la resolución de patrones. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, p. 5.

Es necesario resaltar que dentro de la literatura revisada, se pudo constatar que las investigaciones acerca del fortalecimiento de la visualización en Colombia son escasas y en especial en la Educación Básica, por lo cual este estudio pretende mostrar la importancia que esta habilidad presenta para el logro de un proceso de enseñanza-aprendizaje robusto de los contenidos en grado séptimo, además de ser una oportunidad para enriquecer las prácticas pedagógicas, investigar y fortalecerla a través de su implementación en el currículo de la escuela.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Un aprendizaje por descubrimiento permite adquirir el conocimiento significativamente por sí mismo, y si sumado a esto se implementan comunidades de práctica, donde los estudiantes se reúnen para compartir lo que saben, y aprenden unos de otros, entonces se construye un robusto conocimiento matemático. En este capítulo se describe el marco teórico que sustenta la investigación: teoría de la resolución de problemas, aprendizaje por descubrimiento, comunidad de práctica de Wenger, la visualización. También se hace referencia a los fundamentos de la percepción visual.

2.1. Desarrollo de las habilidades matemáticas en la Educación Básica

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha sido actualmente un aspecto muy marcado, fortalecer la formación y desarrollo de las habilidades matemáticas con el objetivo de solucionar toda clase de problemas (retadores, rutinarios y no rutinarios) los cuales no consisten en repetir algoritmos, procedimientos sino en construir el conocimiento matemático, buscarlo, utilizarlo y en la mayoría de los casos transformarlo, integrando conceptos, propiedades, relaciones, procesos matemáticos, emplear estrategias de trabajo, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver situaciones problema. *“Las habilidades matemáticas, son reconocidas (por muchos autores) como aquellas que se crean durante la práctica de las acciones y operaciones que tienen un carácter esencialmente matemático”*⁴¹. Considero que un estudiante debe estar en la

⁴¹ Ferrer, M. (2010). *“La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana”*, Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/

capacidad de interactuar entre la situación y el modo de actuar necesario para que logre enfrentarla y luego darle una solución lógica y acertada.

La autora ha considerado los siguientes puntos de vista que sustentan la investigación:

- ✓ *La habilidad es el modo de relacionarse el sujeto con la situación que le posibilita darle solución*⁴² (Bello, 1998).
- ✓ *Habilidades cognitivas están entendidas como operaciones y procedimientos para adquirir, retener y recuperar diferentes tipos de conocimientos y que suponen el logro de capacidades, entre otras, para definir, demostrar, identificar, interpretar, codificar, recodificar, graficar, algoritmizar y calcular, modelar, comparar, resolver, aproximar, entre otras*⁴³ (Clavero, 2001).

Y ella coincide con sus intervenciones ya que una habilidad es la destreza o capacidad que tiene un estudiante para realizar una actividad con éxito, seleccionando entre varias opciones la más acertada que genera la solución.

A continuación Ferrer (2010) enuncia las clases de habilidades desarrolladas por un estudiante.

1. Habilidades matemáticas referidas a la formación y utilización de conceptos y propiedades.

⁴² Bello, B. Recuperado el día 12 de septiembre de 2005 de la URL: <http://www.monografias.com/trabajos81/proceso-formacion-habilidades-matematicas/proceso-formacion-habilidades-matematicas.shtml>

⁴³ Clavero, F (2001). Habilidades Cognitivas. Notas del Departamento de Psicología Evolutiva y de la educación. Universidad de Granada. España, p. 87.

*“Son aquellas habilidades que comprenden, la elaboración, el reconocimiento, identificación de conceptos y propiedades matemáticas, su expresión en el lenguaje matemático (denominación con la terminología y simbología correspondiente) y viceversa, teniendo en cuenta las diferentes formas de representación gráfica o analítica; estas habilidades ofrecen recursos imprescindibles para el análisis y comprensión de un problema”*⁴⁴. Dentro de la visualización es importante reconocer que el estudiante reconozca las propiedades y características de los cambios en el movimiento de los objetos por ello se tendrán en cuenta.

2. “Habilidades matemáticas referidas a la elaboración y utilización de procedimientos algorítmicos a partir algoritmos conocidos.

*“Son aquellas habilidades que comprenden el establecimiento, reproducción o creación de sucesiones de pasos u operaciones encaminadas al logro de un objetivo parcial o final en la solución de una clase de ejercicios o problemas, aparecen frecuentemente como pasos necesarios en la etapa de ejecución del plan de la solución de un problema”*⁴⁵. Aunque son relevantes en cualquier desarrollo matemático este tipo de habilidades no será tan significativo en nuestra investigación.

3. “Habilidades matemáticas referidas a la utilización de procedimientos heurísticos.

⁴⁴ Ferrer, M. (2010). *“La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana”*, Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/ p. 177 archivo comprimido.

⁴⁵ Ferrer, M. (2010). *“La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana”*, Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/ p. 177 archivo comprimido.

*Son aquellas que comprenden la identificación y utilización de principios, reglas y estrategias heurísticas para la búsqueda de vías de solución, que caracterizan técnicas específicas o generales para la solución de problemas matemáticos. Su papel fundamental lo tienen en el proceso de búsqueda de vías de solución, de establecimiento de un plan y la valoración de los resultados de su aplicación (interpretación de la solución y la vía de la solución), por lo que estas habilidades se proyectan como recursos metacognitivos en la actuación del alumno que le permite construir modelos de las situaciones planteadas*⁴⁶. Teniendo en cuenta que la heurística es una parte relevante en el desarrollo de problemas como búsqueda y obtención de la solución esta parte será tomada en cuenta.

4. “Habilidades matemáticas referidas al análisis y solución de situaciones problémicas de carácter intra y extramatemáticas.

*Son aquellas que comprenden la utilización de estrategias para el análisis y comprensión de ejercicios y problemas con textos y/o que se estimulan a partir de una situación matemática o de la vida práctica, dada en el lenguaje común o en el lenguaje matemático, pero que no constituye un ejercicio formal con una orden directa*⁴⁷. Existen técnicas y estrategias que deben conocer los estudiantes pero otras serán implícitamente desarrolladas con la puesta en marcha del presente proyecto, de esta manera.

⁴⁶ Ferrer, M. (2010). "La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana", Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/ p. 177 archivo comprimido.

⁴⁷ Ferrer, M. (2010). "La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana", Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/ p. 177 archivo comprimido.

La autora de la tesis cree que el diseño y desarrollo de las actividades propuestas de una u otra forma también contribuyen a fortalecer las anteriores habilidades en los estudiantes. Las habilidades matemáticas básicas involucran operaciones básicas y una vez que se han dominado estos métodos, se pueden avanzar a los problemas que presentan fracciones, decimales y números irregulares para su solución. Algunas personas, al aprender y desarrollar habilidades matemáticas básicas, necesitan utilizar imágenes u objetos reales para ilustrar situaciones, es decir, deben utilizar un lenguaje pictórico. Lo anterior se ve evidenciado en el aprendizaje de las matemáticas desde grados inferiores en donde se utiliza toda clase de representaciones visuales y se va formando conceptos y de esta forma un conocimiento matemático; de ahí radica la importancia de que el estudiante utilice la visualización para ampliar su conocimiento matemático y que los docentes involucren más situaciones y problemas motivadores que permitan un aprendizaje significativo y duradero.

Ahora bien, somos conscientes de la gran influencia e importancia de las matemáticas en nuestra sociedad, en buena parte debido al exagerado aumento de sus aplicaciones, en finanzas, en robótica, criptografía, música, arte, arquitectura, genética, ingeniería, sin olvidar el aumento uso de la tecnología, entre otras. Puede decirse que todo se matematiza ya que al generarse nuevas aplicaciones aumenta la cantidad y la diversidad de información y con ello se incrementa el número de problemas o situaciones que se pueden presentar al integrar varias aplicaciones de las matemáticas. Por lo anterior se puede decir que es inconcebible no valorar la

importancia y uso de las matemáticas en nuestro entorno ya que le eleva la calidad de la educación impartida.

De esta manera se enfatiza en que si bien nuestro contexto nos obliga a pensar matemáticamente, como docentes hay que brindar las herramientas para que nuestros estudiantes se enfrenten a las condiciones impuestas por este mundo globalizado y cambiante. Son los docentes quienes deben brindar las herramientas necesarias por tal motivo se hace relevante desarrollar en ellos, toda clase de habilidades.

Bello (2008) ha caracterizado las habilidades según el objeto de la actividad matemática y según los niveles de sistematicidad en esta área matemática. La primera clasificación se refiere a aquellas habilidades que desarrollan la elaboración de conceptos, procedimientos o justificaciones, teoremas y demostraciones y la segunda corresponden a las habilidades básicas y elementales relacionadas con los niveles en la resolución de problemas.

Con respecto a la importancia que tiene la visualización en las demostraciones sin palabra, Rodríguez (2015) señala que la visualización es una habilidad, que contribuye a la búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos matemáticos, donde se llega al planteamiento de la expresión algebraica a partir de la formación de imágenes y representaciones.

2.2. La teoría de la resolución de problemas

Diferentes investigadores han abordada la definición de problema, entre los que se destacan los investigadores: Pölya (1965), Kilpatrick (1967), Schoenfeld (1985,1992);

Krulik y Rudnik (1987); Falk (2001), Pérez (2004), Puig (1996), Lesh y Zawojewski (2007), y Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012).

Krulik y Rudnik (1987) definen problema como “... *una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma*”⁴⁸. Por su parte Pölya (1965) expresa que tener un problema es “... *buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata*”⁴⁹.

En la tesis se asume la definición dada por Pérez (2004), pues se ajusta a las actividades que se sugieren en la investigación. Los problemas que se proponen en las actividades constituyen un reto para los estudiantes, por tal motivo se asume lo expresado por Pérez (2004), acerca de que los “... *problemas retadores invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento*”⁵⁰. Se ha visto la importancia que ellos presentan dentro del proceso enseñanza-aprendizaje porque desde que el estudiante comprende el problema abre nuevas posibilidades para tratarlo, innova y aprende a usar procesos matemáticos además que genera un aprendizaje, al respecto Falk (2001) afirma que un problema es aquel “... *cuya solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidas. Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el desarrollo del*

⁴⁸ Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). Problem solving: a handbook for teachers. Boston: Allyn and Bacon. p. 4.

⁴⁹ Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas. p. 28.

⁵⁰ Pérez, J. (2004). Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria.

*pensamiento matemático en sí*⁵¹, definición que se tiene en cuenta en el desarrollo de la tesis.

Por su parte, Sigarreta (2004) expresa cuatro rasgos que están presentes en cada una de las definiciones de problema, que proponen los diferentes investigadores, los cuales son compartidos en la tesis. Estos rasgos son:

- ✓ La existencia de condiciones iniciales o finales, que exprese la necesidad de transformación en el problema.
- ✓ La vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida o, al menos, no ha de ser inmediatamente accesible.
- ✓ Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, teniendo presente que lo que puede ser un problema para uno puede no serlo para otro.
- ✓ El estudiante disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades y motivación.

Diversos investigadores han abordado definiciones de lo que significa resolver un problema, entre los que se destacan: Restle y Davis (1962), Pölya (1965), Fridman (1991), Ballester y otros (1992), Schoenfeld (1995), Lesh y Zawojewski (2007), Sriraman y English (2010), entre otros.

En la investigación se toma lo dicho por Pölya (1965), donde expresa que: “... *resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente*

⁵¹ Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, VIII(1), 21.

*camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados*⁵².

También es de destacar la importancia que tiene la resolución de problemas en la Educación Matemática, a tal punto que constituyó un grupo tema de estudio (TSG) en el ICME-13, abordado en el TSG 19 por Liljedah y Santos (2016).

Este TSG tiene como objetivo promover e intercambiar conocimiento entre los investigadores sobre la resolución de problemas en la escuela. En este grupo se abordan las siguientes áreas o temas:

- ✓ Bases de la resolución de problemas.
- ✓ Solución de problemas y aprendizaje del estudiante.
- ✓ Plan de estudios.
- ✓ La evaluación en la resolución de problema.
- ✓ Tecnologías digitales y la resolución de problemas.
- ✓ La creatividad en la solución de problemas.
- ✓ Planteamiento del problema.
- ✓ La resolución de problemas más allá de la escuela o contextos formales.
- ✓ La resolución de problemas y el diseño de materiales interactivos y libros de texto.
- ✓ Diseño de tareas para la resolución de problemas.
- ✓ Resolución de problemas y enfoques de modelados⁵³.

⁵² Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas, p. 215.

⁵³ Tomado del ICME 13. International Congress on Mathematical Education (2016). July 24-31 in Hamburg. Recuperable el 12 de septiembre de la URL: http://www.icme13.org/topic_study_groups

También son varios los autores que aportan estrategias o fases para la resolución de problemas, entre los que se tienen Dewey (1933), Pölya (1965), Schoenfeld (1985), Maza (1991), Guzmán (1994), entre otros. En esta tesis se asume el modelo propuesto por Pölya (1965), el cual tiene las siguientes fases: orientación hacia el problema, trabajo en el problema, solución del problema, y evaluación de la solución y de la vía (ver Figura 4).

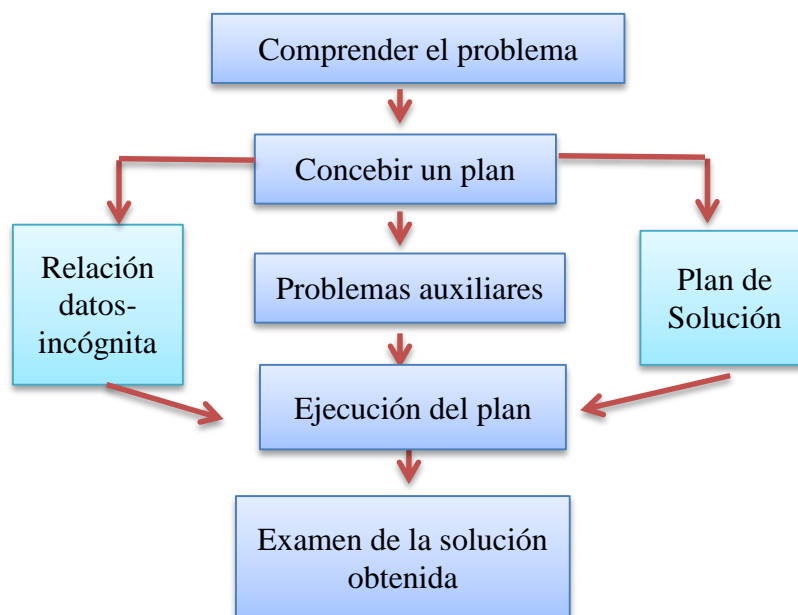


Figura 4. Estrategia de Polya para la resolución de problemas.

A continuación se describe cada fase, según lo expresado por Ballester y otros (1992). También se precisan preguntas heurísticas, que constituyen niveles de ayuda de ser necesario, para resolver el problema de forma independiente.

Orientación hacia el problema: es una fase significativa para la resolución del problema, pues permite realizar “... la búsqueda del problema o motivación, el

*planteamiento del problema y la comprensión del problema*⁵⁴. En esta etapa es conveniente realizar las siguientes preguntas heurísticas: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante / contradictoria para determinar la incógnita?, para lograr la comprensión del problema.

Trabajo en el problema: el docente debe garantizar a través de preguntas heurísticas como: ¿es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar?, ¿podría imaginarse un problema análogo más simple/ general/particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, entre otras, “... *la precisión del problema, el análisis del problema y la búsqueda de la solución*”⁵⁵.

Solución del problema: en esta fase de ser necesario el profesor le plantea a los estudiantes las siguientes preguntas: ¿puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede usted demostrarlo?, con el propósito de valorar “... *la realización del plan de solución y la representación de la solución*”⁵⁶.

Evaluación de la solución y de la vía: hace referencia a la comprobación del problema, en donde el docente puede formular preguntas tales como: ¿puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el

⁵⁴ Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 411.

⁵⁵ Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 411. pp. 413 y 414.

⁵⁶ Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 411. p. 420.

resultado en forma diferente?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

La resolución de problemas en la geometría para el desarrollo de la habilidad matemática visualización, permite fortalecer y desarrollar el pensamiento crítico y analítico, como base para el pensamiento matemático. El trabajo en el aula con estos problemas se dirige a:

- ✓ *“Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- ✓ *Desarrollar su razonamiento.*
- ✓ *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- ✓ *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- ✓ *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- ✓ *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- ✓ *Darle una buena base matemática”.*⁵⁷

En la resolución de problemas tiene un papel significativo la heurística, vista como una herramienta que propicia el descubrimiento, la invención y la creatividad en el proceso de resolución de problemas. El significado de la heurística es expresado por Polya (1965) en su libro How to solve it, las cuales son:

- ✓ Si no consigues entender un problema, dibuja un esquema.
- ✓ Si no encuentras la solución, haz como si ya la tuvieras y mira qué puedes deducir de ella (*razonando a la inversa*).
- ✓ Si el problema es abstracto, prueba a examinar un ejemplo concreto.

⁵⁷ Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 1 de noviembre de 2012 de <http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/>

- ✓ Intenta abordar primero un problema más general (es la “*paradoja del inventor*”:
el propósito más ambicioso es el que tiene más posibilidades de éxito).

En las actividades basadas en la resolución de problemas se utiliza el método heurístico. En este método “... *se le plantean a los alumnos preguntas que facilitan la búsqueda independiente de problemas y soluciones de estos, donde el maestro no le informa al alumno los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes de forma independiente*”⁵⁸.

Los recursos heurísticos se clasifican en: medios auxiliares heurísticos, procedimientos heurísticos y el programa heurístico general (Ballester y otros (1992), Torres (2000), Rojas (2009)).

Las preguntas heurísticas son significativas al momento de resolver un problema, pues estas pueden “...*comprenderse como una actividad externa que realiza el docente y que provoca un estímulo en el sistema de conocimientos y recursos del alumno. Este se realiza sobre una situación dada, de modo que lo impela a buscar lo que se requiere en un momento dado, para resolver una situación no conocida total o parcialmente, pero sin ofrecer directamente la vía de solución, la que debe ser encontrada por el alumno*”⁵⁹ (Rojas, 2009).

En el proceso de resolución de problemas para favorecer la habilidad matemática de visualización se tienen las siguientes reglas heurísticas:

⁵⁸ Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 225.

⁵⁹ Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. Holguín: Tesis doctoral publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. p. 31.

- ✓ Presentación de imágenes.
- ✓ Manipulación geométrica.
- ✓ Composición y descomposición.
- ✓ Representación analítica.

Estas reglas heurísticas se consideran en el desarrollo de las actividades de la tesis.

2.3. Comunidades práctica de Wenger

La propuesta de Wenger (2002) invita a construir conjuntamente el conocimiento y aprender de una forma activa a través de un proceso continuo social e interactivo. En la presente investigación se organizan los estudiantes para la consecución del objetivo en pequeños grupos de trabajo, donde se considera los postulados de la teoría de comunidad de práctica de Wenger, con el fin de construir el aprendizaje a través de la colaboración y la interacción de los resolutores de problemas. Los grupos de trabajo están integrados por tres participantes, dirigidos por el docente como mediador, el cual tendrá la misión de acompañar y orientar a los estudiantes hacia la meta, la cual es fortalecer la formación y desarrollo de la visualización.

A continuación se abordan las características basadas en la teoría social de aprendizaje y algunas definiciones que la sustentan (ver Figura 5):



Figura 5. Componentes de la Teoría comunidad práctica de Wenger.

- 1) *Significado*: Se refiere a la posibilidad que se tiene, individual y colectivamente, de analizar y considerar el mundo, las experiencias y además nuestra vida como algo que tiene sentido y es valioso. De acuerdo a lo anterior se enfoca en la manera de hablar de la capacidad sobre el aprendizaje.
- 2) *Práctica*: Se refiere a la manera de abordar los recursos históricos y sociales, los marcos de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo ya que estas guía las acciones en procura de un objetivo satisfactorio.
- 3) *Comunidad*: Afirma que un aprendizaje implica la participación en las prácticas de comunidades ya que cada persona pertenece a una y además cada uno de sus integrantes aporta o cambia la estructura. Además se muestra como una forma de hablar de las configuraciones sociales donde la participación es reconocible como competencia.
- 4) *Identidad*: Reconoce que el conocimiento o aprendizaje puede transformar o alterar lo que somos. La manera como se produce el aprendizaje en quiénes somos y de cómo crea historias personales en el contexto depende de la interacción con las comunidades.

Esa comunidad basada en un compromiso mutuo y compartido logra llevar a la práctica lo que teóricamente se ha propuesto, lo cual favorece la investigación. En esta tesis se asume que comunidad de práctica es “... *un grupo de personas que comparten un interés, un conjunto de problemas, o una pasión sobre un tema, y*

quienes profundizan su conocimiento y experiencia en el área a través de una interacción continua que fortalece sus relaciones”⁶⁰.

Al implementar las actividades, los estudiantes se organizaran libremente en grupos de tres personas y con la orientación de una persona que oriente el proceso de enseñanza-aprendizaje y además de ello que posee un poco de más experiencia pedagógica se dará inicio a la consecución del objetivo propuesto en la investigación.

La labor del docente se enfocará en promover la participación de los estudiantes en cada uno de los problemas, concientizándolos de que pueden desarrollarlos ya que cuentan con habilidades suficientes, además el trabajar los problemas propuestos le ayudaran a fortalecer las habilidades del pensamiento y el razonamiento.

Desde este punto de vista, la comunidad de práctica de clase, del Colegio Campestre San Diego, tiene como elementos dentro de este trabajo de investigación:

- 1) El dominio: se tendrá un mismo campo de interés, como es el de fortalecer la habilidad visualización en matemáticas, vivir una experiencia de trabajo en equipo, ya que son pocos los momentos en que la institución lo permite. Para fortalecer dicha habilidad se espera que los estudiantes formen o manipulen mentalmente figuras y sólidos, es decir, usen la percepción y el procesamiento visual de las imágenes dinámicas y cinéticas a través de un aprendizaje por descubrimiento y lograr también de esta manera una comprensión avanzada en conceptos matemáticos.

⁶⁰ Wenger, E., McDermott, R., Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge*. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. Pág. 4.

- 2) La práctica: en este aspecto los estudiantes comparten sus puntos de vista y toman decisiones, al participar en el desarrollo de las diferentes actividades para fortalecer la habilidad visualización. Esto lo que hace es generar al interior de los grupos un compromiso auto-consciente. El sistema de actividades está enfocado en la solución de problemas retadores.
- 3) La comunidad: los protagonistas del presente proyecto de investigación serán los estudiantes de grado séptimo del Campestre de la ciudad de Duitama.

Según la teoría de Wenger (1998) otros aspectos a tener en cuenta son:

- ✓ Coordinación y sinergia, es decir, no hacer lo mismo en todos los casos, sino ser creativos para exponer y resolver problemas.
- ✓ Búsqueda de experiencias, para aprovechar la circunstancia de si algún miembro ha pasado antes por algo parecido o igual que permita orientar la propuesta de solución.
- ✓ Revisión y aprovechamiento con respecto a la posibilidad de adaptar algo bien, que antes ya se había hecho.
- ✓ Exploración de proyectos de documentación.
- ✓ Visitas u observar el trabajo de otras comunidades, para corroborar desarrollos sus desarrollos.
- ✓ Identificación de deficiencias, el cual se refiere a preguntarse ¿qué se conoce y qué no, con quién se necesita conectarse, entre otras?
- ✓ Discusión de desarrollos y examinación de otras herramientas o estrategias.

Según Wenger (2007) se debe activar en una comunidad de práctica: la imaginación, la participación y la alineación con el propósito de mantener un sentido de

pertenencia a una comunidad de clase, donde se construya conocimiento. A continuación se exponen cada uno de ellos.

- 1) La imaginación: entendido como un aspecto cognitivo con el cual se permite comprender el entorno que nos rodea. La imaginación no es solo individual sino colectiva, sustentada en las interacciones sociales y experiencias comunitarias. Lo anterior se tendrá en cuenta ya que de esta forma se percibirá más fácilmente el mundo que nos rodea (transformaciones en el plano también vistas o percibidas en el contexto) permitiendo llegar a soluciones propias de problemas. Será clave en este aspecto que los estudiantes realicen gráficos contextualizados, tales que puedan vincularlos con sus vivencias diarias, crear sus propias estrategias en las que involucren sus conocimientos matemáticos, entre otras.
- 2) La participación: se refiere a la interacción de cada uno de los integrantes de la comunidad frente al uso de estrategias, caminos de solución que puedan abordarse para concluir con éxito la solución de un problema reto. La participación al interior de los grupos evidencia el compromiso o sentido de pertenencia frente al objetivo que se ha propuesto.
- 3) La alineación: consiste en enfocar al sistema de actividades apuntando a que los estudiantes se apropien de cada problema para que lo puedan solucionar y lo vean como una meta a resolver, en la cual ellos son los protagonistas de su conocimiento y el que formen. Para lo cual cada uno de los integrantes del grupo deberá apoyarse en el pensamiento crítico y analítico motivando de esta manera el debate de ideas.

Estos enfoques serán tenidos en cuenta al momento de formar y trabajar como comunidades de práctica pues propician el fortalecimiento de la visualización y de esta manera la construcción de conceptos matemáticos.

2.4. La visualización para la construcción del conocimiento matemático

Los grandes personajes a lo largo de la historia de las matemáticas han considerado la visualización parte fundamental al hacer matemáticas. Guzmán (2008) afirma que para los pitagóricos la visualización era algo connatural o propio del ejercicio de las matemáticas. Para Platón la función específica de la imagen en la construcción matemática es más explícita y fuertemente enfatizada. La imagen enfatiza la idea de que la sombra evoca la realidad porque cuando se habla de visualización en la mayoría de casos están inmersas las imágenes o representaciones gráficas y para ello uso la siguiente afirmación: *“El círculo dibujado no es la realidad. La realidad es la idea del círculo, pero su imagen juega un papel muy importante como elemento evocador de la idea.”*⁶¹ También clásicos modernos pertenecientes a la escuela Francesa de las matemáticas como Descartes, en su *Regulae ad directionem ingenii* tiene varias reglas que involucran directamente los procesos de visualización, además él hace especial hincapié en los diversos roles que presentan las imágenes y figuras en el pensamiento matemático. Otros grandes clásicos de las matemáticas también vislumbraban la importancia de la habilidad *“... Lagrange ha expresado enérgicamente su creencia en la importancia que es para el matemático la facultad de observar y Gauss al respecto ha llamado las matemáticas una ciencia del ojo. Visualización, como vemos, ha sido una técnica utilizada generalmente por los*

⁶¹ Guzmán, M. (2008). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. Recuperado de la URL: <http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf> p.3.

matemáticos más creativos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen que acompaña a sus elucubraciones matemáticas, incluso las más abstractas, aunque la naturaleza de estas imágenes presenta una diferencia de persona a persona mucho mayor de lo que sospechamos"⁶².

Guzmán (2008) señala que en las última década más o menos se puede percibir una actitud mucho más flexible y una cierta tendencia hacia una renovación de la influencia de la visualización de la actividad matemática, pese a las tendencias formalistas que prevalecieron durante una buena parte del siglo 20, las cuales, tuvieron como consecuencia una especie de degradación de la visualización a una posición inferior. En aquel tiempo la visualización fue vista con desconfianza y sospecha. El papel significativo de esta habilidad fue visto como consecuencia de las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo los que trabajan en el área de Educación Matemática.

Existen varios autores que consideran la visualización como una técnica en la resolución de problemas, otros la consideran como un elemento heurístico (Hernández; 2001), mientras que para Rojas (2009) constituye un principio heurístico, por su parte Cantoral (2000) y López (2005) la consideran una habilidad por la importancia y aportes que genera en la solución de situaciones y en el razonamiento visual-espacial, es por ello que la acogemos como, "*... la habilidad para manipular mentalmente, rotar, girar e invertir estímulos representados gráficamente*"⁶³ (Mcgee, 1979).

⁶² Sylvester J. (1993). Cambridge University Press, 1904-1912, quoted by Philip J. Davis (p.344) in *Visual Theorems*, Educational Studies 24 (1993) 333-344).

⁶³ McGee, M. G. (1979). *Human Spatial Abilities: Sources of Sex Differences*. New York: Praeger.

A su vez, De Guzmán (1996) diferencia el tipo de visualización, afirma “... *la visualización tridimensional y bidimensional es una representación que, a diferencia de la percepción, no se desarrolla en el espacio real en tres dimensiones, sino que se proyecta sobre una superficie en dos dimensiones*”⁶⁴. Como vemos coincide con lo expuesto por Godino (2012) “*La visualización trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren «ver» o «imaginar» mentalmente los objetos geométricos espaciales*”, y no podemos pasar por desapercibido la postura de Arcavi, (2003) “*La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas*”.

A su vez Hitt (2002) señala que “*La visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado*”⁶⁵.

Cantoral y colaboradores (2000), señalan que: “... *se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar*

⁶⁴ Godino, J (2012). An onto-semiotic approach to visualization in mathematics education. Universidad de Granada

⁶⁵ Hitt, F. (2002). Representations and mathematics visualization. North American Chapter of IGPME, Cinvestav-IPN, México. p. viii.

*información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico*⁶⁶.

Lo anterior sustenta el proyecto y se asume lo propuesto por Zimmermann y Cunningham (1991) “... *la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática*”⁶⁷.

Los anteriores autores enfatizan en que el desarrollo de la visualización favorece el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática y permite que el estudiante comprenda y resuelva problemas. Los autores parecen hacer un llamado para incorporar, promover y desarrollar el proceso de visualización en los estudiantes.

Según Gal y Linchevski (2010) la visualización interviene en tres momentos del proceso cognitivo, ellos son: organización, reconocimiento y de representación de la información.

En la representación, también conocido como el momento inicial de captura de información a través de los sentidos, al respecto Presmeg (1986) sugiere dos tipos de imágenes mentales, entendidas como las escenas mentales con las cuales un estudiante puede interactuar en una situación ya que describe información visual o espacial de un objeto sin requerir su presencia u otra representación externa.

⁶⁶ Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2000). Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: Trillas, p. 146.

⁶⁷ Zimmermann, W; Cunningham, S (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. Notes Number 19.

Presmeg (1986) las ha clasificado en imágenes cinéticas e imágenes dinámicas, las cuales explicamos a continuación.

Las imágenes cinéticas son aquellas conformadas por partes físicas y mentales, ya que en ellas tiene un papel muy importante el movimiento de manos, cabeza, etc. En la presente investigación, estas imágenes se hacen presentes cuando los estudiantes quieren expresar el giro de un objeto que tienen en su mente y señalan con sus manos o con un objeto externo, como la ficha de los triángulos de Magmahon, además objetos que evidencien transformaciones en el plano.

Las dinámicas son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan. Estas imágenes dinámicas se aprecian cuando un estudiante está interactuando con imágenes de las cuales predice los movimientos; estas predicciones corresponden a imágenes de su mente que están en movimiento.

En el reconocimiento, también conocido como el momento de aprovechamiento de la información visual en el trabajo cognitivo. Bishop (1983) describe dos procesos los cuales son: interpretación de la información figural (IFI) y procesamiento visual (VP). A continuación se explica cada uno de ellos.

Interpretación de la información figural (IFI): es el proceso de interpretación de representaciones visuales para extraer información de ellas. Para que haya IFI debe existir un referente físico, de esta forma el individuo puede empezar a hacer el respectivo análisis. Por ejemplo cuando los estudiantes se enfrentan al problema de escoger el camino más óptimo para llegar a un espacio señalado en el tablero, son capaces de interpretar y argumentar sobre la información que extraen.

