

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD BASADA EN  
APLICACIONES FINANCIERAS PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS  
ADMINISTRATIVAS, ECONÓMICAS Y CONTABLES

MIGUEL ANDRES DIAZ OSORIO.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2012

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE PROBABILIDAD BASADA EN  
APLICACIONES FINANCIERAS PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS  
ADMINISTRATIVAS, ECONÓMICAS Y CONTABLES

MIGUEL ANDRES DIAZ OSORIO.

DIRECTORES DE TESIS:

CONSTANZA QUINTERO.

LUIS FERNANDO PEREZ.

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ

2012

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

Firma del presidente del Jurado

---

Firma del Jurado

---

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Diciembre 14 de 2012.

## Agradecimientos.

Es a partir de situaciones difíciles en la vida, que se llega a apreciar las cosas más sencillas, pero que siempre han estado allí, incondicionales; es esa incondicionalidad la que nos hace ver que somos importantes para alguien y que vale la pena vivir para tratar de dejar una huella en esas personas que nos han acompañado siempre. Mi agradecimiento es muy sencillo: a Dios y a mi familia, y dentro de familia incluyo de una manera muy especial a la Universidad Antonio Nariño, y a todo su grupo de colaboradores que en cabeza de la Dra. Mary Falk, nunca me desampararon en la situación más difícil de mi vida.

Dedicatoria.

A mi madre, a mis hijas Natalia y Sara.

**TABLA DE CONTENIDO**

Página.

<b>CAPITULO 0. INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y FUNDAMENTOS</b> .....	3
1.1. Fundamentos del estudio .....	3
1.2. Diseño de la investigación .....	5
1.2.1. Problema .....	5
1.2.2. Objeto de estudio .....	5
1.2.3. Objetivos de la investigación.....	5
1.2.4. Hipótesis de investigación .....	6
1.2.5. Tareas .....	7
1.3. Marco teórico .....	8
1.3.1. Transposición didáctica y significado.....	13
1.3.2. Definición de competencia.....	14
1.4. Estado del arte. ....	16
1.4.1. Teaching and Learning Probability with Mathematical Modeling .....	17
1.4.2. Developing a modeling approach to probability using computer-based simulations. ....	18
La domesticación de riesgo. Probabilidad, matemática y seguro .....	19
1.4.3. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. ....	20
1.4.4. Informal conceptions of probability .....	21
1.4.5. Connections between statistical thinking and critical thinking. A case study. .....	22
1.4.6. The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education.....	23
1.4.7. ¿How Do Teachers Deal with the Heuristic of Representativeness? .....	24
1.4.8. Modelos estocásticos en finanzas .....	25
1.4.9. Cómo reducir la incertidumbre en las finanzas.....	26
1.4.10. Learning to integrate statistical and work-related reasoning .....	27
<b>CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN</b> .....	28
2.1. Selección de la muestra.....	28
2.2. Procedimiento de análisis .....	30
<b>CAPITULO 3. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES</b> .....	32
3.1. Diseño de las pruebas diagnósticas .....	32

3.2. Diseño de las guías .....	32
3.3. Diseño de la encuesta final .....	33
3.4. Solución, rúbricas de evaluación, análisis de heurísticas y análisis de evaluación de las actividades aplicadas .....	33
3.4.1. Primera prueba diagnóstica .....	33
3.4.2. Segunda prueba diagnostica .....	39
3.4.3. Resultados obtenidos pruebas diagnósticas: .....	42
3.4.4. Primera guía aplicada .....	43
3.4.5. Resultados parciales de la primera guía aplicada .....	53
3.4.6. Segunda guía aplicada .....	55
3.4.7. Resultados parciales de la segunda guía aplicada .....	58
3.4.8. Tercera guía aplicada.....	59
3.4.9. Resultados parciales tercera guía aplicada .....	70
Resultados parciales tercera guía aplicada.....	71
3.4.10. Evaluación general .....	73
3.4.11. Evaluación y seguimiento por estudiante .....	75
<b>CAPITULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>89</b>
Conclusiones .....	89
Recomendaciones .....	91
<b>BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS .....</b>	<b>93</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>94</b>
Anexo 1. Consideraciones iniciales para una encuesta piloto .....	94
Anexo 2. Modelo de la Encuesta piloto.....	96
Anexo 3. Resultados de la prueba piloto.....	98
Anexo 4.Criterios para llegar a la muestra final. Primera Prueba Diagnóstica.....	100
Anexo 5. Primera prueba diagnóstica .....	105
Anexo 6. Segunda Prueba Diagnóstica .....	106
Anexo 7. Guía 1. Preliminares .....	107
Anexo 8.Guía 2. Valor esperado.....	114
Anexo 9. Guía 3. Introducción al riesgo.....	120
Anexo 10. Encuesta final .....	128
Anexo 11. Agradecimiento especial a los estudiantes participantes del estudio .....	129

## **CAPITULO 0. INTRODUCCIÓN**

Una de las dificultades observadas en los estudiantes de ciencias económica es la ausencia de correlación entre los objetos propios de las asignaturas de probabilidad y matemáticas financieras así como los temas que se desarrollan en estos cursos, esto se pudo constatar mediante un estudio diagnóstico elaborado para darle validez a la presente investigación, enfocado a medir la percepción del estudiantado de ciencias administrativas hacia la toma de decisiones empresariales en entornos contingentes. Este estudio se adelantó en siete universidades, seis privadas y una pública de Bogotá. Para la selección muestra se utilizaron estadísticas presentadas por el Ministerio de Educación Nacional en su sistema de información SNIES<sup>1</sup>, el diseño y los resultados se muestran en los anexos (Anexo 1), En este estudio preliminar se evidenció que los estudiantes dela muestra estudiada, aunque presentan bases teóricas en cuanto a los objetos específicos de la materia de estadística I y II, donde se abarca de manera suficiente la probabilidad y la asignatura de matemática financiera, los estudiantes no relacionan estos dos objetos en uno nuevo relacionado con la toma de decisiones financieras en entornos contingentes, más precisamente en riesgo.

La presente investigación pretende mejorar las competencias de los estudiantes en cuanto al manejo de recursos financieros, no en ambientes deterministas sino en un marco real probabilista, así pues, se debe incrementar la participación de la probabilidad en la toma de decisiones por parte de los futuros profesionales en áreas administrativas, económicas y contables, al indagar las posibles causas del por qué los

---

<sup>1</sup>SNIES (2011).Sistema nacional de información de la educación superior. Ministerio de Educación Nacional. Colombia.



estudiantes de estas áreas, a pesar de que han cursado las materias de estadística I y II, (Probabilidad) y matemáticas financieras de manera satisfactoria, no llegan a correlacionar dichos conceptos para generar un conocimiento que emerja de manera natural y espontánea, para la solución de problemas financieros en entornos contingentes.

El objeto de estudio son los estudiantes de carreras administrativas, económicas y contables de la Universidad Antonio Nariño, Bogotá. El trabajo se realizó con los estudiantes que se encontraban cursando el cuarto semestre de carreras administrativas, económicas y contables a quienes se les realizó una prueba diagnóstica<sup>2</sup> para indagar acerca de las temáticas, motivo de investigación. A partir de los resultados de esta prueba, se diseñó una muestra de propuesta didáctica basada en guías de aprendizaje, necesaria para que el estudiante de carreras administrativas haga un recorrido por los temas de probabilidad, desde los temas más simples e intuitivos, hasta los aplicados exclusivamente a la administración del recurso financiero en ambientes contingentes, como el modelo CAPM, (Capital Asset Pricing Theory)<sup>3</sup>; este es un modelo de selección de portafolios óptimos o de varianza mínima. Los problemas desarrollados en las actividades propuestas para la presente investigación se refieren a riesgo económico, porque atañe a la selección de inversiones, es decir, abarcar el problema de asignar recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles, con el objetivo de racionalizar el riesgo y tratar de que las utilidades sean las mejores al nivel de riesgo dado; y riesgo financiero, por que trata el tema de

---

<sup>2</sup> Definimos prueba diagnóstica, como una evaluación que pretende evaluar conocimientos previos de los estudiantes con el fin de medir conocimientos previos a la aplicación de las pruebas y medir el avance de los aprendices, después de aplicar las guías de aprendizaje.

<sup>3</sup> SHARPE, W. (1964). A Simplified Model for Portfolio Analysis. "Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". Journal of Finance XIX.

inversiones en la empresa que tienen un retorno, y el objetivo es verificar la viabilidad de dicho proyecto. Más adelante se darán las definiciones de estos dos conceptos<sup>4</sup>.

## **CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y FUNDAMENTOS**

### **1.1. Fundamentos del estudio**

La investigación “Una propuesta de enseñanza de la estadística y probabilidad basada en aplicaciones financieras, para estudiantes de ciencias administrativas, económicas y contables” está pensada para dar un enfoque aplicado al estudio de las matemáticas financieras y la probabilidad y mejorar las competencias<sup>5</sup> en la toma de decisiones financieras. Los profesionales en las áreas antes nombradas, deben manipular datos económicos cambiantes, es necesario dar una perspectiva amplia acerca de un razonamiento matemático aplicado a los problemas propios de estas profesiones y en particular a las matemáticas financieras, enfocadas a la administración de recursos en entornos contingentes, así mismo se debe otorgar al estudiante el marco conceptual en cada área, tanto en lo económico, administrativo y contable. Como lo afirma Carmen Batanero: *“La enseñanza de la estadística se incorpora, en forma generalizada, a la escuela, institutos y carreras universitarias. Además de su carácter instrumental para otras disciplinas, se reconoce el valor del desarrollo del razonamiento estadístico en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de toma de decisiones en ambiente de incertidumbre.”*<sup>6</sup>

Es por esta razón que se presenta la siguiente pregunta problema de la investigación:

---

<sup>4</sup> Definición en la página 9.

<sup>5</sup> Definición en la página 14.

<sup>6</sup> BATANERO, C. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

## **¿Cómo mejorar las competencias del estudiante de ciencias administrativas en cuanto a la toma de decisiones financieras en entornos contingentes?**

Las investigaciones más recientes dedicadas a la administración de riesgo, están utilizando análisis complejo basado en sistemas dinámicos<sup>7</sup> y Redes Neuronales<sup>8</sup>, dichos temas están fuera del alcance de estudiantes de pregrado de carreras administrativas. Es retador pretender que un estudiante con bases matemáticas elementales, maneje conceptos de tan elevada envergadura, pero dada la necesidad de conocer dónde asignar recursos líquidos en ambientes riesgosos, una de las tareas principales de esta investigación es utilizar el concepto de la transposición didáctica para diseñar una serie de guías, donde se apliquen los conceptos básicos de probabilidad y matemáticas financieras, y cuya finalidad es dotar al estudiante de ciencias administrativas, económicas y contables con herramientas prácticas de decisión que le permitan un acercamiento a la administración del riesgo económico y financiero.

A pesar que en el ICME11, TSG13<sup>9</sup> se ha publicado sobre la didáctica de la probabilidad y matemáticas aplicadas en múltiples áreas y de que existen varios grupos de investigación que trabajan en probabilidad, no hay estudios sobre la probabilidad aplicada a problemas financieros.

Desde la aparición de los seguros, se han investigado las formas más apropiadas de darle algún valor a las contingencias financieras. Estas investigaciones iniciadas prácticamente de manera autónoma y simultánea en Babilonia, India, Grecia, Fenicia y

---

<sup>7</sup> KELLERT, S. (1993). In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems. University of Chicago Press, 1993.

<sup>8</sup> TRIPPI, R. TURBAN, E. (1996). Neural Networks in Finance and Investing. Using Artificial Intelligence to Improve Real World Performance. McGraw-Hill, Inc. New York, NY.

<sup>9</sup> ICME11, Investigación y desarrollo en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Consultado el 20 de julio de 2010 del URL: <http://tsg.icme11.org/tsg/show/14>

Roma, daban como resultado el diseño de una serie de documentos, llamados contratos a la gruesa, que se efectuaban esencialmente, entre los banqueros y los propietarios de los barcos, para darle cobertura a las mercancías transportadas. Por lo tanto, es pretencioso afirmar que esta investigación es novedosa u original; sin embargo, no es del conocimiento del investigador que se hayan presentado investigaciones en la didáctica aplicada a este tipo de enseñanza.

## **1.2. Diseño de la investigación**

### **1.2.1. Problema**

¿Cómo mejorar las competencias del estudiante de ciencias administrativas en cuanto a decisiones financieras en entornos contingentes?

### **1.2.2. Objeto de estudio**

La enseñanza de la probabilidad y matemáticas financieras en estudiantes de cuarto semestre de carreras administrativas de la Universidad Antonio Nariño.

### **1.2.3. Objetivos de la investigación**

#### **1.2.3.1. General**

Identificar los posibles motivos, del por qué los estudiantes de ciencias administrativas no correlacionan conceptos de probabilidad y matemáticas financieras, para desarrollar habilidades en cuanto a la toma de decisiones financieras en entornos contingentes y, a partir de ello, mejorar las competencias tendientes a la resolución de problemas de este tipo mediante el uso de guías de aprendizaje.

### **1.2.3.2. Específicos**

1. Desarrollar una propuesta metodológica de enseñanza de la probabilidad con modelos financieros.
2. Generar en los estudiantes habilidades y competencias en el análisis de las probabilidades de pérdidas en inversiones financieras.
3. Seleccionar un conjunto de temas pertinentes para la enseñanza de la probabilidad en análisis de posibles inversiones.
4. Lograr que el estudiante genere vínculos hacia las matemáticas y estadística como herramientas de decisión financiera.
5. Consolidar la formación en probabilidad, tanto teórica como aplicada, en la administración de recursos financieros.

### **1.2.4. Hipótesis de investigación**

Al plantear a los alumnos problemas no convencionales (en el sentido de que, además de cálculo, requieren interpretación y correlación de significados), se encuentra una amplia gama de dificultades, incluso para los estudiantes que ya han tenido una preparación sobre los temas objeto de investigación. Es por esta razón que se cree que el significado institucional de referencia en el trabajo, definido por los contenidos de probabilidad y matemática financiera que utilizan los alumnos es complejo, ya que en su formación no se relacionan estos significados entre sí, solo son percibidos por los estudiantes como elementos independientes de decisión.

Una vez aplicadas las actividades programadas, se espera que los aprendices de la muestra, presenten una mejoría en el conocimiento por parte del aprendiz, (mejor

ajuste entre significados personales e institucionales)<sup>10</sup> y en sus competencias, después de la aplicación de las guías.

### **1.2.5. Tareas**

Las tareas en orden cronológico son las siguientes:

1. Clasificación de los elementos que a criterio del investigador, sean relevantes y pertinentes para impartir en el aula de clase. Tales temas son abstraídos de matemáticas financieras, probabilidad, series y sucesiones, riesgo económico y selección óptima de portafolios.
2. Selección de los temas que se puedan abstraer para trasponer, descontextualizar y recontextualizar, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes en cuanto a probabilidad y matemáticas financieras, con los conocimientos que se desea impartir.
3. Diseño de cada uno de los problemas de las guías, encaminados a la generación de conocimiento en los temas nombrados en la tarea 1, al implementar la probabilidad como herramienta de decisión financiera.
4. Implementación de una prueba diagnóstica, en caminata a recabar información acerca de los criterios utilizados intuitivamente por los estudiantes para resolver situaciones similares.
5. Contextualización de los problemas financieros en entornos probabilistas, con la teoría ya traspuesta como lo indica la tarea 2 mediante las guías.
6. Interpretación de los resultados, identificar fortalezas, debilidades, errores comunes, malas interpretaciones, etc.

---

<sup>10</sup> GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathematiques.

7. Evaluación de las pruebas mediante el modelo de rúbricas<sup>11</sup>.
8. Elaboración de las conclusiones a partir de los datos obtenidos en el estudio; así como, la determinación acerca de que si las competencias antes definidas, fueron modificadas.

### **1.3. Marco teórico**

«... ¿Podemos hablar de leyes al azar? ¿No es el azar la antítesis de toda ley? La probabilidad se opone a la certeza; es pues lo que se ignora y, por lo tanto, lo que no podría calcularse. El azar existe para nosotros a causa de nuestra debilidad y de nuestra ignorancia; e incluso sin salir de nuestra debilidad humana, lo que es azar para el ignorante no lo es para el sabio. El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición, aquellos cuyas leyes ignoramos...» Henry Poincaré (1854-1912). Este es un muy buen preámbulo de lo que ha sido la discusión alrededor de la teoría probabilista a lo largo de los tiempos. Aunque para la época, el ministro presbiteriano Thomas Bayes (1701-1761) ya tenía publicados todos sus trabajos acerca de probabilidad, trabajos que claramente desmienten lo que afirmaba Poincaré casi 150 años después; el alumno aventajado de DeMoivre, había solucionado con su teorema lo que su maestro planteaba en “The doctrine of chances”, una de las obras maestras de la probabilidad, muchos autores han abarcado el tema probabilista, Laplace, Bernoulli, Kolmogorov, igualmente otros en muchas disciplinas, distintas a las matemáticas o la estadística se habla de probabilidad, como el filósofo que trabajó buena parte de su vida en economía, Karl Popper. En cada una de las disciplinas modernas se encuentran aplicaciones de la probabilidad y la estadística, sin

---

<sup>11</sup> Definición: Una descripción secuencial y lógica del proceso heurístico que el estudiante debe recorrer para llegar al resultado deseado, con el fin de ser evaluado.

embargo en las carreras administrativas económicas y contables, se ve como a menudo estas aplicaciones se desvanecen en aplicaciones ingenieriles o de aplicación en el comportamiento social en psicología. El marco teórico de este trabajo debe abarcar los temas que atañen a la didáctica de la probabilidad y las decisiones empresariales en entornos cambiantes; entonces se debe hacer ciertas precisiones en temas que más adelante se tomarán en cuenta como riesgo económico y riesgo financiero:

*“El riesgo económico hace referencia a la incertidumbre producida en el rendimiento de la inversión debida a los cambios producidos en la situación económica del sector en el que opera la empresa. Así, a modo de ejemplo, dicho riesgo puede provenir de: la política de gestión de la empresa, la política de distribución de productos o servicios, la aparición de nuevos competidores, la alteración en los gustos de los consumidores, etcétera...”*“El riesgo financiero, también conocido como riesgo de crédito o de insolvencia, el riesgo financiero hace referencia a la incertidumbre asociada al rendimiento de la inversión debida a la posibilidad de que la empresa no pueda hacer frente a sus obligaciones financieras (principalmente, al pago de los intereses y la amortización de las deudas). Es decir, el riesgo financiero es debido a un único factor: las obligaciones financieras fijas en las que se incurre.”<sup>12</sup>. La presente investigación pretende abarcar riesgo económico, debido a que los problemas y actividades están diseñados para que el estudiante genere competencias frente a decisiones empresariales; dónde invertir el dinero con el fin de minimizar las posibles pérdidas, al iniciar con problemas básicos de probabilidad, solucionables con diagramas de árbol hasta llegar a modelos internacionalmente conocidos y ya nombrados en la

---

<sup>12</sup> MASCAREÑAS, J. (2008). Riesgos económico y financiero. Universidad Complutense de Madrid, p 16.



introducción de este trabajo. Aunque los mercados de valores son impredecibles y su naturaleza es aleatoria y caótica, es posible minimizar las pérdidas mediante modelos matemáticos probabilísticos definidos y una buena educación financiera desde la base. Los fenómenos económicos no se pueden predecir con certeza, sólo se puede aproximar a una probabilidad de ocurrencia. En economía se está trabajando en modelos elaborados en sistemas dinámicos no lineales y teoría del caos, que tratan de describir este tipo de fenómenos económicos y sociales como la inversión en bolsa; al retomar las ideas de Bunge, se puede afirmar que el caos matemático es una imitación del azar, matemática de casos particulares en donde a pequeñas causas, grandes efectos.

*“El entusiasmo por el caos matemático ha llegado al colmo de sostener que el aleteo de una mariposa en Buenos Aires puede causar un maremoto en el mar de China, este efecto Mariposa sería un ejemplo de dinámica caótica. Pero ésta es mera fantasía puesto que las ondas de choque generadas por el aleteo de una mariposa se disipan enseguida en el aire circundante, las tormentas reales, y en particular los huracanes involucran gigantescos transportes de energía que no están al alcance ni siquiera de la bandada más enorme de mariposas monarca, las que vuelan en masa entre Canadá y México..., no toda irregularidad aparente, oculta una dinámica caótica”*<sup>13</sup>; no todo se reduce a las dinámicas caóticas, entonces las reglas básicas de probabilidad tienen que ser útiles para medir estos fenómenos económicos simples. Si se pretende dotar a los estudiantes de herramientas prácticas de decisión, es necesario aclarar que el objetivo de la investigación es mejorar las competencias de los estudiantes basadas en

---

<sup>13</sup> BUNGE, M; (2007). 100 ideas: El libro para pensar y discutir en el café. Mario Bunge.Ed. Sudamericana, Buenos Aires. P. 22

las herramientas que poseen previamente en cuanto a matemáticas financieras estadística y probabilidad, mas no hacerlos expertos en el tema.

*“La complejidad de la matemática y de la educación sugiere que los teóricos de la educación matemática, y no menos los agentes de ella, deban permanecer constantemente atentos y abiertos a los cambios profundos que en muchos aspectos la dinámica rápidamente mutante de la situación global venga exigiendo.”<sup>14</sup>.*

Es claro que todos tenemos aversión al riesgo, unos en mayor medida que otros, personas con perfil de riesgo mínimo, otros moderados, y otros arriesgados. Sin embargo es necesario invertir para generar utilidades, entre menos instrucción financiera posea el inversionista, mayor será la creencia de que todo saldrá bien.

*“Dígasele a un pequeño inversor que los precios de las acciones de las bolsa son aleatorios y no lo creerá. Está convencido de que él, o al menos su corredor de bolsa, tiene una receta infalible para leer el futuro en el pasado. Creerá que el futuro ya está escrito en alguna parte y que para leerlo solo hace falta descubrir el texto y descifrarlo. Es un causalista radical, sufre de negación al azar.”<sup>15</sup>,*

Poincaré definió azar como un desconocimiento (ignorancia) de algún método de cálculo; sin embargo el matemático Mario Bunge afirma: *“...el azar no es sinónimo de ignorancia o incertidumbre, sino un rasgo del mundo real, tanto natural como social.”<sup>16</sup>.*

En cuanto a la didáctica de la probabilidad el marco de referencia para este trabajo son los aportes de la Dra. Carmen Batanero, que se centran en el azar como objeto de estudio central en varias de sus investigaciones, estas investigaciones se encuentran en

---

<sup>14</sup> GUZMÁN, M. De. (1991). Ensayo de la Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos 1991.

<sup>15</sup> BUNGE, M. (2007). 100 ideas: El libro para pensar y discutir en el café. Ed. Sudamericana, Buenos Aires .p. 22

<sup>16</sup> Ibídem.

la página de la Universidad de Granada, destinada para la divulgación de estos materiales: *“Estudios sobre didáctica de la probabilidad”*<sup>17</sup>, allí existen de referencia varios artículos y libros que se tomarán en cuenta en su momento, según sea pertinente en la presente investigación. *“Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos no universitarios en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, en forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia. Estos cambios nos llevan a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad, y los fines de su enseñanza en la educación obligatoria, que son dos principalmente:*

- *La probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas.*
- *La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno*<sup>18</sup>

Para la Dra. Carmen Batanero, el uso aplicado por medio de la experiencia en el aula, al simular situaciones concretas de la vida cotidiana, es particularmente acertado diseñar actividades contextualizadas acerca de la toma de decisiones empresariales.

Didácticamente la presente investigación toma elementos de la transposición didáctica como referente para la selección de los problemas que involucra las guías; en cuanto a los objetivos de la investigación se toman elementos de la competencia, así que es plenamente pertinente dedicar un aparte a esta teoría dentro del marco teórico.

---

<sup>17</sup> Universidad de Granada. Estudios sobre didáctica de la probabilidad. Bajado el 16 de julio de 2012 del URL:<http://www.ugr.es/~batanero/estudios%20sobre%20didactica%20de%20la%20probabilidad.htm>

<sup>18</sup> BATANERO, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

### **1.3.1. Transposición didáctica y significado**

Parafraseando a Chevallard, la transposición didáctica<sup>19</sup>, para el autor una muy buena aproximación a la definición de trasposición didáctica es: El proceso por el cual un saber sabio o saber científico se convierte en un saber u objeto enseñado, teniendo en cuenta que el saber sabio se caracteriza por su formalismo y epistemología científica, y el objeto enseñado es la adaptación didáctica del saber sabio, en un proceso de descontextualización y recontextualización, con el fin de que el estudiante tenga en su entorno académico las herramientas necesarias para desarrollar dicho objeto de estudio, en donde se aplican saberes anteriores y necesarios para generar un clima de familiaridad con el contenido a enseñar. El proceso de transformación finaliza cuando se presenta el cambio que experimenta el objeto de saber, por el profesor que domina los conocimientos de su disciplina y sus alumnos que ya cuentan con un saber anterior del que el profesor desea comunicar: El saber sabio. Sin embargo se enseñan herramientas útiles para el estudiante ya que moldea y adapta ese conocimiento a sus necesidades y conocimientos previos.

Además se debe considerar que la realidad es concebida como una entidad existente allá afuera, al desnudo, con independencia de quien intente conocerla; por lo tanto, los objetos de conocimiento existen, con independencia del sujeto que los conoce, pues éste sólo aprehende sus características en la relación epistemológica, convirtiéndolos en objetos de su conocimiento. El sujeto va adquiriendo conocimiento de su mundo en la medida que es capaz de ir captando aquellas propiedades que lo caracterizan. Llevado al fenómeno de la educación, esto implica que en el aula el

---

<sup>19</sup> CHEVALLARD, Y. (1991) La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Aique, Buenos Aires.

profesor debe intentar que sus alumnos capten aquellas propiedades distintivas de los objetos, algo que se pretende lograr en esta investigación utilizando como herramienta didáctica las guías de aprendizaje; y que ya han sido identificadas previamente en el ámbito científico. Por lo tanto, desde esta perspectiva, en el plano educativo desde la probabilidad y la matemática financiera, no sólo se deben distinguir y conocer el objeto de saber que se convertirá en objeto de enseñanza, sino que también es pertinente determinar cuáles serán las propiedades que deberán conocerse de éste, de manera que el objeto de saber distinguido en el ámbito científico sea el mismo objeto de enseñanza que será captado por el educando.

Por lo anterior, el objeto de saber en lugar de ser transpuesto didácticamente, es trasladado didácticamente desde el espacio de su identificación hasta el espacio pedagógico de su enseñanza, ya que al existir en la realidad ubicada allá afuera, el objeto de saber es trasladado desde la disciplina que lo conoce hasta la disciplina que lo enseña, y por ende, no es afectable en un proceso de transformación. Por lo tanto, el objeto del docente debe ser idéntico al objeto del científico; de no ser así, lo que enseña uno no corresponde a lo que conoce el otro. Desde esta perspectiva los mecanismos que posibilitan la transposición didáctica no existen, pues no hay transformación, como lo señala Chevallard, y el rol de la didáctica se restringe sólo al desarrollo de técnicas que le permitan al docente facilitar a sus alumnos la tarea de aprendizaje de este objeto.

### **1.3.2. Definición de competencia**

Para tratar de mejorar las competencias de los estudiantes, se debe tener claro qué significa competencia para la presente investigación. Una definición bastante acertada

para el autor es la siguiente: *“La capacidad de actuar de manera eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos”*<sup>20</sup>, como complemento a la anterior definición, como lo define la enciclopedia académica universal: *“Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado”*, la pericia se define como *“Sabiduría, práctica, experiencia y habilidad en una ciencia o arte”*<sup>21</sup>, Ahora bien, en cuanto a las competencias que diferencian a los profesionales en diversas áreas, es imprescindible que en la Universidad, y escuelas de nivel superior en general, se adopten medidas necesarias para otorgar al estudiante herramientas prácticas para su desempeño profesional, y es en función de este desempeño, que cada una de las asignaturas cursadas en la Universidad se tornan pertinentes y relevantes dentro del pensum de cada carrera. Se conoce a fondo el contenido programático de la asignatura Estadística I y II y Matemáticas Financieras, *“Esta capacidad se basa en conocimientos pero no se reduce a ellos”*<sup>22</sup>, aquí se encuentran retos, obstáculos para que el estudiante halle soluciones acertadas a situaciones o problemas que involucran estas asignaturas, de una manera competente. Para esto es necesario incorporar en el aula situaciones problémicas; desde hace ya varios años se ha venido investigando acerca de esta necesidad, se cita un artículo publicado en *“Educación matemática en las Américas - IV: Informe de la Cuarta conferencia interamericana sobre educación matemática, Caracas, Venezuela”*, en el capítulo destinado a la enseñanza de la probabilidad, se dice textualmente:

---

<sup>20</sup> PERRENOUD, P. (1999). Construir competencias desde la escuela, Santiago de Chile. Dolmen.

<sup>21</sup> Enciclopedia Universal, Bajado del URL:[http://enciclopedia\\_universal.esacademic.com](http://enciclopedia_universal.esacademic.com), los diccionarios y las enciclopedias para académicos. El 9 de septiembre de 2011.

<sup>22</sup> PERRENOUD, P. (1999). Construir competencias desde la escuela, Santiago de Chile. Dolmen.

