REPÚBLICA DE COLOMBIA

Programa de Doctorado en Educación Matemática

CARACTERIZACIÓN DE LAS RELACIONES Y FRONTERAS ENTRE EL PENSAMIENTO DIVERGENTE Y LA CREATIVIDAD

Un estudio a través de la resolución de problemas geométricos con estudiantes de secundaria

Tesis presentada como requisito para optar al título de

Doctor en Educación Matemática

Carlos Fernando Chávez Castiblanco

Bogotá D.C.

2022

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

CARACTERIZACIÓN DE LAS RELACIONES Y FRONTERAS ENTRE EL PENSAMIENTO DIVERGENTE Y LA CREATIVIDAD

Un estudio a través de la resolución de problemas geométricos con estudiantes de secundaria

Tesis presentada como requisito para optar al título de

Doctor en Educación Matemática

Autor: Carlos Fernando Chávez Castiblanco

Director de tesis:

Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Bogotá D.C.

2022

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. mes, día de 2022

AGRADECIMIENTOS

La culminación de este trabajo no hubiese sido posible sin la colaboración de varias personas que dedicaron su tiempo y experiencia y me alentaron siempre a seguir con este proyecto no solo académico y profesional, sino también personal y familiar.

A mi director de tesis Dr. Osvaldo de Jesús Rojas, por toda su dedicación, sus contribuciones y sobre todo por la gran persona que es y por estar siempre presto a todas mis inquietudes.

A la Dra. Mary Falk de Lozada por su contribución en la determinación del problema de investigación, por todas sus enseñanzas en los seminarios y sus valiosas sugerencias que contribuyeron a un mejor trabajo.

A todos los docentes del programa de doctorado, por sus clases tan interesantes y por sus aportes y sugerencias.

A mi esposa por su paciencia, su compromiso y por creer sin dudarlo en que podíamos lograr esta meta.

A mi hijo por su alegría y compañía todas las tardes de estudio.

A mi madre por enseñarme a ser perseverante y disciplinado en todos los proyectos que emprendo.

A toda mi familia por su apoyo incondicional, por alentarme en cada parte del proceso.

A mis compañeros y amigos de doctorado Alfonso Romero Huertas y Samuel Rangel, por su compañía en todo el proceso, así como sus valiosos aportes e ideas.

A los estudiantes del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda, por su interés y compromiso en las actividades.

DEDICATORIA

A mi esposa y a mi hijo, espero poder retribuirles todo el cariño, el apoyo y la confianza que depositaron en mí para alcanzar este logro.

A mi esposa Yenny por su comprensión, paciencia y amor que me alentaron a salir de los momentos difíciles. Debo pedirle perdón porque soy consciente que sufrió el impacto directo de las consecuencias de esta decisión. En realidad, ella me ayuda en todo momento a ser mejor profesional, mejor padre y mejor persona. Siempre estaré agradecido por apoyarme en este propósito.

A mi hijo Diego, por ser mi inspiración, mi compañía y mi desahogo al final de largas jornadas de estudio. Espero servirte de ejemplo y me superes como en todas las cosas que te propones.

SÍNTESIS

Esta investigación busca caracterizar el pensamiento divergente, subyacente a la resolución de problemas geométricos con múltiples soluciones, a través del análisis de un sistema de actividades aplicado con estudiantes de secundaria en la ciudad de Bogotá, explorando las relaciones entre el pensamiento divergente y la creatividad a través de la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. La investigación se aborda desde un enfoque mixto con un diseño de investigación acción aplicando métodos de análisis-síntesis, observación participante, instrumentos de contenido, además de ser coherente con las tendencias psicométricas y pragmáticas de la creatividad.

El análisis permite concluir que el pensamiento divergente presenta dos facetas, *infructuoso* y *enfocado-ineficiente*. El primero no se relaciona con la creatividad mientras que en el segundo puede o no surgir la creatividad dependiendo de la originalidad de las ideas propuestas.

También se plantean definiciones para la creatividad, las soluciones convencionales y las soluciones creativas, que permiten establecer las relaciones, diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

Finalmente, se señala la importancia del pensamiento convergente para la creatividad, ya que permite validar o rechazar las ideas de solución que surgen con relación a un problema.

ABSTRACT

This research seeks to characterize divergent thinking, underlying the resolution of geometric problems with multiple solutions, through the analysis of a system of activities applied with high school students in the city of Bogotá, exploring the relationships between divergent thinking and creativity through fluency, flexibility and originality. The research is approached from a mixed approach with an action research design applying methods of analysis-synthesis, participant observation, content instruments, besides being consistent with psychometric and pragmatic trends of creativity.

The analysis allows concluding that divergent thinking presents two facets, unsuccessful and focused-inefficient. The former is not related to creativity while in the latter creativity may or may not emerge depending on the originality of the ideas proposed.

Definitions are also given for creativity, conventional solutions and creative solutions, which allow establishing the relationships, differences and boundaries between divergent thinking and creativity.

Finally, the importance of convergent thinking for creativity is pointed out, since it allows validating or rejecting the solution ideas that arise in relation to a problem.

TABLA DE CONTENIDOS

PÁG.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la creatividad es muy reciente, pero con el paso de los años se ha venido consolidando de tal manera que en la actualidad hace parte de las estrategias de la mayoría de las actividades sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Su desarrollo ha permitido promover cambios significativos en las diferentes ramas del conocimiento humano gracias a su capacidad de imaginar, conceptualizar, inventar y resolver problemas.

Inicialmente el psicólogo norteamericano Joy Paul Guilford es quién en las décadas de 1950 y 1960 hace un estudio riguroso de la estructura del intelecto a través de métodos psicométricos y pone especial atención al proceso creativo, el cual relaciona con la producción divergente. A partir de estos planteamientos se han desarrollado diferentes investigaciones que han arrojado resultados interesantes no solo para la psicología, sino que también son de interés para la educación.

La creatividad resulta importante en educación puesto que favorece la socialización de ideas, fortalece la autoestima de los estudiantes, constituye un punto de encuentro entre la imaginación y la realidad, y permite desarrollar procesos de creación. Actualmente las grandes ideas que promueven cambios en el mundo no necesariamente provienen de acudir a los métodos científicos ya conocidos y verificados, sino que surgen precisamente de las ideas creativas, no solo aportando novedad, sino también nuevos cuestionamientos y problemas a las diferentes disciplinas. Por lo tanto, la educación, y en este caso específico la educación matemática, debe responder a este llamado en el que se deben aunar esfuerzos por comprender y alentar los procesos creativos de los estudiantes, en particular en las clases de geometría.

La creatividad matemática ha sido abordada históricamente por Jacques Hadamard y Henri Poincaré. Hadamard (1945), influenciado por las ideas expuestas por Poincaré a principios de siglo en una conferencia ante la Sociedad Psicológica de París, lleva a cabo una investigación informal entre matemáticos y científicos como Birkhoff, Polya y Einstein sobre las imágenes mentales utilizadas para hacer matemáticas.

En términos generales Hadamard (1945) concluye que el proceso creativo de los matemáticos sigue el modelo de la psicología Gestalt de cuatro etapas, a saber, preparación-incubación-iluminación-verificación. Sin embargo, este modelo se aplica principalmente a problemas propuestos con antelación por otros matemáticos ignorando el proceso mediante el cual se llega a las preguntas reales (Sriraman, 2009). Por su parte Ervynck (1991) propone un modelo de tres etapas que se resumen en técnica preliminar, actividad algorítmica y actividad creativa, esta última caracterizada precisamente por la toma de decisiones no algorítmicas al resolver un problema.

Específicamente en educación matemática Haylock (1987) propone un marco para la evaluación de la creatividad matemática en los escolares, donde también describe el proceso mediante las categorías, preparación, incubación, iluminación y verificación. Sin embargo, también se interesa por las categorías de Guilford (1967) fluidez, flexibilidad y originalidad para verificar si un producto es creativo. Muestra la relación entre la flexibilidad y las fijaciones o auto restricciones y una clasificación de los énfasis de los problemas o situaciones propuestas por los investigadores para desarrollar la producción divergente.

Así mismo Silver (1997) propone la resolución y planteamiento de problemas para desarrollar la creatividad, pero no cualquier tipo de problemas sino los que tienen varias vías de solución o varias soluciones. Además, incluye problemas abiertos, mal estructurados o de la forma "qué tal si", donde a partir de un problema se le cambian algunas condiciones, para generar nuevos problemas y nuevas soluciones.

Posteriormente y siguiendo esta misma línea de tareas con múltiples vías de solución y buscando una caracterización de la creatividad en los escolares, investigaciones como las de Kwon, Park, & Park (2006);

Leikin (2007, 2009); Sriraman (2009); Pitta-Pantazi (2012); Leikin & Pitta-Pantazi (2013) han conformado un pequeño grupo que ha venido ampliando los horizontes de la investigación en este tema.

Recientemente el tema de la creatividad ha sido abordado en congresos internacionales, como el International Congress on Mathematical Education (ICME) y la Conference of European Research in Mathematics Education (CERME), entre otros.

En el ICME 13 (2016) en sus grupos temáticos de estudio TSG 19 y 29 se aborda la resolución de problemas, matemáticas y creatividad respectivamente. En la CERME 10 (2017) se propone un grupo de trabajo temático TWG 7 llamado "Potencial matemático, creatividad y talento", que fue cancelado debido a la falta de contribuciones, por lo que las pocas investigaciones en el campo de la creatividad fueron presentadas en el TWG 8, el cual estaba relacionado con el pensamiento afectivo y matemáticas.

El CERME 11 (2019) no cuenta específicamente con un grupo de trabajo temático sobre creatividad matemática, pero varias ponencias abordan el tema desde diferentes perspectivas y relacionadas con superdotación, tareas no rutinarias, desarrollo de habilidades analíticas, enseñanza de diagrama de barras y porcentaje, modelado matemático, potencial matemático, proyectos de futuros maestros, creatividad social, tareas desafiantes, entre otras. Sin embargo, se considera de especial interés para este estudio el TWG 4 sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría, donde se aborda el tema específico de la creatividad matemática en geometría a través de tareas con múltiples soluciones.

Finalmente, para el año 2021 en el ICME 14 se estudia el tema en el TSG 59 Creatividad y matemática. En estos eventos la investigación se interesa principalmente en cómo funciona y se manifiesta en analizar la creatividad en los matemáticos y en cómo desarrollar la creatividad, no solo de estudiantes sino en docentes y cómo afecta el contexto y otros factores en su desarrollo.

Esto pone de manifiesto algo que ya menciona Sriraman (2009), y es que la creatividad en matemáticas es un tema que hasta el momento se ha estudiado poco, pues hasta ahora se está abriendo un espacio entre la comunidad. Ello sugiere un campo de acción para los investigadores en educación matemática, ya que estudios como los de Silver (1997); Sriraman (2009); Leikin & Pitta-Pantazi (2013); Haavold, Hwa Lee, & Sriraman (2018); entre otros, demuestran que la creatividad es una habilidad que puede ser motivada, ejercitada y desarrollada mediante distintos tipos de actividades.

El propósito de esta investigación se centra en comprender cómo se manifiesta la creatividad geométrica y su relación con el pensamiento divergente. Para esto se tienen en cuenta los planteamientos teóricos de Guilford (1967) sobre pensamiento convergente y pensamiento divergente y se interesa especialmente por el segundo.

