REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

PREGUNTAS NATURALES QUE LES SURGEN A LOS ESTUDIANTES ANTE SITUACIONES REFERENTES A LA ARITMÉTICA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

John Beckenbauer Ríos

Bogotá D.C.

2016

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

PREGUNTAS NATURALES QUE LES SURGEN A LOS ESTUDIANTES ANTE SITUACIONES REFERENTES A LA ARITMÉTICA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Autor John Beckenbauer Ríos

Director de tesis: Gerardo Antonio Chacón Guerrero (PhD.)

Bogotá D.C.

2016

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. diciembre del 2016

AGRADECIMIENTOS

A nuestro Dios creador que me regala la gran oportunidad de estar acá, de permitirme vivir cada día y llenarme con su sabiduría y paciencia en todo momento.

A los doctores de la maestría, los cuales en el transcurso de la carrera me compartieron su gran conocimiento.

Agradezco de manera muy especial a la Doctora Mary Falk de Losada, a quién le guardo un profundo respeto y admiración. Existen dos personas en mi formación académica a las cuales procuro seguir como ejemplo, la Doctora María Falk es una de ellas. Está llena de un gran conocimiento y sabiduría, siempre tiene un aporte y sugerencia para cada estudiante independientemente del tema que se presente. De verdad que reitero mi admiración para con ella.

Por otra parte agradezco de todo corazón al Doctor Mauro García Pupo, desde el primer momento que ingresé a realizar la Maestría me recibió con un saludo caluroso, saludo que se mantuvo durante toda la carrera. Guardo un afecto muy especial con él, lo aprecié muchísimo y sin importar las veces que me ha llamado la atención, siempre lo respetaré y lo estimaré de todo corazón.

Al Doctor Gerardo Antonio Chacón, quién me acompañó en el proceso de la tesis, brindándome toda la ayuda posible y compartiéndome sus conocimientos y consejos en los momentos indicados. Siempre conté con sus valiosas opiniones y aportes para la tesis, las cuales fueron de gran utilidad para que todo esto fuera posible, sin él la verdad que el camino se hubiera dificultado mucho.

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo primeramente a Dios todopoderoso, que es el ser que me ha permitido llegar hasta esta donde he llegado.

En segundo lugar quisiera dedicarlo a mis padres, los cuales han sido un apoyo incondicional en todo momento, brindándome las fuerzas y la energía necesarias para no desfallecer y seguir adelante.

Ellos son el motor que permiten llegar a realizar este sueño que con tanto esfuerzo se pretende lograr.

A mis hermanos, que son una compañía vital en este proceso de aprendizaje en el transcurso de la carrera, estando presentes con sus opiniones, sin contar muchas veces con el conocimiento sobre temas de matemáticas, pero de gran ayuda solamente con estar en los momentos que se necesitan.

SÍNTESIS

La investigación busca favorecer el aprendizaje a partir de la curiosidad natural que el estudiante trae al aula de clase. La curiosidad es un aspecto importante en el desarrollo cognitivo, sin embargo por varias razones, es un tema al que no se le presta la atención requerida como proceso de adquisición de conocimientos. Para el aprendizaje de las matemáticas es esencial que los estudiantes puedan nutrir su curiosidad y su capacidad de hacer preguntas matemáticas si existe un espacio donde se pueda desarrollar libremente y sus ideas sean bien recibidas por sus pares y educadores.

El marco de la presente investigación está sustentado en la teoría de la resolución de problemas, la visualización, aprendizaje por descubrimiento y la comunidad de práctica de Wenger.

La implementación del sistema de actividades busca despertar la curiosidad matemática en los estudiantes de grados sexto, octavo y once del Colegio Elisa Borrero de Pastrana.

A partir de estos referentes, se diseñaron e implementaron situaciones mediante las cuales se pudieran desencadenar procesos de aprendizaje más significativos para los estudiantes a partir de las preguntas que surgen de manera natural o espontanea.

ABSTRACT

The research seeks to promote learning from the natural curiosity that the student brings to the classroom. Curiosity is an important aspect in cognitive development, however for several reasons, it is a subject that is not given the attention required as a process of acquisition of knowledge. For the learning of mathematics it is essential that students can nurture their curiosity and their ability to ask mathematical questions if there is a space where they can develop freely and their ideas are well received by their peers and educators.

The framework of the present research is based on Wenger's theory of problem solving, visualization, learning by discovery and the community of practice.

The implementation of the system of activities seeks to arouse the mathematical curiosity in the students of sixth, eighth and eleven grades of the Elisa Borrero de Pastrana School.

From these referents, situations were designed and implemented through which could trigger more meaningful learning processes for students from questions that arise naturally or spontaneously.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo busca despertar la curiosidad natural que existe en los estudiantes, fomentado por situaciones aritméticas que conducen a generar preguntas de manera natural o espontánea.

Las preguntas generadas por los estudiantes forman parte esencial para construir nuevo conocimiento, la importancia que tienen las preguntas hechas por parte de los alumnos promueve el aprendizaje profundo, activo, tanto en cuanto a lo personal como a lo social se refiere.

La pregunta expresa la curiosidad por conocer, nace de la capacidad de descubrir, del asombro, es el acto puro del conocimiento, puesto que todo conocimiento se genera a partir de la pregunta.

Una de las interpretaciones más amplias y mayor conocidas es la que plantea el pedagogo de origen brasileño Paulo Freire; para este autor, “la pregunta constituye un elemento central para pensar y concretar una formación para las nuevas generaciones, que prepare en la incertidumbre y en la desmitificación de lo obvio y lo establecido”[1].

Escobar (1990) afirma “la educación liberadora se nutre de la pregunta, como un desafío constante a la creatividad y al riesgo del descubrimiento”. [2]

La curiosidad es el impulso que lleva a los estudiantes al conocimiento. Ostroff (2016) expresa “La curiosidad consiste en ser consciente y abierto, revisar las cosas, experimentar e interactuar dentro de los alrededores. En un aula basada en la curiosidad, los maestros tienen la oportunidad única de ser capaces de extraer la más profunda admiración de los estudiantes, captando su atención sin ningún

---

[1] Freire, P., & Faúndez, A. (1986). Hacia una pedagogía de la pregunta: conversaciones con Antonio Faúndez.Recuperado el 15 de abril de 2016 de la URL: nuestraescuela.educacion.gov.ar/bancoderecursos/media/.../apoyo03.pdf

[2] Escobar, M. (1990). Educación alternativa, pedagogía de la pregunta y participación estudiantil. México. D.F.: Facultad de Filosofía y Letras.

esfuerzo, y permitiéndoles participar plenamente" [3]. Crear las condiciones para la curiosidad en el aula nos permitirá lograr una motivación más auténtica tanto de los profesores como de los estudiantes, conduciendo a un aprendizaje más profundo.

Zuckerman citado por Villate (2009) señala que la curiosidad juega un papel importante en el desarrollo tanto afectivo como cognitivo, argumentando que es uno de los mecanismos "por medio de los cuales los niños aprenden no sólo a adaptarse a un entorno variado y complejo, a ser conscientes de él y a transformarlo para satisfacer sus necesidades" [4].

Campanario y Otero citados por Torres y otros (2012) aducen que la formulación de preguntas representa un medio mediante la cual las personas avanzan en la propia comprensión y, por lo tanto, representa una poderosa actividad metacognitiva.

Este mismo autor afirma que "si se entrena a los estudiantes para que hagan preguntas, se mejora la comprensión el aprendizaje y la memoria"[5].

La pregunta como herramienta de aprendizaje según afirma Zuleta citado por Brailovsky & Menchón (1995) "es quizás, uno de los temas que menos ha suscitado importancia en la institución educativa, y

---

[3] Ostroff, W. L. (2016). Cultivating curiosity in K-12 classrooms : how to promote and sustain deep learning. Virginia: ASCD. p.2

[4] Villate, J. R. (2009). Caracterización de la curiosidad en niños de 10 a 12 años particpantes del Programa Centro Amar Kennedy, a través del estudio de caso. Recuperado el 20 de noviembre de 2016 de la URL: http://www.javeriana.edu.co/biblos/tesis/educacion/tesis72.pdf

[5] Torres, T., Duque, J., Ishiwa, K., Sánchez, G., Solaz, J., & SanJosé, V. (2012). Preguntas de los estudiantes de educación secundaria ante dispositivos experimentales. Recuperado el 10 de enero de 2016 de la URL: http://mobiroderic.uv.es/bitstream/handle/10550/42619/088627.pdf?sequence=1&isAllowe d=y

sobre el que menos se investiga y publica en nuestro medio, a pesar de ser un tema tan importante y necesario en la dinámica de los procesos formales de adquisición de conocimientos”[6].

Las inquietudes, las dudas, la curiosidad de los estudiantes deben servir de reflexión en la escuela, para que luego se pueda profundizar más y capitalizar todo esto que se genera en el aula de clases.

Una estrategia fundamental para acercar el trabajo de investigación al aula de clases es la formación de preguntas, por medio de las cuales los estudiantes pueden tener una posición activa, interesados en el conocimiento, lo cual conlleva a generar alternativas pedagógicas en las que se incluyan esas preguntas por parte de los estudiantes para enriquecer el conocimiento matemático.

Uno de los ideales de la educación, es proporcionar caminos hacia el conocimiento, los cuales puedan seguir siendo elaboradas de manera continua por el estudiante, la clave para lograr este ideal se encuentra en propiciar de manera constante la curiosidad, a la cual se considera un componente fundamental del aprendizaje.

Según Plata (2011) “Cuanto más enriquecedor para los estudiantes y para el propio maestro podría ser explorar lo que está supuesto e implícito en las preguntas e hipótesis que elaboran los estudiantes, dentro de un ambiente de trabajo dialógico y colaborativo”[7].

De ahí la importancia que tienen las preguntas que se formulan por parte de los estudiantes en el aula de clases como estrategia de aprendizaje en cualquier nivel educativo en el que se encuentre. Freire & Faúndez (1986).

---

[6] Brailovsky, D., & Menchón, A. (1995). Ignorancia fundante”: la cuestión de las preguntas en la clase. Recuperado el 22 de junio de 2016 de la URL: http://mobiroderic.uv.es/bitstream/handle/10550/42619/088627.pdf?sequence=1&isAllowe d=y

[7] Plata, M. E. (2011). Procesos de Indagación a partir de la pregunta. Una experiencia de formación en Investigación. p. 34.

El Ministerio de Educacion Nacional (M.E.N, 1998) establece que "… las interacciones entre el docente y los estudiantes, y las que se tejen entre éstos últimos provocadas por la situación problemática, generan una negociación activa de significados de las nociones matemáticas"[8]. Esta interacción entre docente y estudiantes y entre ellos mismos produce una conexión entre lo que saben y lo que van a aprender. "La pregunta correcta y oportuna es de vital importancia, dado que las respuestas son reveladoras del nivel de comprensión y desarrollo de los procesos y de las nociones matemáticas involucradas en ellas"[9].

En Matemáticas los estudiantes deben tener una participación motivada por el docente, generando en ellos la curiosidad en el planteamiento de una situación matemática o la solución de un problema planteado.

En muchas ocasiones se generan preguntas por parte de los estudiantes que ya vienen de alguna manera por así llamarlo 'predestinadas' por parte del profesor, pretendemos que dichas cuestiones o interrogantes que se hagan sean las que ya están sujetas a la temática manejada y a las pretensiones por parte del docente en el aula. Se debería generar en el aula procesos que permitan ir poco a poco, construir preguntas iniciales y luego interrogantes contundentes con los cuales se enfrenten desde lo que ellos saben y así abrir nuevas fronteras al conocimiento.

Los maestros transmitimos que realmente lo importante son las respuestas que los estudiantes den a una pregunta formulada de nuestra parte, y que las preguntas hechas por ellos son aquellas que se hacen cuando no se ha comprendido el tema.

[8] M.E.N. (1998). Lineamientos curriculares. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

[9] Ibidem

Por esto mismo, nuestros estudiantes van perdiendo poco a poco esa capacidad y curiosidad natural de preguntarse y preguntar; el mundo que era un gran interrogante para ellos empieza a darle las respuestas por parte de los adultos que los rodean, quienes se encargarán de administrarles cuando sea conveniente.

David Page citado por Shulman & Keislar (1979) ha observado que los mejores estudiantes de matemáticas siempre aprenden por descubrimiento. Afirma que "… ellos piensan activamente y se preguntan: ¿por qué?, ¿Por qué no?, ¿qué pasaría si lo hiciera de otra manera?, ¿qué querrá decir con eso?, ¿por qué no se puede hacer de esta manera?, etcétera."[10]

Cabe preguntarse ahora ¿de qué manera se puede despertar en los estudiantes esa curiosidad que como se mencionaba anteriormente se ha perdido poco a poco debido a factores externos que limitan su imaginación?

Uno de los objetivos esenciales de la enseñanza de la matemática es precisamente que lo que se está enseñando tenga un significado, esto permite que los alumnos indaguen, formulen hipótesis, descubran, se generen preguntas que permitan despertar la curiosidad frente situaciones planteadas.

La resolución de problemas es precisamente una herramienta que brinda a los estudiantes la oportunidad de conocer por sí mismos, aplicar esquemas de solución, verificar procesos, confrontar resultados, buscar otras vías de solución, plantear nuevos interrogantes a partir del problema.

Los investigadores Obando, Zapata, & Muñera (2002) expresan que la actividad matemática del estudiante tiene un objetivo primordial: "hacer que alcance esquemas generales de pensamiento, que

[10] Shulman, L. s., & Keislar, E. r. (1979). Aprendizaje por descubrimiento. México D.F.: Editorial Trillas. p. 146.

pueda, ante una situación, reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o a la inversa, que pueda ver los casos particulares a través de clases generales de problemas”[11].

A través de la aplicación de métodos empíricos como la observación participante, encuesta y la experiencia del investigador, se pudo constatar cómo insuficiencias las siguientes:

- La pedagogía se centra en el conocimiento que tiene el profesor, la cual es impartida de manera unidireccional, sin permitir que el estudiante tenga participación en el proceso de aprendizaje.
- Se da poca importancia a las preguntas realizadas por los estudiantes en el aula.
- No se plantean situaciones matemáticas por parte del profesor que generen en los estudiantes curiosidad natural para formular preguntas de manera natural a partir de dichas situaciones.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Qué preguntas naturales surgen en los estudiantes de los grados sexto, octavo y once cuando se les presenta una situación matemática referente a la aritmética?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en los grados sexto, octavo y once.

El **objetivo general** de este trabajo es determinar las preguntas que de forma natural surgen en los estudiantes cuando se les presentan situaciones matemáticas referentes a la aritmética.

Los **objetivos específicos** propuestos son:

[11] Obando, G., Zapata, J., & Muñera, J. (2002). Las situaciones Problema como estrategia para la conceptualización Matemática. Educación y Pedagogía, p. 18.

- Estudiar las investigaciones que fundamenten el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan con el desarrollo de la curiosidad natural en matemáticas.
- Despertar la curiosidad natural y estimular a los estudiantes a realizar preguntas que de manera natural les vaya surgiendo frente a situaciones matemáticas referentes a aritmética.
- Analizar las preguntas que surgen en los estudiantes frente a situaciones aritméticas dadas.
- Promover a partir de las preguntas generadas por los estudiantes nuevas situaciones y experiencias de aprendizaje.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza aprendizaje de la aritmética a través de situaciones matemáticas.

Para el cumplimiento de los objetivos propuestos, se plantean las siguientes **preguntas de investigación:**

1. ¿Cuáles investigaciones fundamentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, contribuyendo con el desarrollo de la curiosidad natural en matemáticas?
2. ¿Cómo se puede despertar la curiosidad natural de los estudiantes y estimularlos a realizar preguntas que de manera natural les vaya surgiendo frente a situaciones referentes a aritmética?
3. ¿Cómo analizar las preguntas que surgen en los estudiantes frente a situaciones aritméticas dadas?
4. ¿De qué manera es posible promover nuevas situaciones y experiencias de aprendizaje a partir de las preguntas generadas por los estudiantes?

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar la investigaciones que se han realizado sobre la importancia de la preguntas en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan con el desarrollo de la curiosidad natural en matemáticas.
2. Investigar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan con el desarrollo de la curiosidad natural en matemáticas.
3. Estimular a los estudiantes a realizar las preguntas que de manera natural les vaya surgiendo frente a situaciones matemáticas referentes a aritmética.
4. Implementar estrategias de aprendizaje a partir de las preguntas generadas por los estudiantes en situaciones referentes a aritmética.
5. Determinar la naturaleza (o el tipo, o las características) de las preguntas que de modo natural surgen en los estudiantes cuando en el marco de la resolución de problemas se plantean diversas situaciones que incluyen contenidos aritméticos.

Metodología de la investigación

Es una investigación cualitativa en la que se usa la observación científica, la cual facilita obtener información sobre la curiosidad generada en los estudiantes, analizando las actividades propuestas.

El **aporte práctico** radica en una estrategia de aprendizaje y un sistema de situaciones sustentados en problemas retadores, que permita desarrollar e incentivar la curiosidad natural en los estudiantes de grado quinto, séptimo y once.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones y recomendaciones.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se hace referencia a las investigaciones realizadas acerca de la importancia que tiene la curiosidad natural y las preguntas en el aprendizaje de los estudiantes, fundamentalmente en áreas de educación y en educación matemática.

1.1. Investigaciones en áreas de educación y pedagogía

Hacia una pedagogía de la pregunta[12]

Freire y Faúndez (1986) analizan la importancia que tienen las preguntas que se formulan los estudiantes en el aula de clases, como estrategia de aprendizaje en cualquier nivel educativo en el que se encuentre. Freire manifiesta que la curiosidad del estudiante, en muchas ocasiones, puede hacer dudar o llegar a conmover al profesor sobre la certeza que se tiene de un tema. Freire afirma "la pregunta que el alumno hace sobre el tema –cuando es libre para hacerla–, puede brindarle al profesor un ángulo distinto, el cual será posible profundizar más tarde en una reflexión más crítica"[13].

El autor expresa que los estudiantes creen o tienen la concepción que el diálogo en clase, es señal de debilidad por parte del profesor, la gran mayoría están acostumbrados a que el docente es el dueño de la verdad, y la modestia en el saber es símbolo de debilidad e ignorancia.

Para estos autores es de vital importancia la curiosidad como generadora del conocimiento, y aún cobra mayor importancia que el profesor realice una abstracción más a fondo de aquellas preguntas que de forma natural emergen de los estudiantes en un tema dado.

[12]Conversaciones con Antonio Faúndez. Recuperado el 15 de abril de 2016 de la URL: http://nuestraescuela.educacion.gov.ar/bancoderecursos/media/docs/apoyo/apoyo03.pdf

[13]Ibidem

1.1.1. The effectiveness of face-to-face discussion in chinese primary schools[14]

Esta investigación tuvo como objetivo evidenciar las limitaciones en las aulas de clase en China, y estudiar el comportamiento de los niños al interactuar en discusiones entre pares, con el fin de entender cómo aumentar su aprendizaje y promoverlo para ser más activo y tener una comprensión más profunda del tema enseñado.

Tres escuelas de primaria en China participaron en el estudio y un total de 378 niños fueron observados participando en discusiones en cada uno de los grupos sin que el maestro estuviera presente. A los niños se les instruyó para que pensaran, en sus grupos, sobre cuestiones relacionadas con un tema de ciencias en particular y luego para que formularan preguntas a otros grupos.

La investigación hace énfasis en la fuerte cultura existente en China, en la que se espera que los alumnos aprendan escuchando y haciendo lo indicado, y con el profesor asumiendo un papel autoritario. La relación entre el estudiante y el maestro es fuertemente jerárquica. Los alumnos, al mismo tiempo que se comportan bien y muestran respeto hacia su maestro, se les inducen a no cuestionar al profesor o a los demás, sino que aprendan pasivamente de memoria. Por lo tanto los estudiantes a menudo aceptan sin crítica la información adquirida sin la necesidad de cuestionarla o de pensar más profundamente. Esto desalienta a los estudiantes a presentar sus propios pensamientos, y por lo tanto su comprensión del tema puede ser limitada.

El trabajo tuvo como objetivo general investigar el entorno en el que se desenvuelven los estudiantes, para observar cómo interactúan, cuando se les da la oportunidad de cuestionar y evaluar el aprendizaje

[14]Bao, W., Blanchfield, P., & Hopkins, G. (2016). The effectiveness of face-to-face discussion in chinnese Primary schools. Recuperado el 19 de julio de 2016 de la URL: https://www.researchgate.net/publication/305302360

de los demás, y examinar patrones de comportamiento que surgen de los datos, con el fin de diseñar intervenciones para promover estrategias de aprendizaje profundo.

La manera tradicional que está presente en la educación, debe ser transformada por una educación en la que el profesor no sea el centro de la enseñanza, sino que por el contrario sean los estudiantes los que interactúen entre sí, orientados cuando sea necesario por el docente.

El aprendizaje debe de estar mediado por la participación de los estudiantes, siendo ellos los que cuestión en, debatan, argumenten, difieran, nutriendo de esta manera el conocimiento en el aula de clases.

1.1.2. Fostering Curiosity in Your Students[15]

En este artículo se presentan algunas estrategias para fomentar la curiosidad en los estudiantes. Antes de presentar dichas estrategias, la autora asegura que es importante inculcar en los estudiantes la curiosidad, lo cual fomenta su deseo de aprender. Afirma que cuando los estudiantes son atraídos por una nueva idea o situación y se ven obligados a explorar más allá, se puede garantizar que verdaderamente están motivados. Arnone (s.f.) manifiesta “En cada nuevo proyecto, descubren nuevas semillas para un proyecto futuro o una nueva pregunta a examinar” [16].

No todos los estudiantes son muy curiosos, y lo que podría estimular la curiosidad para algunos, para otros podría resultar en ansiedad. Se convierte en el trabajo del educador reconocer estas diferencias y controlar el aula u otro ambiente de aprendizaje para acomodar a todos. Dicho esto, se proponen diez estrategias para fomentar la curiosidad de los estudiantes:

Estrategia 1: La curiosidad como ‘gancho’

[15]Arnone, M. P. (s.f.). Fostering Curiosity in Your Students. Recuperado el 09 de octubre de 2016 de la URL: http://www.educationoasis.com/visitor-resources/articles/fostering-curiousity/

[16]Ibidem

Utilizar la curiosidad como motivador primario al comienzo de una lección comenzando, por ejemplo, con una pregunta que provoque la reflexión o una declaración sorprendente.

Estrategia 2: Conflicto conceptual

Introducir un conflicto conceptual cuando sea posible. Los estudiantes se sentirán obligados a explorar el conflicto hasta que se resuelva. Cuando el estudiante ha resuelto el conflicto conceptual, tendrá una sensación de satisfacción.

Estrategia 3: Una atmósfera para las preguntas

Crear un ambiente en el que los estudiantes se sientan cómodos al plantear preguntas y donde puedan probar sus propias hipótesis a través del debate y la lluvia de ideas. (Esto no sólo fomenta la curiosidad, sino que también ayuda a generar confianza)

Estrategia 4: Tiempo

Dar tiempo suficiente para la exploración de un tema. Si el profesor ha tenido éxito en estimular la curiosidad, entonces los estudiantes querrán persistir en esa exploración.

Estrategia 5: Opciones

Dar a los estudiantes la oportunidad de elegir temas dentro de un área de aprendizaje. Por ejemplo, en una clase de escritura, el estudiante puede explorar un tema de su interés mientras cumple los objetivos de la tarea. Si se le permite elegir un tema que es esencialmente motivador, ayudará a mantener la curiosidad.

Estrategia 6: Elementos para despertar la curiosidad

Introducir uno o más de los siguientes elementos en una lección para despertar curiosidad:

- ✓ Incongruencias

- ✓ Contradicciones
- ✓ Novedad
- ✓ Sorpresa
- ✓ Complejidad
- ✓ Incertidumbre

Estrategia 7: La Cantidad Correcta de Estimulación

Ser consciente del grado de estimulación en la situación de aprendizaje. Recordar que hay diferencias individuales cuando se trata de la curiosidad. Algunos aprendices se sentirán ansiosos si el estímulo es demasiado complejo, demasiado incierto, demasiado nuevo, etc.

Estrategia 8: Exploración

Animar a los estudiantes a aprender mediante la exploración activa. Alentar con preguntas como "¿Qué pasaría si...?"

Estrategia 9: Recompensas

Permitir que la exploración y el descubrimiento sean su propia recompensa. Utilizar las recompensas externas de manera sensata.

Estrategia 10: Modelización

Modelo de curiosidad. Hacer preguntas. Participar en la exploración específica para resolver una pregunta planteada, y demostrar entusiasmo.

Arnone (s.f.) concluye el articulo afirmando “cuando se infunde curiosidad en los niños, se está animando su deseo de aprender. Ese es uno de los regalos más grandes que como educador se puede dar a los estudiantes” [17].

Las estrategias anteriormente presentadas son de valioso aporte para el trabajo de investigación, debido a que en las actividades presentadas a los estudiantes se hará uso de algunas de ellas, fomentando la curiosidad y generación de preguntas que surgen de manera natural en los alumnos.

1.1.3. Natural curiosity: A Resource for Teachers. Building Children’s Understanding of the World through Environmental Inquiry [18]

Chiarotto (2011) realiza un estudio sobre el aprendizaje basado en la indagación, el cual es considerado como un proceso dinámico y emergente que se basa en la curiosidad natural de los estudiantes sobre el mundo en el que viven.

La investigación sitúa las preguntas e ideas de los estudiantes, en el centro de la experiencia, en lugar del profesor, siendo las preguntas de los estudiantes las que impulsan el proceso de aprendizaje.

Los maestros que usan este enfoque alientan a los estudiantes a preguntar e investigar de forma natural sus propias preguntas sobre el mundo. Los profesores facilitan más el aprendizaje de los estudiantes proporcionando una variedad de herramientas, recursos y experiencias que permiten a los alumnos investigar, reflexionar y discutir rigurosamente las soluciones potenciales a sus propias preguntas sobre un tema de la clase que se está estudiando.

---

[17] Arnone, M. P. (s.f.). Fostering Curiosity in Your Students. Recuperado el 09 de octubre de 2016 de la URL: http://www.educationoasis.com/visitor-resources/articles/fostering-curiousity/

[18] Chiarotto, L. (2011). Natural curiosity: A Resource for Teachers. Building Children’s Understanding of the World through Environmental Inquiry. Toronto: The Laboratory School at The Dr. Eric Jackman Institute of Child Study.