*“Quizá no lo hemos mencionado hasta ahora, pero ciertamente hemos supuesto que la resolución de problemas es uno de los objetivos principales de la educación matemática. Pocas son las técnicas que se pueden enseñar, pero sí se pueden presentar algunas herramientas que ayudan al estudiante a visualizar un problema y así dominarlo”<sup>23</sup>*

El diseño de los problemas soporte de esta investigación, tiene sus raíces bien definidas en una trasposición didáctica clara, colocar al alcance de los estudiantes modelos de riesgo económico y financiero en un marco probabilístico sencillo a partir de situaciones simuladas abstraídas del mundo real, para generar un espacio propicio para enseñar en el aula de clase de probabilidad y matemáticas financieras conceptos de elevada envergadura como es el riesgo económico.

Fue necesario diseñar e implementar un modelo de evaluación que realmente evidencie mejorías en la competencia del estudiante, y diagnosticar la situación actual de los estudiantes en ciertos temas; este modelo de evaluación posteriormente se describirá en la metodología y se implementará en la calificación de las actividades propuestas.

#### **1.4. Estado del arte.**

Las principales investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de nivel superior se obtienen en el ICME12<sup>24</sup>, ICME11, y de los estudios de la Universidad de Granada, en cuanto a las investigaciones acerca de

---

<sup>23</sup> VASCO, FALK, CHARRIS, LOSADA, (1975). Consideraciones sobre la enseñanza de la matemática en el ciclo diversificado colombiano. Educación matemática en las Américas - IV: Informe de la Cuarta conferencia interamericana sobre educación matemática, Caracas, Venezuela. Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática.

<sup>24</sup> ICME12, The 12th international congress on mathematical education, 2012.July 8-15, 2012 Seoul Korea.

riesgo, probabilidad y matemáticas financieras aplicadas, se encuentran otros tantos trabajos que no se organizan en eventos tan importantes como el ICME, sin embargo a pesar de estar atomizados, se citan varios de importancia que se asemejan y/o profundizan la misma temática de ésta investigación.

#### **1.4.1. Teaching and Learning Probability with Mathematical Modeling<sup>25</sup>.**

En este artículo el autor muestra la importancia del modelamiento de situaciones previas al cálculo de las probabilidades, de este modo, para cada ejercicio propuesto existen ciertas categorías en las que se encasilla cada situación problémica:

- a. Modelos típicos.
- b. Problemas de estructura libre.
- c. Modelos discretos.
- d. Modelos geométricos.
- e. Modelos dinámicos.
- f. Modelos de estrategia.
- g. Modelos tipo paradoja.

Además de esta clasificación, en cuanto a la medición de las competencias que se adquieren con los ejercicios planteados, igualmente estratifica dichas competencias alcanzadas en tres:

- Reconocer y comprender la situación modelada.
- Modelado independiente.
- Meta-reflexión sobre modelos.

Para los resultados del experimento, (Aplicación a estudiantes de último año de

---

<sup>25</sup> HONGSHICK, J. (2008). Teaching and Learning Probability with Mathematical Modelling. ICME12. TSG 11 Teaching and learning of probability.



secundaria), se estratificaron en:

- P1. Explica los conceptos básicos con ejemplos simples: aleatoriedad, el espacio muestral, la frecuencia relativa, considerar todos los posibles resultados de un experimento
- P2. Tiene en cuenta todos los posibles resultados para un experimento de dos etapas, califica y estima el valor de probabilidad subjetiva.
- P3. Agrupa los posibles resultados en experimentos conjuntos, Utilizar la comparación proporcional, reconoce la fiabilidad de repeticiones en números grandes.
- P4. Asigna la probabilidad adecuada en situaciones complejas.

En conclusión, este trabajo muestra de una manera muy objetiva un experimento para mejorar competencias en probabilidad, al utilizar modelamiento.

#### **1.4.2. Developing a modeling approach to probability using computer-based simulations.<sup>26</sup>**

En este estudio, el autor muestra un experimento con ordenador, en donde mediante un juego, aproxima al estudiante a situaciones de probabilidad frecuencial, utiliza histogramas y ojivas, a través de la simulación de un jugador de básquetbol, el estudiante visualiza los lanzamientos exitosos y el ordenador recrea la situación estadística del juego, es interesante como el autor se basa en la importancia de la simulación para obtener del estudiante la comprensión de objetos en probabilidad.

El autor saca provecho de los beneficios del uso de la tecnología para hacer didáctica

---

<sup>26</sup> PRODROMOU, T. (2012). Developing a modeling approach to probability using computer based simulations. ICME12.

basándose en una situación específica.

La investigación “Una propuesta de enseñanza de la probabilidad basada en aplicaciones financieras para estudiantes de ciencias administrativas, económicas y contables”, tiene como principal expectativa el fortalecimiento de las competencias de los estudiantes en cuanto a la toma de decisiones en situación de incertidumbre, la simulación de situaciones es su principal herramienta didáctica, sin embargo el uso del ordenador es tangencial en la guía 3, valdría la pena profundizaren próximas investigaciones este tipo de simulaciones con el uso de tecnología.

### **La domesticación de riesgo. Probabilidad, matemática y seguro.<sup>27</sup>**

*“Las dos primeras generaciones de matemáticos probabilistas Blaise Pascal, Pierre Fermat, Huygens, Johann de Witt, Nicolás y Jakob Bernoulli, resolvieron problemas enmarcados en el contexto de los contratos aleatorios, esto es, plantearon fundamentalmente las cuestiones en términos de esperanza matemática y equidad más que en los de probabilidad y posibilidad. Los juristas que buscaban el precio justo de las anualidades, un billete de lotería o la cuota de una sociedad pensaban en términos de esperanza, más que en términos de riesgo per se, y los matemáticos del siglo XVII, que procuraban una formulación más precisa de tales cuestiones siguieron naturalmente esa dirección.”<sup>28</sup>*

Parafraseando a Daston, se puede afirmar que los matemáticos antes nombrados se dedicaron a la tasación de anualidades desde un punto de vista matemático y hacia

---

<sup>27</sup> DASTON, L. (1988). La domesticación de riesgo. Probabilidad, Matemática y Seguro. (1650-1830). Princeton University.

<sup>28</sup> DASTON, L. (1979). The reasonable calculus: Classical probability theory (1650-1830), Tesis doctoral. Harvard University.

mediados del siglo XVIII, existía una copiosa literatura en varios idiomas al afirmar que la probabilidad había superado su fase frívola dedicada a los juegos, y podía ya ser aplicada a propósitos más serios y útiles. Ejemplos de esto se encuentran en “The doctrine of chances”.<sup>29</sup>

Se entiende que el tamaño muestral correspondiente a los eventos que tienen que ver directamente con el manejo financiero, es infinito; sin embargo llegar a medir en cierta forma estos posibles eventos es algo que autónomamente se efectúa cuando se decide colocar nuestro dinero en el banco o prestarlo. Si se trata de recursos ajenos, se debe soportar las decisiones tomadas con cifras, que en este caso, serán en términos de la probabilidad de éxito de las decisiones tomadas. *“Aunque el azar produzca irregularidades, aunque las posibilidades sean infinitamente grandes en el transcurso del tiempo esas irregularidades han de guardar proporción con la ocurrencia de ese orden que resulta naturalmente de los designios ordinarios”*<sup>30</sup>.

Es fin de esta investigación retomar el camino recorrido por estos grandes pensadores, dando herramientas prácticas al estudiante de carreras administrativas, más allá de las aplicaciones en juegos de azar o conteo, al aplicar la teoría directamente a la toma de decisiones financieras.

#### **1.4.3. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas.**<sup>31</sup>

Se debe tener en cuenta la didáctica de las matemáticas utilizadas para este fin: Dotar al estudiante de herramientas prácticas de decisión empresarial en entornos

---

<sup>29</sup> DE MOIVRE (1756). The doctrine of chances. A Millar, London. Third edition

<sup>30</sup> DASTON, L. (1988). La domesticación de riesgo. Probabilidad, Matemática y Seguro. (1650-1830). Princeton University. P.251”

<sup>31</sup> BATANERO, C. SERRANO, L. (1999). *La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*. Proyecto PS93-0196 de la DGICYT (MEC, Madrid)

cambiantes, mediante problemas abstraídos del mundo empresarial, *“Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico pueden ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas”*<sup>32</sup>se nota la preocupación de este fuerte grupo de investigación en probabilidad, que el estudiante tenga claros los procesos para solucionar problemas de tipo matemático competentemente, como se pretendió en esta investigación.

#### **1.4.4. Informal conceptions of probability.**<sup>33</sup>

Los estudiantes de carreras administrativas deben tener en cuenta series estadísticas históricas (Valor en bolsa de las acciones, promedios de ventas históricas, índices de inflación, tipos de cambio etc.)y es función del docente de estadística hacer hincapié en la necesidad de estructurar un pensamiento numérico estadístico fuerte, correlacionar estos datos con una probabilidad de ocurrencia, y evitar concepciones erróneas como las encontradas en este trabajo: el autor ha investigado la comprensión, por parte de estudiantes universitarios, los enunciados de probabilidad en que el cálculo de probabilidades es frecuencial. En sus trabajos investigó el modo en que los alumnos interpretan las preguntas sobre la probabilidad o asignar el valor de una probabilidad, muestra la dificultad que tienen algunos estudiantes para describir, analizar y concluir

---

<sup>32</sup> *Ibíd.*

<sup>33</sup> KONOLD, C. (1989). Informal conceptions of probability. Bajado del URL: <http://www.jstor.org>, el 15 mayo de 2012.

acerca de la repetición de un experimento aleatorio como parte de una serie de ensayos. Los estudiantes que presenta esta dificultad, consideran que cada una de las repeticiones del experimento es; no guarda relación alguna con las anteriores o posteriores, el autor lo llama outcome approach (enfoque en un solo resultado)". En este sentido es importante verificar la existencia de datos históricos en cada estudio, medir la probabilidad de que ocurran nuevamente o por primera vez; además las herramientas como Excel hacen posible que el estudiante fácilmente produzca gráficas, regresiones, comparativos, correlaciones etc. sin embargo no es motivo de esta investigación profundizar en el uso de estas tecnologías, pero sí se coloca de manifiesto la necesidad de dejar en claro las observaciones de Konold.

#### **1.4.5. Connections between statistical thinking and critical thinking. A case study.**<sup>34</sup>

Este es un trabajo en dónde se contrastan los pensamientos probabilista y crítico, acerca de una situación en específico: líneas de tendencia, problemas e histogramas. Esta información es otorgada a docentes quienes deben, en voz alta, dar alguna interpretación de lo que se afirma con los enunciados o gráficas específicas, a los objetos de estudio se les da un lapso de 40 minutos para hacer comentarios de juicio sin hacer cálculos acerca de la situación, posteriormente se contrasta para conocer los posibles errores de conceptualización en los que se puede incurrir con poca información o con el prejuizamiento de una situación aparente, que surge del pensamiento crítico.

Los estudiantes de la presente investigación, en las pruebas diagnósticas, incurrir en

---

<sup>34</sup> AIZIKOVITSH, E. KUNTZE, S. CLARKE, D. (2012). Connections between statistical thinking and critical thinking – a case study. ICME12.

varios errores de concepto, debido precisamente al juzgamiento de la situación por suposiciones, pensamiento crítico. Revisar estos aspectos es de utilidad importante para el diseño de las rúbricas de evaluación.

#### **1.4.6. The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education.<sup>35</sup>**

La utilización de la herramienta de la guía, induce al estudiante a manejar el problema desde la teoría, utiliza representaciones gráficas, aunque se observó que ninguno de los aprendices realizó gráficas ni de apoyo ni explicativas. Esto se esperaba en cierta medida, ya que está demostrado en la investigación presentada en el ICME11, acerca de la enseñanza de la probabilidad en educación terciaria; se dice textualmente: *“Nuestros resultados indican firmemente, que los estudiantes tienden a evitar las representaciones gráficas y utilizar el enfoque algebraico en su lugar. Los estudiantes que están en capacidad de coordinar múltiples representaciones muestran mejores resultados en la resolución de problemas. Además, los resultados sugieren que la flexibilidad en el uso de múltiples representaciones, es un buen predictor de éxito”*,<sup>36</sup> Aunque las guías tratan de expresar conocimientos algebraicos mediante algunas gráficas, como se trata de que el estudiante tenga un crecimiento autónomo con la guía, los estudiantes decidieron no efectuar diagramas, dibujos, etc.

---

<sup>35</sup> ANASTASIADOU, S. CHADJPANTELIS, T. (2008). The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education. ICME11. Topic Study Group 13 Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

<sup>36</sup> ANASTASIADOU, S. CHADJPANTELIS, T. (2008). The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education. ICME11, Topic Study Group 13 Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

#### 1.4.7. ¿How Do Teachers Deal with the Heuristic of Representativeness?<sup>37</sup>

En referencia al pensamiento autónomo del estudiante, es apropiado afirmar que las actividades están diseñadas para que el aprendizaje del estudiante tenga el mínimo de intervención del docente, aunque por la experiencia de la tutora de la presente investigación, (veedora del proceso) y la confianza de los estudiantes hacia su profesor de matemáticas financieras (investigador), es de esperarse que los estudiantes trataran de validar sus respuestas frente a los tutores, estrategia que contrasta con otro estudio acerca de la concepción de la probabilidad de los docentes y la manera de enseñar y dirigir la resolución de problemas, estudio presentado en el ICME11, por Lucía Zapata de la Universidad de Antioquia, en donde se afirma “...*la mayoría de estos estudios se han centrado en respuestas correctas o incorrectas de los encuestados, y sólo unos pocos tienen el pensamiento de los alumnos examinados en la probabilidad y los métodos eficaces de enseñanza. No hay casi nada en la literatura de investigación, que se centre en las estrategias de enseñanza que se establecen las intuiciones estables y exitosas, enfoques de los estudiantes para hacer frente a las tareas pertinentes*”<sup>38</sup>, estudio que enfrenta la experiencia del docente en el aula y la experticia del mismo en el tema en particular, para determinar mejores resultados, se considera pertinente presentar este trabajo ya que en muchos de los estudios realizados acerca de la enseñanza de la probabilidad, el papel del docente es crucial, casi protagónico en cada una de las fases de la construcción de conocimiento de los estudiantes, en esta investigación no lo es, ya que se diseñaron los problemas con el

---

<sup>37</sup> ZAPATA, L. (2008). How Do Teachers Deal with the Heuristic of Representativeness? ICME11, Topic Study Group 13, Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

<sup>38</sup> ZAPATA, L. (2008). How Do Teachers Deal with the Heuristic of Representativeness? ICME11, Topic Study Group 13, Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

fin de que la guía cumpla con el objetivo de trasponer dichos conocimientos, y bajo la metodología de resolución de problemas<sup>39</sup>, el estudiante construya su propio significado.

#### **1.4.8. Modelos estocásticos en finanzas.<sup>40</sup>**

Es pertinente citar nuevas publicaciones encaminadas a la enseñanza de la probabilidad en las finanzas y economía, como lo es “Modelos estocásticos en Finanzas”, y desde este punto de vista observar como la resolución de problemas financieros han impulsado la generación de nuevas teorías probabilistas para dar suelo a los procesos propios de las finanzas, cita textual en su capítulo destinado al movimiento Browniano: “*En 1900, Louis Bachelier introdujo un modelo del movimiento Browniano (observado en la naturaleza por Brown en 1826) para modelar las actuaciones de la bolsa parisiense*”<sup>41</sup>. Desde la aparición misma de las operaciones mercantiles, se ha tenido un afán por modelar situaciones que minimicen los riesgos en operaciones financieras, en este trabajo básicamente se resumen las ecuaciones aplicadas para la descripción de sucesos aleatorios como la Ecuación de Black Scholes, Movimiento Browniano y el lema de Ito. Es útil citar este trabajo, ya que las matemáticas utilizadas en las finanzas tienden a especializarse cada vez más, al utilizar metodologías cada vez más elaboradas. Aunque los alcances de esta investigación no abarquen temas de los anteriormente nom-

---

<sup>39</sup> RODRIGUEZ, M. Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Universidad Nacional de General Sarmiento. Pg. 153.

<sup>40</sup> MORDECKI, E. Modelos estocásticos en finanzas. I jornada de probabilidad y estadística, Lima Perú, 2010. Universidad de la República, Montevideo Uruguay.

<sup>41</sup> MORDECKI, E. Modelos estocásticos en finanzas. I jornada de probabilidad y estadística, Lima Perú, 2010. Universidad de la República, Montevideo Uruguay.



brados, es probable que en etapas superiores de esta investigación, se adopten algunos de ellos. Por ahora basta con el modelo de Markowitz.<sup>42</sup>

#### **1.4.9. Cómo reducir la incertidumbre en las finanzas.**<sup>43</sup>

*“Sin riesgo no hay negocio; sin embargo todas las decisiones empresariales buscan medirlo, controlarlo y administrarlo. El cambio continuo en la economía y las finanzas, principalmente, ha propiciado la aplicación de métodos y modelos estadísticos de mayor sofisticación matemática en la toma de decisiones en ambientes de riesgo e incertidumbre. La estadística proporciona un enfoque que considera el concepto elemental de probabilidad subjetiva para incorporar el conocimiento, experiencia e intuición en un modelo de toma de decisiones; en este documento se muestra cómo se reduce la incertidumbre en la amortización de una deuda en un ambiente de alta inflación con uno de tales modelos.”* En este trabajo de la profesora del departamento actuarial de la UAM, muestra la importancia cada vez mayor de incorporar modelos estadísticos a la toma de decisiones empresariales. En el desarrollo del artículo muestra la manera de elaborar diagramas de árbol para decisiones subjetivas, de manera parecida a algunos apartes en el desarrollo de la guía 2 de la presente investigación. Aunque la profesora Daniel no aborda temas de didáctica, si utiliza muchos de los objetos utilizados en las guías, y de igual manera pretende que el estudiante genere unas competencias específicas en cuanto a la toma de decisiones en situación de incertidumbre financiera. En su desarrollo práctico, el trabajo de la profesora Daniel, es el trabajo que más se asemeja a la presente investigación.

---

<sup>42</sup> MARKOWITZ, H. (1962). Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol. 7, pp.77-91.

<sup>43</sup> DANIEL, Y. (2000). Cómo reducir la incertidumbre en las finanzas. Política y Cultura 013. UAM, Xochimilco. Introduction P. 1.

#### **1.4.10. Learning to integrate statistical and work-related reasoning.<sup>44</sup>**

Este artículo habla de la vinculación de los conceptos estadísticos vistos en el aula, con aplicaciones en el sitio de trabajo del estudiante. Un experimento con tres estudiantes, que laboran en laboratorios clínicos con el fin de probar si los aprendices aprendieron a integrar mejor el conocimiento de carácter estadístico, desarrolla un sistema de codificación que llaman niveles de razonamiento integrador. El objetivo de esta investigación es mostrar que la investigación en el área profesional podría ser relevante para la educación en general, aplica los enfoques basados en un contexto auténtico. La comprensión de cómo las matemáticas y las estadísticas se utilizan en el trabajo y cómo los estudiantes de formación profesional, debe ser un recurso útil para la educación en general.

Una de las fuentes promotoras de la idea de trabajar en las competencias referentes a la toma de decisiones financieras competentes, es la de suplir necesidades laborales no satisfechas por la educación tradicional probabilista, en cierta medida hace referencia que los contextos a utilizar en los problemas propuestos, se debe acercar aún más a los problemas financieros reales.

---

<sup>44</sup> BAKKER, A. MIERLO, X. AKKERMAN, S. (2012), Learning to integrate statistical and work-related reasoning. ICME 12.

## **CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN**

### **2.1. Selección de la muestra**

Los estudiantes que conformaron la muestra son estudiantes de cuarto semestre de las carreras: Administración de empresas, Comercio Internacional, Economía, Contaduría pública. Estos estudiantes tienen ciertas características comunes en su formación debido a que su ciclo básico es el mismo, y estaban cursando entre otras materias, Matemáticas Financieras, Estadística II. (Modelos e inferencia estadística).

Para el interés de la investigación, deben tener aprobadas las materias:

- Matemáticas I. (Cálculo 1), Abarca tres temas: Repaso de álgebra, límites y derivadas.
- Matemáticas 2. (Cálculo 2), Abarca: integración.
- Estadística I. (Estadística y probabilidad), Abarca: Estadística descriptiva, probabilidad y modelos.

Las pruebas se aplicaron indistintamente a estudiantes con promedio alto o bajo, propiamente en la asignatura de matemáticas financieras.

Se trata de un estudio longitudinal ya que se observa el grupo en diferentes etapas y se realiza un análisis de su evolución. En un principio se les aplicó un pre-test a los estudiantes, quienes toman referencias didácticas de lo aprendido en probabilidad y matemáticas financieras para tratar de resolver situaciones financieras contingentes planeadas específicamente para medir el grado de motivación hacia el tema y sus capacidades para resolverlo de una manera espontánea, al involucrar conceptos que ya deberían conocer, como son:

- Espacio muestral.
- Nociones básicas de probabilidad (Reglas aditiva y multiplicativa).

- Probabilidad condicional
- Esperanza matemática.
- Valor Presente.
- Valor Futuro.
- Conversión de tasas.
- Anualidades.
- Gradientes.

Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos a los cuestionamientos planteados, se observa la existencia de diferentes factores que sugieren capacidades diferenciadas o tipos diferenciados de conocimiento, así que se estratificaron las competencias de estos estudiantes por su nivel de comprensión, abstracción de los temas de relevancia y por la competencia al desarrollar los test de diferente manera.

Posteriormente se analizaron las pruebas diagnósticas para determinar las posibles debilidades en la correlación de los conceptos probabilísticos y de matemática financiera, y la heurística utilizada para la resolución de los problemas que se abordaron. Esta heurística fue de gran ayuda para la comprensión de los modelos matemáticos que el estudiante aplicó en situaciones contingentes y financieras y para el diseño de las guías de aprendizaje.

Los estudiantes analizados en la prueba diagnóstica fueron:

Estudiantes Cuarto semestre de carreras administrativas, económicas y contables de la Universidad Antonio Nariño sede Nicolás de Federman, Diurno.

Estudiantes Cuarto semestre de carreras administrativas, económicas y contables  
Universidad Antonio Nariño sede Nicolás de Sur, Nocturno.

Fue necesario ajustar la muestra y reducirla únicamente a los estudiantes de la jornada del mañana, debido en gran parte a la homogeneidad obtenida en el grupo de la mañana, como se mostrará en los anexos. (Anexo 2.)

Para la evaluación se utilizó la metodología de rúbricas, descritas en el procedimiento de análisis.

Para el manejo estadístico de los estudiantes y su protección, se decidió codificarlos como E1, E2...E12.

## **2.2. Procedimiento de análisis**

Se diseñaron guías de estudio en las que aparecen conceptos involucrados en la prueba diagnóstica y la manera de resolverlos adecuadamente se debe relacionar conceptos que los estudiantes ya conocen en probabilidad y matemáticas financieras, haciendo un recorrido por la asignatura de estadística y probabilidad, generoso en contenido y fácil en su manipulación, desde la medición de espacios muestrales hasta la aplicación de modelos de riesgo, como se comentó en la planeación de las actividades. El modelo, la estructura de la guía a aplicar es el resultado del consenso de los estudiantes de maestría en la asignatura de tecnología<sup>45</sup>. Posteriormente se organizaron el tiempo y espacios propicios en la Universidad Antonio Nariño para que el estudiante tuviera la libertad de estudiar los contenidos y aplicar esos conocimientos a las actividades propuestas, con la asesoría pertinente de los profesores de

---

<sup>45</sup> En la Asignatura El Uso de Computadores en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática; en el segundo semestre de 2011 se llegó al acuerdo en consenso con el docente Henry Buitrago y los estudiantes de la maestría, acerca del contenido mínimo de la guía de aprendizaje que se debe utilizar en educación a distancia.

probabilidad y matemáticas financieras. Estas guías tienen como objetivo el ilustrar al estudiante de la correlación existente en esos conceptos vistos de una manera autónoma

La aplicación de las actividades se realizó en la clase de Matemáticas Financieras, con la presencia de la Dra. Constanza Quintero. Sin embargo no se intervino en el proceso de aprendizaje del estudiante. Luego se aplicó una encuesta final la cual permitió determinar la percepción final de los estudiantes y algunos conocimientos.

Esta heurística se evaluó desde el punto de vista de las rúbricas; una definición del autor acerca del método de rúbricas de evaluación podría ser: *“Una descripción secuencial y lógica del proceso heurístico que el estudiante debe recorrer para llegar al resultado deseado, con el fin de ser base para la evaluación.”*. Este tipo de evaluación mediante rúbricas permite establecer un nivel de competencia adquirida por el estudiante, porque estandariza las calificaciones por nivel de desempeño.

Después de analizar las respuestas de los estudiantes, desde el punto de vista de las rúbricas establecidas, fue necesario retroalimentar para verificar y rediseñar las actividades, ya que el proceso en su fase de planeación es dinámico, y sujeto a modificaciones que sean pertinentes, pero siempre dentro del marco conceptual que ya se describió.

Además de analizar y divulgar los resultados con los estudiantes, es necesario dar a conocer los resultados a los expertos involucrados, profesores de la maestría y jurados, para finalmente recopilar los datos y entregar la tesis a consideración. Esta información se recopiló en la encuesta final en donde se les mostró la prueba diagnóstica y la aplicación de las guías y se les indagó acerca de la experiencia.

### **CAPITULO 3. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES**

El marco metodológico de la investigación contempló el diseño de dos pruebas diagnósticas tendientes a medir la percepción de los estudiantes hacia los objetos a estudiar, tres guías de apoyo para el estudiante, y una última encuesta para medir la experiencia del estudiante en cuanto al experimento y validar las hipótesis.

#### **3.1. Diseño de las pruebas diagnósticas**

Como preliminares al estudio de los objetos de la investigación, se decidió efectuar dos pruebas diagnósticas con los estudiantes objeto de estudio. Es de aclarar que los estudiantes tienen el conocimiento acerca de matemáticas financieras y probabilidad suficiente para resolver estos problemas. En los anexos se encuentra el desarrollo de las dos pruebas diagnósticas aplicadas, (Anexo 3, 4.). Estas pruebas contienen los objetos que se pretende desarrollar en las competencias de los estudiantes: valor esperado, valor presente y futuro de anualidades uniformes, inicialmente; objetos que en su significado tanto institucional como personal tienen alta relevancia dentro del contexto de la cotidianidad en la toma de decisiones financieras.

#### **3.2. Diseño de las guías**

Teniendo en cuenta las heurísticas utilizadas por los estudiantes en las pruebas diagnósticas, hubo necesidad de planear las guías de manera que el estudiante tomara los conocimientos previos en probabilidad, contextualizara con conocimientos financieros, e integrara de manera natural estas dos teorías. (Anexos5, 6, 7.)

### 3.3. Diseño de la encuesta final

Con el fin de que el estudiante sea consciente de que debe pensar distinto a como se le enseñó para lograr la resolución de problemas de este tipo, y para que en la investigación se consignara la percepción final de los estudiantes en cuanto al manejo de las guías, las actividades planteadas, su desempeño y sensaciones, se creó una encuesta final que mide algunas de las observaciones previas planteadas en la hipótesis. El diseño de la encuesta se aprecia en los anexos. (Anexo 8.)

### 3.4. Solución, rúbricas de evaluación, análisis de heurísticas y análisis de evaluación de las actividades aplicadas

#### 3.4.1. Primera prueba diagnóstica

##### 3.4.1.1. Problema 1

El señor Néstor Escobar sufre de una grave enfermedad al hígado, según el comité médico sus probabilidades de supervivencia son:

Años ( $n$ )	Probabilidad de sobrevivir $n$ años
1	0,65
2	0,25
3	0,1

La compañía para la que labora decide entregar a modo de indemnización, un bono por US\$ 25.000.o anuales pagaderos al final de cada año, debido a su imposibilidad de continuar laborando.

1. ¿Cuál será el valor presente esperado de esos pagos si el dinero tiene un rendimiento del 7% Efectivo Anual?



2. Si el empleado sugiere que se le efectúe el pago de la indemnización mensualmente, si entre cada año se sigue una distribución uniforme de ocurrencia de la muerte del trabajador, ¿Cuál será el valor esperado de cada pago?

**3.4.1.2. Solución del primer punto:**

El valor esperado de los pagos también debe traerse al presente, porque los intereses generados en la operación financiera van de la mano con la probabilidad de ocurrencia del evento; en este caso la muerte del trabajador. Entonces:

$$E(x) = \sum_{i=1}^3 x_i p(x_i).$$

$x_i$ :  $i$  – ésimo valor que toma la variable aleatoria discreta  $x$ .

$p(x_i)$ : Probabilidad de ocurrencia del  $i$  – ésimo resultado de la variable aleatoria  $x$ .

$$E(x) = 25000(1.07)^{-1}(0.65) + 25000(1.07)^{-2}(0.25) + 25000(1.07)^{-3}(0.1)$$

$$E(X) = \$22.686,65$$

**3.4.1.2. Rúbricas de evaluación:**

Problema 1.

Puntuación

Identifica que la variable aleatoria son los pagos.	10
Relaciona el valor presente con la variable aleatoria.	10
Aplica correctamente el criterio de valor presente esperado.	20
Realiza las operaciones y obtiene el resultado.	10
Total	50

**3.4.1.3. Análisis de las heurísticas**

En la solución del primer punto de la primera prueba diagnóstica se puede destacar el

manejo ordenado de las variables aunque no se llega a la solución adecuada, se muestra por parte de los aprendices cierta destreza en la manipulación de datos de este tipo.