Según Runco (2008) el pensamiento divergente se ha relacionado con bastante regularidad como parte del proceso creativo hasta el punto de considerarlos similares o sinónimos, sin tener en cuenta que no son equivalentes y que en realidad aspectos de la producción divergente como la fluidez, la flexibilidad y originalidad se pueden dar en determinada situación sin que esto indique necesariamente que haya ideas creativas. Por lo tanto, se espera poder identificar qué características hacen la diferencia entre el pensamiento divergente y el pensamiento creativo en los procesos de resolución de problemas geométricos.

Este aporte se considera importante ya que sirve de insumo a otros docentes para proponer actividades y secuencias didácticas con el ánimo de favorecer el desarrollo de la creatividad en sus estudiantes a partir de procesos de producción divergente. Actualmente las clases de matemáticas se centran especialmente en el desarrollo de procesos convergentes en los que se proponen problemas con soluciones únicas. Estos problemas se estructuran en relación principalmente al uso de algoritmos, que, si bien son necesarios en cierta medida, generalmente no desarrollan la intuición y procesos heurísticos típicos en la generación de las ideas creativas.

La identificación del problema de investigación, en parte, responde a la aplicación de instrumentos como actividades exploratorias (ver Anexo 1) con los estudiantes, encuestas (ver Anexo 2) y entrevistas (ver Anexo 3) con docentes de secundaria, así como con especialistas en el tema. Los docentes y especialistas aportan desde su experiencia valiosas sugerencias que contribuyen al mejoramiento de esta investigación.

Por otra parte, se tienen en cuenta las investigaciones relacionadas con el tema, como las de Kwon, Park, & Park (2006); Leikin & Lev (2007); Leikin & Levav-Waynberg (2008), Leikin (2009); Pitta-Pantazi, Paraskevi, & Constantinos (2012); Fortes y Andrade (2019), entre otros. Estos investigadores abordan el tema de la creatividad mediante problemas no rutinarios, con múltiples vías de solución o problemas abiertos y han aportado algunos métodos sobre la evaluación de la creatividad con estudiantes de secundaria.

A partir del análisis de los instrumentos, del estado del arte y de la experiencia del investigador, se precisan las siguientes insuficiencias:

- Son limitadas las habilidades de los estudiantes para intentar resolver un problema con diferentes vías de solución, pues les basta contar con una solución única y no ven la necesidad de buscar otras formas (Haylock, 1987).
- La creatividad implica el desarrollo de la intuición y de tomar decisiones no algorítmicas (Ervynck, 1991), sin embargo, los estudiantes tienden a reducir la resolución de problemas a la aplicación de fórmulas y procesos algorítmicos estandarizados.
- Son limitados hasta el momento los constructos teóricos sobre la creatividad geométrica y su caracterización.
- Se carece en la literatura de una clara diferencia entre los conceptos de creatividad y pensamiento divergente y en algunos casos hasta se les equipara.

- Son limitados hasta el momento los modelos existentes para evaluar la creatividad matemática y en especial la creatividad geométrica.
- Las formas en las que se enseña actualmente la matemática no promueven el desarrollo de la fluidez, la flexibilidad y la originalidad.

Como resultado de la triangulación de los instrumentos anteriormente mencionados se plantea el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo caracterizar las diferencias y fronteras entre la creatividad geométrica y el pensamiento divergente de estudiantes de secundaria, a través de la resolución de problemas geométricos?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en secundaria y se infiere como **objetivo general** caracterizar las diferencias y las fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad en el proceso de resolución de problemas geométricos de los estudiantes de secundaria.

Como **objetivos específicos** se tienen:

- Identificar cómo se caracteriza la creatividad geométrica en estudiantes de secundaria.
- Identificar cómo se caracteriza el pensamiento divergente en la resolución de problemas geométricos en estudiantes de secundaria.
- Establecer relaciones y diferencias entre el pensamiento divergente y la creatividad geométrica en estudiantes de secundaria.
- Identificar, diseñar y aplicar problemas que promuevan el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de resolución de problemas geométricos a través del pensamiento divergente y la creatividad en secundaria.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se formulan las siguientes preguntas científicas:

1. ¿Cuáles investigaciones contribuyen al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente a la resolución de problemas geométricos, a través del pensamiento divergente y la creatividad en secundaria?
2. ¿Qué fundamentos teóricos sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas geométricos, a través del pensamiento divergente y la creatividad en secundaria?
3. ¿Cómo concebir un sistema de actividades que propicie caracterizar las diferencias y las fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad en el proceso de resolución de problemas geométricos de los estudiantes de secundaria?
4. ¿Cómo analizar la validez del sistema de actividades para caracterizar las diferencias y las fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad de los estudiantes?

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis se proponen las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre investigaciones en el ámbito de la resolución de problemas a través del pensamiento divergente y la creatividad.
2. Concebir un marco teórico que permita establecer diferencias, semejanzas y fronteras entre los procesos creativos y los procesos divergentes en la resolución de problemas geométricos en estudiantes de 14 a 18 años.
3. Elaborar un sistema de actividades para favorecer la creatividad de los estudiantes de secundaria del colegio Virginia Gutiérrez de Pineda de la ciudad de Bogotá, a través de problemas con múltiples vías de solución y el desarrollo del pensamiento divergente.

4. Validar el sistema de actividades para favorecer el establecimiento de las diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad en la resolución de problemas geométricos.
5. Analizar la aplicación de las actividades.
6. Caracterizar las diferencias y las fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad en el proceso de resolución de problemas geométricos

El **aporte práctico** radica en el diseño e implementación de un sistema de actividades para estudiantes de secundaria basadas en problemas geométricos los cuales permiten promover el pensamiento divergente e identificar procesos creativos, sus fronteras y diferencias. Además, de los instrumentos que permiten concretar el trabajo de campo, los cuales aportan a la caracterización de las fronteras y diferencias entre ambos tipos de pensamiento en estudiantes de secundaria.

El **aporte teórico** radica en avanzar en la caracterización de la creatividad y el pensamiento divergente durante el proceso de resolución de problemas geométricos, y así contrastar semejanzas, diferencias y fronteras entre los procesos creativos y procesos divergentes en la resolución de problemas geométricos en estudiantes de secundaria.

La tesis consta de introducción, seis capítulos, conclusiones, recomendaciones y 14 anexos.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

A continuación, se hace una síntesis de las investigaciones, congresos y reuniones donde se abordan los temas relacionados con el pensamiento divergente y la creatividad en matemáticas. Además, se abordan investigaciones relacionadas con el pensamiento divergente y la creatividad en matemáticas.

1.1. Creatividad y pensamiento divergente en congresos y reuniones

Recientemente el tema de la creatividad ha sido abordado en congresos internacionales mostrando interés en cómo funciona y se manifiesta la creatividad en los matemáticos, así como también en el terreno de la educación matemática; se ha preguntado cómo desarrollar la creatividad no solo de estudiantes sino también de docentes y cómo afectan el contexto y otros factores a su desarrollo. A continuación, se mencionan los eventos más importantes donde se ha abordado este tema en los últimos años.

En el ICME 13 (2016), congreso desarrollado en Hamburgo Alemania, se aborda el tema de la creatividad en dos grupos de estudio, el TSG 19 y el TSG 29. En el TSG 19, cuyo tema principal fue la resolución de problemas en educación matemática, el objetivo principal era la promoción e intercambio del conocimiento sobre el tema. Allí se presentaron 14 áreas de trabajo una de las cuales precisamente fue la resolución de problemas y creatividad, donde se promovieron las contribuciones que abordan los siguientes cuestionamientos: ¿qué papel juega la creatividad en la resolución de problemas?, ¿cómo se fomenta la creatividad dentro de los entornos de resolución de problemas, el plan de estudios y la evaluación? Además, se cuestiona ¿cómo se contabiliza la creatividad en la heurística de la resolución de problemas?

En el CERME 10 (2017) realizado en Dublín, Irlanda se plantea un grupo de trabajo temático TWG 7 con el nombre de “Potencial matemático, creatividad y talento” que desafortunadamente tuvo que ser cancelado debido a la falta de contribuciones. Por tanto, las pocas investigaciones en el campo de la creatividad fueron presentadas en el TWG 8, el cual estaba relacionado con el pensamiento afectivo y matemáticas.

En términos generales los aportes relacionados con la creatividad tuvieron que ver con su relación con la superdotación, la creatividad y la sensibilidad estética y el papel que juega la creatividad en la identificación de estudiantes prometedores en matemáticas.

En el CERME 11 (2019) desarrollado en Utrecht Holanda en la que, aunque no contó específicamente con un grupo de trabajo temático sobre creatividad matemática, hubo varias ponencias que abordaron el tema desde diferentes perspectivas relacionadas con superdotación, tareas no rutinarias, desarrollo de habilidades analíticas, modelado matemático, potencial matemático, proyectos de futuros maestros, creatividad social, y tareas desafiantes, entre otras. Sin embargo, se considera de especial interés para este estudio el TWG 4 dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría donde se abordó el tema específico de la creatividad matemática en geometría a través de tareas con múltiples soluciones.

En el ICME 14 (2021) realizado en Shanghái China, se presentó nuevamente el TSG 59 dedicado a la creatividad matemática y cuyo objetivo principal fue reunir a investigadores interesados, para el intercambio internacional de ideas dirigidas a una mejor comprensión de la creatividad en la enseñanza de las matemáticas. Lo tratado en el congreso se enmarcó en la discusión de las dos perspectivas contrastantes sobre la naturaleza y el cultivo de la creatividad: individualista y social. Algunos de los interrogantes relevantes se mencionan a continuación: ¿tiene sentido percibir la creatividad?, ¿cuál es la mejor manera de diseñar situaciones con un denso potencial para el surgimiento de la creatividad?

1.2. Investigaciones sobre creatividad en matemática

1.2.1. A framework for assessing mathematical creativity in school children[1]

En este estudio se argumenta que la creatividad se concibe mejor como un fenómeno polifacético que como una construcción teórica que debe definirse con precisión y se sugiere que para estudiar la creatividad en escolares es mejor no comenzar con una definición claramente formulada, sino considerar las ideas asociadas con la creatividad en general y seleccionar aquellas ideas que se consideren más relevantes para los niños que hacen matemáticas en las escuelas.

Por otra parte, el autor da cuenta de dos formas de estudiar la creatividad, una a través del proceso creativo y otra en relación con el producto creativo. En la primera, se identifican a menudo cuatro etapas: preparación, incubación, iluminación y verificación y en la segunda, se han propuesto especificar criterios como la fluidez, la flexibilidad, la originalidad y la idoneidad por los que se puede reconocer que un producto es creativo.

Al respecto el autor añade que Krutetskii (1976) identifica la "flexibilidad de los procesos mentales" como un componente importante de la capacidad matemática de los niños en etapas escolares y que mediante esta flexibilidad es que se superan las fijaciones, "auto-restricciones", o la ruptura de un método estereotipado de solución, lo que se puede resumir como una descripción de la verdadera capacidad creativa en matemática.

En términos generales este estudio es importante para la presente investigación, ya que muestra como el pensamiento divergente puede favorecer la superación de fijaciones o auto restricciones de los estudiantes, así como también presenta una clasificación informal del tipo de problemas que se suelen plantear para las pruebas de producción divergente, lo cual constituye una ruta para el planteamiento de problemas más específicos de tipo geométrico que se presentan en este trabajo.

[1] Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. Norwich: Springer.