El autor afirma que el proceso de aprendizaje del estudiante, más que el énfasis del maestro en 'cumplir con el currículo' es primordial. Al alentar el aprendizaje activo, los profesores capacitan a los estudiantes para profundizar su comprensión del contenido de una manera apropiada a sus necesidades y etapas de desarrollo. Por lo tanto, un maestro puede proporcionar una respuesta abierta a la pregunta de un estudiante como "¿Cómo podemos encontrar eso?" Además, si el estudiante parece necesitar tiempo y espacio para elaborar sus ideas, el maestro podría decir: Cuéntanos más sobre esto después de que hayas tenido tiempo de pensarlo".

Es importante resaltar la importancia que tienen las preguntas en el proceso de aprendizaje en los estudiantes; esto permite crear un ambiente de aprendizaje en el que los alumnos participan de manera activa formulando preguntas que permitirán comprender los temas que son objeto de estudio.

1.1.4. Preguntas de los Estudiantes de Educación Secundaria ante Dispositivos Experimentales[19]

En este trabajo se realiza la descripción de tres estudios empíricos realizados con estudiantes de los grados cuartos de primaria y séptimo en España. Los objetivos de dicha investigación eran estimular y analizar las preguntas de los estudiantes cuando intentan comprender los dispositivos experimentales, los cuales tenían la cualidad de provocar asombro por su comportamiento contrario a lo esperado. Esto permitiría que mediante esta estrategia de generar asombro, se estimulara la generación de preguntas por parte de los estudiantes.

[19] Torres, T., Duque, J., Ishiwa, K., Sánchez, G., Solaz, J., & San José, V. (2012). Preguntas de los estudiantes de educación secundaria ante dispositivos experimentales. Recuperado el 09 de febrero de abril de 2016 de la URL: http://mobiroderic.uv.es/bitstream/handle/10550/42619/088627.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Un resultado importante que se evidenció en este trabajo son las preguntas formuladas por los propios estudiantes, que podrían utilizarse como inicio de un aprendizaje por investigación.

Una de las actividades propuestas en la tesis, está dirigida precisamente a provocar asombro en los estudiantes, usando trucos matemáticos los cuales generan desconcierto cuando se desarrollan. Esto conduce directamente a generar preguntas, las cuales servirán como proceso de aprendizaje al descubrir cómo funciona cada truco.

1.1.5. Procesos de indagación a partir de la pregunta. Una experiencia de formación en investigación[20]

Se realiza una síntesis de un proyecto de investigación que tiene como título "La pregunta cómo dispositivo pedagógico en la construcción de problemas de investigación" realizado con estudiantes de la Escuela de Psicopedagogía de la UPTC (Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia). La propuesta se centra en la pregunta como estrategia pedagógica, con la intención de desarrollar un proceso de formación que promueva la construcción de problemas de investigación en los estudiantes de dicha Institución.

Plata (2011) afirma "la pregunta se constituye en una opción educativa para pensar y aportar a una educación para la incertidumbre, para desarrollar formas de pensamiento flexibles y actitudes críticas y creativas hacia el conocimiento"[21].

[20] Plata, M. E. (2011). Procesos de Indagación a partir de la pregunta. Una experiencia de formación en Investigación. Recuperado el 04 de septiembre de 2015 de la URL: http://revistas.uptc.edu.co/revistas/index.php/praxis_saber/article/view/1114/1113

[21] Ibidem

El diseño de la propuesta se divide en ciclos de indagación, sobre los que se vuelve constantemente mediante procesos de reflexión-acción-reflexión, que garanticen la construcción y reconstrucción del saber y conocimiento fundamentado en la pedagogía de la pregunta.

Se ha evidenciado que la práctica de hacer preguntas en la clase sólo se limite a hacer y responder preguntas corrientes y pedagógicas todo el tiempo, que exigen muy poco para ser resueltas por los estudiantes, son preguntas que aunque en su enunciado sean “aparentemente abiertas”, en realidad son cerradas y circunstanciales, que se repiten y fácilmente se olvidan.

Las actividades propuestas en la tesis pretenden que las preguntas que formulen los estudiantes e produzcan de manera espontánea, sin estar sujetas a condiciones que no permitan la creatividad e independencia.

La pedagogía de la pregunta en el proceso de enseñanza aprendizaje. Retos, desafíos y posibilidades[22]

Es una investigación que pretende dar importancia a la pedagogía de la pregunta dentro del proceso de enseñanza aprendizaje del sistema educativo en Ecuador. También se realiza un análisis en el proceso histórico de la pregunta en el desarrollo del pensamiento y la pedagogía.

Maza (2010) Afirma “la pedagogía de la pregunta es una propuesta que poco se ha utilizado en el sistema educativo de nuestro país, ya que estamos arraigados a una educación tradicional en la cual únicamente nos dedicamos a la transmisión de conocimientos y a examinar a los estudiantes” [23].

---

[22]Maza, L. E. (2010). La pedagogía de la pregunta en el proceso de enseñanza aprendizaje. Retos, desafíos y posibilidades. Recuperado el 19 de octubre de 2015 de la URL: http://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/1954/1/UPS-QT00131.pdf

[23]Ibídem

La investigación desea aclarar si la pedagogía de la pregunta ayuda o no a conseguir un proceso de enseñanza y aprendizaje fundamentado en una reflexión crítica y ética de la realidad, conduciendo a un mejoramiento social e integral de la persona.

1.1.6. La formulación de preguntas en el aula de clase: una evidencia de aprendizaje significativo crítico[24]

Este estudio se realiza con un grupo de siete estudiantes de física de la Universidad de Antioquia, fundamentado en la Teoría del Aprendizaje significativo Crítico, el cual tiene como propósito valorar la implementación de una propuesta didáctica que incluye una serie de actividades con un modelo computacional, que favorecería un progreso significativo en la habilidad de los estudiantes para formular preguntas de interés sobre la dinámica Newtoniana como campo de conocimiento.

López, Veit, & Solano (2014) plantean que la formulación de preguntas en el aula de clase ha sido tradicionalmente una tarea propia de los docentes, los cuales en muchas ocasiones esperan que las respuestas de los estudiantes estén expresadas en términos de sus discursos, negándoles así la posibilidad de cuestionamiento; de tal manera que los estudiantes formulan pocas preguntas en el aula de clase, y además las preguntas frecuentemente formuladas tienen un bajo nivel cognitivo.

Un importante aspecto que siempre ha estado presente en la educación es la manera en la que se realizan preguntas en el ambiente escolar, estas son formuladas casi siempre por el profesor, el cual las realiza más con el objetivo de mostrar si los conceptos han sido asimilados por los estudiantes y estaban atentos en clase. Poca oportunidad se le da al alumno para que participe en el proceso, interviniendo de una manera pasiva en el aprendizaje.

---

[24]López, S., Veit, E. A., & Solano Araujo, I. (2014). La formulación de preguntas en el aula de clase: Una evidencia de aprendizaje significativo crítico. Recuperado el 04 de septiembre de 2015 de la URL: http://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=251030165007

1.1.7. Students' questions: a potential resource for teaching and learning science[25]

El propósito de este trabajo consiste en examinar y revisar las investigaciones existentes sobre las preguntas de los estudiantes y así poder explorar las formas de avanzar en un futuro en el aprendizaje de las ciencias. El documento comienza señalando el rol y la importancia y de las preguntas de los estudiantes en el aprendizaje significativo y la investigación científica. También se revisa la investigación empírica sobre preguntas de los estudiantes, con un enfoque en cuatro áreas: (1) la naturaleza y los tipos de estas preguntas; (2) los efectos de enseñar a los estudiantes habilidades de preguntar; (3) la relación entre las preguntas de los estudiantes y las variables seleccionadas; (4) las respuestas de los estudiantes a los profesores y las percepciones de los estudiantes ante preguntas hechas por sus compañeros de clase.

También se discuten algunos problemas e implicaciones de las preguntas de los estudiantes para la instrucción en el aula.

1.2. Investigaciones en Educación matemática

1.2.1. Las matemáticas sí cuentan Informe Cockcroft [26]

El informe hecho en el Reino Unido fue elaborado con intereses marcados por la situación existente en el sistema educativo de Inglaterra y Gales en la década del ochenta.

En uno de sus apartados dedicado a la enseñanza de las matemáticas se expone la importancia que del aprendizaje en todos los niveles educativos, el cual debe incluir algunos aspectos como: exposición por

[25] Foster, C. (2011). Student-generated questions in Mathematics Teaching. The National Council of Teachers of Mathematics. p.p.26-31.

[26] Cockcroft, W. (1985). Las matemáticas sí cuentan Informe Cockcroft. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio. p.p 125-126

parte del profesor; discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos; trabajo práctico apropiado; consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas; resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana; realización de trabajos de investigación. Cockcroft (1985) considera que una investigación matemática constituye una labor muy extensa, que requiere mucho tiempo y debe llevarse a cabo de modo individual o en el seno de un pequeño grupo de trabajo. Las investigaciones sin embargo, no tienen por qué ser largas ni difíciles. En su nivel fundamental, afirma el autor "surgen a menudo como respuesta a las preguntas hechas por los alumnos durante la exposición del profesor, o con ocasión del desarrollo de un trabajo"[27]. Lo fundamental para este tipo de trabajo es que el profesor se muestre dispuesto a «seguir la corriente» cuando el alumno le pregunte « ¿podríamos haber hecho lo mismo con tres números diferentes? », o « ¿qué pasaría si...? ». Con frecuencia, las preguntas pueden resolverse mediante una breve discusión con el alumno o grupo de alumnos; a veces puede resultar útil sugerirles que intenten hallar la respuesta por sí mismos; otras veces que sea preciso buscar tiempo en otro momento para abordar la pregunta. En todo caso, es imprescindible estimular a los alumnos a que piensen de esta forma, y no debe dejarse pasar ninguna oportunidad de hacerlo así. Cockcroft (1985) considera "El profesor ha de mostrarse dispuesto a seguir pistas falsas y a no revelar ya desde el principio que alguna de ellas, por ejemplo, no lleva a ningún sitio; tampoco deberá cortar un debate interesante por «falta de tiempo» o porque «no figura en el programa»"[28].

El informe Cockcroft es uno de los que más relevancia tiene para la tesis, inicialmente es uno de los fundamentos teóricos que sustentan la importancia que tienen las preguntas hechas por los estudiantes

---

[27] Cockcroft, W. (1985). Las matemáticas sí cuentan Informe Cockcroft. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio. p.p 125,126

[28]Ibídem

en matematicas. Por otra parte, es fundamental para el trabajo que se está realizando que las preguntas se orienten a crear nuevas situaciones que emergerán de las ya propuestas.

1.2.2. Curiosity-- A Culture of Asking Questions[29]

En este artículo presentado por Renesse (2015) se enfatiza la importancia que tiene la curiosidad de los estudiantes en el aprendizaje cuando se realiza de manera independiente. Para que esto suceda los estudiantes deben de ser motivados, que quieran aprender, colaborar con otros estudiantes, que realicen muchas preguntas y que hagan matemáticas fuera del contexto escolar.

Renesse (2015) también afirma que la curiosidad y la investigación son esenciales para el aprendizaje de las matemáticas, donde los estudiantes pueden nutrir su curiosidad y su capacidad de hacer preguntas matemáticas si están inmersos en una cultura que incluya:

- Materiales de consulta en las que se hacen preguntas.
- Discusiones en clase basadas en preguntas.
- Un facilitador que haga preguntas a los grupos de apoyo.
- Cosas geniales que hacen que los estudiantes se pregunten por el mundo que los rodea.
- Proyectos de los estudiantes basados en preguntas sobre matemáticas.

Esta cultura será de gran importancia en el trabajo que se está desarrollando, puesto que se incluirán aspectos como las discusiones en clase por parte de los estudiantes, preguntas espontáneas e intervención del docente que hará preguntas que promuevan más preguntas en los grupos.

[29]Renesse, C. v. (2015). Curiosity -- A Culture of Asking Questions. Recuperado el 10 de noviembre de 2016 de la URL: https://www.artofmathematics.org/blogs/cvonrenesse/curiosity-a-culture-of-asking-questions

1.2.3. Celebrate mathematical curiosity[30]

En este artículo se aborda la importancia que tienen las preguntas matemáticas de los niños, las cuales a menudo se basan en experiencias del mundo real, ya que ellos instintivamente hacen conexiones con el mundo que les rodea. Redford (2011) afirma "la importancia de fomentar la curiosidad y activar el pensamiento de los estudiantes es una herramienta eficaz en la enseñanza de matemáticas. Aprovechar la curiosidad de los estudiantes parece estimular su pensamiento y ayudarlos a conectar el mundo matemático con el suyo propio"[31].

Redford (2011) trabajó con estudiantes de grado 1 hasta 5 de primaria en una institución educativa en Boston (EE.UU). La autora pretendía saber qué hacía sentir curiosos a los estudiantes acerca de las matemáticas. Les solicitó que completaran la frase 'a veces me pregunto…'; y determinar qué tipo de preguntas surgía en cada uno de ellos. La lista de preguntas fue variada, involucraban números, operaciones y mediciones, pero la gran mayoría se centró en la medición. Específicamente, los estudiantes se preguntaban sobre el tiempo y el dinero.

El artículo concluye afirmando que si los estudiantes demuestran su curiosidad y comienzan a ver medios de responder a sus preguntas, las matemáticas toman un nuevo significado.

Las actividades de la tesis buscan que los estudiantes generen preguntas matemáticas a partir de situaciones abiertas, en las que ellos mismos las van planteando en el desarrollo de cada una.

---

[30]Redford, C. (2011). Celebrate Mathematical Curiosity. Recuperado el 10 de noviembre de 2016 de la URL:http://www.wheelock.edu/Documents/Academics/Centers%20and%20Institutes/Celebrate%20Mathematical%20Curiosity%20by%20Christine%20Redford%20Math%20Games%20Station.pdf

[31]Ibídem

1.2.4. Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics classroom[32]

Realizan una investigación dirigida a estudiantes de sexto grado en edades de 11 y 12 años, fundamentado en lecciones de geometría euclidiana, y de esta manera iniciarlos en la investigación de la práctica matemática. Los maestros sustentan su investigación por medio de las preguntas generadas por el estudiante, y la orientación de los estudiantes a los hábitos de la matemática relacionados con la mente, como la generalización, las relaciones en desarrollo y la búsqueda de invariantes a la luz del cambio. El autor afirma que las preguntas del estudiante reflejan una disposición creciente a buscar la generalización y para explorar las relaciones matemáticas, las formas de pensamiento valorado por la disciplina.

1.2.5. The Teacher's role in reinventing the meaning of mathematical knowing in the classroom[33]

En este trabajo se describe un proyecto de investigación y desarrollo en la enseñanza diseñado para examinar si, y cómo puede ser que sea posible llevar el sentido de saber matemáticas en la escuela más cerca de lo que significa conocer matemáticas dentro de la disciplina por la alteración deliberada de las funciones y responsabilidades del maestro y los estudiantes en el discurso del aula. El proyecto se llevó a cabo como una característica regular de clases en matemáticas de quinto grado en una escuela pública en EE.UU. El maestro modela una forma de interacción social apropiada para hacer argumentos matemáticos en respuesta a las conjeturas de los estudiantes. Se les enseñó a examinar las hipótesis sobre las estructuras matemáticas que subyacen en sus soluciones a los problemas. Los resultados de esta enseñanza se describen en términos de las habilidades y posturas de los estudiantes para desarrollar y crear argumentos matemáticos en un episodio particular de interacción en el aula.

---

[32]Lehrer, R., Kobiela, M., & Weinberg. (2013). Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics. ZDM Mathematics Education, p.12.

[33] Lampert, M. (1988). The Teacher's role in reinventing the meaning of mathematical knowing in the classroom. Recuperado el 22 de septiembre de 2015 de la URL: http://education.msu.edu/irt/PDFs/ResearchSeries/rs186.pdf

1.2.6. Use of student mathematics questioning to promote active learning and metacognition[34]

El principal tema de este artículo fue argumentar que las preguntas hechas en clase, deben ser una parte más fuerte de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula que se practica actualmente en muchos países.

En este artículo se afirma que hay muchas razones por las que las preguntas son importantes en la construcción del conocimiento y su aprendizaje. Los cuestionamientos pueden servir a dos funciones diferentes pero relacionadas entre sí. La primera función es ayudar a los estudiantes a pensar como matemáticos, al plantear sus propias preguntas matemáticas y tratar de resolverlas. Esto podría conducir a un 'nuevo' conocimiento construido por los estudiantes.

La segunda función es la de formar a los estudiantes para desarrollar el buen hábito de aprendizaje de preguntar a sus maestros sobre las cosas que no entienden en matemáticas.

Esta función de aprendizaje invierte el típico papel del maestro y los estudiantes: en lugar de esto, la nueva función se convierte en "los estudiantes hacen preguntas y el maestro las responde".

El autor afirma que los estudiantes deben ser estimulados para ver cómo las matemáticas pueden ayudar a darles a conocer el mundo, y esto implica ayudar a adoptar habitualmente una visión matemática en sus observaciones de situaciones cotidianas.

[34] Wong, K. Y. (2012). Use of student Mathematics questioning to promote active learning and metacognition. ICME-12, 15. O. Recuperado el 10 de agosto de 2016 de la URL: http://www.icme12.org/upload/submission/1879_f.pdf

1.2.7. Student-generated questions in Mathematics Teaching[35]

En este artículo el autor comparte su experiencia como docente de matemáticas y la importancia en el aprendizaje cuando las preguntas son el punto de partida en cada clase. Para generar preguntas realiza al comienzo de sus clases mostrando un objeto matemático, por ejemplo, un diagrama matemático de una ecuación, un rompecabezas, o una paradoja que de alguna manera les parece provocador o rico a los estudiantes. A continuación, les pide observar el objeto y ver qué preguntas matemáticas les surgen.

El autor en esta experiencia, pretende alejarse de la cultura en la que las preguntas de los estudiantes son de interrupción o aclaración, sino que las preguntas generadas permiten que las lecciones se desarrollen a partir de la curiosidad y la construcción de los estudiantes fomentando su interés.

1.2.8. Concepciones de los alumnos de la escuela primaria, media o secundaria sobre sucesiones[36]

El objetivo de esta tesis es confrontar las creencias y concepciones que tienen los estudiantes sobre sucesiones numéricas junto con las preguntas naturales que ellos puedan formular con respecto a un tema de estudio, contra los conceptos que se estudian de este tópico en un curso normal.

Montoya (2006) centra el estudio de las concepciones considerando dos aspectos fundamentales de indagación de los alumnos, El primero hace referencia a las preguntas que formulan los estudiantes de forma natural o espontánea respecto a un estilo geométrico visual que obedece a un patrón de conformación.

---

[35] Foster, C. (2011). Student-generated questions in Mathematics Teaching. The National Council of Teachers of Mathematics. p.p.26-31

[36]Montoya, H. (2006). Concepciones de los alumnos de la escuela primaria, media o secundaria sobre sucesiones (tesis de Maestría). Bogotá, Colombia.

El segundo aspecto está relacionado con el estudio de las respuestas que emiten los estudiantes a partir de la interacción con situaciones graficas que obedecen también a un patrón de conformación.

Esta tesis es de gran aporte para el trabajo que se está realizando, en relevancia a las preguntas que surgen de manera natural en los estudiantes cuando se les presenta una situación matemática en los diferentes grados escolares.

Conclusiones Capítulo 1

Existen relativamente pocos estudios específicos sobre la importancia de la pregunta y la curiosidad del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas. Fundamentalmente los estudios encontrados se refieren a la importancia de la pregunta en el aprendizaje en el aula de clase, pero no analizan ninguna experiencia concreta y no se refieren a la solución de problemas.

Cockcroft (1985), Lampert (1988), Redford (2011), Lehrer, Kobiela & Weinberg (2012), Montoya (2012), son algunos de los autores que se destacan realizando experiencias con los estudiantes centrado en el aprendizaje basado en la curiosidad natural del estudiante y las preguntas que emergen de manera natural cuando se presenta una tema o situación en matemáticas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hará referencia a la fundamentación teórica de la presente tesis, sustentada en la teoría de la resolución de problemas, el aprendizaje por descubrimiento, los fundamentos de la visualización y la Teoría de la Comunidad de Práctica de Wenger.

2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas.

La solución de problemas ha constituido siempre un desafío. Desde el momento mismo que es necesario esclarecer conceptos tales como 'problema matemático', y develar procesos complejos como 'desarrollo cognoscitivo humano'. También es preciso establecer cómo debe enfocarse la resolución de problemas en el contexto escolar. ¿Se trata de una habilidad, una capacidad o una competencia? Todo esto constituye una premisa esencial para el esclarecimiento de la actividad de la resolución de problemas, su enseñanza y aprendizaje.

El MEN (1998) contempla dentro de sus cinco procesos generales en los Lineamientos curriculares el de formular y resolver problemas, afirmando que las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que dichas situaciones estén vinculadas a experiencias cotidianas y, por lo tanto, son más significativas para los estudiantes.

Con lo anteriormente descrito, es de gran importancia para el trabajo que se está realizando la resolución de problemas, saber qué rol desempeña en el contexto de las matemáticas escolares y las preguntas naturales que los estudiantes pueden generar a partir de la resolución de un problema matemático.

Varios autores han trabajado la definición del concepto de problemas, una de las referencias clásicas es la que presenta Polya (1965) el cual define que "tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata" [37].

Krulik & Rudnick (1988) afirman que "un problema es una situación, cuantitativa o no, a la que se enfrenta a un individuo o grupo de individuos, que requiere resolución, y para el cual el individuo no ve la trayectoria aparente a la obtención de la solución" [38].

Charles y Lester citados por López & Contreras (2000) definen problema como "una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no se tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución".

A.F. Labarrere citado por Mazarío (s.f.) resume que "un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades, de y entre los objetos que no son accesibles directa e inmediatamente a la persona" [39].

Parra (1989) argumenta "Un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación" [40].

Parra (1995) declara "Un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe…"[41]

[37] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Ciudad México: Editorial Trillas.
[38] Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). Problem Solving. Massachusetts: Allyn and Bacon.
[39] Mazarío, I. (s.f.). La resolución de problemas: un reto para la educación matemática. Recuperado el 25 de febrero de 2016 de la URL: http://monografias.umcc.cu/monos/2004/OTROS/um04otr05.pdf
[40] Parra, B. M. (1989). Acerca del papel de la representación en la resolución de problemas. México D.F.: Universidad Pedagógica Nacional.
[41] Parra, B. M. (1995). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria: dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. Recuperado el 15 de noviembre de 2015 de la URL: http://euler.mat.uson.mx/depto/diplomado/secundaria/lecturas.pdf#page=13

Carr, citado por Rodríguez (2005) afirma que un problema es "el proceso de aplicar el conocimiento previamente adquirido a las situaciones nuevas y no familiares" [42]

Chi y Glaser citados por Gros (1990) definen un problema como "una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para alcanzarlo" [43].

La resolución de problemas según Ausubel citado por Soriano (1996) "se refiere a toda actividad en la que la representación cognitiva de la experiencia previa y los componentes de una situación problemática vigente, se reorganizan a fin de alcanzar un objetivo determinado" [44].

Actualmente las tendencias en la enseñanza de la resolución de problemas se basan en la enseñanza de estrategias de tipo general y que pueden ser aplicadas a un sinnúmero de problemas. Esta enseñanza de estrategias ha sido objeto de estudio por varios autores que proponen modelos o procedimientos que ofrecen una probabilidad razonable de solucionar un problema.

Polya (1965) en su modelo descriptivo, establece las necesidades para aprender a resolver problemas. Para este autor el principal fin es el de ayudar a que el alumno adquiera la mayor experiencia en la tarea de resolución de problemas, por lo que el profesor será el guía en todo momento, dejará al alumno la parte de responsabilidad que le corresponde. Este autor, considerado para muchos el padre de la heurística matemática, estableció cuatro fases en la resolución de problemas:

Comprender el problema: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?

Concebir un plan: ¿Se ha encontrado con un problema semejante?,

---

[42] Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Recuperado el 08 de octubre 2015 de la URL: http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf
[43] Gros, B. (1990). Investigaciones y experiencias: La enseñanza de estrategias de resolución de problemas mal estructurados. Revista de Educación, 19.
[44] Soriano, E. (1996). Enseñar a pensar al alumnado del primer ciclo de primaria a través de la matemática. SUMA 23. p.14.

¿Conoce un problema relacionado con este?, ¿Podría enunciar el problema de otra forma?, ¿Ha empleado todos los datos?

Ejecutar el plan: ¿Son correctos los pasos dados?

Examinar la solución obtenida: ¿Puede verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?

Las fases anteriores caracterizan, según Polya (1965), al resolutor ideal. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción. En la Figura 1 se pretende ilustrar el proceso de resolución de problemas de Polya basado en las cuatro fases descritas anteriormente:

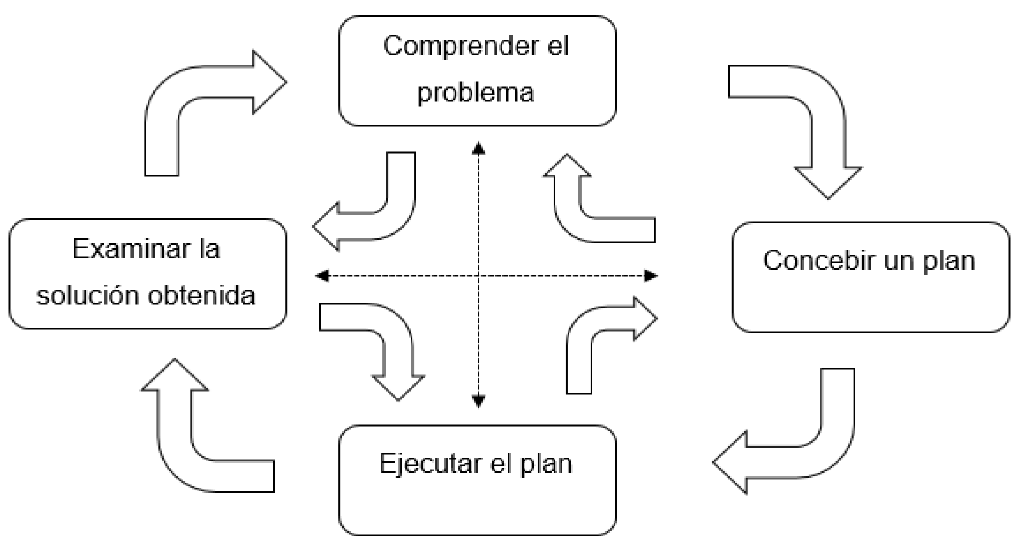


Figura1. Fases de la resolución de problemas según Polya (1965)

Sigarreta & Laborde (2000) afirma que para resolver problemas, se requiere trabajar mucho con ellos, estudiarlos a profundidad y analizar las diferentes posibilidades que permiten enfrentar su solución. Este autor propone una estrategia dividida en cinco acciones con las cuales se aborda el proceso de la resolución de problemas de la manera más objetiva y exhaustiva posible relacionándolo con el medio sociocultural donde se desenvuelve el estudiante. Las cinco acciones se dividen así:

Acción I. Aproximación al problema: ¿Qué problema vas a enfrentar?