- Se muestra el resultado obtenido por E1.

Handwritten work on grid paper showing calculations for compound interest and expected value. The work is as follows:

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad & 25\,000(1+0,07) = 26\,750 \\ & 26\,750(1+0,07) = 28\,622,5 \\ & 28\,622,5(1+0,07) = 30\,626,075 \end{aligned}$$

$$E(x) = \sum X_i P(x_i) = 26\,750(0,65) + 28\,622,5(0,25) + 30\,626,075(0,1)$$

$$= 27\,605,7325$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ año} &= 26\,750 \cdot 0,65 = 17\,387,5 \\ 2 \text{ año} &= 28\,622,5 \cdot 0,25 = 7\,155,625 \\ 3 \text{ año} &= 30\,626,075 \cdot 0,1 = 3\,062,6075 \end{aligned}$$

Gráfica 1.

En este resultado, el estudiante intenta ordenar los procesos, primero los financieros, con los datos obtenidos y a partir de allí aplica el criterio de valor esperado. Se puede observar que lleva a valor futuro por un año cada pago, no tiene sentido esta operación en tal contexto, sin embargo, obtenidos estos valores los multiplica por la probabilidad, asumiendo que este es el valor presente esperado de los pagos. Sólo discrepa de la solución, que no lleva los valores de los pagos al presente.

- Solución mostrada por E2.

Handwritten work on grid paper showing the calculation of expected value and its future value. The work is as follows:

Sol

$$\textcircled{1} \quad E(x) = \sum_{i=1}^n X_i (P_i)$$

$$(1)(0,65) + (2)(0,25) + (3)(0,1) = 1,45$$

El v/i esperado es US 36250

$$36250(1+0,07) = 38787,5$$

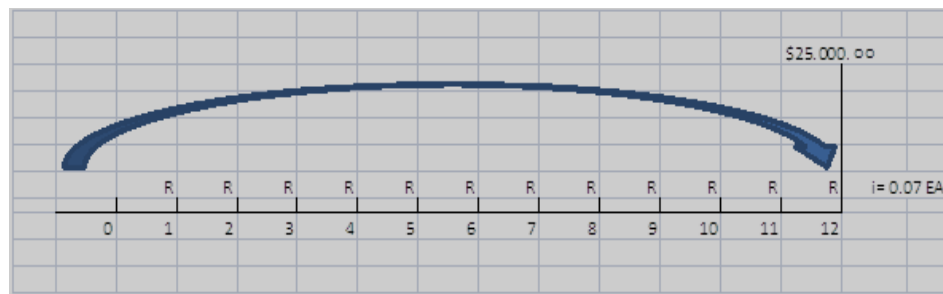
Gráfica 2.

El estudiante primero aborda la parte probabilística del ejercicio, sin embargo confunde la variable aleatoria con el cardinal del ejercicio, que en este caso son los años;

obteniendo un resultado que se podría interpretar como la esperanza de vida del trabajador, y lo multiplica por un pago de US\$25.000, obtiene US\$36.250, luego lo multiplica por los intereses anuales, otro paso sin sentido alguno. Siete de los doce estudiantes confundieron la variable aleatoria con el cardinal.

#### 3.4.1.4. Solución del segundo punto:

El valor de cada uno de los pagos de \$25.000 dólares se efectúa al final del año, entonces se convertirá en el valor futuro de los pagos mensuales así:



Gráfica 3

Además, se debe convertir la tasa anual a tasa mensual por que los pagos son de manera mensual:

$$\sqrt[12]{1 + 0,07} - 1 = 0,005654145 \text{ EM}$$

El valor futuro de una anualidad uniforme  $S$  se comporta de la siguiente manera:

$$S = R \left( \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right)$$

Donde:

$i$  := Tasa de interés efectiva.

$n$  := Tiempo de la inversión en este caso el número de pagos.

$R$  := Valor de la cuota mensual o renta.

Entonces para el primer año el valor esperado de la renta es:

$$(25.000)(0.65) = R \left[ \frac{(1 + 0.005654145)^{12} - 1}{0.005654145} \right]$$

$$R = \frac{(25.000)(0.65)}{\left[ \frac{(1+0.005654145)^{12}-1}{0.005654145} \right]}$$

$$R = 1312.569469$$

Para el segundo año el valor esperado de la renta es:

$$R = \frac{(25.000)(0.25)}{\left[ \frac{(1+0.005654145)^{12}-1}{0.005654145} \right]}$$

$$R = 504.834411$$

Para el tercer año el valor esperado de la renta es:

$$R = \frac{(25.000)(0.1)}{\left[ \frac{(1+0.005654145)^{12}-1}{0.005654145} \right]}$$

$$R = 201.9338.$$

### 3.4.1.5. Rúbricas de evaluación:

Problema 2.

Puntuación

Identifica que el primer paso es convertir la tasa.	10
Identifica que los pagos deben ser calculados por 12 meses, no 36.	10
Separa las anualidades en tres, según la probabilidad.	10
Aplica correctamente el criterio de valor presente esperado.	20
Total	50

### 3.4.1.6. Análisis de heurísticas

10 de los estudiantes, interpretaron que eran 36 pagos indistintamente de los valores presentes y la probabilidad de ocurrencia, como se muestra en las imágenes de la solución de E3 y E4.

a. Resultados obtenidos por E3.

Es interesante este resultado; la estudiante promedia las probabilidades, (Gráfica 4)

n	Probabilidad de sobrevivir n años	P
1	0,65	0,33
2	0,25	
3	0,1	

Gráfica 4.

Posteriormente tiene un manejo financiero de los pagos impecable al asumir que los US\$25.000 representan tres pagos vencidos, posteriormente busca el valor presente, toma los tres pagos como anualidad cierta, pero es incapaz de correlacionar los conceptos financieros, con los probabilísticos.

**Solución**

①  $\mu = 0,33$

$$VP = 25.000 \left[ \frac{1 - (1 + 0,07)^{-3}}{0,07} \right] = 65.607,9011$$

$$\sqrt[12]{(1 + 0,07)^T} - 1 = 0,005654145387$$

$$D = \frac{65.607,9011}{\left[ \frac{1 - (1 + 0,005654145387)^{-36}}{0,005654145387} \right]} = 2.019,337993$$

Gráfica 5.

Los resultados de E3 muestran un manejo competente en la parte financiera: deduce que debe distribuir 3 pagos anuales, en 36 pagos mensuales, así que halla el valor presente, de los tres pagos anuales, utiliza el valor presente de una anualidad uniforme con pagos de \$25.000, identifica que los pagos son mensuales, así que convierte la tasa de efectiva anual a efectiva mensual, posteriormente distribuye los pagos; sin

embargo no toca las probabilidades. Nuevamente se muestra que el estudiante no es competente al correlacionar las dos teorías.

b. Solución de E4.

Solución

$$1. \sqrt[12]{(1+0,07)^{12}} - 1 = 0,00565414538$$

$$\frac{i(1+i)^n - 1}{i} =$$

$$= \frac{25(1+0,00565414538)^{36} - 1}{0,00565414538} = 5239,708746$$

$$2. \frac{5239,708746}{1 - (1+0,00565414538)^{-36}} = 161,272 \text{ Renter}$$

Esta es la cantidad de dinero que se le tiene que dar al Señor Nestor por su enfermedad.

Gráfica 6.

En este resultado se observa cómo la estudiante ignora totalmente las probabilidades de sobrevivencia del trabajador, al abordar solo por la parte financiera el problema, sin embargo interpreta bien las anualidades en su estructura.

### 3.4.2. Segunda prueba diagnóstica

Un inversionista tiene los siguientes planes para evaluar y decidir dónde colocar su dinero, se le presentan los siguientes planes:

1. Invertir en renta fija, con una rentabilidad del 10% EA.
2. Una inversión en renta variable en el mercado de valores de su país, con probabilidades de ocurrencia como se muestran a continuación:

UTILIDAD, (EVENTO)	PROBABILIDAD DE OCURRENCIA
20%	0,15
15%	0,15
10%	0,3
5%	0,25
3%	0,15

### 3.4.2.1. Solución

Se evalúa el segundo proyecto, con el criterio de valor esperado:

$$E(x) = \sum_{i=1}^5 x_i p(x_i) = (0,2)(0,15) + (0,15)(0,15) + \dots + (0,03)(0,15).$$

$$E(x) = 0,0995$$

Según este criterio, se concluye que la inversión con mejores expectativas es la renta fija, ya que se obtiene que el valor esperado de las inversiones en renta variable es de 9.95%, mientras que la renta fija nos garantiza el 10%, así:

$$E(x) = \sum_{i=1}^5 x_i p(x_i) = 0,0995 < 0,1.$$

### 3.4.2.2. Rúbricas de evaluación:

Problema 1.

Puntuación

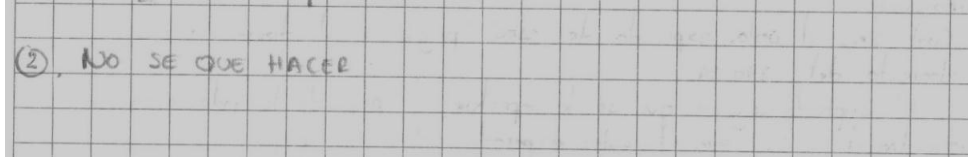
Identifica que solo debe trabajar con el proyecto 2.	5
Identifica que la variable aleatoria es la rentabilidad variable.	10
Aplica el criterio de valor esperado	20
Calcula, obtiene la respuesta y concluye.	15
Total	50

### 3.4.2.3. Análisis de heurísticas

Este punto aplica el criterio de valor esperado, con el fin de demostrar que los estudiantes sí lo manejan suficientemente, prueba de esto es que tiene el mayor

promedio que las demás pruebas a pesar de esto hubo 2 respuestas, que afirman no saber qué hacer. (Gráfica 7).

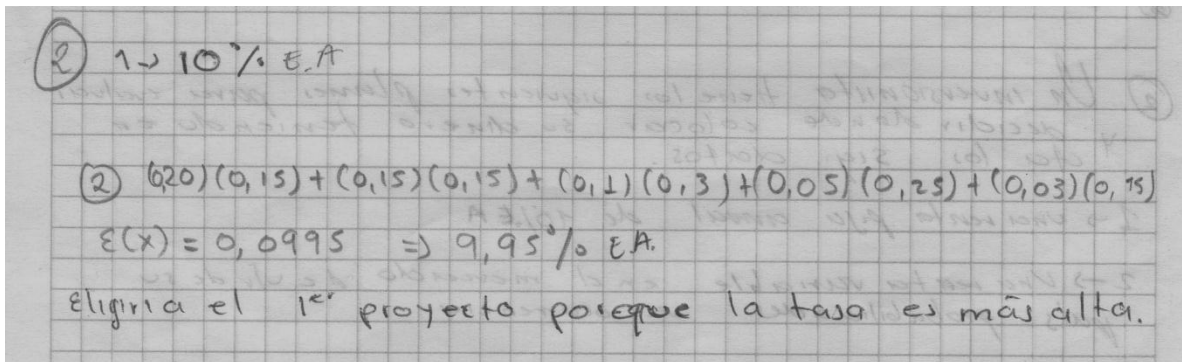
Respuesta de E5.



Gráfica 7.

A modo de ver del investigador esta falta de contenido en la respuesta, después de analizar e interpretar el ejercicio, es probablemente debido a que los estudiantes en cuestión son incapaces de abstraer objetos únicamente de probabilidad en una clase de matemáticas financieras. Integrar matemáticas financieras con probabilidad no le es natural al estudiante.

a. Respuesta de E2.



Gráfica 8.

Respuesta recurrente en cinco estudiantes. Financieramente no hay que hacer proceso alguno, esto evidencia que los estudiantes tienen bases sólidas para aplicar valor esperado, cuando así se les solicite. Es de resaltar que después de varios minutos fue necesario recordarles que el valor esperado se define así:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$



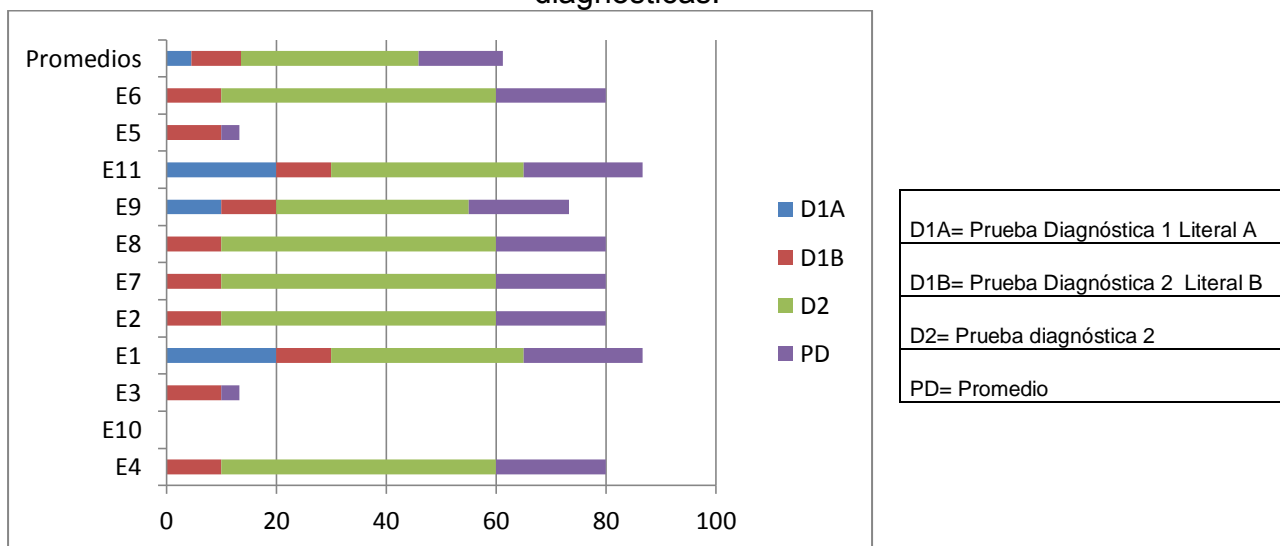
Si se pretende potenciar las competencias, la labor del estudiante es interpretar más que memorizar, es de suma importancia que el estudiante interprete y aplique, no que memorice, por esta razón es válido entregar las fórmulas a los estudiantes.

### 3.4.3. Resultados obtenidos pruebas diagnósticas:

Prueba	D1A	D1B	D2	PD
E4	0	10	50	20
E10	0	0	0	0
E3	0	10	0	3
E1	20	10	35	22
E2	0	10	50	20
E7	0	10	50	20
E8	0	10	50	20
E9	10	10	35	18
E11	20	10	35	22
E5	0	10	0	3
E6	0	10	50	20
Promedios	4,5	9,1	32	15
D1A= Prueba Diagnóstica 1 Literal A				
D1B= Prueba Diagnóstica 2 Literal B				
D2= Prueba diagnóstica 2				
PD= Promedio				

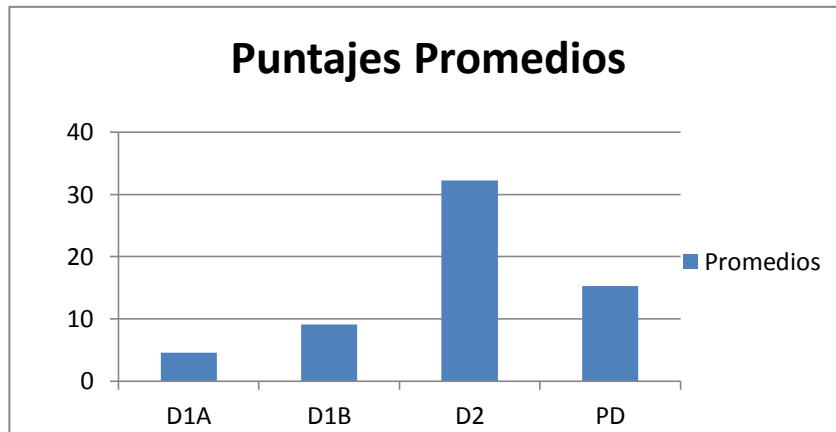
Cuadro 1.

Gráfica de desempeño individual de los tres puntos evaluados en las dos pruebas diagnósticas.



Gráfica 9.

Gráfica de desempeño por cada punto evaluado dentro de las pruebas diagnósticas.



D1A= Prueba Diagnóstica 1 Literal A
D1B= Prueba Diagnóstica 2 Literal B
D2= Prueba diagnóstica 2
PD= Promedio

Gráfica 10

Se puede observar que el grupo en general no encuentra familiar los problemas propuestos así posea los conocimientos adecuados y suficientes para resolverlos, es así como en las heurísticas utilizadas, se nota que aplican criterios aislados así el problema involucre las dos materias, probabilidad y matemáticas financieras, objetos de esta investigación. Es así como se observa que el punto 1 de la segunda prueba diagnóstica (D2), muestra mejores resultados con un promedio de 32 sobre 50, se resalta que este punto únicamente abarcaba probabilidad.

#### 3.4.4. Primera guía aplicada

El diseño de la guía completa se puede observar en el anexo 5.

##### 3.4.4.1. Problema 1

Usted, como gerente financiero debe elegir entre lanzar o no, una nueva campaña de marketing. Después de analizar la respuesta de los consumidores, se ha determinado

que las ventas del siguiente año pueden crecer mes a mes en una suma fija con las siguientes probabilidades.

Incremento (En Unidades)	Probabilidad
<b>0</b>	<b>0,1</b>
<b>100</b>	<b>0,3</b>
<b>200</b>	<b>0,4</b>
<b>300</b>	<b>0,2</b>

Cuadro 2.

Si la producción actual es de **800** unidades, calcule el presupuesto de ventas para el semestre. Calcule además las siguientes probabilidades:

- Que las ventas para el segundo mes superen las **1000** unidades.
- Que las ventas continúen constantes.
- Que las ventas superen en el quinto mes las **1300** unidades.

#### 3.4.4.1.1. Solución:

Los estudiantes deben identificar que se trata de anualidades variables con gradiente lineal, y que cada una tiene su probabilidad de ocurrencia.

Sea el evento  $A =$  "Las ventas se mantienen constantes".

Sea el evento  $B =$  "Las ventas se incrementan en 100".

Sea el evento  $C =$  "Las ventas se incrementan en 200".

Sea el evento  $D =$  "Las ventas se incrementan en 300".

- Que las ventas para el segundo mes superen las **1000** unidades.

En el evento  $B$  y  $C$  no superan las **1000** unidades.

Entonces solo se da la probabilidad del evento  $D$ .

$$P(D) = 0.2$$

- Que las ventas continúen constantes.

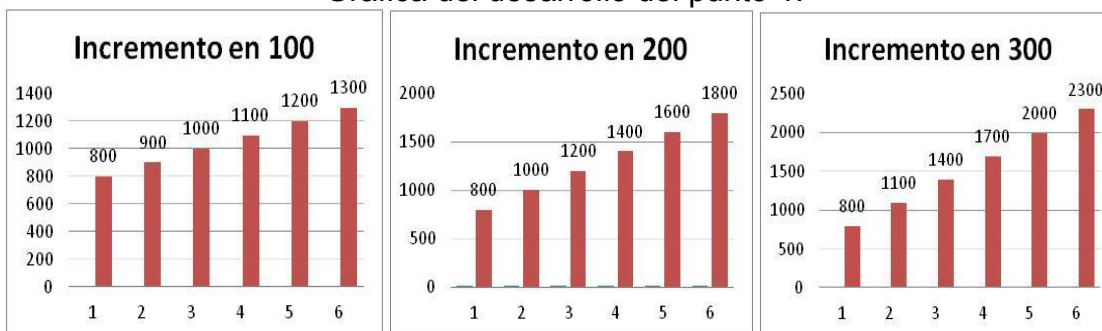
$$P(A) = 0.1$$

c. Que las ventas superen en el quinto mes las **1300** unidades.

En la gráfica 1 se observa que en el quinto mes se superan las **1300** unidades en los eventos **C** y **D**, entonces:

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

Gráfica del desarrollo del punto 1.



Gráfica 11.

### 3.4.4.1.2. Rúbricas de evaluación:

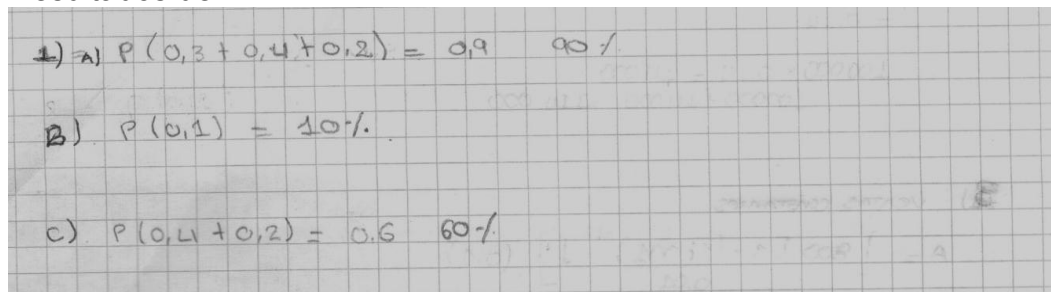
Problema 1.

Puntuación

Identifica que es un gradiente	10
Reconoce la variable aleatoria.	10
Realiza las operaciones y obtiene el resultado.	30
Total	50

### 3.4.4.1.3. Análisis de las heurísticas

Resultados de E1.



Gráfica 12.

Todos los estudiantes confundieron la expresión “*Que las ventas para el segundo mes superen las 1000 unidades*”, probablemente porque ninguno realizó gráfica alguna, se

ratifica lo que afirman Anastasiadou, S. Chadjpantelis, T.<sup>46</sup> en su estudio presentado en el ICME11; se evidencia que con la elaboración y análisis de la gráfica se llega a la conclusión de una manera clara y simple.

### 3.4.4.2. Problema 2

Se posee la siguiente información en detalle acerca de tres compañías (A, B y C), de publicidad que nos ofrecen las campañas de marketing más atractivas.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>Total</b>
Incrementan	<b>0,2</b>	<b>0,1</b>	<b>0,3</b>	<b>0,6</b>
Continúan constantes	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,25</b>	<b>0,4</b>
Total	<b>0,3</b>	<b>0,15</b>	<b>0,55</b>	<b>1</b>

- Calcule la probabilidad de que se incrementen las ventas dado que se haya escogido cada una de las empresas.
- Calcule la probabilidad de que se escoja alguna de las empresas dado que se incrementen las ventas.

#### 3.4.4.2.1. Solución:

Sea el evento  $A$  = “se escoja A”.

Sea el evento  $B$  = “se escoja B”.

Sea el evento  $C$  = “se escoja C”.

Sea el evento  $D$  = “Incrementen las ventas”.

- Solución del literal a;

Para la empresa A.

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)}$$

<sup>46</sup>ANASTASIADOU, S. CHADJPANTELLIS, T. (2008) “The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education”

$$P(D|A) = \frac{0,2}{0,3} = 0,666667$$

Para la empresa B.

$$P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)}$$

$$P(D|B) = \frac{0,1}{0,15} = 0,666667$$

Para la empresa C.

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

$$P(D|C) = \frac{0,3}{0,55} = 0,545454$$

- Solución del literal b:

Para la empresa A.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$P(A|D) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

Para la empresa B.

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)}$$

$$P(D|B) = \frac{0,15}{0,6} = 0,25$$

Para la Empresa C.

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

$$P(D|C) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$$

### 3.4.4.2. Rúbricas de evaluación:

Problema 2.

Puntuación

Reconoce y define los eventos	20
Reconoce la intersección de los eventos	20
Realiza las operaciones y obtiene el resultado.	10
Total	50

### 3.4.4.3. Análisis de heurísticas

a. Resultados obtenidos por E1.

Handwritten calculations on grid paper:

2) A)  $P(A|T) = \frac{0,2}{0,3} = 0,666 \quad 66,6\%$

$P(B|T) = \frac{0,1}{0,15} = 0,666 \quad 66,6\%$

$P(C|T) = \frac{0,3}{0,55} = 0,545 \quad 54,5\%$

B)  $P(A|I) = \frac{0,2}{0,6} = 0,333 \quad 33,3\%$

$P(B|I) = \frac{0,1}{0,6} = 0,166 \quad 16,6\%$

$P(C|I) = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 \quad 50\%$

Gráfica 13.

Todos los estudiantes confundieron la condición en el literal B, como lo obtuvo E1. La estudiante indaga acerca de las soluciones del literal B, de la siguiente manera: “¡los eventos del literal B, son imposibles... ya que para la empresa A; si tomo 0.6 dividido en 0.3 obtengo 2, y esto no puede ser!”. Como las actividades están diseñadas para que el docente no intervenga, no se le indica que es lo que debe hacer, así que la estudiante, de manera errada concluye que debe ser al revés, y en primera medida

coloca 0,3 dividido en 0,6, “*¡pero esto no es la intersección!*”, ella misma concluye, así que toma cualquier valor, de la empresa A, y lo divide en 0.6. Aduce que por tiempo tomó la decisión de hacerlo de esta forma. El desarrollo de las guías, en este problema en particular se torna al estilo de la TSD (Teoría de situaciones didácticas) de Brosseau<sup>47</sup>, lamentablemente no se llega al objetivo completo del literal B.

### 3.4.4.3. Problema 3

Teniendo en cuenta que los costos de las campañas para cada una de las empresas anteriores son las siguientes:

A: Valor Presente: \$100.000.000.00

B: Valor Presente: \$120.000.000.00

C: Valor Presente: \$110.000.000.00

Y si el precio de venta por unidad es de \$15.000.00, indique bajo el criterio de valor presente neto, la oferta más atractiva en el lapso de un año a una tasa del 1% EM.

#### 3.4.4.3.1. Solución:

El valor presente de una anualidad variable con gradiente lineal está dado por:

$$A = R \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{L}{i} \left[ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - n(1 + i)^{-n} \right]$$

Dónde:

$A$  := Valor presente.

$R$  := Valor de la primera cuota.

$L$  := Valor del incremento lineal.

$i$  := Tasa efectiva de Interés.

$n$  := Número de cuotas.

---

<sup>47</sup> POCHULU, M, RODRIGUEZ, M. (2012) “Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos” P. 20. los autores describen tres etapas fundamentales en la solución de problemas desde el enfoque de la TSD: Acción, Formulación y Validación.



Evaluación para la empresa A:

Ingresos o beneficios obtenidos por la campaña de marketing con la empresa A:

$$A = (15.000)(800) \left[ \frac{1-(1+0,01)^{-12}}{0,01} \right] + \frac{(100)(15.000)}{0,01} \left[ \frac{1-(1+0,01)^{-12}}{0,01} - 12(1+0,01)^{-12} \right].$$

$$A = (12000000)[11.25507747] + 150000000[11.25507747 - 10.6493907].$$

$$A = 135060929 + 90853015 = 2259139446.$$

Egresos producto de la nueva campaña \$100000000.00, entonces el VPN de la campaña:

$$VPN_A = 2259139446 - 100000000 = 1259139446$$

Análogamente, para las otras empresas:

Empresa B, con  $L = (200)(15000)$ , se tiene:

$$A = (15.000)(800) \left[ \frac{1-(1+0,01)^{-12}}{0,01} \right] + \frac{(200)(15.000)}{0,01} \left[ \frac{1-(1+0,01)^{-12}}{0,01} - 12(1+0,01)^{-12} \right].$$

$$VPN_B = 316766960,1 - 120000000 = 196766960,1$$

Empresa C, con  $L = (300)(15000)$ , se tiene:

$$A = (15.000)(800) \left[ \frac{1-(1+0,01)^{-12}}{0,01} \right] + \frac{(300)(15.000)}{0,01} \left[ \frac{1-(1+0,01)^{-12}}{0,01} - 12(1+0,01)^{-12} \right].$$

$$VPN_C = 407619976,3 - 110000000 = 297619976,3.$$

Se debe escoger la empresa con mayor valor presente neto, la empresa C.

### 3.4.4.3.2. Rúbricas de evaluación:

Problema 3.	Puntuación
Reconoce y define que son tres gradientes distintos.	15
Reconoce las variables $R, L$ y $n$ , en cada uno de ellos.	15
Compara beneficios con costos.	10
Formula y evalúa adecuadamente cada campaña.	10
Total	50

### 3.4.4.3.3. Análisis de heurísticas

a. Resultados obtenidos por E6.

Ventas constantes

$$A = 800 \left[ \frac{1 - (1 + 0,01)^{-12}}{0,01} \right] (0,1)$$

$$A = 9004,061979 (0,1) = 900,4061979$$

Incremento 100

$$A = 800 \left[ \frac{1 - (1 + 0,01)^{-12}}{0,01} \right] + \frac{100}{0,01} \left[ \frac{1 - (1 + 0,01)^{-12}}{0,01} - 12(1 + 0,01)^{-12} \right]$$

$$A = (9004,061979 + 6056,857701) (0,3)$$

$$A = 4518,278909$$

Incremento 200

$$A = 800 \left[ \frac{1 - (1 + 0,01)^{-12}}{0,01} \right] + \frac{200}{0,01} \left[ \frac{1 - (1 + 0,01)^{-12}}{0,01} - 12(1 + 0,01)^{-12} \right]$$

$$A = (9004,061979 + 12113,7354) (0,4)$$

$$A = 3447,718952$$

Incremento 300

$$A = (9004,061979 + 18170,6031) (0,2)$$

$$A = 5434,933016$$

Gráfica 14.