Procesamiento visual (VP): es el proceso de conversión de la información no figurativa en imágenes visuales o transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de interpretar si una ficha según las reglas de los triángulos de Macmahon, encaja en un espacio dado.

En la organización se ubican las habilidades sugeridas por Del Grande (1990), las cuales favorecen la gran habilidad, visualización y los procesos que permiten desarrollarla y fortalecerla (Ver Tabla 1).

Tabla 1. Habilidades de la visualización.

HABILIDADES DE LA VISUALIZACIÓN	
HABILIDAD	ACTIVIDAD
Coordinación ojo-motor	Seguir caminos con un lápiz, construir bloques según un dibujo, colorear regiones, etc.
Conservación de la percepción	Percibir la constancia en forma, tamaño, constancia de forma con percepción de figura y espacio.
Percepción figura-contexto	Localizar figuras escondidas, formar figuras ensambladas e invertir una figura respecto al contexto
Percepción de la posición en el espacio	Realizar inversiones y rotaciones , cambiar posiciones, representar modelos de espejos
Percepción de relaciones espaciales	Relacionar la posición de dos o más objetos, completar una figura, completar secuencias, construir una figura de cubos
Discriminación visual (comparar objetos)	Identificar un objeto que es diferente de otros o varios objetos que son los mismos pero diferentes entre otros.

Al respecto, Del Grande (1990) define cada una de las habilidades mencionadas anteriormente, las cuales son:

- 1) Coordinación ojo-motor: es también llamada coordinación visomotora y se refiere a la capacidad que tiene el estudiante de coordinar la visión con el movimiento del cuerpo u objeto.
- 2) Percepción figura-contexto: habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos.
- 3) Conservación de la percepción: habilidad para reconocer que un objeto matemático mantiene su forma aunque este girado o no pueda verse en su totalidad, es decir, mantiene determinadas propiedades como forma, tamaño, textura..., aunque cambie de posición y deje de verse por completo.
- 4) Percepción de la posición en el espacio: habilidad para relacionar un objeto en el espacio y respecto a uno; identificar figuras congruentes bajo traslaciones, giros y transformaciones en el plano.
- 5) Percepción de las relaciones espaciales: habilidad que permite identificar correctamente las características de las relaciones entre diversos objetos situados en el espacio, (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa).
- 6) Discriminación visual: habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales independientemente de su posición.

7) Memoria visual: habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos, que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición, esto hace también referencia a la memoria fotográfica.

Dentro de los estudios que se han encontrado se presentan a continuación diversas actividades que al desarrollarse pueden contribuir a lograr el objetivo del proyecto: favorecer la habilidad visualización en estudiantes de grado séptimo. Estas referencias tienen como finalidad ayudar a diseñar el conjunto de actividades analizando la pertinencia (Ver Tabla 2).

Tabla 2. Actividades que favorecen la visualización.

Identificar y dibujar sólidos desde diferentes perspectivas (<i>Moses, 1990</i>)	Construir formas empleando tangrams y estudiar propiedades (<i>Dunkels, 1990</i>)	Resolver puzzles con cubos de madera (<i>Izard, 1990</i>)
Actividades geométricas de doblado de papel (<i>Bishop, 1983</i>) Emplear relaciones geométricas	Seccionar y caracterizar figuras tridimensionales (<i>Lowrie, Pegg y Gutierrez, 2002</i>)	Identificar desarrollos imposibles de cubos y reconocer figuras geométricas en dibujos solapados (<i>Stanic, 1990</i>)

2.5. Aprendizaje por descubrimiento

Al permitir que el estudiante adquiera el conocimiento por sí mismo mediante la inmersión en situaciones problemáticas se garantiza un aprendizaje significativo, una perdurabilidad de lo aprendido, además de que estimula a los educandos a pensar

por sí mismos, plantear hipótesis y tratar de confirmarlas de una forma sistemática; es por ello que la autora aborda la investigación bajo este enfoque.

Bruner (1984) considera como aprendizaje por descubrimiento aquel en donde *“... los estudiantes deben aprender por medio del descubrimiento guiado que tiene lugar durante una exploración motivada por la curiosidad. Así, desde el punto de vista del aprendizaje por descubrimiento, en lugar de explicar el problema, de dar el contenido acabado, el profesor debe proporcionar el material adecuado y estimular a los aprendientes para que, mediante la observación, la comparación, el análisis de semejanzas y diferencias, etc., lleguen a descubrir cómo funciona algo de un modo activo⁶⁸”*.

Para Bruner (1984), este tipo de aprendizaje busca:

1. Superar las limitaciones del aprendizaje mecanicista.
2. Estimular a los estudiantes para que formulen suposiciones intuitivas que posteriormente intentarán confirmar sistemáticamente.
3. Potenciar las estrategias metacognitivas y el aprender a aprender. Se parte de la idea de que el proceso educativo es al menos tan importante como su producto, dado que el desarrollo de la comprensión conceptual y de las destrezas y las estrategias cognitivas es el objetivo fundamental de la educación, más que la adquisición de información factual.
4. Estimular la autoestima y la seguridad

⁶⁸Recuperado 9 de noviembre de 2015 de la URL: http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/diccionario/aprendizajedesubrimiento.htm

Se hace relevante lo expuesto por Bruner ya que la investigación persigue implícitamente potenciar las estrategias metacognitivas a medida que las operaciones mentales se unen coherentemente y van conformando la estructura mental del estudiante.

“Autores como Duncker (1945), Köhler (1925) y Whertheimer (1959) han realizado investigaciones y monografías con respecto al aprendizaje por descubrimiento, valiéndose de observaciones, experimentos informales, anécdotas y demostraciones. Stacey (1949) estudió los efectos del descubrimiento dirigido en contraste con el independiente, desde la resolución de problemas significativos”⁶⁹. En esta investigación las actividades están constituidas por problemas retadores con los cuales se espera contribuir al objetivo general.

“Forgus y Schwartz (1957), Maltzman, Eisman y Brookcs (1950), Moss (1960) Tomlinson (1962), Ray (1957) y Rowlett (1960), Gagné y Brown (1961) Corman (1957) y Grote (1960) encontraron diferentes maneras en la que los estudiantes presentaron sus resultados según la revisión de guías en la resolución de problemas”⁷⁰.

El aprendizaje por descubrimiento según Romero (2011) se rige por unos aspectos básicos como:

- ✓ *El sujeto se enfrenta activa y selectivamente a su objeto de conocimiento, modificando éste en función de la significación de los propios esquemas cognitivos.*

⁶⁹ Hernández, C. (2012). Aprendizaje por descubrimiento, p.23.

⁷⁰ Hernández, C. (2012). Aprendizaje por descubrimiento, p.24.

El estudiante aprende porque incorpora la realidad que percibe a los esquemas de conocimiento que ya tiene elaborados, como las estructuras bidimensionales y tridimensionales, ya que constantemente son vistas en el entorno y utilizadas en la parte geométrica, métrica y espacial. Este proceso es lo que Piaget ha denominado proceso de asimilación. Es el estudiante quien complementa y modifica lo que ha aprendido teniendo en cuenta los conocimientos previos. El docente también debe ser consiente del nivel en que están los estudiantes para poder usar materiales aptos a ese nivel, indagar en los conocimientos que traen los estudiantes frente a una temática y de esta manera poder realizar prácticas enriquecedoras como la que se espera lograr en este estudio.

- ✓ *De manera prevalente, nuestros esquemas mentales se nutren de significados, y la información queda registrada semánticamente.*

La información que recibe un estudiante es asimilada en su cerebro y almacenada con un significado especial, por ello los estudiantes al recordarla no se confunden en las temáticas, si estas han sido almacenadas o desarrolladas con un valor especial, como por ejemplo si tuvieron que armar hexágonos con fichas geométricas y luego de lograrlo, de seguro no olvidaran la forma que éstas figuras tenían y la estructura del hexágono, es decir, son capaces de relacionar el nombre con la estructura. Por lo tanto el docente debe esforzarse en presentar objetos de aprendizaje de forma tal que el estudiante pueda familiarizarse con el conocimiento y asignarle un valor o significado personal. El docente debe tratar de motivar a sus estudiantes en el desarrollo de las actividades, porque a medida que un estudiante está motivado en el

desarrollo de una situación mejor será la actitud y creatividad que demuestre en solucionar problemas.

- ✓ *Tanto el proceso cognitivo como los resultados del aprendizaje dependen de los constructos personales del sujeto acerca del objeto específico de conocimiento.*

Un constructo personal es la forma en que el sujeto da significado individual a las distintas facetas de la realidad que nos rodea. La implicación educativa de este principio, es que el profesor antes de enseñar cualquier concepto, debe asegurarse que los términos que va a utilizar para enseñarlo tienen el mismo significado⁷¹. Es decir, que el docente luego de indagar sobre los conocimientos previos de sus estudiantes se da cuenta de los conceptos que poseen y si estos coinciden o si son iguales para todos ya que sobre estas bases se construye los nuevos conceptos y de esta manera se hace más comprensiva una explicación.

- ✓ *La captación que el sujeto tiene de su realidad no es meramente cognitiva, ni tiene porqué ser enteramente consciente ni verbalizable, sino que es una captación “personal” que implica al sujeto en su totalidad.*

Cuando el estudiante interactúa con su entorno toma la información de una forma global y de esta misma forma es construida en su mente. *“Por lo tanto no solamente están implicados procesos cognitivos, sino también emociones, sentimientos y sensaciones y la mezcla de todos ellos, en ocasiones produce un aprendizaje o un conocimiento “intuitivo” difícilmente verbalizable. Por ello determinadas tendencias pedagógicas defienden una postura global del aprendizaje entendiendo que muchas*

⁷¹ Romero, M. (2011). El aprendizaje por descubrimiento. Revista digital para profesionales de la enseñanza. Federación de la enseñanza de CC.OO. DE Andalucía. 16 de septiembre de 2011.

veces este aprendizaje se basa en sensaciones o intuiciones, sin que los alumnos puedan explicar lo que afirman que han entendido”⁷².

- ✓ *En el desarrollo de aprendizajes significativos una condición importante es la intención del sujeto, que se encuentra estrechamente vinculada con sus motivos.*

Los estudiantes suelen presentar aprendizajes significativos en las materias que más les gustan, o en las que le entienden al docente o en las que le ven más utilidad en la vida práctica. También es importante considerar que se propicia un aprendizaje significativo si el estudiante tiene voluntad de aprender o de colocarle significado a un conjunto de proposiciones o de afirmaciones dadas por el docente. Existe una estrecha relación entre el aprendizaje significativo y la motivación que muchas veces lo único necesario para enseñar, es motivar.

- ✓ *La actividad intelectual por la que el sujeto descubre su conocimiento no es aleatoria, sino organizada por características estructurales propias que se encuentran peculiarmente jerarquizadas dentro de un sistema global que, a su vez, aspira a mantener su organización interna.*

El aprendizaje se produce por la interacción de las estructuras mentales, ya que son estas las que organizan, elaboran y procesan la información de forma sistemática. No se puede argumentar que el aprendizaje se da en la mayoría de los casos de forma espontánea ni por el azar, lo que puede considerarse es que el nuevo conocimiento es incorporado de forma automática a los esquemas ya existentes.

⁷² Romero, M. (2011). El aprendizaje por descubrimiento. Revista digital para profesionales de la enseñanza. Federación de la enseñanza de CC.OO. DE Andalucía. 16 de septiembre de 2011.

- ✓ *El aprendizaje no es la retención pasiva, sino construcción de significados, derivados de la actividad cognitiva autoestructurante.*

Lo anterior quiere decir que las estructuras mentales de los niños se están constantemente elaborando, almacenando, estructurando y recuperando la información de forma activa y en la mayoría de ocasiones de forma motivada. La forma de aprender es cuando se toma la información del exterior, se le da un significado y se incorpora a las estructuras ya existentes en los niños.

También Romero (2011) expone como los principios de la teoría del aprendizaje por descubrimiento los siguientes:

- ✓ *El aprendizaje por descubrimiento encuentra su punto de partida en la identificación de problemas.*

El resultado de aprender a través del descubrimiento es ejecutar un proceso, habilidad, recurso o pensamiento que antes no existía. Esto lo permite el enfrentar al estudiante ante la solución de un problema, porque a través de algo desconocido el estudiante es capaz de elaborar una serie de hipótesis que comprueba en la práctica y lo que obtiene es una solución que se convierte en un conocimiento novedoso e interesante.

- ✓ *El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso investigador de resolución significativa de problemas.*

El proceso implícito en la resolución de problemas está limitado por unas determinadas variables entre las que se destacan:

- ✓ *Relevancia motivacional del problema:* si no existe voluntad por parte del estudiante o deseo de aprender o inquietud para resolver el problema, se puede decir que no podrá ser resuelto. Él educando debe tener un fin, un propósito o un motivo para resolver el problema.
- ✓ *Grado de complejidad:* El estudiante intuye el nivel de complejidad que presenta el problema y el lograr desarrollarlo o acercarse a la solución aumenta la confianza matemática en sí mismo.
- ✓ *Nivel de conocimientos previos y competencia intelectual del sujeto:* La experiencia en la docencia y la historia de la matemática ha mostrado que no todo estudiante o persona que es expuesto a un problema retador es capaz por sí mismo de resolverlo porque no se tienen los conocimientos previos para ello, o porque no se es lo suficientemente habilidoso o por que se carece de una competencia intelectual.
- ✓ *Variables de personalidad como autoconcepto, estado emocional*

La motivación en la solución de un problema le permite al estudiante retomarlo una y otra vez cuando no le encuentra solución, e inclusive es capaz de investigar sobre él.

- ✓ *El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjeturas.*

Las matemáticas son la ciencia especial en el cual las conjeturas tienen significancia estas se vuelven más interesantes si se puede indagar, corroborar y profundizar en ellas por que a través de la prueba de una conjetura se descubren conocimientos más duraderos y significativos. Se garantiza que algo existe o ha sido descubierto si

se puede demostrar o verificar porque es solo mediante el criterio de comprobación que se puede ratificar el concepto de descubrimiento. En este aspecto se hace referencia a la aplicación del método científico, el cual consiste en plantear hipótesis y probarlas o verificarlas.

✓ *El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores.*

Al respecto Piaget (1981) decía: *“Un error corregido puede ser más fecundo que un éxito inmediato”*⁷³, porque las ideas fecundas, las cuales son originadas por los estudiantes (en la mayoría de los casos orientados por el docente) son posibles de ser implementadas y llevadas a la práctica de forma exitosa. Lo anterior es factible debido a que en las experiencias de aula son los estudiantes quienes están construyendo el conocimiento y se han enfrentado a problemas donde el docente puede ver rutas de aprendizaje, las cuales puede orientar en cursos posteriores y también caminos que conducen a errores en los cuales el docente puede direccionar el conocimiento o corregir posturas.

*“Existen numerosas citas que nos acercan a entender los errores como un aspecto positivo en nuestro proceso de aprendizaje. El error, la equivocación, la confusión, ya no son, no deberían seguir siendo signos negativos en el proceso educativo. El error se instaura no ya como un elemento sancionador y descalificador, sino como aspecto de diagnóstico y de orientación. Siempre nos hemos servido de ellos para la evaluación, pero se empieza a entender que “de los errores también se aprende”*⁷⁴.

⁷³ Piaget, J. (1981). La teoría de Piaget. Infancia y Aprendizaje. Monografía (2): 13-54.

⁷⁴ Torbay, A. (1994). El nivel de conocimiento de los alumnos al finalizar 8º EGB/1º Ciclo de la ESO: un acercamiento constructivista. Recuperado el 2 de noviembre de la URL <ftp://tesis.bbt.ull.es/ccssyhum/cs79.pdf>

Serán tenidos en cuenta lo expuesto por Romero (2011) en cuanto a principios y enfoques del aprendizaje por descubrimiento.

2.6. La percepción visual

Los aspectos de percepción visual tienen que ser tenidos en cuenta a la hora de presentar información en forma visual, es muy común en primaria y aún en secundaria dar a conocer en clase de matemáticas, problemas geométricos en forma visual.

Las funciones visuales según Barraga (1997) que se desarrollan son de tipo: óptico, óptico-perceptivo y de percepción visual, de las cuales el expone lo siguiente:

- ✓ *“Las funciones ópticas son: control fisiológico de los músculos del ojo, respuesta a la luz, enfoque, fijación, seguimiento, convergencia, acomodación y movimiento (hasta los 3 primeros meses de vida).*
- ✓ *Las funciones óptico-perceptivas: discriminación de forma, tamaño, color, relaciones espaciales y coordinación visomotora, reconocimiento e interpretación, identificación o nominación (entre los 4 y los 24 meses de vida).*
- ✓ *Las funciones perceptivo-visuales: discriminación figura - fondo, complementación visual, relación partes-todo, asociación visual. Requieren de las funciones ópticas y del desarrollo de la comprensión de lo que se ve, la asociación con otras experiencias visuales, la memoria visual. Son funciones totalmente cognitivas (entre los 2 y los 7 años)”⁷⁵.*

⁷⁵ Barraga, N. (1997). Textos reunidos de la Doctora Barraga. Madrid: ONCE.

Las funciones visuales expuestas por Barrata (2011) serán tenidas en cuenta, en especial las funciones *perceptivo-visuales por relacionarse y desarrollarse más en el estudio*.

Existen autores como Kavale (1982) el cual señala que *“la percepción visual se refiere al proceso de interpretar y organizar la información visual”*⁷⁶ y a su vez Kulp (2004) enfatiza en la importancia de la percepción a tal punto de indicar como *“...en estudios anteriores han demostrado una relación significativa entre la percepción visual y la habilidades en matemáticas”*⁷⁷, es decir, una pobre o no fortalecida habilidad visual se refleja en un bajo rendimiento en matemáticas.

Existen otras investigaciones como la realizada en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia cuyo proyecto se enfocaba al talento matemático y participaban estudiantes de 13 a 16 años en los cuales “se establecieron relaciones entre las características asociadas al talento matemático y las habilidades y procesos de visualización cuando los alumnos resolvían problemas en contextos algebraicos. Los autores Jiménez, Rojas y Mora (2011) concluyen que la generalización está relacionada con la discriminación visual, la organización de la información con el procesamiento visual y la flexibilidad con la identificación visual,..., otros estudios han analizado la relación entre el uso de la percepción visual de los alumnos y las teoría de Piaget sobre el pensamiento lógico espacial (Olson, 1978) y estados del

⁷⁶ Kavale, K. (1982). Meta-Analysis of the relationship between Visual Perceptual skills and reading achievement J Learn Disability 15(1):42-51.

⁷⁷ Kulp, M., Earley, M., et al. (2004). Are visual perceptual skills related to mathematics ability in second through sixth grade children? *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 26(4): 44-48.

cerebro que relacionan con diferentes aspectos de la percepción basada en imágenes y el razonamiento geométrico (Campbell et al., 2009)⁷⁸.

Hoffer (1977) establece varias habilidades físico-psicológicas relevantes para el aprendizaje en matemáticas, relacionadas con la visualización en general, las cuales son: coordinación ojo-motor, la percepción figura-contexto, la conservación de la percepción, la percepción de la posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual.

Lo anterior nos ratifica la importancia del nivel de percepción que tiene un estudiante a la hora de resolver problemas.

Conclusiones del capítulo 2

Autores como Guzmán (2008), Mcgee (1979), Cantoral (2000), Godino (2012), Hernández (2001), Arcavi (2003), Hitt (2002), Del Grande (1990) y Zimmermann y Cunningham (1991) contribuyen al estudio, en características, definiciones, sugerencias y recomendaciones con respecto de la habilidad matemática visualización en el aula, ya que la consideran relevante a tal razón de afirmar que si se desea que un estudiante aprenda matemáticas inevitablemente debe visualizar lo cual ratifica que la habilidad visualización favorece el aprendizaje de las matemáticas. También se tendrá en cuenta los aportes realizados por Kulp (2004), Kavale (1982) con respecto a la percepción visual ya que influyen dentro de la visualización.

⁷⁸Ramirez, R. Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. 2012, p.17.

En la tesis se asume la definición de problema propuesta por Pérez (2004) y Falk (2001) bajo el modelo propuesto por Pölya (1965). En esta sección se destacan Pölya (1965), Kilpatrick (1967), Schoenfeld (1985,1992); Krulik y Rudnik (1987); Falk (2001), Pérez (2004), English y Halford (1995), Lesh y Zawojewski (2007), y Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012).

La teoría de la comunidad de práctica de Wenger constituye uno de los marcos teóricos que sustenta la tesis. Esta teoría afirma que el aprendizaje basado en la participación puede ser muy beneficioso para los miembros de la comunidad. En la parte escolar mejora en el estudiante el desarrollo cognitivo y social facilitando la aprehensión de conceptos y un aprendizaje duradero y significativo. También es vista como un proceso de aprender y de conocer por tal motivo reconoce al significado, la práctica, la comunidad y la identidad como las categorías básicas para caracterizar la participación social.

Los estudiantes al interior de las comunidades de practica aprenderán siguiendo lo expuesto por Bruner (1984) y Romero (2011) en cuanto al aprendizaje por descubrimiento ya que este permite potenciar las estrategias metacognitivas y el aprender a aprender por sí mismo, dentro de un aprendizaje guiado.

CAPÍTULO 3. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE LA HABILIDAD VISUALIZACIÓN

El fortalecimiento de las habilidades y competencias en matemáticas en las últimas décadas han sido una parte esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Existen investigaciones recientes enfocadas en desarrollar y potencializar todo tipo de habilidad matemática para la solución de problemas rutinarios y retadores. Según los estándares básicos de competencias en matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación se involucra la visualización dentro de las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras. También afirma al respecto *“esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica”*⁷⁹.

Las actividades diseñadas en este capítulo se dirigen a fortalecer la habilidad: visualización dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas presentando una metodología que logre el afianzamiento de dicha habilidad. También el diseño de actividades persigue detectar los errores y dificultades presenten los estudiantes de grado séptimo en el proceso de visualización.

⁷⁹ Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperable el 10 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf p.57

3.1. Estructura de las actividades

Se han diseñado cinco actividades las cuales abordan problemas retadores y se han sustentado en el marco teórico propuesto anteriormente. Las actividades son diseñadas dentro del último período académico (tercero) del Colegio Campestre San Diego. El sistema de actividades hace parte del desarrollo del eje espacial y sistemas geométricos, es decir, se busca favorecer la habilidad visualización relacionada con contenidos geométricos de grado séptimo.

Se reflejan los siguientes componentes en cada una de las actividades diseñadas e implementadas en los estudiantes de séptimo grado, las cuales involucran problemas no rutinarios. Al momento de integrarse estos aspectos se genera un fortalecimiento de la habilidad visualización en estudiantes de la Educación Básica (ver Figura 6).



Figura 6. Relación entre las actividades y el marco teórico

El sistema de actividades que permite alcanzar el objetivo principal del estudio se ha estructurado en: tema, objetivo, sugerencia metodológica, materiales a utilizar y desarrollo de la actividad.

Para fortalecer la habilidad visualización en estudiantes de grado séptimo del colegio Campestre San Diego, se implementa la metodología presentada a continuación.

- 1) Se entrega la guía a cada estudiante los cuales conforman grupos de tres o cuatro integrantes. La guía presenta problemas retadores.
- 2) Se les menciona lo importante de seguir las instrucciones generales que propone la guía de trabajo y observen de esta forma las imágenes e información contenida en ellas para establecer que se les sugiere en cada situación.
- 3) Los integrantes del grupo socializan las situaciones según el análisis realizado de cada una de las figuras o imágenes, en correspondencia a lo señalado por la comunidad de práctica de Wenger.
- 4) Socialización general de los problemas retadores donde se tienen cuenta los aportes de los estudiantes y la guía del docente, para plantear la solución correspondiente.

3.2. Actividades basadas en problemas para favorecer la habilidad matemática visualización

A continuación se describen las actividades a realizar y la forma detallada como se desarrollaron.

3.2.1. Actividad 1. Me familiarizo con la visualización

Objetivo: Familiarizar a los estudiantes de grado séptimo con las habilidades de visualización

Sugerencia metodológica. Primero se precisa que estas habilidades consisten en coordinar la visión con el movimiento de segmentos y polígonos, en otras palabras, coordinación visomotora; percepción de la posición de figuras en el espacio; discriminación visual; percepción figura contexto y percepción de relaciones espaciales.

Para el desarrollo de las actividades, el aula se organiza en pequeños grupos de 3 estudiantes, donde la posición del líder emergerá naturalmente en el transcurso del desarrollo de las actividades. Teniendo en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger se implementa las actividades, con un tiempo estimado de dos horas realizadas en diferentes sesiones.

Con el objetivo de fortalecer las potencialidades que ofrece la visualización, se orientarán las acciones a desarrollar por los estudiantes a través de preguntas que propician la búsqueda del conocimiento matemático. Al concluir el desarrollo de las actividades se realizará una socialización y evaluación de los resultados. El docente estará presente en la implementación y ejecución de las actividades. La autora de esta tesis además pretende fomentar un ambiente positivo y de confianza en los estudiantes para motivarlos en la realización de las actividades. Para la resolución de las actividades propuestas se pretende que los estudiantes utilicen las fases propuestas por Polya (1965).

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco.

Desarrollo de la actividad

1. Rompepolígonos.

Habilidad a trabajar: Percepción de la posición en el espacio.

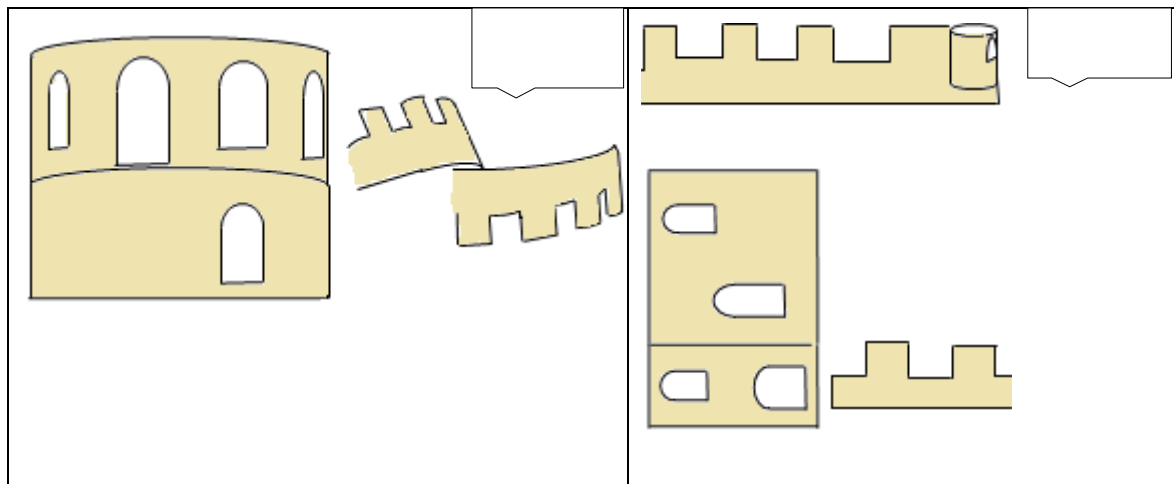
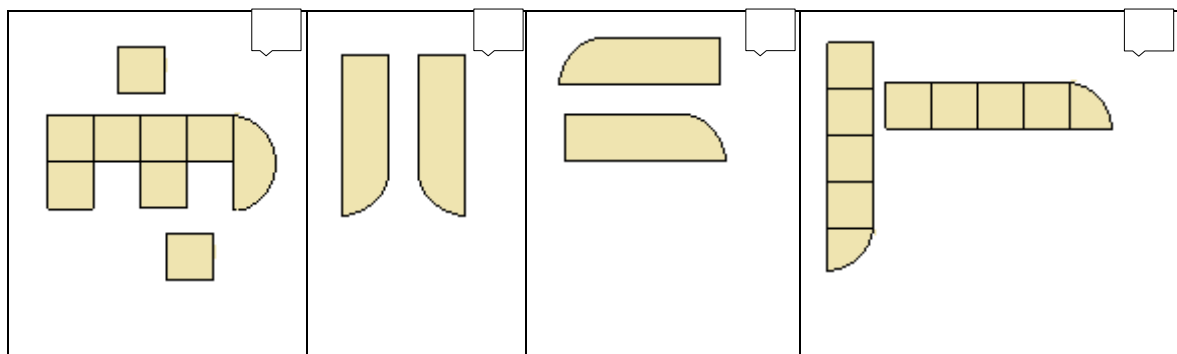
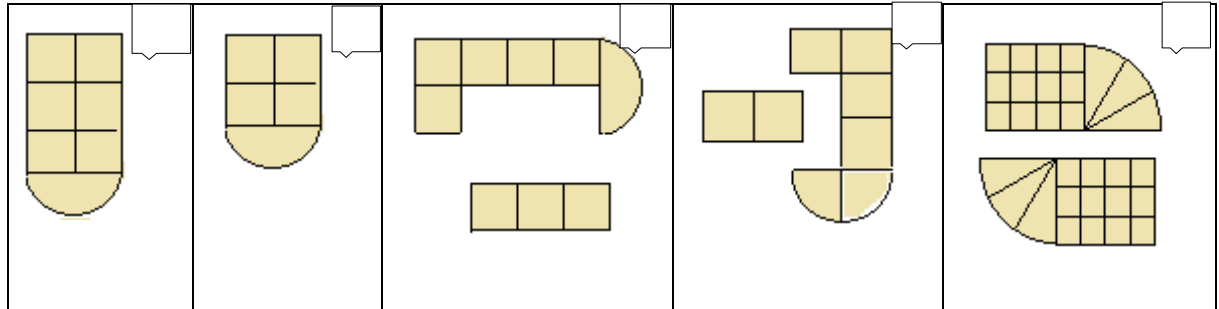
Objetivo: Realizar inversiones, rotaciones y cambiar posiciones.

Arma la fachada del Colegio Campestre San Diego utilizando las piezas que se presentan en la parte de abajo. En la imagen se han colocado números a las estructuras de la fachada, como ventanas y puertas. Las partes sólidas del edificio se han delimitado en la imagen y numerado como 10 (Torre A) y 11 (Torre B) para una mayor facilidad al momento de relacionarlas.



Para relacionar la estructura de la imagen del colegio con las formas o piezas que aparecen en la parte de abajo, debe colocar en la parte superior derecha de cada

celda el número que corresponde a la estructura de la fachada, de tal forma que encaje con cada elemento de la imagen.

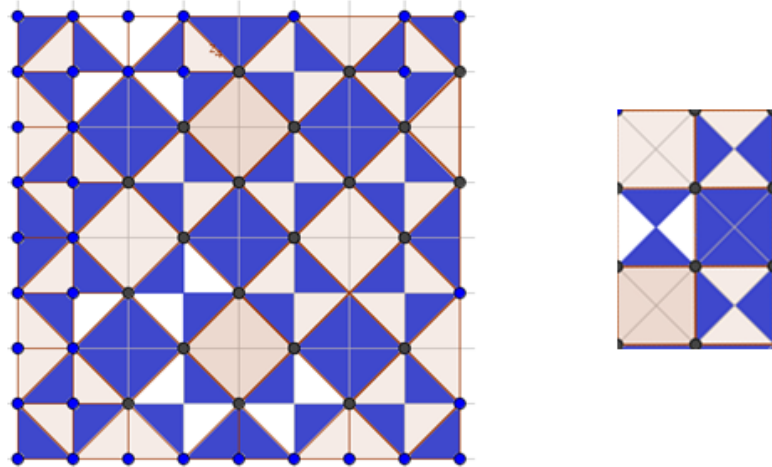


2. Los azulejos.

Habilidad a trabajar: Seguir caminos con los ojos y discriminación visual.