Acción II. Profundización del problema. ¿Son familiares para ti todos los términos que intervienen en la formulación del problema?

Acción III. Ubicación del problema: ¿En qué campo de conocimientos se mueve el problema planteado: aritmético, algebraico o geométrico?

Acción IV. Selección de una estrategia de trabajo: realiza transformaciones equivalentes en la premisa y/o tesis. ¿Has resuelto un problema parecido o relacionado con este?

Acción V. Representación y Valoración: escoge un lenguaje apropiado o una notación adecuada. ¿Todas las soluciones halladas son soluciones del problema?

En esta estrategia anteriormente descrita se incluye un conjunto de acciones que el estudiante debe ejecutar para resolver un determinado problema escolar. En ella aparecen las acciones con sus respectivas operaciones.

De Guzmán citado por (Blanco, 1996) realiza una propuesta para resolver un problema que debe pasar por cuatro fases, las cuales son:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Desarrollo de la estrategia.
4. Revisión del proceso.

En el primer paso “la familiarización con el problema” se engloba todas las acciones que encaminen a comprender de modo más preciso la naturaleza de problema que se va a resolver.

En el segundo paso “búsqueda de estrategias” De Guzmán propone seleccionar estrategias heurísticas para abordar el problema, y cuál o cuáles podrán ser las que más se ajustan a la naturaleza del problema.

El siguiente paso es el “desarrollo de la estrategia” que es el momento donde debe aplicarse la estrategia seleccionada. De Guzmán citado por (Blanco, 1996) afirma que se debe tener en cuenta algunas sugerencias heurísticas tales como: llevar adelante las mejores ideas que se nos hayan ocurrido; no desanimarse en la primera dificultad y tampoco empecinarse si el problema se complica demasiado; reflexionar sobre la validez de cada paso; por último preguntarnos si lo que hemos obtenido es la solución al problema.

El último paso dentro de la fase es la “revisión del proceso” el cual es el momento de más satisfacción al resolver el problema, se inicia una reflexión sobre el mismo en donde es primordial disponer de un protocolo completo del proceso llevado a cabo en la resolución del problema.

Schoenfeld citado por Becerra (2012) concibe la importancia en los conocimientos previos que tienen tanto los estudiantes como los docentes, para definir la solución de problemas, como el manejo de operaciones básicas, fórmulas, conceptos, entre otros, pero afirma también que además de conocer estos elementos es importante saber cómo usarlos y requerir de una habilidad para ello.

Barrantes (2006) afirma que estos conocimientos previos son uno de los aspectos que cobra más importancia puesto que el profesor debe tener claro cuáles son las herramientas que posee el sujeto que aprende. Ciertamente si en el momento de resolver un problema el individuo no cuenta con las herramientas necesarias para resolverlo, por lo tanto no va a funcionar.

Schoenfeld, habla también de las circunstancias estereotípicas, donde se generan respuestas rutinarias, donde el procedimiento de resolución se da de manera casi automática.

Schoenfeld citado por Soriano (1996) considera cinco estrategias para poder solucionar un problema:

1. Dibujar un diagrama o representación del problema.
2. Considerar el parámetro integrador del problema y buscar un argumento de tipo inductivo.
3. Considerar un contraargumento.
4. Pensar en un problema similar pero con menos variables.
5. Tratar de establecer los objetivos.

Los problemas deben de cautivar la curiosidad del estudiante, crear debate entre pares a partir de las preguntas surjan a partir de los problemas, esto se debe de tener en consideración para el diseño de las actividades que se proponen en la tesis.

2.2. Aprendizaje por descubrimiento

Desde el punto de vista procesual, se puede definir el aprendizaje por descubrimiento según Ausubel citado por Ruiz (1989) como "un proceso de resolución significativa de problemas, basado en la disposición intencional del sujeto hacia la comprobación de hipótesis que incorporen una comprensión de la relación medios-fin, fundamentadora del descubrimiento" [45].

Bruner (1966) Plantea el concepto de aprendizaje por descubrimiento para lograr un aprendizaje significativo, basado en que por medio de éste, el maestro puede brindar a los estudiantes más oportunidades de aprender por sí mismos. Por lo tanto, el aprendizaje es construido por parte del estudiante basado en sus propios conocimientos a diferencia de la enseñanza tradicional donde la

[45] Ruiz, B. (1989). Aprendizaje por descubrimiento: Principios y aplicaciones inadecuadas. Recuperado el 04 de abril 2015 de la URL: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/39770/93221

información es transmitida por parte del docente y el alumno la recibe sin ser participativo en el proceso de aprendizaje.

Bruner citado por Medina (2007) realiza un énfasis especial en las cualidades intuitivas e imaginativas del estudiante. Afirma que si todos los hechos o fenómenos fuesen ya conocidos, se justificaría una enseñanza basada en la deducción o en la inferencia, pero como tal situación es solamente un ideal, se hace relevante que el estudiante se arriesgue a realizar conjeturas o a formular interrogantes que lo lleven más allá de lo conocido

Para Bruner un proceso educativo balanceado, debe proporcionar las condiciones para que el aprendiz ensaye y conjeture, se trata de ir más allá que un simple proceso de adquirir y almacenar conocimiento.

Bruner citado por Medina (2007) señala "En las ciencias, con mucha frecuencia nos vemos forzados a trabajar con un cuerpo de conocimientos incompleto y ello nos obliga a adivinar" [46].

Ausubel (s.f.) afirma "En el aprendizaje por descubrimiento, lo que va a ser aprendido no se da en su forma final, sino que debe ser re-construido por el alumno antes de ser aprendido e incorporado significativamente en la estructura cognitiva" [47].

Este aprendizaje involucra que el estudiante deba reordenar la información, integrarla con la estructura cognitiva y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el aprendizaje deseado.

En el aprendizaje por descubrimiento, la esencia de la buena enseñanza de la matemática 'moderna' en oposición a la enseñanza tradicional radica como lo afirma Shulman & Keislar (1979) "se trata de escuchar

[46]Medina, A. (2007). Pensamiento y Lenguaje. México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.
[47]Ausubel, D. (s.f.). Teoría del aprendizaje significativo. Recuperado el 11 de septiembre 2015 de la URL: http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/

al alumno, de prepararse para recibir de él una respuesta mejor que todas las que sabe el maestro. En realidad, el maestro 'moderno' aprende de sus estudiantes" [48].

La curiosidad natural que tiene el estudiante es fundamental en el proceso de ese aprendizaje: descubriendo, indagando, analizando, formulando preguntas que son de gran utilidad para enriquecer el conocimiento que está adquiriendo en el contexto escolar.

Freire & Faúndez (1986) expresan "Las inquietudes, las dudas, la curiosidad de los estudiantes deben de servir de reflexión para el docente, puesto que todo esto ilumina y enriquece la búsqueda del saber tanto para el profesor como para los alumnos" [49].

El aprendizaje por descubrimiento es un proceso educativo de investigación participativa, la solución de problemas y actividades basadas en el contexto real conduzcan a construir el conocimiento por parte del individuo.

Esto, permite hacerse interrogantes, generar preguntas y buscar respuestas a esos interrogantes, tratando de dar explicaciones y posibles soluciones.

Henríquez (1993) plantea "durante este proceso el individuo va descubriendo su propia manera de aprender, sabe dar cuenta de lo que busca; de lo que aprende, cómo lo aprende y para qué lo aprende"[50].
Suchman citado por Shulman & Keislar (1979) ha realizado un sistema muy valioso para analizar las comunicaciones en el aula de clases. Se puede clasificar la información almacenada en la mente del estudiante en un momento determinado en tres categorías:

---

[48]Shulman, L. s., & Keislar, E. r. (1979). Aprendizaje por descubrimiento. México D.F.: Editorial Trillas.
[49]Freire, P., & Faúndez, A. (1986). Hacia una pedagogía de la pregunta: conversaciones con Antonio Faúndez. Recuperado el 27 de octubre 2015 de la URL: nuestraescuela.educacion.gov.ar/bancoderecursos/media/.../apoyo03.pdf
[50]Henríquez, A. (1993). Aprendizaje por Descubrimiento o proyecto de Investigación: Posibilidades y Límites. Recuperado el 30 de marzo 2016 de la URL: http://www.centropoveda.org/IMG/pdf/No-2Aprendizajepordescubrimiento.pdf

Hechos, construcciones mentales unificadoras y aplicaciones.

La figura 2 representa las comunicaciones posibles presentadas en el aula de clase:

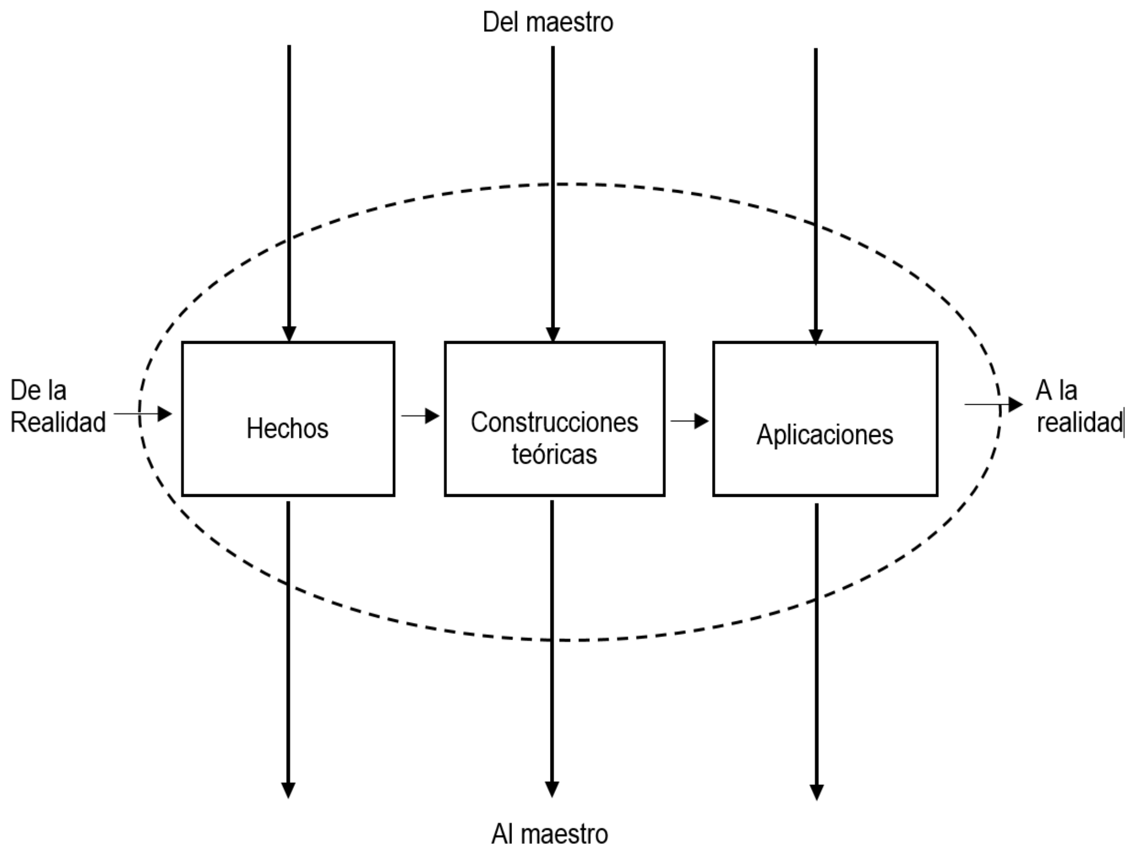


Figura 2. Comunicaciones posibles presentadas en el aula de clase.

Shulman & Keislar (1979) proponen “Las comunicaciones de descubrimiento en la gráfica se manifiestan notoriamente como canales horizontales, mientras que las comunicaciones con carácter expositivo y de memorización aparecen como líneas verticales” [51].

---

[51]Shulman, L. s., & Keislar, E. r. (1979). Aprendizaje por descubrimiento. México D.F.: Editorial Trillas.

Diagramas como el anterior constituyen un poderoso medio de análisis, el cual puede usar el practicante al buscar las razones teóricas que den respuesta a lo que suceden en un salón de clases.

El aprendizaje por descubrimiento será muy valioso para el trabajo de investigación ya que se desea que los estudiantes tengan experiencias en el reconocimiento de situaciones potencialmente abiertas junto con la resolución de problemas en las cuales ellos tengan un trabajo original de creación y se genere a partir de esto la curiosidad en cada uno de ellos.

También se pretende que los estudiantes se den cuenta por ellos mismos de que se pueden descubrir realmente las matemáticas, dejando de lado las concepciones que existe sobre esto.

Es importante también que los estudiantes evalúen de manera realista su propia capacidad personal para descubrir situaciones matemáticas en el momento de desarrollarlas.

2.3. Fundamentos de la visualización para el proceso del aprendizaje de sucesiones y patrones.

La visualización en términos generales está relacionado con poner un objeto a la vista. En matemáticas la visualización dichos objetos son entes matemáticos, es decir, no son objetos reales observables.

En los últimos años se ha prestado una atención especial por parte de investigadores en educación matemática a lo que la imagen visual ejerce sobre el aprendizaje de las matemáticas.

MECD (2004) plantea que los estudiantes que aprenden mediante representaciones de los conceptos adquiridos tienen un aprendizaje más significativo que aquellos que simplemente se apoyan en expresiones verbales.

Una imagen visual facilita en gran medida el aprendizaje por parte de la persona que aprende, la cual se asocia a la presencia de dicha imagen o imágenes en el aprendizaje de las matemáticas la capacidad para aumentar la intuición y la comprensión de los sujetos hacia los conceptos matemáticos.

MECD (2004) Emplea el término visualización refiriéndose a “figuras o representaciones pictóricas, ya sean éstas internas o externas, es decir, sobre un soporte material (papel, pantalla, etc.) o en la mente”[52].

La visualización es como lo afirma Moreno (2006) “una forma de actuar en la que se presta atención a aquellas representaciones gráficas que develan las relaciones abstractas de la idea matemática que se estudia, con el fin de conseguir una destreza en su manejo”[53].

De Guzmán (1996) realiza una perspectiva de lo que se pretende con la visualización en matemáticas, este autor hace referencia que las ideas, los conceptos y métodos las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, que se representan ya sea intuitivamente, geométricamente, y cuya utilización resulta muy útil y provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.

Este mismo autor menciona que la visualización en matemáticas busca que las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presenten una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulte muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.

De Guzmán (1996) propone “la visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático” [54].

[52]MECD. (2004). El Número, Agente Integrador del Conocimiento. Madrid: Secretaría General Técnica.
[53]Moreno, M. D. (2006). razonamiento plausible. Dialnet, p.8.
[54]De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la pizarra: El papel de la visualización. Recuperado el 27 de septiembre 2015 de la URL: http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/Documentos_2008/Visualizacion_Miguel_de_Guzman.pdf

Ben-Chaim yLappan (1989) desde una perspectiva matemática, concluyen que la visualización supone la habilidad para interpretar y comprender la información proveniente de figuras que se usan en el trabajo geométrico y la habilidad para contextualizar y trasladar las relaciones abstractas y la información no figurada en términos visuales.

La imagen, tiene roles muy diferentes e importantes en la labor de los matemáticos. La imagen es frecuentemente según lo afirma De Guzmán (1996)

- matriz de la que surgen los conceptos y métodos mismos del campo,
- estimuladora de problemas de interés relacionados con los objetos de la teoría,
- sugeridora de relaciones de otra forma un tanto ocultas capaces de conducir de forma fiable hacia la resolución de los problemas y hacia la construcción de la teoría,
- auxiliar potente para la retención de forma unitaria y sintética de los contextos que surgen recurrentemente en el trabajo,
- vehículo eficaz de transmisión rápida de las ideas,
- ayuda poderosa en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría,

Todo esto permite ejercitar nuestra capacidad de visualización y de entrenar a quienes queremos introducir en la actividad matemática en el ejercicio de la visualización. La visualización es extraordinariamente útil, tanto en el contexto de la matematización como en el de la enseñanza-aprendizaje, como en el de la investigación.

La relación entre el uso de las habilidades visuales y el rendimiento matemático de los estudiantes constituye un área interesante para la investigación y no logra un consenso. Muchos investigadores reconocen la importancia del papel que desempeña la visualización en la resolución de problemas, mientras que otros afirman que la visualización por sí sola no es suficiente, que debe utilizarse como complemento del razonamiento analítico.

Las imágenes visuales suelen en realidad contener en sí mismas todos los elementos necesarios para construir, si se quiere, con apoyo en ellas toda la estructura formal de la situación o problema a resolver. De Guzmán (1996) afirma “el experto sabe, aunque muy frecuentemente no lo ha realizado nunca, que, sin más que invertir en ello el tiempo necesario y sin más que afrontar el posible aburrimiento propio de esta tarea, todos los ingredientes formales pueden ser escritos en el papel” [55].

Barbosa (2007) señala tres razones para reevaluar el papel de la visualización en la matemática escolar: (1) la matemática se identifica actualmente con el estudio de patrones y que, junto con el uso de la tecnología, tiene el poder de reducir la dificultad de Pensamiento algebraico; (2) la visualización a menudo puede proporcionar enfoques simples y poderosos para la resolución de problemas; (3) los maestros deben reconocer la importancia de ayudar a los estudiantes a desarrollar diferentes técnicas para abordar situaciones matemáticas.

Por otra parte, trabajar con patrones numéricos o sucesiones numéricas en el aula ofrece valiosas oportunidades para reconocer, describir, extender y crear patrones.

La búsqueda de patrones es también una estrategia importante para la resolución de problemas matemáticos.

Las situaciones presentadas de sucesiones y patrones en la tesis, busca permitir un mayor alcance en términos de estrategias de solución de aprendizaje, ya que como afirma Samson (2004) “una

---

[55] De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la pizarra: El papel de la visualización. Recuperado el 27 de septiembre 2015 de la URL: http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/Documentos_2008/Visualizacion_Miguel_de_Guzman.pdf

representación pictórica puede ser fácilmente reducida a un equivalente puramente numérico siempre que el contexto pictórico haya sido entendido de manera significativa" [56].

2.4. Teoría de Comunidad de práctica de Wenger

Las comunidades de práctica son en esencia ámbitos de aprendizaje que se establecen tanto en organizaciones ya sean de carácter público o privado como en instituciones de educación. Wenger & Trayner (2015) Define las comunidades de práctica como "grupos de personas que comparten una preocupación o pasión por algo que hacen y aprenden a hacerlo mejor, ya que interactúan con regularidad"[57].

Es importante aclarar que no toda una comunidad es una comunidad de práctica, tres características son cruciales para identificar una comunidad de práctica:

1. El dominio: una comunidad de práctica no es más que un grupo o club de amigos o una red de conexión entre varias personas. Tiene una identidad definida por un dominio compartido de intereses.
2. La comunidad: en la búsqueda de su interés en su dominio, los miembros participan en actividades conjuntas y discusiones, se ayudan mutuamente y comparten información. Construyen relaciones que les permitan aprender unos de otros, preocupándose por la posición de cada uno dentro del mismo grupo.
3. La práctica: una comunidad de práctica no es más que una comunidad de intereses, por ejemplo gente que le gusta cierto tipo de película. Los miembros de una comunidad de práctica son los

[56]Samson, D. (2004). Patterns of Visualization. Recuperado el 28 de abril 2016 de la URL: http://amesa.org.za/amesal_n5_a3.pdf
[57]Wenger, E., & Trayner, B. (2015). Communities of practice a brief introduction. Recuperado el 30 de marzo 2016 de la URL: http://wenger-trayner.com/wp-content/uploads/2015/04/07-Brief-introduction-to-communities-of-practice.pdf

practicantes, los cuales desarrollan un repertorio compartido de recursos tales como experiencias, historias, herramientas, formas de abordar los problemas, en fin recurrentes prácticas compartidas.

Es la combinación de estos elementos lo que constituye una comunidad de práctica, y es mediante el desarrollo de estos tres elementos en paralelo que se cultiva una comunidad.

El concepto de comunidad de práctica ha encontrado una serie de aplicaciones en diferentes campos, y uno de ellos es el de la educación.

La comunidad de práctica se presenta en la parte educativa en tres dimensiones:

- Internamente: ¿Cómo organizar las experiencias educativas que fundamentan el aprendizaje escolar en la práctica mediante la participación en las comunidades alrededor de los temas?
- Externamente: ¿Cómo conectar la experiencia de los estudiantes a la práctica real a través de formas periféricas de la participación en comunidades más amplias más allá de las paredes de la escuela?
- Durante la vida académica de los estudiantes: ¿Cómo responder a las necesidades de formación continua de los estudiantes mediante la organización de las comunidades de práctica centradas en temas de interés para que puedan continuar más allá del período de escolarización inicial?

Desde esta perspectiva, la escuela no es el lugar privilegiado de aprendizaje. No es un lugar autónomo, es un mundo cerrado en el que los estudiantes adquieren conocimientos para aplicarse fuera, pero debe partir de un sistema de aprendizaje más amplio. La clase no es el evento principal de aprendizaje. La vida misma es el principal evento de aprendizaje. Las Escuelas todavía tienen un rol que desempeñar en esta visión, pero tienen que estar al servicio del aprendizaje de lo que ocurre en el mundo.

Wenger citado por Graven & Lerman (2003) identifica cuatro componentes de aprender a saber: sentido, la práctica, la comunidad y la identidad. Estos componentes del aprendizaje se definen como:

1. El significado es una manera de hablar de nuestra capacidad de experimentar el mundo como algo significativo.
2. La práctica es una manera de hablar acerca de los recursos históricos y sociales compartidos, los marcos y las perspectivas que sustentan el compromiso mutuo en la acción.
3. La Comunidad es una manera de hablar de las configuraciones sociales en los que se define nuestra empresa y nuestra participación es reconocible como competencia.
4. La identidad es una forma de hablar de los cambios que aprenden cómo lo que son. Estos cuatro componentes en conjunto proporcionan un marco para estructurar una teoría social del aprendizaje. Wenger (1998) resume este marco en la figura 3.

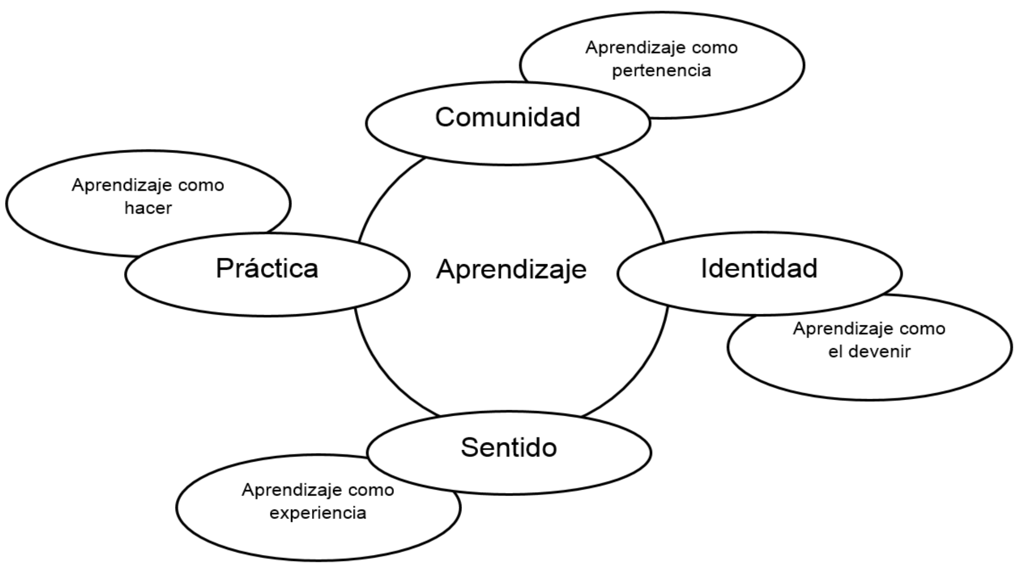


Figura 3. Componentes de una teoría social del aprendizaje.

Wenger (1988) observa que estos cuatro elementos están "profundamente interconectados y mutuamente definidos", y señala que se podría "cambiar cualquiera de los cuatro componentes periféricos con el aprendizaje, el cual está en el centro como enfoque principal, y el diagrama sigue teniendo sentido".

Los estudiantes que asisten a la escuela, de alguna manera forman comunidades de práctica por todas partes, ya sea en el aula, o en el patio de descanso, de una manera oficial o espontánea. La comunidad de práctica formada de estas maneras es la que promueve un aprendizaje más transformador en los alumnos.

Las comunidades de práctica según Wenger (1988) "son una parte integral de nuestra vida diaria. Son tan informales y omnipresentes que rara vez son un centro de interés explícito, pero las mismas razones también son muy familiares"[58].

Las comunidades de práctica no son sólo son un contexto para el aprendizaje de los principiantes como lo afirma Wenger (1988), sino tambien, un contexto para transformar nuevas visiones en el conocimiento.

- Por una parte, una comunidad de práctica es un contexto viviente que puede ofrecer a los principiantes acceso a la competencia generando una experiencia personal de compromiso. Cuando se cumplen estos aspectos, "las comunidades de práctica son un lugar privilegiado para la adquisición de conocimiento" [59].