Es interesante observar este punto, a pesar de que es el más complicado algebraicamente, todos los estudiantes obtuvieron algún puntaje, inclusive, este estudiante involucra la probabilidad de ocurrencia, se presume que es porque la pregunta exclusivamente financiera y en el momento de la aplicación de la guía, los estudiantes abarcaban el tema de gradientes en su asignatura de matemáticas financieras.

#### 3.4.4.4. Problema 4

Como Gerentes financieros ¿Qué empresa escogerían para realizar su campaña de marketing del próximo año?

##### 3.4.4.4.1. Solución problema 4:

El estudiante debe interpretar adecuadamente cada literal obtenido, existen múltiples opciones de interpretación.

##### 3.4.4.4.2. Rúbricas de evaluación:

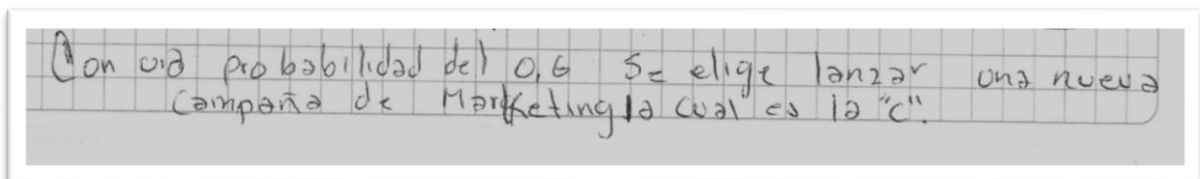
Problema 4. Puntuación

Evalúa la mejor opción probabilísticamente.	15
Evalúa la mejor opción financieramente.	15
Compara las dos opciones.	20
Total	50

Se esperaba un análisis más generoso por parte de los estudiantes, sin embargo las respuestas más frecuentes fueron:

- a. Solución presentada por E7, E8 y E4:

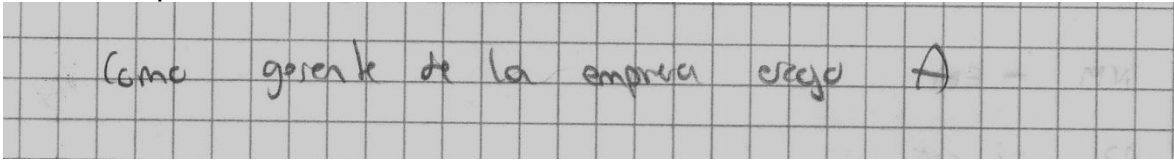
Basados en el dato obtenido probabilísticamente, escogen la opción de la empresa "C",



Gráfica 15.

Se observa en la gráfica 15, que sin criterio alguno, se escoge alguna opción, ya que se afirma la probabilidad del 0,6 sin significar que esta sea probabilidad de éxito de la campaña. Se omite la relación del VPN, nuevamente no correlacionan conceptos.

b. Respuesta de E3.



Gráfica 16.

Omitiendo la situación de tener que relacionar conceptos ya obtenidos previamente; se exponen juicios sin fundamento alguno. Nueve de los estudiantes optaron por respuestas similares a la presentada en la gráfica 13, u omiten la respuesta.

**3.4.5. Resultados parciales de la primera guía aplicada**

Prueba	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1
E4	10	20	50	20	25
E10	50	20	30	0	25
E3	0	0	10	10	5
E1	50	40	30	0	30
E2	50	40	30	0	30
E7	10	0	50	20	20
E8	10	20	50	20	25
E9	35	20	50	0	26,3
E11	50	20	30	0	25
E5	0	0	10	10	5
E6	50	20	30	0	25
Promedios	28,6	18,18	33,64	7,273	21,9

G1P1= Guía 1 Problema 1.

G1P2= Guía 1 Problema 2.

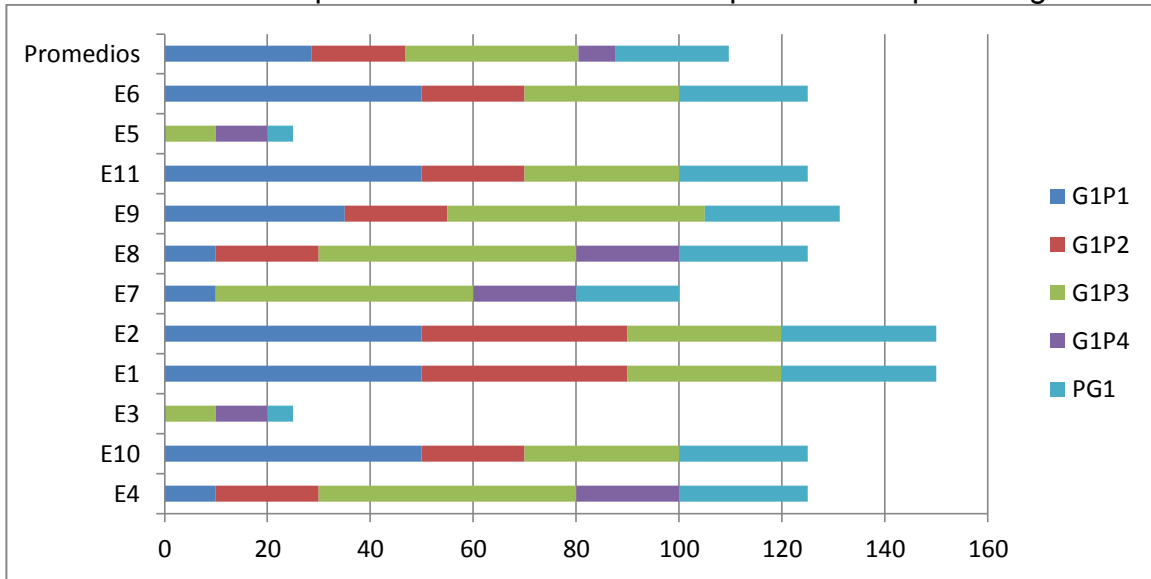
G1P3= Guía 1 Problema 3.

G1P4= Guía 1 Problema 4.

P=Promedios.

Cuadro 3.

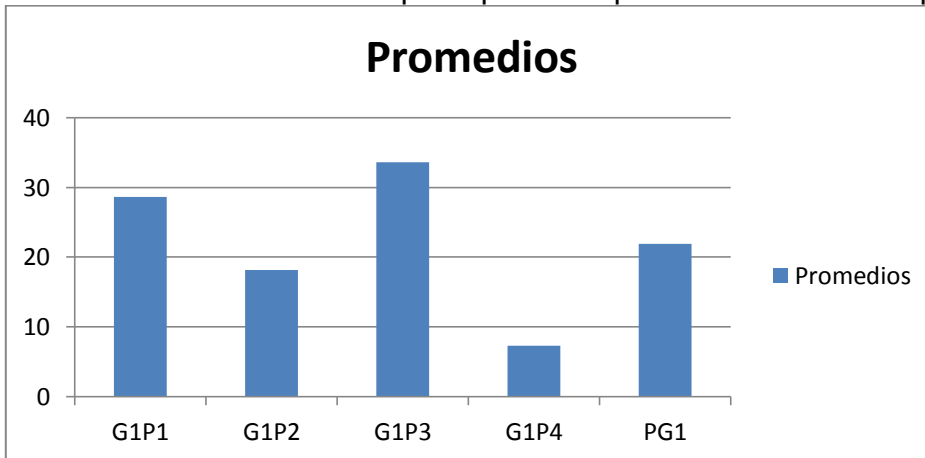
Gráfica de desempeño individual de los cuatro puntos de la primera guía.



G1P1= Guía 1 Problema 1.  
 G1P2= Guía 1 Problema 2.  
 G1P3= Guía 1 Problema 3.  
 G1P4= Guía 1 Problema 4.  
 P=Promedios.

Gráfica 17.

Gráfica de desempeño por cada punto evaluado en la primera guía.



G1P1= Guía 1 Problema 1.  
 G1P2= Guía 1 Problema 2.  
 G1P3= Guía 1 Problema 3.  
 G1P4= Guía 1 Problema 4.  
 P=Promedios.

Gráfica 18:

Al analizar los resultados, se observa como en los puntos que son de probabilidad exclusivamente, (Preguntas 1 y 2) o únicamente financieros (Pregunta 3), los estudiantes obtienen mejores resultados; cuando deben relacionar las dos teorías, tienen fallas de todo tipo o prefieren omitir la respuesta

### 3.4.6. Segunda guía aplicada

#### 3.4.6.1. Problema 1

Una empresa comisionista de Bolsa desea invertir US\$100.000.00 en el proyecto que le genere mayor valor esperado de las siguientes alternativas de inversión:

A. Una empresa energética con probabilidades de rentabilidad anual distribuida de la siguiente forma:

Rentabilidad	Probabilidad de obtener la rentabilidad dada
20%	0,2
15%	0,6
5%	0,2

B. Una empresa del sector financiero que ofrece dividendos por US\$0,1 por acción pagaderas mensualmente con una tasa del 12% NM, si el valor de cada acción es de US\$50 Cada una.

Aplique los modelos adecuados para la evaluación de las alternativas de inversión y decida dónde invertir el dinero.

#### 3.4.6.1.1. Solución:

Para el literal A:

$$(0,2)(0,2) + (0,15)(0,6) + (0,05)(0,2) = 0,14EA.$$

Para el literal B: La información acerca de la tasa de interés colocadas las acciones sobra, lo que realmente se debe evaluar es que por cada acción se obtiene mensualmente US\$0,1 dólar, Como tengo un parámetro de comparación distinto; tasa de interés frente al dólar, entonces se encuentra la rentabilidad de esta operación. Para periodos unitarios de tiempo, la tasa de interés se halla con la siguiente fórmula:

$$\frac{S}{P} - 1 = i$$

Dónde:

**S := Valor futuro.**

**P := Valor presente.**

$$\frac{50,1}{50} - 1 = 0,02EM$$

La tasa es efectiva mensual por que se entregan dividendos mensuales; ahora, para comparar las rentabilidades se debe convertir la tasa a la misma denominación de la del literal A, es decir pasar de efectiva mensual a efectiva anual, así:

$$[1 + 0,02]^{12} - 1 = 0,2426577EA$$

La tasa de retorno de la empresa del sector financiero es mayor que la del valor esperado de la empresa energética.

### 3.4.6.1.2. Rúbricas de evaluación:

Problema 1.

Puntuación

Identifica la variable aleatoria en la empresa energética.	10
Calcula el valor esperado de los rendimientos de la empresa energética.	10
Identifica que la tasa de interés del segundo punto es irrelevante.	10
Calcula la tasa de retorno de la inversión de la segunda opción.	10
Convierte adecuadamente las tasas, compara y decide.	10
Total	50

### 3.4.6.1.3. Análisis de heurísticas

Solución ofrecida por E2.

Punto a

$$E = 0,2(0,2) + 0,15(0,6) + (0,05 \times 0,2)$$

$$= 0,14 \text{ Valor esperado}$$

$$100.000 \times 0,14 = 14.000$$

$$100.000 + 14.000 = 114.000$$

Gráfica 19.

Se puede apreciar en la gráfica 19, que el estudiante E2 no tiene en cuenta la segunda alternativa de inversión, sólo aplica correctamente el valor esperado, no correlaciona conceptos.

Solución ofrecida por E3.

VP = 100.000 US

a) 20%  
b) 15%  
c) 5%

A)

a)  $S = 100.000 (1 + 0,20) = US 120.000$

b)  $S = 100.000 (1 + 0,15) = US 115.000$

c)  $S = 100.000 (1 + 0,05) = US 105.000$

Rentabilidad	Probabilidad	
20%	0,2	0,04
15%	0,6	0,09
5%	0,2	0,1

La alternativa mas rentable es la a) al 15%

B)  $12\% \text{ NM} - \text{EM}$

$$\frac{12}{12} = 1\% \text{ EM}$$

Gráfica 20.



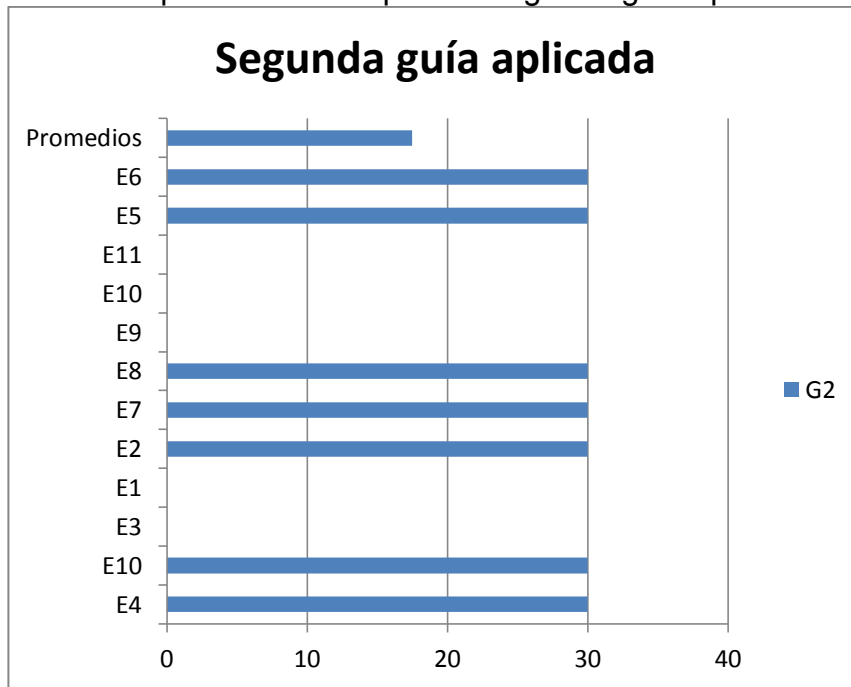
Esta solución es importante describirla, se observa como la estudiante define el objeto de valor presente (P) y Valor futuro (S), (Abstraídos de las matemáticas financieras), luego se desconecta completamente de la parte financiera y esboza lo que podría ser un valor esperado por cada uno de los rendimientos, (omite la sumatoria), y decide cual es la más rentable, luego, olvida por completo la parte probabilista y retoma la parte financiera con la tasa de interés, pero no sabe que más hacer. Esta heurística salta de la probabilidad a las financieras sin correlación alguna.

### 3.4.7. Resultados parciales de la segunda guía aplicada

Prueba	G2
E4	30
E10	30
E3	0
E1	0
E2	30
E7	30
E8	30
E9	0
E10	0
E11	0
E5	30
E6	30
Promedios	17,5

G2: Calificación de la segunda guía aplicada.  
Cuadro 4.

Desempeño individual para la segunda guía aplicada



Gráfica 21.

Al ser un problema tan corto los estudiantes tienen calificaciones con un desempeño medio, de (30) o cero (0), es curioso observar que no hubo diversidad de calificaciones, así se hayan equivocado en cosas distintas.

### 3.4.8. Tercera guía aplicada

Se cuenta con recursos líquidos por \$300.000.000.00, para invertir lo mejor posible, se presentan las siguientes alternativas de inversión:

- a. Un paquete accionario compuesto por acciones de Fabricato y Coltabaco, con rendimientos esperados así:

	<i>Rendimientos de Fabricato</i>	<i>Rendimientos de Coltabaco</i>
<i>Enero-Marzo</i>	6%	6%
<i>Abril-Junio</i>	3%	0%
<i>Julio-Septiembre</i>	9%	7%
<i>Octubre-Diciembre</i>	0%	8%

Evalúe tres posibles portafolios con un componente de:

- **90%** Fabricato y **10%** Coltabaco
- **60%** Fabricato y **40%** Coltabaco
- **10%** Fabricato y **90%** Coltabaco

b. Colocar el dinero en un CDT (Portafolio de renta fija) por el año, a una tasa del **11%** EA.

c. Comprar una flotilla de **4** taxis, con valor de **\$300.000.000.00** que me representan **6** millones de pesos mensuales durante **5** años, con vida útil de **5** años y valor del salvamento del **30%** del valor inicial. Evalúe con una tasa de oportunidad del **2%**EM.

Evalúe las tres inversiones y decida en cuál de las tres opciones colocará los **\$300.000.000.00**

#### **3.4.8.1. Solución alternativa 1**

Para evaluar la rentabilidad de las posibles inversiones en renta variable se debe aplicar el criterio de varianza mínima:

Rendimientos esperados.

FABRICATO:

$$\frac{6 + 3 + 9 + 0}{4} = 4,5\%$$

COLTABACO:

$$\frac{6 + 0 + 7 + 8}{4} = 5,25\%$$

Varianza de los rendimientos esperados.

FABRICATO:

$$\frac{(6 - 4,5)^2 + (3 - 4,5)^2 + (9 - 4,5)^2 + (0 - 4,5)^2}{4} = 11,25\%$$

COLTABACO:

$$\frac{(6 - 5,25)^2 + (0 - 5,25)^2 + (7 - 5,25)^2 + (8 - 5,25)^2}{4} = 9,6875\%$$

Desviación estándar:

FABRICATO:

$$\sqrt{11,25} = 3,354\%$$

COLTABACO:

$$\sqrt{9,6875} = 3,1125\%$$

Covarianza:

$$\frac{(6 - 4,5)(6 - 5,25) + \dots + (0 - 4,5)(8 - 5,25)}{4} = 7,3125\%$$

Correlación:

$$\text{Corr}(R_E R_C) = \frac{7,3125}{(3,354)(3,1125)} = 0,70047\%$$

Rendimientos esperados del primer portafolio: **90%** Fabricato, **10%** Coltabaco.

$$(0,9)(4,5) + (0,1)(5,25) = 4,575\%$$

Varianza del Portafolio:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

$$\text{Var}_p = (0,81)(11,25) + 2(0,9)(0,1)(7,3125) + (0,01)(9,6875)$$

$$\text{Var}_p = 10,5256\%$$

Desviación estándar del portafolio:

$$\sqrt{10,5256} = 3,2443\%$$

Rendimientos esperados del segundo portafolio: **60%** Fabricato, **40%** Coltabaco.

$$(0,6)(4,5) + (0,4)(5,25) = 4,8\%$$

Varianza del Portafolio:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

$$\text{Var}_p = (0,36)(11,25) + 2(0,6)(0,4)(7,3125) + (0,16)(9,6875)$$

$$\text{Var}_p = 9,11\%$$

Desviación estándar:

FABRICATO:

$$\sqrt{11,25} = 3,354\%$$

COLTABACO:

$$\sqrt{9,6875} = 3,1125\%$$

Covarianza:

$$\frac{(6-4,5)(6-5,25) + \dots + (0-4,5)(8-5,25)}{4} = 7,3125\%$$

Correlación:

$$\text{Corr}(R_E R_C) = \frac{7,3125}{(3,354)(3,1125)} = 0,70047\%$$

Rendimientos esperados del primer portafolio: **90%** Fabricato, **10%** Coltabaco.

$$(0,9)(4,5) + (0,1)(5,25) = 4,575\%$$

Varianza del Portafolio:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

$$\text{Var}_p = (0,81)(11,25) + 2(0,9)(0,1)(7,3125) + (0,01)(9,6875)$$

$$\text{Var}_p = 10,5256\%$$

Desviación estándar del portafolio:

$$\sqrt{10,5256} = 3,2443\%$$

Rendimientos esperados del segundo portafolio: **60%** Fabricato, **40%** Coltabaco.

$$(0,6)(4,5) + (0,4)(5,25) = 4,8\%$$

Varianza del Portafolio:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

$$\text{Var}_p = (0,36)(11,25) + 2(0,6)(0,4)(7,3125) + (0,16)(9,6875)$$

$$\text{Var}_p = 9,11\%$$

Desviación estándar del portafolio:

$$\sqrt{9,11} = 3,018\%$$

Rendimientos esperados del tercer portafolio: **10%** Fabricato, **90%** Coltabaco.

$$(0,1)(4,5) + (0,9)(5,25) = 5,175\%$$

Varianza del Portafolio:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

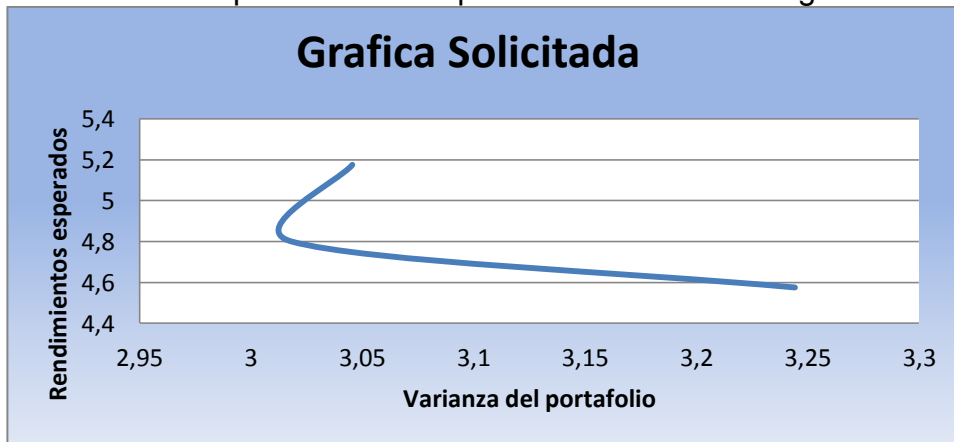
$$\text{Var}_p = (0,01)(11,25) + 2(0,1)(0,9)(7,3125) + (0,81)(9,6875)$$

$$\text{Var}_p = 9,2756\%$$

Desviación estándar del portafolio:

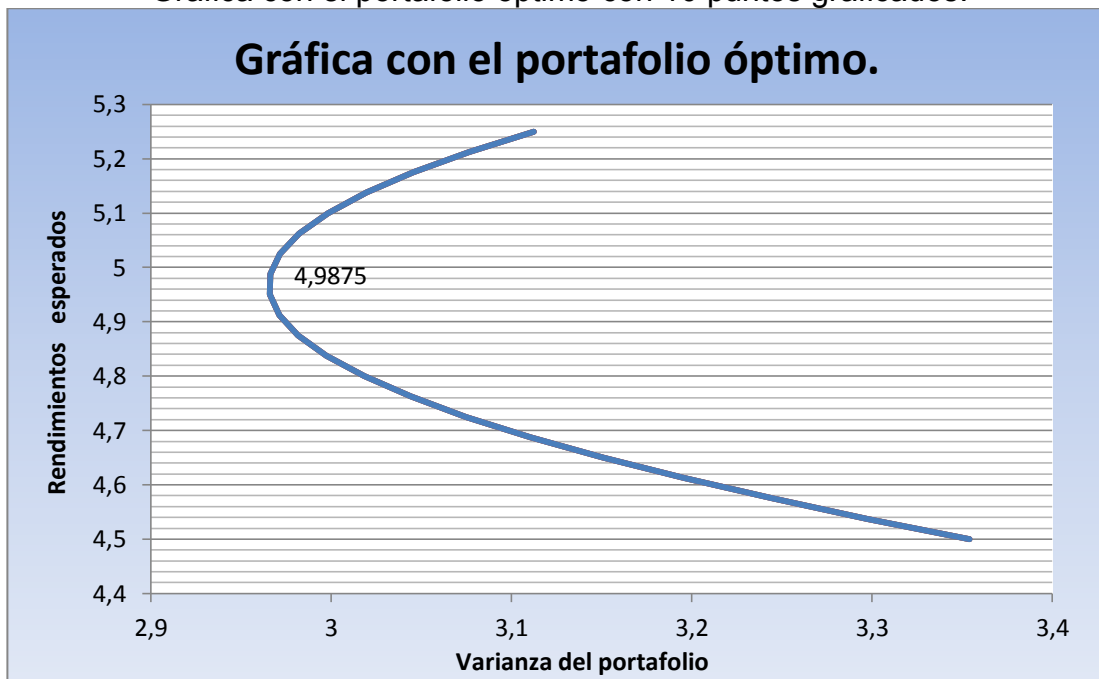
$$\sqrt{9,2756} = 3,0556\%$$

Gráfica óptima con los 3 puntos solicitados en la guía.



Gráfica 22

Gráfica con el portafolio óptimo con 10 puntos graficados.



Gráfica 23.

Así se obtiene los siguientes datos:

FABRICATO	COLTABACO	Varianza	Desviación	R.Esperados
0,9	0,1	10,525625	3,24432196	4,575
0,6	0,4	9,11	3,01827765	4,8
0,1	0,9	9,275625	3,04559108	5,175

Cuadro 5.

Según el modelo de varianza mínima, se debe escoger el segundo portafolio con una rentabilidad esperada del 4.8%.

### 3.4.8.2. Rúbricas de evaluación:

Alternativa 1.

Puntuación

Aplica adecuadamente las simulaciones.	20
Gráfica adecuadamente.	20
Selecciona la alternativa de menor varianza.	10
Total	50

### 3.4.8.3. Análisis de heurísticas

Solución de E6: (Gráficas 24, 25 y 26).

Nueve de los estudiantes siguió correctamente las instrucciones y graficó adecuadamente, seleccionan con toda certeza y competencia la alternativa de menor riesgo. Se presume que es por lo mecánico del proceso, a pesar de la multiplicidad de pasos y el mayor análisis de resultados. La secuencia propia de los procesos muestra que los estudiantes son competentes para analizar la situación, implementar las fórmulas suministradas para la evaluación de inversiones en renta variable en el mercado de capitales, es probable que al transcribir los resultados en una situación más aplicada o real, tengan sus falencias; sin embargo, cuando en su ejercicio profesional escuchen nombrar acerca de los modelos de varianza mínima para selección de portafolios, recordarán su instrucción en probabilidad y relacionarán con rentabilidades y matemáticas financieras; además de los refuerzos que muy posiblemente encuentren en los semestres superiores acerca de la misma temática en cursos de mercados de capitales, finanzas corporativas, etc. No es pretensión de esta investigación resumir, reemplazar o sustituir los cursos antes nombrados, sólo se pretende trasponer elementos abstraídos del riesgo a las clases de probabilidad con un componente utilitario, la finalidad es reforzar conocimientos desde el punto de vista matemático y probabilista.



# Guia No 3

## 1 Rendimiento esperado

$$\text{Fabricato} = \frac{6 + 3 + 9 + 0}{4} = 4,5\%$$

$$\text{Coltabaco} = \frac{6 + 0 + 7 + 8}{4} = 5,25\%$$

### Varianza Rendimiento esperados

$$\text{Fabricato} = (6-4,5)^2 + (3-4,5)^2 + (9-4,5)^2 + (0-4,5)^2 = 11,25\%$$

$$\text{Coltabaco} = (6-5,25)^2 + (0-5,25)^2 + (7-5,25)^2 + (8-5,25)^2 = 9,6875\%$$

### Desviación estandar

$$\text{Fabricato} = \sqrt{11,25} = 3,3541\%$$

$$\text{Coltabaco} = \sqrt{9,6875} = 3,1174\%$$

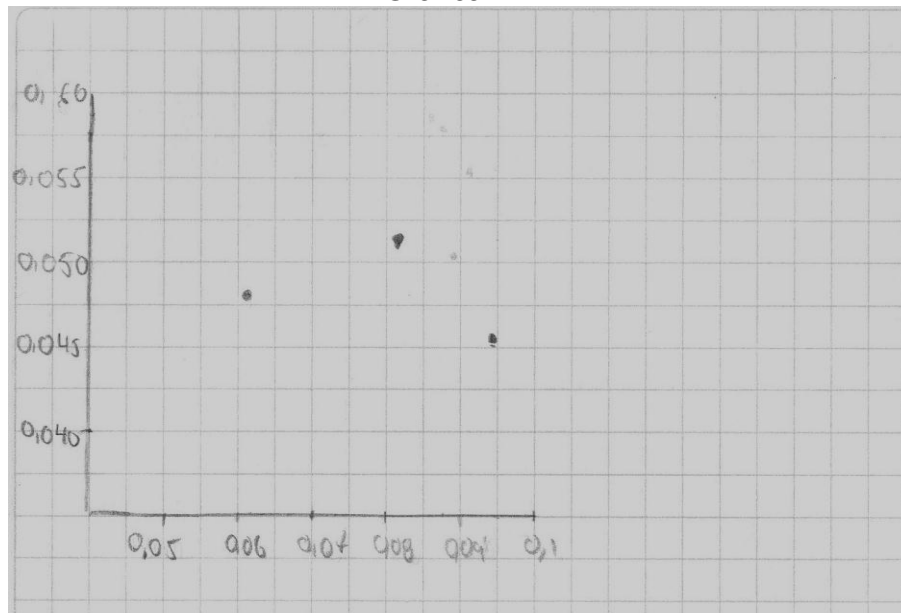
### Rendimientos Esperados

$$(0,9) (0,045) + (0,1) (0,0525) = 0,04575$$

$$(0,6) (0,045) + (0,4) (0,0525) = 0,048$$

$$(0,1) (0,045) + (0,9) (0,0525) = 0,05175$$

Gráfica 24.



Gráfica 25.