1.2.2. **Mathematical Creativity**[2]

Ervynck (1991) entiende la creatividad matemática esencialmente como la capacidad de crear objetos matemáticos junto con el descubrimiento de sus relaciones mutuas. Además, plantea que es esencial la preparación a través de actividades previas que forman un ambiente apropiado para el desarrollo creativo. También expone tres etapas de desarrollo de la creatividad: Técnica preliminar, actividad algorítmica y actividad creativa.

El autor además propone distintos niveles de creatividad matemática que define de la siguiente manera.

Un *primer nivel (bajo)*: La creatividad implica el reconocimiento de la posición general del problema en el conjunto de las matemáticas y la construcción del modelo apropiado depende en gran medida de la aplicación de un algoritmo.

Un segundo nivel (superior): Es más perspicaz y hace uso de la intuición para desarrollar el método correcto de solución, se basa en el razonamiento directo dentro del modelo matemático, abandona la aplicación directa del algoritmo, sigue tomando herramientas de una teoría general, pero la solución del problema en cuestión se hace deduciendo directamente de la situación dada.

Un tercer nivel (el más alto): Abandona completamente el modelo, razonando fuera de una teoría formalizada, construyendo una solución a través de una inspección inteligente de lo que se dice en el problema. Este nivel implica una experiencia altamente afinada con la resolución de problemas, así como una visión de los métodos de trabajo del proponente del problema. Ilustra caminos inusuales que puede tomar el matemático creativo para resolver un viejo problema de una nueva manera.

---

[2] Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42-53). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Los aportes de este trabajo a la presente investigación son el establecimiento de niveles de creatividad; aunque el autor hace énfasis en la creatividad de los matemáticos, se pueden hacer adecuaciones a estos niveles o pensar en la creación de niveles para caracterizar la creatividad geométrica de los estudiantes en años escolares.

1.2.3. The characteristics of mathematical creativity[3]

En esta investigación se lleva a cabo un estudio cualitativo en el que participan cinco matemáticos creativos con el fin de conocer cómo se crean las matemáticas. Los resultados indican que el proceso creativo sigue las etapas descritas por el modelo Gestalt de preparación, incubación, iluminación y verificación, cuyas principales características son la interacción social, las imágenes mentales, la heurística, la intuición y la prueba. Los principales resultados de esta investigación son:

- Todos los matemáticos reconocen el papel de la interacción social en general como un aspecto importante que estimula el trabajo creativo.
- Los matemáticos dedican una cantidad considerable de tiempo a investigar el contexto del problema.
- Los matemáticos tienden a trabajar en más de un problema a la vez.
- Además de revelar la dificultad de describir imágenes mentales, todos los matemáticos informan que no usan computadoras en su trabajo.
- En cuanto al proceso de iluminación tres de los cinco matemáticos describen sus experiencias coherentes con el modelo Gestalt, otro sugiere que este proceso había surgido debido a su inquebrantable voluntad, y el último atribuye sus avances al azar. Al respecto Sriraman (2009) afirma que el azar juega un papel importante en la creatividad matemática, y que las grandes ideas y

[3] Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 13-27.

percepciones pueden ser el resultado del azar. Sin embargo, conjetura que la mente arroja fragmentos (ideas) que son productos de la experiencia pasada, algunos de estos fragmentos aleatorios se pueden yuxtaponer y combinar de una manera significativa para formar ideas creativas.

- Finalmente, para los matemáticos entrevistados, las pruebas válidas tienen diversos grados de rigor, pero en general aseguran que el enfoque lógico de una prueba es una reconstrucción artificial de los descubrimientos que están siendo forzados a entrar en un sistema deductivo, donde la intuición que guía el proceso de descubrimiento se pierde.

Sriraman (2009) concluye que este trabajo tiene implicaciones directas en el quehacer en las aulas de la escuela, ya que los modelos contemporáneos de la investigación sobre la creatividad pueden adaptarse para estudiar a no eminentes, como los estudiantes de secundaria, para identificar y nutrir el talento creativo en las aulas de matemáticas.

Según Sriraman (2009) también es necesario hacer un cambio en las prácticas en el aula ya que rara vez se utilizan problemas con una estructura matemática subyacente que permitan a los estudiantes un período prolongado de compromiso e independencia para trabajar.

El autor conjetura que posiblemente la creatividad matemática se manifiesta en el aula escolar a través de proposición por parte de los docentes a los estudiantes de problemas no rutinarios con complejidad y estructura, que requieren no sólo motivación y persistencia sino también una considerable reflexión. Este trabajo conlleva a algunos estudiantes a descubrir estructuras y principios matemáticos bastante sofisticados de una manera similar a la de los matemáticos creativos.

1.2.4. Mathematical creativity and mathematics education[4]

La investigación aborda los resultados específicos de la literatura contemporánea, centrándose en los hallazgos relacionados con lo que significa resolver un problema en matemáticas. Se desglosan diferentes ideas constitutivas de la creatividad matemática como la “incubación”. También se hace una diferenciación entre la creatividad matemática a nivel profesional y escolar en el sentido de Hadamard (1945) quien considera que el trabajo de un estudiante es semejante al trabajo de matemático, y que la única diferencia es el nivel.

Algo que Sriraman et al. (2011) considera importante y que mencionó Poincaré (1948) es que el descubrimiento en matemáticas es una combinación de ideas en la cual muchas de ellas se desechan y solo unas pocas son fructíferas. Los individuos luego de este proceso logran distinguir entre las combinaciones con sentido de las que no lo tienen.

Según Lakatos (1976) la intuición en matemáticas desempeña un papel vital no solo en la creación de conceptos, sino también en la demostración de la verdad o falsedad de las conjeturas. En consecuencia, lleva a presentar conjeturas plausibles y a ponerlas a prueba, lo que conlleva a construir conocimientos más profundos e hipótesis más precisas. En el mismo sentido Pólya (1962) considera que toda cognición humana comienza con las intuiciones, de ahí procede a las concepciones y termina con las ideas.

Sriraman et al. (2011), siguiendo la psicología Gestalt y los trabajos realizados por Wallas (1926), centran su atención en el paso de la incubación a la iluminación donde consideran se gestan las ideas creativas. En relación con la incubación en la solución de problemas referencian tres hipótesis:

Hipótesis de la fatiga, la cual ofrece la idea de que los efectos de la incubación se deben a que durante un duro trabajo sobre el problema el individuo se agota mentalmente y la incubación es el proceso mediante el cual la mente se recupera y permite que la solución irrumpa.

[4] Sriraman, B., Yaftian, N., & Hwa Lee, K. (2011). Mathematical creativity and mathematics education. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*, 119–130.

Hipótesis del trabajo inconsciente, que afirma que uno libera la atención activa en el problema y el periodo de incubación conduce a proporcionar una visión adicional para abordar el problema de manera diferente, hacia la realización imprevista y repentina sobre la solución o una pista en el camino para resolver el problema.

Hipótesis de la fijación del olvido, consiste en dejar de lado el problema, ya que a menudo se establecen algunas estrategias y relaciones con hechos o ideas no relacionadas que actúan como bloqueadores que no permiten obtener una visión creativa de un problema. Por tanto, este tiempo puede dar lugar a que afloren los conocimientos necesarios para abordar el problema en una nueva dirección.

Finalmente, Sriraman et al. (2011) llegan a concluir que las iluminaciones de la mente nunca ocurren de la nada sino después de un intento consciente y voluntario en un periodo de tiempo; por lo tanto, no se debe esperar una inspiración de solución sin ningún esfuerzo.

Esta investigación aporta nuevas ideas sobre el paso de la incubación a la iluminación en el proceso creativo, lo cual puede ser de ayuda en la construcción de los problemas y en la organización y logística de la implementación de las actividades permitiéndoles a los estudiantes tener tiempo suficiente para resolver los problemas propuestos.

1.2.5. Creativity and mathematics education: the state of the art[5]

En este estudio se establecen conexiones entre la creatividad general y los estudios en educación matemática, prestando especial atención en la relación entre creatividad, alta capacidad y talento. También se exploran los métodos de investigación que se pueden utilizar para analizar la creatividad.

Se afirma que históricamente la creatividad fue estudiada tardíamente y la creatividad matemática no fue la excepción, puesto que inicia con Haylock (1987) quien pide mayor atención a la creatividad matemática

[5] Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM*, 159-166.

en el aula y Silver (1997) quien sugiere el tratamiento de esta a través de la resolución y planteamiento de problemas.

A pesar de la limitada investigación durante los años mencionados, se han venido haciendo avances en la comunidad de educadores matemáticos, y publicaciones como las de Leikin et al. (2009) y Sriraman et al. (2009) confirman esta observación. Además, la inclusión de grupos de estudio en diferentes eventos relacionados con la educación matemática como el ICME y el CERME tienen como propósito aumentar la conciencia por la importancia del tema, así como divulgar las investigaciones que se desarrollan al respecto.

Es de especial interés que varios autores basan sus esquemas de evaluación en las categorías de Torrance (1966) y los estudios de Guilford (1967) en términos de fluidez, flexibilidad y originalidad del razonamiento matemático asociado a la resolución de problemas y a su planteamiento.

La mayoría de los estudios examinan la creatividad matemática relativa, concepto trabajado en educación matemática por Leikin (2009), ya que esta creatividad en un estudiante se considera generalmente con respecto a su propia historia educativa y en comparación con otros estudiantes. Esto contrasta con la creatividad absoluta que se evalúa en términos de altos logros en matemáticas puras y aplicadas a nivel mundial.

Los principales enfoques de estas nuevas investigaciones se pueden clasificar en tres, a saber: sociocultural, cognitivo y psicométrico. En resumen, hay un conjunto de estudios empíricos sobre la creatividad en matemáticas escolares e interlocutores, como lo son matemáticos, educadores matemáticos e investigadores de la educación, que aceptan las perspectivas de desarrollo de la creatividad y discuten diversos temas. Entre estos aspectos se tiene la relación entre la creatividad y la capacidad matemática, los entornos de aprendizaje eficaces para el desarrollo del pensamiento creativo y las concepciones de los profesores sobre la creatividad en las matemáticas escolares.

1.2.6. Psychological and Neuroscientific Perspectives on Mathematical Creativity and Giftedness[6]

Esta investigación estudia aspectos generales de la creatividad y la superdotación atendiendo a los cinco temas propuestos por Treffinger (2004), a saber, definición, características, justificación, evaluación y fomentación, los cuales proporcionan un marco para comprender la conexión entre creatividad y superdotación. Presta atención a una visión psicológica de los factores que son importantes para la creatividad matemática y la superdotación seguida de un examen neurocientífico de los mismos.

Entre los puntos interesantes expuestos por Cropley (2017) se encuentran la relación entre el pensamiento divergente y convergente y el papel que juegan en el proceso creativo. El autor asegura que, ante situaciones desconocidas o problemas, los individuos generan posibles opciones y luego prueban cada idea por su utilidad, puesto que particularmente frente a un problema matemático, no será obvio qué conocimientos y experiencia se deben aplicar a una tarea.

Según Cropley (2017), el pensamiento divergente puede ayudar a proporcionar información para revelar una elegante solución a un problema matemático como alternativa a un enfoque tradicional. Sin embargo, se hace importante especialmente cuando hay varias formas de completar una tarea o resolver un problema, de otro modo puede contribuir a un pensamiento ineficiente.