Objetivo: Reconocer formas poligonales que componen estructuras.

Juan ha pintado el piso de su cuarto. La figura de la derecha es una parte del piso, aunque se ha cambiado de posición. Identifique y delimítala en el azulejo esa figura.



¿Cuántas de estas figuras completas de la derecha están contenidas en el azulejo?

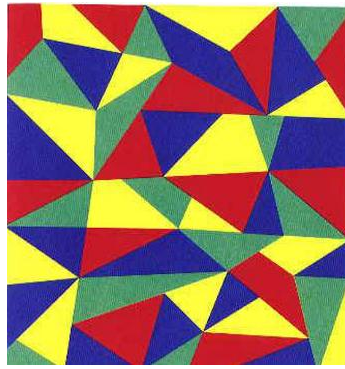
3. La estrella.

Habilidad a trabajar: Percepción figura contexto

Objetivo: Localizar figuras escondidas y unir polígonos ensamblados con respecto al contexto.

En la siguiente figura hay una estrella de cinco puntas, encuéntrala. Luego delimítala con color⁸⁰.

⁸⁰ Tomado de <http://elcajondesastre.blogcindario.com/2006/10/>

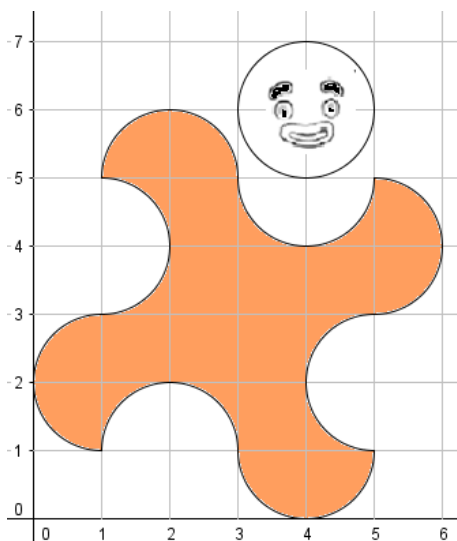


4. El hombre de jengibre.

Habilidad a trabajar: Percepción de relaciones espaciales.

Objetivo: Relacionar la posición de dos o más objetos para completar una figura.

Dibuje un cuadrado y un rectángulo que no sea cuadrado cuyas áreas sean iguales al área sombreada del hombre de jengibre y escriba sus dimensiones o escribe las medidas de sus lados.



¿Consideraría que un triángulo podría representar el hombre de jengibre de forma tal que tuviese igual área?, ¿Si es así, qué tipo de triángulo; equilátero, isósceles ó

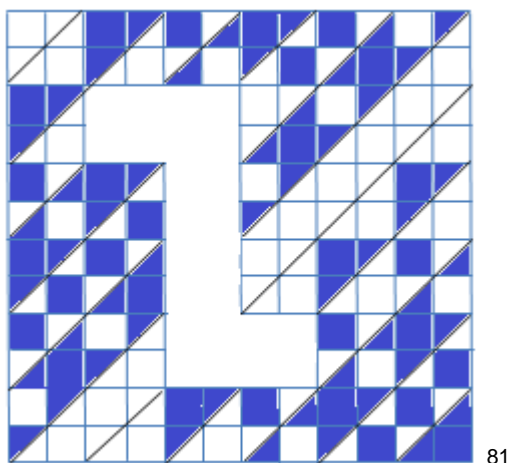
escaleno utilizarías? ¿Cómo lo dibujarías? ¿Cómo le explicarías tu solución al profesor?

5. La congruencia.

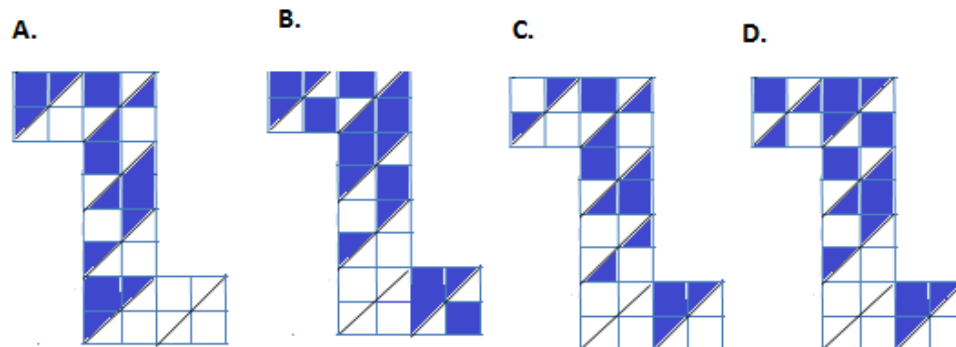
Habilidad a trabajar: Percepción de relaciones espaciales.

Objetivo: completar una figura y sucesiones de diseños.

En la figura se muestra un esquema de baldosines 2×2 que se han pintado de distintas maneras y se han armado de modo que se formen franjas diagonales con distintos diseños. Parte del esquema hace falta. Se dan cuatro alternativas que representan piezas. ¿Cuál pieza completa el esquema?



⁸¹ Thomas K. (2007). Elementary Number Theory with applications. 2^{nda} edición Pág.257.



b. Si se quisiera seguir construyendo el diseño, describe como construirías las piezas correspondientes a una nueva columna de piezas 2×2 que se colocaría a la derecha.

c. Como se puede ver, algunas de las piezas 2×2 son iguales, de modo que una de ellas es la imagen trasladada de la otra. Describe la(s) traslación(es) que llevan una pieza 2×2 en su imagen.

d. Si el esquema cubriera todo el plano, describe una traslación tal que la imagen sea igual al recubrimiento original.

6. A completar cuadrados.

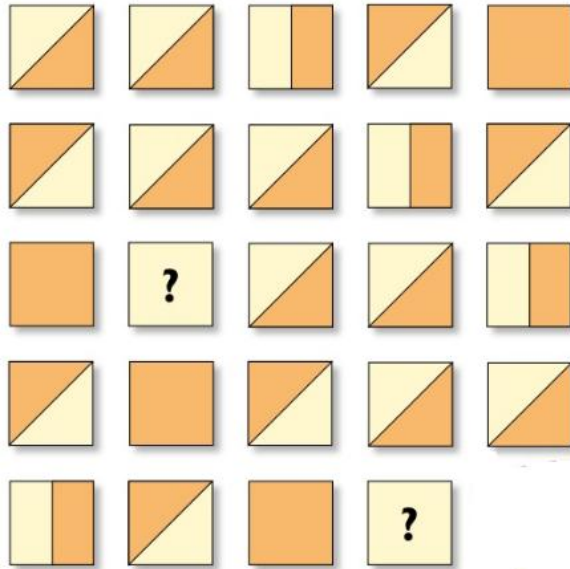
Habilidad a trabajar. Percepción de la posición en el espacio.

Objetivo: Completar sucesiones siguiendo algunos patrones de posición.

Observa y descubre el orden lógico en que se han dispuesto estos 24 cuadrados.

a. Completa las dos piezas que faltan.

b. Propón o formula un esquema similar en el cual las piezas presenten un orden lógico y se deban descubrir las piezas faltantes.

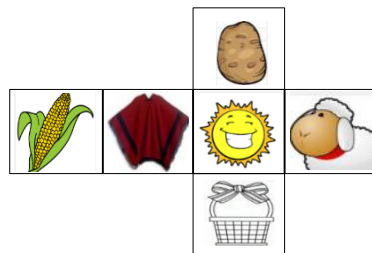
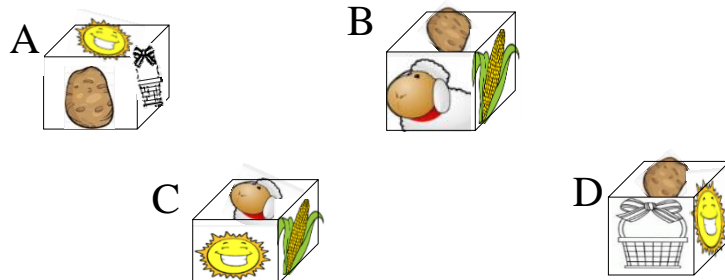


7. Desarmando y armando sólidos.

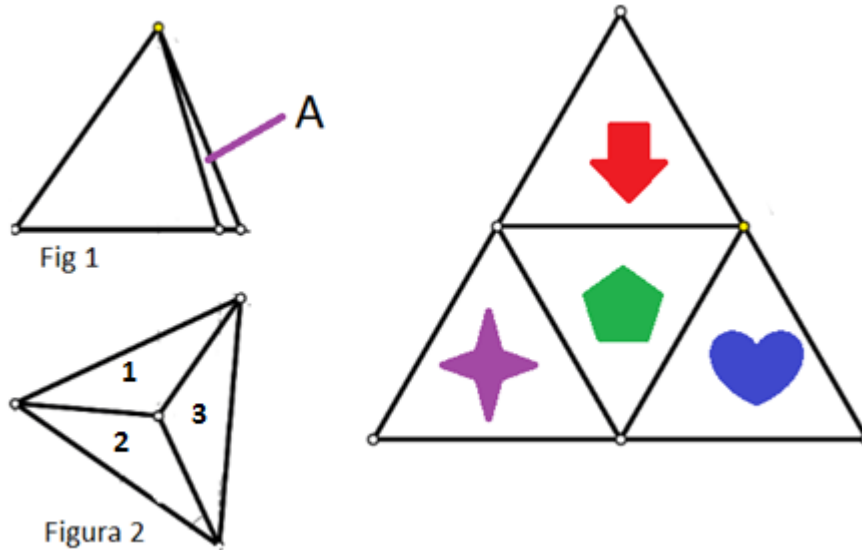
Habilidad a trabajar: Percepción de la posición en el espacio.

Objetivo: Realizar inversiones rotaciones y cambiar posiciones.

a. ¿Cuál cubo armado corresponde a su desarrollo o al cubo abierto?



Observa detenidamente el tetraedro.



- b. En la Figura 1, si en la cara A está la estrella ¿Cuál imagen podría estar presente en la cara frontal? ¿Existen más soluciones? ¿Por qué?
- c. Con respecto a la Figura 2, si en la base se dispone el corazón, ¿Cuál imagen se observaría en la cara 1? ¿Cuál en la cara 2? y ¿Cuál en la cara 3?

Actividad de investigación.

1. ¿De cuántas maneras se pueden dibujar 6 cuadrados en el plano de modo que cada cuadrado comparta una arista con al menos uno de los demás?
2. Imagínate cómo se puede doblar las figuras trazadas. ¿Cuáles de estos dibujos pueden doblarse para formar un cubo y cuáles no?
3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Cuántos croquis diferentes que puedan doblarse para formar un cubo han encontrado en total entre todos los compañeros del curso?

3.2.2. Actividad 2. Integrando las habilidades de la visualización

Objetivo: Estimular las habilidades de la visualización: discriminación visual, coordinación viso-motora, percepción de la posición en el espacio y conservación de la percepción, en estudiantes de grado séptimo.

Sugerencia metodológica. Se pretende integrar dos habilidades en el momento de dar solución a las actividades propuestas. Los estudiantes estarán organizados en pequeños grupos de 3, teniendo en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger, y manejarán un tiempo estimado de dos horas realizadas en diferentes sesiones. Cabe resaltar que los grupos son constantes en todas las actividades.

De igual forma, con el propósito de fortalecer las potencialidades que ofrece la visualización, se orientan las acciones de los estudiantes a través de preguntas que favorezcan la búsqueda del conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático. Se socializan los resultados obtenidos por cada grupo al concluir la actividad, donde se le otorga una evaluación a cada uno de los estudiantes.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco.



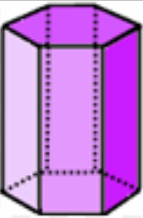

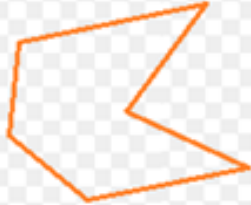

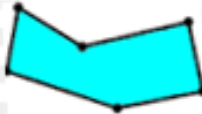

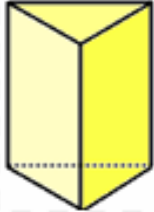


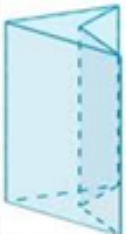
Desarrollo de la actividad.

1. La figura infiltrada

Habilidades a trabajar: Discriminación visual y coordinación viso-motora

Objetivo: Identificar un objeto que es diferente de otros.

Encierra en cada columna la figura que según las características no encaje con las demás y justifica tu respuesta.

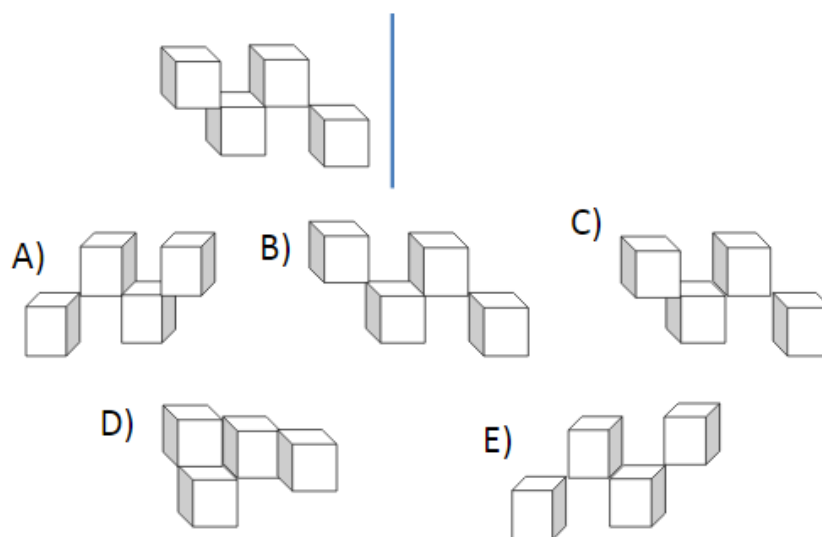
Columna A	Columna B	Columna C
		
		
		
		

2. Los cubos.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales.

Objetivo: Representar modelos de espejos o cambiar posiciones.

Al reflejar la figura con respecto a la línea azul, ¿qué imagen se obtiene?



82

En cada uno de los casos que no representa la respuesta correcta, dibujar la configuración de la cual sí serían la imagen reflejada en una recta vertical.

3. En busca de la realidad.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales

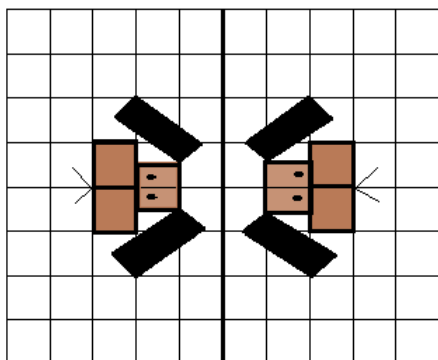
Objetivo: Representar modelos de espejos o cambiar posiciones.

Observa las siguientes imágenes a las cuales se les ha aplicado transformaciones en el plano. Ten en cuenta que la línea repisada representa el eje de reflexión.

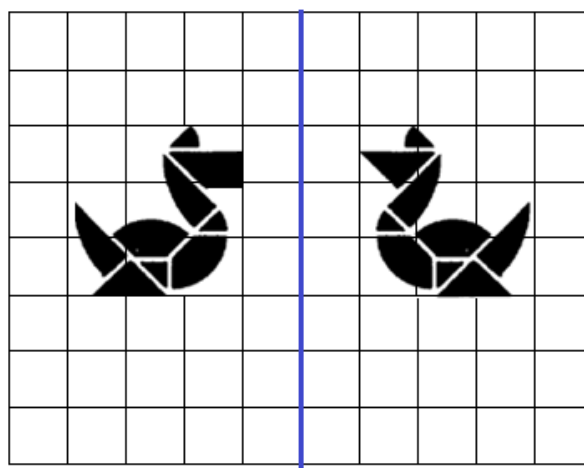
⁸²Tomado de <http://slideplayer.es/slide/5649268/>

a. Descubre cuáles de las imágenes propuestas no concuerdan con la realidad si se hiciera una reflexión en la línea señalada.

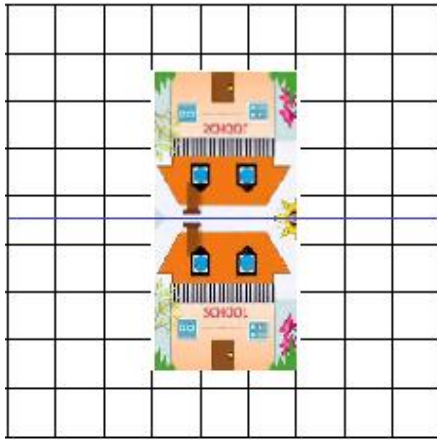
A.



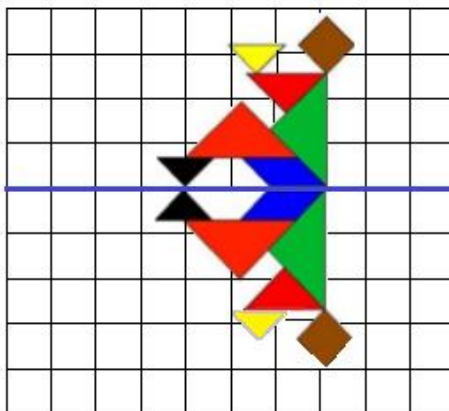
B.



C.



D.



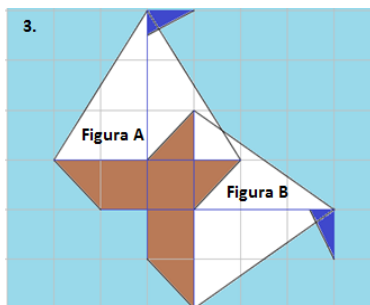
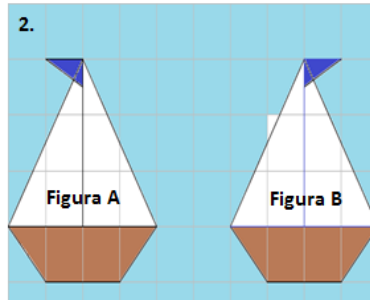
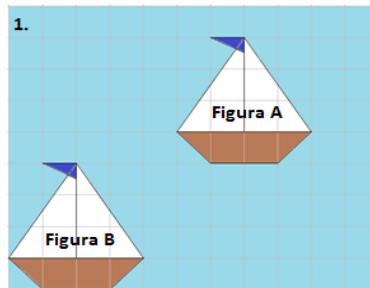
b. Dibujar una figura de su imaginación, un eje de reflexión y la imagen de la figura reflejada en el eje indicado.

4. Los barcos.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales

Objetivo: Representar modelos de espejos o cambiar posiciones

Observa los siguientes barcos y describe una traslación u otra transformación que lleva el barco de la Figura B a coincidir con el barco de la Figura A.



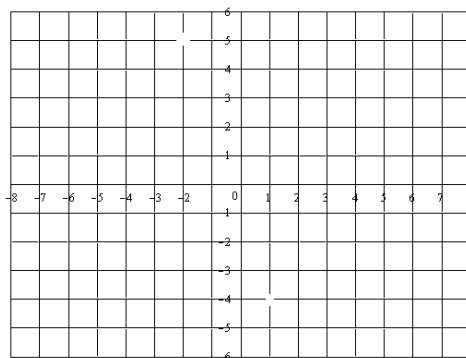
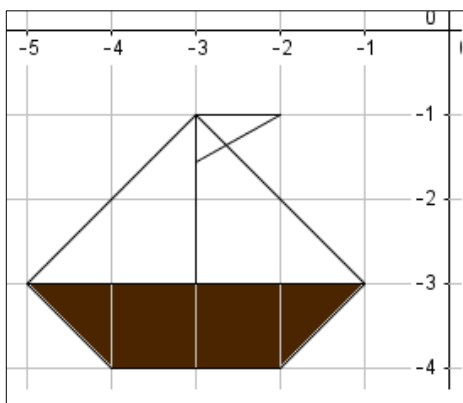
5. La corriente de agua.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales.

Objetivo: Representar modelos de espejos o cambiar posiciones.

Sebastián ha puesto la figura de un barco que él ha dibujado en el plano cartesiano. Jugando con ella, se inventa un cuento en el cual el barco haya sido arrasado 4 km hacia abajo y 4 km hacia la izquierda de donde estaba originalmente. La figura muestra donde quedó el barco. Si cada unidad de la cuadrícula corresponde a un

kilómetro, haga un gráfico que muestre donde estaba el barco originalmente. Usa el plano cartesiano que se presenta en la parte de abajo.

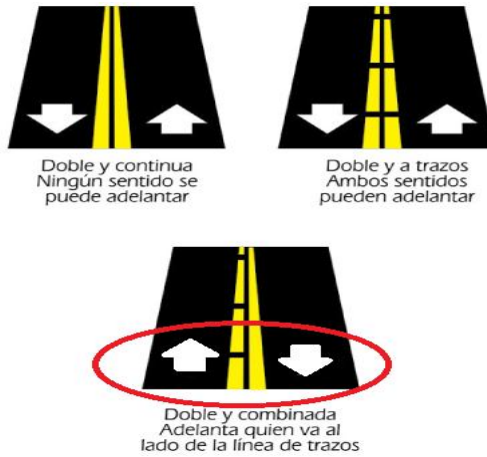


6. Las señales de tránsito

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales

Objetivo: Cambiar posición de figuras de acuerdo a las percepciones espaciales.

Por equivocación una escuela de automovilismo público un volante con la siguiente imagen, el supervisor le ha informado que con solo girar las flechas blancas 180 grados resolvería el error.



En la siguiente imagen ubica las flechas según la sugerencia dada por el supervisor.

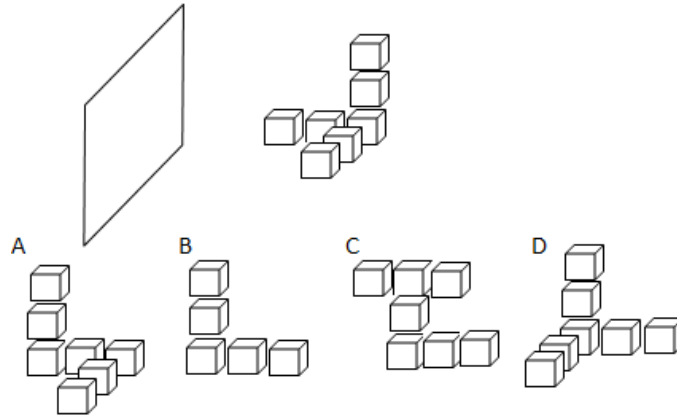


7. A reflejar en el espejo.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales

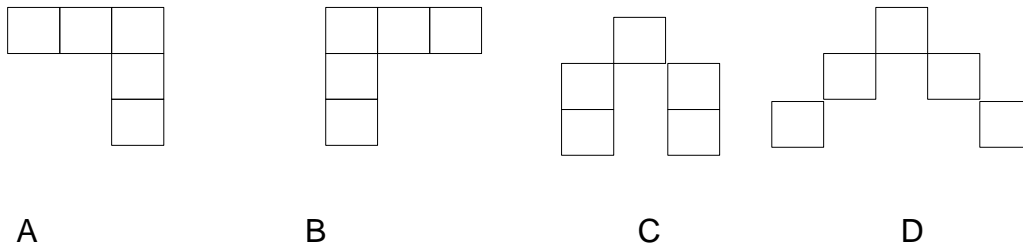
Objetivo: Representar modelos de espejos o cambiar posiciones.

a. ¿Cómo se vería la figura reflejada en el espejo?



83

- b. Describe como se vería la opción C del grupo anterior de respuestas si se mirara desde abajo.
- c. ¿Cómo se vería la figura a reflejar desde la parte superior?



3.2.3. Actividad 3. Estimulando las habilidades de la visualización

Objetivo: Estimular las habilidades de la visualización: memoria visual, conservación de la percepción y percepción figura contexto.

Sugerencia metodológica. Se pretende estimular las habilidades que no fueron desarrolladas en la actividad 2, como son: memoria visual, conservación de la percepción y percepción figura contexto, además se abordarán dos habilidades en el momento de dar solución a las actividades propuestas. Los estudiantes estarán organizados en pequeños grupos de 3, teniendo en cuenta la teoría de la comunidad

⁸³ Tomado de <http://slideplayer.es/slide/5649268/>

de práctica de Wenger, y manejarán un tiempo estimado de dos horas realizadas en diferentes sesiones.

De igual forma, con el objetivo de fortalecer las potencialidades que ofrece la visualización, se orientan las acciones de los estudiantes a través de preguntas que favorezcan la búsqueda del conocimiento matemático. Se socializan los resultados obtenidos por cada grupo al concluir la actividad, donde se le otorga una valoración académica a cada uno de los estudiantes.

Las actividades que a continuación se presentan se relacionan con temáticas propias de grado 7 como son posiciones relativas entre dos circunferencias y movimientos en el plano.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco, entre otros.

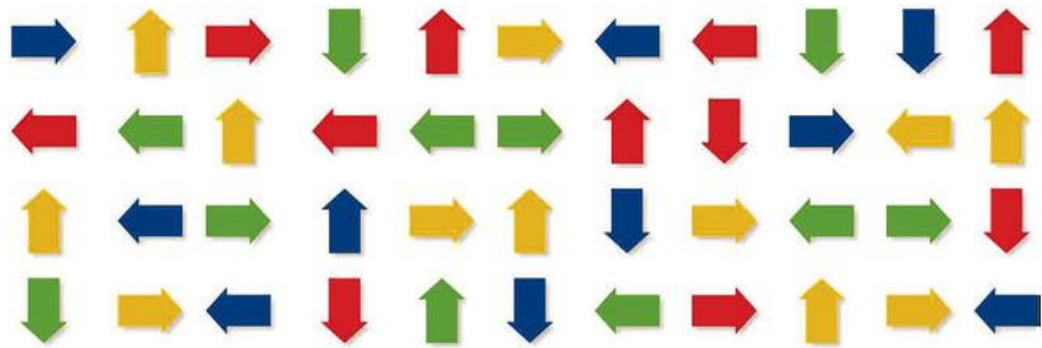
Desarrollo de la actividad.

1. Las flechas

Habilidades a trabajar: Memoria visual y percepción figura contexto.

Objetivo: Recordar el lugar donde estaban los objetos y localizar un grupo de figuras.

Anderson ha dispuesto sus fichas de colores sobre un tapete blanco, algunas flechas se orientan o apuntan a la derecha, a la izquierda, arriba o abajo; tal como se muestra a continuación.



84

Anderson le pide a su amigo Jorge que observe las fichas en su orden horizontal.

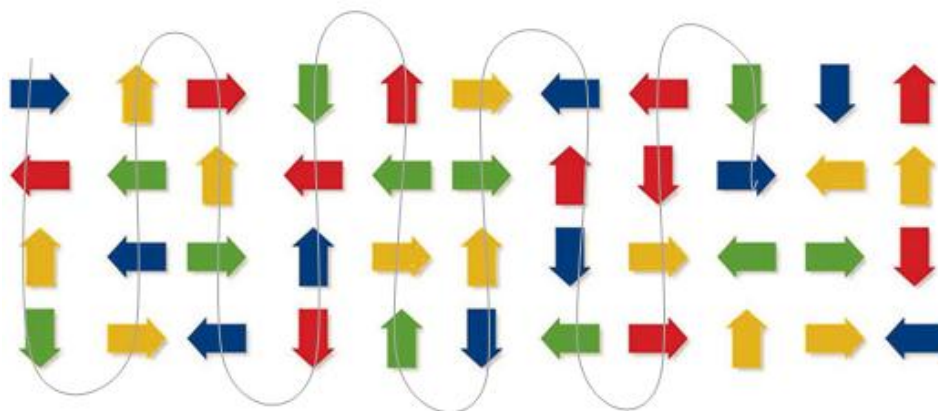
a. Encierre los grupos conformado por cuatro flechas consecutivas, donde la primera apunta a la izquierda, la segunda a la derecha, la tercera hacia arriba y finalmente la cuarta hacia la derecha.

b. Anderson le recuerda a Jorge que se están observando las flechas en su orden horizontal y le pregunta ¿Ha encontrado un grupo de 4 flechas consecutivas las cuales apunten únicamente al norte o sur? Si es así enciérralas.

c. Debido a que Jorge tiene la idea de que Anderson continuará preguntándole decide saber si las flechas que ha colocado Anderson están organizadas formando una sucesión con una regla de formación. ¿Qué opina usted de la duda que le ha surgido a Jorge? Justifica.

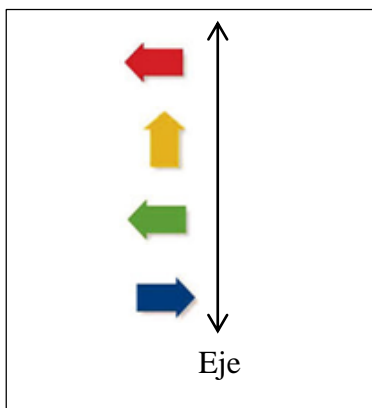
Ahora Anderson le pide a Jorge observar las fichas siguiendo un recorrido vertical, es decir, como se observa en la siguiente imagen

⁸⁴ Imagen recuperable el 12 de septiembre de 2016 de la Imagen tomada de la URL <https://es.pinterest.com/aubrielanderson/vision-therapy/>



d. Anderson ahora pregunta con el nuevo recorrido ¿Ha encontrado un grupo de 4 fichas consecutivas las cuales apunten únicamente al norte o sur o un grupo consecutivo de fichas que apunten a la derecha e izquierda? Justifica.

e. Anderson le dice a Jorge “A que no eres capaz de decirme donde he colocado las flechas que son el resultado de una reflexión con respecto al eje ‘y’ del siguiente grupo de flechas”.



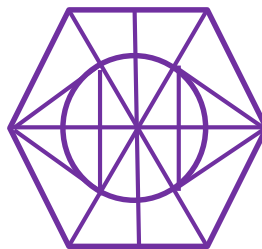
f. Como te habrás dado cuenta Anderson es muy “preguntón” ¿Qué otra pregunta podría haber hecho Anderson referente a sus flechas?