Covarianza

$$\text{Portafolio} = \frac{(6-4,5)(6-5,25) + (3-4,5)(0-5,25) + (9-4,5)(7-5,25) + (0-4,5)(8-5,25)}{4}$$

Portafolio = 1,125%

Correlación =  $\frac{1,125}{(3,3541)(3,1124)} = 0,107765\%$

Varianza Portafolio =  $(0,81)(0,1125) + 2(0,9)(0,1)(0,0125) + (0,01)(0,096875) = 0,09443$

Desviación Portafolio =  $\sqrt{0,09443} = 0,307154$   
 $(0,9)(0,045) + (0,1)(0,0525) = 0,04575$

Variación p =  $(0,81)(0,1125) + 2(0,9)(0,1)(0,0125) + (0,01)(0,096875) = 0,27096875$

Portafolio (var) =  $(0,36)(0,1125) + 2(0,4)(0,6)(0,0125) + (0,16)(0,096875) = 0,062$

Desviación =  $\sqrt{0,062} = 0,24899$

Portafolio =  $(0,01)(0,1125) + 2(0,1)(0,9)(0,0125) + (0,81)(0,096875) = 0,08184$

Desviación =  $\sqrt{0,08184} = 0,2860$

Fabricato	coltabaco	$\sigma^2$	Desviación	R Esperado
0,90	0,1	0,09443	0,307154	0,04575
0,6	0,4	0,062	0,24899	0,048
0,1	0,9	0,08184	0,2860	0,05175

Gráfica 26.

#### 3.4.8.4. Solución alternativa 2

Además de las inversiones en acciones, se tiene la opción de colocar el dinero en un CDT (Portafolio de renta fija) por el año, a una tasa del **11%** EA.

En el ejercicio anterior se encuentra una tasa del **4,8%**, sin embargo en detalle, se debe observar que el ejercicio está planteado por series de tiempo así:

	<i>Rendimientos de Fabricato</i>	<i>Rendimientos de Coltabaco</i>
<i>Enero-Marzo</i>	<b>6%</b>	<b>6%</b>
<i>Abril-Junio</i>	<b>3%</b>	<b>0%</b>
<i>Julio-Septiembre</i>	<b>9%</b>	<b>7%</b>
<i>Octubre-Diciembre</i>	<b>0%</b>	<b>8%</b>

Al analizar el cuadro, se deduce que si se obtiene una rentabilidad esperada producto de estas cuatro, realmente se halla una tasa efectiva trimestral. Para poder comparar estas dos, se deben dejar en la misma periodicidad:

$$(1 + 0,048)^4 - 1 = 20,63\% \text{ EA}$$

$$20,63\% \text{ EA} > 11\% \text{ EA}$$

O alternativamente:

$$\sqrt[4]{1,11} - 1 = 2,643\% \text{ ET}$$

$$4,8\% \text{ ET} > 2,643\% \text{ ET}$$

Ahora se puede afirmar de manera concluyente que es mejor la alternativa de la renta variable.

### 3.4.8.5. Rúbricas de evaluación:

Alternativa 2.	Puntuación
Identifica que la tasa alternativa de renta variable no es anual.	20
Identifica que la alternativa que debe comparar es la de menor varianza.	10
Convierte las tasas adecuadamente.	10
Selecciona la alternativa de mayor retorno.	10
Total	50

### 3.4.8.6. Solución alternativa 3

Comprar una flota de 4 taxis, con valor de \$300.000.000.00 que me representan 6 millones mensuales durante 5 años, con vida útil de 5 años y valor del salvamento del 30% del valor inicial. Evalúe con una tasa de oportunidad del 2% EM.

$$VPN = 300000000 - (6000000) \left[ \frac{1 - (1 + 0,02)^{-60}}{0,02} \right] + 90000000(1 + 0,02)^{-60}$$

$$VPN = 235995724,4 - 300000000 = -64004275,6$$

Como se aprecia, con una tasa del 2% EM, no se alcanza un punto de equilibrio, entonces, el estudiante debe inferir que si se tiene tres alternativas de inversión, la nueva tasa de oportunidad es la mayor de las dos tasas anteriores, posteriormente, aplicar al modelo financiero la tasa así:

$$\sqrt[12]{(1 + 0,048)^4} - 1 = 1,575\% \text{ EM}$$

$$VPN = 300000000 - 6000000 \left[ \frac{1 - (1 + 0,01575)^{-60}}{0,01575} \right] + 90000000(1 + 0,01575)^{-60}$$

$$VPN = 267029212,4 - 300000000 = -32970787,62.$$

### 3.4.8.7. Rúbricas de evaluación

Alternativa 3.

Puntuación

Identifica que el proyecto de los taxis es una anualidad uniforme	10
Compara acertadamente ingresos y egresos en el periodo cero (VPN)	10
Analiza que la tasa de oportunidad cambia con los nuevos proyectos.	10
Convierte las tasas adecuadamente.	10
Decide de manera acertada.	10
Total	50

### 3.4.8.8. Análisis de heurísticas

Solución presentada por E9,

3)  $6'000.000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,02)^{-60}}{0,02} + 90'000.000 (1 + 0,02)^{-60}$

$$A = 6'000.000 \left[ \frac{1 - (1 + 0,02)^{-60}}{0,02} \right]$$
$$A = 208'565,320$$
$$90'000.000 (1 + 0,02)^{-60} = 91'799,940$$

Ingresos : 300.365.260  
Egresos : 300'000.000

$$= 300.365.260 - 300.000.000 = 365.260$$

Gráfica 27.

### 3.4.9. Resultados parciales tercera guía aplicada

Todos los estudiantes tuvieron esta respuesta, financieramente es clara, sin embargo ninguno decide dónde invertir el dinero, el primer proyecto tiene un tratamiento más complejo, el segundo sólo hay que hacer una comparación de la tasa de interés, así que no se tiene en cuenta para la evaluación final, ya que se puede convertir la tasa a la denominación en la que aparece la de la renta fija. Es de notar, que ningún estudiante relaciona los proyectos entre sí. Los ve como ejercicios autónomos.

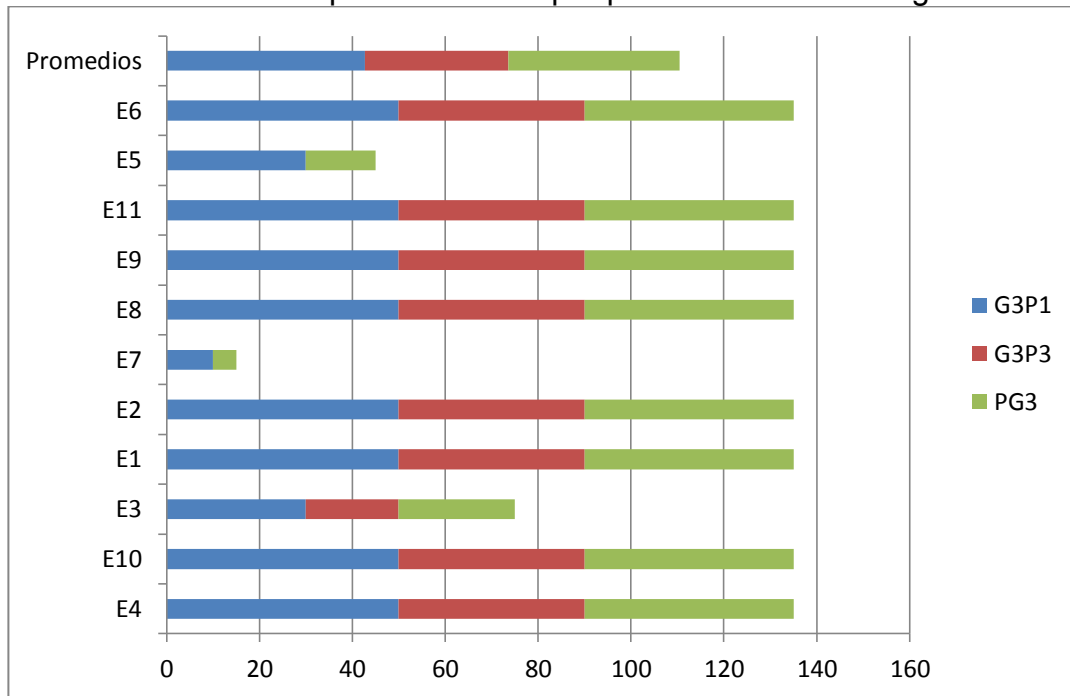
Resultados parciales tercera guía aplicada

Prueba	G3P1	G3P3	PG3
E4	50	40	45
E10	50	40	45
E3	30	20	25
E1	50	40	45
E2	50	40	45
E7	10	0	5
E8	50	40	45
E9	50	40	45
E11	50	40	45
E5	30	0	15
E6	50	40	45
Promedios	42,73	30,91	36,82

G3P1= Guía 3 Problema 1  
 G3P3= Guía 3 Problema 2  
 PG3=Promedio guía 3

Cuadro 6.

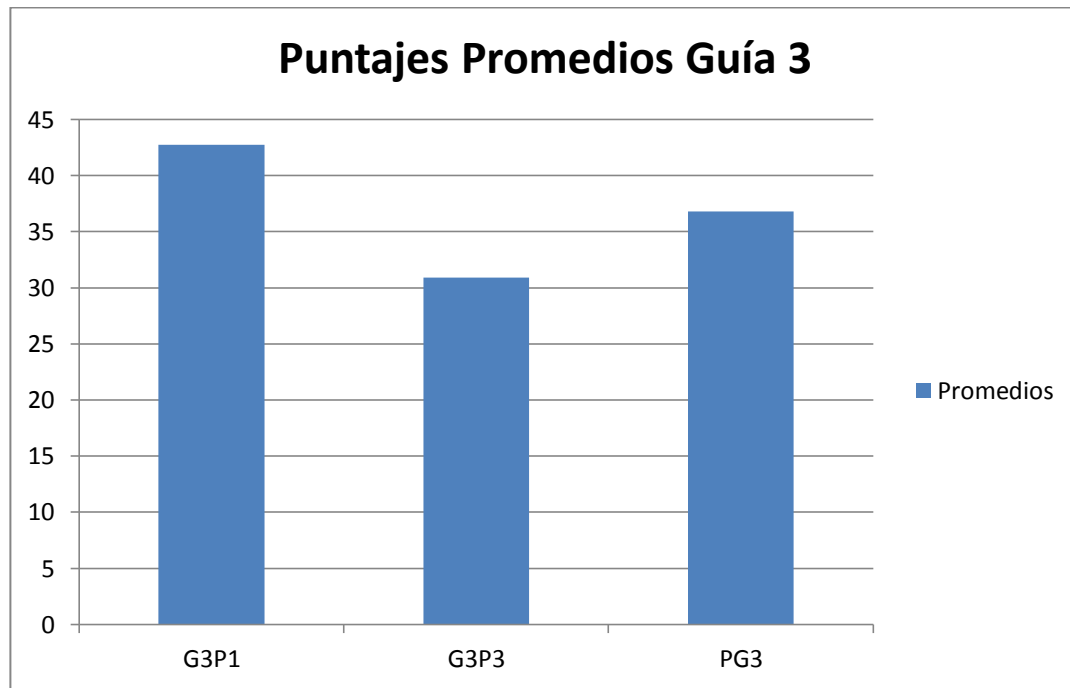
Gráfica de desempeño individual por punto evaluado en la guía 3.



G3P1= Guía 3 Problema 1  
 G3P3= Guía 3 Problema 2  
 PG3=Promedio guía 3

Gráfica 28.

Puntajes promedio por punto evaluado en la guía 3.



Gráfica 29.

Se observa que es la guía con mejores rendimientos generales. Aunque hablar de modelos de riesgo económico y financiero a estudiantes de cuarto semestre de carreras administrativas, económicas y contables; era retador para el grupo investigador, se observa cómo los estudiantes responden de manera positiva a las exigencias de la guía número 3. Es de inferir que a pesar de los vacíos que deja una educación con falta de correlación de objetos tanto institucionales como personales en la enseñanza impartida en su formación en probabilidad y matemáticas financieras, los estudiantes hacen un esfuerzo por seguir una serie de procedimientos que de un modo u otro conllevan análisis estadístico relacional fuerte y salido de lo tradicional en sus cursos de matemáticas financieras.

### 3.4.10. Evaluación general

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3	PP
E4	0	10	50	20	10	20	50	20	25	30	50	40	45	30
E10	0	0	0	0	50	20	30	0	25	30	50	40	45	25
E3	0	10	0	3,33	0	0	10	10	5	0	30	20	25	8,3
E1	20	10	35	21,7	50	40	30	0	30	0	50	40	45	24
E2	0	10	50	20	50	40	30	0	30	30	50	40	45	31
E7	0	10	50	20	10	0	50	20	20	30	10	0	5	19
E8	0	10	50	20	10	20	50	20	25	30	50	40	45	30
E9	10	10	35	18,3	35	20	50	0	26,3	0	50	40	45	22
E10	0	0	0	0	35	20	50	0	26,3	0	50	40	45	18
E11	20	10	35	21,7	50	20	30	0	25	0	50	40	45	23
E5	0	10	0	3,33	0	0	10	10	5	30	30	0	15	13
E6	0	10	50	20	50	20	30	0	25	30	50	40	45	30
Promedios	4,17	8,33	29,6	14	29,17	18,3	35	6,67	22,3	17,5	43,33	31,67	38	23

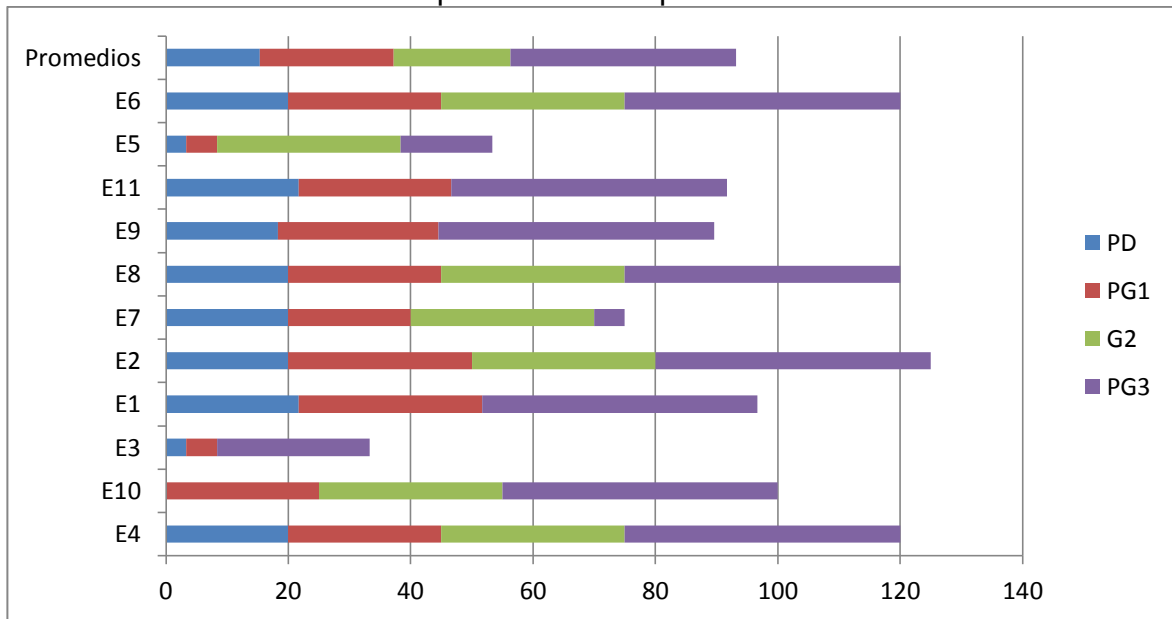
En donde:

- D1A: RESULTADO PRIMERA PRUEBA DIAGNÓSTICA LITERAL A.
- D1B: RESULTADO PRIMERA PRUEBA DIAGNÓSTICA LITERAL B.
- D2: RESULTADO SEGUNDA PRUEBA DIAGNÓSTICA.
- PD: PROMEDIO DE LAS PRUEBAS DIAGNOSTICAS.
- G1P1: RESULTADO PRIMERA GUIA APLICADA PROBLEMA 1.
- G1P2: RESULTADO PRIMERA GUIA APLICADA PROBLEMA 2.
- G1P3: RESULTADO PRIMERA GUIA APLICADA PROBLEMA 3.
- G1P4: RESULTADO PRIMERA GUIA APLICADA PROBLEMA 4.
- PG1: PROMEDIO DE LOS RESULTADOS EN LOS PROBLEMAS DE LA GUIA 1.
- G2: RESULTADO SEGUNDA GUIA APLICADA.
- G3P1: RESULTADO TERCERA GUIA APLICADA ALTERNATIVA 1.
- G3P3: RESULTADO TERCERA GUIA APLICADA ALTERNATIVA 3.
- PP: PROMEDIO DE PROMEDIOS.

Cuadro 6.



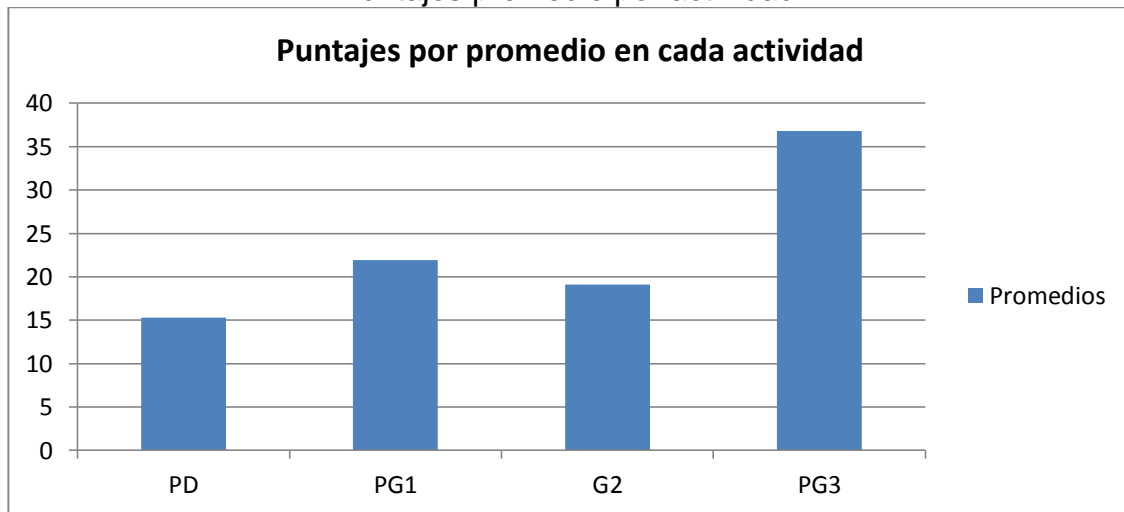
Desempeño individual por actividad.



PD: Pruebas Diagnósticas.  
 PG1: Promedio en la guía 1.  
 G2: Guía 2.  
 PG3: Promedio Guía 3.

Gráfica 30.

Puntajes promedio por actividad.



PD Pruebas Diagnósticas  
 PG1 Guía 1  
 G2 Guía 2  
 PG3 Guía 3.

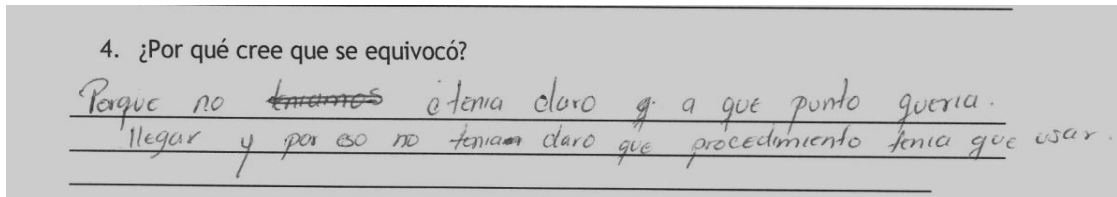
Gráfica 31.

### 3.4.11. Evaluación y seguimiento por estudiante

Estudiante E4.

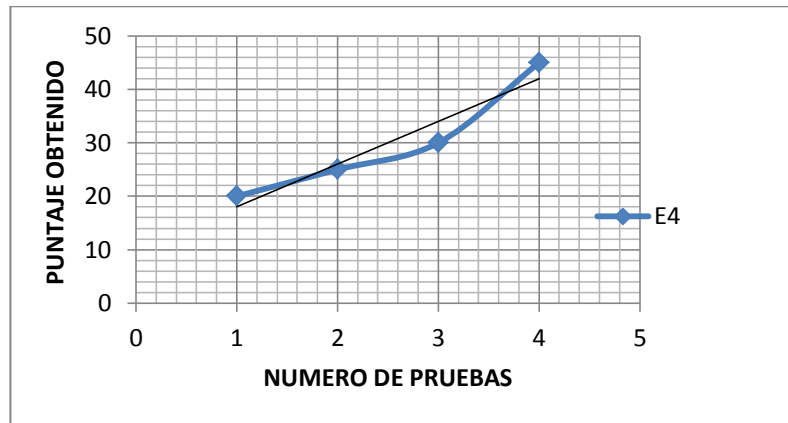
Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3	PP
E4	0	10	50	20	10	20	50	20	25	30	50	40	45	30

La estudiante consigue un crecimiento constante a lo largo del proceso, de respuestas limitadas, logró un nivel de comprensión bueno, sin llegar a correlacionar conceptos, de las preguntas que contesta en la encuesta final, acerca de la prueba diagnóstica, cabe destacar:



Gráfica 21.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



Gráfica 22

Estudiante E10.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E10	0	0	0	0	50	20	30	0	25	30	50	40	45

El estudiante presentó problemas en cuanto que la primera prueba diagnóstica obtuvo cero, sin hacer absolutamente nada de lo solicitado, a lo largo del proceso tuvo mejoras obteniendo 2.5 y 3.0, respectivamente en las pruebas más parecidas a la del diagnóstico.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



Gráfica 23.

En la encuesta realizada se observa cómo el estudiante identifica sus errores de una manera más clara. “tenía que multiplicar los pagos por la probabilidad”.

2. ¿Es suficiente la teoría probabilística y financiera vista en clase para resolver este problema?

Si, pero no sabia que hacer.

---



---



---

3. ¿En que se equivocó?

Tenia que multiplicar los pagos por la probabilidad. y no lo hice

---



---



---

Gráfica 24.

Estudiante E3.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E3	0	10	0	3,33	0	0	10	10	5	0	30	20	25

La estudiante no tuvo un buen inicio y su proceso posterior tampoco fue excelente, ahora bien, en las respuestas que se obtuvieron acerca de la percepción del experimento se tiene que aceptar que la falta de relación entre financieras y probabilidad, hizo que no mostrara mejores resultados, se muestran apartes importantes de su encuesta

2. ¿Es suficiente la teoría probabilística y financiera vista en clase para resolver este problema?

No, aun no hemos visto todo a profundidad así que fue difícil resolverlos.

3. ¿En que se equivocó?

En la relación de los ejercicios en cuanto a financiera y estadística.

4. ¿Por qué cree que se equivocó?

Porque me centro en el estudio de las 2 materias pero individualmente.

Gráfica 25.

6. Analizando los problemas presentados, ¿Se considera usted competente para la resolución de problemas financieros en entornos contingentes?

Financieros sí! ya que en la materia como tal me desenvuelvo muy bien.

Gráfica 26.

En la respuesta 3, una vez más se destaca que los estudiantes les cuesta trabajo relacionar conceptos de dos materias distintas, vistas en entornos separados. Lo cual se reafirma en la pregunta 6, donde afirma que sólo sería competente al realizar problemas de tipo, exclusivamente financieros.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).

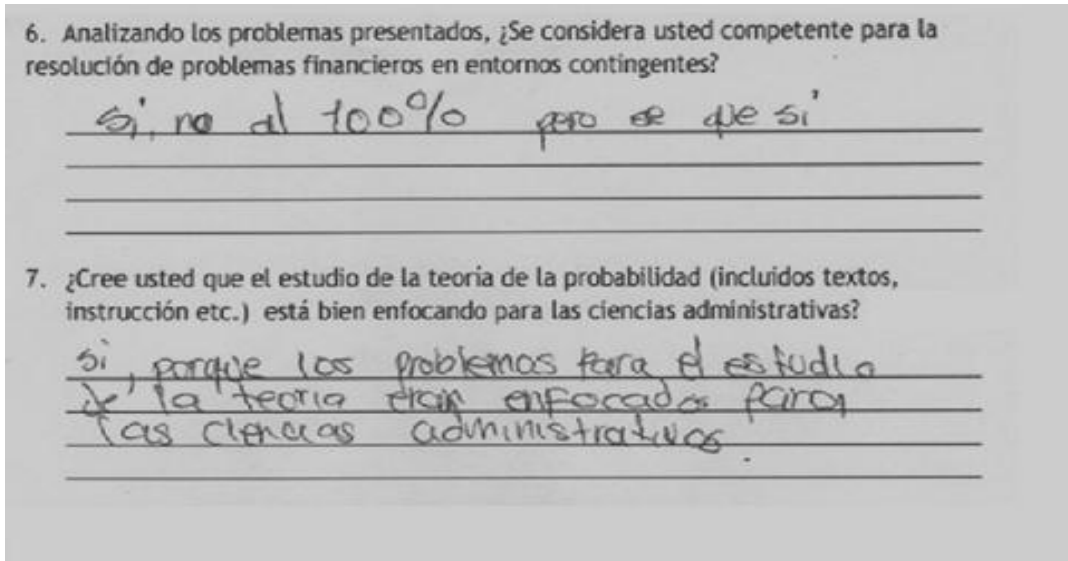


Gráfica 27

Estudiante E1.

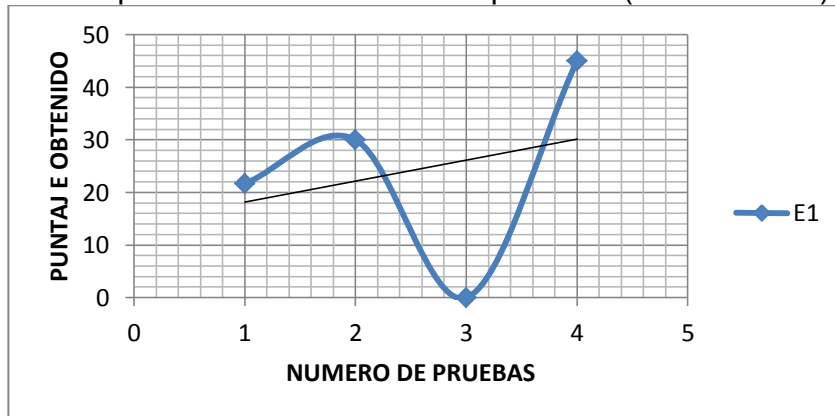
Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E1	20	10	35	21,7	50	40	30	0	30	0	50	40	45

Estudiante con rendimiento en estadística y matemáticas financieras, muy superior a la media, con notas por encima de 4.5, fue la de mejor desempeño en la prueba diagnóstica, sin embargo no fue notable el crecimiento ya que en la segunda prueba tuvo un rendimiento muy por debajo de lo esperado, aunque en la encuesta se considera competente para realizar su trabajo.



Gráfica 28.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).

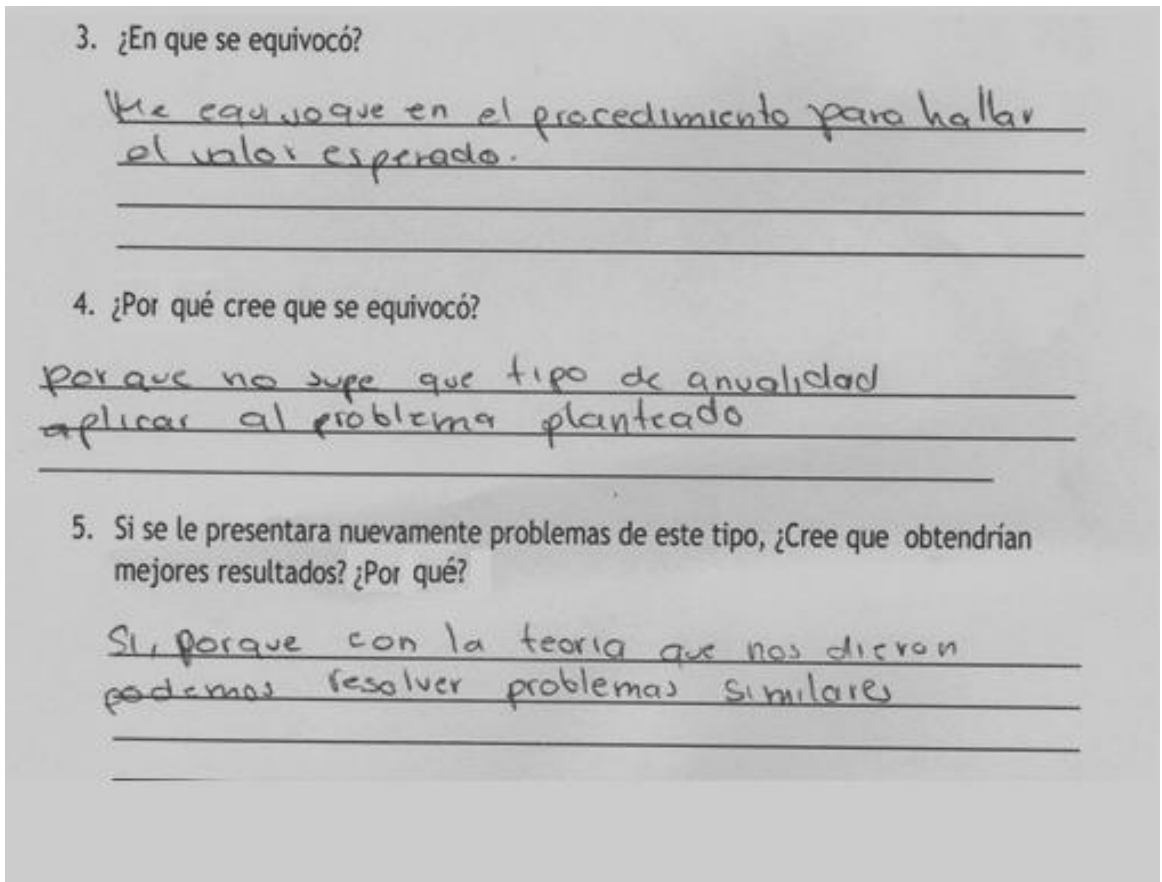


Gráfica 29.