Para Cropley (2017) el pensamiento divergente es el primer paso para llegar a una solución creativa a un problema donde hay múltiples posibilidades, como es el caso del mundo real. Además, produce algunas ideas que se descartan rápidamente, a través del pensamiento convergente, que aplica los nuevos pensamientos al problema en cuestión. Los matemáticos, sin embargo, no descartan del todo las ideas si suelen ser ineficaces ante el último obstáculo para comenzar de nuevo, sino que emprenden un nuevo

[6] Cropley (2017) Psychological and Neuroscientific Perspectives on Mathematical Creativity and Giftedness. In: Leikin R., Sriraman B. (eds) *Creativity and Giftedness*. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham.

pensamiento divergente para establecer qué salió mal o qué se puede agregar o cambiar para superar el estancamiento.

Cropley (2017) asegura que el pensamiento divergente implica la recuperación del conocimiento existente de la memoria como la combinación de varios aspectos en ideas novedosas. En algunos estudios se advierte que este pensamiento está asociado con regiones del cerebro que controlan la recuperación y selección de conceptos semánticos y desempeñan un papel importante en la recopilación de hechos y eventos, además ayuda a enfocar la atención y evitar distracciones. Por su parte, el pensamiento convergente es el que permite hacer una evaluación de las ideas y permite probarlas para determinar si son inapropiadas o inútiles, o si por el contrario son significativas.

Finalmente, y para los intereses de esta investigación, los estudios desarrollados por Cropley (2017) sirven como evidencia neurocientífica para comprender cómo funciona el pensamiento divergente y el pensamiento convergente en el proceso creativo y la necesidad del planteamiento de problemas a los estudiantes con múltiples vías de solución.

1.2.7. Openness and Constraints Associated with Creativity-Directed Activities in Mathematics for All Students[7]

En esta investigación se describen relaciones y diferencias entre los diferentes autores enfocándose en la teoría de la actividad. Posteriormente se sugieren algunas características de las tareas matemáticas dirigidas a la creatividad, como sus posibilidades, limitaciones y su relación con el conocimiento matemático. Y finalmente se argumenta que las actividades dirigidas a la creatividad son fundamentales

[7] Leikin, R. (2018). Openness and Constraints Associated with Creativity-Directed Activities in Mathematics for All Students. *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving, Research in Mathematics Education*, 387-397.

para el desarrollo de habilidades cognitivas, intrapersonales e interpersonales mediante la instrucción matemática.

Leikin (2018) denomina *actividad dirigida a la creatividad* a toda actividad que tenga por objeto desarrollar, apoyar o evaluar las aptitudes de la creatividad. De acuerdo con el análisis desarrollado todas las investigaciones presentan perspectivas originales, pero al mismo tiempo se cruzan significativamente en la revisión de la literatura, puesto que se dirigen a Guilford (1956) en relación con el pensamiento divergente y convergente y con referencia o no explícita a Torrance (1974) para los aspectos de la fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración.

Según Leikin (2018) todos los autores están motivados por su comprensión de que la creatividad es una habilidad que puede aprenderse y desarrollarse. Además, este autora expone componentes de las actividades dirigidas a la creatividad, dentro de los que se encuentran: la resolución de problemas no rutinarios, tareas matemáticas con un número infinito de soluciones, tareas matemáticas con múltiples estrategias de solución, tareas matemáticas con diferentes representaciones en su solución.

Según Leikin (2018), existe un consenso en cuanto a las posibilidades que brinda este tipo de actividades. Mientras que sus limitaciones para hacer evidente el desarrollo creativo pueden atribuirse a diferentes factores como el procesamiento cognitivo, las limitaciones de tiempo, la disponibilidad de recursos, y el talento personal, entre otros.

Este estudio más allá de analizar algunos artículos específicos enfocándose en las actividades, brinda referencias bibliográficas específicas e importantes donde se aborda la creatividad desde distintos enfoques, diferentes poblaciones y muestras. También aporta elementos actuales del por qué es importante investigar la creatividad, ya que constituye una de las habilidades que se espera desarrollar no solo dentro del ámbito académico, sino también desde las aptitudes intrapersonales e interpersonales.

1.2.8. Mathematics Education and Creativity: A Point of View from the Systems Perspective on Creativity[8]

Este estudio analiza el tema de la creatividad en matemáticas desde la “perspectiva de sistemas” propuesta por Csikszentmihalyi, la cual presenta la creatividad como resultado de la interacción de tres sistemas: la persona, el dominio y el campo social. De acuerdo con esto se aborda la resolución y planteamiento de problemas, así como la redefinición, como estrategias didácticas y metodológicas que pueden servir para promover el pensamiento creativo.

Según Gontijo (2018), en la perspectiva de los sistemas se analizan tres aspectos en la creatividad, a saber, el proceso cognitivo, la personalidad, y los valores y motivación. Los procesos cognitivos están relacionados con los procesos psicológicos involucrados con llegar a conocer, comprender, percibir, aprender, entre otros. En relación con la personalidad, se refiere a la curiosidad, la independencia, el auto concepto positivo, la atracción por los problemas complejos y por correr riesgos. Por su parte, la motivación se puede describir por el interés, el placer y la satisfacción de haber cumplido una tarea o solucionado un problema. Estas características son las que pueden llevar a una persona a tener una producción creativa.

En cuanto a las características de las personas con potencial creativo, específicamente en el ámbito de las matemáticas, Gontijo (2018) presenta una lista que incluye la sensibilidad para observar patrones y relaciones matemáticas, la capacidad para plantear y resolver problemas, la voluntad de trabajar de manera autónoma, el placer de comunicar ideas matemáticas, la capacidad de especular o elaborar más de una hipótesis a un problema dado, el placer de agregar algo nuevo al conocimiento producido o una solución diferente a un problema ya resuelto, la tendencia a hacer generalizaciones, la capacidad de

---

[8] Gontijo, C.H. (2018) Mathematics Education and Creativity: A Point of View from the Systems Perspective on Creativity. In: Amado N., Carreira S., Jones K. (eds) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving*. Research in Mathematics Education. Springer, Cham.

visualizar una solución completa de una vez, la convicción de que todo problema debe tener solución, la perseverancia en la búsqueda de la solución de un problema, entre otros.

Gontijo (2018) afirma que para estimular la creatividad en aula es útil que los docentes tengan presentes las experiencias previas de sus estudiantes, tanto positivas como negativas, con el fin de reforzar o permitir descartar todo aquello que no favorece. Así mismo aconseja que es pertinente buscar en los currículos la organización y fomento de los procesos creativos.

En este sentido, según Gontijo (2018), actualmente se están empleando muchas estrategias para ayudar al desarrollo de la creatividad matemática, como lo son el planteamiento y resolución de problemas y la redefinición, como estrategias didácticas y metodológicas que no solo permiten desarrollar la creatividad, sino también permiten evaluarla.

En cuanto a la resolución de problemas, el autor se identifica con la aplicación de problemas con múltiples vías de solución o problemas abiertos con múltiples soluciones, puesto que permiten desarrollar capacidades como la observación, el establecimiento de relaciones, la comunicación, la argumentación, y los procesos de validación, además de estimular formas de razonamiento como la intuición, la inducción, la deducción y la estimación.

Finalmente, Gontijo (2018) plantea que otra actividad que puede favorecer el desarrollo de aspectos de la creatividad consiste en la redefinición de una situación matemática en términos de sus características, de una manera variada y original, proponiendo muchas posibilidades de representarla. Por ejemplo, propone sugerir a los estudiantes diferentes formas de organizar números, objetos u otros elementos en función de sus propiedades y características matemáticas.

1.2.9. Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions[9]

En esta investigación se estudia la creatividad demostrada por los estudiantes en tareas de resolución múltiple tal como muestran los estudios de Leikin (2009, 2013) poniendo especial énfasis en el papel de la figura geométrica. El estudio de la creatividad se hace con referencia a la fluidez, flexibilidad y originalidad las cuales son tomadas de Torrance (1994). En cuanto a la utilidad de las figuras geométricas para la resolución de problemas en geometría, toma elementos de la teoría de Duval (1999), el cual distingue cuatro aprehensiones para una figura geométrica, a saber: aprehensión perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria.

La aprehensión perceptiva tiene que ver con el reconocimiento de una forma en un plano o en profundidad y a la capacidad de reconocer varias subfiguras en la figura ya percibida, mientras que la secuencial es la que se necesita para construir o describir la construcción de una figura. La discursiva está relacionada con la representación de las propiedades geométricas mediante dibujos y, finalmente, la aprehensión operativa tiene que ver con la habilidad para modificar una figura dada, ampliarla, reducirla, cambiarla de posición, hacer construcciones auxiliares, etc.

Teniendo en cuenta estos insumos se busca evidenciar la influencia de la aprehensión de la figura geométrica en la producción de múltiples soluciones a los problemas geométricos, por parte de estudiantes de grado once, así como el tipo de creatividad evidenciada (fluidez, flexibilidad, originalidad) e intentar definir unos perfiles de dichos estudiantes en relación con estos aspectos.

[9] Gridos, P., Athanasios, G., Iliada, E., & Eleni Deliyianni. (2019). Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical. *Actas del Undécimo Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en la Enseñanza de las Matemáticas (CERME)*. Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Dentro de los hallazgos se puede destacar el funcionamiento heurístico de las figuras, ya que algunos estudiantes utilizan la misma construcción auxiliar pero sus soluciones se basan en diferentes propiedades y teoremas; es decir, los sujetos tienen la misma aprehensión operativa pero diferente aprehensión discursiva de una figura. De hecho, las construcciones auxiliares típicas de las aprehensiones operativas se consideran una fuente de creatividad geométrica, puesto que dan una idea de la solución al problema.

Finalmente, en la investigación se sugieren tres perfiles de estudiantes: estudiantes con poca fluidez quienes no obtuvieron ninguna solución; estudiantes con fluidez moderada quienes obtuvieron de una a tres soluciones y flexibilidad con espacio de solución según la teoría de Leikin (2009); y estudiantes con gran fluidez, quienes lograron dos o más soluciones y dos espacios de solución en cuanto a flexibilidad.

1.3. Investigaciones sobre la creatividad a través de la resolución de problemas en matemáticas

1.3.1. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing[10]

Este estudio defiende la idea de que la creatividad puede ser fomentada y es desarrollable no solo entre estudiantes excepcionales, sino con toda la población en general, y asegura que la escuela ofrece pocas oportunidades de experimentación en matemáticas por lo que los estudiantes ven poca relación entre los procesos creativos y las matemáticas. Ante este panorama el autor explora la creatividad en educación relacionándola como consecuencia de un conocimiento profundo y flexible en los dominios de contenido,

[10] Silver, E. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Analyses*, pp 75-80.

producto de largos períodos de reflexión en lugar de una visión rápida y excepcional, además de ser susceptible a influencias instructivas y experienciales.

Más específicamente, Silver (1997) asegura que en ciencias y matemáticas la creatividad ha estado relacionada con el planteamiento y resolución de problemas, por lo tanto, se hace necesario evaluar tanto el proceso como el producto creativo. Para evaluar el pensamiento creativo se suele hablar de tres componentes clave, los cuales son la fluidez, la flexibilidad y la originalidad, los cuales están evidentemente relacionados con el planteamiento y resolución de problemas.