[58] Wenger, E. (1988). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Recuperado el 20 de noviembre 2016 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S
[59] Ibidem

- Por otra parte, una comunidad de práctica es un contexto adecuado para explorar visiones radicalmente nuevas siempre y cuando funcione bien. cuando se cumple este aspecto, “las comunidades de práctica son un lugar privilegiado para la creación De conocimiento” [60]

En matemáticas, todas las aulas pueden llegar a interpretarse como comunidades de práctica, Planas, (2005) propone “son lugares donde los distintos participantes han aprendido o están aprendiendo a tener intereses comunes y a implicarse en tareas que han de facilitar la consecución de tales intereses” [61].

Las características de una comunidad de práctica de Wenger en matemáticas tienen mucho que ver con los niveles de participación e implicación en las tareas asignadas de los alumnos del aula.

Así por ejemplo, si el profesor tiende a fomentar pocos ámbitos de participación matemática y sólo recurre a construir tareas basadas en lo que está impartiendo, la comunidad de práctica se centrará en la memorización y la reproducción de ideas que no son cuestionables y asumidas como verdaderas. En general, no se espera que los estudiantes propongan y defiendan ideas matemáticas, que conlleva a una participación limitada y no se produzca discusión en el aula.

Hay comunidades que por el contrario se usa un lenguaje técnico para que no haya posibilidad a discusión. Este lenguaje usado por el profesor dificulta el aprendizaje del estudiante y obstaculiza la apropiación gradual por parte de los alumnos de valores y convenciones que caracterizan la más amplia comunidad matemática[62].

---

[60]Wenger, E. (1988). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Recuperado el 20 de noviembre 2016 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S

[61]Planas, N. (2005). El aula de Matemáticas como una comunidad de práctica inclusiva. Recuperado el 11 de marzo 2016 de la URL: http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/EDUCAR-PROTEGIDO_1.pdf

[62]Ibidem

Nuestra investigación precisamente busca fomentar la participación de los estudiantes, donde exista el debate y la posibilidad de discusión en cada uno de los miembros que la conforman.

En matemáticas, las características que pueden llegar a identificar una comunidad de práctica se basan en la interacción, el diálogo y la negociación, donde el aprendizaje matemático puede entenderse como lo argumenta Planas (2005) "una iniciación en una comunidad de significados y prácticas sociales, o como una forma de participación en una comunidad de práctica" [63].

Cualquier comunidad de práctica es un lugar socialmente construido, en donde tanto profesor y estudiantes son los que deben promover la posibilidad de cambio. Sin embargo, este tipo de cambio es difícil porque ni profesores ni estudiantes tienen claro un referente de un aula de matemáticas ideal. El aula tradicional es el referente existente para muchos y es el que se define como ideal en la enseñanza de las matemáticas.

Para poder llegar a comprender cómo se construye una determinada comunidad de práctica, es necesario examinar las acciones hechas por el profesor tal como promover la argumentación, generar debate, fomentar el pensamiento y curiosidad del estudiante; por otra parte las acciones de los alumnos deben dirigirse a promover la contra-argumentación, cuestionar, proponer, conjeturar, entre otros.

Cada acción del profesor y cada acción del estudiante contribuirán al cambio en la cultura del aula en la medida en que no sean acciones puntuales ni aisladas.

En esta investigación se conforma una comunidad de práctica con los estudiantes de los grados sexto, octavo y once que permite formar debate a partir de las situaciones que se plantean y las preguntas

[63] Planas, N. (2005). El aula de Matemáticas como una comunidad de práctica inclusiva. Recuperado el 11 de marzo 2016 de la URL http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/EDUCAR-PROTEGIDO_1.pdf

generadas por las diferentes comunidades, las cuales entran en 'discusiones' entre las mismas que producirán más preguntas que enriquecen el conocimiento matemático.

Conclusiones Capítulo 2

La teoría de la resolución de problemas es uno de los marcos teóricos que sustenta la presente tesis. Varios autores se destacan en este campo, entre ellos están Polya (1965), Krulik & Rudnick (1988), Parra (1995), De Guzmán (1996), Charles y Lester (2000), A.F. Labarrere (s.f.), Carr (2005), Chi y Glaser (1990), Sigarreta & Laborde (2000), Schoenfeld (2012) entre otros. Estos autores realizan aportes, definiciones y estrategias para la resolución de problemas. En la tesis se asume la propuesta por Polya (1965) y la definición de Parra (1989).

En el aprendizaje por descubrimiento es importante destacar que es un proceso educativo de investigación participativa, en el cual la solución de problemas y actividades basadas en el contexto real conducen a construir el conocimiento por parte del individuo, permitiendo generar preguntas y buscando respuestas, tratando de dar explicaciones y posibles soluciones.

Ausubel (s.f.), Bruner (1966), Shulman & Keislar (1979), Henríquez (1993) entre otros, contribuyen con definiciones, características y elementos presentes en el aprendizaje por descubrimiento.

En la Comunidad de práctica de Wenger se asume la definición de Wenger & Trayner (2015), en la cual un grupo de personas que interactúan con regularidad pueden tener un mejor aprendizaje al compartir una pasión por algo.

Las actividades propuestas es la tesis buscan el trabajo en comunidades de práctica en la que los estudiantes propongan preguntas naturales a partir de una situación dada. Es importante resaltar que el trabajo en comunidades reduce la timidez que a veces se presenta en los estudiantes, los cuales al trabajar de manera individual, no comparten sus ideas o preguntas por situaciones variadas que se pueden presentar en el contexto escolar.

CAPÍTULO 3. DISEÑO Y APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES.

Las actividades programadas en este capítulo están diseñadas con el objetivo de motivar a los estudiantes para que generen preguntas de manera natural en cada una de las situaciones presentadas.

Estas situaciones están planteadas con el propósito de ser atractivas y motivadoras para los estudiantes, para despertar en ellos la curiosidad, deseando aprender de manera independiente, generando debate entre ellos mismos, y los debates que surjan sean mediados por el docente y se permita la libre opinión y preguntas hechas en el aula, que ideen nuevas situaciones a partir de las que se les propone, que descubran por sí mismos y se sumerjan en un mundo de ideas nuevas en las matemáticas.

3.1. Estructuras de las actividades.

Las actividades propuestas están basadas en principios básicos como situaciones lúdicas, trabajo en equipo, espíritu de competencia, la importancia y uso de las matemáticas en la vida diaria.

Estas actividades están basadas en contenidos de aritmética, específicamente en teoría de números. Su estructura tiene objetivo, sugerencias metodológicas y desarrollo de la actividad.

A continuación se describen las actividades que componen la tesis.

Actividad 1: Trucos matemáticos.

Actividad 2: Situaciones que involucran patrones numéricos.

Actividad 3: Uso de las matemáticas en la vida diaria.

Actividad 4: Situaciones problema.

Actividad 5: Situaciones con ambiente gráfico.

Actividad 6: Detective matemático.

3.2. Actividades

3.2.1. ACTIVIDAD 1: Trucos matemáticos

Objetivo: Atraer la atención y curiosidad de los estudiantes en situaciones matemáticas que involucran trucos a partir de operaciones aritméticas para que de manera natural surjan preguntas.

Sugerencias metodológicas: Crear un ambiente sorprendente en el aula de clases donde los estudiantes sientan curiosidad del porqué resulta el truco matemático que se propone en cada numeral. Posteriormente el estudiante tratará en lo posible descubrir cómo funciona el truco y plantear otros que funcionen de manera similar.

En esta primera actividad el método a utilizar por el docente es brindar las pautas y la metodología de trabajo a los estudiantes para crear en ellos la curiosidad que se presenta ante un truco matemático que conduce a que se generen preguntas de forma natural cuando se dé respuesta al número que habían pensado. En la búsqueda de las preguntas naturales, las acciones de los estudiantes se encaminan a establecer conjeturas, hipótesis, en las cuales ellos apliquen recursos heurísticos.

Para el numeral 1 se espera que los estudiantes a partir de una situación que maneja operaciones aritméticas básicas descubran de ser posible el algoritmo que se involucra en el desarrollo de la misma. Se esperarán preguntas que surjan espontáneamente y se empiece a afianzar de alguna manera el conocimiento en los estudiantes y así propongan que ellos mismos planteen una situación similar. El concepto matemático involucrado en este numeral es el concepto de identidad.

Para el numeral 2 se hace uso del valor posicional de los números.

Para el numeral 3 se entregarán tarjetas a cada estudiante los cuales en primera instancia escogerán un número y dirán en cuáles tarjetas se encuentra dicho número. Las tarjetas mágicas en matemáticas son manejadas en el aula de clases y de gran familiaridad en el ámbito estudiantil, sin embargo las tarjetas mágicas que se presentan en esta actividad no son tan de fácil resolución como las que comúnmente conocen los estudiantes.

En este punto se hace uso del sistema en base 3.

Para el numeral 4 se maneja el criterio de divisibilidad por 9.

Para el numeral 5 se tiene en cuenta la serie de Fibonacci sumando en cada casilla los dos números anteriores.

El docente estará presente durante el desarrollo de toda la actividad, escuchando las preguntas que surjan de manera natural ante la situación que se ha planteado.

1. ADIVINANZA

Piensa un número, si es de una cifra será mejor para que el cálculo llevado a cabo sea más fácil.

Multiplica tu número pensado por 2 y al resultado le sumas 4.

Al resultado lo multiplicas por 50.

Al resultado le sumas 1581.

Al resultado que obtuviste le restas el año de tu nacimiento.

Ahora di el resultado que obtuviste.

2. MATEMAGIA

Adivinaré tu edad si tienes 10 o más de 10 años de edad.

Súmale 90 a tu edad, tacha el primer dígito de tu resultado y añádelo a los dos dígitos restantes. Ahora dime el resultado y adivinaré tu edad.

3. TARJETAS MÁGICAS

A continuación se encuentran unas tarjetas con números. Escoge mentalmente un número de alguna de las tarjetas. A continuación dirás en qué tarjetas se encuentra tu número y qué color tiene. Así, por ejemplo el número 5 se encuentra en la tarjeta 1 y es de color rojo, se encuentra también en la tarjeta 2 y es de color rojo y se encuentra en la tarjeta 3 y es de color negro. ¡Ahora elige tu número!

TARJETA 1

1	2	4	5	7	8	10	11	13
14	16	17	19	20	22	23	25	26
28	29	31	32	34	35	37	38	40

TARJETA 2

3	4	5	6	7	8	12	13	14
15	16	17	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	39	40	

TARJETA 3

9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
36	37	38	39	40				

TARJETA 4

27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40				

5. TU NÚMERO DE CELULAR Y TU EDAD

a. Escribe los cuatro últimos dígitos de tu número celular.

b. Organiza los mismos cuatro dígitos en el orden que tú desees.

c. Ahora resta el mayor de los números del menor.

d. Suma cada uno de los dígitos resultantes.

e. Si al sumar cada uno de los dígitos el resultado es de dos dígitos o más, realizas nuevamente de cada uno de los dígitos, hasta que tengas un dígito resultante.

f. Al dígito que obtuviste le sumas 7.

g. Ahora suma al resultado que obtuviste los dos últimos dígitos del año en que naciste.

h. Al resultado que obtuviste réstale 11.

i. Di el resultado obtenido y adivinaré tu edad.

2. HACIENDO CÁLCULOS CON LA SERIE DE FIBONACCI

Escribe los números del 1 al 10 en una columna.

a. En los dos primeros espacios de la columna escribe dos números de dos cifras que tú escojas.

b. En el siguiente espacio escribe el resultado de la suma de los dos números que tú escogiste.

c. En la siguiente casilla escribes el resultado de la casilla 3 sumada con la casilla 2.

d. En la siguiente casilla escribes el resultado de la suma de las casillas 4 más la casilla 3.

Realiza el mismo procedimiento sumando las casillas hasta la columna 10.

e. Ahora suma los resultados de las 10 columnas, lo puedes hacer con una calculadora para que el cálculo sea más rápido.

El objetivo es que digas primero que tu profesor la suma resultante antes de que él la diga.

Fuentes:

Alvarez, V., Fernández, P., & Márquez, M. A. (s.f.). *Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos.* Recuperado el 13 de septiembre de 2016 en el URL: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/magia.pdf

Cilleruelo, J. (s.f.). *El Diablo de los Números.*

Heath, R. V. (1953). *Math E Magic Magic, puzzles, and games with numbers.* New York: Dover Publications.

McOwan, P., & Parker, M. (s.f.). *The Manual of mathematical magic.* Londrés: Queen Mary, University Of London.

Sánchez, R. (febrero de 2016). Matemáticas y Magia.

Preguntas esperadas

En cada uno de los trucos matemáticos planteados se espera despertar gran curiosidad, motivando a los estudiantes a que generen preguntas de forma espontánea.

La primera pregunta que se espera que surja es: "¿Cómo lo hizo?, otra pregunta esperada es ¿El truco funciona con alguna fórmula matemática?, después se espera que mientras se vaya desarrollando el truco surjan más preguntas de forma natural en las que se vaya descubriendo la manera en la que se usan las matemáticas en cada uno.

3.2.2. ACTIVIDAD 2: Situaciones que involucran patrones numéricos

Objetivo: Extender, describir y crear patrones numéricos.

Sugerencias metodológicas:

Los estudiantes aprenderán a identificar patrones en conjuntos de números. Ellos estudiarán tanto los patrones de repetición como los patrones cada vez más reducidos y desarrollarán maneras de extenderlos. Las descripciones de la actividad de aprendizaje proporcionan orientación sobre maneras de ayudar a los estudiantes a establecer conexiones en representaciones matemáticas concretas.

La resolución consiste en descubrir la estructura periódica y relacional existente en patrones numéricos, esto generará en los estudiantes preguntas y conjeturas de la manera de encontrar el patrón involucrado, seguido de generar otras alternativas para otros patrones que ellos mismos puedan ir creando.

Desarrollo de la actividad.

1. ¿Puedo escribir 12 como la suma de dos o más números consecutivos?

De hecho 12 = 3 + 4 + 5

Otros ejemplos con distintos números:

9 = 4 + 5

14 = 2 + 3 + 4 + 5

Y algunos números se pueden hacer de más de una manera:

21 = 10 + 11, ó, 21 = 5 + 6 + 7

¿Qué más podrías decir al respecto?

PREGUNTAS

2. CURIOSIDAD MATEMÁTICA

Hay varios números naturales que, cuando se someten a operaciones aritméticas sencillas, su resultado obedece a una serie numérica.

Observa lo que sucede a continuación

37 x 3 = 111

37 x 6 = 222

37 x 9 = 333

37 x 12 = 444

PREGUNTAS

Ahora observa lo siguiente:

Si se invierte el número 37 a 73

73 x 3 = 219

73 x 6 = 438

73 x 9 = 657

73 x 12 = 876

PREGUNTAS

3. EL PROBLEMA DE LOS CUATRO DÍGITOS

Se dice que cualquier número se puede representar, usando para ello sólo cuatro dígitos iguales, y realizando operaciones aritméticas entre ellos (las reglas de operaciones permitidas pueden ser variadas).

Observa:

$\mathbf{1} = \frac{2}{2} + 2 - 2$

$\mathbf{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}$

$\mathbf{3} = (2 * 2) - \frac{2}{2}$

$\mathbf{4} = 2 + 2 + 2 - 2$

$\mathbf{5} = (2 * 2) + \frac{2}{2}$

¿Podrías continuar con los siguientes números?

PREGUNTAS

4. Fíjate en la siguiente sucesión numérica:

1 x 1 x 1 **=** 1

2 x 2 x 2 = 3 + 5

3 x 3 x 3 = 7 + 9 + 11

4 x 4 x 4 = 13 + 15 + 17 + 19

5 x 5 x 5 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29

PREGUNTAS

5. UN PROBLEMA NO RESUELTO

En el año 1700 un matemático llamado Christian Goldbach formuló la siguiente conjetura:

“Todo número par mayor que dos se puede expresar como la suma de dos números primos.”

Ahora algunos ejemplos de esta conjetura son los siguientes:

8 = 3 + 5

10 = 3 + 7.

12= 5 + 7

Escribe otros ejemplos.

PREGUNTAS

6. Un comerciante guarda cajas en una bodega la cual tiene nueve secciones, de las cuales una sección está en el centro y allí no se pueden acomodar cajas.

La forma de la bodega con las cajas está distribuida de la siguiente manera:

3	10	3	= 16
10	X	10	
3	10	3	= 16
||		||	
16		16	

El comerciante tiene una costumbre. Le gusta que las cajas sumen 16 en forma horizontal y en forma vertical en sus extremos. Así que, cada vez que saca cajas de algunas de las secciones, saca exactamente 4 cajas, de tal forma que las cajas que quedan en las secciones sigan sumando 16 tanto horizontalmente como verticalmente.

PREGUNTAS

Fuentes:

Eiss, H. (1988). *Dictionary of mathematical games, puzzles, and amusements.* United States of America: Greenwood Press.

Mateo, J. C. (2008). *El Diablo de los Números.* Recuperado el 18 de septiembre de 2016 de la URL: https://www.google.com.co/?gws_rd=cr&ei=P9IpWOTaGMqFmwH_8pOgCQ#q=libro+conjetura+de+goldbach+pdf

Sierra, J. (2000). *El asesinato del profesor de matemáticas.* Huygens .

Preguntas esperadas

En esta actividad las preguntas esperadas por los estudiantes deben de estar asociadas a la generalización que obtenga una respuesta a *n* cantidad de términos.

Otra pregunta importante está en observar qué está sucediendo en las sucesiones establecidas y lo que ocurre en la siguiente.

También se espera que pregunten ¿qué pasaría si se hiciera con otros números? o ¿qué pasaría si se trabaja con tres números consecutivos? o ¿funcionará para cualquier número?

3.2.3. ACTIVIDAD 3: Uso de las matemáticas en la vida diaria.

Objetivo: Observar la importancia del uso de las matemáticas en la vida diaria.

Sugerencias metodológicas: Para el desarrollo de esta actividad cada estudiante hará un escrito en donde describa la labor que desempeña cada uno de sus padres o familiares y el uso que tiene la matemática en dicha labor realizada y la importancia que adquiere en sus respectivas labores.

Algunos estudiantes compartirán con los demás el escrito realizado por ellos, haciendo referencia a la manera en que las matemáticas son usadas en las labores de sus padres o familiares. Después de esto se espera que algunos de los compañeros de clase generen preguntas y así fortalecer los conceptos matemáticos que se involucran en dichas actividades.

Se entregará a cada estudiante la actividad con un ejemplo del uso de las matemáticas en la labor hecha por una persona.

Desarrollo de la actividad

La matemática es una ciencia que usamos todos los días en nuestras vidas, las usamos para muchas de nuestras actividades diarias, así por ejemplo, en el uso del transporte, compra de productos, ventas, transacciones comerciales, estadísticas, entre otras.

Vas a realizar un escrito en el cual se especifique la actividad desempeñada por tus padres o familiares y el uso de las matemáticas en dicha labor.

Ejemplo

Mi papá trabaja en la empresa de Acueducto, específicamente en la sección de medidores. Mi papá tiene como función calibrar los medidores del agua, los cuales por medio de un sistema deben de tener un margen entre 0,003 litros y 0,001 litros de error por cada 100 litros para que puedan salir como aptos para distribuir entre los ciudadanos que los van a usar. Cada medidor tiene como función ir registrando el consumo de agua en cada hogar. El registro del consumo del agua se mide en metros cúbicos (m^3), donde $1m^3$ equivale a 1000 litros. El cobro del agua en la comunidad se realiza según el estrato que tenga; así por ejemplo:

Estrato 1: $1m^3$ tiene un costo de \$1200

Estrato 2: $1m^3$ tiene un costo de \$1600

Estrato 3: $1m^3$ tiene un costo de \$2000

Preguntas esperadas

Se considera en esta actividad que la pregunta más importante que se genere en los estudiantes es ¿qué importancia tiene la matemática en la labor de tu familia?, teniendo en consideración esta pregunta, se espera que los estudiantes destaquen la importancia que tiene la matemática en la vida cotidiana.

3.2.4. ACTIVIDAD 4: Situaciones problema.

Objetivo: Potencializar en los estudiantes las preguntas que le puedan surgir ante una situación matemática planteada.

Sugerencias metodológicas: Los estudiantes formarán grupos los cuales tendrán una situación matemática planteada, a partir de la cual generaran preguntas que surgirán de dicha situación. Cada grupo le entregará a otro el problema o situación con la pregunta la cual será resuelta por el grupo contendor. Cada grupo hará lo mismo con el grupo que le corresponda interactuar. La idea también es que cada grupo resuelva la situación con la pregunta o preguntas que le plantea el grupo. Cada grupo tendrá derecho a refutar o no si la pregunta o preguntas formuladas sí corresponden al contexto de dicha situación. Esto generará debate entre los estudiantes que tendrán más preguntas y nuevas soluciones a cada planteamiento dado.

1. Sofía tiene un libro nuevo de 239 páginas. Planea leer 3 páginas cada día de lunes a viernes y 5 páginas cada sábado y cada domingo. Va a empezar un domingo a leer el libro.

Preguntas____

____

2. En el bosque hay 20 duendes. Algunos son verdes, otros son amarillos y otros son morados.

Se les hicieron 3 preguntas. Los verdes siempre dijeron la verdad, los morados siempre mintieron, y cada uno de los amarillos eligió entre mentir y decir la verdad al responder la primera pregunta y, a partir de ahí alternó entre verdad y mentira. La primera pregunta que se le hizo a cada uno fue "¿Eres verde?", a lo que 17 de ellos respondieron "Sí". La segunda pregunta fue "¿Eres amarillo? 12 de ellos respondieron "Sí". La tercera pregunta fue "¿Eres morado? 8 de ellos respondieron "Sí".

PREGUNTAS____

____

3. El señor Gómez tiene tres hijos: Leonardo, Ana y Eduardo. Si se multiplican la edad de Leonardo y la de Ana, el resultado es 14. Si se multiplica la edad de Ana por la de Eduardo, se obtiene 10. Si se multiplican las edades de Eduardo y Leonardo, se obtiene 35.

PREGUNTAS____

____

4. Las cuatro palabras codificadas con estos símbolos

$\diamond * \otimes$ $\qquad$ $\oplus \# \bullet$ $\qquad$ $* \diamond \bullet$ $\qquad$ $\otimes \star \oplus$

Son en algún orden:

AMO SUR REO MAS

PREGUNTAS____

____

____

5. Tres deportistas participaron en una carrera: Miguel, Fernando y Sebastián. Inmediatamente después del comienzo, Miguel iba primero, Fernando segundo y Sebastián tercero. Durante la carrera, Miguel y Fernando se pasaron uno al otro 9 veces, Fernando y Sebastián lo hicieron 10 veces, y Miguel y Sebastián 11 veces.

PREGUNTAS____

____

6. A continuación hay una gráfica de una página de Facebook.

PREGUNTAS____

____

7. Andrés dibuja una sucesión de cuadros de colores así: uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro, uno amarillo, uno azul, uno verde, uno rojo, uno negro, y así sucesivamente.

PREGUNTAS

____

____

8. Un estudiante resuelve un cierto número de ejercicios de matemáticas en un día, y en cada uno de los siguientes días resuelve el doble de los que ha resuelto el día anterior.

PREGUNTAS

____

____

9. Cuatro cursos del Colegio desean recoger dinero para celebrar un “compartir” con su profesor de matemáticas a quién estiman mucho.

Octavo A da dos veces lo que dio Sexto D, Octavo B da tres veces lo que dio Octavo A y Octavo C da cuatro veces lo que dio Octavo B.

PREGUNTAS

____

____

10. El boleto de entrada al Palacio de las Ciencias cuesta $5000 por niño y $10000 por adulto. Al final del día 50 personas visitaron el Palacio y el ingreso total de las entradas fue de $350000.

PREGUNTAS

____

____

11. Una persona nota que cada diciembre aumenta 5 kilos, mientras que en agosto pierde 4. En el resto del año mantiene un peso estable.

PREGUNTAS

____

____

Fuentes:

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas. (2014). Centro de Entrenamiento Matemático. Recuperado el 18 de octubre de 2016 en el URL: http://www.cem.prodimat.org.ve/

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM México, D.F. (2016). Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Internet. Recuperado el 18 de octubre de 2016 en el URL: ichi.fismat.umich.mx/omm/

Preguntas esperadas

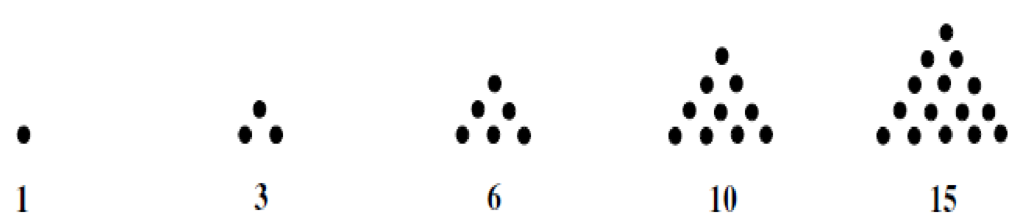
Las preguntas esperadas para esta actividad deben emerger de forma natural al enunciado y los datos que están descritos en cada situación problema. Originalmente cada situación se tiene prevista una pregunta o dos a lo sumo; sin embargo, se pretende que los estudiantes planteen tantas preguntas como crean que sean necesarias.

3.2.5. ACTIVIDAD 5: Situaciones con ambiente gráfico

Objetivo: Generar en los estudiantes preguntas o conjeturas a partir de situaciones o problemas con ambiente gráfico.

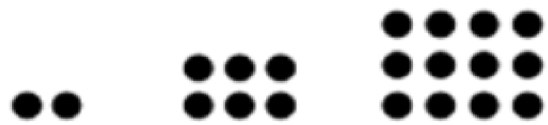
Sugerencias metodológicas: Los estudiantes por medio de la visualización podrán descubrir las sucesiones numéricas involucradas en cada de una de las imágenes que se presentan, generando preguntas con las figuras representadas y las posibles sucesiones que se pueden generar o las posibles nuevas gráficas que ellos puedan crear.

1. Observa la siguiente figura numérica:



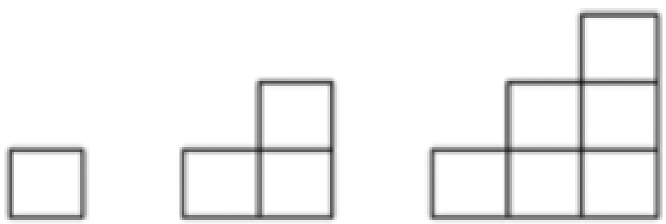
¿Qué puedes decir para continuar la figura?