Estudiante E2.

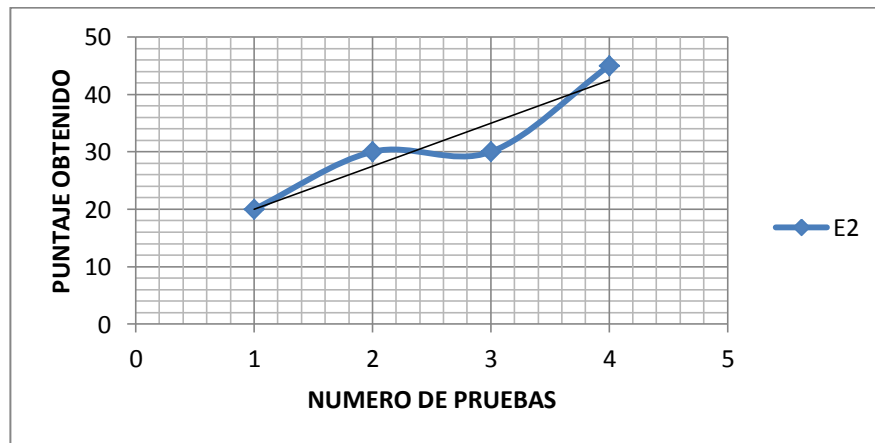
Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E2	0	10	50	20	50	40	30	0	30	30	50	40	45

Estudiante comparable con la estudiante E1, de muy buenos resultados académicos y extracurriculares, sin embargo en la correlación de conceptos se equivoca reiteradamente, aunque su manejo financiero y probabilístico es superior. Se destaca en su encuesta lo siguiente: al analizar las preguntas 3 y 4, nuevamente relaciona de manera errada los objetos a estudiar.



Gráfica 30.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



Gráfica 31.

Estudiante E7.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E7	0	10	50	20	10	0	50	20	20	30	10	0	5

Estudiante repitente de matemáticas financieras y estadística 2, obtuvo pobres resultados en desde la prueba diagnóstica, su mejoría no se nota y no es consciente de los avances de sus pares, sin embargo, es importante analizar toda su encuesta:

Con las pruebas a la vista, y la solución de la misma conteste las siguientes preguntas:

- ¿Estuvieron bien contestadas las preguntas diagnósticas?

No por la manera en razón de que el tema que se planteo no habia sido explicado o como tal no tenemos bases Consulas de las cuales nosotros pudiéramos relacionar con lo que se nos planteo. Me parece que se debería hacer mas seguidos estas guias.
- ¿Es suficiente la teoría probabilística y financiera vista en clase para resolver este problema?

Considero que si debido a que tenemos buenas bases pero lo complicado era relacionar estas dos teorías como tal
- ¿En que se equivocó?

En todo debido a que tuve una confusión en cuanto a la plantación de variables o reconocimiento de variables
- ¿Porqué cree que se equivocó?

Por que como tal nunca habia relacionado estas teorías.
- Si se le presentara nuevamente problemas de este tipo, ¿Cree que obtendrían mejores resultados?

Si con base a estos mismos problemas probablemente si debido a que se tiene un poco mas de conocimiento

Gráfica 32.



6. Analizando los problemas presentados, ¿Se considera usted competente para la resolución de problemas financieros en entornos contingentes?

No.

---



---



---

7. ¿Cree usted que el estudio de la teoría de la probabilidad (incluidos textos, instrucción etc.) está bien enfocando para las ciencias administrativas?

No por que como tal no creo en algun momento llegar aplicar estas teorías.

---



---



---

8. ¿Considera la probabilidad útil en su vida profesional?

Si pero sin embargo como habia mencionado antes no creo llegar a aplicar estas teorías probabilidades

---



---



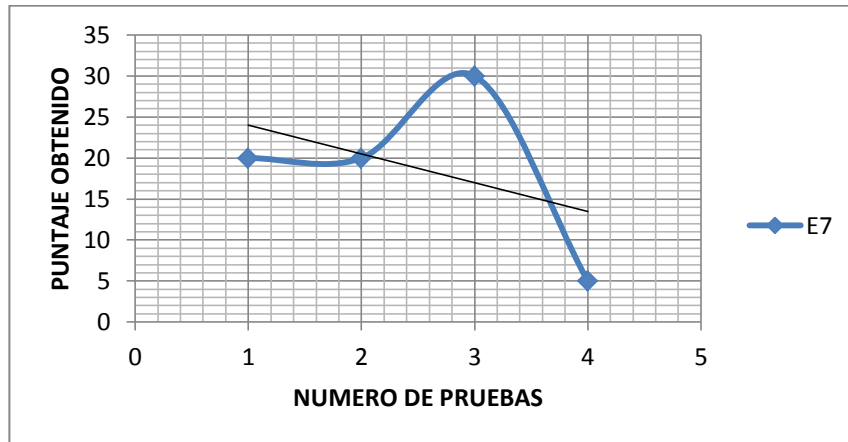
---

Gracias y éxitos.

Gráfica 33

En la pregunta 1, el estudiante asume que no es suficiente la teoría vista en clase para resolver la prueba diagnóstica, no es competente en relacionar objetos de matemáticas financieras y de probabilidad. En la pregunta 2 reafirma que no es fácil relacionar estas dos asignaturas, a pesar que se tengan buenas bases. En la pregunta 4 nuevamente afirma que nunca había relacionado este tipo de conceptos. En la pregunta 7 y 8 considera que nunca llegará a aplicar este tipo de conocimiento. Se extrapola, en estas dos últimas respuestas, que el estudiante ve como relevante las materias pero no pertinentes para su vida profesional.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).

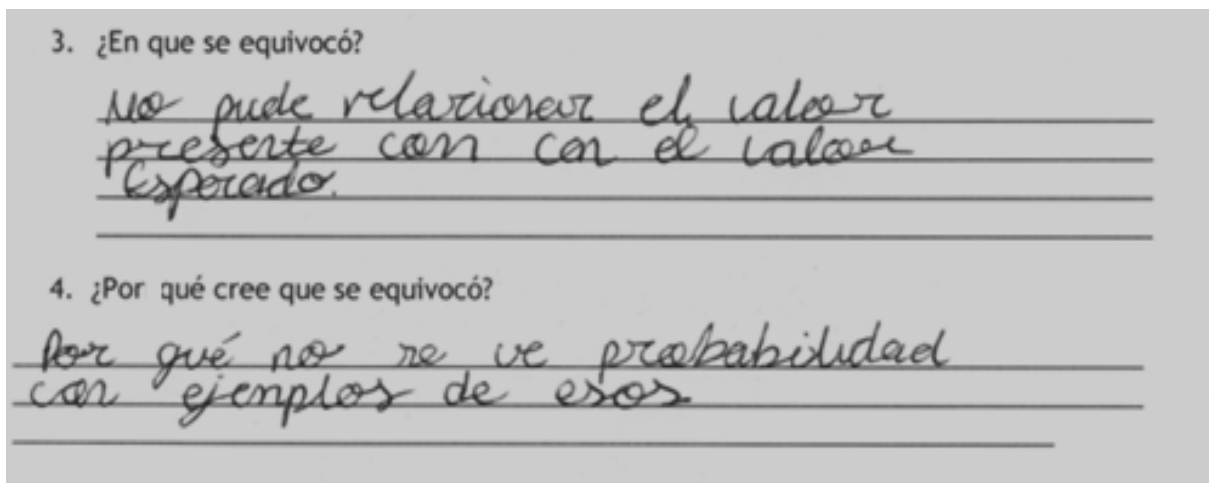


Gráfica 34

Estudiante E8.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E8	0	10	50	20	10	20	50	20	25	30	50	40	45

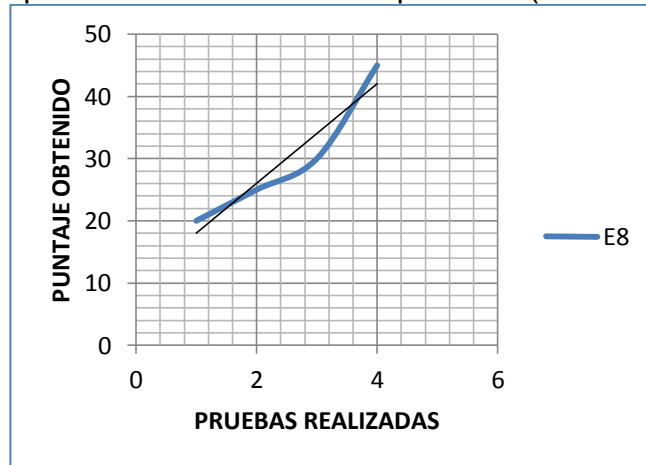
Estudiante repitente de matemáticas financieras y estadística 2, en este estudiante se nota la mejoría constante en las pruebas y en el desempeño en las materias por separado, inclusive, fue el mejor examen de matemáticas financieras I-2012 en la Universidad pregrado presencial. Dentro de la encuesta es destacable lo siguiente:



Gráfica 35.

Se reafirma la hipótesis de la presente tesis, la incapacidad de los estudiantes para relacionar conceptos de probabilidad y matemáticas financieras.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



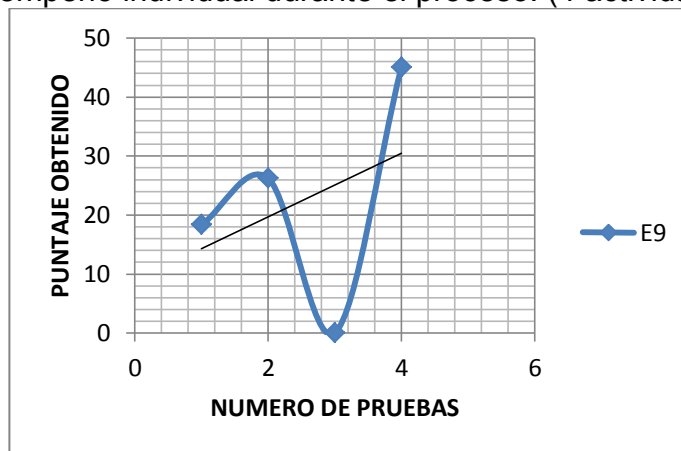
Gráfica 36.

Estudiante E9.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E9	10	10	35	18,3	35	20	50	0	26,3	0	50	40	45

Estudiante dentro de la media y moda del rendimiento de las materias de matemáticas financieras y estadística II, inicia bien pero su desempeño se desploma en la guía 2.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



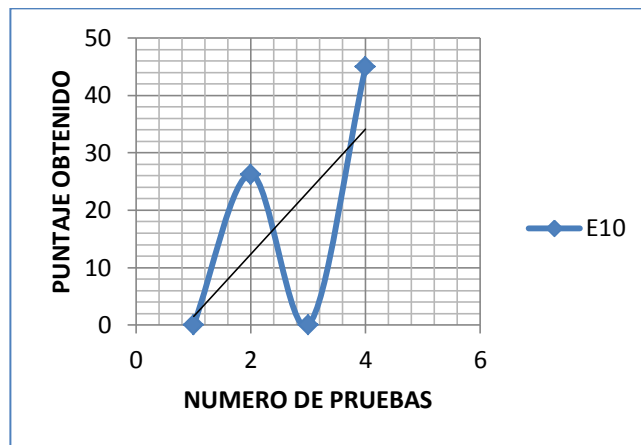
Gráfica 37.

Estudiante E10.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E10	0	0	0	0	35	20	50	0	26,3	0	50	40	45

Estudiante por encima del promedio, en nivel superior en estadística 2 y matemáticas financieras, sin embargo el resultado de las pruebas no es el mejor, desafortunadamente no se obtuvo encuesta por parte de este estudiante.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



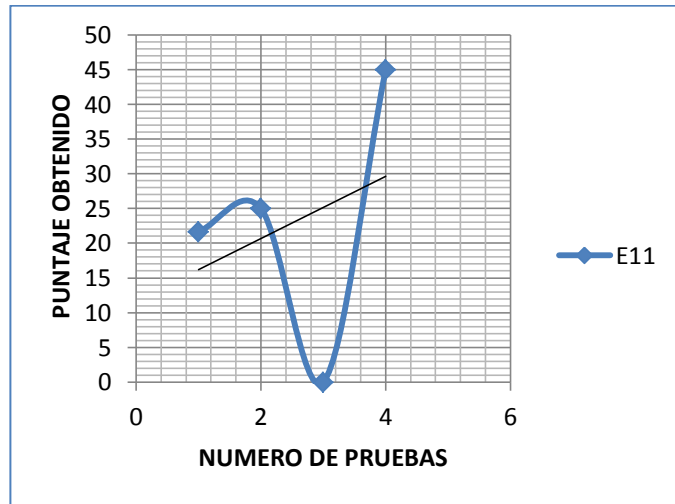
Gráfica 38.

Estudiante E11.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E11	20	10	35	21,7	50	20	30	0	25	0	50	40	45

Estudiante con niveles promedio de rendimiento en las dos materias, y promedio en las actividades.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



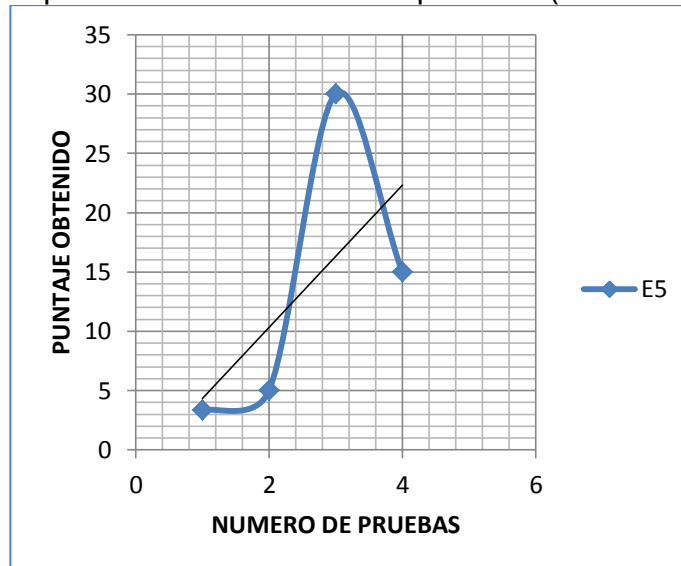
Gráfica 39.

Estudiante E5.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E5	0	10	0	3,33	0	0	10	10	5	30	30	0	15

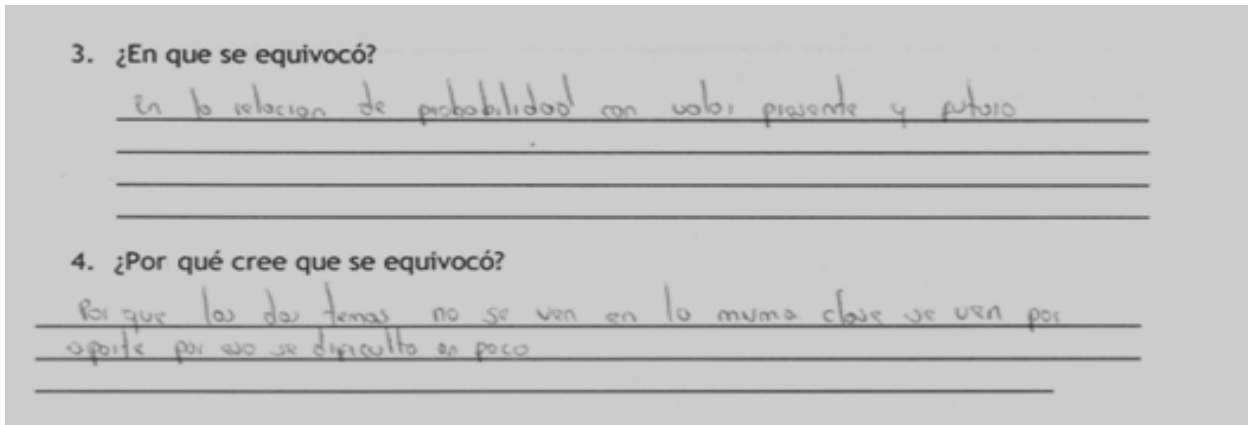
Estudiante repitente de matemáticas financieras, con rendimiento por debajo de la media del curso, en el presente experimento no obtiene resultados distintos al promedio.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



Gráfica 40.

Se resalta la encuesta de esta estudiante por las respuestas 3 y 4, así:



Gráfica 41.

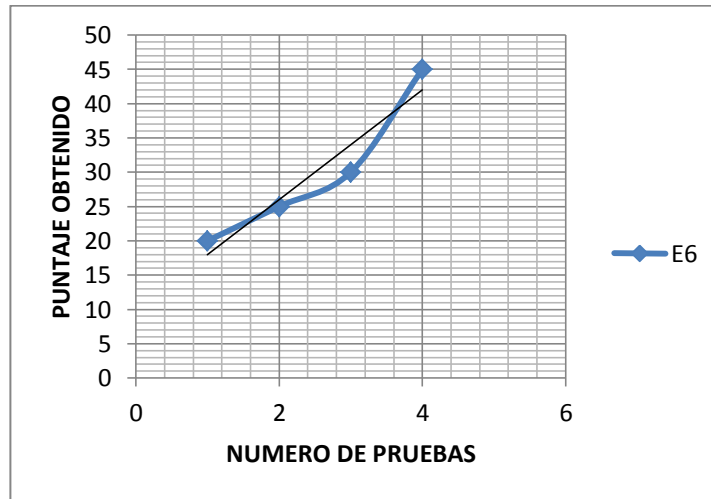
Es claro que la estudiante no esperaba relacionar conceptos de matemáticas financieras y probabilidad, más bien, se refiere es a los espacios distintos en las dos clases.

Estudiante E6.

Prueba	D1A	D1B	D2	PD	G1P1	G1P2	G1P3	G1P4	PG1	G2	G3P1	G3P3	PG3
E6	0	10	50	20	50	20	30	0	25	30	50	40	45

El estudiante es de buen desempeño cognitivo y razona de maneras adecuadas, sin embargo tuvo varios desatinos en el desarrollo de las actividades. A pesar de esto su rendimiento muestra un crecimiento constante. Siguiendo la tendencia del grueso del grupo.

Desempeño individual durante el proceso. (4 actividades).



Gráfica 42.

En las guías de aprendizaje aplicadas, los estudiantes objeto de estudio encontraron soluciones didácticas a los problemas cotidianos de su profesión; es útil observar cómo de un desempeño pobre en interpretación y correlación de objetos de aprendizaje, identificado en las pruebas diagnósticas, avanzan sostenidamente hacia la comprensión de criterios de decisión más elaborados, de una manera natural, claro está, apoyados en las guías. Este análisis individual de resultados es interesante, visualiza la asimilación de nuevas aplicaciones a conceptos previamente vistos en materias distintas, para generar una competencia que no se esperaba de las dos materias por separado. Únicamente E7, presenta un descenso en su interpretación y por ende se puede afirmar que sus competencias no evolucionaron de manera positiva.

## **CAPITULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

### **Conclusiones**

Este trabajo es producto del análisis de las aplicaciones que se tienen en las materias de probabilidad y matemáticas financieras tanto en el aula como las posibles aplicaciones en la vida profesional de los estudiantes de carreras administrativas, económicas y contables. Al aplicar la herramienta de la transposición didáctica propuesta por Chevallard, se realizó un recorrido por las aplicaciones exclusivamente financieras en la materia de probabilidad, se correlacionan objetos propios de la probabilidad y las matemáticas financieras con el objetivo principal de mejorar las competencias de los estudiantes en la toma de decisiones financieras en entornos contingentes e identificar las posibles causas de la falta de correlación entre estas dos áreas.

En los resultados de las aplicaciones individuales y grupales, se evidencia la mejoría en las competencias según la definición estricta de competencia utilizada en esta investigación. Es claro que los estudiantes esperan encontrar aplicaciones exclusivas de la asignatura, como se evidencio en las respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿en que se equivocó?, en la encuesta final. Se observa cómo los estudiantes no esperaban ver aplicaciones de este tipo ni en probabilidad ni en matemáticas financieras. De manera que identificar las razones del porqué no se llega a este conocimiento de manera autónoma o espontánea por parte de los estudiantes, es complejo; solo se puede inferir de algunas respuestas de ellos en la encuesta final. En los estudiantes se refleja el no estar pre-dispuestos para recibir conceptos de probabilidad en la clase de matemáticas financieras, y viceversa, lo cual evidencia que este tipo de pregunta va más allá de los objetos cognitivos estudiados en esta



investigación e incursiona al campo de la psicología. *“Errores de Ignorancia, de distracción, de olvido, de falta de atención,... se mezclan con errores más profundos, más orgánicos, mentales, relativos a déficit sensoriales u otros. A su vez, cada una de estas causas inmediatas pueden tener causas remotas diversas; la falta de atención puede ser momentánea y debida a una contingencia banal, puede ser debida al estrés, a problemas familiares, sufrimiento, enfermedad... Si se decide intervenir, y no sólo de registrar objetivamente y en abstracto el error y de indagar la causa, entonces se pone en primera instancia el problema, por parte del docente, de detectar el error, por lo tanto, para descubrir no solo la causa inmediata sino también aquella latente o profunda. No para transformarnos todos en psicoterapeutas, pero si para afrontar mejor la tarea a la cual nos comprometimos frente a la sociedad...”*<sup>48</sup>. Las causas de la falta de integración de los objetos a estudiar es un tema muy amplio, pero se llegan a colocar de manifiesto algunas pocas razones de ello. *“Las dos materias se ven por aparte, por eso se me dificultó un poco”*<sup>49</sup> y respuestas por el estilo de la respuesta de E5, evidencian lo que Bruno D’Amore trata de describirnos como *“la causa inmediata”*, con toda certeza existan razones más *“orgánicas”*, pero no es del alcance de esta investigación ahondar en este tema, se trató de indagar exclusivamente acerca de las razones didácticas.

Con los resultados obtenidos en la investigación se puede afirmar que las competencias en cuanto a la toma de decisiones financieras en entornos contingentes de los estudiantes mejoran mediante la utilización de problemas contextualizados que relacionen los objetos de significado de la probabilidad y las matemáticas financieras.

---

<sup>48</sup>D’AMORE, B. FANDIÑO P, M. MARAZZANI, I. SBARAGLI, S. (2010). “La didáctica y la dificultad matemática”. Editorial Magisterio, Bogotá. P. 30

<sup>49</sup>Respuesta de E5, en la pregunta ¿Por qué cree que se equivocó?

## **Recomendaciones**

Uno de los frentes de trabajo más común de los profesionales y estudiantes de carreras administrativas económicas y contables, es el área financiera, y la esencia de estas carreras es la toma de decisiones, entonces es clara la necesidad de que estos futuros profesionales tengan bases mínimas de toma de decisiones financieras en entornos cambiantes.

De la misma manera, es clara la intervención y pertinencia de las materias de probabilidad y matemáticas financieras en estas carreras; syllabus, contenidos, programación etc. ya históricamente están bien definidos y de manera más o menos homogénea en las Universidades de Bogotá, y no son objeto de discusión en esta investigación. Sin embargo, si se tienen como requisito para ser profesionales en estas carreras, por qué no darles a los estudiantes una herramienta más poderosa para las aplicaciones de probabilidad y matemáticas financieras en su vida profesional.

El diseño de las guías de la presente investigación no debe ser modelo a seguir en el estudio de estas dos materias, tampoco se pretende cambiar el contenido programático de las mismas, pero sí es una recomendación del investigador, involucrar ejemplos de decisión financiera con probabilidad; no es de esperar que el docente de probabilidad sea actuario o maneje el tema financiero de manera excelsa, pero sí es compromiso social del docente en todas las ramas de las matemáticas, actualizarse y ejemplificar en las áreas en las que imparte sus materias.

Las aplicaciones en probabilidad clásica de los juegos de azar, pueden ser un medio mas no un fin en la educación probabilística de los estudiantes, particularmente en los de carreras administrativas, económicas y contables; aplicaciones útiles a la

probabilidad se han visto desde la aparición de los seguros, como se detalla con generosidad en el marco teórico de la presente investigación; es tiempo de que la concepción probabilista tome un enfoque más aplicado en el currículo colombiano, y la presente investigación es un pequeño aporte en las carreras que tienen que ver con el manejo financiero de las empresas.

## BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

ANASTASIADOU, S. CHADJPANTELIS, T. (2008). The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education. ICME11, Topic Study Group 13 Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

AIZIKOVITSH, E. KUNTZE, S. CLARKE, D. (2012), Connections between statistical Thinking and critical thinking – a case study, ICME 12.

BAKKER, A. MIERLO, X. AKKERMAN, S. (2012), Learning to integrate statistical and work-related reasoning. ICME 12.

BATANERO, C. SERRANO, L. (1999). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. Proyecto PS93-0196 de la DGICYT (MEC, Madrid)

BATANERO, C. ORTIZ, J. SERRANO, L. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. Revista SUMA, junio de 1996.

BATANERO, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. En <http://www.docentes.unal.edu.co/pnpachecod/docs/losretos.pdf>. Universidad Nacional de Colombia.

BATANERO, C. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

BATANERO, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada

BUNGE, M; (2007). 100 ideas: El libro para pensar y discutir en el café. Mario Bunge. Ed. Sudamericana, Buenos Aires. P. 22

CHEVALLARD, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado, Aique, Buenos Aires

D'AMORE, B. FANDIÑO P, M. MARAZZANI, I. SBARAGLI, S. (2010). La didáctica y la dificultad matemática P. 30

DANIEL, Y. (2000). Cómo reducir la incertidumbre en las finanzas. Política y Cultura 013. UAM, Xochimilco. Introducción P. 1.

DASTON, L. (1979). The reasonable calculus. Classical probability theory (1650-1830) Tesis doctoral, Harvard University.

DASTON, L. (1988). La domesticación de riesgo. Probabilidad, Matemática y Seguro. (1650-1830). Lorraine J. Daston. Princeton University.

- DE MOIVRE (1756). The doctrine of chances. A Millar, London. Third edition.
- Enciclopedia Universal, los diccionarios y las enciclopedias para académicos. Bajado el 14 de abril de 2011 del URL: [http://enciclopedia\\_universal.esacademic.com](http://enciclopedia_universal.esacademic.com)
- GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*.
- GUZMÁN, M.De. (1991). Ensayo de la Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos 1991.
- HONGSHICK, J. (2008). Teaching and Learning Probability with Mathematical Modelling. ICME12. TSG 11 Teaching and learning of probability.
- KONOLD, C. (1989). Informal conceptions of probability. Bajado el 18 de agosto de 2012 del URL: <http://www.jstor.org>
- KONOLD, C. (1995). Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics, *Journal of Statistics Education* v.3, n.1.
- MARKOWITZ, H. (1962). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
- MASCAREÑAS, J. (2008). Riesgos económico y financiero. Universidad Complutense de Madrid, p 16.
- MORDECKI, E. Modelos estocásticos en finanzas. I jornada de probabilidad y estadística, Lima Perú, 2010. Universidad de la República, Montevideo Uruguay.
- PERRENOUD, P. (1999). Construir competencias desde la escuela. Santiago de Chile. Dolmen.
- POCHULU, M, RODRIGUEZ, M. (2012). Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Universidad Nacional de General Sarmiento.
- PRODROMOU, T. (2012). Developing a modeling approach to probability using computer based simulations. ICME12.
- RODRIGUEZ, M. (2012). Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Universidad Nacional de General Sarmiento. Pg. 153.
- SAGAN, C. (2000). El mundo y sus demonios, la ciencia como una luz en la Oscuridad. Ed. Planeta, España.
- SHARPE, W. (1964). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*. *Journal of Finance* XIX.

KELLERT,S. (1993). In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems.University of Chicago Press, 1993.

TRIPPI, R. TURBAN, E. (1996). Neural Networks in Finance and Investing.Using Artificial Intelligence to Improve Real World Performance.McGraw-Hill, Inc. New York.  
Universidad de Granada. Estudios sobre didáctica de la probabilidad. Bajado el 16 de julio de 2012 del URL: [http://www.ugr.es:8080/~batanero/estudios\\_sobre\\_didactica\\_de\\_la\\_probabilidad.htm](http://www.ugr.es:8080/~batanero/estudios_sobre_didactica_de_la_probabilidad.htm)

VASCO, FALK, CHARRIS, LOSADA, (1975). Consideraciones sobre la enseñanza de la matemática en el ciclo diversificado colombiano. Educación matemática en las Américas - IV: Informe de la Cuarta conferencia interamericana sobre educación matemática, Caracas, Venezuela Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática.

ICME11, The 11th International congress on mathematical education, 2008. July 6-13, 2008 Monterrey México.

ICME12, The 12th International congress on mathematical education, 2012. July 8-15, 2012 Seoul Korea.

Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. Topics study groups, ICME11, 2008.YingkangWu (China) [ykwu@math.ecnu.edu.cn](mailto:ykwu@math.ecnu.edu.cn). Carmen Batanero (Spain)[batanero@ugr.es](mailto:batanero@ugr.es)

SNIES (2011).Sistema nacional de información de la educación superior.. Ministerio de Educación Nacional. Bajado el 10 de enero de 2012 del URL:<http://www.mineduacion.gov.co/sistemasdeinformacion>

ZAPATA, L.(2008).How Do Teachers Deal with the Heuristic of Representativeness? ICME11, Topic Study Group 13, Investigación y desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

## **Anexos**

### **Anexo 1. Consideraciones iniciales para una encuesta piloto**

Referente al número de estudiantes universitarios matriculados para el 2.008, (Cifras más recientes a la fecha de elaboración del estudio), en dónde se puede encontrar datos interesantes como que en el 2008 existían 431.197 estudiantes universitarios matriculados en la ciudad de Bogotá, y en todo el país: 930.507, además que en existían 249.808 estudiantes matriculados en carreras de las ciencias administrativas y afines, en todo el país, así se infiere la conclusión de que el 26.84% de los estudiantes cursan alguna carrera administrativa a nivel nacional. En Bogotá, la cifra del número de matriculados en carreras administrativas y afines no está disponible, sin embargo se puede inferir que es el 26.82% del número de matriculados en Bogotá; es decir 67.064. Partiendo de esta cifra se debe calcular el tamaño de la muestra del estudio teniendo en cuenta que la población es de 67.064 estudiantes universitarios matriculados en ciencias administrativas en la ciudad de Bogotá. Sin embargo no se cuenta con la desviación estándar, y tampoco se conoce con plenitud si los datos recabados sigan alguna distribución en particular, así que se hizo una encuesta piloto con 103 estudiantes de 5 universidades entre públicas y privadas así:

Universidad	No de Estudiantes
Universidad Antonio Nariño.	35
Universidad América.	7
Universidad Santo Tomás.	19
Universidad Distrital Francisco José de Caldas.	22

En las encuestas queda en evidencia que el estudiante de ciencias administrativas, económicas y contables posee muy pocos acercamientos teóricos y prácticos a la toma de decisiones en entornos cambiantes. En el desarrollo de la tesis, es preciso dar a conocer algunos de los pormenores de los resultados obtenidos en esta encuesta piloto:



## Anexo 2. Modelo de la Encuesta piloto

Esta encuesta hace parte de una investigación en con fines educativos, no corresponde a publicidad ni tiene intereses lucrativos. Por favor responda cada pregunta en los espacios indicados de la siguiente manera:

Si, si está completamente seguro o de acuerdo.

No si está completamente seguro o en desacuerdo.

Ns/Nr si no sabe o no desea responder.

Gracias por su tiempo.

Universidad \_\_\_\_\_ Carrera \_\_\_\_\_

Semestre en Curso \_\_\_\_\_

	Si	No	Ns/Nr
1. ¿Estudia o estudió usted alguna carrera que de alguna manera tenga que ver con manejos financieros?			
2. ¿En el pensum de su carrera se incluyen las siguientes áreas como asignaturas o como contenido de alguna materia?			
a. Matemáticas Financieras.			
b. Estadística.			
c. Series de tiempo.			
d. Probabilidad.			
e. Modelos matemáticos.			
f. Costo del dinero o finanzas privadas.			
g. Banca y bolsa.			
h. Riesgo económico/ financiero.			
3. ¿Conoce usted que áreas del conocimiento involucran el conceptos aplicables a riesgo? Si(____) No (____) Ns/Nr (____) ¿Cuáles? _____			
4. ¿Podría definir de alguna manera el concepto de riesgo? Si(____) No (____) Ns/Nr (____) ¿Cómo? _____			
5. ¿Conoce usted alguna aplicación para los conocimientos en riesgo económico y/o financiero? Si(____) No (____) Ns/Nr (____) ¿Cuál? _____			
6. ¿Cree usted que es relevante acercar a los estudiantes de ciencias administrativas o ingenierías a los conceptos de riesgo? Si(____) No (____) Ns/Nr (____)			

- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
7. ¿Ha recibido usted en algún tipo de formación en la medición del riesgo de cualquier tipo? Si(\_\_\_\_) No (\_\_\_\_) Ns/Nr (\_\_\_\_)  
 ¿En qué asignatura?  
 \_\_\_\_\_
8. ¿Desearía usted participar en seminarios, cursos de extensión, talleres de riesgo económico o financiero? Si(\_\_\_\_) No (\_\_\_\_) Ns/Nr (\_\_\_\_)  
 ¿Por qué? \_\_\_\_\_
9. ¿Cree usted que el concepto de riesgo económico o financiero es estudiado de manera adecuada en su universidad?  
 Si(\_\_\_\_) No (\_\_\_\_) Ns/Nr (\_\_\_\_)  
 ¿Por qué? \_\_\_\_\_
10. ¿Conoce usted alguna Universidad en la que se pueda estudiar la medición del riesgo? Si(\_\_\_\_) No (\_\_\_\_) Ns/Nr (\_\_\_\_)  
 ¿Cuál? \_\_\_\_\_
11. En cuál de estos sectores de la economía cree usted que podría desempeñarse un experto en riesgo financiero.
- |                        |                                 |
|------------------------|---------------------------------|
| a. Banca.              | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| b. Seguros.            | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| c. Bolsa.              | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| d. Servicios públicos. | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| e. Salud.              | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| f. Educación.          | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| g. Industria.          | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| h. Agrícola.           | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
| i. Otro.               | Si(____) No (____) Ns/Nr (____) |
- ¿Cuál? \_\_\_\_\_

Muchas Gracias.

### Anexo 3. Resultados de la prueba piloto

Total encuestas\*:95

Universidad: AMERICA, SANTO TOMAS, ANTONIO NARIÑO, DISTRITAL, LA SALLE.

Carrera: Ing. industrial, administración, comercio internacional, economía, contaduría

Semestre en Curso: 1, 3, 6, 7, 8, 9.

1. ¿Estudia o estudió usted alguna carrera que de alguna manera tenga que ver con manejos financieros?
2. En el pensum de su carrera se incluyen las siguientes áreas como asignaturas o como contenido de alguna materia?
  - a. Matemáticas Financieras.
  - b. Estadística.
  - c. Series de tiempo.
  - d. Probabilidad.
  - e. Modelos matemáticos.
  - f. Costo del dinero o finanzas privadas.
  - g. Banca y bolsa.
  - h. Riesgo financiero.

Si	No	Ns/Nr
91	0	4
90	0	5
91	0	4
6	6	83
80	2	13
10	7	78
15	17	63
23	40	32
12	52	31

Las preguntas abiertas se categorizaron de la siguiente manera:

1. Acertado, 2. Moderadamente acertado, 3. Poco acertado, 4. Nada acertado

3. ¿Conoce usted cuales áreas del conocimiento involucran los conceptos aplicables a riesgo? Si(\_15\_) No (\_29\_) Ns/Nr (\_51\_)  
¿Cuáles?
  1. 0
  2. 2
  3. 3
  4. 0
4. ¿Podría definir de alguna manera el concepto de riesgo?  
Si(\_18\_) No (\_73\_) Ns/Nr (\_4\_)
  - a. Cómo?
    1. 3
    2. 8
    3. 3
    4. 0

5. ¿Conoce usted alguna aplicación de los conocimientos en riesgo financiero?  
Si(\_57\_) No (\_33\_) Ns/Nr (\_5\_)
- a. Cual
1. 4
  2. 9
  3. 4
  4. 0
6. ¿Cree usted que es relevante acercar a los estudiantes de ciencias administrativas o ingenierías a los conceptos de riesgo financiero?  
Si(\_93\_) No (\_0\_) Ns/Nr (\_2\_)
1. 4
  2. 12
  3. 5
  4. 2
7. ¿Ha recibido usted algún tipo de formación en la medición del riesgo de cualquier tipo? Si(\_14\_) No (\_60\_) Ns/Nr (\_21\_)
- a. En qué materia: Ninguno asoció probabilidad con riesgo, 1 lo hizo con matemáticas financieras.
8. ¿Desearía usted participar en seminarios, cursos de extensión, talleres de riesgo financiero? Si(\_85\_) No (\_0\_) Ns/Nr (\_10\_)
9. ¿Cree usted que el concepto de riesgo financiero es estudiado de manera adecuada en su universidad?  
Si(\_15\_) No (\_62\_) Ns/Nr (\_18\_)
- a. ¿Por qué? Nadie contestó.
10. ¿Conoce usted alguna Universidad en la que se pueda estudiar la medición del riesgo? Si(\_0\_) No (\_86\_) Ns/Nr (\_9\_)
- a. ¿Cuál? Ninguno contestó.
11. En cuál de estos sectores de la economía cree usted que podría desempeñarse un experto en riesgo financiero.
- |                        |                                 |
|------------------------|---------------------------------|
| a. Banca.              | Si(_94_) No (___) Ns/Nr (_1_)   |
| b. Seguros.            | Si(_94_) No (___) Ns/Nr (_1_)   |
| c. Bolsa.              | Si(_94_) No (___) Ns/Nr (_1_)   |
| d. Servicios públicos. | Si(_20_) No (_19_) Ns/Nr (_56_) |
| e. Salud.              | Si(_24_) No (_16_) Ns/Nr (_55_) |
| f. Educación.          | Si(_32_) No (_12_) Ns/Nr (_51_) |
| g. Industria.          | Si(_55_) No (_12_) Ns/Nr (_28_) |
| h. Agrícola.           | Si(_31_) No (_17_) Ns/Nr (_47_) |
| i. Otro.               | Si(_29_) No (_11_) Ns/Nr (_55_) |
- ¿Cuál? 2 Afirman que Bolsa

#### Anexo 4. Criterios para llegar a la muestra final. Primera Prueba Diagnóstica

Del universo de las 5 universidades en las cuales se implementó la primera encuesta, se decidió implementar el estudio únicamente en la universidad Antonio Nariño, debido a que el mismo implica 9 horas de clase para los estudiantes, y se contaba con la aprobación de aplicar las pruebas únicamente en la Universidad Antonio Nariño y la Universidad Distrital.

En la Universidad Distrital, los grupos son bastante heterogéneos y se encontraron estudiantes de distintos programas y semestres, fuera de los de ciencias administrativas en un mismo grupo. Las horas disponibles para la práctica no eran suficientes.

Es así como la muestra se reduce a los estudiantes de la Universidad Antonio Nariño, allí se encontraron dos grupos homogéneos, y se aplica la primera prueba diagnóstica, en donde se tiene heurísticas interesantes de estudio, y nuevamente se observa la necesidad de reducir la muestra a únicamente los estudiantes de la jornada Diurna, ya que varios estudiantes de la jornada nocturna, se encuentran en un nivel bajo de interpretación, correlación de conceptos, y lo más importante; al notar que no se encuentra dentro del syllabus de la materia de matemáticas financieras, no le prestan mayor interés. Como se muestra a continuación:

1. Resultado presentado por EN4. a la primera prueba diagnóstica:

Solución

1. Paso Convertimos la tasa efectiva anual a efectiva mensual

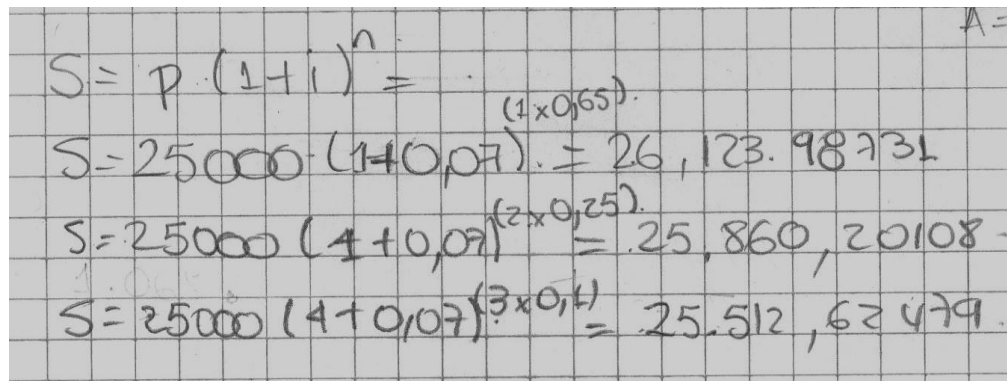
$$\sqrt[12]{1+0.07}-1 = 0,005654145 \text{ EM}$$
$$25.000 = \frac{(1+0,005654145)^{12}-1}{0,005654145}$$
$$R = 188.179.8794$$

Gráfica A1.

En dónde se denota que la estudiante presenta varias fallas de interpretación:

- a) No utiliza en nada la probabilidad nombrada en el ejercicio, considera que son anualidades ciertas, no contingentes.
- b) Aplica únicamente conocimientos financieros.
- c) Encuentra la renta mensual. Solución parcial al literal b.
- d) No realiza ninguna otra actividad.
- e) Esta solución se presentó en 7 de las pruebas aplicadas.

2. Resultado obtenido por EN3.



Handwritten calculations on grid paper:

$$S = P \cdot (1+i)^n$$

Example 1:  $S = 25000 \cdot (1+0,65)^1 = 26,123,98731$  (Note:  $1 \times 0,65$  is written above the exponent)

Example 2:  $S = 25000 \cdot (1+0,25)^2 = 25,860,20108$  (Note:  $2 \times 0,25$  is written above the exponent)

Example 3:  $S = 25000 \cdot (1+0,4)^3 = 25,512,62479$  (Note:  $3 \times 0,4$  is written above the exponent)

Gráfica A2.

En esta solución parcial, cómo la estudiante utiliza criterios de valor futuro sin embargo en el exponente, (En dónde siempre se utiliza tiempo), utiliza los cardinales del ejercicio, multiplicados por la probabilidad de ocurrencia del deceso, siendo ésta una de las heurísticas más aplicadas en el aula. Para la solución del literal b, se tiene:

20.  
 $7\% \text{ EA} \rightarrow \text{EM} \cdot \sqrt[12]{(1+0,07)^{12} - 1}$   
 $\{0,005654145387 \text{ EM}\} \times 100$   
 $0,5654145387$

$S = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\text{US } \$ 25000 = \frac{(1+0,5654145387)^{12} - 1}{0,5654145387}$

$25000 = 381,2195761$

$25000 - 381,2195761 = 24618,78042$

Gráfica A3.

En dónde aplica correctamente los criterios financieros, sin embargo comete errores que no se admiten en un nivel de conocimiento en el momento en que se aplica la prueba.

b. No tiene en cuenta la probabilidad de ocurrencia del evento.

c. Al convertir la tasa, utiliza  $\sqrt[12]{(1+0.07)} - 1$

0.005654145 EM

Sin embargo al aplicarla en la anualidad, se confunde y utiliza un 56% en vez del resultado 0,56%, los pagos no quedan bien calculados por obvias razones.

2. Resultados obtenidos por EN2.

Es una variante del la respuesta anterior.

$$\textcircled{1} S = P(1+i)^n$$

$$S = 25.000 (1+0,07)^{0,65} = 26123,98731$$

$$S = 25.000 (1+0,07)^{0,5} = 25860,20108$$

$$S = 25.000 (1+0,07)^{0,3} = 25512,62479$$
  

$$\textcircled{2} 7\% \text{ EA} \rightarrow \text{EM} (1+i_1)^{m_1} (1+i_2)^{m_2}$$

$$(1+0,07) (1+i_2)^{12}$$

$$(1+0,07) (1+i_2)^1 = \sqrt[12]{1,07} - 1 = 0,00565414538$$

Gráfica A4.

3. Resultados obtenidos por:EN1.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \text{ Valor esperado.}$$

$$\frac{25}{0,7} = 357,1428571 = P.$$

$x = \#$  de años.  
 $P =$  probabilidad varia  $x$  por daño (tabla)  
 $P = 357,1428571.$

$$= 1 \times 0,065 \times 357,1428571 + 2 \times 0,25 \times 357,1428571$$

$$+ 3 \times 0,1 \times 357,1428571$$

Gráfica A5.

En este resultado se analiza que:

- Analiza correctamente el criterio de valor esperado.
- Confunde la variable aleatoria, utiliza el cardinal, (Los años).



- c. Divide los pagos entre la tasa de interés, (Utiliza la fórmula de valor presente de una anualidad uniforme perpetua, tema que se estaba impartiendo la clase inmediatamente anterior.)

En la solución al literal b se tiene:

$$\begin{aligned}
 &= 232,1428571 + 178,5712855 + 107,1428571 \\
 &= 517,856997 \quad \text{Anualidad} \\
 &A = R \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \\
 &A = 517,8571428 \left[ \frac{1 - (1+0,00583333)^{-36}}{0,005833333} \right] = 1359,02 \text{ USD} \\
 &= 357,8571428 \left[ \frac{1 - (1+0,00583333)^{-36}}{0,005833333} \right] \\
 &= 1589,72 \text{ USD}
 \end{aligned}$$

Gráfica A6.

- Utiliza los resultados obtenidos en el ejercicio anterior.
- Al convertir la tasa comete errores de conversión.
- Utiliza valor presente a pesar que debe distribuir los pagos de manera mensual desde una cifra al final de cada año (Valor futuro de una anualidad uniforme)

A pesar de los errores cometidos, es la mejor de las pruebas diagnósticas de la Universidad Antonio Nariño Sedes Sur nocturno

## Anexo 5. Primera prueba diagnóstica

1. El señor Néstor Escobar sufre de una grave enfermedad al hígado, según el comité médico sus probabilidades de supervivencia son:

Años ( $n$ )	Probabilidad de sobrevivir $n$ años
<b>1</b>	<b>0,65</b>
<b>2</b>	<b>0,25</b>
<b>3</b>	<b>0,1</b>

La compañía para la que labora decide entregar a modo de indemnización, un bono por US\$25.000.00 anuales pagaderos al final de cada año, debido a su imposibilidad de continuar laborando.

3. ¿Cuál será el valor presente esperado de esos pagos si el dinero tiene un rendimiento del 7% Efectivo Anual?
4. Si el empleado sugiere que se le efectúe el pago de la indemnización mensualmente, si entre cada año se sigue una distribución uniforme de ocurrencia de la muerte del trabajador, ¿Cuál será el valor presente esperado de cada pago?

## **Anexo 6. Segunda Prueba Diagnóstica**

Un inversionista tiene los siguientes planes para evaluar y decidir dónde colocar su dinero, teniendo en cuenta los siguientes planes:

3. En renta fija con una rentabilidad del **10%**EA.
4. Una inversión en renta variable en el mercado de valores de su país, con probabilidades de ocurrencia como se muestran a continuación:

UTILIDAD	PROBABILIDAD
<b>20%</b>	<b>0,15</b>
<b>15%</b>	<b>0,15</b>
<b>10%</b>	<b>0,3</b>
<b>5%</b>	<b>0,25</b>
<b>3%</b>	<b>0,15</b>

## Anexo 7. Guía 1. Preliminares



DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
ESTADISTICA II.  
Facultad de ciencias administrativas, económicas y contables.

Profesor: Miguel Díaz.

### **GUIA No. 1** **PRELIMINARES.**

*Tiempo de Ejecución: 1 hora.*

*Pre-requisitos: Conocimientos básicos en teoría de conjuntos y matemáticas financieras.*

#### **OBJETIVOS:**

- *Identificar los posibles escenarios de las inversiones de la empresa, (Espacio Muestral.)*
- *Usar y aplicar los diagramas de árbol en la conformación de los puntos muestrales para un experimento aleatorio definido.*
- *Introducir la teoría de probabilidad condicional en la toma de decisiones financieras.*
- *Aplicar conocimientos financieros en la toma de decisiones contingentes con operaciones de interés compuesto, en este caso gradientes lineales.*

#### **Motivación:**

*Para el cálculo de las probabilidades de ocurrencia del experimento aleatorio se debe establecer los posibles resultados de un proceso estocástico en un espacio muestral definido. Concretamente en el área de finanzas, es complicado tener una idea de todos los posibles resultados de las inversiones que se realizan en el ejercicio de la profesión; sin embargo para la toma de decisiones, una aproximación de estos posibles resultados es de gran ayuda, razón por la cual debe tenerse herramientas claras y sencillas para abordar este problema.*

#### **Problematización:**

1. *Marco Teórico:*

#### **Definiciones:**

1. *El conjunto de todos los posibles elementos de un experimento aleatorio recibe el nombre de Espacio muestral y se denota con  $S$ .*
2. *Un espacio muestral  $S$  es discreto si su resultados están en una correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos, y es continuo si corresponde a un intervalo numérico de posibles resultados.*
3. *Un evento  $E$  es un subconjunto del espacio muestral.*
4. *El complemento del evento  $A$ , con respecto a  $S$ , es el subconjunto de todos los elementos que no están en  $A$  y se denota con  $A'$ .*

Definidos  $E_1$  y  $E_2$  eventos de un espacio muestral  $S$ , entonces:

- a. El evento formado por todos los posibles resultados en  $E_1$  y en  $E_2$  recibe el nombre de “ $E_1$  unión  $E_2$ ” y se denota por:

$$E_1 \cup E_2$$

- b. El evento formado por todos los resultados comunes a  $E_1$  y a  $E_2$  recibe el nombre de “ $E_1$  intersección  $E_2$ ” y se denota por:

$$E_1 \cap E_2$$

- c. Se dice que los eventos  $E_1$  y  $E_2$  son disyuntos si no tienen elementos (resultados) en común así:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

- d. Si cualquier resultado de  $E_1$  también es resultado de  $E_2$  se dice que “el evento  $E_1$  está contenido en el evento  $E_2$ ” y se denota por:

$$E_1 \subset E_2$$

Reglas aditivas de la probabilidad:

$P(x)$  Denota la probabilidad del evento  $x$ , y toma valores entre 0 y 1.

Dos eventos son mutuamente excluyentes, si no existen elementos en común, no hay intersección entre ellos.

Dos eventos son complementarios, si la unión de estos es igual al espacio muestral.

Teorema 1: Si  $A$  y  $B$  son dos eventos cualesquiera entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Corolario 1: Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son  $n$  eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Corolario 2: Si  $A$  y  $A'$  son dos eventos complementarios entonces:

$$P(A) + P(A') = 1.$$

### Ejemplo 1.

El gerente de una sociedad de economía mixta, está considerando invertir en una empresa petrolera. La valoración de probabilidades correspondientes a las tasas de rentabilidad de ese capital durante el próximo año se registra en la tabla adjunta.

Tasa de rentabilidad	Probabilidad
Menos de -10%	0,04
Entre -10% y 0%	0,14
Entre 0% y 10%	0,28
Entre 10% y 20%	0,33
Más del 20%	0,21

Sea el evento  $A$ , “la tasa de rentabilidad será mayor del 10%” y sea  $B$  el evento “la tasa de rentabilidad será negativa” Calcule:

a. La probabilidad del evento  $A$ .

Respuesta:  $P(A) = 0,33 + 0,21 = 0,54$ .

b. La probabilidad del evento  $B$ .

Respuesta:  $P(B) = 0,04 + 0,14 = 0,18$ .

c. Describa el complemento del evento  $A$ .

Respuesta:  $A'$  = La tasa de rentabilidad será menor del 10%.

d. Calcular la probabilidad del complemento de  $A$ .

Respuesta:  $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,54 = 0,46$ .

e. Describir el evento intersección de los eventos  $A$  y  $B$ .

Respuesta: La tasa de rentabilidad será mayor y menor al 10%. Así, los eventos  $A$  y  $B$  son disjuntos y no tienen resultados en común.

f. Calcular la probabilidad de la intersección de los eventos  $A$  y  $B$ .

Respuesta:  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ .

g. Describir el evento de unión de los eventos  $A$  y  $B$ .

Respuesta: Ocurre alguno de los dos eventos, que la tasa de rentabilidad sea mayor del 10% o que la tasa de rentabilidad sea negativa; así pues, sólo se excluye el intervalo donde la utilidad se encuentra entre 0% y 10%.

h. Calcular la probabilidad de la unión de los eventos  $A$  y  $B$ :

Respuesta: Según el corolario 1, la probabilidad de la unión de eventos excluyentes es la suma de las probabilidades de ellos, así:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = (0,33 + 0,21) + (0,04 + 0,14) = 0,72.$$

Otro escenario de cálculo es: Excluyendo el intervalo de 0% a 10%, cuya probabilidad es 0,72. Es decir:

$$P(S) - P(A \cup B)' = 1 - 0,28 = 0,72.$$

**Probabilidad Condicional:**

Recuerde:

Cuando se determina la probabilidad de ocurrencia de un evento  $A$ , dado que ya se haya presentado el evento  $B$ , denotado como  $P(A|B)$ .

Siempre se va a tener la siguiente relación: La probabilidad del evento  $A$  dado otro evento  $B$ , es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Es decir, la probabilidad de la intersección de los eventos, sobre la probabilidad de la condición.

**Ejemplo 2:**

Una empresa de corretaje efectuó un estudio de mercado acerca de las probabilidades de valorización de las empresas Pacific Rubiales y Ecopetrol en el mediano plazo, con opiniones de varios expertos, de quienes se obtuvieron los siguientes resultados:

El 20% de los entrevistados opina que Pacific se valorizará, el 16% opina que Ecopetrol se valorizará, y el 5% opina que ambas se valorizarán.

De escoger al azar a uno de los expertos que opina que Pacific se valoriza, ¿Cuál es la probabilidad de que él opine que Ecopetrol también se valore?

Respuesta:

Sea el evento  $A$  "Ecopetrol se valore".

Sea el evento  $B$  "Pacific se valore".

Sea la intersección de  $A$  y  $B$  "ambas se valoricen".

Sea  $P(A|B)$  "la probabilidad de que el experto opine que Ecopetrol se valore, dado que Pacific también se valore".

Entonces:

$$P(A) = 0,16$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(A \cap B) = 0,05.$$

Así,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,2} = 0,25.$$

**Ejemplo 3.**

Las empresas en tiempos de crisis económica tienden a capitalizarse con dineros de los socios y/o créditos externos con una probabilidad del 90%. Por experiencia se conoce que las empresas que presentan capitalizaciones son propensas a valorizarse en bolsa con probabilidad del 90%, frente a las empresas que no se capitalizan, que son propensas a valorizarse con probabilidad del 80%. Usted como gerente general debe calcular la probabilidad que la empresa se valore, independientemente se haya capitalizado o no.

Para abordar el problema, se puede hacer desde la óptica de los diagramas de árbol, para su análisis.

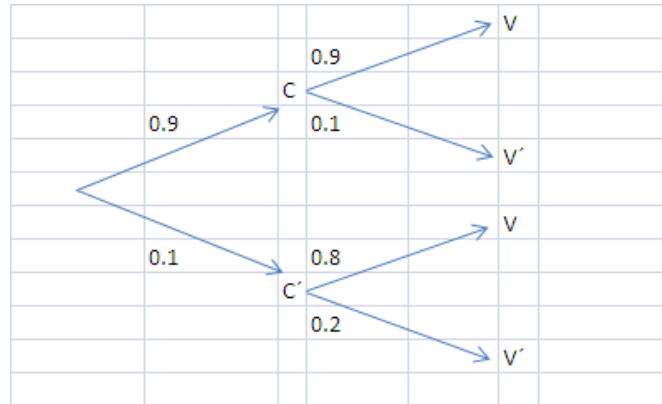
El diagrama de árbol generado por el problema anterior es:

Sea el evento  $C$  "Se capitalizan".

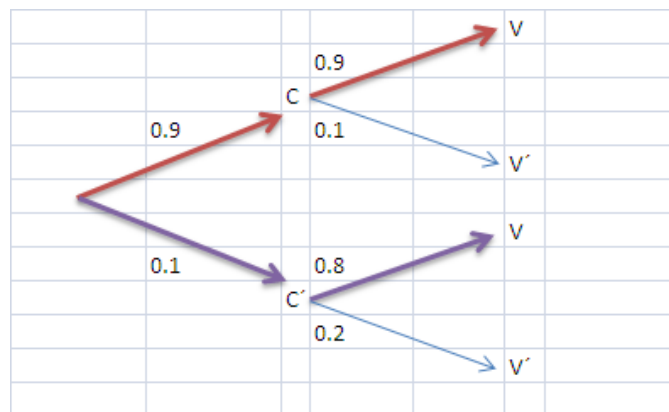
Sea el evento  $C'$  "No se capitalizan".

Sea el evento  $V$  "Se valorizan".

Sea el evento  $V'$  "No se valorizan".



La probabilidad de que se valore la empresa puede calcularse de la siguiente manera:



Siguiendo la ruta de “Valorización” puede decirse que la probabilidad de valorizarse es:

$$P(V) = (0,9)(0,9) + (0,1)(0,8) = 0,89.$$

Lo que significa que 89% es la probabilidad de que la empresa se valore.

Ahora, debe calcularse la probabilidad de que sabiendo que la empresa no se ha valorizado, se haya capitalizado.

Teniendo en cuenta la definición de probabilidad condicional, se puede afirmar que:

$$P(C|V') = \frac{P(C \cap V')}{P(V')}$$

Es decir, la probabilidad de que se haya capitalizado dado que no se haya valorizado, es igual a la probabilidad de que se haya capitalizado pero no valorizado, sobre la probabilidad de que no se haya valorizado.