2. El hexágono.

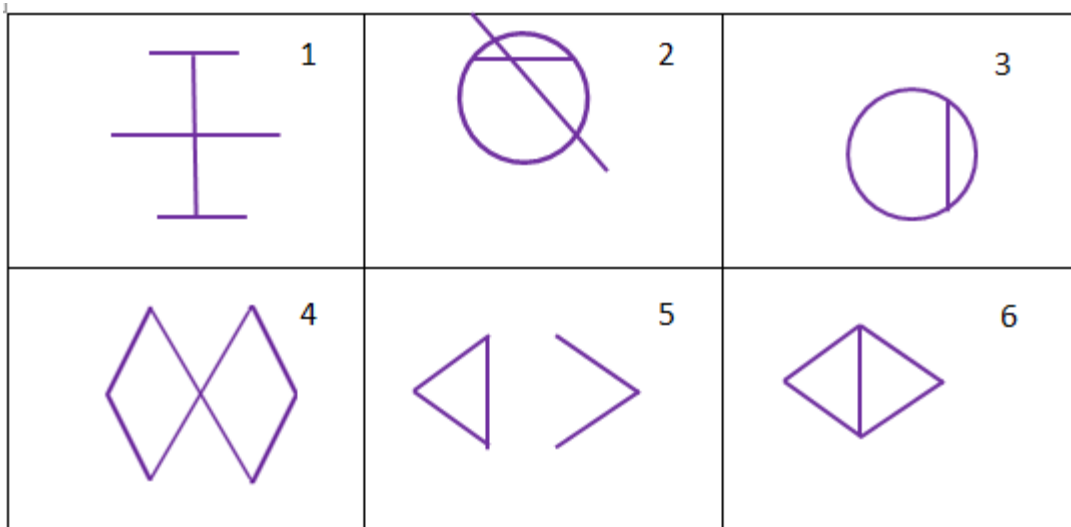
Habilidades a trabajar: Memoria visual y percepción figura contexto.

Objetivo: Formar figuras o ensamblarlas para llegar a otra más compleja recordando la forma como se presentan.

Juan tiene un álbum geométrico y debe conseguir las fichas que al unirlas formen la siguiente figura.



Las fichas que ha conseguido son:



Las fichas que le permiten llegar a la figura deseada son:

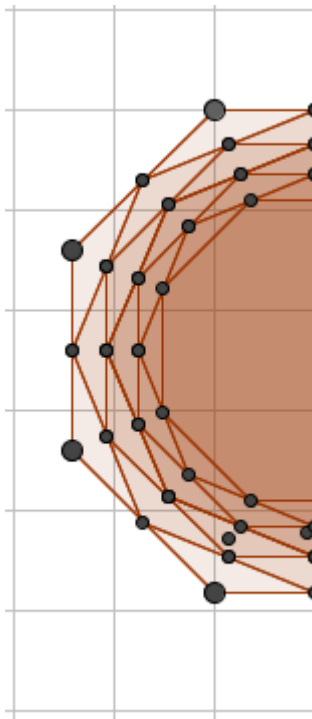
_____.

3. La araña matemática.

Habilidades a trabajar: Conservación de la percepción y percepción figura contexto.

Objetivo: Percibir la constancia en forma y tamaño de la figura en el espacio.

Una araña está tejiendo su telaraña en forma octagonal. Para la construcción, ella une mediante segmentos los puntos medios de cada lado del octágono regular y realiza de forma consecutiva esta acción una vez que obtiene un nuevo polígono regular. Parte de la construcción que ella realiza hacia el interior se muestra en la siguiente figura.



- Si la araña quisiera seguir construyendo su telaraña hacia el interior bajo las mismas condiciones que se pueden observar en la gráfica ¿Qué podría decir del nuevo polígono formado?
- Esta vez supóngase que la araña haya empezado a construir su telaraña partiendo de un polígono irregular y uniéndolo mediante segmentos los puntos

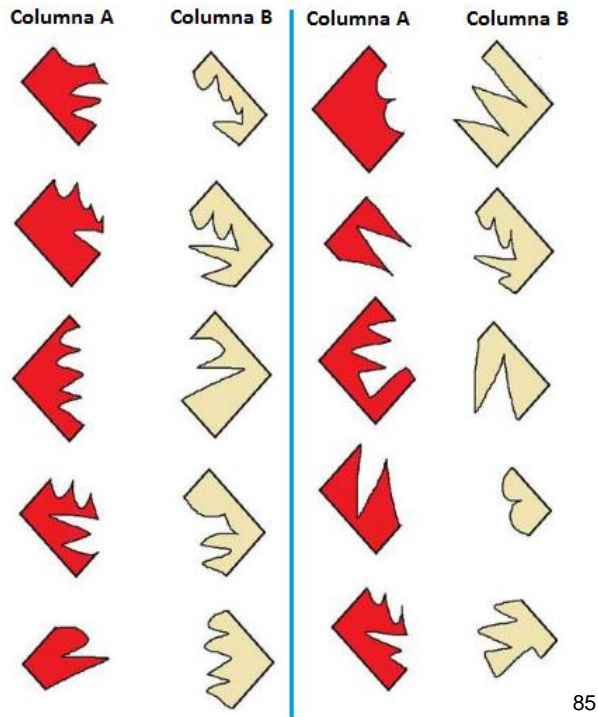
medios de cada lado del polígono construido y de forma consecutiva realiza esta acción una vez que obtiene un nuevo polígono. ¿Se podría decir que el polígono formado mantiene la misma cantidad de lados, pero cambia únicamente su tamaño? ¿Qué opina al respecto? ¿Cómo puede justificar su posición?

4. La media naranja.

Habilidades a trabajar: Conservación de la percepción y memoria visual.

Objetivo: Percibir la constancia en forma y tamaño de la figura en el espacio.

Juan tiene las siguientes fichas para completar. Relaciona las figuras de la columna A con las figuras de la columna B (mediante una línea) de tal forma que al unir las partes forme un cuadrilátero.



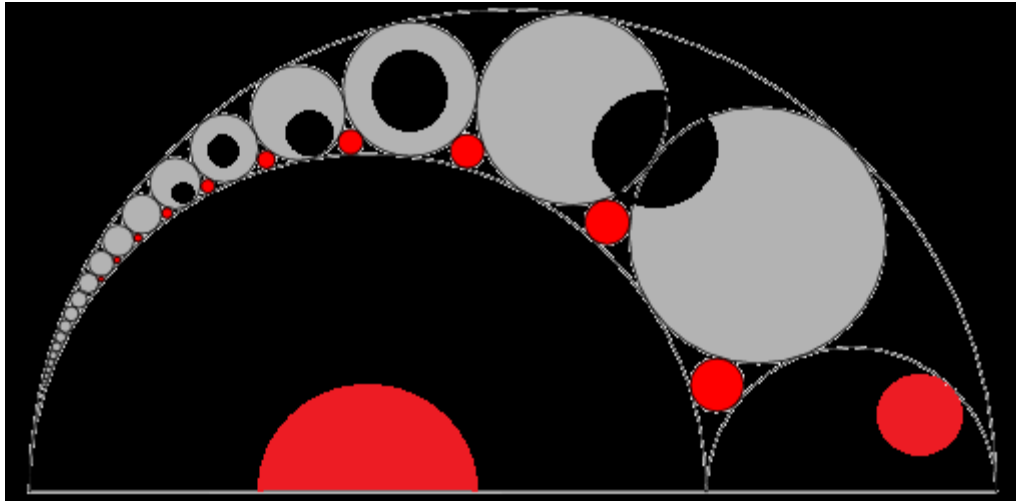
85

5. El mural.

Habilidades a trabajar: Percepción figura contexto y conservación de la percepción.

Objetivo: Percibir la constancia en forma y tamaño de la figura en el espacio.

El siguiente es el mural que ha pintado Antonio. Indica las posiciones relativas de las circunferencias que observas en él, es decir; circunferencias tangentes exteriores, tangentes interiores, concéntricas, exteriores, secantes e interiores.



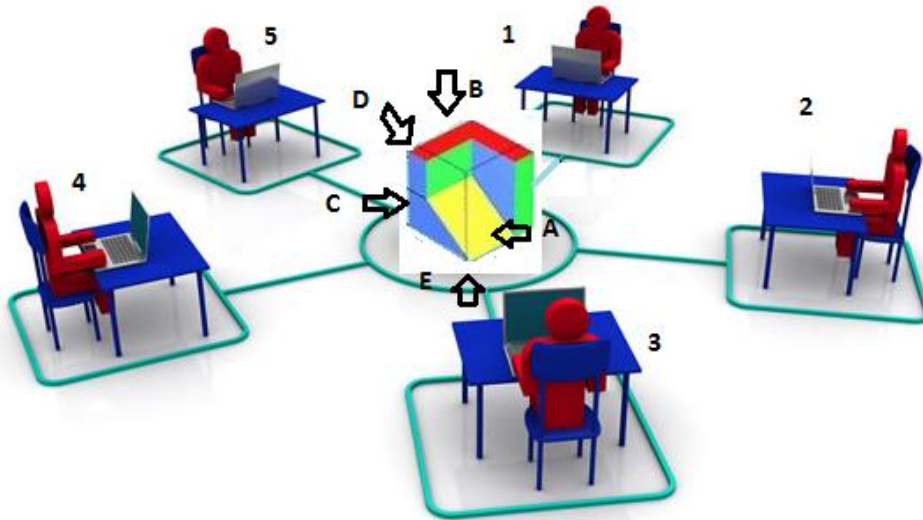
6. El sólido

Habilidades a trabajar: conservación de la percepción y percepción figura contexto.

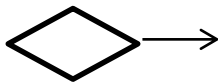
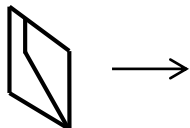
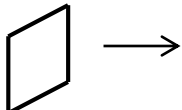
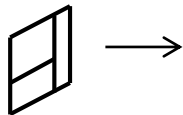
Objetivo: Percibir la constancia en forma y tamaño de la figura en el espacio.

Los siguientes diseñadores gráficos desean identificar las vistas o las perspectivas que podrán tener los turistas cuando observen la figura geométrica que se colocará en la plaza principal de ciudad. Cada uno de ellos debe trabajar en el modelado en 3D a partir de las vistas del cuerpo geométrico.

El trabajador 1 está encargado de la vista superior (B); el trabajador 4, de la vista lateral izquierda (C); el diseñador 3, está encargado de la vista del frente (A); el trabajador 2, de la vista inferior (E) y el último trabajador de la vista posterior (D). La siguiente grafica explica lo anterior, observala.



Los siguientes son los resultados dados a conocer sobre las diferentes vistas del sólido. Clasifica las vistas (frontal, lateral izquierda, vista posterior, superior e inferior)

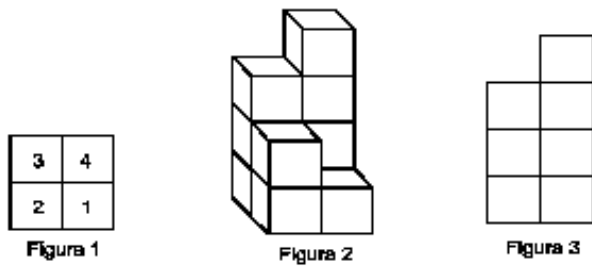


7. Los bloques.

Habilidades a trabajar: conservación de la percepción y percepción figura contexto.

Objetivo: Percibir la constancia en forma y tamaño de la figura en el espacio.

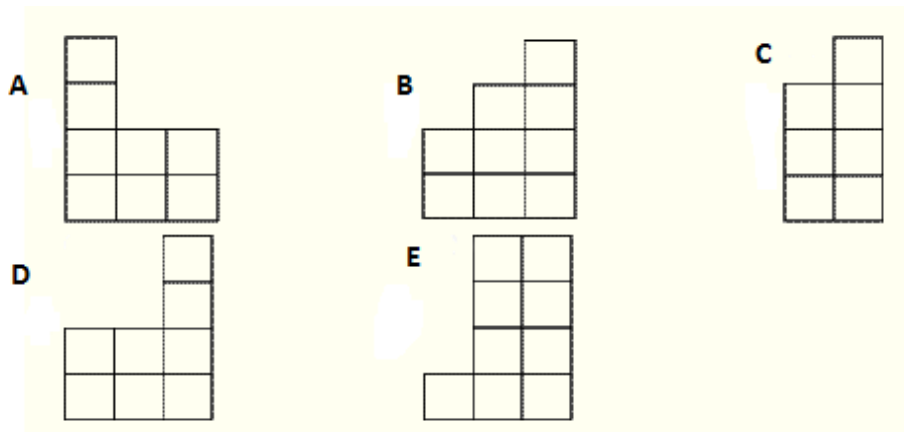
La Figura 1 se llama un "mapa de torre". Los números en cada casilla del mapa indican cuantos cubos están puestos en cada una de las posiciones. La Figura 2 muestra la torre (compuesta de cubos) y la Figura 3 muestra el plano de la torre vista de frente.



- a. ¿Cuál de los siguientes planos es la vista frontal de la torre cuyo mapa se muestra en la Figura 4?

2	2	4
1	3	1

Figura 4



86

- b. ¿Cuál podría ser el "mapa de torre" de la opción A en la anterior respuesta?,
¿Habrá una única solución o cual otra propone? Descríbelas.

8. Las vistas.

Habilidades a trabajar: conservación de la percepción y percepción figura contexto.

Objetivo: Percibir la constancia en forma y tamaño de cubos en el espacio.

A continuación se muestran la vista frontal, la derecha y la vista superior de una figura tridimensional. Identifica la figura que corresponde a las siguientes vistas

⁸⁶ Recuperable el 30 de septiembre de 2016, XIX Olimpiadas Colombianas de Matemáticas de la URL <http://186.28.225.60/math/CI00/pcnprn/pcnprn.htm>

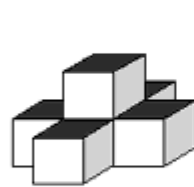
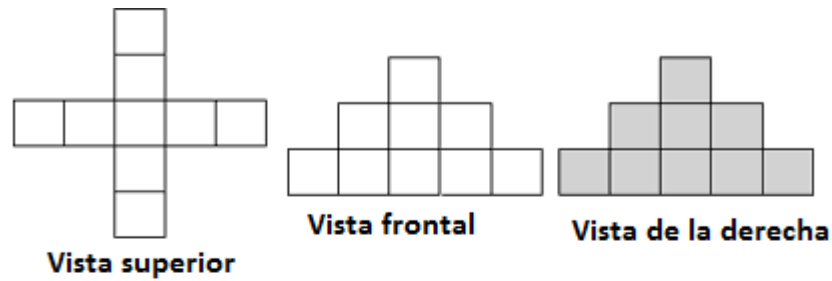


Figura 1

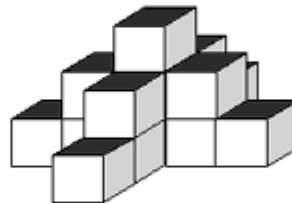


Figura 2

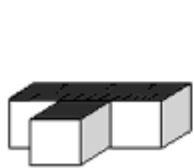


Figura 3



Figura 4

87

3.2.4. Actividad 4. Visualizo y completo.

Objetivo: Observar resultados al integrar tres de las habilidades que ofrece la visualización en estudiantes de grado séptimo.

Sugerencia metodológica. Se precisa que esta actividad consiste en integrar tres de las habilidades que ofrece la visualización, ellas son: discriminación visual, percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio y percepción figura - contexto para lograr dar solución a problemas. Para ello se mantendrán los grupos de tres estudiantes que se conformaron al inicio de la Actividad 1 y ellos la desarrollarán teniendo en cuenta la teoría de la comunidad de

⁸⁷ Recuperable el 3 de octubre de 2016 de la URL <http://worksheets.tutorvista.com/3d-figures-worksheet.html>

práctica de Wenger. El desarrollo de la actividad tendrá un tiempo estimado de dos horas realizadas en diferentes sesiones.

Las actividades incluyen transformaciones en el plano cartesiano de figuras geométricas, letras y dibujos (rotación y traslación), unir o ensamblar polígonos de tal forma que se obtenga uno nuevo.

Los estudiantes en algunos numerales de las actividades deberán justificar su solución utilizando un lenguaje matemático. Posteriormente a la realización de la actividad se dará una valoración académica y se socializarán los resultados.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco.

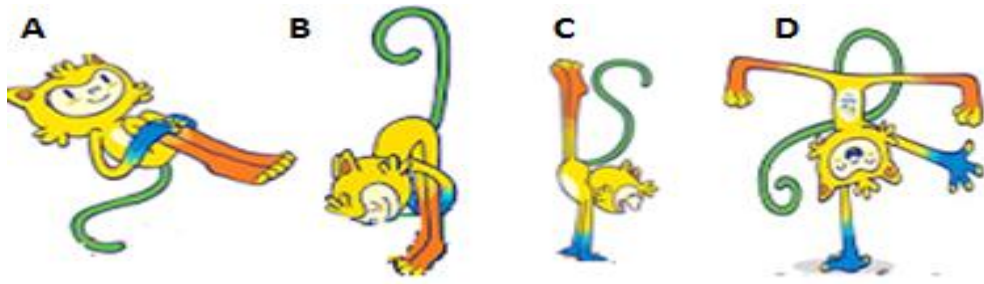
Desarrollo de la actividad.

1. La mascota de los juegos olímpicos.

Habilidades a trabajar: Discriminación visual, percepción de relaciones espaciales y percepción de la posición en el espacio.

Objetivo: Integrar habilidades de visualización para dar solución a un problema.

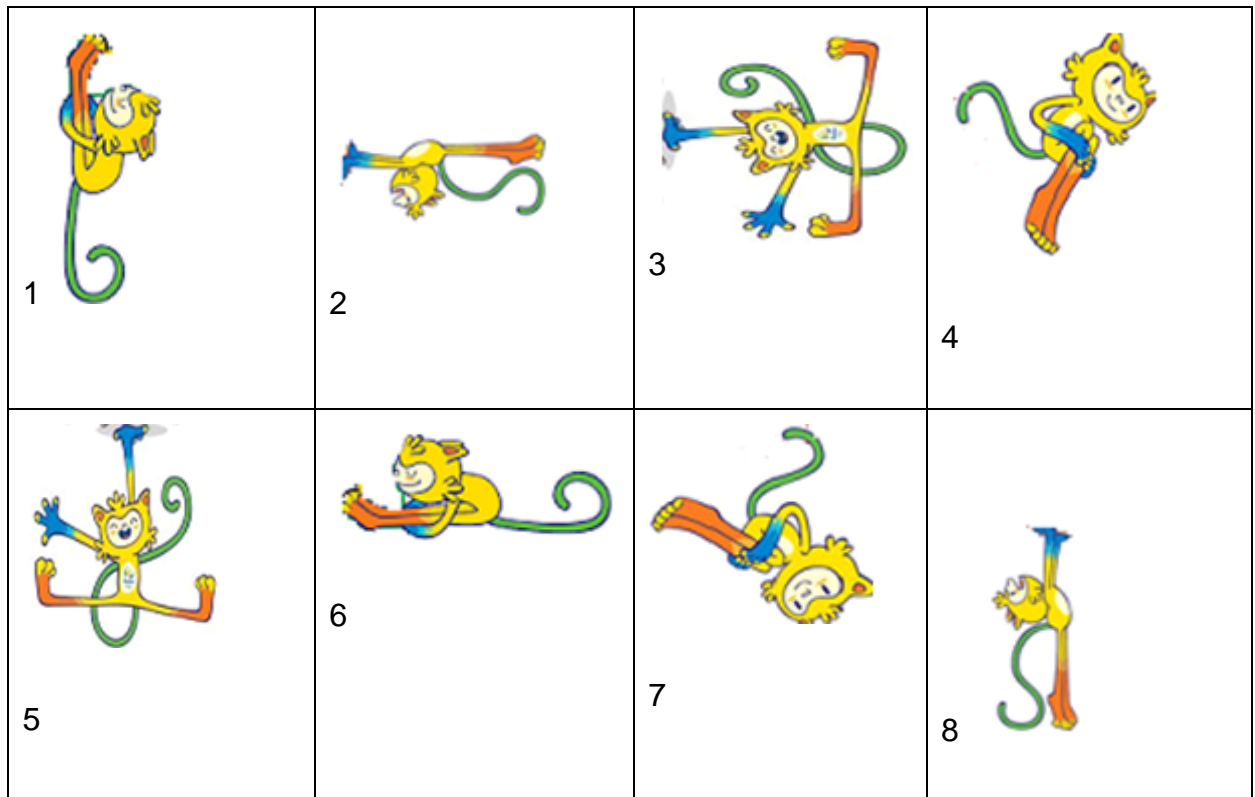
Un diseñador gráfico ha presentado a la mesa directiva de un canal las siguientes imágenes correspondientes a la mascota de los juegos olímpicos. En ellas la muestra realizando algunas poses que representan las competencias a desarrollar en este evento multideportivo internacional. La siguiente gráfica presenta los tipos de movimientos que podrían observar los televidentes.



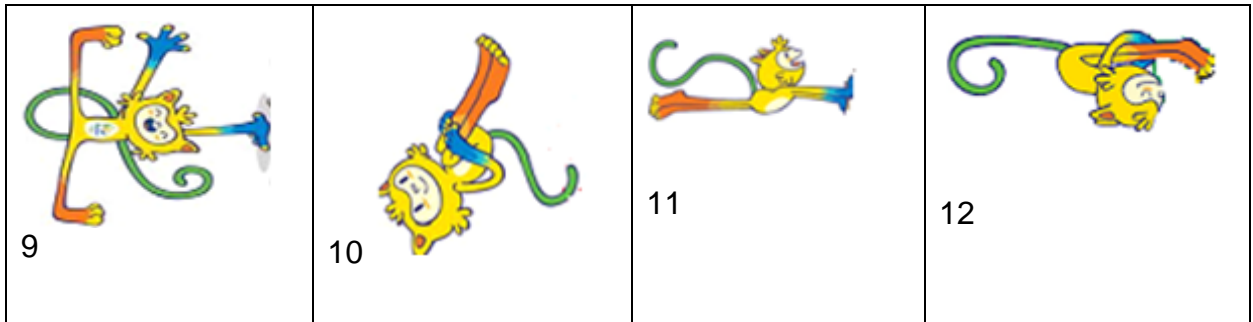
88

Figura 1.

El director del canal ha solicitado ver las imágenes desde diferentes ángulos; por ello a éstas se les ha aplicado una rotación, pero en su afán por entregar el material el diseñador las ha desorganizado. A continuación, se presentan las imágenes.



⁸⁸ Tomado de <https://es.pinterest.com/Andrewpvc/juegos-ol%C3%ADmpicos/>



Con base a la anterior gráfica, ayúdale al diseñador a organizarlas escogiendo todas las fotografías que corresponden a cada una de las imágenes A, B, C y D, para ello se ha colocado un número que corresponde a cada una para mayor organización. Además, se le ha solicitado especificar la cantidad de grados que ha sido girada cada imagen y el sentido utilizado con respecto a la Figura 1.

✓ Las imágenes que corresponden a la fotografía A son:

N° de la imagen: _____ Grado de rotación: _____ Sentido: _____

✓ Las imágenes que corresponden a la fotografía B son:

N° de la imagen: _____ Grado de rotación: _____ Sentido: _____

✓ Las imágenes que corresponden a la fotografía C son:

N° de la imagen: _____ Grado de rotación: _____ Sentido: _____

✓ Las imágenes que corresponden a la fotografía D son:

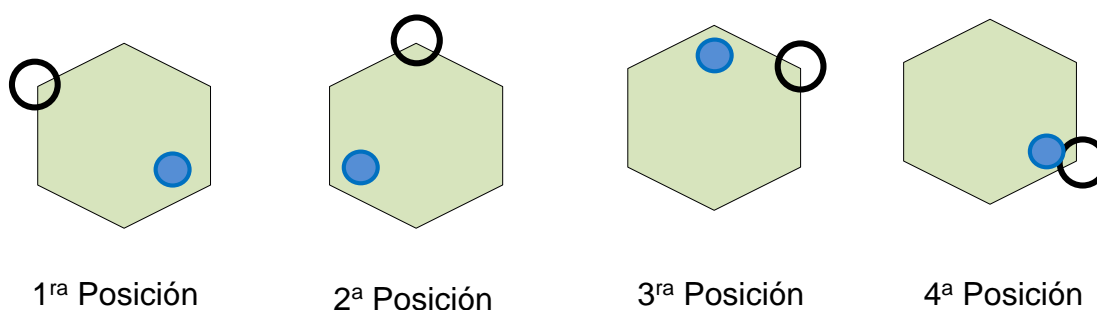
N° de la imagen: _____ Grado de rotación: _____ Sentido: _____

2. La gimnasia rítmica.

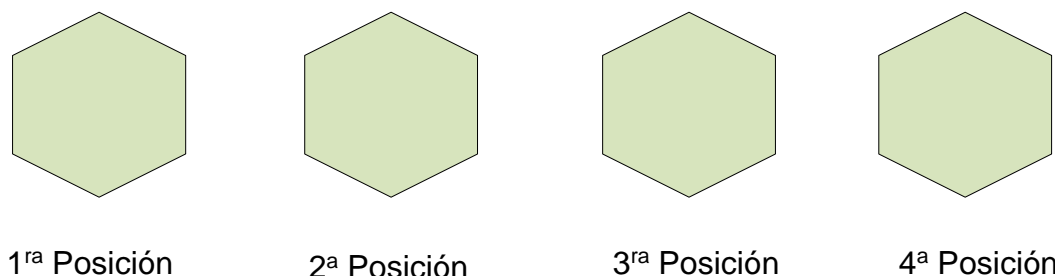
Habilidades a trabajar: Memoria visual, percepción de relaciones espaciales y percepción de la posición en el espacio.

Objetivo: Relacionar la posición de dos o más objetos y completar sucesiones.

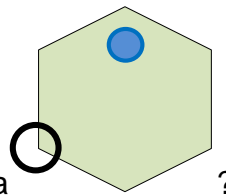
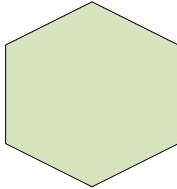
En una competencia de gimnasia rítmica cuyo escenario tiene forma hexagonal regular, las participantes deben realizar movimientos armónicos utilizando algunos elementos como el aro, la pelota, la cinta y la cuerda. En la clase su entrenadora ha colocado algunos de estos elementos sobre la pista y ha pedido a sus alumnas que completen el esquema para realizar una presentación armónica, creativa y con estética geométrica. Además la entrenadora ha colocado una cámara ubicada en un espejo (tal como se observa en la siguiente grafica) con el objetivo de filmar y posteriormente detectar los errores cometidos por sus alumnas. Observa el esquema.



a. ¿Cómo se verá la presentación si se reflejará en un espejo? Ubica en el siguiente esquema la pelota y el aro.



- b. Describa el movimiento consecutivo de la pelota y la cuerda (5^{ta} posición) con relación al esquema presentado por la entrenadora y representarlo en la siguiente imagen.



- c. ¿En qué posición se encuentra la figura ?
- d. ¿En qué posición empieza a repetirse la presentación dirigida por la entrenadora?

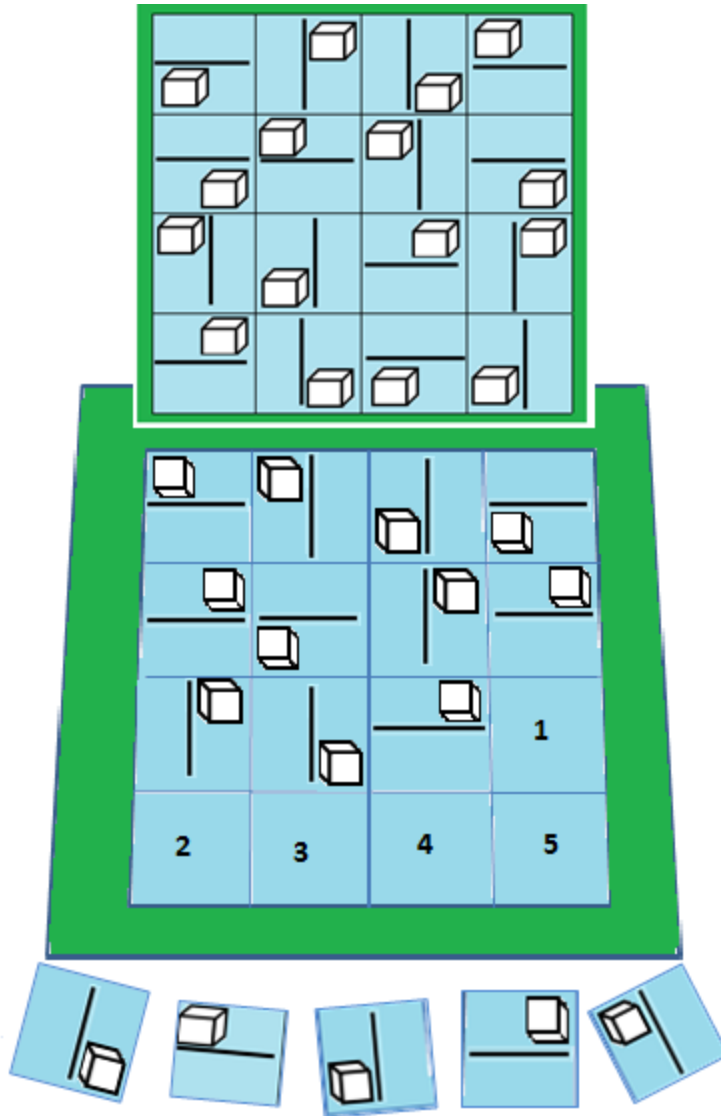
3. El tablero de Mariana.

Habilidades a trabajar: Discriminación visual, percepción de relaciones espaciales y percepción de la posición en el espacio.

Objetivo: Realizar reflexiones y relacionar la posición de dos o más objetos.

Los padres de Mariana le han regalado el siguiente juego el cual presenta dos tableros como se observan a continuación con fichas que se pueden manipular.

- a. Completa el tablero inferior con las fichas dadas de acuerdo a la transformación realizada. ¿Puede relacionar con números las fichas que correspondan a la sucesión dada?



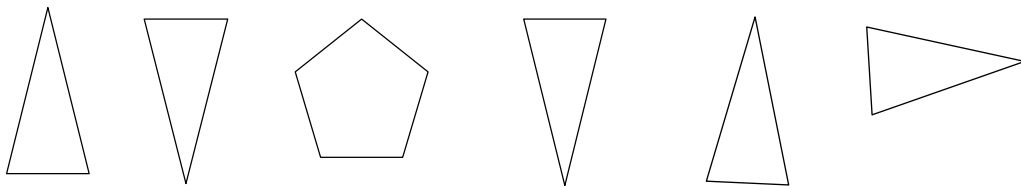
b. ¿Existe alguna pareja de fichas de los dos tableros que evidencie el movimiento de traslación? si es así, ¿puede señalarlos en la imagen y describirlos?

4. Batman vr. El guasón.

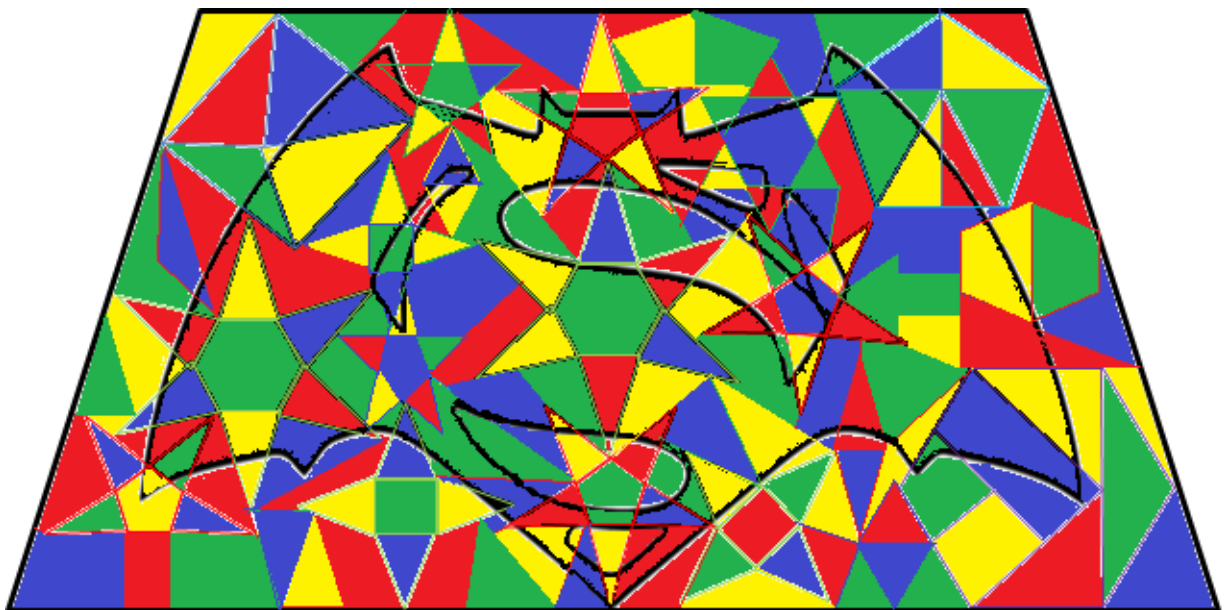
Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y percepción figura- contexto.