Según Silver (1997), algunas de las acciones que pueden emprender los maestros para desarrollar la creatividad en sus estudiantes es proponer actividades con múltiples respuestas o que puedan ser abordadas desde múltiples direcciones. Además, sugiere formular problemas junto con los estudiantes, alejados de los libros de texto, proponiendo problemas mal estructurados en los cuales quede abierta la posibilidad de hacer diferentes interpretaciones, para luego cambiar las condiciones y generar nuevos problemas. En este proceso se presentan acciones que pueden desarrollar una disposición creativa hacia las matemáticas, mediante una instrucción orientada a la indagación.

Silver (1997) da cuenta de algunos aspectos relevantes sobre la creatividad matemática y orienta a los docentes sobre algunas formas de fomentar la creatividad en la clase de matemáticas. Este proceso resulta valioso para el presente estudio; sin embargo, no llega a mostrar cómo se caracteriza específicamente la creatividad y el pensamiento divergente en relación con el pensamiento geométrico desarrollado en la resolución de problemas.

1.3.2. Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks[11]

En esta investigación se considera la creatividad matemática como una característica del pensamiento matemático avanzado, así como también se señala una estrecha relación entre estos conceptos y los hábitos de la mente, donde la resolución de problemas de múltiples maneras es una herramienta efectiva que permite avanzar y explorar tanto el pensamiento matemático como la creatividad matemática.

Leikin (2007) afirma que los hábitos de la mente se manifiestan en la capacidad de los humanos para comportarse intelectualmente cuando no se conoce la respuesta a diversas situaciones e incertidumbres. Estas situaciones suelen exigir razonamiento estratégico, creatividad, perseverancia y destreza, las cuales son también manifestaciones del pensamiento matemático avanzado.

Así mismo Leikin (2007), basándose en las afirmaciones de Polya (1973) y Ervynck (1991), destaca la resolución de problemas de diferentes maneras como una característica de la creatividad del pensamiento matemático. Algunas de estas soluciones pueden ser más creativas que otras, o en otras palabras muy utilizadas por los docentes de matemáticas, más elegantes, cortas o efectivas, donde claramente en estas interpretaciones se reconoce la subjetividad del punto de vista sobre la belleza, la simplicidad y la eficacia.

Por otra parte, la autora introduce la noción de espacios de solución como herramienta para intentar explicar las conexiones que resuelven problemas de múltiples maneras como un hábito de la mente y el desarrollo del pensamiento avanzado. Estos se componen de todas las posibles soluciones que pueden aportar tanto los expertos y los aprendices, así como las soluciones colectivas.

Según Leikin (2007), varios autores como Davydov (1996), Vygotsky (1978) y Leontiev (1983) proponen que, para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, los problemas no deben ser ni

[11] Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME-5*. pp. 2330-2339

demasiado fáciles ni demasiado difíciles y el docente debe intentar proporcionar problemas en los cuales al menos una de las soluciones se encuentre dentro de los espacios de solución personal de algunos estudiantes y en el espacio de solución potencial de los otros.

Los aportes de Leikin (2007) se consideran importantes para esta investigación puesto que su desarrollo teórico de los espacios de solución brinda herramientas pertinentes para la identificación, creación y evaluación de los problemas con múltiples soluciones, los cuales son importantes para el desarrollo del pensamiento divergente y las ideas creativas.

1.3.3. Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity[12]

Esta investigación introduce las tareas de solución múltiple como herramienta para examinar la creatividad de estudiantes en edades escolares. Se analizaron tres grupos distintos, cada uno de los cuales incluía 6 estudiantes: Grupo G: estudiantes generalmente superdotados, aquellos identificados con altas puntuaciones de CI y con altos logros en matemáticas. Grupo P: estudiantes competentes en matemáticas, aquellos que no fueron identificados como G pero que mostraron un alto rendimiento en matemáticas de nivel alto; Grupo R: estudiantes regulares que tienen altas puntuaciones en matemáticas de nivel medio. En el estudio se analizan tareas convencionales y no convencionales, en los que se encontró que los estudiantes no superdotados difieren en sus soluciones con los estudiantes superdotados en las soluciones a las tareas no convencionales, pero manifiestan resultados similares para las tareas convencionales. Además, con relación a los estudiantes regulares se identificaron diferencias significativas en todos los parámetros analizados. Para el análisis de los problemas propuestos se aplican los espacios de solución propuestos por Leikin y Lev (2007), se desarrollaron

[12] Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 161-168.

entrevistas y se grabaron videos, los cuales se transcribieron. La creatividad matemática fue evaluada mediante los criterios de fluidez, flexibilidad y novedad.

Finalmente, Leikin (2007) plantea algunas hipótesis sobre cómo evaluar la creatividad combinando los criterios mencionados anteriormente; además, se comprobó que la puntuación final de las actividades mostró diferencias entre los grupos, principalmente en cuanto a la novedad y la flexibilidad. Se planea proponer un criterio cuantitativo para la evaluación de tareas de solución múltiple donde la puntuación final esté dada por el puntaje de la flexibilidad multiplicado por el puntaje de la novedad y este producto a su vez sea dividido entre el tiempo empleado para llegar a la solución y el número de soluciones en el espacio de soluciones de expertos. Para este propósito de afinar el criterio de evaluación, se pretende contar con una población más amplia.

La investigación de Leikin y Lev (2007) aporta un enfoque distinto a los revisados anteriormente, puesto que pretende operacionalizar la creatividad matemática de los escolares mediante métodos cuantitativos, para poder analizar de mejor manera las tareas de solución múltiple, aunque apenas es una versión preliminar. Esto pone de manifiesto que la investigación cualitativa sobre la creatividad matemática es insuficiente para analizar las producciones de los estudiantes y se debe optar por métodos mixtos de investigación.

1.3.4. Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge[13]

En este estudio se aplica la noción de espacios de solución propuesta por Leikin (2007) a un grupo de docentes de matemática de secundaria al que se les propone resolver algunos problemas con múltiples vías de solución. A este tipo de problemas se les denomina tareas de conexión, ya que conducen a la

---

[13] Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics*, 233–251.

construcción de conexiones matemáticas en la mente de los estudiantes, lo que se puede reflejar en diferentes representaciones de un concepto matemático, aplicación de diferentes propiedades de un mismo tema concreto y aplicación de teoremas de diferentes ramas de las matemáticas. Con estos insumos se pretende profundizar en la comprensión del desarrollo del conocimiento del profesor en dos momentos diferentes, mientras aprende y mientras enseña a sus estudiantes.

Dentro de sus hallazgos se encuentra que la implementación de tareas de conexión desarrolla de manera significativa el rendimiento de los profesores en la resolución de problemas, tanto en su aprendizaje como en la interacción con los estudiantes a los que orientan. De esta manera se pudo ver reflejado una ampliación de los espacios de solución individual y grupal de los docentes.

La investigación pone de manifiesto que los espacios de solución de los profesores no van más allá de los propuestos por el currículo, es decir, plantean soluciones a los problemas de manera convencional, lo cual es típico de los libros de texto que se usan para sus clases con los estudiantes. Un ejemplo de esto se puede ver cuando a un problema de máximos y mínimos los docentes únicamente recurrieron a las herramientas del cálculo para determinar su solución, a pesar de que el problema ofrecía la posibilidad de abordarlo de forma trigonométrica, geométrica y gráfica.

Leikin & Levav (2008) muestran con todo detalle las diferentes dificultades que presentan los docentes al trabajar con las tareas específicas de conexión, así como el tipo de problemas y sus respectivas soluciones, lo cual sirve de insumo para los propósitos de esta investigación, puesto que aporta una ruta no solo de aplicación de las actividades sino también de una posible forma de evaluación tanto de las actividades como de los aportes creativos de los estudiantes.

1.3.5. Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks[14]

Este estudio considera la creatividad matemática como una propiedad dinámica de la mente la cual puede desarrollarse, o por el contrario privarse. Considera la creatividad en la educación matemática escolar y propone una herramienta para su evaluación (el modelo de evaluación se amplía en el marco teórico). También sugiere observar los procesos creativos a través de las tareas de solución múltiple.

Leikin (2009) indaga sobre la definición de creatividad y específicamente en una definición que corresponda al nivel de la matemática escolar, por lo que se muestra de acuerdo con la definición de Liljedahl y Sriraman (2006) quienes la relacionan con solución de problemas y aseguran que es un proceso que da lugar a soluciones originales o perspicaces a un problema determinado y/o a enfoques de un problema antiguo desde una nueva perspectiva.

Esta investigación se limita a la evaluación de la creatividad dejando de lado el pensamiento divergente. Por tanto, se espera adecuar este modelo incluyendo los aspectos del pensamiento divergente y compararlos con los de la creatividad para establecer hasta qué punto se le puede llamar pensamiento divergente y posteriormente que debe suceder para concretar lo que se llaman ideas creativas o creatividad en el contexto específico de la resolución de problemas geométricos con múltiples soluciones en la secundaria.

También se considera importante el establecimiento de espacios de solución, puesto que en la mayoría de los casos ofrecen posibilidades reales de lo que se espera que contesten los estudiantes. Sin embargo, mediante algunas actividades que se han aplicado en esta investigación se ha evidenciado que algunos estudiantes proponen soluciones que no se encuentran presentes en el espacio de solución experto.

[14] Leikin, R. (2009). Exploring Mathematical Creativity. *Creativity in Mathematics and the Education*, 129-145.

1.3.6. Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry[15]

Está investigación muestra que las tareas de múltiples soluciones (TMS) en el contexto de la geometría pueden servir como instrumento de investigación para evaluar los conocimientos y la creatividad en geometría. Las TMS contienen un requisito explícito para resolver un problema o demostrar un enunciado matemático de múltiples maneras. La diferencia entre las soluciones puede manifestarse en el uso de diferentes representaciones de un concepto matemático, diferentes propiedades, definiciones, teoremas, construcciones auxiliares, o herramientas y teoremas pertenecientes a diferentes ramas de las matemáticas.

Leikin y Levav (2012) además de mostrar una aplicación fiable de la evaluación de los conocimientos y la creatividad matemática mediante sus constructos teóricos de espacios de solución y definición operacional de los componentes de la creatividad (fluidez, flexibilidad y originalidad), también señalan la relación entre la creatividad matemática y los conocimientos matemáticos, mediante las conexiones donde se vinculan las ideas nuevas al resolver tareas matemáticas desafiantes. Este proceso propicia la búsqueda de conceptos y procedimientos conocidos que pueden ayudar en situaciones nuevas.

Leikin y Levav (2012) señalan que el currículo escolar habitual de matemáticas presenta una selección de capítulos separados y rara vez se anima a los estudiantes a conectar las diferentes ideas que han aprendido, mientras que una de las medidas del conocimiento es precisamente su conectividad. Por tanto, es necesario promover nuevas conexiones mediante una instrucción diseñada para este fin y las TMS favorecen el establecimiento de dichas conexiones lo cual ha sido ampliamente referenciado (Polya, 1973; Schoenfeld, 1985, 1988; House y Coxford, 1995; Silver, 1997; Leikin, 2003, 2007).

[15] Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2012). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal Of Science, Mathematics*, 311-333.

Leikin y Levav (2012) mencionan que algunas características adicionales del por qué la geometría es especialmente importante en la enseñanza de las matemáticas es que requiere esencialmente de habilidades visuales, sin embargo dichas habilidades en muchos casos no son suficientes, porque además se requiere de razonamientos abstractos y lógicos para las pruebas, y esta combinación entre la visualización y mayor nivel de abstracción, hace que la geometría sea complicada y rica (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996), citado por Leikin y Levav (2012).