2. Observa la sucesión de figuras:



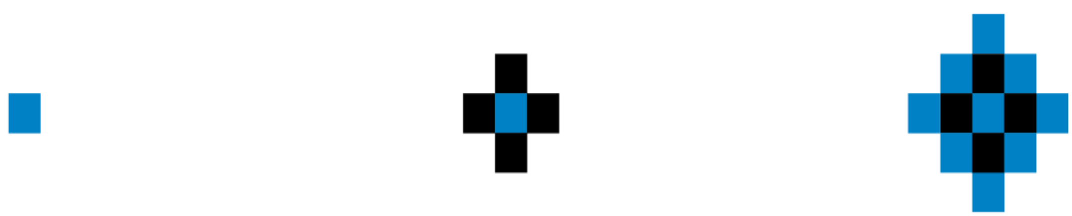
¿Qué puedes decir al respecto?

3. Observa la sucesión de figuras:



¿Qué podrías decir con respecto a las figuras?

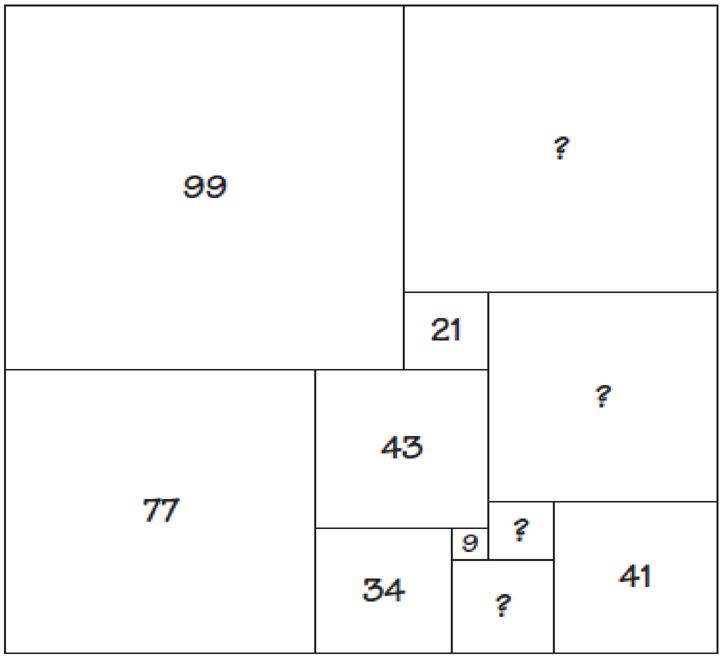
4. Observa el siguiente modelo de crecimiento de un diseño.



En tu opinión, ¿cómo se construye esta figura? ¿Qué observas?

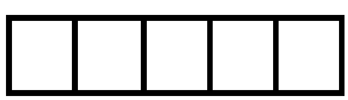
5. Cuadrado al cuadrado

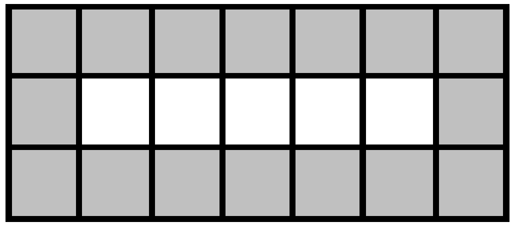
Cada número representa la longitud de los lados de cada cuadrado.



6. Problema de las baldosas

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:





Por ejemplo para una fila de 5 baldosas blancas se requieren 16 baldosas negras para rodearlas.

Fuentes:

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas. (2014). Centro de Entrenamiento Matemático. Recuperado el 18 de octubre de 2016 en el URL: http://www.cem.prodimat.org.ve/

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM México, D.F. (2016). Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Internet. Recuperado el 18 de octubre de 2016 en el URL: ichi.fismat.umich.mx/omm/

Preguntas esperadas

Las preguntas esperadas en esta actividad se deben de relacionar con ¿qué podrá pasar con la siguiente figura?, ¿cuántos puntos tendrá?, ¿La siguiente figura cuántos cuadrados tendrá?, ¿qué pasará en la figura 50 por ejemplo? o ¿existirá una operación que permita encontrar la cantidad de figuras en cualquier posición dada?

3.2.6. ACTIVIDAD 6: Detective matemático

Objetivo: Resolver situaciones o problemas matemáticos, cumpliendo la labor de un detective, reuniendo todas las evidencias (datos) para que los alumnos las puedan usar y poder resolver el caso asignado.

Sugerencias metodológicas: Los estudiantes formarán un equipo de detectives matemáticos, los cuales se les asignará un caso (situación problema) que deberán resolver reuniendo las “pistas” cualitativas y numéricas que se presentan en el caso. Los alumnos aplicarán operaciones matemáticas (comprobación) a las pistas que recogerán y así poder solucionar el caso.

Los detectives también tendrán la tarea de proponer y resolver casos parecidos al que se les asignó en su labor investigativa.

SITUACIÓN

De noche, el Palacio del Rey Arturo era custodiado por tres guardianes situados en distintos puntos del recinto. Un día, el ladrón apodado “Kinki” consiguió entrar y robar una gran bolsa de cerezas.

Al intentar salir de Palacio, “Kinki” fue interceptado por uno de los guardianes. Este le detuvo y cogió la mitad de las cerezas y cuatro más. “Kinki” Consiguió huir y tropezó con el segundo guardián, que le quitó la mitad de las cerezas que le quedaban y cuatro más. Al final tropezó con el tercer y último guardián que actuó de igual forma que los otros dos: le quitó la mitad de las cerezas y cuatro más. Si al final “Kinki” se quedó con una sola cereza.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

____

____

PISTAS 

HIPÓTESIS

COMPROBACIÓN 

INFORME FINAL

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

SITUACIÓN

Una escalera tiene 100 escalones. Una paloma se posó en el primer escalón, dos en el segundo, 3 en el tercero, 4 en el cuarto, 5 en el quinto y así sucesivamente hasta el escalón 100.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

PISTAS

HIPÓTESIS

____

____

____

____

COMPROBACIÓN

____

____

____

INFORME FINAL

____

____

____

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

SITUACIÓN

Daniela se compra un pantalón, un suéter y un abrigo.

Cuando va a pagar los tres productos, la vendedora le da los siguientes datos:

"El pantalón y el suéter cuestan $55000, el pantalón y el abrigo cuestan $112000, y el suéter y el abrigo cuestan $91000."

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

____

____

PISTAS

____

____

____

HIPÓTESIS

COMPROBACIÓN 

INFORME FINAL  

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

SITUACIÓN

El 05 de diciembre se hará entrega de los diplomas a la promoción de grado 11 del Colegio Elisa Borrero de Pastrana.

Los organizadores del acto pensaron que, para acabar más pronto, los alumnos deberían subir al escenario en grupos.

Pero al tratar de agruparlos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis, vieron que en todos los casos sobraba un alumno.

Sin embargo, agrupándolos de siete en siete, todos los grupos quedaban igual, con lo que el acto se va a llevar a cabo de esta forma.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

____

____

PISTAS

____

____

HIPÓTESIS

COMPROBACIÓN 

INFORME FINAL  

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

SITUACIÓN

Un encuestador pregunta a una mujer cuántos hijos tiene. Ella le contesta que tiene 3 hijos. ¿Y de qué edades? —vuelve a preguntar el encuestador—. La mujer responde: ‘El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de la casa vecina’. El encuestador se retira, pero un instante después regresa y le dice que los datos no son suficientes para saber las edades de los hijos. La mujer piensa un momento y disculpándose le dice: ‘Tiene razón, la mayor estudia piano’. ‘¡Gracias señora!’, responde muy satisfecho el encuestador. ‘Con ese dato, ya sé las edades de sus hijos’.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

PISTAS 

HIPÓTESIS

COMPROBACIÓN

INFORME FINAL

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

SITUACIÓN

Un excursionista fue de prácticas a un laboratorio en plena montaña, por curiosidad en la entrada del laboratorio movió una palanca marcada con un símbolo de una calavera, sin sospechar lo que le esperaba. ¡Sí! Una horda de zombies había despertado al interior del laboratorio. De alguna manera el excursionista se siente culpable y avisa a las personas que están en el laboratorio y así huir pronto de ahí antes de ser devorados por los zombies. Aparte del excursionista está el portero del laboratorio, el viejo profesor y su asistente. Para poder escapar rápido de los zombies deben de atravesar un puente de cuerdas que está por encima de un abismo inmenso. Ahora bien, el puente sólo se puede cruzar de a dos personas, de lo contrario se caería.

Según los cálculos del profesor, los zombies los alcanzarán en poco más de 17 minutos, por lo que tienen sólo ese tiempo para llegar al otro lado y cortar las cuerdas.

Dicho lo anterior, El excursionista dura un minuto para cruzar el puente, la asistente cruzará en 2 minutos, el portero es un poco más lento y necesitará 5 minutos y el profesor tardará 10 minutos en cruzar el puente.

Para empeorar las cosas, está oscureciendo y el camino es poco visible por lo que tienen que prender una linterna la cual alumbra solo a dos personas.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

PISTAS

HIPÓTESIS

COMPROBACIÓN

INFORME FINAL

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

SITUACIÓN

EL MISTERIOSO CASO DEL RASTRO DEL DINERO

El mundialmente famoso falsificador apodado 'pies ligeros' está gastando dinero falso por toda la ciudad.

El rastro misterioso del dinero comenzó en la mañana, cuando la dueña del Restaurante donde desayunó 'pies ligeros' había pagado con un billete falso. Sin embargo al llegar la policía al lugar, 'pies ligeros' ya se encontraba en la calle 67, tres cuadras más delante de donde se encontraba el Restaurante.

No pasó mucho tiempo antes de que se recibiera otra llamada a la policía informando de dinero falso. Esta vez fue de una tienda de sombreros, sin embargo al llegar la policía 'pies ligeros' ya había huido y se encontraba en la calle 53, para ser más preciso había caminado una cuadra más que el robo anterior.

Momentos después otra llamada ¡pies ligeros acaba de irse de acá! Gritaba por teléfono la persona a la que había engañado con dinero falso. Pero igual esta vez la policía llegó tarde al lugar y 'pies ligeros' ya estaba en la calle 30, había recorrido una cuadra más esta vez que el robo anterior.

La policía se encuentra perpleja.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

____

____

PISTAS 

HIPÓTESIS 

COMPROBACIÓN 

INFORME FINAL  

¿Puede nuestro equipo de Detectives crear otra situación similar planteada a la que acabas de resolver?

Fuentes:

ABC.es. (2014). *Solución: Resuelve el problema medieval de la paloma y escalera con 100 escalones* . Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: http://www.abc.es/ciencia/20141113/abci-solucion-problema-matematico-medieval-201411122130.html

MTH-TICS. (2013). Problemas para la playa, o algunos mitos desmontados Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: http://mthtics.blogspot.com.co/2013/07/problemas-para-la-playa-o-algunos-mitos.html

Scholastic. (s.f.). Math Maven's Mysteries. Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: http://teacher.scholastic.com/maven/

Preguntas esperadas

Cumpliendo el rol de un detective, el cual debe recolectar pistas con la información suministrada en un problema, se espera que los estudiantes generen la pregunta de investigación que de alguna manera será la que se busca para poder solucionar la situación.

Conclusiones Capítulo 3

Las seis actividades propuestas se sustentan en situaciones aritméticas, algunas de ellas basadas en las Comunidades de práctica de Wenger, otras en situaciones problema, permitiendo en los estudiantes que surja la curiosidad y realicen preguntas de manera natural en el momento en el que se desarrollen las situaciones establecidas.

La participación de los estudiantes en cada una de las actividades será de gran importancia para propiciar las preguntas que emerjan cuando intervengan en la situación.

CAPITULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA

En este capítulo se realiza un análisis del desarrollo de las actividades realizadas por los estudiantes, donde se valora en cada una de ellas su implementación, motivación por el aprendizaje, logros y dificultades.

4. 1. Valoración de los resultados obtenidos de la investigación.

Desarrollo de la actividad 1: Trucos matemáticos.

Objetivo: Atraer la atención y curiosidad de los estudiantes en situaciones matemáticas que involucran trucos a partir de operaciones aritméticas para que de manera natural surjan preguntas.

Grupos a los cuales se aplicó: Grado sexto y grado octavo.

Descripción de la actividad: La primera actividad se desarrolló con 34 estudiantes de grado sexto y con 43 estudiantes de grado octavo. Se presentaron una serie de situaciones matemáticas a los estudiantes en las que se involucran trucos matemáticos que no son tan evidentes de descubrir por parte de ellos. El docente en todo momento estuvo dirigiendo la actividad, cada truco que se iba realizando, los estudiantes procedían a realizar cada uno de los pasos que se les iba indicando para poder realizar el truco, parar ello no se le hacía entrega del material de esta actividad a los estudiantes con el fin de que estuvieran más atentos y todos fueran al mismo ritmo con las indicaciones que se les iba impartiendo.

El uso de la calculadora fue de gran utilidad por parte de los estudiantes para una mayor precisión y rapidez en el momento de hacer los cálculos necesarios de realizar para algunos trucos que incluían operaciones aritméticas.

Los estudiantes estuvieron muy atentos y participativos durante el desarrollo de toda la actividad la cual tuvo una duración de 2 horas para su realización.

Para el primer truco llamado "Adivinanza" los estudiantes pensaban libremente en un número y lo escribían ya fuera en una hoja o en la calculadora según ellos lo preferían, después de esto se realizaban una serie de operaciones aritméticas indicadas por el docente y por último digitaban el año de nacimiento de cada uno sin hacérselo saber al docente. El resultado final de todas las operaciones aritméticas realizadas era el número que divulgaban al profesor, el cual a partir del número dado encontraba tanto el número pensado originalmente por cada uno como la edad actual de cada uno de los estudiantes.

El docente al descubrir tanto el número pensado como la edad del estudiante causó una gran curiosidad en los estudiantes los cuales querían que el truco se realizara con cada uno de ellos y así comprobar que funcionaba siempre sin importar el número pensado y la edad de los mismos. Al descubrir que el truco no fallaba, los estudiantes formulaban preguntas que permitían ir analizando y determinando el procedimiento matemático involucrado en el truco.

Para el segundo truco llamado "matemagia" los estudiantes tuvieron al igual que el anterior truco una gran curiosidad de cómo funcionaba el truco para descubrir su edad en tan pocos sencillos pasos y operaciones aritméticas.

Para el siguiente truco se realizaron cuatro tarjetas que se colocaron en el tablero y los estudiantes participaban escogiendo el número e indicando en qué tarjeta o tarjeta se encontraban, para esto en ningún momento el docente observó las tarjetas para dar mayor credibilidad al truco por parte de los alumnos y encontrar el número que habían escogido inicialmente.

El truco del número del celular y descubrir la edad a partir de los cuatro últimos dígitos del celular de cada uno fue uno de los que mayor dudas y curiosidad generó en ellos, puesto que se les hacía poco posible que se llegara a descubrir la edad con los números del celular ya que no guardan ninguna relación según así lo expresaban ellos.

El siguiente truco asociado con la serie de Fibonacci fue realizado en el tablero por algunos estudiantes que pasaron a escribirlo y compartirlo con los compañeros de aula. Inicialmente los primeros estudiantes escribían los 10 números en cada casilla, eso los hacía suponer que la suma se realizaba muy rápidamente por parte del docente, sin embargo a medida que participaron más estudiantes en el tablero se les solicitó que no escribieran algunos números de las casillas que se les indicaba y así el truco presentara mayor curiosidad.

Preguntas generadas por los estudiantes: Es preciso evidenciar que cada uno de los trucos matemáticos planteados generó gran curiosidad en los estudiantes, que era lo que se pretendía principalmente en esta actividad, y al despertar su curiosidad, esto llevó a que se generaran preguntas de manera natural por parte de cada uno de ellos.

La primera pregunta que surgió de manera natural fue "¿Cómo lo hizo?, esta pregunta estuvo presente en cada uno de los trucos mostrados en la actividad.

A medida que se realizaba el truco y se mostraba que funcionaba con diferentes estudiantes, las preguntas ya fueron hechas con carácter matemático que era la segunda parte vital en el desarrollo de la actividad.

Así por ejemplo para el primer truco los estudiantes de grado octavo preguntaron algunas cuestiones como:

- ✓ ¿Funciona para cualquier número que pensemos sin importar la cantidad de cifras?
- ✓ ¿El truco funciona con alguna fórmula matemática?
- ✓ ¿Por qué siempre sumamos el número 1581? ¿si lo cambiáramos por otro número, el truco seguiría funcionando?

- ✓ ¿Qué pasaría si en vez de descubrir la edad y el número pensado, se pudiera pensar en por ejemplo encontrar la hora actual o algo así?
- ✓ ¿Si cambiáramos los números que el profesor nos da por otros números y las operaciones aritméticas realizadas no fueran las indicadas y realizáramos otras, el truco funcionaría?

Para el segundo truco las preguntas generadas fueron las siguientes:

- ✓ ¿Funciona solamente para encontrar la edad?
- ✓ ¿Qué pasa cuando la edad es menor a diez años, se sigue cumpliendo el truco?
- ✓ La anterior pregunta fue contestada y realizada por un estudiante en el tablero, y la respuesta fue ¿y si en vez de sumarle 90 a los que tienen menos de 10 años le resto 90? creo que el truco funciona de esta manera.
- ✓ ¿Por qué siempre debemos sumar 90?
- ✓ ¿Por qué siempre debemos tachar el primer dígito del resultado que obtuvimos al sumarle 90? ¿Si tacháramos por ejemplo la siguiente cifra o la última cifra, el truco seguirá funcionando?

Para el tercer truco que involucra las tarjetas matemáticas las preguntas naturales generadas por los estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ ¿Por qué aparecen números en rojo y otros números en negro en algunas tarjetas?
- ✓ En algunas tarjetas no aparecen los mismos números, ¿A qué se debe esto?
- ✓ Se observa que en la tarjeta 1 los colores se van alternando cada dos posiciones, mientras que en la tarjeta 2, se van alternando tres posiciones, en la tarjeta 3 cada 9 posiciones y en la tarjeta 4 solo está el color negro, ¿por qué se realiza de esta manera?
- ✓ ¿Será que el número 3 tendrá que ver con el color de los números de las tarjetas? Ya que observo que por ejemplo en la primera tarjeta el número 1, 4, 7, 10 y así sucesivamente tienen una diferencia de 3, y lo mismo sucede con los números que están en rojo, 2, 5, 8, 11 y así

sucesivamente existe una diferencia de 3 entre uno y otro. En la tarjeta 3 ya la diferencia entre los colores es de 9, y en la última tarjeta sólo está el color negro.

- ✓ En la primera casilla de cada tarjeta los números que aparecen son divisibles por 3. ¿Será que los números de cada tarjeta están asociados con divisores o múltiplos de 3?
- ✓ ¿Por qué el número 40 aparece en todas las tarjetas y en color negro?
- ✓ ¿Por qué sólo las tarjetas están hasta el número 40? ¿No se podrán escribir números mayores a 40?

Para el cuarto truco la curiosidad fue mucho mayor, porque a partir de los cuatro últimos dígitos del número de celular se descubría la edad del estudiante, esto generó de alguna manera dudas por parte de los estudiantes porque les parecía poco probable que el truco funcionara de esa manera.

Sin embargo a medida que se realizaron los pasos correspondientes del truco, los estudiantes fueron descubriendo que siempre llegaban al mismo dígito, y que después de esto lo que se realizaba eran operaciones aritméticas para encontrar la edad.

Sin embargo las preguntas de forma natural realizadas en este truco fueron las siguientes:

- ✓ ¿Por qué siempre se obtiene el mismo dígito (en este caso 9) al combinar los últimos cuatro dígitos de mi celular y realizar las operaciones que me indicaron?
- ✓ ¿Se podrá usar otros números que no sean los de mi celular para que el truco funcione? No sé, pienso por ejemplo en la dirección de mi casa.
- ✓ ¿Se podrá realizar con multiplicación de mis últimos cuatro dígitos en vez de realizar una resta?

Para el truco 5 llamado “Haciendo cálculos con la serie de Fibonacci” los estudiantes escribían la suma total de cada una de los números colocados en las 10 casillas de la columna.

Para ellos se solicitó a algunos estudiantes que participaran en el tablero escribiendo los números escogidos. El truco estaba fundamentado en que el docente encontraba la suma muy rápidamente y antes que el estudiante de la suma de las 10 casillas.

A medida que los estudiantes pasaban y el truco seguía funcionando, se incluyó una indicación la cual consistía en borrar números de algunas de las 10 casillas, sin que el docente no lo notara y el truco de esta manera generara mayor dificultad para los estudiantes.

Las preguntas generadas por los estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ ¿De alguna manera los dos números que pensamos están involucrados en la suma total de todas las 10 casillas?
- ✓ ¿Alguno de los números de las casillas está de alguna manera relacionado con la suma total?
- ✓ ¿Siempre funciona para cualquier número que pensemos sin importar que tan grande sea?
- ✓ ¿Existe alguna fórmula matemática que se haga de manera más rápida para determinar la suma total de los 10 números?

Para dar respuesta a las preguntas generadas por los estudiantes en los trucos presentados, se iba realizando junto con ellos el procedimiento matemático que se encontraba incluido en cada uno de los diferentes trucos presentados en la actividad. La manera de proceder fue realizar varias veces el truco e ir descubriendo el mecanismo en el que funcionaba.

Después de esto, los estudiantes iban determinando los pasos que siempre estaban presentes en el truco y que se establecían sin importar el número pensado.

Conceptos matemáticos involucrados: Los conceptos matemáticos involucrados fueron los siguientes:

Para el primer truco el concepto manejado es el de identidad algebraica.

Para el segundo truco el concepto matemático es el de valor posicional de un número.

Para el tercer truco el concepto matemático es el de sistema en base 3.

Para el cuarto truco el concepto matemático es el de criterio de divisibilidad por 9.

Para el quinto truco el concepto matemático es el de sucesión numérica y divisibilidad por 11.

Dificultades: A pesar de que los trucos presentados a los estudiantes causaron gran curiosidad, los estudiantes no trataban de descubrir la manera en que la matemática estaba implicada en dichos trucos.

También se les presentó dificultad en manejar conceptos matemáticos como el valor posicional de un número o la representación de los números en un sistema diferente al sistema decimal. Poco conocimiento tienen sobre la serie de Fibonacci especialmente en los grados octavos.

Conclusiones: Los trucos matemáticos generaron en los estudiantes una gran curiosidad en primera instancia porque no eran tan evidentes como los trucos que ellos ya conocían, en segunda instancia los estudiantes estuvieron durante toda la actividad generando preguntas naturales y tratando de resolver cómo funcionaba cada uno de los trucos y tratando de proponer otros trucos a partir de los que se habían desarrollado en la actividad.

Desarrollo de la actividad 2: Situaciones que involucran patrones numéricos.

Objetivo: Extender, describir y crear patrones numéricos.

Grupos a los cuales se aplicó: Grado sexto, grado octavo y grado once.

Descripción de la actividad: La primera actividad se desarrolló con 10 estudiantes de grado sexto, 10 estudiantes de grado octavo y 10 estudiantes de grado once.

Se hace entrega a cada estudiante de una guía con 5 situaciones, de las cuales las cuatro primeras presentan patrones numéricos en los cuales los estudiantes descubran alguna regla que explique dicho patrón y también le permita hacer predicciones a partir de los mismos.

La situación en el punto 5 involucra un problema que de alguna manera tiene implícito un patrón que se va generando a medida que se saca cierta cantidad de cajas de la bodega.

Preguntas generadas por los estudiantes: Para esta actividad se entregaron algunos patrones que fueran de gran manera llamativos para los estudiantes, y siguieran generando a partir de los resultados mostrados en la guía otros resultados según el patrón establecido.

Para la situación 1 los estudiantes escribieron resultados con otros números para comprobar que se cumplía la suma con tres números consecutivos.

Las preguntas que surgieron por parte de ellos fueron las siguientes:

- ✓ ¿Funcionará con cualquier número que yo escriba sin importar su cantidad de cifras?
- ✓ ¿Funcionará para todos los números naturales? De hecho me di cuenta que para 1 y 2 por ejemplo no funciona.
- ✓ ¿Habrá otros números aparte del 1 y el 2 para los que no se cumple?

Para la situación 2 "Curiosidad matemática" los estudiantes siguieron escribiendo el número 37 y los siguientes múltiplos de 3 que continuaban después de 12 para de alguna manera descubrir lo que sucedía con los resultados que obtenían:

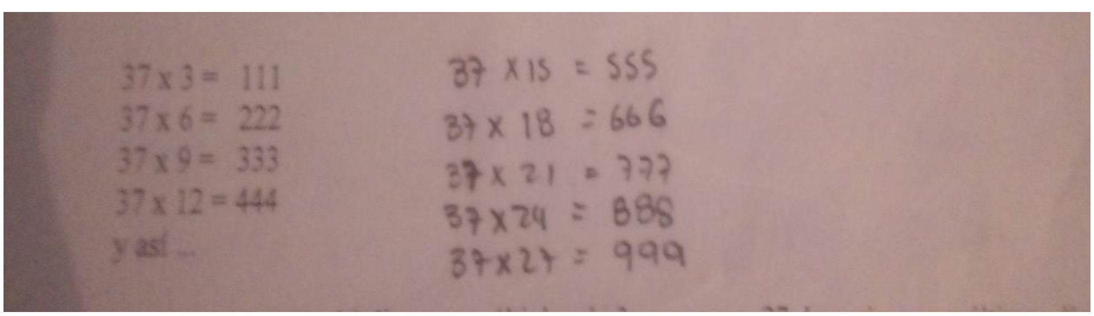


Figura 4. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Sin embargo al seguir la sucesión con los siguientes múltiplos después de 27 notaron que los resultados cambiaban:

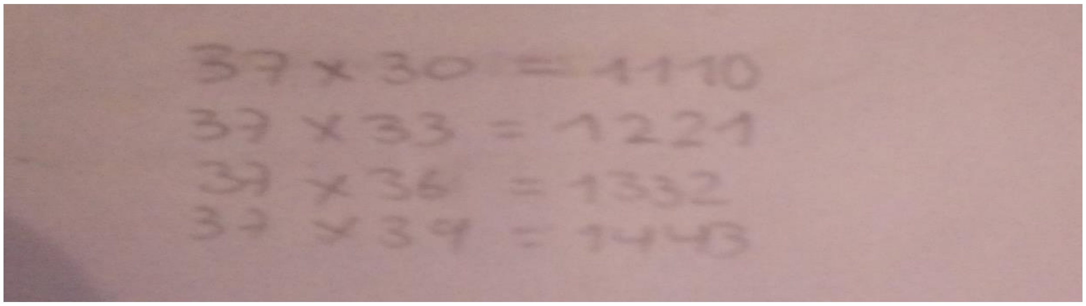


Figura 5. Planteamiento propuesto por un estudiante.