Objetivo: Integrar habilidades de visualización para dar solución a un problema.

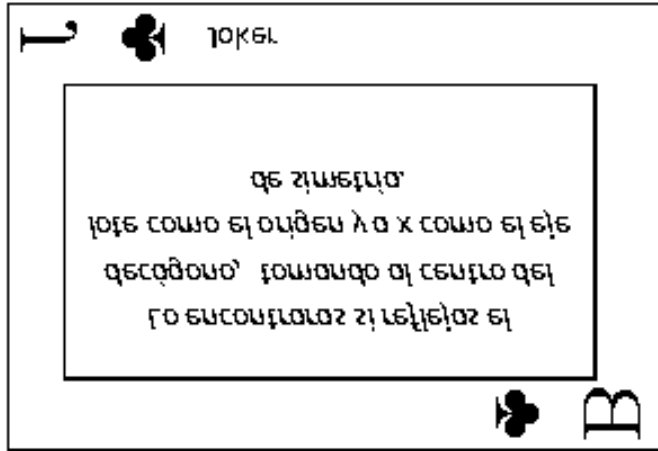
El Guasón se ha apoderado de un lote muy grande a las afueras de ciudad Gótica, el cual se muestra a continuación. Allí tiene secuestrado al detective Gordon y al alcalde de la ciudad. Lo que sabe Batman es que el detective está dentro de una edificación cuyo techo tiene la forma de un decágono cóncavo irregular, y un vértice de este polígono está ubicado sobre la base mayor del lote. El decágono está formado por las siguientes piezas.



- a. Intenta armar la figura mentalmente. Luego describe cómo podría formarse este decágono cóncavo irregular.
- b. Encuentra el polígono, es decir, el lugar donde se encuentra el detective y delimitálo.



Para encontrar el lugar exacto donde está el alcalde, el Guasón le ha enviado la siguiente carta a Batman.



- c. Escribe lo que informa el Guasón y luego ayúdale a Batman a encontrar al alcalde siguiendo las indicaciones.

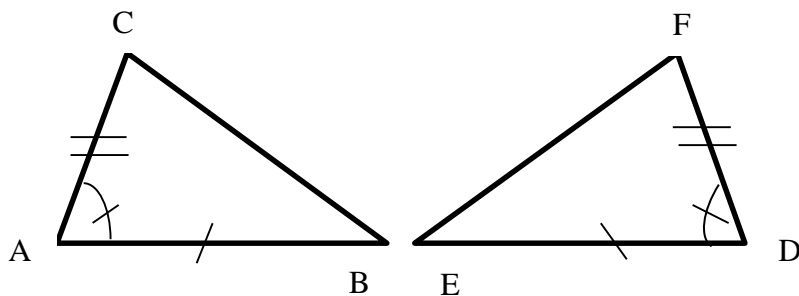
- d. Encuentra y delimita el lugar donde se encuentra el alcalde de ciudad Gótica.
 e. El Guasón le puso una trampa a Batman. ¿Cuál piensas que fue? Justificar completamente su respuesta.

5. Los campos.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual.

Objetivo: Relacionar la posición de dos o más objetos y comparar objetos matemáticos.

“Se desean enmallar dos campos de forma triangular como se presenta en la figura:



89

a) Si el campo ABC tiene 25 cm de perímetro, la cantidad de metros de malla que se necesita para encerrar los dos terrenos es:

a. 25 b. 30 c. 45 d. 50

b) Si el ángulo CAB mide 60 grados, la medida del ángulo EDF es:

a. 60 grados, porque los triángulos son semejantes.

b. 60 grados, porque los triángulos son congruentes.

c. 30 grados, porque los triángulos son semejantes.

d. 30 grados, porque los triángulos son congruentes.⁹⁰

6. El recorrido de Mariana.

Habilidades a trabajar: Percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual.

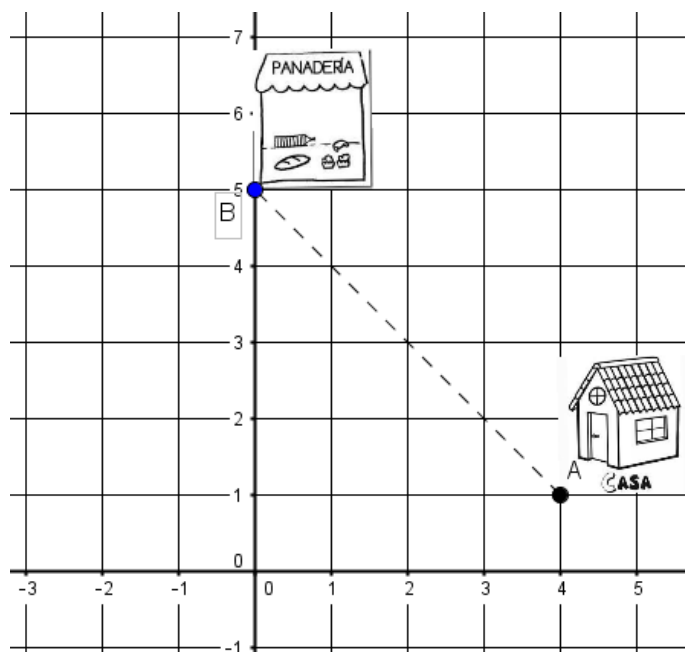
Objetivo: Relacionar la posición de dos o más objetos y comparar objetos matemáticos.

⁸⁹ Quintero, P (2016). Evaluación de Seguimiento académico. Prueba los tres Editores S.A.S. Grado 7° Pregunta 71 y 72

⁹⁰ Quintero, P (2016). Evaluación de Seguimiento académico. Prueba los tres Editores S.A.S. Grado 7° Pregunta 71 y 72. Búsqueda en www.lostreseditores.com

Laura, la mamá de Mariana, le ha pedido el favor de ir a los siguientes lugares para comprar algunos elementos. Laura le ha dado las siguientes indicaciones.

“Al salir de la casa (Punto A), dirígete a la panadería (punto B), luego al supermercado el cual se encuentra descendiendo 3 km y avanzando 3 km a tu derecha (punto C), luego gire 90° hacia la izquierda y avanza 2 km (punto D) para encontrar la papelería, posteriormente gira 90° a tu derecha y avanza 5 km para llegar a la heladería (punto E) y finalmente regresa a casa.” Completa el recorrido según las instrucciones dadas por Laura. Ten en cuenta que cada unidad de la cuadrícula corresponde a un kilómetro.



- a. Mariana se ha dado cuenta que su recorrido se realizó en forma pentagonal y le dice a su mamá que con solo haber caminado en diagonal de un lugar a otro formaría un cuadrilátero y un triángulo. ¿Qué opinas al respecto, puede comprobarlo gráficamente? ¿Cuántas maneras distintas de formar un cuadrilátero y un triángulo resultan al trazar una diagonal?

- b. ¿Hay otras formas que aparecen al trazar una diagonal del pentágono? Si las hay, ¿cuáles son? Si no las hay, explica por qué.
- c. ¿Cuáles otras preguntas relacionadas con la trayectoria de Mariana puedes formular y responder?

3.2.5. Actividad 5. Aplico a profundidad la visualización

Objetivo: explorar el espacio en que se encuentra la figura para comparar sus elementos y establecer relaciones, de esta forma, descubrir los elementos y propiedades de determinadas figuras para llegar a resolver problemas donde implique la utilización de los procesos de visualización.

Sugerencia metodológica. Se precisa que esta actividad consiste en utilizar cualquier habilidad perteneciente a la visualización que dé solución a problemas matemáticos; ellas son: coordinación ojo motor, conservación de la percepción, discriminación visual, memoria visual, percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio y percepción figura – contexto, para lograr dar solución a problemas. Se mantendrán los grupos conformados desde la primera actividad.

Los siguientes problemas han sido tomados, modificados de las pruebas PISA (Sección Geometría) y de Olimpiadas colombianas de matemáticas, excepto lo referente a los triángulos MacMahon.

Para el problema correspondiente a los *triángulos de MacMahon* se entregará a cada grupo las 24 fichas las cuales compone esta clase de triángulos. Las fichas que corresponden a este problema se entregan físicamente y se podrán observar en la

guía de trabajo. Los grupos trabajarán en la solución de la guía de trabajo y al finalizarla se realizará una socialización y evaluación de los resultados. El docente estará presente en todo el desarrollo de la actividad, orientará e invitará a los estudiantes que presentan dificultades a indagar para obtener la solución correcta.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, colores, hojas en blanco y fichas (triángulos de MacMahon).

Desarrollo de la actividad.

1. Los cubos de siete.

Habilidades a trabajar: percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio y percepción figura – contexto y memoria visual.

Objetivo: Invertir, desplazar y rotar la posición de las figuras para dar solución a los problemas planteados en relación con experiencias cotidianas y matemáticas.

Sandra y Carlos están jugando con sus dados. Sandra le dice a Carlos que los dados son cubos con un sistema especial de numeración, en los que se aplica la siguiente regla: *El número total de puntos en dos caras opuestas es siempre siete.* A continuación Sandra la experta en el juego le explica gráficamente esta regla a Carlos.

Si en la vista superior se encuentran 6 puntos, en la vista inferior (caras apuestas) debe haber solo un punto, de esta forma sumarán siete, tal como se observa en la Figura 1.

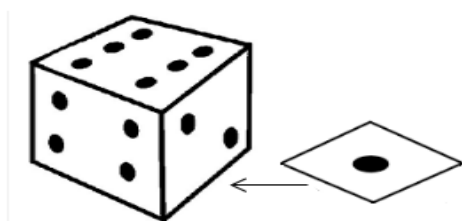


Figura 1

a. Sandra le comenta a Carlos que puede construir un dado sencillo cortando, doblando y pegando las aristas; estos dados se pueden hacer de muchas maneras. A continuación le presenta 2 figuras que se pueden utilizar para armar cubos, con puntos en las caras. Sandra le pide a Carlos determinar si las siguientes figuras (2 y 3) al doblarlas por sus aristas logran cumplir esta regla, de que la suma de caras opuestas del cubo sea 7. Ayúdale a Carlos a resolver la situación y justifica la respuesta.

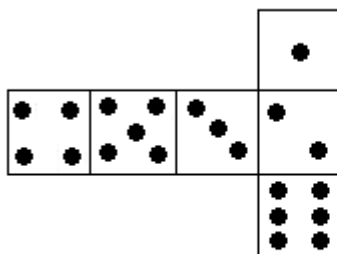


Figura 2

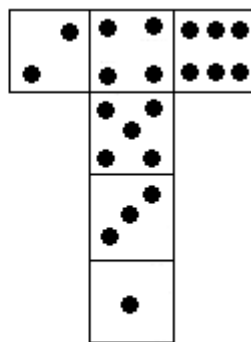
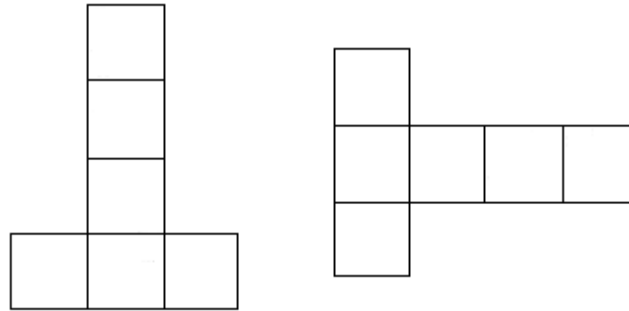
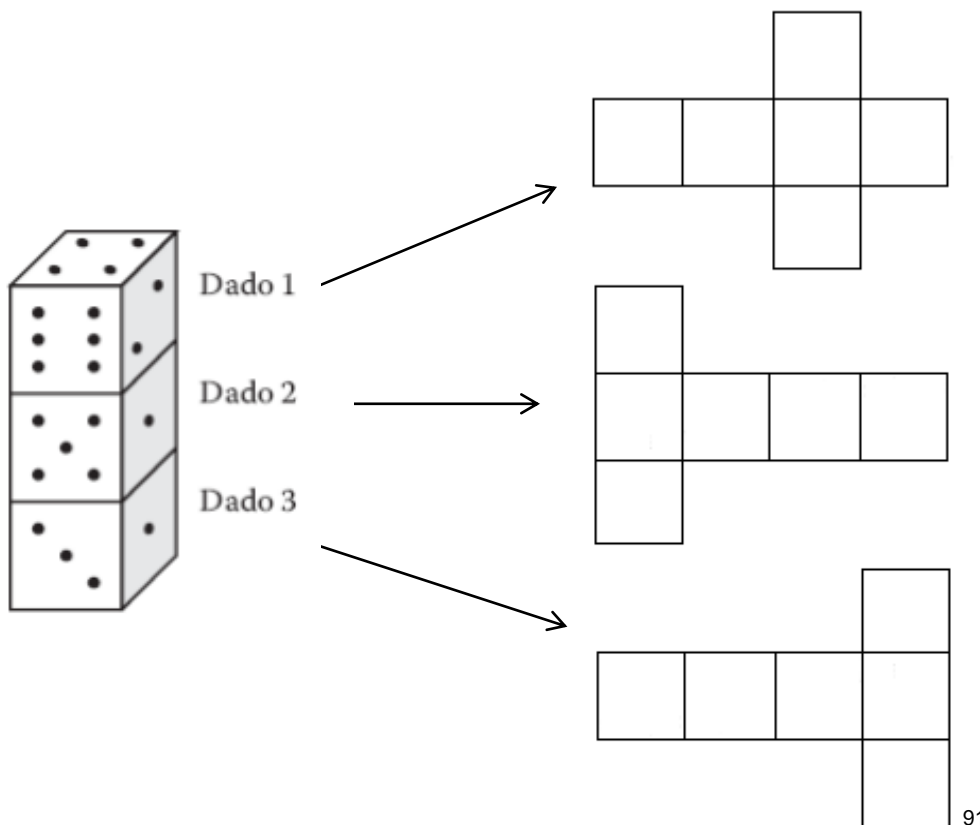


Figura 3

b. Sandra le dice a Carlos como ya te has vuelto un experto en el tema propón en las siguientes estructuras un ejemplo y un contraejemplo de esta situación.

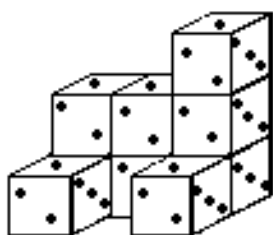


c. Carlos parece que se está divirtiendo con la situación y presenta a Sandra la siguiente torre de dados, en la cual le pide a ella proponer la estructura completa de la torre, es decir, la distribución de puntos en los dados 1, 2 y 3. ¿Cuál sería la respuesta de Sandra?



⁹¹ Tomado de Caño. A. (2009). Pisa: matemáticas y resolución de problemas II. Recuperado 13 de octubre de 2016 de la URL: <http://ficus.pntic.mec.es/apis0004/PruebasPISA/PISAGEOMETRIAsol.pdf>. Modificado por la autora de esta tesis.

- d. Sandra está entusiasmada con la situación, presenta y enseña a Carlos este juego y ahora Carlos la está retando. Carlos le ha hecho nuevamente una pregunta. ¿Es verdad que la suma de la vista lateral y la suma de la vista posterior de la torre de dados (no visibles), presentan el mismo valor? ¿Qué opinas al respecto?
- e. Observa detenidamente la figura realizada por Carlos y determina la vista frontal, posterior y la vista lateral de la siguiente pila de cubos.



Caras laterales	Cara superior	Cara inferior

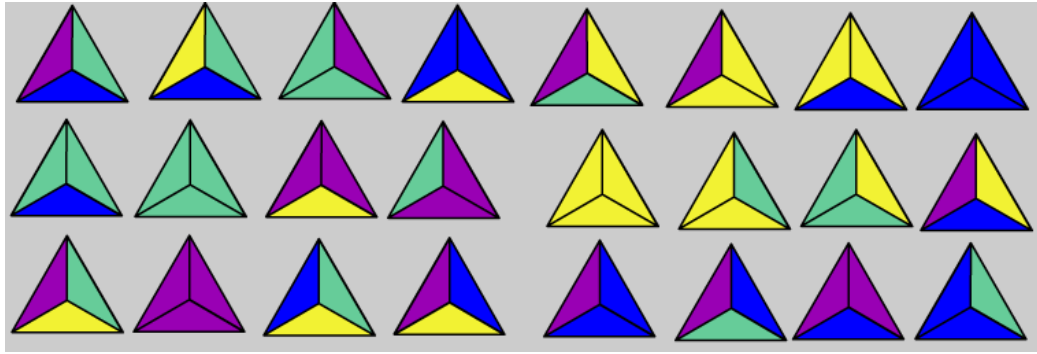
- f. ¿Qué preguntas podría hacer Sandra para continuar participado del juego?
Fórmula 2 preguntas y contéstalas.

2. Triángulos de MacMahon.

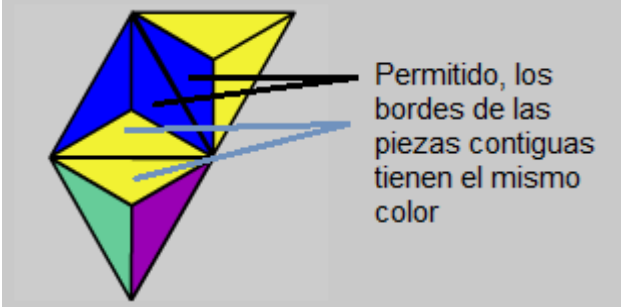
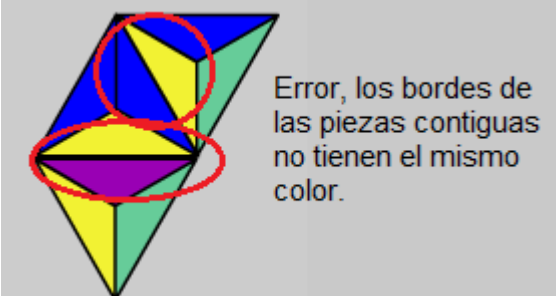
Habilidades a trabajar: percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio, conservación de la percepción, percepción figura – contexto y memoria visual.

Objetivo: Completar, identificar y construir figuras geométricas.

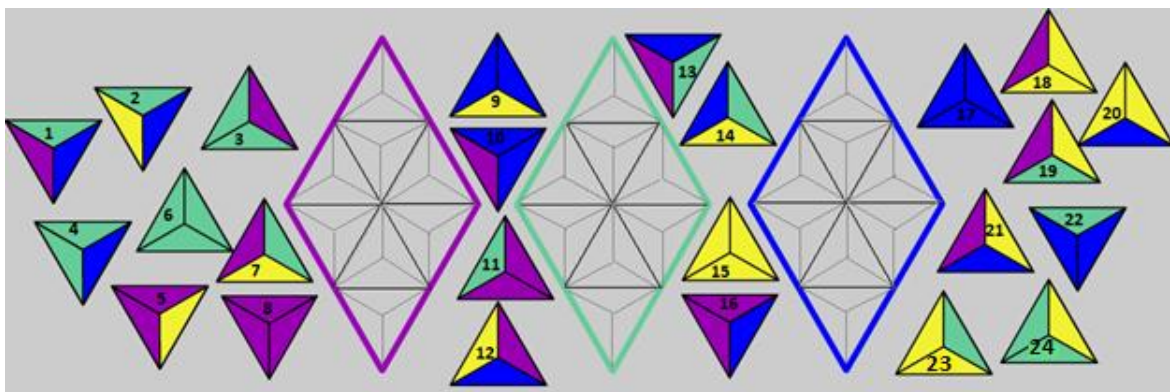
Los siguientes 24 triángulos representan todas las combinaciones posibles de 4 colores colocados en cada una de las tres aristas de un triángulo equilátero. Estos 24 triángulos forman la base de un puzzle propuesto por el matemático Inglés Percy Alexander MacMahon.



MacMahon estableció dos condiciones para armar los rompecabezas geométricos: Los triángulos deben ser colocados de tal forma que los bordes de las piezas contiguas tengan el mismo color, y que el borde del polígono resultante sea de un solo color. A continuación se presenta un polígono en construcción.

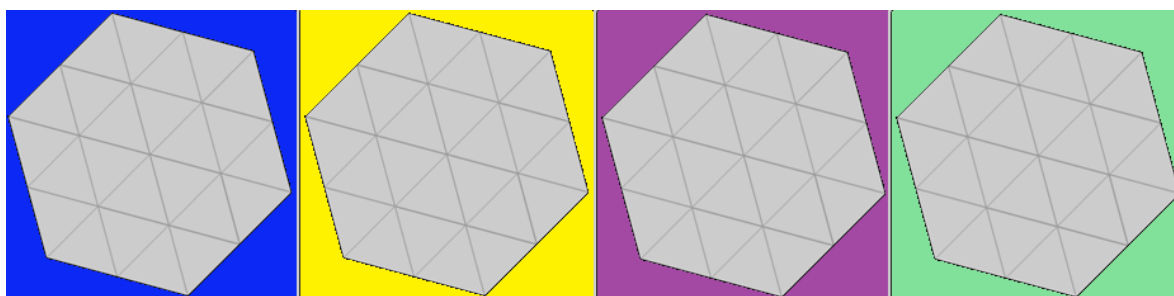
Permitido	No permitido
 <p data-bbox="630 1077 854 1241">Permitido, los bordes de las piezas contiguas tienen el mismo color</p>	 <p data-bbox="1175 1089 1442 1220">Error, los bordes de las piezas contiguas no tienen el mismo color.</p>

a. Con las siguientes fichas, *triángulos de MacMahon* entregadas y teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores, ubica los triángulos de Macmahon de tal forma que construya cuadriláteros (rombos), como los observados en la siguiente figura. Los tres rombos construidos deberán presentar los bordes de las piezas contiguas del mismo color, y el borde del rombo resultante sea de un solo color. Las fichas poseen números para distinguirlas fácilmente.



92

- b. Con la totalidad de las 24 fichas, ¿podrías armar un cuadrado?, ¿cómo lo harías?
- c. Construye un hexágono regular con los 24 triángulos MacMahon. Los triángulos deben ser colocados siguiendo las condiciones dadas (los bordes de las piezas contiguas tengan el mismo color, y que el borde del hexágono resultante sea de un solo color) ¿cuántas soluciones hay?



- d. Utilizando algunas o todas las fichas, ¿qué otros polígonos puede construir? Ten en cuenta las reglas planteadas por MacMahon. ¿Cuántos polígonos has encontrado?
- e. Utilizando algunas o todas las fichas y teniendo en cuenta las reglas planteadas por MacMahon, ¿puedes construir un sólido tetraedro? ¿Cuántas

⁹² Tomado de la URL: <http://www.gamepuzzles.com/pparlor/mm3.html>

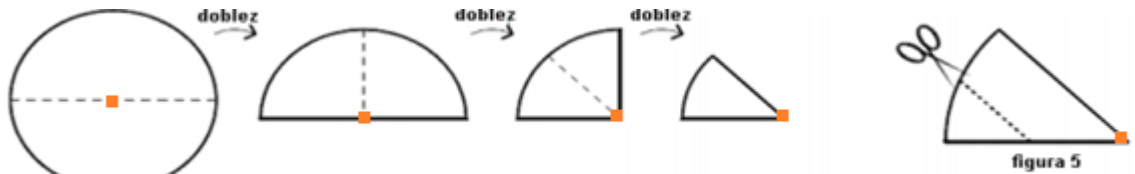
fichas has utilizado? ¿Puedes construir un octaedro? ¿Por cuántas fichas está formado? ¿Cuántos sólidos puedes construir con las 24 fichas?

3. La figura de Ana.

Habilidades a trabajar: memoria visual, discriminación visual, coordinación ojo-motor, percepción de la posición en el espacio y percepción figura – contexto.

Objetivo: Integrar y aplicar habilidades para solucionar un problema.

Ana dobla el círculo de papel por el centro. Luego lo dobla dos veces más, como se indica en las figuras siguientes. Finalmente, Ana corta el papel doblado a lo largo de la línea marcada en la Figura 5. El centro de las figuras está señalado con color naranja.



⁹³ ¿Cuál es la forma de la parte central del papel cuando se desdobra completamente?



⁹³ Tomado de XXIII Concurso canguro matemático 2016 Nivel 1 (1º de ESO). Recuperado 14 de octubre de 2016 de la URL: <http://www.canguromat.org.es/canguro2016/ikg2016.html>

Conclusiones del capítulo 3

Las cinco actividades propuestas se sustentan en problemas retadores, donde se utiliza la percepción, la manipulación y representación geométrica, en aras de lograr un aprendizaje robusto de los contenidos geométricos de grado séptimo como son las transformaciones en el plano, características de los sólidos, posición relativas de circunferencias, entre otras temáticas que conforman el plan de estudios del grado en que se está desarrollando el proyecto.

Con el diseño de las actividades se espera fortalecer la habilidad visualización la cual se desarrolla si se estimula en los estudiantes la percepción visual y el procesamiento visual de las imágenes, en este caso el sistema de actividades está basado de forma tal que el estudiante emplee las imágenes dinámicas y cinéticas.

También el conjunto de actividades propuesto busca ser un referente para aquellos docentes que deseen que sus estudiantes piensen de manera abstracta, creen modelos mentales espaciales, desarrollen el pensamiento lógico matemático y el pensamiento espacial, descubran las relaciones entre objetos matemáticos, manipulen mentalmente figuras en el espacio, relacionen e interpreten imágenes visuales necesarias para la comprensión de temáticas complejas como las pertenecientes a la parte algebraica, geométrica y estadística.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El presente capítulo expone el análisis de resultados luego de implementar el sistema de actividades propuestas para fortalecer la habilidad matemática visualización en estudiantes de grado séptimo de la Educación Básica. Dentro del análisis de cada actividad se valora los logros obtenidos por los estudiantes y las dificultades presentadas al igual que se hace una descripción de la actividad, y la motivación por el aprendizaje. También se muestran evidencias del trabajo realizado en el aula por los estudiantes del colegio campestre San Diego.

4.1. Análisis de los resultados de la habilidad matemática visualización en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego

A continuación se muestran los avances en el proceso de fortalecimiento de la habilidad, visualización, que se evidenciaron en el desarrollo de las actividades.

4.1.1. Actividad 1. Me familiarizo con la visualización

La actividad fue desarrollada por 31 estudiantes quienes trabajaron en grupos de 3 o 4 de ellos, cada uno recibió la guía, previa a esta clase se informó de algunos materiales los cuales podrían traer como tijeras, hojas cuadriculadas, pegastic, entre otros.

La primera actividad buscaba que el estudiante se familiarizará con las habilidades de la visualización, por tal motivo hubo la necesidad de incluir problemas de su entorno, como la entrada y estructura del colegio, entre otros.

Con respecto al problema llamado *Rompepolígonos* los estudiantes no tuvieron dificultad en relacionar cada elemento o estructura de la imagen del colegio con las

formas o piezas a las cuales se les había realizado un transformación geométrica (rotación), es decir, cada uno de los estudiantes logro realizar rotaciones y cambiar posiciones de los objetos de forma visual.

Con respecto al problema *Los azulejos*, los estudiantes en un 70% lograron identificar la parte del piso dentro del azulejo, aunque esta presentara un cambio en su posición. Con relación a este problema, un 60% de los estudiantes encontraron 8 figuras completas contenidas en el azulejo las cuales resaltaron, evidencia de ello puede encontrar en el anexo 3.

En el problema 3, todos los grupos encontraron y delinearon la estrella de cinco puntas escondida entre los demás polígonos. Es de mencionar que algunos estudiantes se demoraron más que otros en encontrar la estrella, pero esto está relacionado con el grado de percepción figura contexto de cada estudiante.

Del problema 4, *el hombre de jengibre*, en el literal a, el 75% logró conformar el cuadrado insertando las semicircunferencias de color naranja dentro de los espacios tal como se observa (ver Figura 7), esto les permitió determinar el área del cuerpo del jengibre; en el literal b, un 70% consideró que un triángulo isósceles podría representar el área del hombre de jengibre; en el literal c, el 35% tuvo dificultad en argumentar su respuesta, donde algunas de ellas presentaban errores.



Figura 7. Momentos del trabajo de los estudiantes en el problema 4 de la actividad 1.

El problema 5 titulado *La congruencia*, el 90% de los estudiantes identificó cuál de las piezas completaría el esquema; por su parte en el literal b, el 25% tuvo dificultad al describir como construir las piezas correspondientes a una nueva columna de piezas 2×2 que se colocaría a la derecha, mientras que en el inciso c y d, ellos tuvieron la necesidad de colocar números a las fichas para dar identificar cuál de las piezas es resultado de una traslación, es decir, de describir la(s) traslación(es) que llevan una pieza 2×2 a su imagen.

Del problema 6, los estudiantes visualizaron las fichas y descubrieron el orden lógico en que se habían dispuesto y el 100% logró completar la secuencia con las dos piezas faltantes, además cada uno propuso su esquema.

En el séptimo problema 7°, el 78% contestó correctamente la pregunta ¿Cuál cubo armado corresponde a su desarrollo o al cubo abierto?, donde se notó un poco de dificultad fue en el literal b, correspondiente al tetraedro, en las cuales se hizo necesario dirigir a algunos grupos a través de preguntas heurísticas para que logrará entender lo que se pedía en el problema. Ante la pregunta, en la cara A del tetraedro

está la estrella ¿Cuál imagen podría estar presente en la cara frontal? ¿Existen más soluciones? ¿Por qué?, 2 grupos argumentaron que existía solo una solución y no tuvieron en cuenta lo que sucedía si el tetraedro se giraba en la mente.

Es de aclarar que en este problema no se utilizó un tetraedro y un hexaedro en medio físico sino que el estudiante hacía algunos procesos mentales, pues se quería fortalecer la visualización, pero en la socialización de resultados para aclarar algunas dudas y evitar errores con respecto a esta actividad se utilizaron poliedros en medio físico para explicar lo concerniente al cambio de posición de las imágenes ubicadas en las caras, si se giraba el hexaedro y el tetraedro regular. Con respecto al literal c, luego de que los estudiantes giraban el tetraedro colocando (en su mente) como base la imagen del corazón, lograron establecer cual imagen se observaría en la cara 1, 2 y 3, de esta manera se iba trabajando o recordando conceptos de tipos de vistas en objetos como lo son vista inferior, vistas laterales y superior.