Por otra parte, Leikin y Levav (2012) examinaron la correlación entre los dos criterios de evaluación del conocimiento (conectividad y exactitud) y los tres criterios de creatividad (fluidez, flexibilidad, originalidad) mediante el coeficiente de Pearson y encontraron que la exactitud, la conectividad, la fluidez y la flexibilidad estaban muy correlacionadas entre sí, mientras que cada uno de estos criterios tenía una correlación menor con la originalidad y la creatividad. Al encontrar correlación de la creatividad con la exactitud y la conectividad las autoras conjeturan que el conocimiento es una condición necesaria para la creatividad y para el razonamiento matemático fluido y flexible.

Finalmente, Leikin y Levav (2012) encontraron una correlación positiva entre la creatividad y la originalidad, lo cual es coherente con la observación de Leikin (2009) de que la creatividad depende principalmente de la originalidad, a pesar de asumir una perspectiva relativa de la creatividad, lo cual es consistente con las definiciones de creatividad de Liljedahl & Sriraman (2006).

Los resultados expuestos por Leikin y Levav (2012) son de capital importancia para esta investigación ya que apoyan mediante un estudio de carácter mixto conjeturas acerca de la viabilidad de hacer investigaciones sobre la creatividad específicamente en matemáticas y particularmente matemáticas escolares. Además, permite focalizar la atención de la creatividad en la originalidad ya que parece ser la característica de mayor importancia para la creatividad siempre y cuando esté acompañada de eficacia.

1.3.7. Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: their mathematical creative abilities[16]

Esta investigación aborda la relación entre el proceso creativo en tareas matemáticas y los estilos cognitivos espacial, objetual y verbal, en un grupo de futuros profesores de primaria. Busca claridad sobre qué variables cognitivas, afectan la aparición de la creatividad matemática explorando una de estas variables que es la de estilo cognitivo.

Pitta-Pantazi et al. (2013) abordan la creatividad general desde la perspectiva de Guilford (1956) y Torrance (1974) y, más específicamente, trabajan la creatividad matemática teniendo en cuenta los planteamientos de investigadores como: Singh (1987), Silver (1997) y Leikin (2009). Estos autores estudian la creatividad desde enfoques psicométricos en los que se pone especial atención en los aspectos de la fluidez, la flexibilidad y la originalidad para juzgar los productos creativos.

Sin embargo, Pitta-Pantazi et al. (2013) con relación a la creatividad y los estilos cognitivos se muestran de acuerdo con las investigaciones desarrolladas por Ryhammar y Brolin (1999), quienes sugieren que existen diferencias en la forma y el grado en que alguien expresa su creatividad y que estas diferencias pueden explicarse en función de las diferencias en los estilos cognitivos.

Pitta-Pantazi et al. (2013) eligen investigar los estilos cognitivos debido a la evidencia neuropsicológica reciente que apoya la existencia de dichos estilos, reforzando así la validez de este constructo. Hacen un análisis de las propuestas de diferentes autores y asumen las ideas de Blajenkova y Kozhevnikov (2009) quienes sugieren la existencia de tres dimensiones de estilo cognitivo, un estilo verbal y dos tipos de estilo

[16] Pitta-Pantazi, D., Paraskevi, S., & Constantinos, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: their mathematical creative abilities. *ZDM Mathematics Education*, 199–213.

cognitivo visual, a saber, estilo cognitivo de imágenes espaciales y estilo cognitivo de imágenes de objetos.

Luego de un análisis de los resultados de los instrumentos aplicados, Pitta-Pantazi et al. (2013) evidenciaron que los estilos cognitivos visuales, es decir los relacionados con imágenes espaciales y objetuales, eran predictores estadísticamente significativos de las capacidades creativas de los participantes en matemáticas.

Un análisis más profundo permitió encontrar que el estilo cognitivo de imágenes espaciales estaba relacionado con características de la creatividad como la fluidez, flexibilidad y la originalidad matemática. Además aseguran que es posible que esta capacidad permite a las personas ser más creativas y aportar soluciones numerosas, diferentes y únicas en las tareas matemáticas.

Este estudio presenta problemas de múltiples soluciones y un enfoque de investigación mixto que aporta información valiosa para la presente investigación en términos metodológicos, así como en el análisis de los datos.

1.3.8. Mathematical Problem Solving Beyond School: A Tool for Highlighting Creativity in Children's Solutions[17]

Esta investigación estudia la creatividad manifiesta en la resolución de problemas matemáticos fuera del aula, basado en problemas matemáticos en la web. La población la componen estudiantes de quinto y sexto de la región sur de Portugal, quienes reciben a través de la red un problema nuevo cada dos semanas. El tipo de problema propuesto se supone es desafiante para los estudiantes y los problemas cubren diferentes dominios matemáticos.

[17] Carreira S., Amaral N. (2018) Mathematical Problem Solving Beyond School: A Tool for Highlighting Creativity in Children's Solutions. In: Amado N., Carreira S., Jones K. (eds*) Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving*. Research in Mathematics Education. Springer, Cham.

Carreira (2018) asume que la materialización de la creatividad puede surgir de la combinación de pensamiento convergente y pensamiento divergente ya que esta relación involucra una amplia variedad de ideas, algunas de las cuales son útiles en la resolución de problemas. Según Carreira (2018) mientras que el pensamiento convergente enfatiza en la reproducción y adaptación del conocimiento existente a nuevas situaciones, el pensamiento divergente implica la producción de nuevas ideas.

El estudio presenta un modelo de evaluación de la creatividad psicométrico tradicional, teniendo en cuenta el pensamiento divergente y la creatividad. Los problemas propuestos se pueden resolver de diferentes maneras y no requieren contenidos curriculares específicos. El concepto de creatividad se operacionaliza por la combinación de tres dimensiones: la originalidad, la activación de conocimientos matemáticos y la activación de medios representacionales (ver Figura 1).

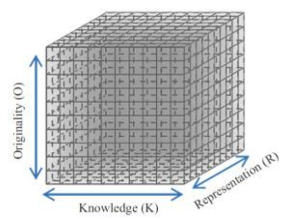


Figura 1. Representación 3D de la creatividad

Por tanto, la creatividad de las soluciones de cada estudiante estaría representada por cajas con diferentes dimensiones y se pueden establecer comparaciones entre cada una de ellas incluyendo la posibilidad de considerar el volumen, para hacer más evidente la comparación.

En conclusión, el artículo muestra un modelo de cómo evaluar la creatividad en la resolución de problemas desafiantes teniendo en cuenta tres dimensiones: originalidad, conocimiento y representaciones. Este modelo es diferente al planteado por Roza Leikin (2009) por lo que aporta nuevas posibilidades para tener en cuenta en la investigación de la creatividad y el pensamiento divergente.

1.3.9. The Power of Seeing in Problem Solving and Creativity: An Issue Under Discussion[18]

Este trabajo discute la importancia de la visualización como estrategia que contribuye y complementa los enfoques de resolución de problemas y su relación con la creatividad. Presenta y discute las diferentes potencialidades y limitaciones de la visualización, así como la conexión entre el uso de soluciones visuales y la creatividad matemática. Finalmente, ilustra y discute ideas surgidas de algunos problemas aplicados a futuros profesores de primaria

Según Vale (2018), la enseñanza de las matemáticas debe incluir tareas que motiven el uso de diferentes representaciones y herramientas y su manejo flexible, de tal manera que los estudiantes puedan encontrar múltiples formas de abordar un problema y diversas estrategias ya que así lo sugiere la naturaleza y la rápida evolución del mundo actual.

Según Vale (2018), la visualización puede servir para entender un problema, atribuir un significado a una expresión numérica o algebraica, evitar un cálculo, planificar con anticipación, tender un puente con una representación matemática formal y transformar un problema en una forma matemática.

Vale (2018) concluye que implementar tareas con múltiples estrategias de solución donde se promueva el uso de la visualización permite a los estudiantes ver los datos, reordenarlos de manera personal y expresar un pensamiento flexible y original, que son componentes de la creatividad. También permite establecer conexiones con otro tipo de procedimientos y enriquecer las posibilidades al momento de abordar problemas.

Finalmente, destaca que los estudiantes no son reacios a implementar y acoger explicaciones relacionadas con estrategias visuales; por el contrario, para algunos, esta es la única manera de resolver

[18]Vale I., Pimentel T., Barbosa A. (2018). The Power of Seeing in Problem Solving and Creativity: An Issue Under Discussion. In: Amado N., Carreira S., Jones K. (eds) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving*. Research in Mathematics Education. Springer, Cham.

problemas. Por lo que es deber de los docentes promover este tipo de procesos si ellos no aparecen de forma natural ya que permiten formas de comprender.

1.3.10. Mathematical Creativity in Solving Non-Routine Problems[19]

En esta investigación se hace un estudio cualitativo para explorar la creatividad en términos de fluidez, flexibilidad y originalidad con estudiantes de grado décimo en Filipinas, utilizando problemas no rutinarios. Fortes y Andrade (2019) aseguran que los problemas no rutinarios son desafiantes y fomentan el uso de diferentes heurísticas para resolver problemas y proporcionan verdaderas oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

Los resultados muestran que el uso de problemas no rutinarios produce un efecto positivo y más efectivo para perfeccionar la creatividad matemática de los estudiantes y que dichos problemas no solo son aptos para los estudiantes de alta capacidad, sino también para los estudiantes promedio. En consecuencia, los estudiantes que asisten a las escuelas regulares también pueden resolver problemas no rutinarios y proporcionar soluciones originales.

Por otra parte, los estudiantes se desempeñan mejor en fluidez y menos en originalidad, en parte porque dejan de generar otras estrategias después de llegar a la respuesta correcta. Las investigadoras infieren que los estudiantes que están expuestos a diferentes sesiones de entrenamiento y concursos tienen un mayor potencial para alcanzar el más alto nivel de creatividad matemática. Por consiguiente, la flexibilidad y fluidez de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos puede mejorarse, alentándolos a participar en por lo menos entrenamientos de matemáticas, o en concursos de matemáticas, dentro o fuera de la escuela.

[19] Fortes, E. C., & Andrade, R. R. (2019). Mathematical Creativity In Solving Non-Routine Problems. *The Normal Lights*, 108-135.

Finalmente, se invita a los maestros a enseñar a los estudiantes diferentes métodos y estrategias generales para resolver problemas sin imponer una sola, así como también estar atentos a las estrategias que exploren los estudiantes, con el ánimo de alentarlos a ser flexibles y críticos en la resolución de problemas.

1.3.11. Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry[20]

Este estudio examina la creatividad matemática en geometría a partir de problemas con múltiples vías de solución y busca evidencias de cómo influye tanto la aprehensión de la figura geométrica, como la construcción de líneas auxiliares en la producción de múltiples soluciones y su relación con los aspectos de la creatividad, fluidez, flexibilidad y originalidad. El trabajo de campo se desarrolló con 243 estudiantes de grado décimo cuyas edades oscilan entre 15 y 16 años.

La aprehensión geométrica está relacionada con la forma en cómo los individuos comprenden y analizan las figuras geométricas, donde se distinguen dos enfoques citados por Gridos et al (2021). Un enfoque perceptivo que consiste en el reconocimiento espontáneo de la figura y un enfoque operativo que está relacionado con el reconocimiento de la figura a través de sus propiedades de las que se extraen otras propiedades.