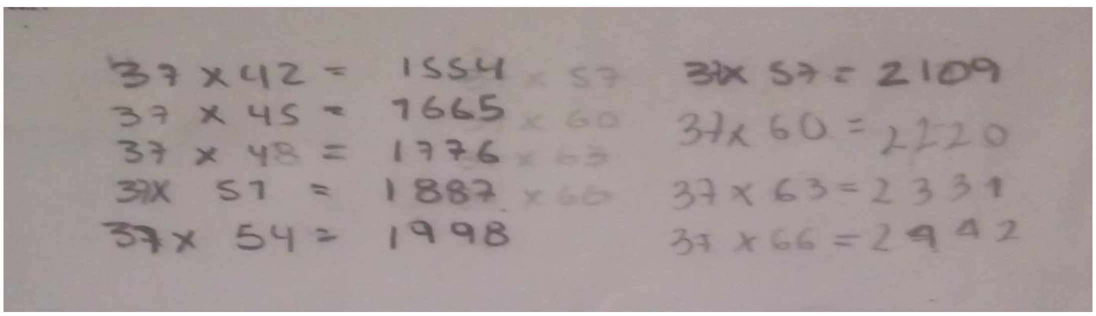


Figura 6. Planteamiento propuesto por un estudiante.

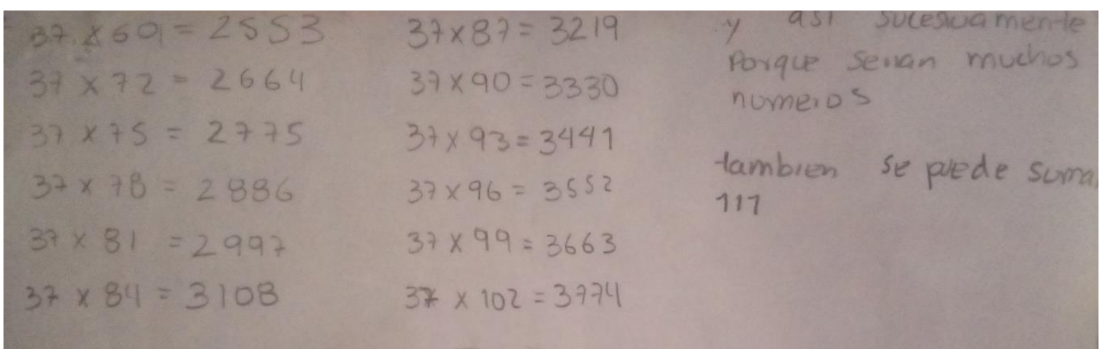


Figura 7. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Al evidenciar lo que sucedía las preguntas que surgieron fueron:

- ✓ ¿Por qué los resultados después de 27 cambian y no son los mismos números?

- ✓ ¿Qué pasa después de 999?
- ✓ ¿Se podrá hacer con otro número diferente a 3?
- ✓ ¿Esas sucesiones se pueden generar con el 37 únicamente?
- ✓ ¿Siempre tiene que ser multiplicación?
- ✓ Otro estudiante afirmó "Pues yo descifré que sumando 111 también da"

Para la segunda parte de esta situación se invirtió el número 37 por 73 y se multiplicaba por los múltiplos de 3. Las preguntas generadas por los estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ Observo que los resultados de alguna manera también cumplen con algún patrón, sin embargo no se repiten los números, ¿Por qué sucede esto?
- ✓ ¿Por qué sé invierte el 37?
- ✓ ¿Sólo se puede con el 37 y el 73?
- ✓ ¿Por qué se vuelve a usar múltiplos de 3?
- ✓ ¿Los patrones de los ejercicios funcionan con todos los múltiplos de 3 desde 3 hasta el infinito?
- ✓ ¿Este tipo de patrones sólo funcionan utilizando el 3 y sus múltiplos o se pueden usar otros números como 2 y sus múltiplos o 5 y sus múltiplos?

Para la situación 3 "El problema de los cuatro dígitos" los estudiantes realizaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Sólo se puede hacer con el número 2, no se podrá con otro número?
- ✓ ¿Se puede formar cualquier número utilizando 4 veces el mismo número?
- ✓ ¿Se podrá hacer lo mismo con números grandes?

Un estudiante intentó realizar el procedimiento usando el número 1 para representar algunos números:

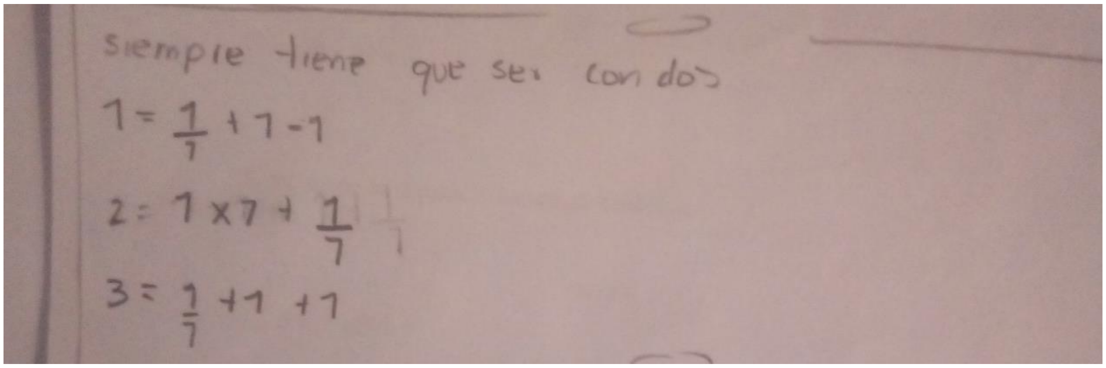


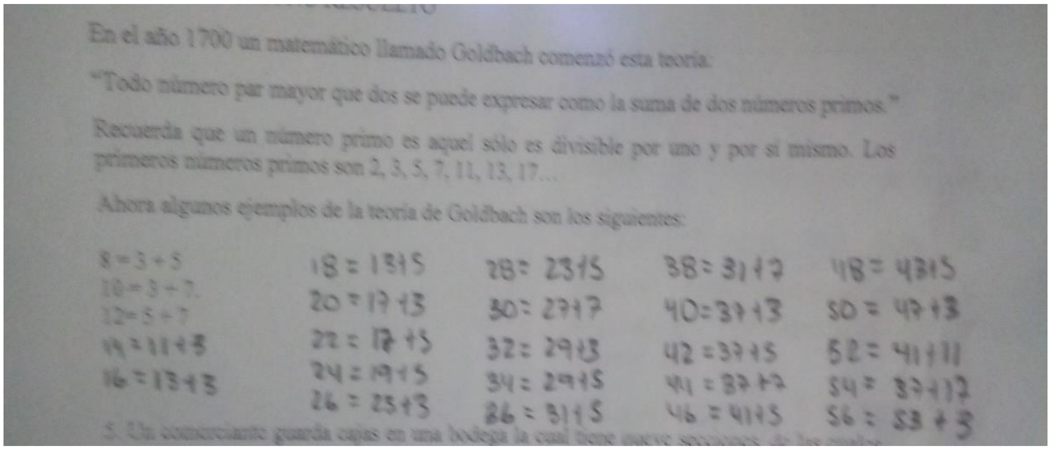
Figura 8. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Sin embargo su afirmación para números mayores a 4 fue "Creo que no es posible para los números mayores a 4 ya que sólo se pueden usar cuatro unos y no alcanzaría a realizarse".

Esta afirmación fue hecha por un estudiante de grado octavo que de alguna manera no está muy familiarizado con conceptos matemáticos como el factorial de un número que pueden servir para desarrollar algunos números.

Para la situación 4 las preguntas que surgieron fueron las siguientes:

- ✓ ¿Esta sucesión se puede hacer multiplicando o restando o dividiendo?
- ✓ ¿Este ejercicio sólo funciona sumando cierta cantidad de números impares, no funciona con pares por ejemplo?



En el año 1700 un matemático llamado Goldbach comenzó esta teoría:

"Todo número par mayor que dos se puede expresar como la suma de dos números primos."

Recuerda que un número primo es aquel sólo es divisible por uno y por sí mismo. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17…

Ahora algunos ejemplos de la teoría de Goldbach son los siguientes:

8 = 3 + 5
10 = 3 + 7
12 = 5 + 7
14 = 11 + 3
16 = 13 + 3

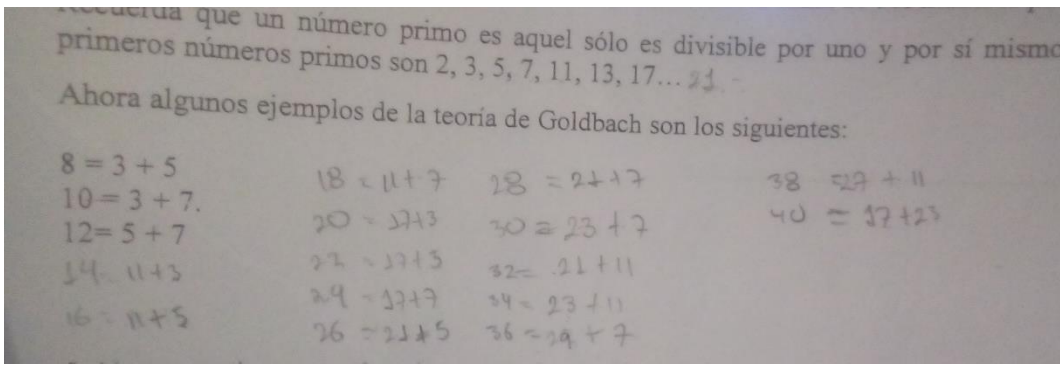
18 = 13 + 5
20 = 17 + 3
22 = 17 + 5
24 = 19 + 5
26 = 23 + 3

28 = 23 + 5
30 = 23 + 7
32 = 29 + 3
34 = 29 + 5
36 = 31 + 5

38 = 31 + 7
40 = 37 + 3
42 = 37 + 5
44 = 37 + 7
46 = 41 + 5

48 = 43 + 5
50 = 47 + 3
52 = 41 + 11
54 = 37 + 17
56 = 53 + 3

Figura 9. Planteamiento propuesto por un estudiante.



…cuerda que un número primo es aquel sólo es divisible por uno y por sí mism…
primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17… 23

Ahora algunos ejemplos de la teoría de Goldbach son los siguientes:

8 = 3 + 5
10 = 3 + 7.
12 = 5 + 7
14 = 11 + 3
16 = 11 + 5

18 = 11 + 7
20 = 17 + 3
22 = 17 + 5
24 = 17 + 7
26 = 21 + 5

28 = 21 + 7
30 = 23 + 7
32 = 21 + 11
34 = 23 + 11
36 = 29 + 7

38 = 27 + 11
40 = 17 + 23

Figura 10. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Para la situación 5 las preguntas realizadas por los estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ ¿Será que funcionará restando dos números primos para hallar un número par?
- ✓ ¿Se podría con números impares y que al sumarlos me dieran un primo?

Para la situación 6 las preguntas generadas fueron las siguientes:

- ✓ ¿El problema sólo sirve con números que sumen 16?
- ✓ ¿Las cajas se pueden acomodar más de una vez?
- ✓ ¿Si se cambiase el valor de la suma de las cajas aun así se podría realizar?
- ✓ ¿Las cajas necesariamente se deben mover de a 4 o se pueden sacar de a 2 o de a 8 cajas?

✓ ¿Se podrá hacer con números más grandes que 16?

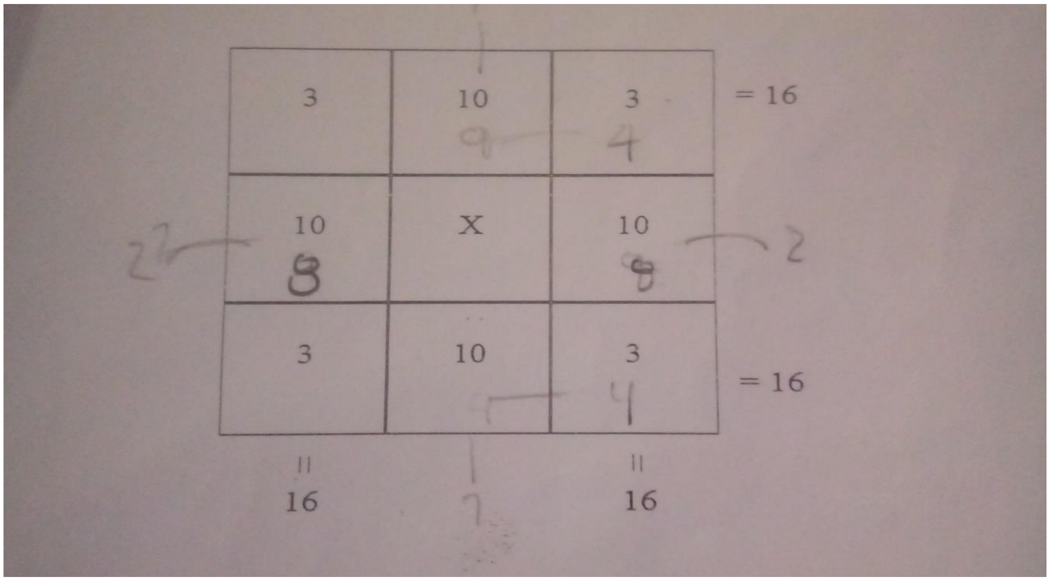


Figura 11. Planteamiento propuesto por un estudiante.

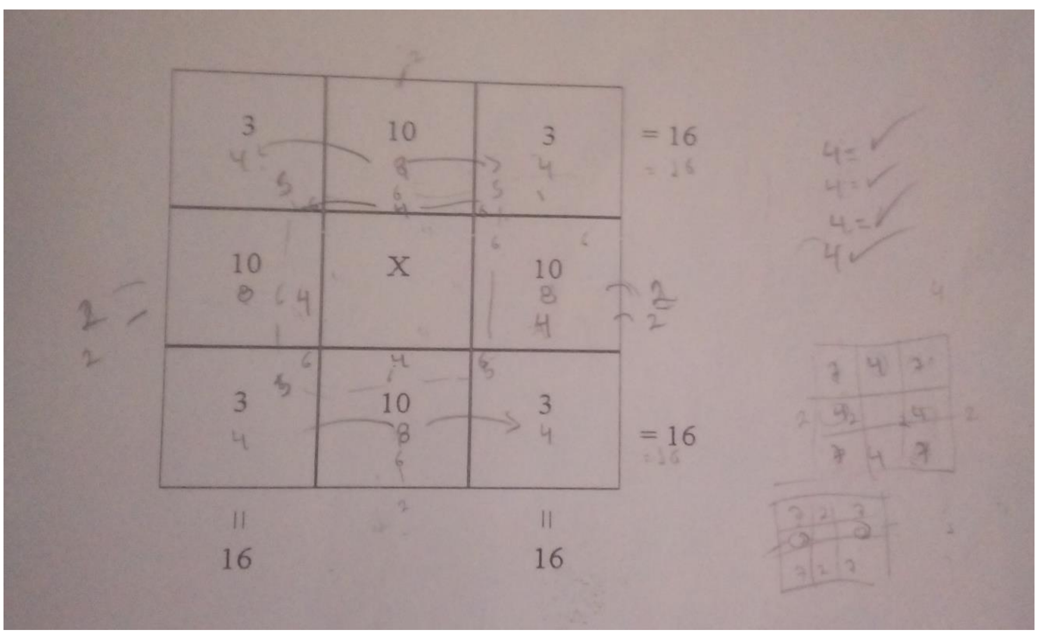


Figura 12. Planteamiento propuesto por un estudiante.

El proceso para responder a las preguntas que generaron los estudiantes se hizo trabajando en conjunto con ellos, formando debate y realizando las posibles soluciones a los planteamientos, sugerencias o procedimientos que expresaban los estudiantes.

Conceptos matemáticos involucrados: Suma, resta, multiplicación, división, factorial de un número, descomposición en factores primos, criterio de divisibilidad por 3.

Dificultades: Algunos estudiantes no trataron de continuar las sucesiones que se generaban, conjeturaban muy rápidamente lo que podía estar sucediendo.

Para la situación 1 no observaron qué sucedía con números pares o impares, no trabajaron con la suma de tres enteros consecutivos para observar lo que resultaba.

No buscaron una generalización que diera respuesta a *n* términos de los patrones establecidos.

Conclusiones: El uso de patrones estuvo en cierto modo condicionado por la manera con la que los estudiantes trabajaban, donde la tendencia generalizada fue utilizar el cálculo numérico. Esto de alguna manera permite explorar el patrón general que se cumple en las situaciones planteadas, sin embargo los estudiantes no llegaron a realizar precisamente estas generalizaciones o a preguntar si era posible llegar a una.

Desarrollo de la actividad 3: uso de las matemáticas en la vida diaria.

Actividad 3: Uso de las matemáticas en la vida diaria.

Objetivo: Observar la importancia del uso de las matemáticas en la vida diaria.

Grupos a los cuales se aplicó: Grado sexto, grado octavo y grado once.

Descripción de la actividad: La tercera actividad se desarrolló con 34 estudiantes de grado sexto, 42 estudiantes de grado octavo y 20 estudiantes de grado once.

Se hace entrega de una situación que sirve a manera de ejemplo del uso de las matemáticas en la vida diaria, específicamente en la labor desempeñada por un padre de familia.

Lo que se pretendió con esta actividad es que los estudiantes compartieran con sus compañeros de aula el uso y la importancia que tienen las matemáticas en las diferentes labores que tienen ya sean sus padres o familiares con los que viven y a partir de esto generar preguntas por los mismos compañeros para especificar cómo las matemáticas se llevan a cabo en cada uno de los trabajos desempeñados en sus familia.

Preguntas generadas por los estudiantes: Algunos estudiantes compartieron con los demás las experiencias diarias de los trabajos de sus padres o familiares y el uso de las matemáticas en dicha labor.

Las preguntas que surgieron específicamente se centraron en el uso de las matemáticas de la labor de sus padres o familiares.

Así por ejemplo un estudiante relató el trabajo de su papá el cual trabaja en el Congreso de la República, donde registra el reporte del personal que llaman para verificar su ubicación, al después debe de entregar al final de su jornada cuántos llamaron a reportarse y cuántos no.

Una pregunta que surgió fue ¿Qué importancia tiene la matemática en la labor de tu papá?

A lo que el estudiante respondió que a la cantidad de todo el personal de la policía adscrito al Congreso le resta la cantidad de los que se reportaron y así reportar la cantidad de los que faltaron o no se reportaron.

Otra pregunta que surgió fue ¿de qué manera se reporta el personal?

El estudiante respondió que se realiza el ingreso por medio de tecnología Avantel (registro en el sistema de identificación de cada usuario) y realiza el conteo de cada usuario que se reporta.

Otro ejemplo bastante interesante que hubo, fue hecho por un estudiante el cual comentaba que el papá trabajaba en la aeronáutica de la policía, donde calibra los visores de los pilotos de los jets con la ayuda de un medidor de presión (manómetro) que se usa manualmente. El manómetro va graduando el valor que tiene la presión del casco del piloto dependiendo del ambiente si está por encima o por debajo de los niveles permitidos. Este proceso se realiza para evitar accidentes en cuanto a la respiración del piloto se refiere.

Los estudiantes realizaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿De qué manera funciona un medidor de presión?
- ✓ ¿Cuáles son las unidades que se manejan en la presión de cada casco para quedar calibrado?
- ✓ ¿Cómo se lleva a cabo la medida de los niveles del ambiente para que el casco del piloto sea calibrado de una manera adecuada?
- ✓ ¿Existe algún valor proporcional entre los niveles que presentan el ambiente y la calibración del casco? Es decir, por ejemplo a mayor presión del ambiente, menor la presión del casco, o a menor presión del ambiente mayor la presión del casco.

Otro caso interesante fue comentado por una estudiante que relataba que su padrino se dedicaba a la venta y compra de animales porcinos, según ella relataba el padrino vendía este tipo de ganado dependiendo de algunos factores, aparte de esto, él realizaba dentro de la venta una adquisición de cerdos críos, que servían para engorde y nuevamente se comenzaba el ciclo para la nueva venta.

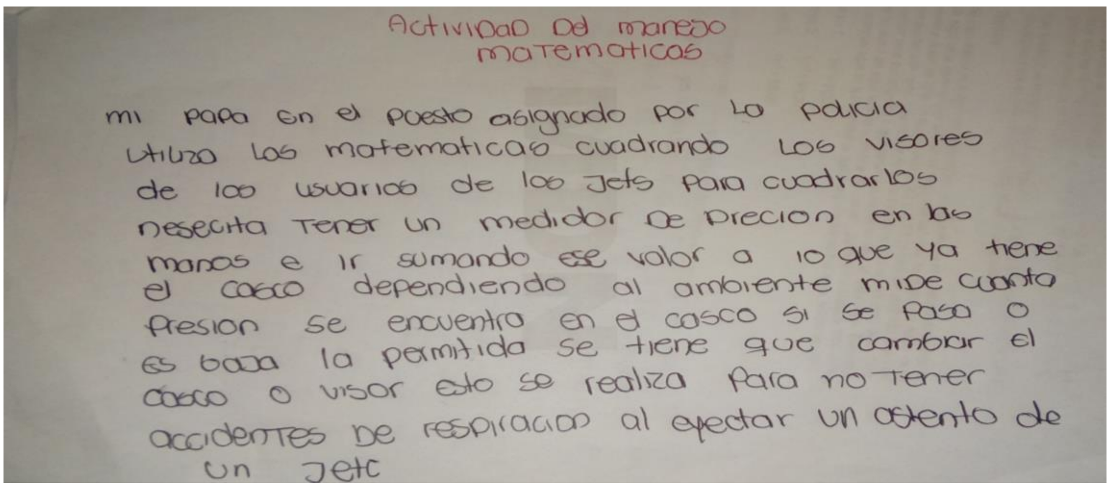
Las preguntas que surgieron por parte de los compañeros de clase fueron:

- ✓ ¿Cuáles son los factores que inciden el precio en el momento de vender los porcinos?
- ✓ ¿Cómo se maneja el precio de venta de los porcinos, es decir, se hace por precio unitario de cada animal o por grupo de los mismos?

- ✓ ¿Qué porcentaje de la venta total tienen los cerdos críos que recibe como parte de pago su padrino?

Cada una de las preguntas realizadas por los estudiantes fue siendo aclarada por el compañero que estaba compartiendo la experiencia, igualmente por parte del docente hubo aclaraciones sobre los conceptos matemáticos que se presentaron en la descripción hecha por el alumno.

A continuación se comparten algunas de las labores de los padres descritas por los estudiantes.


Actividad del manejo
matematicas

mi papa en el puesto asignado por la policia utiliza las matematicas cuadrando los visores de los usuarios de los Jets para cuadrarlos nesecita Tener un medidor De precion en las manos e ir sumando ese valor a lo que ya tiene el casco dependiendo al ambiente mide cuanto presion se encuentra en el casco si se paso o es baja la permitida se tiene que cambiar el casco o visor esto se realiza para no Tener accidentes De respiracion al ejectar un asiento de un Jetc

Figura 13. Escrito de un estudiante sobre la labor desempeñada por su padre.

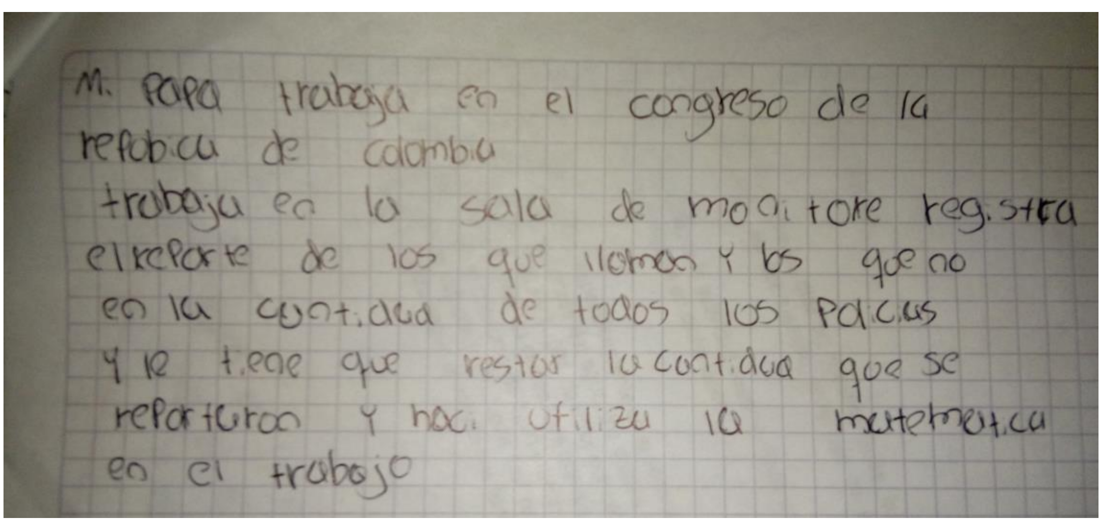

Mi papa trabaja en el congreso de la repoblica de colombia
trabaja en la sala de monitore registra el reporte de los que llaman y los que no en la cantidad de todos los palcus y le tiene que restar la cantidad que se reportaron y haci utiliza la matematica en el trabajo

Figura 14. Escrito de un estudiante sobre la labor desempeñada por su padre.

Conceptos matemáticos involucrados: Proporción, unidades de medida, porcentaje, ingresos, gastos.

Dificultades: Los estudiantes de grado once son más tímidos en el momento de compartir junto con sus compañeros la labor que realizan sus padres y la manera en que se usan las matemáticas.