Con respecto a la actividad de investigación sugerida por la Falk (2016)⁹⁴, en la cual los integrantes del grupo inicialmente debían dar solución a la pregunta ¿De cuántas maneras se pueden dibujar 6 cuadrados en el plano de modo que cada cuadrado comparta una arista con al menos uno de los demás?, los estudiantes propusieron algunas construcciones en las cuales algunas cumplían la condición, se establecieron finalmente 11 croquis diferentes que pueden doblarse para formar un cubo.

Motivación por el aprendizaje. No cabe duda que al presentar problemas del contexto en los cuales se pueda evidenciar en los estudiantes su sentido de

⁹⁴ Falk, M. (2016). Criterio emitido en revisión de la Actividad 1.

pertenencia o con los cuales se sientan identificados, demuestran un mayor interés por desarrollarlos y esto les motiva, porque se sienten involucrados y parte de la solución, ejemplo de ello fue el problema 1.

A los estudiantes les llamó la atención el problema 6, *A completar cuadrados*, ya que el literal b pedía proponer o formular un esquema similar (secuencia geométrica) en el cual las piezas presentarán un orden lógico y se debieran descubrir las piezas faltantes, los estudiantes mostraron diversidad de esquemas y algunos muy interesantes con fichas geométricas, como la actividad en esa sesión no se pudo concluir algunos grupos al instante, anotaron las ideas e hicieron un esquema del posible diseño, fue tanto el impacto que algunos niños le pedían al compañero que descubriera las fichas que hacían falta para que notaran la complejidad de su secuencia.

La actividad de investigación fue muy interesante, porque cada grupo competía en diseñar diferentes croquis que al doblarse formaran un cubo, de modo que cada cuadrado compartiera una arista con al menos uno de los demás, en dicha actividad se escuchaban expresiones como “quién da más”.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Los estudiantes pudieron realizar inversiones, rotaciones y cambiar posiciones de figuras para relacionarlas con elementos del entorno, lo que se conoce como percepción de la posición en el espacio.

- ✓ Los diferentes grupos localizaron la figura escondida entre las demás la cual estaba formada por la unión de otros polígonos (figuras ensambladas con respecto al contexto) desarrollando de esta manera la percepción figura contexto.
- ✓ Lograron relacionar la posición de dos o más objetos para completar una figura, lo cual corresponde al desarrollo de la percepción de relaciones espaciales.
- ✓ Los estudiantes lograron completar secuencias geométricas descubriendo el orden lógico o siguiendo algunos patrones de posición, fortaleciendo de esta forma la percepción de la posición en el espacio.

Dificultades. En el transcurso de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Al transformar imágenes visuales ya formadas en otras que permiten dar solución a un problema.
- ✓ A Algunos estudiantes no se les facilita la creación de imágenes mentales, es decir, tienen falencias en el procesamiento visual.
- ✓ Al argumentar procesos y procedimientos que han sido realizados de forma mental a través de los movimientos de figuras geométricas.
- ✓ El tiempo estimado para la actividad no fue suficiente por tal motivo se tuvo que desarrollar en las clases posteriores.
- ✓ Existen estudiantes quienes presentan falencias relacionadas con las imágenes dinámicas las cuales son representaciones mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Muestras fotográficas de los resultados alcanzados en el desarrollo de la actividad, *Me familiarizo con la visualización* se pueden observar en el anexo 3 de la tesis (muestra de la carpeta de estudiantes) y en el anexo 4 (Imágenes fotográficas). También se pueden detallar más resultados en el anexo A del CD, carpeta actividad 1 o anexo B, videos de la actividad 1. Vale la pena aclarar que se contó con el permiso de la institución y de los padres de familia para tomar estas muestras fotográficas, ver anexo 2.

4.1.2. Actividad 2. Integrando las habilidades de la visualización

El propósito de desarrollar esta actividad consistía en estimular las habilidades de la visualización: discriminación visual, coordinación viso-motora, percepción de la posición en el espacio y conservación de la percepción, en estudiantes de grado séptimo. Durante el desarrollo de la actividad se contó con la participación de 31 estudiantes los cuales trabajaron según lo dispuesto por la comunidad de práctica de Wenger.

En el problema inicial de esta actividad, *La figura infiltrada*, los estudiantes presentaron diversas respuestas sobre las características de algunos polígonos y sólidos, tres grupos presentaron falencias en cuanto al conocimiento de polígonos cóncavos y convexos, por tal motivo la docente intervino para recordarles o explicarles las diferencias entre ellos. Sin embargo en la socialización de la actividad nuevamente se volvió a puntualizar en estos aspectos.

El objetivo del problema 2, en el literal a y en el b, estuvo referido a las transformaciones en el plano en este caso la reflexión, en él los estudiantes en un 90% reflejaron la figura la cual estaba compuesta por un conjunto de bloques.

También lograron que en cada uno de los casos, donde no se representa la respuesta correcta, dibujar la configuración de la cual sí sería la imagen reflejada en una recta vertical. A continuación se presenta evidencia fotográfica del trabajo realizado en el problema 4 (ver Figura 8).

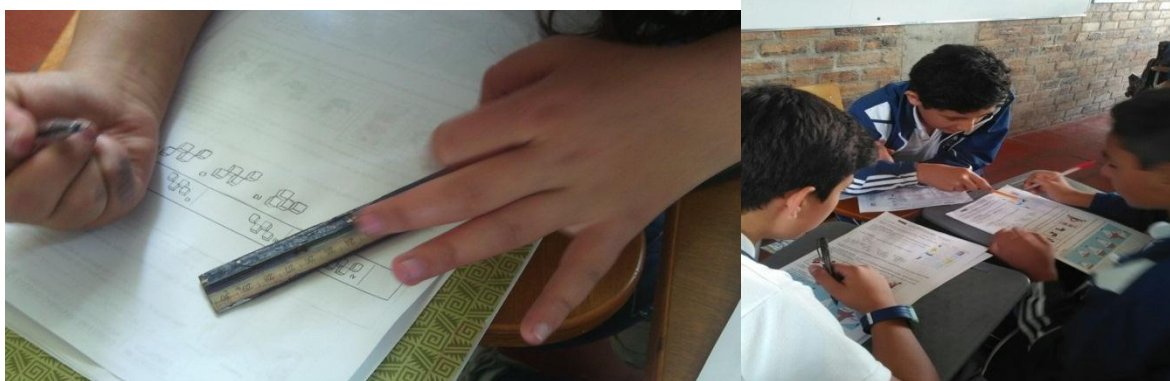


Figura 8. Momentos del trabajo de los estudiantes en el problema 2 de la actividad 2.

En el problema 3, los estudiantes lograron descubrir cuáles de las imágenes propuestas no concuerdan con la realidad si se hiciera una reflexión resaltando los aspectos que no encajan en el contexto de las situaciones. El 70% logró aplicar la reflexión a una imagen creada por ellos mismos.

En este sentido es válido resaltar que 9 grupos se dieron cuenta que el reflejo con respecto al eje “y” de una figura se podía observar al respaldo de la fotocopia, algunos de ellos se asombraron en saber cuál aplicada es la matemática en la vida diaria. La actividad fue especial para los estudiantes, pues aplicaron las transformaciones en el plano a imágenes (barcos, animales, casas, entre otras) distintas a los polígonos y figuras geométricas que se presentan en las clases tradicionales, también notaron la relación de estos movimientos en el contexto y de igual forma disfrutaron el momento y la oportunidad de reflejar imágenes producto de su creatividad e imaginación por lo cual se sintieron los protagonistas de la clase.

En el problema 4, el 90 % de los estudiantes identificaron el tipo de transformación realizada por los barcos, pero al momento de justificar el 40 % tuvo dificultades en argumentar.

En el quinto problema, algunos grupos tuvieron que leer la situación en varias ocasiones para poder comprenderla, ya que debían realizar un proceso inverso al hacer la traslación. En este problema se presentaba la imagen del lugar donde quedó el barco al haber sido arrasado por la corriente 4 km hacia abajo y 4 hacia la izquierda, por lo cual los estudiantes analizaron mentalmente que podían devolver el barco, 4 km hacia la arriba y 4 km hacia la derecha, el 80% de ellos logró ubicar en el plano cartesiano el lugar del barco antes de la tormenta.

Fueron los estudiantes los que motivados por la situación colocaron las coordenadas iniciales y finales del barco antes y después de la tormenta (sin que el problema lo sugiriera). Es de aclarar que se notó un poco de dificultad al momento de escribir las

parejas ordenadas, pues algunos estudiantes olvidaron que la primera componente (x) se localiza en el eje de las abscisas, y la segunda (y) en el eje de las ordenadas.

En el sexto problema referido a las señales de tránsito, tan solo el 10% tuvieron dificultad para girar las flechas blancas 180° y en el problema séptimo más exactamente en el numeral a, el 90% logro reflejar la figura en el espejo, la cual estaba conformada por bloques de cubos. En el numeral b, el 40% tuvo dificultad al describir como se vería un boque de cubos si se observara desde la parte superior, en este problemas los estudiantes manifestaron no haber trabajado este tipo de situaciones en años anteriores, por tal motivo hubo la necesidad de intervenir realizando preguntas heurística y orientando, además en la socialización de la actividad se hizo claridad en el tipo de vistas de un objeto como la lateral, superior e inferior. En el literal c de este mismo problema, también referido a las vistas pero esta vez desde la parte superior, el 79% seleccionó correctamente la opción que describía lo observado en el bloque de cubos.

Motivación por el aprendizaje. Los problemas retadores planteados les permitieron a los estudiantes generar ideas creativas, las cuales tuvieron que seleccionar, adoptar, refinar e implementar para poder dar solución a los problemas inicialmente planteados, esto se notó cuando algunos estudiantes por iniciativa giraban sus hojas 90° , 180° , con el propósito de corroborar y dar validez a sus afirmaciones (rotación de imágenes), apoyándose en la idea de la aplicabilidad de la matemática en el contexto y afirmando que si se giran las imágenes en la mente 180° hacia la derecha o en sentido horario también podían comprobar lo acertado de sus respuesta visual al girar la hoja con la imagen bajo el mismo sentido.

Algunos grupos ante la seguridad adquirida en el desarrollo de la actividad y la curiosidad por descubrir de lo que eran capaces y sumado a ello de demostrar lo que sabían, fortalecían sus respuestas como en el problema 5, *La corriente de agua*, donde no solo ubicaron el lugar de origen del barco (pedido en el problema) sino que también colocaron las coordenadas iniciales y finales.

Logros. Como aspectos positivos y destacados a través de la actividad se pueden considerar los siguientes:

- ✓ Los estudiantes representaron modelos de espejos a través de la reflexión fortaleciendo la percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales.
- ✓ Los estudiantes identificaron las características que le permiten a un objeto ser diferente de otros fortaleciendo en este caso la discriminación visual y anexo a ello seguían con los ojos el movimiento de los objetos, figuras lo cual corresponde al desarrollo de la coordinación viso-motora.
- ✓ Como se puede observar en los registros fotográficos, la actividad permitió ver el sentido de cooperación entre los integrantes del grupo. El papel del líder fue relevante, pues este orientó a los compañeros dando claves y pautas para encontrar una solución válida, luego de ello socializaban respuestas para fortalecer el aprendizaje.
- ✓ Los estudiantes propusieron problemas en donde aplicaban transformaciones en el plano a las imágenes producto de su imaginación y que luego fueron compartidas, el brindar esta oportunidad de formular problemas permitió ver las destrezas y habilidades que los estudiantes presentan.

- ✓ Los estudiantes tuvieron la capacidad de decidir para cada problema, la conveniencia de usar cuadrículas o planos cartesianos para dar solución a los problemas retadores planteados, ya que hubo algunos ejercicios que no lo ameritaban, sino que se podía usar un procesamiento visual únicamente.

Dificultades. Durante el desarrollo de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ No era muy conocido para los estudiantes cómo graficar e identificar las vistas (frontal, lateral izquierda, vista posterior, superior e inferior) de un objeto según la posición desde donde se encuentra el observador.
- ✓ Se les dificultó argumentar procesos realizados en la mente con respecto a las imágenes dinámicas partiendo de figuras dadas.
- ✓ Los estudiantes no diferencian entre un polígono cóncavo y uno convexo.

Muestras fotográficas de lo alcanzado en el desarrollo de esta actividad, *Integrando habilidades de la visualización*, se pueden observar en el anexo 5 de la tesis (carpeta de estudiantes) y en el anexo 6 (Imágenes fotográficas). También se pueden constatar en el CD, resultados de la actividad específicamente en el anexo A, evidencias fotográficas de la actividad 2 y anexo B, videos de la actividad 2.

4.1.3. Actividad 3. Estimulando las habilidades de la visualización

Con esta actividad se deseaba continuar estimulando las habilidades de la visualización, pero en este caso, las que no fueron tomadas en la actividad 2, ellas son: memoria visual, conservación de la percepción y percepción figura contexto. En esta actividad participaron 31 estudiantes quienes estuvieron trabajando en grupos

de tres personas o 4 personas, los integrantes de cada grupo fueron los mismos que en la actividad anterior pero el líder de cada grupo fue diferente al de las dos anteriores actividades.



Figura 9. Momentos del trabajo de los estudiantes en el problema 1 de la actividad 3. Del primer problema literal a, el 90% logró ubicar los grupos (2) conformados por cuatro flechas consecutivas, donde la primera apunta a la izquierda, la segunda a la derecha, la tercera hacia arriba y finalmente la cuarta hacia la derecha (ver Figura 9). También sin dificultad se dieron cuenta de que no se encontraban, 4 flechas consecutivas en dirección al norte o 4 flechas consecutivas en dirección al sur, o al oriente o al oeste, respuestas del literal b, y d. Con respecto al literal c, el 88% concluyó que no existen flechas organizadas formando una sucesión con una regla de formación, para establecer esta afirmación los estudiantes visualizaron y analizaron el comportamiento de la orientación de las flechas, algunos evaluaron lo anterior tomando inicialmente todas las flechas en su conjunto, luego las flechas de color azul, luego las de color amarillo, posteriormente las de rojo y finalmente las de verde tal como se observa en la Figura 6. En el literal e, el 90% fue capaz de indicar

el lugar donde se habían colocado el grupo de flechas que son el resultado de otro conjunto siguiendo una reflexión con respecto al eje “y”.

Del problema 2, el 78% lograron determinar las fichas que al unir las les permitía obtener la figura dada por el álbum, en este problema como todas las fichas no eran utilizadas y eran el resultado de una rotación, los estudiantes algunos de ellos tuvieron dificultad al seleccionarlas.

El tercer problema literal a, fue interesante ya que la mayoría de los grupos (9), construyeron la telaraña en la mente uniendo mediante segmentos los puntos medios de cada lado del octágono regular y realizando esta acción de forma consecutiva y este era el propósito del problema, el 92% concluyó que el nuevo polígono formado bajo esta condición también era regular y tenía igual cantidad de lados, para argumentar utilizaron el concepto de semejanza. También en el literal b, hicieron el proceso visual para darle solución algunos de ellos demostraron gráficamente que no era posible obtener el mismo resultado del inciso anterior porque esta vez se estaba trabajando con un octágono irregular o cualquier otro polígono irregular, de la misma forma utilizaron también polígonos cóncavos para justificar que a medida que se unían mediante segmentos los puntos medios de cada lado del polígono irregular no se obtenía uno semejante.

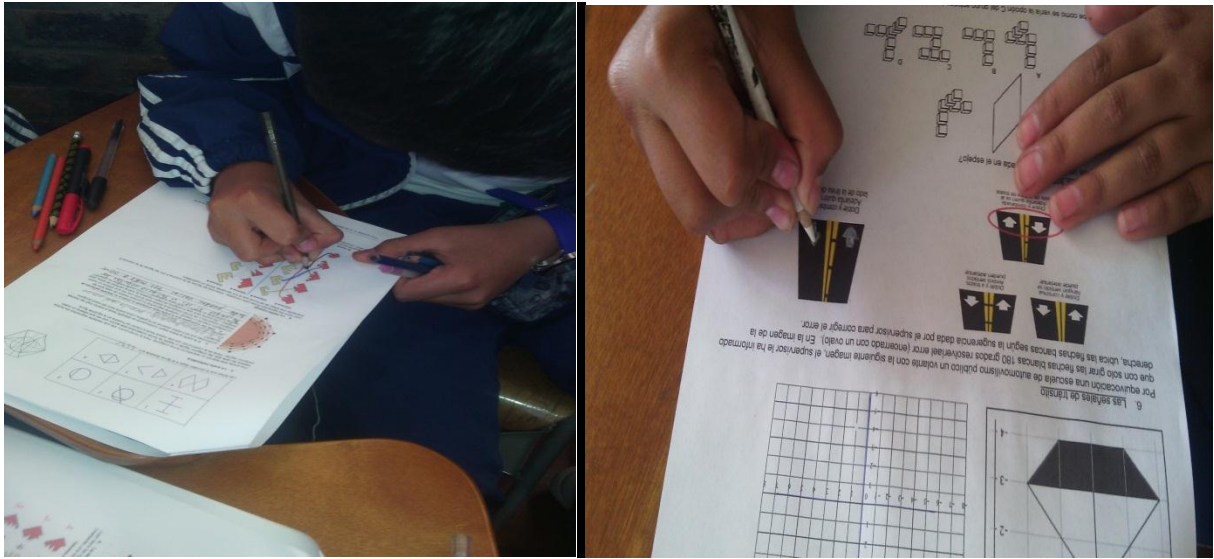


Figura 10. Momentos del trabajo de los estudiantes en el problema 4 de la actividad 3 y el problema 6 respectivamente.

La Figura 10 evidencia el proceso como el estudiante relaciona las figuras de las columnas para formar cuadriláteros, en esto consistía el problema 4 en el cual solo el 8% mostro dificultad.

Con respecto al problema 5, la docente intervino para explicarles sobre las circunferencias tangentes exteriores, tangentes interiores y secantes, porque identificaban las características de las circunferencias concéntricas, exteriores, interiores. El 60% logro indicar las posiciones relativas de las circunferencias que observas en el mural.

El problema 6, el 80% no tuvo dificultad al clasificar las vistas en frontal, lateral izquierda, vista posterior, superior e inferior según el sólido dado y en el problema 7, que presentaba igual temática pero utilizaba para ello un “mapa de torre” con varios sólidos fue necesario explicarlo utilizando objetos del salón como diccionarios que

semejaron esos sólidos para que ellos observaran y visualizaran la vista superior, frontal, entre otras. Al final el 90% solucionó correctamente el problema.

Cabe resaltar que uno de los estándares básicos de competencias matemáticas propio de grado séptimo busca que el estudiante represente objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas, por ende las actividades propuestas se dirigen también a ello.

Y finalmente en el problema 8, que mostraba la vista frontal, la derecha y la vista superior de una figura tridimensional, es decir contrario a los problemas 6 y 7 , los estudiantes lograron identificar la figura que corresponde a las vistas dadas, la dificultad radico en el 9% de los estudiantes.

Motivación por el aprendizaje. La actividad fue de gran utilidad para los estudiantes, ya que hicieron uso de la percepción visual, para fortalecer la visualización. Con los problemas planteados, pudieron reforzar algunos conceptos y construir ellos mismos otros que anteriormente solo se habían impartido por los docentes en la clase tradicional y alguno de ellos no habían sido enseñados en años anteriores en clase de matemáticas como lo referente a los tipos de vistas que se pueden observar en un sólido, fue necesario explicarles de forma manipulativa y concreta utilizando sólidos del aula para permitir que dichos conceptos generen mayor aceptación y recordación en sus mentes.

Logros. Los aspectos positivos que se pudieron constatar durante la actividad fueron:

- ✓ Con los problemas retadores planteados, se incrementó la percepción visual de los estudiantes y la manera de relacionar figuras o sólidos con las vistas laterales, superior e inferior.
- ✓ Los estudiantes pudieron seguir mentalmente secuencias geométricas para dar solución a un problema.
- ✓ Obtuvieron un sólido final producto de la unión de las partes de un todo, es decir, al unir la vista lateral, superior y final pudieron establecer mentalmente el nuevo sólido.
- ✓ Fortalecimiento de la memoria visual, conservación de la percepción y percepción figura contexto.
- ✓ Los estudiantes comprendieron de forma significativa lo referente a las vistas de un sólido ya que en la socialización de la actividad se explicó usando cubos que semejaran el mapa de torre propuesto.

Dificultades. Durante el desarrollo de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ No conocían la función que tenía un “mapa de torre” lo cual desanimó un poco a los estudiantes (cuatro grupos) porque pensaban que era muy difícil y no lo podían resolver y utilizar.
- ✓ Se les dificultó la utilización de algunos términos presentados en las guías como tangente exterior, tangente interior, secantes, ya que habían olvidado su significado.

El anexo 7, evidencia los resultados de problemas trabajados por los estudiantes y el anexo 8, presenta evidencias fotográficas durante la actividad.

En el CD, anexo A, carpeta 3, podrá observar más evidencias fotográficas de la anterior actividad (3), y en el anexo B, carpeta 3, los videos de solución a algunos de estos problemas.

4.1.4. Actividad 4. Visualizo y completo

La implementación de la actividad buscaba observar resultados al integrar tres de las habilidades que ofrece la visualización en estudiantes de grado séptimo, esto con el objetivo de incrementar el nivel de razonamiento y visualización.

En el primer problema, *La mascota de los juegos olímpicos*, los estudiantes organizaron sin dificultad las fotografías que correspondían a cada pose de la mascota, lo cual fortalece la discriminación visual pues debían organizarlas (las fotografías se presentaban desde diferentes ángulos) comparando y escogiendo todas las fotografías que corresponden a cada una de las imágenes A, B, C y D. Se evidenció que algunos grupos no tardaron mucho tiempo en organizar mentalmente frente a otros.

Posteriormente el 30% tuvo dificultad al especificar la cantidad de grados que había sido girada cada fotografía y el sentido utilizado. El problema en esta etapa, permitió fortalecer la percepción de relaciones espaciales debido a que el estudiante relacionó la posición de dos o más objetos y completó secuencias en este caso geométricas debido a que de cada imagen determinó cual había sido girada 90° , 180° y 270° . Además se favorece la habilidad percepción de la posición en el espacio ya que se realizan inversiones y rotaciones.

El segundo problema, *La gimnasia rítmica*; Los estudiantes no tuvieron mayor dificultad de reflejar la presentación de las gimnastas ubicando la pelota y el aro, en el esquema propuesto. Además en un 85% descubrieron el patrón de movimiento del aro y la pelota dentro de la pista hexagonal lo cual les permitió dar solución a los numerales b, c y d planteados en el problema, por lo cual tampoco tuvieron dificultades mayor al proponer la posición 5, es decir, el lugar donde se ubicaría la pelota y el aro luego de varios movimientos consecutivos (ver Figura 11). El problema posibilitó fortalecer la memoria visual, es decir, recordar el lugar donde estaban los objetos, en este caso la pelota y el aro con el propósito de relacionar sus movimientos y descubrir el patrón con el cual se mueven dentro de la pista hexagonal, sumado a ello se potencializa la percepción de la posición en el espacio y la percepción de relaciones espaciales al cambiar los objetos de lugar y posteriormente utilizar la reflexión en secuencias.



Figura 11. Momento del trabajo de los estudiantes en el problema 2 de la actividad 4.

En el tablero de Mariana, problema 3, ante la pregunta ¿existe alguna pareja de fichas de los dos tableros que evidencie el movimiento de traslación? La mayoría de grupos concluyó (9) que entre los dos tableros era imposible ya que la transformación entre el tablero A y el tablero B, era una reflexión. A si mismo concluyeron que entre las fichas del tablero A, se encontraban varias de ellas que presentaban una traslación, ante lo cual las resaltaron, tal como se evidencia en el anexo 9, muestra de la carpeta de los estudiantes, de igual manera en el anexo 10 podrá observar más momentos de la actividad 4.

En el problema 4; *Batman vr. El guasón* numeral a, los estudiantes armaron el decágono irregular (cóncavo) luego de visualizar las piezas geométricas y en el lote en forma trapezoidal encontraron la ubicación del detective y del alcalde de la ciudad Gótica (numeral b y c). Fue interesante ver en el numeral c, como los estudiantes no se rindieron al descifrar el mensaje enviado por el guasón en el cual debían utilizar la reflexión ahora con letras. Cabe resaltar que aunque todos llegaron a armar el polígono no lo hicieron bajo el mismo tiempo, hubo grupos que se demoraron más que otros, pero al final consiguieron, en el numeral d, solo el 60 % logro descifrar cual fue la trampa que el guasón le puso a Batman.

En el problema 5, solo el 15 % tuvo dificultad al dar solución ya que no utilizaron el criterio de congruencia LAL, los demás lograron identificar que la medida del ángulo EDF correspondía a 60 grados, porque los triángulos eran congruentes permitiendo determinar la cantidad de metros de malla que se necesita para encerrar los dos terrenos.

En el sexto problema *El recorrido de Mariana*, 3 grupos completaron equivocadamente el recorrido de Mariana según las instrucciones dadas, esto porque tuvieron dificultad con los giros que se debían realizar en la figura por lo cual las demás preguntas referentes al esquema completo presentaron errores. Los demás grupos lograron completar el pentágono irregular siguiendo detenidamente las instrucciones del numeral a. A su vez en este mismo numeral a, se indagaba por ¿Cuántas maneras distintas de formar un cuadrilátero y un triángulo resultan al trazar una diagonal?, a lo que la mayoría de ellos encontró 5 formas distintas las cuales graficaron (ver anexo 9). Del numeral b, los estudiantes concluyeron que no existen otros polígonos más que un triángulo y un cuadrilátero al trazar la diagonal debido a que es un pentágono, y solo podían agrupar de una sola forma compartiendo la diagonal: un triángulo (3 lados) y un cuadrilátero (4 lados), otros grupos argumentaron su respuesta teniendo en cuenta la suma de los ángulos internos de un pentágono.

El numeral c, llevaba al estudiante a formular preguntas alrededor del problema planteado y posteriormente solucionarlas, algunas de ellas fueron: ¿Cuál es el área del pentágono?, ¿cuál es el número de diagonales que se pueden trazar en el pentágono?, ¿cuál es la distancia entre la panadería y la casa?, entre otros.

En la socialización de resultados de la actividad se aclararon dudas y se puntualizaron aspectos referentes a los errores cometidos. Además los estudiantes compartieron las técnicas y herramientas que utilizaron para dar solución a los problemas reto.

Motivación por el aprendizaje. Cada problema mostrado a los estudiantes pretendía involucrarlos, por tal razón en el problema 4 los estudiantes hicieron de detectives, al buscar el lugar donde el alcalde y el detective estaban escondidos a través de instrucciones matemáticas. También el presentar problemas originales y actuales como el de los recientes juegos olímpicos, o el relacionado a la película Guasón vs Batman hacia despertar curiosidad de saber cómo incluiría la matemática para dar solución (ver encuesta de satisfacción). Otro aspecto por resaltar se relaciona con el problema 6, numeral c, titulado el recorrido de Mariana en el cual solicitar al estudiante proponer preguntas de problema, sus soluciones involucraban áreas de polígonos irregulares, teorema de Pitágoras, perímetro de polígonos, entre otras.

Logros. Como aspectos destacados y positivos a través de la actividad se pueden considerar los siguientes:

- ✓ Satisfacción de los estudiantes al proponer y resolver preguntas algunas con un alto contenido de conceptos matemáticos.
- ✓ Se logró fortalecer la discriminación visual, memoria visual y percepción de figura-contexto y percepción de relaciones espaciales a través del desarrollo de problemas.
- ✓ Integraron varias de las habilidades de la visualización (3) para dar solución a un problema reto.
- ✓ Los estudiantes detectaron un error presente en el tablero A del problema 3, el cual corrigieron. El error correspondía a presentar un hexaedro que no cumplía

con las características propias de una reflexión, es decir, la imagen no concordaba con la transformación mencionada.

Dificultades. Durante el desarrollo de la actividad se evidenciaron las siguientes dificultades.

- ✓ Algunos estudiantes no tenían claro el concepto de criterios de congruencia LAL, LLL y ALA.
- ✓ Presentaron dificultad al especificar la cantidad de grados como 90,180, 270 en que había sido girada cada fotografía y el sentido utilizado.
- ✓ El tiempo para el desarrollo de la guía, no fue suficiente para que todos los grupos culminaran la actividad.

En el CD, anexo A, carpeta 4, podrá observar más evidencias fotográficas de la anterior actividad (4), y en el anexo B, carpeta 4, los videos de solución a algunos de estos problemas.

4.1.5. Actividad 5. Aplico a profundidad la visualización

Con el desarrollo de la actividad se pretendía que el estudiante explore el espacio en que se encuentra la figura para comparar sus elementos y establecer relaciones, de esta forma, descubrir los elementos y propiedades de determinadas figuras para llegar a resolver problemas donde implique la utilización de los procesos de visualización. De igual forma también se quería que el estudiante utilizara de forma libre las habilidades que ofrece la visualización las cuales fueron fortalecidas con el diseño y desarrollo de las anteriores actividades.

Los siguientes problemas retadores fueron escogidos de tal forma que los estudiantes pudieran integrar e involucrar varias de las habilidades que componen la visualización. Durante el desarrollo de la actividad se contó con la participación de los 31 estudiantes quienes conformaron grupos de 3 o 4, los cuales trabajaron según lo dispuesto por la comunidad de práctica de Wenger.

En el primer problema numeral a, *Los cubos de siete*, los estudiantes debían analizar la regla propuesta en los cubos, la cual consistía en que el número total de puntos en dos caras opuestas de un hexaedro siempre sea siete. El 80% de los grupos determinó correctamente que en la figura 2 se cumplía la regla mientras que en la figura 3 no se cumplía. También argumentaron con respecto a la figura 3, que al armar el hexaedro en la mente y analizar las caras opuestas, la suma de los puntos en las caras opuestas no daban siempre siete, sino un valor diferente (ver Figura 12).

Del numeral b, los estudiantes (9 grupos) propusieron de forma exitosa un ejemplo y un contraejemplo de esta situación en las estructuras dadas. La dificultad radicó en que algunos estudiantes les costó armar mentalmente el hexaedro siguiendo la regla y sumado a ello los puntos para colocaren cada dado iban desde 1 hasta seis y algunos estudiantes colocaron dos veces el 5, les faltó a algunos grupos mayor análisis y percepción de la posición en el espacio. La anterior dificultad se presentó también en el numeral c, sólo un 60% resolvió correctamente.

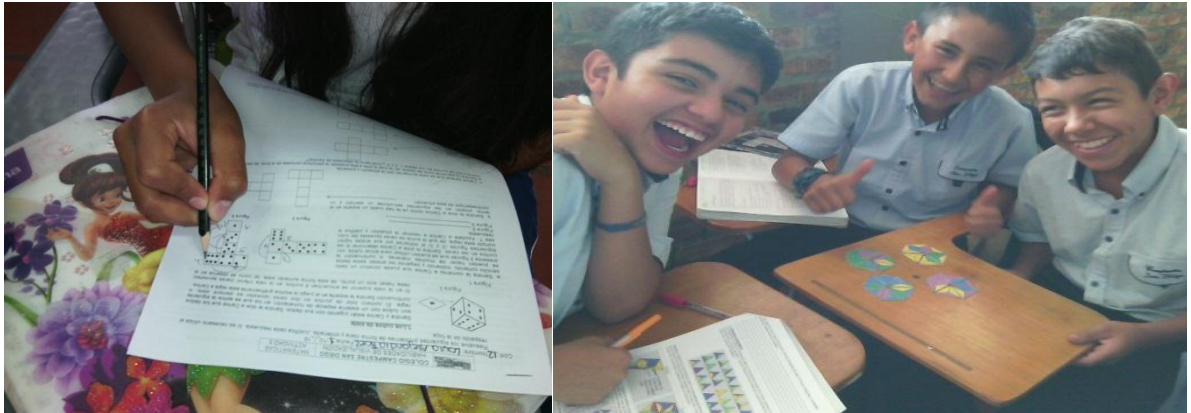


Figura 12. Momento del trabajo de los estudiantes en el problema 1 de la actividad 5.