En cuanto a la construcción de líneas auxiliares, Gridos et al (2021) la considera importante puesto que dichas líneas constituyen una parte importante de la producción de pruebas geométricas así como de la resolución de problemas, y junto con la aprehensión operativa la construcción parece allanar el camino para múltiples aproximaciones a un problema geométrico.

[20] Gridos, P., Athanasios, G., Iliada, E., & Eleni Deliyianni. (2019). Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical. Actas del Undécimo Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en la Enseñanza de las Matemáticas (CERME). Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

A partir de sus observaciones y análisis de los datos recopilados, Gridos et al (2021) considera que se puede mejorar la fluidez y la flexibilidad de un estudiante con ejercicios que tienen como objetivo superar la aprehensión perceptiva de la figura geométrica y conducir a la aprehensión operativa, además de potenciar la originalidad de las soluciones mediante problemas que requieran la construcción de líneas auxiliares.

Según Gridos et al (2021), motivar a los estudiantes a trabajar problemas donde algunas de sus soluciones pueden darse a partir de construcciones auxiliares mejora considerablemente los tres componentes (fluidez, flexibilidad y originalidad) de la creatividad matemática.

Finalmente, los autores concluyen que la enseñanza de la geometría debe transformar el trabajo de los estudiantes, de un trabajo simbólico con fórmulas, a una comprensión más global de las propiedades y características de las figuras geométricas, propendiendo por ideas no necesariamente algorítmicas en los problemas geométricos, sino que prime el razonamiento.

1.4. Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento divergente a través de la resolución de problemas en matemática

1.4.1. The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students[21]

Esta investigación estudia la influencia de la superación de la fijación en la resolución de problemas matemáticos hacia el pensamiento divergente con estudiantes del primer ciclo de secundaria en Japón. Se encontró que los estudiantes que podían superar las fijaciones pueden llegar a aportar ideas variadas y originales en problemas matemáticos abiertos.

[21] Toshihiro, I. (2000). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(2), 187-193.

Teniendo en cuenta los antecedentes teóricos de Haylock (1987), Silver (1997), entre otros, en relación con el pensamiento divergente y la creatividad, Toshihiro (2000) plantea dos actividades a 273 estudiantes cuyas edades oscilan entre los 11 y 12 años. La primera es un problema que consiste en medir varias cantidades específicas de líquido utilizando tres jarras de diferentes capacidades, y la segunda actividad consiste en enunciar cualquier idea, característica o pregunta con relación a el dibujo de un hexágono inscrito en una circunferencia, el cual a su vez está dividido en seis triángulos equiláteros.

En la primera situación se proponían varias cantidades que podían ser medidas con un algoritmo específico. Luego se propusieron cantidades para medir que no obedecían al mismo algoritmo. Para este problema algunos estudiantes no pudieron superar la fijación de pensar que, si el problema no se podía resolver con el algoritmo o estrategia utilizada en los primeros intentos, entonces ya no era posible resolverlo.

Toshihiro (2000) relaciona los resultados del primer problema con la situación del hexágono y concluye que aquellos estudiantes que lograron superar la fijación en el primer problema fueron precisamente los que lograron mejores resultados en la situación con el hexágono, puesto que propusieron más ideas diferentes, es decir tuvieron más fluidez y flexibilidad, además de proponer ideas originales, características propias del pensamiento divergente.

Este artículo se considera importante para la presente investigación, puesto que brinda un foco de atención que se debe tener en cuenta a la hora de abordar problemas que promuevan el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad.

1.4.2. Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach[22]

El propósito de este estudio fue desarrollar un programa para cultivar el pensamiento divergente en matemáticas basado en problemas abiertos. La muestra la conformaron 398 estudiantes de séptimo grado de Seúl. Los resultados mostraron un mejor desempeño de los estudiantes en las habilidades de pensamiento divergente, específicamente fluidez, flexibilidad y originalidad.

Las autoras acogen las ideas de Pehkonen (1995) quien considera que lo común en muchos problemas de matemáticas de la escuela media es que se supone que tienen una sola solución, por lo que definió este tipo de problemas como problemas cerrados. Así mismo, un problema abierto se caracteriza por tener un contexto de partida muy claro, el cual puede ser abierto o cerrado, pero que propone, a quien lo intenta resolver, la búsqueda de muchas soluciones posibles, o diferentes vías de solución, así su solución sea única. Este tipo de planteamiento permite el desarrollo del pensamiento divergente.

Por otro lado, la investigación también tiene en cuenta los denominados problemas incompletos, los cuales según Becker y Shimada (1997) no definen claramente lo que la pregunta pide, lo que permite muchas posibles soluciones. A este tipo de problemas también se les denomina problemas abiertos y a su aplicación en el aula se le conoce como enfoque abierto. Según las autoras este enfoque constituye una estrategia pedagógica que tiene por objeto producir actividades matemáticas creativas que estimulen la curiosidad de los estudiantes y la cooperación en el curso de la solución de los problemas.

Teniendo en cuenta este tipo de problemas abiertos y las ideas propuestas sobre el pensamiento divergente planteadas por Guilford (1967), quien lo relaciona con las habilidades de fluidez, flexibilidad y la originalidad, la investigación se centra en proponer a los estudiantes problemas abiertos con respuestas múltiples y analizar sus respuestas en términos de estas tres características.

---

[22] Kwon, O.N., Park, J.H. & Park, J.S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educ. Rev.* 7, pp. 51–61.

Se destaca de esta investigación el análisis estadístico para concluir que este tipo de problemas abiertos favorece el desarrollo del pensamiento divergente. Sin embargo, en ella se habla del pensamiento divergente y la creatividad, pero no hay una clara diferenciación entre estos conceptos; al parecer y según las afirmaciones de las autoras, el pensamiento divergente con sus características de fluidez, flexibilidad y originalidad son tan solo una parte de la creatividad, pero no se especifica qué características tiene la creatividad diferentes a las del pensamiento divergente.

1.4.3. Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement[23]

Esta investigación explora la posibilidad de evaluar en línea el pensamiento divergente y la relación entre el pensamiento divergente y el rendimiento matemático en tres dimensiones diferentes: el conocimiento del contenido disciplinar (CD), el razonamiento matemático (RM) y la aplicación de las matemáticas (AP). La muestra son 1984 estudiantes de grado sexto de 78 escuelas primarias de diversas regiones de Hungría.

Pásztor (2015) aborda el pensamiento divergente haciendo uso de los test elaborados por Torrance (1966), Wallach y Kogan (1965), los cuales son consecuentes con las ideas planteadas por Guilford (1967). Según Runco (2011) es uno de los principales enfoques en la identificación de los procesos de pensamiento que están detrás del pensamiento creativo y que, desde una perspectiva educativa, se han considerado como un indicador del potencial creativo.

Según el autor, en la medición del pensamiento divergente, la administración y la puntuación de las pruebas, las tareas abiertas que generan numerosas respuestas son las que presentan mayor dificultad para procesar de la manera tradicional. Por esta razón propone una prueba para medir el pensamiento

[23] Pásztor, A. (2015). Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement. Thinking Skills and Creativity, 18, 32-42

divergente en general y una prueba para investigar la relación entre el pensamiento divergente y el rendimiento en matemáticas usando la tecnología para ser desarrolladas en línea.

Pásztor (2015) propone algunas categorías para puntuar los test aplicados, sin embargo, en algunos casos las respuestas no encajan en dichas categorías, por lo que no todo el proceso es posible automatizarlo, no obstante, sus pruebas representan un avance para la evaluación del pensamiento divergente en línea.

La propuesta de Pásztor (2015) puede ser de ayuda para la presente investigación ya que seguramente debido a la pandemia se deban aplicar algunas actividades de forma virtual con los estudiantes y muestra una ruta que puede servir de apoyo en la aplicación de dichas actividades.

1.4.4. The relative influence of domain knowledge and domain-general divergent thinking on scientific creativity and mathematical creativity[24]

Este artículo explora la relación entre el pensamiento divergente en general y la creatividad científica y matemática; para tal propósito se aplicaron pruebas a 187 estudiantes de tres escuelas de Taiwán con edades entre los 11 y 14 años. En las pruebas se evaluaron las dimensiones de fluidez, flexibilidad y originalidad y se aplicaron métodos estadísticos para determinar el grado de correlación entre la creatividad matemática, la creatividad científica, el conocimiento en cada una de estas áreas y el pensamiento divergente.

Los autores se muestran de acuerdo con Haylock (1987) en que para que los individuos desplieguen su potencial creativo no solo es necesario la capacidad de pensamiento divergente, sino que un factor que puede llegar a limitar o favorecer la creatividad matemática es poseer habilidades y conocimientos

[24] Huang, Po-Sheng., Peng, Su-Ling., Chen, Hsueh-Chih., Tseng, Li-Cheng., & Hsu, Li-Ching., (2017). The relative influence of domain knowledge and domain-general divergent thinking on scientific creativity and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity* v.25 pp 1-9

matemáticos bien desarrollados. Sin embargo, no necesariamente esto garantiza un rendimiento creativo en matemáticas, puesto que hay otros factores que influyen como la ansiedad, la baja autoestima, la falta de voluntad de riesgo, entre otros. Luego de un análisis estadístico riguroso los autores encontraron una correlación positiva entre la creatividad científica y la creatividad matemática.

Por otro lado, encontraron que la creatividad en todos los ámbitos no requiere necesariamente de pensamiento divergente, pero proponen ampliar las investigaciones y recomiendan a futuros investigadores que pretendan medir la creatividad específica, no usar pruebas de pensamiento divergente de dominio general. Además, proponen hacer hincapié en pruebas de conocimiento específico incluso en los subdominios de las diferentes áreas del conocimiento, puesto que las pruebas y el entrenamiento por ejemplo en aritmética no mejora los rendimientos creativos de los estudiantes en otras áreas de la matemática como el álgebra o la geometría.

1.4.5. Solving a Task with Infinitely Many Solutions: Convergent and Divergent Thinking in Mathematical Creativity[25]

Este estudio se centra en la creatividad matemática provocada por un problema con infinitas soluciones. La investigación tiene tres objetivos; el primero es explorar si dicha tarea es un vehículo adecuado para promover la creatividad, el segundo es analizar las soluciones de los participantes en términos de pensamiento divergente y convergente de acuerdo con Guilford (1967), y finalmente el tercer objetivo es a partir de los resultados destacar varias preguntas metodológicas con respecto a la evaluación de la fluidez, flexibilidad y creatividad matemática.

[25] Tabach M., Levenson E. (2018) Solving a Task with Infinitely Many Solutions: Convergent and Divergent Thinking in Mathematical Creativity. In: Amado N., Carreira S., Jones K. (eds*) Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving*. Research in Mathematics Education.

Tabach y Levenson (2018) consideran que el pensamiento divergente, junto con el pensamiento convergente son necesarios para la creatividad. Para esto se apoyan en dos autores.

En primer lugar, en Runco (1996) quien distinguió entre el pensamiento divergente al servicio de la creatividad y el pensamiento divergente como la producción de ideas aleatorias inútiles, por lo que, en la resolución de problemas, el pensamiento divergente permite al solucionador buscar y encontrar diferentes caminos de solución, mientras que el pensamiento convergente permite la evaluación de dichas ideas, para diferenciar entre caminos útiles e improductivos.

En segundo lugar, los autores referencian las ideas de Storme (2015) quien asegura que las tareas de pensamiento divergente generan muchas soluciones breves a un problema, mientras que las tareas de pensamiento convergente permiten integrar varias ideas y concretarlas en una solución elaborada a un problema. A estos dos procesos los llama divergente-exploratorio y convergente integrador.