Entonces, debe escogerse la ruta de que no se haya valorizado y que se haya capitalizado:

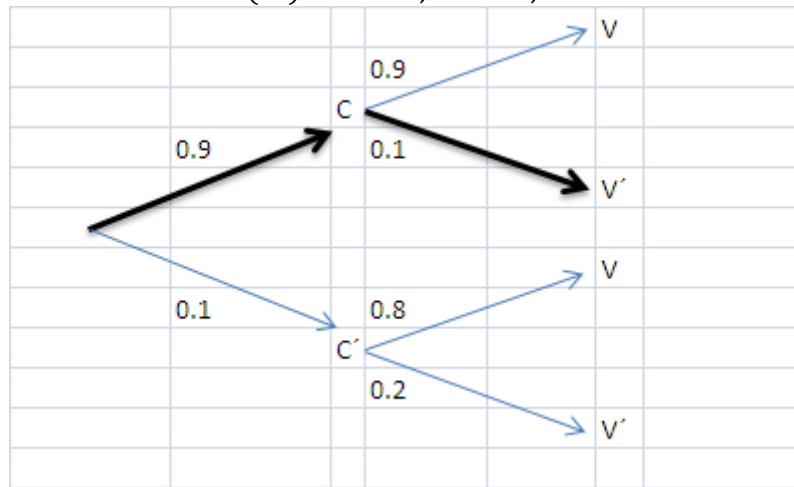
$$P(C \cap V') = (0,1)(0,9) = 0,09.$$

Sobre la probabilidad de que no se haya valorizado, que sería la suma de las rutas de no valorización, o como segunda opción de cálculo por el complemento, esto es, 1 menos la probabilidad de valorización:



Si la probabilidad de valorización es **0,89**, como se dedujo anteriormente, entonces la probabilidad del complemento de  $V$  (o  $V'$ ) es:

$$P(V') = 1 - 0,89 = 0,11.$$



Entonces la probabilidad de que sabiendo que no se ha valorizado, la probabilidad de que se haya capitalizado es:

$$P(C|V') = \frac{P(C \cap V')}{P(V')} = \frac{0,09}{0,11} = 0,8181818.$$

Actividad propuesta:

1. Como gerentes financieros deben elegir lanzar o no, una nueva campaña de marketing, después de analizar la respuesta de los consumidores, se ha determinado que las ventas del siguiente año pueden crecer mes a mes en una suma fija con las siguientes probabilidades.

Incremento (En Unidades)	Probabilidad
0	0,1
100	0,3
200	0,4
300	0,2

Si la producción actual es de **800** Unidades calcule las siguientes probabilidades:

1. Que las ventas para el segundo mes superen las **1000** unidades.
  2. Que las ventas continúen constantes.
  3. Que las ventas superen en el quinto mes las **1.300** unidades.
2. Se posee la siguiente información en detalle acerca de tres compañías (A, B y C), de publicidad que nos ofrecen las campañas de marketing más atractivas.

Se estiman las probabilidades en dos escenarios posibles: Que se incrementen las ventas y que se mantengan constantes después de implementar las campañas de marketing.

	A	B	C	Total
<i>Incrementan</i>	<b>0,2</b>	<b>0,1</b>	<b>0,3</b>	<b>0,6</b>
<i>Continúan constantes</i>	<b>0,1</b>	<b>0,05</b>	<b>0,25</b>	<b>0,4</b>
<i>Total</i>	<b>0,3</b>	<b>0,15</b>	<b>0,55</b>	<b>1</b>

- Calcule la probabilidad de que se incrementen las ventas dado que se haya escogido cada una de las empresas.
- Calcule la probabilidad de que se escoja alguna de las empresas dado que se incrementen las ventas.

Teniendo en cuenta los costos de las campañas para cada una de las empresas son las siguientes:

**A: Valor Presente: \$10.000.000.00**

**B: Valor Presente: \$12.000.000.00**

**C: Valor Presente: \$11.000.000.00**

Si el precio de venta por unidad es de \$15.000.00, indique bajo el criterio de Valor presente neto, la oferta más atractiva en el lapso de un año.

Como Gerentes financieros ¿Cual empresa escogerían para realizar su campaña de marketing del próximo año?

## Anexo 8. Guía 2. Valor esperado



DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
ESTADISTICA II  
Facultad de ciencias administrativas, económicas y contables.

Profesor: Miguel Díaz.

### GUIA No. 2 VALOR ESPERADO.

*Tiempo de Ejecución: 1 hora.*

*Pre-requisitos: Conocimientos básicos en probabilidad y matemáticas financieras.*

#### OBJETIVOS:

- *Identificar algunas herramientas para calcular el valor esperado presente y futuro de una inversión financiera.*
- *Aplicar matemáticas financieras y probabilidad para la toma de decisiones.*
- *Evaluar inversiones sobre el criterio de valor esperado.*
- *Interpretar resultados desde el punto de vista probabilista versus financiero.*

#### Motivación:

*Es bien sabido que el profesional en carreras administrativas, en su ejercicio profesional debe involucrarse en la selección de alternativas para invertir el dinero de la compañía de la manera más acertada, y el mercado de dinero ofrece muchas alternativas que sopesan rentabilidad vs riesgo; las inversiones más riesgosas generalmente son las que ofrecen rentabilidades más atractivas. Es por esto que el valor esperado de las inversiones efectuadas debe ser evaluado de manera adecuada para minimizar la probabilidad de pérdida.*

#### Problematización:

##### 2. Marco Teórico:

*Definición de valor esperado: El valor de una variable aleatoria  $X$ , es el promedio o valor medio de  $X$ , es decir, es el valor medio de un fenómeno aleatorio. Para el caso discreto, es el producto de las probabilidades de ocurrencia por el valor del suceso así, si  $x$  es discreta:*

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i).$$













#### Ejemplo 1. (Introdutorio)

*Si la variable aleatoria  $x$  representa la suma de las caras de dos dados cuando estos se lanzan, el valor esperado es:*













La función de probabilidad es:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{6 - |7 - x|}{36} & \text{si } x = 2, 3, 4, \dots, 12. \\ 0 & \text{para cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Ya que los posibles resultados del experimento se dan de esta manera:

						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

El resultado de las sumas de los resultados, como se describe en la función de probabilidad, sería el siguiente espacio muestral: 36 resultados posibles.

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Entonces se tiene que los valores oscilaran entre 2 y 12, ya que se trata de la suma de los resultados del lanzamiento de dos dados.

La probabilidad de ocurrencia de cada uno está dado por:

$$\frac{6 - |7 - 2|}{36} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{6 - |7 - 3|}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{6 - |7 - 4|}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{6 - |7 - 11|}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{6 - |7 - 12|}{36} = \frac{1}{36}$$

Entonces:

$$E(x) = \sum_{i=2}^{12} x_i p(x_i) = 2 \left( \frac{1}{36} \right) + 3 \left( \frac{1}{18} \right) + \dots + 12 \left( \frac{1}{36} \right) = 7.$$

El valor esperado de la suma de los resultados en repetidos lanzamientos es 7.

### Ejemplo 2.

Un inversionista desea colocar en el mercado de dinero una suma considerable de los recursos líquidos de la empresa para la que trabaja, y su asesor financiero le aconseja dos planes de inversión:

1. Una renta fija anual del 10%EA.
2. Una renta variable en el mercado de valores de su País, que tienen rentabilidades estimadas y con probabilidades de ocurrencia como se muestran a continuación:

Utilidad anual	Probabilidad.
20%	0,15
15%	0,15
10%	0,3
5%	0,25
3%	0,15

Para evaluar el segundo proyecto, con el criterio de valor esperado:

$$E(x) = \sum_{i=1}^5 x_i p(x_i) = (0,2)(0,15) + (0,15)(0,15) + \dots + (0,03)(0,15).$$

Según este criterio, se identifica que la inversión con mejores expectativas es la renta fija, porque el valor esperado de las inversiones en renta variable es de 9.95%, mientras que la renta fija nos garantiza el 10%:

$$E(x) = \sum_{i=1}^5 x_i p(x_i) = 0,0995 < 0,1.$$

**Ejemplo 3.**

En el comité técnico médico define una incapacidad permanente para uno de sus trabajadores, debido a una enfermedad de origen laboral y estima las probabilidades de sobrevivencia del trabajador como se muestra en la tabla que sigue:

<b>Años (n)</b>	<b>Probabilidad de sobrevivir "n" años</b>
<b>1</b>	<b>0,65</b>
<b>2</b>	<b>0,25</b>
<b>3</b>	<b>0,1</b>

La compañía para la que labora decide entregar a modo de indemnización, un bono por US\$25.000.00 anuales pagaderos al final de cada año, debido a su imposibilidad de continuar laborando.

3. ¿Cuál será el valor esperado de esos pagos si el dinero tiene un rendimiento del 7% Efectivo Anual?
4. Si el empleado sugiere que se le efectúe el pago de la indemnización mensualmente, si entre cada año se sigue una distribución uniforme de ocurrencia de la muerte del trabajador, ¿Cuál será el valor esperado de cada pago?

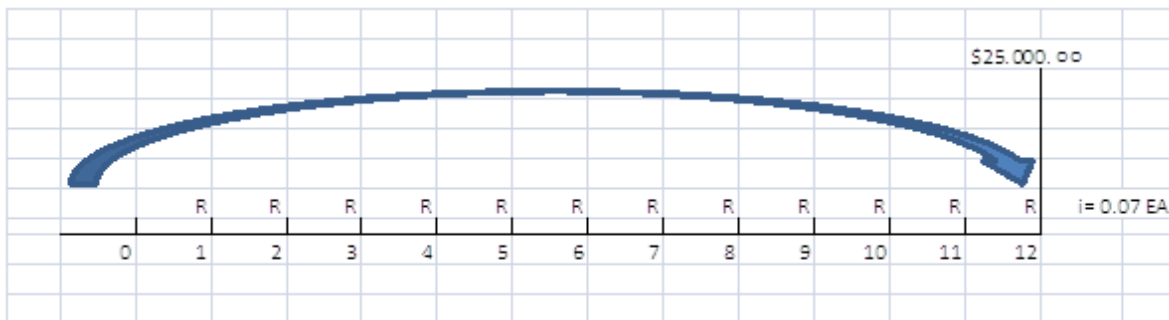
Para la solución del primer punto se debe tener en cuenta que el valor esperado de los pagos se deben trasladar al presente ya que los intereses generados en la operación financiera van de la mano con la probabilidad de ocurrencia del evento, en este caso la muerte del trabajador. Entonces:

$$E(x) = 25(1 + 0,07)^{-1}(0,65) + 25(1 + 0,07)^{-2}(0,25) + 25(1 + 0,07)^{-3}(0,1).$$

Así,

$$E(x) = \sum_{i=1}^3 x_i p(x_i) = \$22.686,65263.$$

Para la solución del segundo ítem, se debe tener en cuenta que el valor de cada uno de los pagos de USD\$25.000.00, se efectúa al final del año, entonces se convertirá en el valor futuro de los pagos mensuales así:



La tasa anual se convierte a tasa mensual así:

$$\sqrt[12]{1 + 0,07} - 1 = 0,005654145EM.$$

Recuerde que el valor futuro de una anualidad uniforme  $S$  se comporta de la siguiente manera:

$$S = R \left( \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right)$$

Dónde:

$i$  = Tasa de interés efectiva.

$n$  = Tiempo de la inversión en este caso el número de pagos.

$R$  = Valor de la cuota mensual o renta.

Entonces para el primer año el valor de la renta es:

$$(25.000)(0.65) = R \left[ \frac{(1 + 0.005654145)^{12} - 1}{0.005654145} \right]$$

$$R = \frac{(25.000)(0.65)}{\left[ \frac{(1+0.005654145)^{12}-1}{0.005654145} \right]}$$

$$R = 1312.569469$$

Para el segundo año el valor de la renta es:

$$R = \frac{(25.000)(0.25)}{\left[ \frac{(1+0.005654145)^{12}-1}{0.005654145} \right]}$$

$$R = 504.834411$$

Para el tercer año el valor de la renta es:

$$R = \frac{(25.000)(0.1)}{\left[ \frac{(1+0.005654145)^{12}-1}{0.005654145} \right]}$$

$$R = 201.9338.$$

*Actividad propuesta:*

*Una empresa comisionista de Bolsa desea invertir US\$100.000.00 en el proyecto que le genere mayor valor esperado de las siguientes alternativas de inversión:*

- a. *Una empresa energética con probabilidades de rentabilidad anual distribuida de la siguiente forma:*

<i>Rentabilidad</i>	<i>Probabilidad</i>
<b>20%</b>	<b>0,2</b>
<b>15%</b>	<b>0,6</b>
<b>5%</b>	<b>0,2</b>

- b. *Una empresa del sector financiero que ofrece dividendos por US\$0,10 por acción pagaderas mensualmente con una tasa del 12% NM, si el valor de cada acción es de US\$50 cada una.*

*Aplice los modelos adecuados para la evaluación de las alternativas de inversión y decida dónde invertir el dinero.*



## Anexo 9. Guía 3. Introducción al riesgo



DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
ESTADÍSTICA II  
Facultad de ciencias administrativas, económicas y contables.

Profesor: Miguel Díaz.

### GUIA No. 3 INTRODUCCION AL RIESGO.

*Tiempo de Ejecución: 1 hora.*

*Pre-requisitos: Conocimientos básicos en finanzas, estadística descriptiva, probabilidad y matemáticas financieras.*

#### **OBJETIVOS:**

- *Reconocer y aplicar los procesos estadísticos necesarios para elaborar modelos de decisión financiera.*
- *Definir conceptos aplicados a la generación de modelos abstraídos de la estadística y matemáticas financieras.*
- *Aplicar conocimientos financieros en la toma de decisiones, al evaluar de manera acertada mediante varianza mínima.*

#### **Motivación:**

*Definir cuál es el portafolio óptimo para que nuestras inversiones tengan el máximo de rendimiento versus mínimo riesgo, es una tarea que se hace, la mayoría de veces, de manera empírica, basados en conocimientos previos del mercado de valores y las diferentes ofertas que se presentan por los encargados de captar el dinero que se administra. Es necesario encontrar modelos apropiados para determinar la cantidad justa, de equilibrio entre riesgo y rentabilidad, modelos con soporte científico. “En cosas dudosas se daban respuestas dudosas... en lo que había probabilidades más seguras, se dan respuestas más seguras”.<sup>50</sup>*

#### **Problematización:**

##### **Marco Teórico:**

*En las inversiones en general, es muy importante aplicar el concepto de diversificación de portafolio, que nos recuerda que es prudente dividir el dinero destinado a inversiones, en varias opciones, inclusive si el valor esperado de una de ellas sea mayor que las demás, es muy arriesgado colocar todas nuestras inversiones en un solo activo. No se debe colocar todos los huevos en una sola cesta, la rentabilidad esperada de un activo generalmente se debe hacer en base de tendencias históricas, series de tiempo, condiciones económicas etc., sin embargo no se debe invertir todo el dinero en una sola compañía, así el valor esperado de ésta sea superior a los demás, ya que el mercado es volátil, y ésa volatilidad, en finanzas, es sinónimo de riesgo. Veamos cómo minimizar el riesgo mientras se optimizan los rendimientos esperados, en este caso en el*

<sup>50</sup> SAGAN, C. (2000). El mundo y sus demonios, la ciencia como una luz en la Oscuridad. Ed. Planeta, España.

mercado de valores de Colombia.

Recuerde:

Media Aritmética:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{N}$$

Para datos enlistados (sin agrupar).

Varianza:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{N}$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{N}}$$

Varianza de una variable aleatoria:

$$\sigma^2 = E \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \bar{X})^2}{N}$$

Dónde  $E$  := Valor esperado de la variable.

Covarianza:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Si  $Cov(X, Y) > 0$ , entonces existe una dependencia directa.

Si  $Cov(X, Y) = 0$ , entonces las variables son independientes.

Si  $Cov(X, Y) < 0$ , entonces existe una dependencia inversa o negativa.

Índice Beta de una inversión  $i$ :

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

Dónde:

$Cov(R_i, R_m)$  := Covarianza entre el rendimiento del activo  $i$ , y el rendimiento del resto del mercado.

$\sigma^2(R_m)$  := Desviación estándar de los rendimientos del mercado.

Correlación:

$$Corr(R_A, R_B) = \frac{Cov(R_A, R_B)}{(\sigma_A)(\sigma_B)}$$

Si  $Corr(R_A, R_B) = 1$ , entonces existe una correlación perfecta.

Si  $Corr(R_A, R_B) = -1$ , entonces existe una correlación negativa perfecta.

Si  $Corr(R_A, R_B) = 0$ , entonces no existe relación.

Varianza de un portafolio de 2 activos financieros:

$$Var_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B Cov(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

Siendo:

$X_A^2$  := El porcentaje de la Inversión de la primera acción al cuadrado.

$\sigma_A^2$  := La varianza de la primera Inversión.

$X_A$  := El porcentaje invertido de la primera acción.

$X_B$  := El porcentaje invertido de la segunda acción.

$Cov(A, B)$  := Covarianza de los rendimientos de las dos acciones.

$X_B^2$  := El porcentaje de la Inversión de la segunda acción al cuadrado

$\sigma_B^2$  := La varianza de la segunda Inversión.

### Ejemplo 1:

La compañía para la que laboran tiene un excedente de efectivo en caja de \$100.000.000.00 que el gerente general decide invertir en acciones, y ustedes, como gerentes financieros, deben analizar dos alternativas de inversión, Ecopetrol y Coltejer así pues que deben encontrar la relación óptima entre rendimientos esperados y riesgo. Se tiene la siguiente información del comportamiento histórico en ciertas temporadas de años anteriores para la toma de la decisión:

	Rendimientos de Ecopetrol	Rendimientos de Coltejer.
Enero-Marzo	-3%	4%
Abril-Junio	2%	3%
Julio-Septiembre	5%	1%
Octubre-Diciembre	7%	5%

1. Calcule el rendimiento esperado, (Media Aritmética).

a. Ecopetrol

$$\frac{-3 + 2 + 5 + 7}{4} = 2,75\%$$

b. Coltejer

$$\frac{4 + 3 + 1 + 5}{4} = 3.25\%$$

Como se observa, el valor esperado de los rendimientos entre los activos es mayor en Coltejer, pero es importante conocer más datos para la decisión óptima.

2. Calcule la varianza de los rendimientos esperados.

a. Ecopetrol

$$\frac{(-3 - 2.75)^2 + (2 - 2.75)^2 + (5 - 2.75)^2 + (7 - 2.75)^2}{4} = 14.1875\%$$

b. Coltejer

$$\frac{(4 - 3.25)^2 + (3 - 3.25)^2 + (1 - 3.25)^2 + (5 - 3.25)^2}{4} = 2.1875\%$$

3. Calcule la desviación estándar:

a. Ecopetrol:

$$\sqrt{14.1875} = 3.76663\%$$

b. Coltejer:

$$\sqrt{2.1875} = 1.47902\%$$

La volatilidad de las acciones de Coltejer es menor, sigue siendo más atractiva.

4. Calcule la covarianza del portafolio:

$$\frac{(-3 - 2.75)(4 - 3.25) + \dots + (7 - 2.75)(5 - 3.25)}{4} = 4.25\%$$

5. Calcule la Correlación:

$$\text{Corr}(R_E R_C) = \frac{4.25}{(3.76663)(1.47902)} = 0.763\%$$

La covarianza del portafolio nos indica, que tienen una dependencia directa estas dos acciones, pero es muy pequeña para tomar una decisión. Y la Correlación muy cercana a cero nos indica que no hay correlación en los comportamientos de los dos activos.

6. Calcule rendimientos esperados:

Ahora se inicia la simulación con una inversión de \$100.000.000.00, si se pretende invertir 60% en Ecopetrol y 40% en Coltejer, se tiene:

$$(0,6)(0,0275) + (0,4)(0,0325) = 0,0295$$

7. Varianza del Portafolio:

La varianza para un portafolio de 2 acciones se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

$$\text{Var}_p = (0,36)(0,141875) + 2(0,6)(0,4)(0,0425) + (0,16)(0,021875)$$

$$\text{Var}_p = 5,0975$$

8. Desviación estándar del portafolio:

$$\sqrt{5,09754} = 2,2575\%$$

La varianza del portafolio de los dos activos con inversiones 40% y 60% es muy alta para los rendimientos esperados, todo indica que la mejor opción es Coltejer, en un muy alto porcentaje, ya que es la que presenta mayor valor esperado y menor volatilidad, en conjunto, no son buena alternativa.

### Ejemplo 2:

Decidir el portafolio óptimo entre Isa y Cementos Argos.

	Rendimientos de ISA	Rendimientos de CemArgos
Enero-Marzo	1%	5%
Abril-Junio	2%	4%
Julio-Septiembre	3%	5%
Octubre-Diciembre	4%	7%

1. Calcule el rendimiento esperado, (Media Aritmética).

a. ISA

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = 2,5\%$$

b. CemArgos

$$\frac{5 + 4 + 5 + 7}{4} = 5,25\%$$

2. Calcule la varianza de los rendimientos esperados.

a. ISA:

$$\frac{(1 - 2,5)^2 + (2 - 2,5)^2 + (3 - 2,5)^2 + (4 - 2,5)^2}{4} = 1,25\%$$

b. CemArgos:

$$\frac{(5 - 5,25)^2 + (4 - 5,25)^2 + (5 - 5,25)^2 + (7 - 5,25)^2}{4} = 1,1875\%$$

Como en el caso anterior, se observa una alta rentabilidad en CemArgos, y menor volatilidad.

3. Calcule la desviación estándar:

a. ISA:

$$\sqrt{1,25} = 1,118\%$$

b. CemArgos:

$$\sqrt{1,1875} = 1,0897\%$$

4. Calcule la covarianza del portafolio:

$$\frac{(1 - 2,5)(5 - 5,25) + \dots + (4 - 2,75)(7 - 5,25)}{4} = 0,9375\%$$

5. Calcule la Correlación:

$$\text{Corr}(R_E R_C) = \frac{0,9375}{(1,118)(1,0897)} = 0,7694\%$$

6. Se calcula los rendimientos esperados:

Para la evaluación de este portafolio, se inicia la simulación con 70% del dinero en ISA y el 30% en CemArgos, así:

$$(0,7)(0,025) + (0,3)(0,0525) = 0,03325.$$

7. Varianza del Portafolio:

La varianza para un portafolio de 2 acciones se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Var}_p = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \text{Cov}(A, B) + X_B^2 \sigma_B^2$$

$$\text{Var}_p = (0,49)(0,0125) + 2(0,7)(0,3)(0,009375) + (0,09)(0,011875)$$

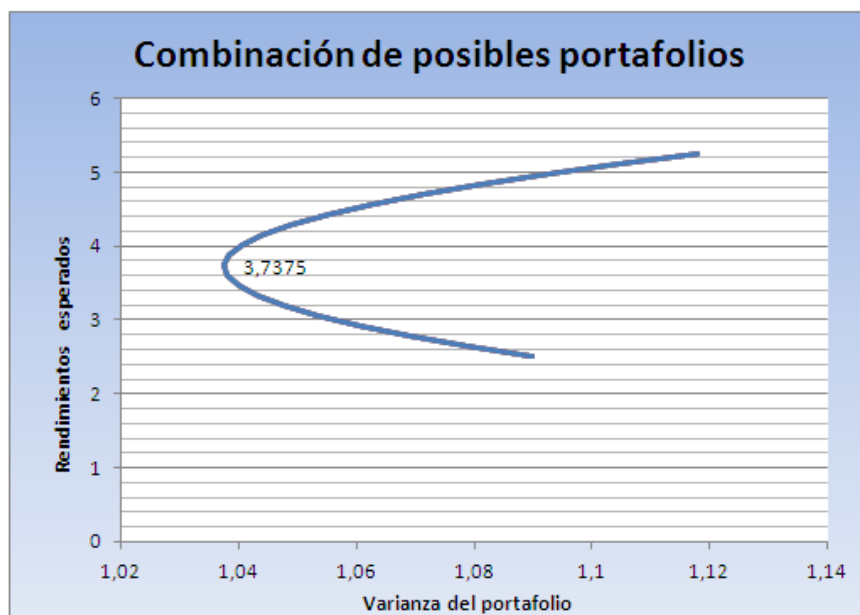
$$\text{Var}_p = 1,088125\%$$

8. Desviación estándar del portafolio:

$$\sqrt{1,088125} = 1,043132\%.$$

*Al simular las salidas de los datos en Excel, se puede identificar el portafolio de varianza mínima, inicialmente con un portafolio conformado por 100% ISA y 0% CemArgos, y se varía el porcentaje de participación de cada una de las empresas en 5% hasta llegar al 0% en ISA y el 100% en Argos, y se verá cómo se comporta.*

ISA	CemArgos	Varianza	Desviación	R.Esperados
100%	0	1,1875	1,08972474	2,5
95,00%	5,00%	1,16390625	1,07884487	2,6375
90,00%	10,00%	1,143125	1,06917024	2,775
85,00%	15,00%	1,12515625	1,06073383	2,9125
80,00%	20,00%	1,11	1,05356538	3,05
75,00%	25,00%	1,09765625	1,04769091	3,1875
70,00%	30,00%	1,088125	1,0431323	3,325
65,00%	35,00%	1,08140625	1,03990685	3,4625
60,00%	40,00%	1,0775	1,03802697	3,6
55,00%	45,00%	1,07640625	1,0375	3,7375
50,00%	50,00%	1,078125	1,03832798	3,875
45,00%	55,00%	1,08265625	1,04050769	4,0125
40,00%	60,00%	1,09	1,04403065	4,15
35,00%	65,00%	1,10015625	1,04888333	4,2875
30,00%	70,00%	1,113125	1,05504739	4,425
25,00%	75,00%	1,12890625	1,0625	4,5625
20,00%	80,00%	1,1475	1,07121426	4,7
15,00%	85,00%	1,16890625	1,08115968	4,8375
10,00%	90,00%	1,193125	1,09230261	4,975
5,00%	95,00%	1,22015625	1,10460683	5,1125
0,00%	100,00%	1,25	1,11803399	5,25



La gráfica nos muestra, cómo se comportan estos dos activos, existe una correlación positiva, sin embargo se debe tener en cuenta que en los rendimientos esperados máximos se encuentra una volatilidad muy alta, es decir es una alternativa no viable para el inversionista prudente; ahora bien, en el punto donde se halla la mínima varianza, es también un punto óptimo de rendimientos esperados. El componente de un portafolio ideal para estas dos acciones debe ser 55% en ISA, 45% en CemArgos, con un rendimientos esperado de 3,7375%.

### Actividad propuesta:

Se cuenta con recursos líquidos por \$300.000.000.00, para invertir lo mejor posible, y nos presentan las siguientes alternativas de inversión:

1. Un paquete accionario compuesto por acciones de Fabricato y Coltabaco, con rendimientos esperados así:

	Rendimientos de Fabricato	Rendimientos de Coltabaco
Enero-Marzo	6%	6%
Abril-Junio	3%	0%
Julio-Septiembre	9%	7%
Octubre-Diciembre	0%	8%

Evalúe tres posibles portafolios con un componente de:

90% Fabricato y 10% Coltabaco.

60% Fabricato y 40% Coltabaco.

10% Fabricato y 90% Coltabaco.

2. Colocar el dinero en un CDT (Portafolio de renta fija) por el año, a una tasa del 11% EA.
3. Comprar una flotilla de 4 taxis, con valor de \$300.000.000.00 que me representan 6 millones mensuales durante 5 años, con vida útil de 5 años y valor del salvamento del 30% del valor inicial. Evalúe con una tasa de oportunidad del 2%EM. Evalúe las tres inversiones y decida en cuál de las tres opciones colocará los \$300.000.000.00.



## Anexo 10. Encuesta final

Nombre \_\_\_\_\_ código \_\_\_\_\_

Con las pruebas a la vista, y la solución de la misma conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Estuvieron bien contestadas las preguntas diagnósticas?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
¿Es suficiente la teoría probabilística y financiera vista en clase para resolver este problema?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. ¿En qué se equivocó?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. ¿Por qué cree que se equivocó?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
4. Si se le presentara nuevamente problemas de este tipo, ¿Cree que obtendrían mejores resultados? ¿Por qué?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
5. Al analizar los problemas presentados, ¿Se considera usted competente para la resolución de problemas financieros en entornos contingentes?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
6. ¿Cree usted que el estudio de la teoría probabilista (incluidos textos, instrucción etc.) está bien enfocado para las ciencias administrativas? ¿Por qué?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## **Anexo 11. Agradecimiento especial a los estudiantes participantes del estudio**

1. CANGREJO M. MARTHA Y.
2. DIAZ M. LUIS F.
3. FIERRO G. JENNY A.
4. JUEZ F. KAREN M
5. LOPEZ G. MARIO W
6. LOPEZ J. DANNY A.
7. LOZANO P. JUAN M.
8. PINZON V. JHON E.
9. RINCON S. DAVID F.
10. RODRIGUEZ S. JACKELIN
11. ROJAS F. PAOLA A.
12. SOTO S. CARLOS S.
13. ALFONSO G. YULY M.
14. BRÍÑEZ G. MARYLU
15. CAMPOS B. AURORA
16. CANCHON P. SONIA O.
17. DURAN G. JOSE A.
18. LOPEZ C. JULIAN D.
19. OSORIO S. CAMILO A.
20. PAREDES C. ROCIO
21. PARRA L. JULY M.
22. PEREZ O. YOLBY A.
23. RIANO M. GERMAN E.
24. RODRIGUEZ R. NELLY C.
25. SICACHA N. ANNETH Z.
26. SILVA G. MICHAEL
27. TORRES B. WILSON
28. TRIVIÑO V. CATHERINE
29. RODRIGUEZ R. DIANA C.
30. CRUZ ANGELICA.
31. BAENA DIANA.