En el numeral d, del mismo problema; se hizo necesario dirigir a algunos grupos a través de preguntas heurísticas para que logran entender lo que pedía el problema. Luego de ello afirmaron que la suma de la vista lateral y la suma de la vista posterior de la torre de dados (no visibles), no presentaban el mismo valor pues daba 17 y 7 respectivamente. Se pudo evidenciar en el numeral e, la dificultad de los estudiantes en un 40%, al construir la vista lateral, frontal e inferior de la torre de cubos.

Los estudiantes plantearon preguntas del problema como ¿según la última figura propuesta por Carlos, cuánto suman las caras superiores de la torres de dados? ¿En que otro poliedro se puede evidenciar una regla similar?

En el problema 2 numeral a, *Triángulos de MacMahon*; los estudiantes estuvieron interactuando en un inicio con las fichas y observándolas detenidamente, luego procedieron a armar los rombos siguiendo las reglas de *MacMahon*, es decir, que los bordes de las piezas contiguas sean del mismo color, y el borde del rombo resultante sea de un solo color. Todos los grupos no armaron los rombos en el mismo tiempo, por tal motivo hubo la necesidad de pedir prestada la siguiente hora para que los

grupos terminaran de armarlos, ya que no se querían dar por vencidos y manifestaban que podían hacerlo luego de unos minutos más.

Con respecto al numeral b, el 65% de los estudiantes manifestó que no era posible formar cuadrados ya que los triángulos de MacMahon no poseen ángulos rectos, son equiláteros, por lo cual todos sus ángulos internos miden 60° y no se podía pensar en ángulos complementarios pues todos eran de 60° .

En el numeral c, los estudiantes con las 24 triángulos, construyeron 4 hexágonos utilizando 6 piezas en cada hexágono, siguiendo las reglas propuestas por MacMahon (ver Figura 9).Hubo grupos que formaron hexágonos con las 24 fichas. A tres grupos se les dificultó esta actividad no pudieron armar los hexágonos.

Los estudiantes en el numeral d y e, construyeron polígonos como trapeacios y rombos, también construyeron 6 tetraedros regulares conformadas por 4 fichas (utilizaron todas las 24 fichas), dos octaedros regular conformada por 8 fichas cada una, siguiendo todas las reglas dadas por MacMahon. De igual manera 5 grupos lograron construir un icosaedro con 20 de las fichas.

A continuación (ver Figura 13) se evidencia un decaedro (vista superior) formado por los estudiantes.

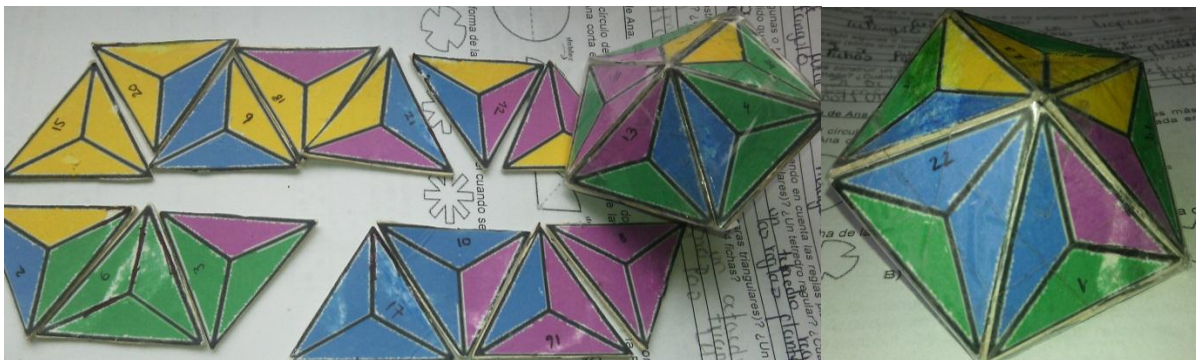


Figura 13. Evidencia de una de las creatividades de los estudiantes.

El problema 3, El 70% logró determinar cuál es la forma de la parte central del papel cuando se desdobra completamente luego de haber realizado dobleces de forma consecutiva y cortando según expone el problema.

Motivación por el aprendizaje. El armar los polígonos y poliedros bajo las condiciones de MacMahon constituyó un reto, porque todos los grupos querían ser los primeros en encontrar la solución. Nuevamente se escuchaban grupos diciendo tengo 4 tetraedros formados, tengo 5 ¿quién tiene más?, fue tanto el gusto por trabajar con las fichas MacMahon que algunos estudiantes decían “Cuando termines tu práctica, nos puedes regalar las fichas para armar más figuras y poder jugar con otros compañeros”.

Logros. Como aspectos positivos se pueden resaltar los siguientes:

- ✓ Los grupos comprendieron por si mismos las reglas dadas por MacMahon para armar figuras geométricas.
- ✓ Se utilizaron las habilidades de la visualización para dar solución a los problemas retos planteados pues el uso de materiales manipulativos, como ficha, incentiva en las estudiantes, la motivación y la curiosidad, de igual manera facilita la comprensión y búsqueda de la solución.
- ✓ Los estudiantes completaron, identificaron y construyeron figuras geométricas con mucho entusiasmo. Los problemas involucraban la percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio, conservación de la percepción, percepción figura – contexto y memoria visual, con lo cual se logró fortalecer la habilidad visualización, evidencia de ello son las diferentes construcciones bidimensionales y tridimensionales.

- ✓ Los estudiantes estaban motivados a tal punto que competían entre grupos para formar tetraedros, octaedros e icosaedros.
- ✓ Hubo grupos que construyeron otros poliedros como decaedros, siguiendo las reglas dadas, lo cual permitió ver como la actividad fomentó en ellos la creatividad.

Dificultades. A continuación se presentan las dificultades evidenciadas en esta actividad.

- ✓ Los estudiantes en un 40%, tuvieron dificultad al construir la vista lateral, frontal e inferior de la torre de cubos del numeral e correspondiente al problema 1.
- ✓ La dificultad radicó en que algunos estudiantes les costó armar mentalmente el hexaedro siguiendo bajo las condiciones de MacMahon.
- ✓ En el numeral a del problema 2, los estudiantes pensaron que cada rombo era armado con las piezas que estaban continuas a él, lo cual no era así. Por tal motivo hubo la necesidad de aclarar esto al grupo en general.
- ✓ El tiempo determinado para la actividad fue corto por tal motivo hubo la necesidad de pedir prestadas horas para poder finalizarla.
- ✓ Se debió cambiar la cinta para unir las fichas MacMahon pues la de ancho 1,2 cm dificultó la construcción de los sólidos por tal motivo se cambió por cinta pegante de 2,5 cm.

Muestras fotográficas de los resultados alcanzados en el desarrollo de la actividad, se pueden observar en el anexo 11 de la tesis (muestra de la carpeta de estudiantes) y en el anexo 12 (Imágenes fotográficas). También se pueden detallar más resultados en el anexo A del CD, carpeta actividad 5 o anexo B, videos de la actividad 5.

4.1.6. Resultados de la encuesta de satisfacción

A continuación se observan los promedios de cada una de las preguntas en una valoración de 1 a 5, tomando 5 como la calificación más alta y 1 la más baja. La encuesta estaba conformada por 5 preguntas cerradas y 1 abierta en la cual los estudiantes pudieron dar a conocer sus observaciones y sugerencias del sistema de actividades planteadas. Esta encuesta fue aplicada a los 31 estudiantes que participaron en cada una de las actividades (ver Figura 14).

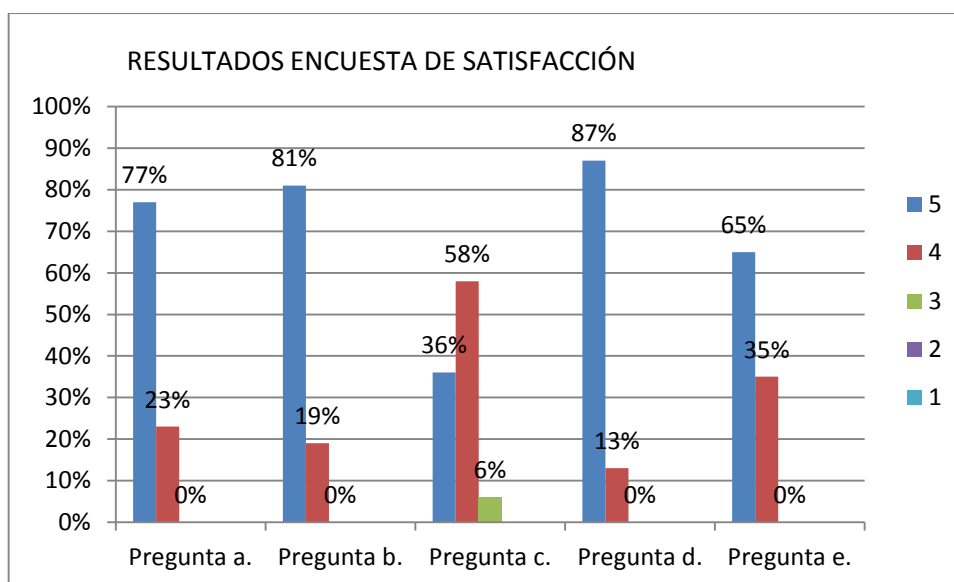


Figura 14. Resultados de la encuesta de satisfacción.

En la primera pregunta el 77% consideró que las actividades propuestas e implementadas motivaron el estudio de la matemática, tomando 5 como la calificación más alta, seguido de un 23% quienes la calificaron como 4, es decir, se puede afirmar que el 100% consideró que las actividades desarrolladas contribuyeron a su aprendizaje en esta área.

La segunda pregunta indagaba en que la realización con más frecuencia de este tipo de actividades mejoraría su desempeño en el área de matemáticas, a lo cual los estudiantes en un 81% contestaron rotundamente que sí.

El 94% consideró que las actividades propuestas por la docente constituyeron un reto ya que aprendían de forma lúdica y didáctica. Con respecto a la pregunta 4, el 87% manifestó haber vivido un ambiente favorable hacia el estudio y motivación por la matemática.

En la quinta pregunta el 65% consideró que las actividades enfocadas en la resolución de problemas motivaron el estudio de la matemática de forma natural y autónoma, tomando 5 como la calificación más alta, seguido de un 35% quienes la calificaron como 4, es decir, se puede afirmar que la totalidad de estudiantes concluyeron en que los problemas reto contribuyeron a la búsqueda de su solución de forma independiente o autónoma.

A continuación se presentan las opiniones por parte de algunos estudiantes con respecto a la experiencia vivida (ver Figura 15).

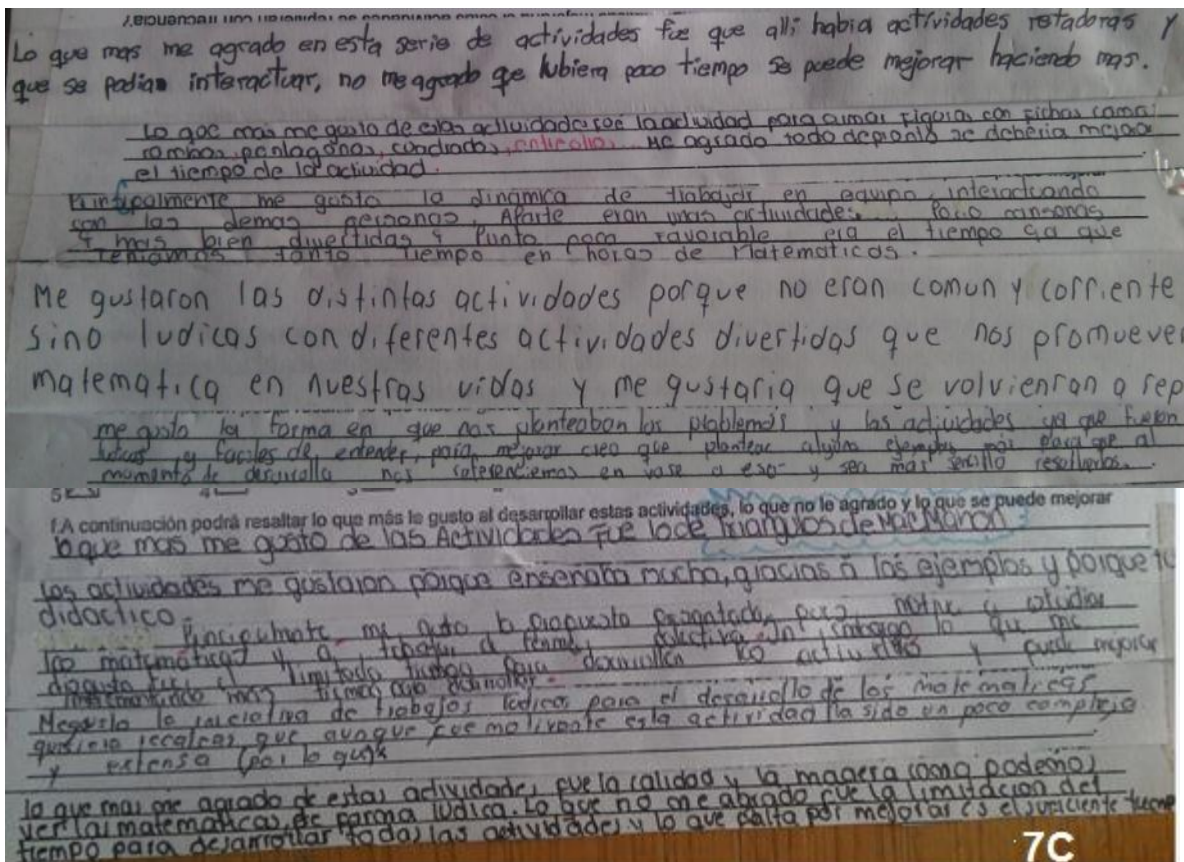


Figura 15. Opiniones de los estudiantes.

Conclusiones el capítulo 4

En el análisis de cada una de las cinco actividades se presenta la manera como fueron desarrollados los problemas por los estudiantes, la motivación que pusieron por el aprendizaje, los logros obtenidos, como también las dificultades en cada una de ellas.

La actividad que más les gusto a los estudiantes, sin duda, fue la referente a los triángulos de MacMahon debido a que el armar polígonos y poliedros bajo ciertas condiciones, les permitió fortalecer la percepción y con ello integrar varias de las habilidades que componen la visualización, además de poner a prueba su agilidad y lógica. También desarrollaron la capacidad de análisis, observación, atención,

memoria visual y concentración, anexo a ello los problemas favorecieron el ingenio de los niños, que tienen que crear diferentes estrategias para solucionar un problema, como por ejemplo lograr armar todo el polígono o poliedro bajo estrictas reglas.

Por otra parte cuando los estudiantes trabajaron siguiendo lo propuesto por la comunidad de práctica de Wenger, la actividad se hizo más enriquecedora, ya que no solo de esta manera se favorecen las habilidades, sino también se logra un trabajo en equipo y se propicia que entre ellos se empleen términos, como gira la ficha 180° , desplázala hacia arriba y luego a la derecha, entre otras.

Posteriormente al hacer la socialización de cada uno de los problemas, se genera conocimiento y construcción de conceptos geométricos, además de que se aclaran dudas y se orienta hacia un aprendizaje más significativo. Durante este momento los estudiantes compartieron sus técnicas, uno de ellos señaló que para formar el hexágono de borde azul con todas las piezas primero se debía colocar primero esas piezas y luego las internas.

Se puede constatar en el análisis general de los resultados de la encuesta de satisfacción que a los estudiantes les agradó la estructura de las actividades y el cómo se implementaron en clase, es decir, la metodología aplicada, ya que son pocas las ocasiones en que trabajan de forma grupal.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación en torno a la habilidad visualización en estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego, permitió dar respuesta al objetivo propuesto. Los resultados obtenidos permiten enfatizar algunos elementos que resultan determinantes en el logro del objetivo general. Ellos son:

- ✓ Investigadores tales como Arcavi (2003), Del Grande (1990), Guzmán (2008), Acevedo (2015), Mcgee (1979), Cantoral (2000), Godino (2012), Kulp (2004), Kavale (1982) y Zimmermann y Cunningham (1991), apuntan principalmente a fortalecer la habilidad visualización en el área de matemáticas en el campo geométrico. Ellos han presentado dentro de sus estudios, modelos, estrategias, metodologías y actividades, dirigidas a fortalecer las habilidades en matemáticas en particular la visualización.
- ✓ Diversos autores como Pölya (1965), Schoenfeld (1985,1992); Falk (2001), Pérez (2004), Lesh y Harel (2003), y Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012) son fundamentales, pues aportan definiciones sobre problemas, resolución de problemas y estrategias para su resolución; las cuales constituyen elementos valiosos en la propuesta del sistema y análisis de las actividades.
- ✓ El diseñar e implementar actividades conformadas por problemas retadores permitió al estudiante desarrollar ideas creativas, las cuales tuvieron que adoptar, refinar, implementar y seleccionar para poder dar solución al problema, además de favorecer el aprender a pensar, a ir más allá de lo que no se ve, a dar fluidez y libertad a su pensamiento e imaginación y argumentar sus respuestas con la originalidad de sus ideas. Con lo anterior se quiere dar a entender que el proceso

de solución de problemas no rutinarios puede considerarse como una forma eficaz para desarrollar la creatividad en los estudiantes.

- ✓ El desarrollar las actividades bajo el enfoque de la comunidad de práctica de Wenger permitió ver el sentido de cooperación entre los integrantes del grupo, además el papel del líder rotativo fue relevante, pues este orientó a los compañeros dando claves y pautas para encontrar una solución válida, luego de ello socializaban respuestas y las estrategias empeladas para fortalecer el aprendizaje de forma grupal y ante el curso.
- ✓ El análisis de cada una de las actividades permitió detectar errores y dificultades presentes en el proceso de visualización, las cuales estaban en su mayoría relacionadas al dibujar o interpretar representaciones planas de sólidos, o de una figura plana para convertirla en un objeto tridimensional y analizar el objeto, teniendo claro que ese objeto está solo en la mente de los estudiantes. Sumado a ello otra dificultad radica al argumentar y comunicar el procesamiento visual que sucede en la mente y en ocasiones su argumento no es completo, es decir, presentan dificultades para comunicar sus argumentaciones visuales. Por tal motivo se sugiere diseñar más actividades como las presentadas que incluyan problemas retadores en los que su solución involucre técnicas de argumentación visuales, tales como: los contraejemplos, la inducción, definiciones, caracterización de las propiedades, analogías, entre otras. Durante el estudio se utilizó la técnica asociada a contraejemplos, caracterización de las propiedades y demás.
- ✓ Se observó durante la solución de problemas como los estudiantes implementaron estrategias de visualización apoyándose o basándose en

ejemplos concretos del entorno sobre todo al utilizar las transformaciones en el plano.

- ✓ La metodología logró el afianzamiento de la habilidad matemática visualización, inicialmente tuvo su origen en la estructuración de las actividades, pues a medida que los estudiantes se enfrentaban a una nueva actividad esta incrementaba el nivel de complejidad debido a que la primera actividad buscaba familiarizar al estudiante con las habilidades de la visualización (percepción), posteriormente el estudiante debía integrar dos habilidades, luego tres, y al final utilizaba diversas para dar solución a los problemas retadores planteados. Además los grupos de estudiantes trabajaron según lo expuesto por la comunidad de práctica de Wenger, el aprendizaje por descubrimiento y sumado a ello lo considerado por Polya, en la teoría de la resolución de problemas.
- ✓ Las actividades y la metodología implementada logró un aprendizaje eficaz y significativo, pues luego de que los estudiantes lograban por si mismos descubrir la solución, utilizaban en las posteriores actividades estas mismas estrategias de solución y aún más avanzadas, además la socialización de la actividad retadora al finalizar cada encuentro permitió aclarar dudas, compartir ideas y orientar hacia el aprendizaje robusto de los contenidos matemáticos.
- ✓ La percepción visual fue clave para la consecución del objetivo, ya que les permitió a los resolutores, interpretar y organizar la información visual para dar solución a los problemas propuestos, integrando las habilidades de la visualización. Esta habilidad estuvo presente en la aprehensión de conceptos tales como transformaciones en el plano (rotación, traslación y reflexión),

posiciones relativas entre circunferencias, características de polígonos, criterios de congruencia, entre otros.

Al concluir con el proceso de implementación del sistema de actividades, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Dar espacio para que los estudiantes propusieran preguntas referentes a un problema planteado y sus posibles soluciones, generó seguridad en el estudiante al comunicar sus ideas y propició la curiosidad por descubrir de lo que eran capaces, lo que generó en sí mismo una actitud positiva y de confianza frente a cada problema.
- El fortalecimiento de la habilidad visualización constituyó una base para el logro de un robusto aprendizaje de los contenidos planteados en el grado, además mejoró la percepción visual y el pensamiento espacial, favoreció el desarrollo del pensamiento lógico matemático y el pensamiento espacial, motivando a los estudiantes hacia la resolución de problemas retadores de la matemática en el contexto.
- Los estudiantes sintieron satisfacción al demostrar lo que sabían y los avances en el desarrollo de sus procesos mentales matemáticos a través de la formulación y solución de preguntas propuestas por ellos, las cuales presentaban un alto contenido de conceptos matemáticos.
- Los estudiantes integraron en la mayoría de casos; la parte numérica, geométrica y variacional para argumentar las imágenes formadas en su mente sobre la posibilidad o no de realizar sus construcciones, lo cual demuestra que se fortaleció la visualización en cada uno de ellos.

- Dentro de la visualización, las habilidades figura-contexto y percepción de la posición en el espacio enfocadas en descubrir figuras y armar estructuras bajo ciertas reglas, corresponden a las habilidades que encierran acciones más motivantes para los estudiantes y en las cuales ellos realizan grandes aportes producto de su creatividad e interés, con estas se pueden iniciar los problemas retadores.
- Para lograr fortalecer la habilidad visualización se debe en primer lugar, familiarizar al estudiante con las habilidades que la desarrollan y aumentar la integración del número de estas en los problemas retadores (propuestas por Del Grande (1990)) para que con base a la suma de elementos se fortalezca esta habilidad, pues obliga al estudiante a tener en cuenta varias reglas enriqueciendo de esta manera su estructura mental.
- Las habilidades referentes a la percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio y conservación de la percepción se pueden relacionar e integrar fácilmente en la elaboración de problemas.
- La visualización contribuye a la búsqueda de una interpretación geométrica de los objetos matemáticos. Además permite una comprensión avanzada de los conceptos geométricos, desarrolla el pensamiento y fortalece la estructura mental a la vez que apoya la creación y fortalecimiento de otras habilidades en el estudiante a partir de la formación de imágenes y representaciones.

RECOMENDACIONES

Una vez culminada la aplicación del sistema de actividades propuesto para fortalecer la habilidad matemática visualización, en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Campestre San Diego, y posteriormente la realización del análisis de cada una de ellas, se hace necesario considerar las siguientes recomendaciones en aras de tenerlas en cuenta para próximos estudios:

- ✓ Seguir investigando sobre la habilidad visualización en otros campos de la matemática, aparte del geométrico, pues como se ha visto en el estado del arte, la mayoría de las investigaciones se relacionan con esta rama.
- ✓ Continuar brindando espacios en los cuales los estudiantes puedan argumentar los procesos mentales que realizan y cómo manipulan las figuras e imágenes surgidas en su mente.
- ✓ Diseñar e implementar problemas retadores en donde los estudiantes utilicen material didáctico para fortalecer la visualización y de esta manera contribuyan a potencializar la construcción de conceptos geométricos y la argumentación visual.

- ✓ Fortalecer en el aula las habilidades de la visualización a través de actividades interesantes y creativas sobre todo educativas permitiendo que el estudiante mantenga el interés de aprender y una mente abierta a nuevos conocimientos.
- ✓ Seguir propiciando ambientes participativos, que estimulen y motiven al estudiante a pensar, comparar y analizar, mediante la organización en comunidades de práctica, pues estas permiten avanzar en el fortalecimiento de las habilidades matemáticas y la comprensión de objetos geométricos.

BIBLIOGRAFIA

Acevedo, J (2015). La Visualización en tareas de Rotación y Traslación sobre el plano del videojuego. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, 2015. Recuperable el 10 de octubre de 2016 en la URL: http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1272/500

Alsina, C. y Nelsen, R. (2009). When Less is More, Visualizing Basic Inequalities. Dolciani Mathematical Expositions # 36. United States of America: The Mathematical Association of America.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics.

Arici, S & Aslan, F. (2013). Effect of instruction based on origami spatial visualization, geometry and geometric reasoning achievement. Recuperable el 7 de octubre de 2014 de la URL: <http://link.springer.com/article>

Ballester, P. y otros (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Tomo I y II. La Habana: Pueblo y Educación.

Barbeau, E. y otros. (2006). *Matemáticas retadoras dentro y fuera del aula*. Obtenido de Estudio ICMI 16: <http://www.amt.edu.au/icmis16dds spanish.html>

Barraga, N. (1997). *Textos reunidos de la Doctora Barraga*. Madrid: ONCE. Recuperado el día 22 de noviembre de la URL http://www.ite.educacion.es/formacion/materiales/129/cd/pdf/m7_dv.pdf

Bello, B. <http://www.monografias.com/trabajos81/procesoformacionhabilidadesmatematicas/pr ocesoformacionhabilidadesmatematicas.shtml>

Bishop, A. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 176178). Boston, USA: Birkhäuser.

Bishop, J. (1983). Space and geometry. En R.Lesh y M.Landau (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175203). New York: Academic Press

Borovik y Gardiner (2006). *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*. World Federation of National Mathematics Competitions Conference 2006 Cambridge, England 22–28 July 2006 <http://www.wpr3.co.uk/wfnmc>

Brawner, F. (2011). *Mathematics framework for Philippine basic education*. Science Education Institute, Department of Science and Technology (SEIDOST) and the Philippine Council of Mathematics Teacher Education (MATHTED), Inc., Manila, Philippines. Recuperado el 11 de octubre de la URL http://www.sei.dost.gov.ph/images/downloads/publ/sei_mathbasic.pdf

Campbell, S., Handscomb, K., Zaparyniuk, N., Sha, L., Cimen O. A, y Shipulina, O. (2009) Investigating imagebased perception and reasoning in geometry. Paper presented to the American Educational Research Association: Brain, Neuroscience and Education SIG, San Diego, CA, U.S.A.

Cantoral, R. (2002). Desarrollo del tiempo matemático. Conferencia: “Visualización y pensamiento matemático; estrategias de enseñanza”. México.

Cantoral, R., Rodríguez, F. Y Montiel, G. (2008). Visualization in iterative processes. ICMI 2008. Monterrey.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2000). Desarrollo del Pensamiento Matemático. México: Trillas, p. 146.

Chacón, M (2008). Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Revista Tattenvachana. Pag 22.

Chale, S. (2015). La visualización en la resolución de patrones. XIV Conferencia interamericana de Educación matemática. México, 2015. Recuperado de la URL el día 10/10 /2016

http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1061/436

Clavero, F (2001). Habilidades Cognitivas. Notas del departamento de psicología evolutiva y de la educación. Universidad de Granada. España.

D´AMORE, Bruno (2000). La escolarización del saber y de las relaciones: Los efectos sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (México) V. 3, N. 3, 2000. p. 321339

De Guzmán, M. (1996) El rincón de la pizarra: Pirámide.

De Guzmán, M. (2010). Visualización en alumnos de ESTALMAT: una experiencia docente e investigadora.

<https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionValencia2010/Visualizacion.pdf>

De Guzmán, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. Recuperado de la URL:

<http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf> Pag. 3

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 1420.

Díaz, M. (2010). *El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual*. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 337-344). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Domicantonio, R. Costa, V. y Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación*. Septiembre de 2011, Número 27, páginas 75-87, ISSN: 1815-0640.

Dunkels, R.(1990). Making and exploring tangrams. *Arithmetic teacher*, 37(6), 3842.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computer in mathematics education* (pp. 142158)

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! Recuperable el 10 de enero de 2016 de la URL:

http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles116042_archivo_pdf2.pdf p.57

Falk, M. (2013). Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX. Segunda parte: Estructuralismo. Pág 157.

Ferrer, M. (2010). *"La resolución de problemas en la estructuración de un sistema de habilidades matemáticas en la escuela media cubana"*, Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/tesis/2010/mfv/

Fridman, L. (1991). Metodología para enseñar a resolver problemas matemáticos. *La matemática en la escuela* (5).

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Study of Mathematics*.74:163–183 DOI 10.1007/s106490109232y. Online Springer Science+BusinessMedia B.V. 2010.

Godino, J. (2003). Matemáticas y su Didáctica para Maestros Manual para el Estudiante. Proyecto EdumatMaestros. Edición febrero del 203. Recuperado el 10 de octubre de la URL http://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J. (2003). Matemáticas y su Didáctica para Maestros Manual para el Estudiante. Proyecto Edumat Maestros. Edición febrero del 203. Recuperado el 10 de octubre de la URL: http://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Gómez, I (2002). Visualización e Intuición en Investigación en Educación matemática. Universidad complutense de Madrid.

González, M. (2003). Competencias básicas en el área de matemáticas. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Gutiérrez, A (1991) Procesos y habilidades en visualización espacial.

Henriquez, E. (2014) .Habilidades propias de matemática según bases curriculares de básica 2012. Recuperado el 9 de octubre de 2016 en la URL <https://prezi.com/7le8yg5klq6u/habilidadespropiasdematematicasegunbasescurricular esdebasica2012/>

Hernández, H, Delgado, J., Fernández, B. (2001). Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Hernández, C. (2012). Aprendizaje por descubrimiento, p. 23.

Hitt, F. (2002). Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics. Education North American. Chapter and Cinvestav IPN. México. Pág 8.

Hoffer, A. (1977). Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization. Palo Alto, Calif.: Creative Publications.

Izard, J. (1990). Development spatial skills with threedimensional puzzles. Arithmetic teacher, 37(6) 4447.

Kavale, K. (1982). Meta-Analysis of the relationship between Visual Perceptual skills and reading achievement J Learn Disability 15(1):42-51.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Kulp, M., Earley, M., et al. (2004). Are visual perceptual skills related to mathematics ability in second through sixth grade children? *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 26(4): 44-48.

Lawrie, C., Pegg, J. y Gutierrez A. (2002). Unpacking students meaning of crosssections: A frame for curriculum development. Proceedings of the 26th PME Conference.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 763-804.

Lowrie, T. (2012) *Visual and Spatial Reasoning: The Changing Form of Mathematics Representation and Communication. Reasoning, Communication and Connections in Mathematics*.

Malva, (2003) Fortaleciendo las habilidades matemáticas de los alumnos ingresantes desde los entornos virtuales. p. 40.

Marín, A. Guerrero, S. (2005). "Una lectura del informe PISA desde la Secundaria". *Padres y Madres de Alumnos Revista de la CEAPA nº 82*.