Conclusiones: La experiencia fue bastante interesante puesto que son diferentes las labores que desempeñan los familiares de los estudiantes y al compartirlas la curiosidad y preguntas fueron surgiendo a medida que se contaba el uso de las matemáticas en los trabajos de cada uno de ellos.

Desarrollo de la actividad 4: Situaciones problema.

Objetivo: Potencializar en los estudiantes las preguntas que le puedan surgir ante una situación matemática planteada.

Grupos a los cuales se aplicó: Grado sexto, grado octavo y grado once.

Descripción de la actividad: La cuarta actividad se desarrolló por grupos de trabajo, formados por 4 estudiantes y a los cuales se les hizo entrega de una situación problema en la cual no se especifica lo que se debe resolver, la tarea de cada grupo de trabajo fue leer el enunciado del problema que les correspondió y con base en eso generar la pregunta o preguntas que servirán para poder solucionar el problema por parte del grupo contendor que tuvo la tarea de resolver el problema según la pregunta lo requería. Sin embargo, el grupo al que le correspondió solucionar el problema tuvo la oportunidad de refutar la pregunta hecha por el otro grupo si llegó a determinar que con los datos que se enunciaban no eran suficientes o adecuados para llegar a resolver la situación problema con la pregunta establecida.

Preguntas generadas por los estudiantes: Se exigió a cada grupo que solucionara el problema a partir de la pregunta que había planteado Las preguntas que surgieron en esta actividad fueron muy variadas y acordes a lo que se requería en los diferentes enunciados de los problemas.

Para la situación problema 1 los estudiantes las únicas dos preguntas que les surgieron fueron:

- ✓ ¿Cuándo terminará de leer el libro?
- ✓ ¿En qué día terminará de leer el libro?

La solución por parte de los grupos no tuvo mayor dificultad, no hubo mayor debate en cuanto a las preguntas generadas entre los grupos adversarios.

Para la situación problema 2, las preguntas que surgieron fueron:

- ✓ ¿Cuántos duendes amarillos hay?
- ✓ ¿Cuántos duendes verdes hay?
- ✓ ¿Cuántos duendes morados hay?

Esta situación fue una de las que más costó dificultad en el momento de solucionarla. Los estudiantes argumentaban que los datos suministrados no eran suficientes para solucionar las preguntas planteadas por el grupo contendor.

Sin embargo uno de los grupos planteó una posible solución que es bastante llamativa.

“Lo que concluimos es que como los amarillos eligieron mentir y decir la verdad y los morados siempre dicen la mentira, entonces ningún morado está en su verdadera fila y para nosotros lo más lógico es que los que dijeron que si eran morados en verdad son amarillos, entonces para nosotros son: 8 duendes amarillos.”

Para la situación problema 3 la pregunta generada fue:

- ✓ ¿Qué edad tiene cada uno de los estudiantes?

Para la situación problema 4 las preguntas generadas fueron:

- ✓ ¿Qué palabras se forman con los signos?
- ✓ ¿Qué simbología tiene cada letra?
- ✓ ¿Cuántas palabras se pueden formar con tres signos?
- ✓ ¿Y con cuatro signos?

Para la situación problema 5 las preguntas generadas fueron:

- ✓ ¿Quién llegó primero?
- ✓ ¿Cada deportista en qué posición va?

Para la situación problema 6 las preguntas generadas fueron:

- ✓ ¿Cuántos 'me gusta' hay por cada mes?
- ✓ ¿Cuál mes obtuvo más 'me gusta'?
- ✓ ¿Cuántos 'me gusta hubo' en los 8 meses?

Para la situación problema 7 las preguntas generadas fueron:

- ✓ ¿Cuál sería el siguiente color de la sucesión?
- ✓ ¿Cuántos colores se utilizan en cada sucesión?
- ✓ ¿Cómo se crea la sucesión?

Para la situación problema 8 la pregunta generada fue:

- ✓ ¿Si al tercer día resolvió 20 ejercicios, cuántos resolverá en cinco días?
- ✓ ¿Y en seis días, cuántos resolverá?
- ✓ ¿Y en siete días?
- ✓ ¿Y en ocho?

Para la situación problema 9 la pregunta generada fue:

- ✓ Si octavo A da $10000 ¿Cuánto dio octavo C?

Para la situación problema 10 fueron:

- ✓ ¿Cuántos niños entraron?
- ✓ ¿Cuántos adultos entraron?

Para la situación problema 11 la pregunta generada fue:

- ✓ ¿Cuánto peso extra gana después de 12 años en diciembre?

- ✓ ¿Y en 20 años?

Conceptos matemáticos involucrados: Multiplicación, suma, resta, identidades algebraicas, sucesiones numéricas.

Conclusiones: Los estudiantes estuvieron muy motivados en el momento de proponer la pregunta o preguntas que les surgieron para resolver el problema que se les había asignado y más aún cuando el problema fuera resuelto por un grupo contendor generó más espíritu de competitividad lo que llevaba a que las preguntas que realizaran no fueran tan fáciles de solucionar para la situación problema planteada.

Desarrollo de la actividad 5: Situaciones con ambiente gráfico.

Objetivo: Generar en los estudiantes preguntas o conjeturas a partir de situaciones o problemas con ambiente gráfico.

Grupos a los cuales se aplicó: Grado sexto, grado octavo y grado once.

Descripción de la actividad: La quinta actividad se desarrolló con 10 estudiantes de grado sexto, 10 de grado octavo y 10 de grado once.

A cada estudiante se le hizo entrega de una guía donde se presentan situaciones visuales asociadas a sucesiones numéricas por medio de las cuales se propone un acercamiento aritmético y visual, con la intención de promover procesos de visualización matemática, que a su vez, construyen estructuras cognitivas sobre el control que ejercen los alumnos en la resolución de una tarea matemática basados en las preguntas que emergen de manera natural por parte de ellos.

Preguntas generadas por los estudiantes:

Para las dos primeras situaciones los estudiantes realizaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿La siguiente figura cuántos puntos tendrá? o ¿La siguiente figura cuántos cuadrados tendrá?

- ✓ ¿Qué operación podemos realizar para obtener el resultado?

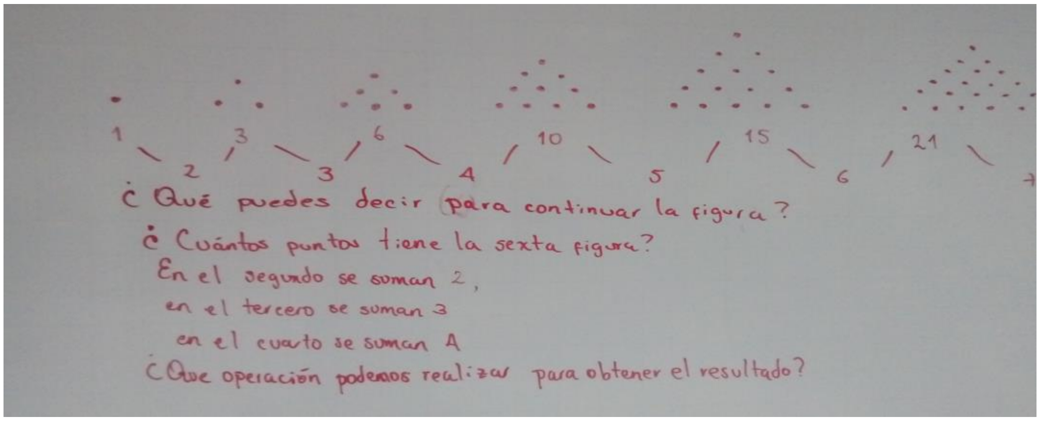


Figura 15. Sucesión planteada por un estudiante.

Figura 16. Sucesión gráfica planteada por un estudiante.

Para la cuarta situación planteada los estudiantes plantearon lo siguiente:

- ✓ Yo observo que los cuadrados de color negro se multiplican por 4 cada dos figuras. Sin embargo la del color azul no funciona de la misma manera.
- ✓ ¿Existirá algún método para hacerlo?

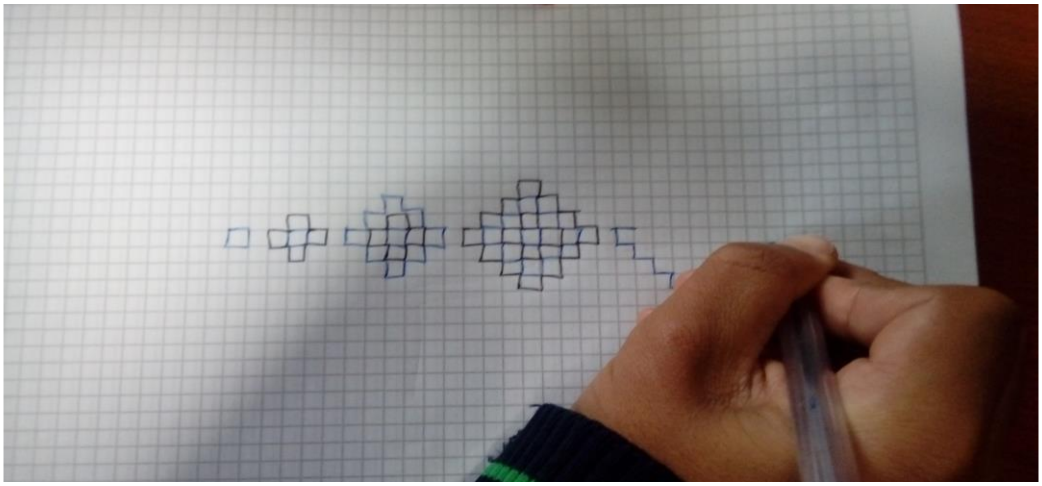


Figura 17. Sucesión gráfica planteada por un estudiante.

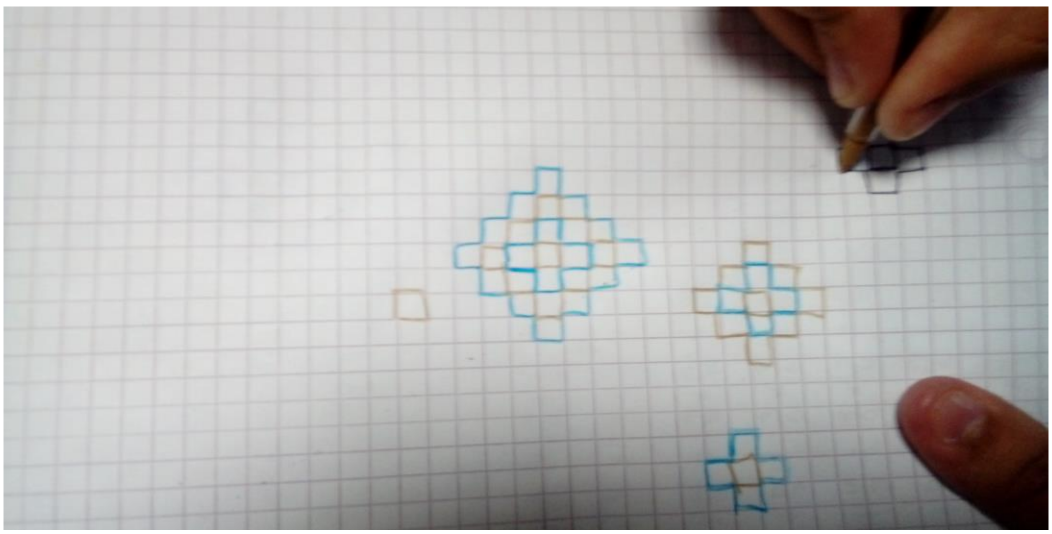


Figura 18. Sucesión gráfica planteada por un estudiante.

Para la situación del cuadrado al cuadrado, los estudiantes generaron las siguientes preguntas:

¿Si usara otros valores y dividiera en más cantidad de cuadrados la figura original?

¿Se podrá usar otra figura geométrica que no sea un cuadrado, por ejemplo usar triángulos?

El problema de las baldosas los estudiantes propusieron lo siguiente:

- ✓ ¿Si para 5 baldosas blancas necesito 16 baldosas negras a su alrededor, cuántas baldosas negras se usarán para 6 baldosas blancas?
- ✓ Yo pienso armar dos filas o tres filas de baldosas blancas, ¿Cuántas baldosas negras tendría que colocar alrededor?
- ✓ ¿Es necesario que sea un rectángulo, no puedo usar baldosas que formen un cuadrado por ejemplo?

Conceptos matemáticos involucrados: Multiplicación, área, relaciones numéricas, variación.

Dificultades: más que una dificultad es una tendencia que se presenta por parte de los estudiantes en la situaciones gráficas que se les presentó, la mayor parte de ellos trabajaron previamente en el sistema de representación numérico antes de llegar a una generalización.

Los estudiantes en su gran mayoría están acostumbrados a responder a una indicación ya sea escrita o por parte del docente y les cuesta generar preguntas a partir de una situación planteada en las que las indicaciones las sugieren ellos mismos.

Conclusiones: La actividad fue bastante llamativa para los estudiantes debido al ambiente gráfico que se presentaba en las situaciones establecidas.

En cada una de las sucesiones graficaban las siguientes posiciones y generaba mayor motivación el estar de alguna manera dibujando y descubriendo por medio de la visualización cómo funciona la sucesión numérica involucrada en cada situación.

Los estudiantes generalizaron de manera oral o por escrito las situaciones presentadas, cobrando mayor importancia a otras formas de generalizar como la algebraica.

Desarrollo de la actividad 6: Detective matemático.

Objetivo: Resolver situaciones o problemas matemáticos, cumpliendo la labor de un detective, reuniendo todas las evidencias (datos) para que los alumnos las puedan usar y poder resolver el caso asignado.

Grupos a los cuales se aplicó: Grado sexto, grado octavo y grado once.

Descripción de la actividad: la actividad se realizó con 30 estudiantes de cada grado, formando grupos de 3 detectives que resolverían la situación que se les plantea. La tarea de los detectives era realizar la pregunta de investigación la cual será la que serviría para solucionar el caso. También escribieron las pistas que ayudaron a aclarar el caso, generando una hipótesis con las pistas que obtuvieron y finalmente realizaron la comprobación del caso.

Después de resuelto el caso, cada grupo compartió con los demás compañeros cómo solucionó el caso y plantear uno nuevo de manera similar al que ya habían resuelto.

Preguntas generadas por los estudiantes: las preguntas hechas por cada grupo de trabajo estuvieron muy interesantes y acordes al enunciado planteado.

Para la situación:

"De noche, el Palacio del Rey Arturo era custodiado por tres guardianes situados en distintos puntos del recinto. Un día, el ladrón apodado "Kinki" consiguió entrar y robar una gran bolsa de cerezas.

Al intentar salir de Palacio, "Kinki" fue interceptado por uno de los guardianes. Este le detuvo y cogió la mitad de las cerezas y cuatro más. "Kinki" Consiguió huir y tropezó con el segundo guardián, que le quitó la mitad de las cerezas que le quedaban y cuatro más. Al final tropezó con el tercer y último guardián que actuó de igual forma que los otros dos: le quitó la mitad de las cerezas y cuatro más. Si al final "Kinki" se quedó con una sola cereza", los estudiantes generaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántas cerezas robó Kinki al principio?
- ✓ ¿Cuántas cerezas le quitó cada guardia?
- ✓ ¿Si Kinki quedó con una sola cereza, cuántas le quitaron los guardias en total?

Para la situación:

“Una escalera tiene 100 escalones. Una paloma se posó en el primer escalón, dos en el segundo, 3 en el tercero, 4 en el cuarto, 5 en el quinto y así sucesivamente hasta el escalón 100” los estudiantes generaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántas palomas se hicieron en total en los escalones?
- ✓ ¿Cuántas palomas hay hasta el escalón 50?
- ✓ ¿si por ejemplo fueran más escalones, por ejemplo 200, cuántas palomas habrían en total?

Para la situación:

“Daniela se compra un pantalón, un suéter y un abrigo.

Cuando va a pagar los tres productos, la vendedora le da los siguientes datos:

"El pantalón y el suéter cuestan $55000, el pantalón y el abrigo cuestan $112000, y el suéter y el abrigo cuestan $91000."

En esta situación sucedió algo particular, los estudiantes de los diferentes grados con los que se aplicó la actividad plantearon preguntas similares, sin embargo la diferencia se evidenció en la manera en la que resolvieron la situación. Los estudiantes de grado sexto intentaron resolverlo por ensayo y error, es decir, iban cambiando los precios de alguno de los productos hasta que coincidieran con las sumas de las prendas que se habían establecido. Los estudiantes de octavo, intentaron resolverlo usando álgebra usando variables para ello, pero no hallaron una solución de esa manera, por lo tanto terminaron resolviéndolo de la misma manera que el grado sexto. Los estudiantes de grado once por su parte si aplicaron la solución de la situación con un sistema de ecuaciones.

Para la situación:

“El 05 de diciembre se hará entrega de los diplomas a la promoción de grado 11 del Colegio Elisa Borrero de Pastrana.

Los organizadores del acto pensaron que, para acabar más pronto, los alumnos deberían subir al escenario en grupos.

Pero al tratar de agruparlos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis, vieron que en todos los casos sobraba un alumno.

Sin embargo, agrupándolos de siete en siete, todos los grupos quedaban igual, con lo que el acto se va a llevar a cabo de esta forma” los estudiantes formularon las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántos alumnos hay en total?
- ✓ ¿Cuántos grupos son en total?

Para la situación:

“Un encuestador pregunta a una mujer cuántos hijos tiene. Ella le contesta que tiene 3 hijos. ¿Y de qué edades? —vuelve a preguntar el encuestador—. La mujer responde: ‘El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de la casa vecina’. El encuestador se retira, pero un instante después regresa y le dice que los datos no son suficientes para saber las edades de los hijos. La mujer piensa un momento y disculpándose le dice: ‘Tiene razón, la mayor estudia piano’. ‘¡Gracias señora!’, responde muy satisfecho el encuestador. ‘Con ese dato, ya sé las edades de sus hijos’, los estudiantes realizaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántos años tiene cada hijo?
- ✓ ¿Cuál es el número de la casa de la vecina?
- ✓ ¿Qué tiene que ver el piano ahí?

Para la situación:

"Un excursionista fue de prácticas a un laboratorio en plena montaña, por curiosidad en la entrada del laboratorio movió una palanca marcada con un símbolo de una calavera sin sospechar lo que le esperaba. ¡Sí! Una horda de zombies había despertado al interior del laboratorio. De alguna manera el excursionista se siente culpable y avisa a las personas que están en el laboratorio y así huir pronto de ahí antes de ser devorados por los zombies. Aparte del excursionista está el portero del laboratorio, el viejo profesor y su asistente. Para poder escapar rápido de los zombies deben de atravesar un puente de cuerdas que está por encima de un abismo inmenso. Ahora bien, el puente sólo se puede cruzar de a dos personas, de lo contrario se caería.

Según los cálculos del profesor, los zombies los alcanzarán en poco más de 17 minutos, por lo que tienen sólo ese tiempo para llegar al otro lado y cortar las cuerdas.

Dicho lo anterior, El excursionista dura un minuto para cruzar el puente, la asistente cruzará en 2 minutos, el portero es un poco más lento y necesitará 5 minutos y el profesor tardará 10 minutos en cruzar el puente.

Para empeorar las cosas, está oscureciendo y el camino es poco visible por lo que tienen que prender una linterna la cual alumbra solo a dos personas", los estudiantes realizaron las siguientes preguntas:

- ✓ ¿De qué manera pueden cruzar todas las personas el puente llegando en 17 minutos?
- ✓ ¿Si es posible que logren cruzar todos el puente antes de que lleguen los zombies?

Para la situación:

EL MISTERIOSO CASO DEL RASTRO DEL DINERO

El mundialmente famoso falsificador apodado 'pies ligeros' está gastando dinero falso por toda la ciudad.

El rastro misterioso del dinero comenzó en la mañana, cuando la dueña del Restaurante donde desayunó 'pies ligeros' había pagado con un billete falso. Sin embargo al llegar la policía al lugar, 'pies ligeros' ya se encontraba en la calle 67, tres cuadras más delante de donde se encontraba el Restaurante.

No pasó mucho tiempo antes de que se recibiera otra llamada a la policía informando de dinero falso. Esta vez fue de una tienda de sombreros, sin embargo al llegar la policía 'pies ligeros' ya había huido y se encontraba en la calle 53, para ser más preciso había caminado una cuadra más que el robo anterior.

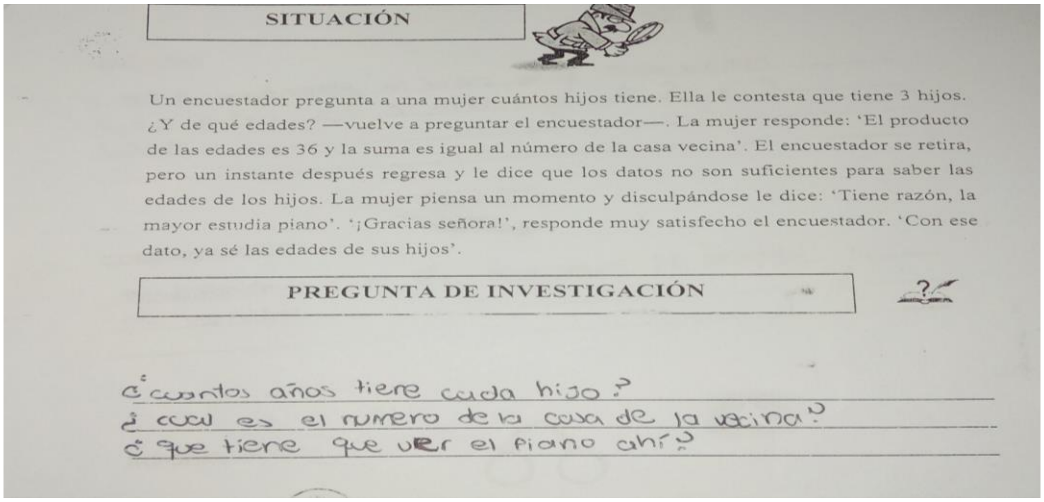
Momentos después otra llamada ¡pies ligeros acaba de irse de acá! Gritaba por teléfono la persona a la que había engañado con dinero falso. Pero igual esta vez la policía llegó tarde al lugar y 'pies ligeros' ya estaba en la calle 30, había recorrido una cuadra más esta vez que el robo anterior.

"La policía se encuentra perpleja"

Los estudiantes formularon las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Dónde va a atacar próximamente pies ligeros?
- ✓ ¿En dónde van a atraparlo?
- ✓ ¿Pies ligeros tendrá algún patrón para pagar con los billetes falsos?

A continuación se presentan algunas evidencias de las preguntas formuladas por los estudiantes en la actividad.



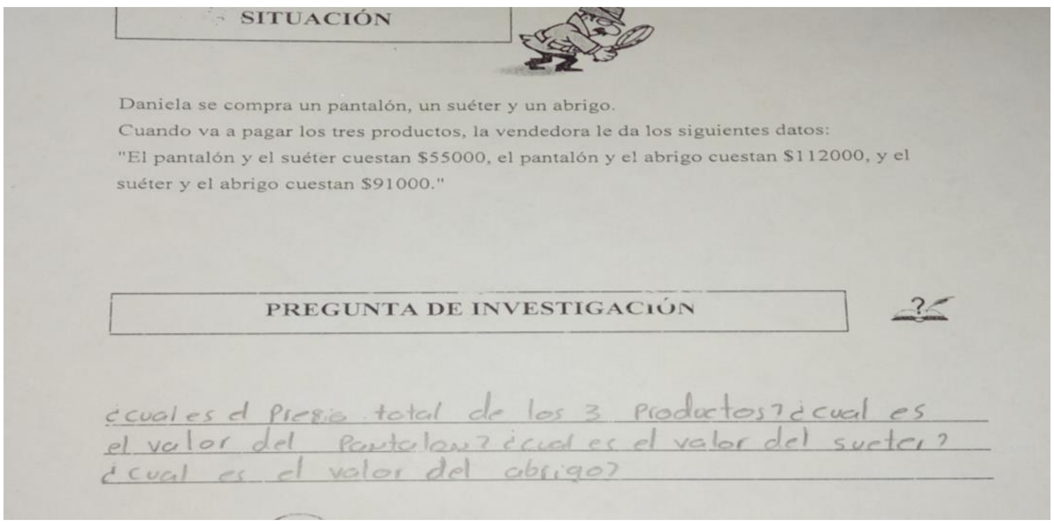
SITUACIÓN

Un encuestador pregunta a una mujer cuántos hijos tiene. Ella le contesta que tiene 3 hijos. ¿Y de qué edades? —vuelve a preguntar el encuestador—. La mujer responde: 'El producto de las edades es 36 y la suma es igual al número de la casa vecina'. El encuestador se retira, pero un instante después regresa y le dice que los datos no son suficientes para saber las edades de los hijos. La mujer piensa un momento y disculpándose le dice: 'Tiene razón, la mayor estudia piano'. '¡Gracias señora!', responde muy satisfecho el encuestador. 'Con ese dato, ya sé las edades de sus hijos'.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿cuantos años tiene cada hijo?
¿cual es el numero de la casa de la vecina?
¿que tiene que ver el piano ahí?

Figura 19. Preguntas generadas por un grupo de estudiantes.



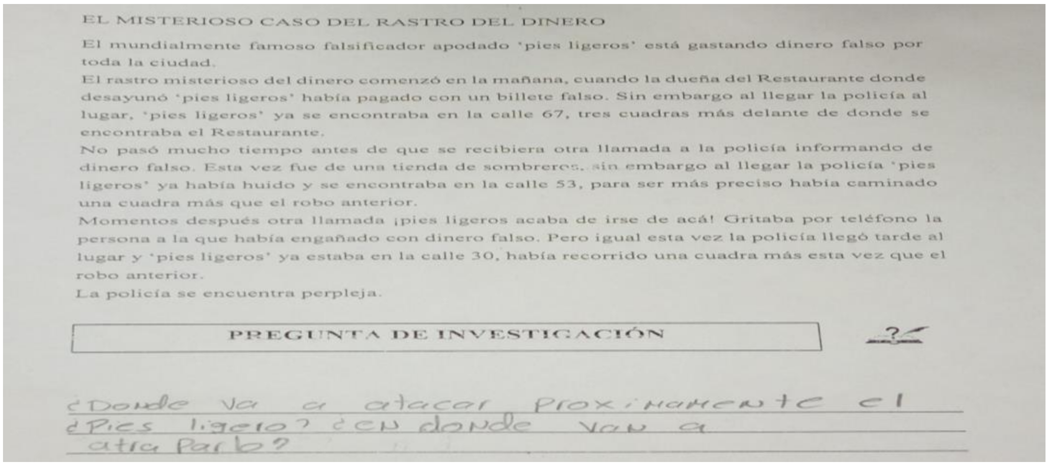
SITUACIÓN

Daniela se compra un pantalón, un suéter y un abrigo.
Cuando va a pagar los tres productos, la vendedora le da los siguientes datos:
"El pantalón y el suéter cuestan $55000, el pantalón y el abrigo cuestan $112000, y el suéter y el abrigo cuestan $91000."