Mcgee, M. (1979). *Human Spatial Abilities: Sources of Sex Differences*. New York: Praeger.

Micelli, M & Crespo, C. (2011). Las figuras de análisis en el aula de matemática. Recuperable el 7 de octubre de 2015 de la URL: <http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf> . pp. 719-737. México.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). La revolución educativa estándares básicos de matemáticas y lenguaje Educación Básica y Media. Estudiantes competentes porque aprenden de verdad. Recuperable el 5 de diciembre de 2014 en la URL: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-70799_archivo.pdf

Monje, C. (2011). Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa.

Montecino, A. (2009). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional. México.

Moses, B. (1980). The relationship between visual thinking tasks and problemsolving performance. Comunicación presentada en Annual Meeting of the American Education of Research Association, Boston, EEUU.

Olson, M.B. (1978) Visual Field usage as an indicator of right or left hemispheric information processing of gifted students. *Gifted child Quarterly*, 22 (2), 243247.

Pérez, J. (2004). Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria.

Piaget, J. (1981) "La teoría de Piaget". *Infancia y Aprendizaje*. Monografía (2): 1354.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires. Argentina.

Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. París: Flammarion. p. 27.

Polya, G. (1954). *How to solve it*, Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery. On understanding* Combined Edition. New York: Wiley & Sons, Inc. Recuperado el día 1 de octubre de 2016 de la URL <http://www.bdigital.unal.edu.co/10598/1/8411522.2013.pdf>

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. For the learning of mathematics, 6, 3, 4246.

Presmeg, N. (1999) Variations in Preference for Visualization Among Mathematics Students and Teachers, Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, F. Hitt, M. Santos Eds., 23-26

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Editorial Comares. España

Q.C.A. Qualifications and Curriculum Authority (2009). Developing skills, Planning, teaching and assessing the curriculum for pupils with learning difficulties, Printed in Great Britain. Recuperado el 8 de septiembre de la URL http://dera.ioe.ac.uk/19905/1/P_scales_developing_skills.pdf

Restle, F & Davis, J. (1962). Success and speed of problem solving by individuals and groups. *Psychological Review*. p 520.

Rivera, F. y otros (2016) TSG 20: Visualización en la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas. Obtenido de Estudio ICME 13 http://www.icme13.org/topic_study_groups

Rodríguez, K. (2015). Las demostraciones sin palabras sobre desigualdades e identidades en el proceso de enseñanza aprendizaje en la Educación Básica. Universidad Antonio Nariño. Pág. 167.

Rodríguez M. (2007). La representación geométrica desde la perspectiva de la trasferencias de registros. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20* pág. 77.

Romero, M. (2011). El aprendizaje por descubrimiento. Revista digital para profesionales de la enseñanza. Federación de la enseñanza de CC.OO. DE Andalucía. 16 de septiembre de 2011. Recuperado el día 31 de octubre de la URL: <https://www.feandalucia.ccoo.es/docuipdf.aspx?d=8629&s>

Sampiere, R (2010). Metodología de la Investigación. 5ª Edición México. Mc Graw Hill.

Sánchez, M. (1995). Desarrollo de Habilidades del Pensamiento: Procesos Básicos del Pensamiento. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving, p. 28. In: F. R. Curcio (Ed.) *Teaching and Learning: A problem Solving Focus*. Reston, VA: NCTM.

Sriraman, B. y English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education*. New York: Springer.

Smith, R. (2002) *Spatial Visualization: Fundamentals and Trends in Engineering Graphics*. Volume 18, Number 1. November 2001 to January.

Stanic, G. (1990). Spatial abilities. *Arithmetic teacher*, 37(6), 4851.

Sylvester J. (1993). Cambridge University Press, 19041912, quoted by Philip J. Davis (p.344) in *Visual Theorems*, *Educational Studies* 24 (1993) 333344).

Tam, L. (2010). Develop problem solving skills in secondary mathematics classroom through digital game design. (Thesis). University of Hong Kong, Pokfulam, Hong

Kong SAR. Retrieved from http://dx.doi.org/10.5353/th_b4746926. Recuperado 10 de octubre de la URL <http://hub.hku.hk/bitstream/10722/174395/1/FullText.pdf?accept=1>

Tangarife, D. (2013). Transition to numerical algebraic thinking through teaching strategy algeblocks. Universidad Nacional De Colombia Sede Manizales Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Thomas K. (2007). Elementary Number Theory with applications. 2da edición
Pág. 257

Torbay, A. (1994). El nivel de conocimiento de los alumnos al finalizar 8º EGB/1º Ciclo de la ESO: un acercamiento constructivista. Recuperado el 2 de noviembre de la URL <ftp://tesis.bbt.k.uil.es/ccssyhum/cs79.pdf>

Velázquez, D. El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo. Capítulo 4, Pág. 39.

Wenger, E, McDermott, R. y Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge*. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1578513308.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press

Wenger, E. (2007). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

Yakimaskaya, I.S. (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren (Soviet "Studies in Mathematics Education" vol.3)

Zerpa O. (2011). Habilidades de pensamiento matemático en alumnos de Educación Básica Universidad de Carabobo. Maestría en Educación Matemática. Unidad de Investigación en Educación Matemática. Vol 3, N° 26.

Zimmermann, W; Cunningham, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. Recuperado el día 12 de marzo del 2015 de la URL <http://c.ymcdn.com/sites/www.atmae.org/resource/resmgr/JIT/strong122001.pdf>

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta diagnóstica

The logo of the Universidad Antonio Nariño (UAN) is located in the top-left corner of the table. It consists of the letters 'UAN' in a large, bold, blue font, with 'UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO' written in a smaller, blue font below it.	ENCUESTA A DOCENTES DE MATEMÁTICAS Mayo/2015	MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
--	---	---

Objetivo: Determinar fortalezas o falencias entorno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática haciendo uso de la habilidad **visualización** en grado séptimo.

“... la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática” Zimmermann y Cunningham (1991)

Estimado docente, su opinión es importante para mejorar el nivel de competencia de los estudiantes de grado séptimo en matemáticas, específicamente en la habilidad visualización. Los resultados son de gran ayuda para el desarrollo de nuestra investigación.

Agradezco su participación y sinceridad.

1° Datos Generales.

Género: F___ M___

Años de Experiencia: _____

Lic.: Sí ___ No___

Colegio: Público ___ Privado: _____

Total de años trabajados en grado 6 o 7: _____

2°Cuestionario

1° Valora en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, las siguientes preguntas.

Pregunta	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1.1) Observa en los estudiantes la dificultad de visualizar un problema matemático.					
1.2) Al planear su clase de matemáticas tiene en cuenta situaciones en las cuales el estudiante desarrolle habilidades matemáticas.					
1.3) Al planear su clase de matemáticas tiene en cuenta situaciones en las cuales el estudiante desarrolle la habilidad visualización.					

2. ¿Cuáles son las dificultades que usted observa en los estudiantes con respecto al desarrollo de la habilidad visualización?

3. ¿Cómo lograría usted el desarrollo de la habilidad visualización en los estudiantes según su experiencia?

4 ¿Cómo evidenciaría o explicaría a través de una situación matemática el uso de la visualización en el contexto de resolución de problemas?

Anexo 2. Solicitud permiso a padres de familia

Señor (a) padre de familia

Colegio Campestre San Diego

Cordial saludo

Como requisito para optar al título: Magister en Educación Matemática que adelanto en la Universidad Antonio Nariño de Bogotá estoy desarrollando la práctica con los niños de grado 7C con la debida autorización de las directivas del colegio. Se hace necesario como requisito un registro fotográfico donde se valide el desarrollo de los talleres en el cual aparecerá su hijo(a). Por esta razón solicito su colaboración y aprobación para realizar dicho procedimiento.

Agradezco su colaboración.

Atentamente.

Lic. Elizabeth González

Docente de Matemáticas grado 7C

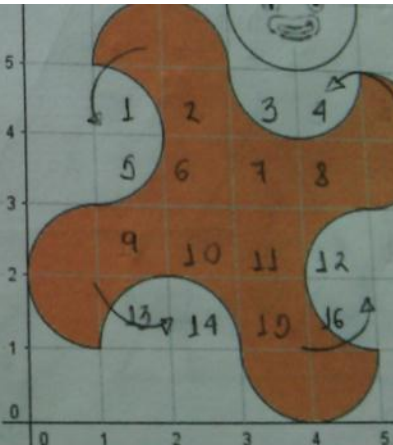
Padre de familia.

C.C.:

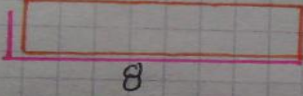

Anexo 3. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 1

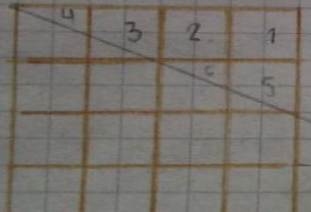
b. ¿Consideraría que un triángulo podría representar el hombre de jengibre de forma tal que tuviese igual área?, ¿Si es así, qué tipo de triángulo; equilátero, isósceles ó escaleno utilizarías?
Si, un triángulo Escaleno, (Todos sus lados son diferentes)

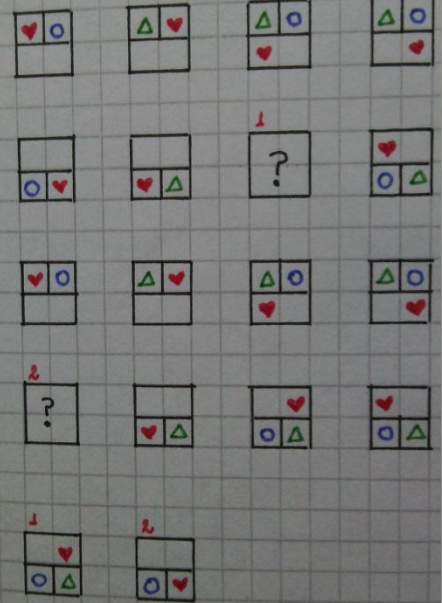
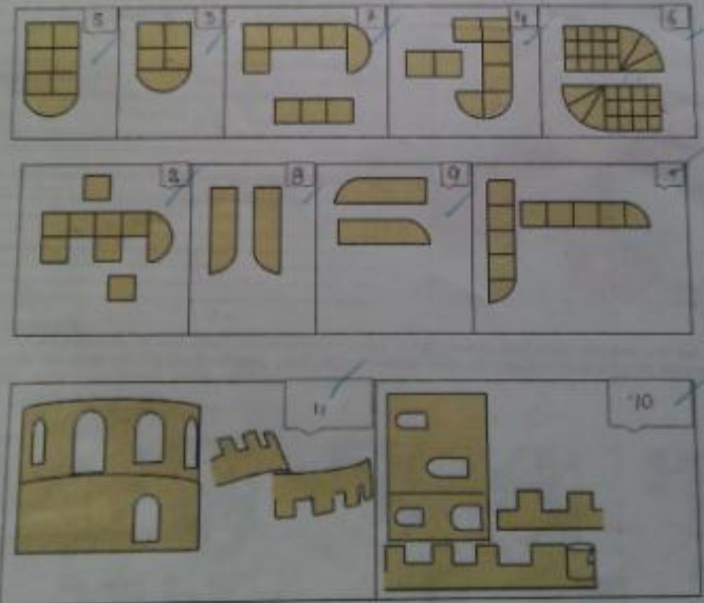
c. ¿Cómo lo dibujarías? ¿Cómo le explicarías tu solución al profesor?
El área de un triángulo es igual a: $b \cdot h / 2$, en este caso el área del triángulo debe ser 16, al igual que la del cuadrado. Multiplicamos 16×2 lo que nos da 32, luego 2 números que representen la base y la altura del triángulo y que de como resultado 32. (Escogí 8 y 4). $b \cdot h / 2$
 $8 \cdot 4 / 2 = 32 / 2 = 16$



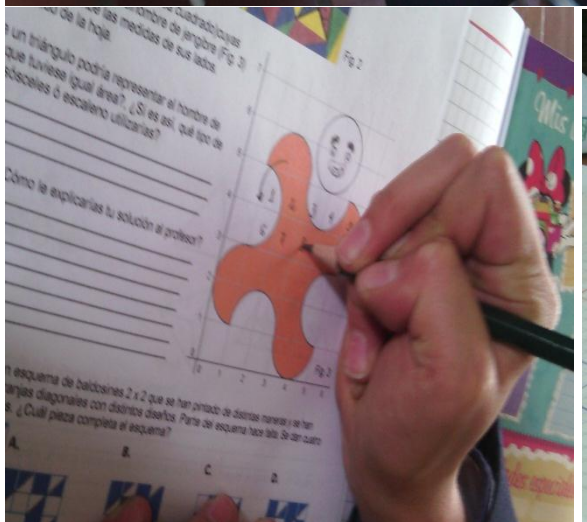
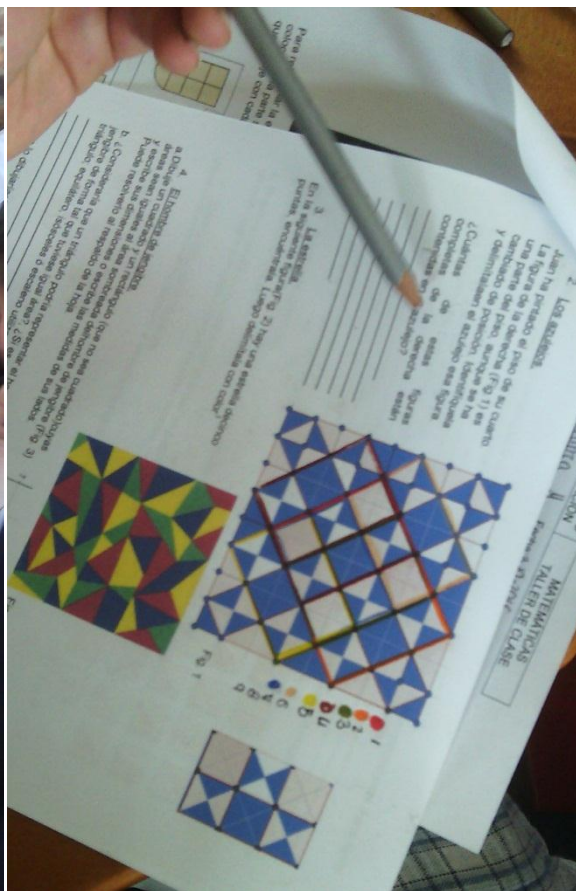
4.a. **Explicaciones.**

2  $8 \times 2 = 16$  $4 \times 4 = 16$

4.b  Cada parte de la figura es un complemento de la otra.

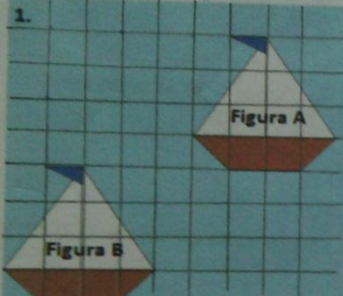
Anexo 4. Evidencia fotográfica de la actividad 1



Anexo 5. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 2

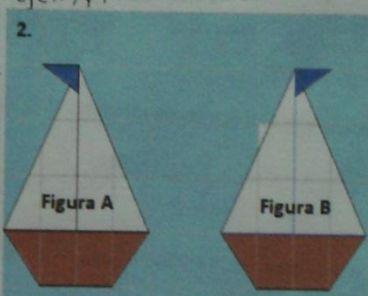
4. Los barcos.
 Observa los siguientes barcos y describe una traslación u otra transformación que lleva el barco de la Figura B a coincidir con el barco de la Figura A. (coloca (c, x, y))

1.



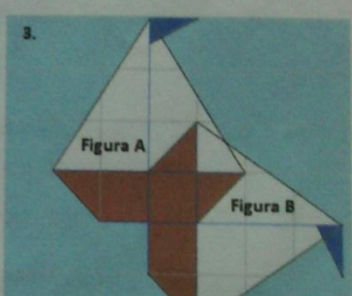
Traslación ✓
 Se trasladó 2u a la derecha y 4 hacia abajo

2.



Reflexión ✓
 El barco A se refleja sobre el eje y.

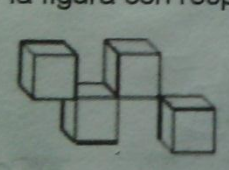
3.



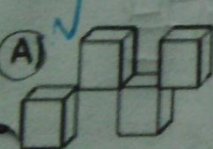
Rotación 90° ✓
 EN SENTIDO HORARIO

1. La figura infiltrada.
 Encierra en cada columna la figura que según las características no encaje con las demás y justifica tu respuesta (observa según ángulos).
 Columna A: La figura 2 es convexa. ✓
 Columna B: La figura 2 tiene 2 4 concavos ✓
 Columna C: En la base de la figura hay un 4 concavo ✓

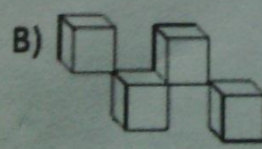
2. Los cubos.
 Al reflejar la figura con respecto a la línea azul, ¿qué imagen se obtiene?



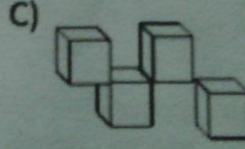
(A)



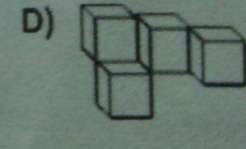
B)



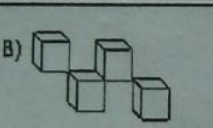
C)



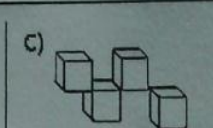
D)



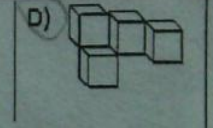
B)



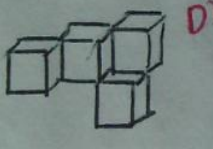
C)



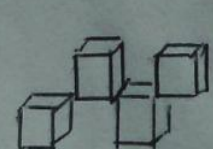
D)



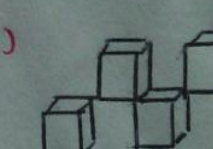
D)



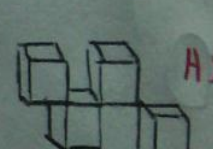
C)



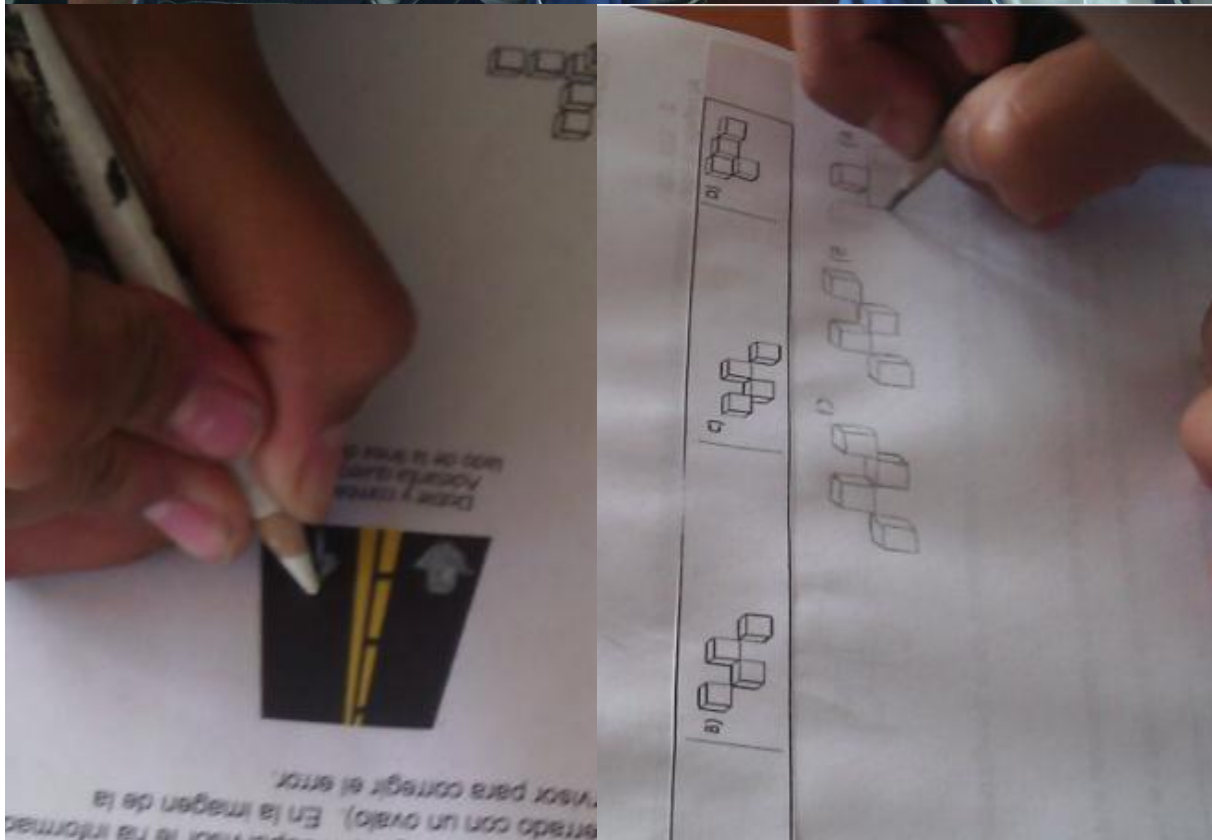
B)



A)



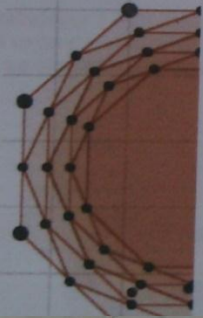
Anexo 6. Evidencia fotográfica de la actividad 2



Anexo 7. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 3

3. La araña matemática.

Una araña está tejiendo su telaraña en forma octagonal. Para la construcción, ella une mediante segmentos los puntos medios de cada lado del octágono regular y realiza de forma consecutiva esta acción una vez que obtiene un nuevo polígono regular. Parte de la construcción que ella realiza hacia el interior se muestra en la siguiente figura.



a. Si la araña quisiera seguir construyendo su telaraña hacia el interior bajo las mismas condiciones que se pueden observar en la gráfica ¿Qué podría decir del nuevo polígono formado?

El nuevo polígono es semejante a los anteriores (igual forma, diferente tamaño). Su área es menor a la anterior figura.

b. Esta vez supóngase que la araña haya empezado a construir su telaraña partiendo de un polígono irregular y uniendo mediante segmentos los puntos medios de cada lado del polígono construido y de forma consecutiva realiza esta acción una vez que obtiene un nuevo polígono. ¿Se podría decir que el polígono formado mantiene la misma cantidad de lados, pero cambia únicamente su tamaño? ¿Qué opina al respecto? ¿Cómo puede justificar su posición?

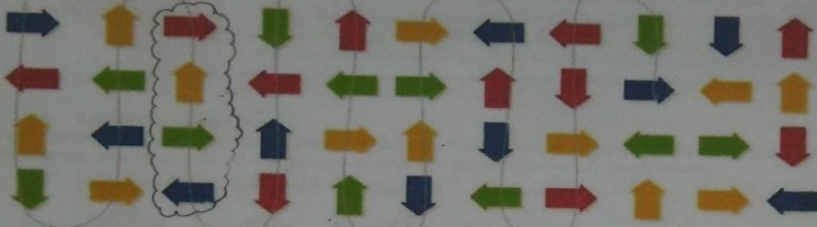
Si, el polígono formado mantiene la misma cantidad de lados y únicamente cambio su tamaño esto se debe a que cada polígono formado es semejante al anterior.

d. Anderson ahora pregunta con el nuevo recorrido ¿Ha encontrado un grupo de 4 fichas consecutivas las cuales apunten únicamente al norte o sur o un grupo consecutivo de fichas que apunten a la derecha e izquierda? Justifica.

No existe un grupo de 4 fichas consecutivas

e. Anderson le dice a Jorge "A que no eres capaz de decirme donde he colocado las flechas que son el resultado de una reflexión con respecto al eje "y" del siguiente grupo de flechas".

Reflexión:




g. Como te habrás dado cuenta Anderson es muy "preguntón" ¿Qué otra pregunta podría haber hecho Anderson referente a sus flechas?

¿Hay algún patrón al identificar las flechas de acuerdo a su color y dirección?
¿Existe alguna posibilidad de ver desde otra perspectiva las flechas?

2. El hexágono.

Juan tiene un álbum geométrico y debe conseguir las fichas que al unir las formen la figura. Las fichas que ha conseguido



1-2 - circunferencias secantes.
 3-4 - circunferencias concéntricas.
 5-6 - circunferencias tangentes exteriores.
 7-8 - circunferencias tangentes interiores.
 9-10 - circunferencias tangentes exteriores.
 11-12 - circunferencias tangentes interiores.

Anexo 8. Evidencia fotográfica de la actividad 3



Anexo 9. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 4

3. El tablero de Mariana

Los padres de Mariana le han regalado el siguiente juego el cual presenta dos tableros como se observan a continuación con fichas que se pueden manipular.

a. Completa el tablero inferior con las fichas dadas de acuerdo a la transformación realizada. ¿Puede relacionar con números las fichas que correspondan a la sucesión dada?

El cubo #11 no es correcto al reflejarlo.

Tablejo N°1	Tablejo N°2
4-6	1-15
1-15	4-6
5-8	7-9
2-12	5-8, 11-13
11-13	2-12
7-9	3-14
10-16	10-16
3-14	

Reconido entre la ponadeno y la casa

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h = \sqrt{c^2 + c^2}$$

$$h = \sqrt{16^2 + 16^2}$$

$$h = \sqrt{32}$$

$$h = 5.65$$

Para encontrar el lugar exacto donde está el alcalde, el Guasón le ha enviado la siguiente carta a Batman.

♣ Joker

de simetria
 los como el origen y a x como el eje
 decagono tomando el centro del
 lo encontramos si reflejamos el

♣ B

c. Escribe lo que informa el Guasón y luego ayúdalo a Batman a encontrar al alcalde siguiendo las indicaciones.

Lo encontramos si reflejamos el decagono tomando el centro del lote como el origen y a x como el eje de simetria.

Anexo 10. Evidencia fotográfica de la actividad 4



Anexo 11. Muestra de la carpeta de los estudiantes de la actividad 5

Figura 1.

a. Sandra le comenta a Carlos que puede construir un dado sencillo cortando, doblando y pegando las aristas; estos dados se pueden hacer de muchas maneras. A continuación le presenta 2 figuras que se pueden utilizar para armar cubos, con puntos en las caras. Sandra le pide a Carlos determinar si las siguientes figuras (2 y 3) al doblarlas por sus aristas logran cumplir esta regla, de que la suma de caras opuestas del cubo sea 7. Ayúdale a Carlos a resolver la situación y justifica la respuesta.

Figura 2: Si cumple la regla, ya que al unir sus caras los lados opuestos suman 7.

Figura 3: No cumple la regla, como opuestos no suman 7.

b. Sandra le dice a Carlos como ya te has vuelto un experto en el tema, propon en las siguientes estructuras un ejemplo y un contraejemplo de esta situación.

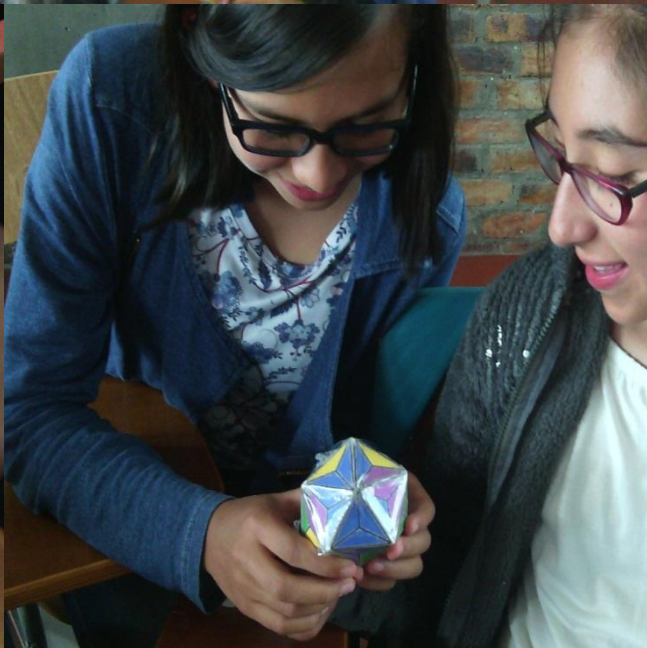
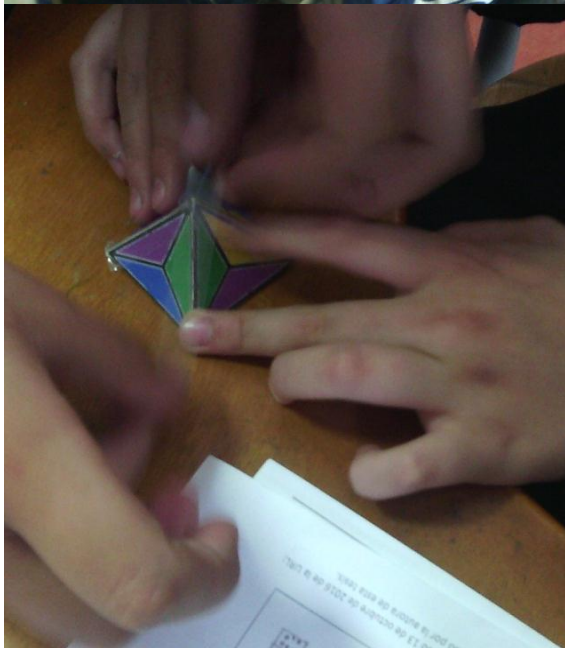
contraejemplo

d. Sandra está entusiasmada con la situación, presenta y enseña a Carlos este juego y ahora Carlos la está retando. Carlos le ha hecho nuevamente una pregunta. ¿Es verdad que la suma de la vista lateral y la suma de la vista posterior de la torre de dados (no visibles), presentan el mismo valor? ¿Qué opinas al respecto?

No, la suma de la vista posterior es de 7 y la suma de la vista lateral es 17, lo que es correcto porque para cada cara opuesta necesitamos añadir el faltante de 7, es decir un lado siempre es mayor al otro.

T. Dados (6)	1	2	3	4	5	6
1	10	19	1	11	15	14
2	10	19	1	11	15	14
3	10	19	1	11	15	14
4	10	19	1	11	15	14
5	10	19	1	11	15	14
6	10	19	1	11	15	14

Anexo 12. Evidencia fotográfica de la actividad 5



Anexo 13. Encuesta de satisfacción a estudiantes

Apreciado estudiante, una vez terminada las actividades para fortalecer el aprendizaje por la matemática y a partir de su experiencia como participante, responda las siguientes preguntas de 1 a 5, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación.

a. ¿Considera usted que la actividad desarrollada motiva el estudio de la matemática?

5 4 3 2 1

b. ¿Cree usted que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?

5 4 3 2 1

c. ¿Las actividades propuestas constituyeron un reto para usted?

5 4 3 2 1

d. ¿Considera usted que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente favorable hacia el estudio y motivación por la matemática?

5 4 3 2 1

e. ¿Se sintió usted motivado a desarrollar los problemas propuestos en las actividades de forma natural y autónoma?

5 4 3 2 1

- f. A continuación podrá resaltar lo que más le gusto al desarrollar estas actividades, lo que no le agrado y lo que se puede mejorar.