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿cual es el Presio total de los 3 productos? ¿cual es el valor del Pantalon? ¿cual es el valor del sueter? ¿cual es el valor del abrigo?

Figura 20. Preguntas generadas por un grupo de estudiantes.



EL MISTERIOSO CASO DEL RASTRO DEL DINERO

El mundialmente famoso falsificador apodado 'pies ligeros' está gastando dinero falso por toda la ciudad.

El rastro misterioso del dinero comenzó en la mañana, cuando la dueña del Restaurante donde desayunó 'pies ligeros' había pagado con un billete falso. Sin embargo al llegar la policía al lugar, 'pies ligeros' ya se encontraba en la calle 67, tres cuadras más delante de donde se encontraba el Restaurante.

No pasó mucho tiempo antes de que se recibiera otra llamada a la policía informando de dinero falso. Esta vez fue de una tienda de sombreros, sin embargo al llegar la policía 'pies ligeros' ya había huido y se encontraba en la calle 53, para ser más preciso había caminado una cuadra más que el robo anterior.

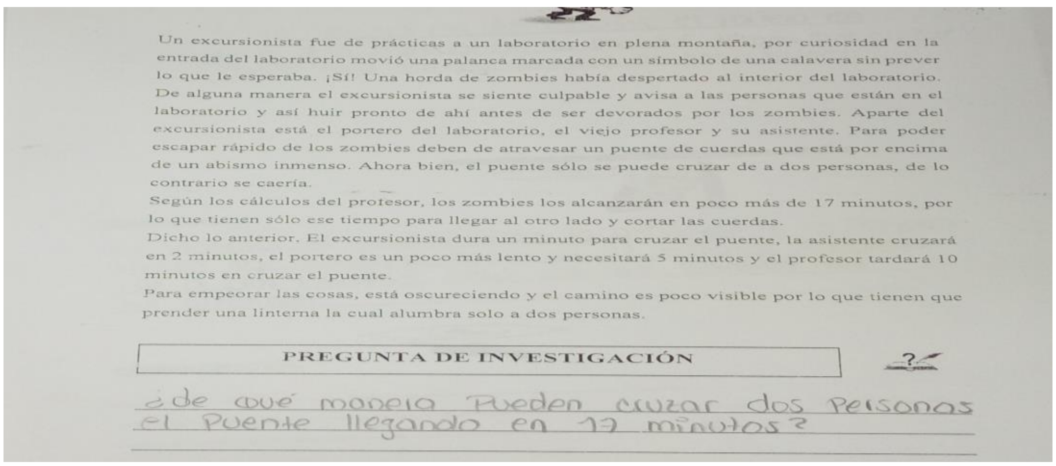
Momentos después otra llamada ¡pies ligeros acaba de irse de acá! Gritaba por teléfono la persona a la que había engañado con dinero falso. Pero igual esta vez la policía llegó tarde al lugar y 'pies ligeros' ya estaba en la calle 30, había recorrido una cuadra más esta vez que el robo anterior.

La policía se encuentra perpleja.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Donde va a atacar Proximamente el ¿Pies ligero? ¿en donde van a atraparlo?

Figura 20. Preguntas generadas por un grupo de estudiantes.



Un excursionista fue de prácticas a un laboratorio en plena montaña, por curiosidad en la entrada del laboratorio movió una palanca marcada con un símbolo de una calavera sin prever lo que le esperaba. ¡Sí! Una horda de zombies había despertado al interior del laboratorio. De alguna manera el excursionista se siente culpable y avisa a las personas que están en el laboratorio y así huir pronto de ahí antes de ser devorados por los zombies. Aparte del excursionista está el portero del laboratorio, el viejo profesor y su asistente. Para poder escapar rápido de los zombies deben de atravesar un puente de cuerdas que está por encima de un abismo inmenso. Ahora bien, el puente sólo se puede cruzar de a dos personas, de lo contrario se caería.

Según los cálculos del profesor, los zombies los alcanzarán en poco más de 17 minutos, por lo que tienen sólo ese tiempo para llegar al otro lado y cortar las cuerdas.

Dicho lo anterior. El excursionista dura un minuto para cruzar el puente, la asistente cruzará en 2 minutos, el portero es un poco más lento y necesitará 5 minutos y el profesor tardará 10 minutos en cruzar el puente.

Para empeorar las cosas, está oscureciendo y el camino es poco visible por lo que tienen que prender una linterna la cual alumbra solo a dos personas.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿de qué manera Pueden cruzar dos Personas el Puente llegando en 17 minutos?

Figura 21. Preguntas generadas por un grupo de estudiantes.

Conceptos matemáticos involucrados: Fracciones, descomposición en factores primos, valores desconocidos, múltiplos de un número, números cuadrados.

Dificultades: Generar un caso o situación que tuviera matemática involucrada.

Conclusiones: La actividad fue muy motivante para los estudiantes, generaron sin mayor dificultad la pregunta de investigación que de alguna manera era la que se buscaba al planteamiento de la situación.

La manera en la que se presentó la actividad fue más enriquecedora y llamativa para los alumnos, porque cumplían el rol de detectives recolectando pistas, generando la pregunta de investigación, generando hipótesis y realizando una comprobación y validación de la situación asignada a cada grupo de estudiantes.

La resolución de problemas tuvo un aprendizaje más significativo para los estudiantes, puesto que no se resolvió de la manera tradicional, sino de una manera en la que se pudiera contextualizar en la vida real.

Conclusiones del Capítulo 4

Los resultados de las actividades son analizadas teniendo en cuenta la forma como fueron desarrolladas, la motivación por el aprendizaje, los logros obtenidos y las dificultades presentadas.

Las actividades propuestas fueron de gran importancia para el trabajo que se estaba realizando.

Los estudiantes se encontraron muy motivados y atentos durante el desarrollo de las situaciones que se plantearon.

La curiosidad estuvo presente en todo momento, con estudiantes que formularon preguntas de manera natural, también se generó competencia y debate, cuando las actividades así lo requerían.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre las preguntas que generan los estudiantes ante una situación referente a aritmética de los grados sexto, octavo y once del Colegio Elisa Borrero de Pastrana, se desarrolló según lo previsto y se puede afirmar que el objetivo inicialmente planteado fue alcanzado.

En este trabajo se plantearon previamente las siguientes tareas de investigación:

1. Determinar la investigaciones que se han realizado sobre la importancia de la preguntas en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan con el desarrollo de la curiosidad natural en matemáticas.
2. Investigar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan con el desarrollo de la curiosidad natural en matemáticas.
3. Estimular a los estudiantes a realizar las preguntas que de manera natural les vaya surgiendo frente a situaciones matemáticas referentes a aritmética.
4. Implementar estrategias de aprendizaje a partir de las preguntas generadas por los estudiantes en situaciones referentes a aritmética.
5. Determinar la naturaleza (o el tipo, o las características) de las preguntas que de modo natural surgen en los estudiantes cuando en el marco de la resolución de problemas se plantean diversas situaciones que incluyen contenidos aritméticos.

En relación con la primera tarea se observó que existen muy pocas investigaciones que directamente aborden esta temática.

Los trabajos encontrados se orientan fundamentalmente a describir y analizar la importancia que tiene la curiosidad en el aprendizaje de los niños, algunas realizan ciertas consideraciones que se deben de tener en cuenta para atraer la atención de los estudiantes en el momento de presentarles una temática de estudio.

Dentro de las insuficiencias encontradas se evidencia que son escasos los trabajos que propicien en el aula de clase la curiosidad de una manera lúdica y en la que el centro del aprendizaje sea el estudiante.

Para la segunda tarea de investigación en relación a los fundamentos teóricos, se asumió para el desarrollo de esta investigación la teoría de la resolución de problemas, el aprendizaje por descubrimiento, los fundamentos de la visualización y la Teoría de la Comunidad de Práctica de Wenger. Todas las actividades se diseñaron basadas en estos fundamentos.

En relación con la tercera tarea, las estrategias fueron elaboradas a partir de lo lúdico, apoyado en el ambiente familiar, fomentando la competencia, estableciendo retos, promoviendo el trabajo en grupo.

En la parte lúdica se presentaron situaciones con magia matemática que despertaron gran curiosidad en los estudiantes, preguntando inicialmente cómo se hacían los diferentes trucos, y más motivante era para ellos cuando cada truco funcionaba cada vez que se realizaba con un alumno diferente. Esto generó gran expectativa y curiosidad, llevando a los estudiantes a descubrir el procedimiento matemático involucrado en los trucos.

En la estrategia apoyada en el ambiente familiar, se evidenció un gran interés y curiosidad en los estudiantes a partir de las diferentes labores diarias de los padres de sus compañeros de clase, los cuales compartieron la manera en que la matemática se usaba en dichas actividades desempeñadas.

Se fomentó igualmente la competencia entre los estudiantes, a partir de situaciones que se les planteó en grupos de trabajo, ellos crearon una o varias preguntas que serían las que tendrían que resolver los otros grupos para dar solución a la situación dada.

Se promovió el trabajo en grupo, basado en la teoría de la Comunidad de práctica de Wenger, se debatieron ideas, se refutaron argumentos, se generaron dudas, surgieron más preguntas.

Para responder a la cuarta tarea de investigación, se evidenció la intervención del docente frente a las preguntas que surgían por parte de los estudiantes, especialmente en la actividad de los trucos matemáticos.

Se determinaron las dudas y dificultades de los estudiantes.

Se discutieron las soluciones por parte de los estudiantes a las situaciones planteadas.

Se Estimularon las preguntas que fueron surgiendo espontáneamente en los estudiantes frente a cada una de las situaciones que se les presentaron.

Para la quinta tarea de investigación, es importante destacar que en el desarrollo de las actividades, hubo gran cantidad de estudiantes motivados y un gran número de preguntas que formularon de manera natural.

En orden de jerarquía, las actividades aplicadas que más despertaron más curiosidad e interés, fueron las siguientes:

Actividad 1: la finalidad de la actividad fue encontrar la base matemática del truco. Los estudiantes mostraron gran curiosidad en determinar la parte matemática involucrada en el truco.

Algo muy interesante en esta actividad fue la intervención de algunos estudiantes que compartían con sus compañeros trucos matemáticos que ya conocían, otros alumnos intentaron realizar otros trucos que surgieran a partir de los que se habían propuesto.

Actividad 6: la finalidad de la actividad fue cumplir el trabajo que desempeña un detective, dirigido a resolver un problema o situación matemática. Esta actividad fue muy enriquecedora y llamativa para los estudiantes, argumentaban que era una manera muy lúdica de solucionar un problema, cambiando la manera tradicional en la que siempre se les ha presentado.

Actividad 3: la finalidad de la actividad fue compartir y mostrar el uso que tiene las matemáticas en la vida diaria. La curiosidad cumplió un papel muy importante en esta actividad, los estudiantes querían saber fundamentalmente la labor desempeñada por los padres de sus compañeros, y más aún cómo la matemática se usaba en dicha labor. Los alumnos estuvieron en todo momento atentos haciendo todo tipo de preguntas, ya fueran matemáticas o en relación al trabajo de los padres de familia.

Actividad 4: la finalidad de la actividad fue la formulación de preguntas por parte de los estudiantes frente a una situación problema en la cual se planteaba solamente el enunciado.

Los alumnos inicialmente plantearon la pregunta, para poder dar solución al enunciado del problema propuesto, el grupo entregó la situación al equipo contrincante, el cual debía resolver el problema, teniendo en cuenta que la pregunta hecha por el grupo adversario estuviera bien planteada, se generó debate entre los grupos, argumentando si la pregunta era acorde al enunciado dado, si los datos fueron usados en su totalidad para dicha pregunta.

Actividad 5: en esta actividad, los estudiantes demostraron gran interés por el tipo de planteamiento hecho basado en gráficas, los estudiantes se motivaron a dibujar la sucesión que se cumplía en cada situación, manifestaron que este tipo de actividades despertaba gran interés, porque no era hecha de la manera en la que están acostumbrados habitualmente en matemáticas: números y operaciones aritméticas.

Actividad 2: en los patrones numéricos los estudiantes resolvieron las situaciones planteadas, sin embargo se limitaron a encontrar la figura que continuaba en la siguiente posición, o en las dos o tres siguientes posiciones, pero no generalizaron para determinar que se cumpliera para cualquier *n* posición.

RECOMENDACIONES

La implementación de la presente investigación y las actividades propuestas en los estudiantes de grados sexto, octavo y once del Colegio Elisa Borrero de Pastrana requiere considerar y poner en práctica las siguientes recomendaciones, para optimizar el proceso investigativo y los resultados obtenidos:

- Dar mayor importancia al aprendizaje que se obtiene a partir de las preguntas generadas por los estudiantes en el contexto escolar.
- Seguir generando actividades lúdicas y espacios que promuevan la curiosidad de los estudiantes para que surjan preguntas matemáticas de manera natural.
- Fomentar el trabajo en comunidades de práctica, puesto que de esta manera se genera en los estudiantes el debate mediado por la intervención del docente siempre y cuando se requiera, de lo contrario se puede dejar que fluya de manera natural sin ningún tipo de intervención.
- Las preguntas generadas por los estudiantes tienen que servir de punto de partida para generar nuevas situaciones, dando importancia al aporte y pensamiento individual de cada alumno, plasmándolo en actividades que serán el resultado de las preguntas matemáticas hechas por ellos.
- Las actividades no se apliquen aisladamente de manera particular, sino que se integre con todos los planes del programa.
- Establecer un equipo de trabajo entre los docentes de las instituciones educativas, donde se promueva el aprendizaje centrado en la curiosidad natural del estudiante y se planteen preguntas frente a situaciones que han sido elaboradas en conjunto por los docentes que componen el área de matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

ABC.es. (2014). Solución: Resuelve el problema medieval de la paloma y escalera con 100 escalones. Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: http://www.abc.es/ciencia/20141113/abci-solucion-problema-matematico-medieval-201411122130.html.

Álvarez, V., Fernández, P., & Márquez, M. A. (s.f.). Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos. Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/magia.pdf.

Arguedas, V. (2012). George Polya: el razonamiento plausible. Revista digital Matemática, 11.

Arnone, M. P. (s.f.). Fostering Curiosity in Your Students. Recuperado el 09 de octubre de 2016 de la URL: http://www.educationoasis.com/visitor-resources/articles/fostering-curiousity/.

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas. (2014). Centro de Entrenamiento Matemático. Recuperado el 29 de julio de 2016 de la URL: http://www.cem.prodimat.org.ve/.

Ausubel, D. (s.f.). Teoría del aprendizaje significativo. Recuperado el 11 de septiembre 2015 de la URL: http://www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/.

Bao, W., Blanchfield, P., & Hopkins, G. (2016). The effectiveness of face-to-face discussion in chinnese Primary schools. Recuperado el 19 de julio de 2016 de la URL: https://www.researchgate.net/publication/305302360.

Barbosa, A. (2007). Patterns and generalization: the influence of visual strategies1. Congress of the European Society for Research in Mathematics.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas "El trabajo de Allan Schoenfeld. Recuperado el 25 de noviembre de 2015 de la URL: revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6971/6657.

Becerra, D. L. (2012). Propuesta metodológica para mejorar la interpretación, análisis y solución de ejercicios y problemas matemáticos en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Alejandro Vélez Barrientos. Recuperado el 21 de marzo de 2016 de la URL: http://www.bdigital.unal.edu.co/8326/1/25055064.2012.pdf.

Blanco, J. L. (1996). SUMA 21. Recuperado el 27 de marzo 2015 de la URL: https://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf.

Brailovsky, D., & Menchón, A. (1995). Ignorancia fundante": la cuestión de las preguntas en la clase. Recuperado el 22 de junio de 2016 de la URL www.propuestaeducativa.flacso.org.ar/archivos/articulos/33.pdf.

Bruner, J. (1966). Toward a Theory of Instruction. . Cambrigde: MA: Harvard University Press.

Cañadas, M. C. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º en el problema de las baldosas. Recuperado el 22 de octubre de 2016 de la URL: http://funes.uniandes.edu.co/283/1/CannadasM07-2861.pdf.

Castro, C. S. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. Almería, España.

Chiarotto, L. (2011). Natural curiosity: Building Children's Understanding of the World through Environmental. Toronto: The Laboratory School at The Dr. Eric Jackman Institute of Child Study.

Cilleruelo, J. (s.f.). El Diablo de los Números.

Cockcroft, W. (1985). Las matemáticas sí cuentan Informe Cockcroft. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio.

De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la pizarra: El papel de la visualización. Recuperado el 27 de septiembre 2015 de la URL: http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/Documentos_2008/Visualizacion_Miguel_de_Guzman.pdf.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM México, D.F. (2016). Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Internet. Recuperado el 18 de octubre de 2016 en el URL: ichi.fismat.umich.mx/omm/

Eiss, H. (1988). Dictionary Of Mathematical Games, Puzzles, And Amusements. United States of America: Greenwood Press.

Escobar, M. (1990). Educación alternativa, pedagogía de la pregunta y participación estudiantil. México. D.F.: Facultad de Filosofía y Letras.

Forero, A. (2007). El uso de las preguntas por parte del docente en la clase de matemáticas y sus efectos en las respuestas y conversaciones de los niños (Tesis Doctoral). Barcelona, España.

Foster, C. (2011). Student-generated questions in Mathematics Teaching. The National Council of Teachers of Mathematics, 26-31.

Freire, P., & Faúndez, A. (1986). Hacia una pedagogía de la pregunta: conversaciones con Antonio Faúndez. Recuperado el 15 de abril de 2016 de la URL: nuestraescuela.educacion.gov.ar/bancoderecursos/media/.../apoyo03.pdf.

García, L. A. (s.f.). How to Get Students Talking! Generating Math Talk That Supports Math Learning. Recuperado el 02 de abril de 2016 de la URL: http://www.mathsolutions.com/documents/how_to_get_students_talking.pdf.

Graven, M., & Lerman, S. (2003). Communities of practice: Learning, meaning and identity. Journal of Mathematics Teacher Education, 10.

Gros, B. (1990). Investigaciones y experiencias: La enseñanza de estrategias de resolución de problemas mal estructurados. Revista de Educación, 19.

Guerrero, M. E. (1990). Educación alternativa, pedagogía de la pregunta y participación estudiantil. Recuperado el 16 de febrero de 2015 de la URL: http://ru.ffyl.unam.mx:8080/bitstream/10391/654/1/1999_Educacion%20Alternativa.pdf.

Heath, R. V. (1953). Mathemagic: Magic, Puzzles and Games with Numbers. New York: Dover Publications.

Henríquez, A. (1993). Aprendizaje por Descubrimiento o proyecto de Investigación: Posibilidades y Límites. Recuperado el 30 de marzo 2016 de la URL: http://www.centropoveda.org/IMG/pdf/No-2Aprendizajepordescubrimiento.pdf.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2015). An arithmetic algebraic work space for the promotion. Recuperado el 08 de abril 2016 de la URL: http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-015-0749-5

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. (2014). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer enviroments. Recuperado el 11 de julio de 2015 de la URL http://dx.doi.org/10.1080/0020739940250318.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). Problem Solving. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Lampert, M. (1988). The Teacher's role in reinventing the meaning of mathematical knowing in the classroom. Recuperado el 22 de septiembre de 2015 de la URL: http://education.msu.edu/irt/PDFs/ResearchSeries/rs186.pdf.

Lehrer, R., Kobiela, M., & Weinberg, P. (01 de diciembre de 2012). Cultivating inquiry about space in a middle school mathematics. ZDM Mathematics Education, 12.

López, S., Veit, E. A., & Solano, I. (2014). La formulación de preguntas en el aula de clase: Una evidencia de aprendizaje significativo crítico. Recuperado el 04 de septiembre de 2015 de la URL: http://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=251030165007.

M.E.N. (1998). Lineamientos curriculares. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

M.E.N. (1998). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf.

Markiewicz, M. E., & Etchegaray, S. C. (2006). Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural. Recuperado el 22 de febrero de 2016 de la URL: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Trabinvest/CTI2.pdf

Mateo, J. C. (2008). El Diablo de los Números. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: https://www.google.com.co/?gws_rd=cr&ei=P9IpWOTaGMqFmwH_8pOgCQ#q=libro+conjetura+de+goldbach+pdf.

Maza, L. E. (2010). La pedagogía de la pregunta en el proceso de enseñanza aprendizaje. Retos, desafíos y posibilidades. Recuperado el 19 de octubre de 2015 de la URL: http://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/1954/1/UPS-QT00131.pdf.

Mazarío, I. (s.f.). La resolución de problemas: un reto para la educación matemática. Recuperado el 25 de febrero de 2016 de la URL: http://monografias.umcc.cu/monos/2004/OTROS/um04otr05.pdf.

McOwan, P., & Parker, M. (s.f.). The Manual of mathematical magic. Londres: Queen Mary, University Of London.

MECD. (2004). El Número, Agente Integrador del Conocimiento. Madrid: Secretaría General Técnica.

Medina, A. (2007). Pensamiento y Lenguaje. México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Montoya, H. (2006). Concepciones de los alumnos de la escuela primaria, media o secundaria sobre sucesiones (tesis de Maestría). Bogotá, Colombia.

Moreno, M. D. (2006). Razonamiento plausible. Dialnet.

MTH-TICS. (2013). Problemas para la playa, o algunos mitos desmontados. Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: http://mthtics.blogspot.com.co/2013/07/problemas-para-la-playa-o-algunos-mitos.html.

Obando, G., Zapata, J., & Muñera, J. (2002). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Educación y Pedagogía. p.18.

Ostroff, W. L. (2016). Cultivating curiosity in K-12 classrooms: how to promote and sustain deep learning. Virginia: ASCD.

Parra, B. M. (1989). Acerca del papel de la representación en la resolución de problemas. México D.F.: Universidad Pedagógica Nacional.

Parra, B. M. (1995). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria: dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. Recuperado el 15 de noviembre de 2015 de la URL: http://euler.mat.uson.mx/depto/diplomado/secundaria/lecturas.pdf#page=13.

Planas, N. (enero de 2005). El aula de Matemáticas como una comunidad de práctica inclusiva. Recuperado el 11 de marzo 2016 de la URL http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/educar-protegido_1.pdf.

Plata, M. E. (2011). Procesos de Indagación a partir de la pregunta. Una experiencia de formación en Investigación. Recuperado el 04 de septiembre de 2015 de la URL: http://revistas.uptc.edu.co/revistas/index.php/praxis_saber/article/view/1114/1113.

Redford, C. (2011). Celebrate Mathematical Curiosity. Obtenido de http://www.wheelock.edu/Documents/Academics/Centers%20and%20Institutes/Celebrate%20Mathematical%20Curiosity%20by%20Christine%20Redford%20Math%20Games%20Station.pdf.

Renesse, C. v. (2015). Curiosity -- A Culture of Asking Questions. Recuperado el 10 de noviembre de 2016 de la URL: https://www.artofmathematics.org/blogs/cvonrenesse/curiosity-a-culture-of-asking-questions.

Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Recuperado el 08 de octubre 2015 de la URL: http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf.

Ruiz, B. (1989). Aprendizaje por descubrimiento: Principios y aplicaciones inadecuadas. Recuperado el 04 de abril 2015 de la URL: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/39770/93221.

Samson, D. (2004). Patterns of Visualization. Recuperado el 28 de abril 2016 de la URL: http://amesa.org.za/amesal_n5_a3.pdf.

Sánchez, R. (2016). Matemáticas y Magia.

Scholastic. (s.f.). Math Maven's Mysteries. Recuperado el 16 de septiembre de 2016 en el URL: http://teacher.scholastic.com/maven/.

Shulman, L. s., & Keislar, E. r. (1979). Aprendizaje por descubrimiento. México D.F.: Editorial Trillas.

Sierra, J. (2000). El asesinato del profesor de matemáticas. Huygens.

Sigarreta, J. M., & Laborde, J. (2000). Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. Recuperado el 04 de agosto de 2016 en el URL: http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf.

Soriano, E. (1996). Enseñar a pensar al alumnado del primer ciclo de primaria a través de la matemática. SUMA 23, 14.

Torres, T., Duque, J., Ishiwa, K., Sánchez, G., Solaz, J., & SanJosé, V. (2012). Preguntas de los estudiantes de educación secundaria ante dispositivos experimentales. Recuperado el 09 de febrero de abril de 2016 de la URL: http://mobiroderic.uv.es/bitstream/handle/10550/42619/088627.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Vielma, E. V., & Salas, M. L. (2000). Aportes de las teorías de Vygotsky, Piaget, Bandura y Bruner. Recuperado el 18 de octubre de 2015 de la URL: http://www.redalyc.org/pdf/356/35630907.pdf.

Villate, J. R. (2009). Caracterización de la curiosidad en niños de 10 a 12 años particpantes del Programa Centro Amar Kennedy, a través del estudio de caso. Recuperado el 20 de noviembre de 2016 de la URL: http://www.javeriana.edu.co/biblos/tesis/educacion/tesis72.pdf.

Wenger, E. (1988). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. . Recuperado el 20 de noviembre 2016 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.

Wenger, E., & Trayner, B. (2015). Communities of practice a brief introduction. Recuperado el 30 de marzo 2016 de la URL: http://wenger-trayner.com/wp-content/uploads/2015/04/07-Brief-introduction-to-communities-of-practice.pdf.

Wong, K. Y. (2012). Use of student Mathematics questioning to promote active learning and metacognition. ICME-12, 15. Recuperado el 10 de agosto de 2016 de la URL: http://www.icme12.org/upload/submission/1879_f.pdf.