La población objeto de estudio de Tabach y Levenson (2018) consiste en un grupo internacional de adultos compuesto por 23 investigadores en educación matemática con variados antecedentes académicos, pero en conclusión todos con un nivel de maestría en matemáticas o educación matemática y algunos con doctorado en estas mismas disciplinas.

La tarea encomendada a este grupo era la de dibujar tantos polígonos diferentes como sea posible con un área de 15 unidades en un período de 5 minutos. Dos tercios de los participantes principalmente se caracterizaron por registrar soluciones concretas dibujando polígonos con la condición indicada en los que se pudo evidenciar una tendencia a dibujar polígonos con lados paralelos, lo que permite intuir que las hojas cuadriculadas utilizadas para la actividad pudieron ser una variable que restringe las soluciones. A este tipo de respuesta Tabach y Levenson (2018) lo caracteriza como pensamiento divergente, ya que ejemplifica la producción de ejemplos de ideas aleatorias en el sentido de Runco (1996), puesto que no seguían ninguna dirección que pudiera conducir a una declaración general.

Tabach y Levenson (2018) señalan que el pensamiento divergente y el pensamiento convergente juegan papeles complementarios en el pensamiento matemático creativo y que en algunos casos el pensamiento convergente también conduce a procesos de pensamiento divergentes o viceversa, por tanto, concluye que las tareas con infinitos resultados sí pueden ser adecuadas para promover la creatividad y evaluarla.

Finalmente, Tabach y Levenson (2018) resaltan que en este tipo de actividades la fluidez se comporta de manera similar a como se comporta con problemas comunes, pero que la flexibilidad si puede presentar un segundo grado, ya que el solucionador no solo busca soluciones aisladas, sino también múltiples conjuntos de soluciones, por lo que los métodos de análisis y evaluación de la creatividad pueden diferir en este tipo de actividades. El trabajo de Tabach y Levenson (2018) es pertinente para esta investigación, ya que aporta validez a las actividades de infinitas soluciones y brinda una base conceptual de cómo abordarlas con los estudiantes.

1.4. Conclusiones del capítulo 1

A partir de la revisión de la literatura relacionada con el pensamiento divergente y la creatividad se puede inferir que hay dos tendencias de investigación. La primera indaga sobre el proceso creativo, el cual se caracteriza por seguir las etapas de preparación, incubación, iluminación y verificación propuestas por la psicología de la Gestalt.

En la segunda se tienen en cuenta los productos creativos en los que se suele analizar tres aspectos, la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. De los tres el más importante para la creatividad es la originalidad. Estos tres aspectos son transversales al pensamiento divergente y a la creatividad, sin embargo, pueden suceder los tres sin que se configure una idea creativa. A partir de estas dos grandes categorías se relacionan y analizan otros constructos teóricos y sus implicaciones para la creatividad, los cuales se mencionan a continuación.

Con relación a la población las investigaciones se han desarrollado con niños de primaria, secundaria y estudiantes superdotados. También, se han desarrollado estudios con matemáticos y con profesores en formación y en ejercicio. *En relación con otros constructos teóricos s*e ha buscado mediante diferentes enfoques correlaciones entre la creatividad y la inteligencia, el pensamiento divergente y convergente, los estilos cognitivos, la visualización, la creatividad general y específica, y otras áreas del conocimiento.

En relación con los instrumentos, una parte importante de las investigaciones centra su interés por elaborar pruebas y modelos para medir y evaluar la creatividad, indagando en el tipo de situaciones o problemas que la desarrollen. *En cuanto a los enfoques* hay diversidad, puesto que se han aplicado enfoques cualitativos, cuantitativos y mixtos relacionándolos con aspectos psicológicos, cognitivos y socioculturales.

Finalmente, también se puede entrever que hacen falta estudios relacionados con la creatividad para desarrollar la originalidad, investigar la creatividad en ramas de la matemática distintas a la aritmética, geometría y cálculo, investigar qué prácticas docentes se deben evitar para no sesgar la creatividad de los estudiantes, e investigaciones que den cuenta de cómo articular en los modelos de evaluación de creatividad las ideas potenciales que, aunque no sean eficaces, mediante un una adecuación o ajuste se puedan convertir en ideas creativas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se aborda el marco teórico que sustenta al pensamiento divergente y la creatividad, los cuales permiten comenzar a determinar las semejanzas, diferencias y fronteras entre estos.

2.1. Referentes filosóficos y psicológicos de la creatividad y el pensamiento divergente

Investigar sobre la creatividad matemática sugiere necesariamente cuestionamientos acerca de su origen, naturaleza, estructura, y medios de justificación, los cuales constituyen un sistema de creencias que en definitiva influyen en la manera como se enseñan y se aprenden los conceptos matemáticos (Davis y Hersh 1981). A continuación, se hace una breve descripción de estos aspectos.

El origen de las matemáticas en términos generales tiene dos corrientes, los que las consideran como un conocimiento que existe fuera de la mente humana, semejante a lo que propone Platón con su mundo de las ideas puras y los que consideran que las matemáticas son una creación y construcción de la mente humana (Davis y Hersh 1981).

Por otro lado, en relación con la naturaleza del conocimiento matemático se pueden distinguir dos posturas, una en la que las matemáticas son exactas e infalibles y otra donde las matemáticas están en constante construcción y son susceptibles de ser corregidas (Ernest, 1991).

En cuanto a la estructura, se encuentran los absolutistas quienes consideran el conocimiento matemático como algo simplista y aislado, una disciplina estrictamente demarcada y separada de otros ámbitos del conocimiento, donde la lógica es la única que brinda seguridad en su conocimiento. Por otro lado, están los que consideran que el conocimiento matemático es una estructura compleja e integrada donde las matemáticas son inventadas por la mente humana, pueden fallar, ser corregidas, los conceptos pueden sufrir cambios, puesto que sus significados están en continuo debate entre la comunidad matemática, por lo que a su vez también están relacionados con otros aspectos y disciplinas del conocimiento humano (Lakatos 1976; Davis y Hersh 1981; Ernest 1991).

En relación con los procesos de validación y justificación se considera que la interiorización de leyes lógicas en un sistema según el cual se organizan los objetos matemáticos, sus relaciones, propiedades y operaciones con el fin de configurar pruebas o demostraciones, comúnmente son aceptadas como formas de validación, consecuentes con un sistema lógico deductivo.

Esta postura si bien ha permitido crear y organizar las teorías matemáticas, también de cierta manera las muestra ajenas a los procesos empíricos e intuitivos en los que la imaginación y creatividad no son visibles, de cierto modo presentan caminos muy estrictos donde pareciera que no hay cabida al error. También, hay otras posturas donde la validación matemática puede considerarse como una serie de acuerdos entre sus actores, en un modelo como el que presenta Lakatos (1976) en el que las definiciones no son la última palabra, sino que a menudo deben ser corregidas a la luz de nuevos conocimientos y que las demostraciones pueden ser falsadas. En este enfoque se les da a las matemáticas un carácter experimental en las que crecen y se desarrollan mediante la lógica de pruebas y refutaciones.

El estudio de la creatividad matemática ha sido abordado históricamente por dos matemáticos de renombre como lo son Jacques Hadamard y Henri Poincaré. Hadamard (1945), influenciado por las ideas expuestas por Poincaré a principios del siglo XX en una conferencia ante la Sociedad Psicológica de París, llevó a cabo una investigación informal entre matemáticos y científicos como Birkhoff, Polya y Einstein, sobre las imágenes mentales utilizadas para hacer matemáticas. En términos generales Hadamard (1945) concluye que el proceso creativo de los matemáticos sigue el modelo de la psicología Gestalt de cuatro etapas, a saber, preparación – incubación – iluminación – verificación; sin embargo, este modelo se aplica principalmente a problemas propuestos con antelación por otros matemáticos ignorando el proceso mediante el cual se llega a las preguntas reales (Sriraman, 2009). Este problema fue abordado por Ervynck (1991) quien propone un modelo de tres etapas que se resumen en técnica preliminar, actividad algorítmica y actividad creativa, esta última caracterizada precisamente por la toma de decisiones no algorítmicas al resolver un problema.

La creatividad ha sido objeto de investigación en la psicología, la educación y la educación matemática; según Stemberg (2000) el estudio de la creatividad se puede englobar en seis categorías, místico, pragmático, psicodinámico, psicométrico, cognitivo y social-personalidad.

Según Stemberg (2000) la mayor parte de la literatura reciente sugiere que la creatividad es el resultado de la confluencia de uno o más de los factores de las seis categorías mencionadas. El cual puede considerarse en sí, otro enfoque que además ha ganado credibilidad para comprender mejor el proceso de la creatividad, de los cuales los más citados son el enfoque sistémico de Csikszentmihalyi (2000), el estudio de caso como enfoque sistémico evolutivo de Gruber & Wallace (2000) y, por último, el enfoque teórico de la inversión de Sternberg & Lubart (1996).

2.2. Referentes teóricos sobre la creatividad y el pensamiento divergente

Los términos de pensamiento divergente y pensamiento convergente son términos acuñados por el psicólogo norte americano Joy Paul Guilford quien en las décadas de 1950 y 1960 hace un estudio riguroso, a través de métodos psicométricos. Considera el pensamiento divergente como un proceso cognitivo mediante el cual se generan ideas mediante la exploración de muchas posibles soluciones a un problema. En cuanto al pensamiento convergente, lo concibe como la habilidad de dar una respuesta correcta a una pregunta ordenando de manera lógica la información disponible.

A partir de estos planteamientos se han desarrollado diferentes investigaciones que han arrojado resultados interesantes no solo para la psicología, sino que también son de interés para la educación, en particular para la Educación Matemática.

Guilford (1967) en su libro *The nature of human intelligence* trata de proporcionar una fundamentación sobre el concepto de inteligencia, teniendo en cuenta los resultados llevados a cabo mediante el análisis factorial; específicamente se desarrolla una teoría sobre la estructura del intelecto (EI) que surgió de aplicaciones experimentales del análisis factorial múltiple.

Por otra parte, se señalan los vínculos y la importancia de la teoría de Jean Piaget sobre conocimiento y su evolución; Piaget desarrolló en gran medida métodos de observación directa que proporcionan información valiosa.

Para Guilford (1967) todo comportamiento mental está comprendido según una estructura de tres categorías, llamadas por él categorías de la estructura del intelecto, las cuales son de contenido, operacionales y productivas (ver Figura 2).

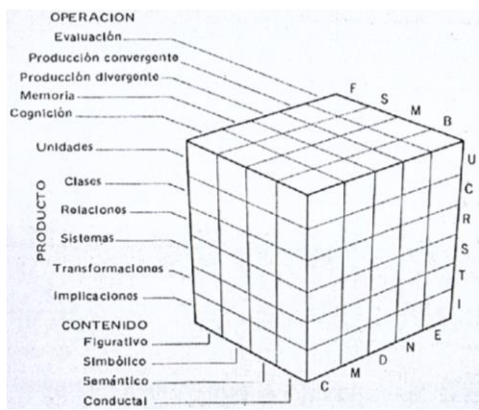


Figura 2. Modelo de la estructura del intelecto[26]

Como se puede observar dentro de las categorías operacionales, se encuentra el pensamiento divergente, el cual surgió en relación con las aptitudes de pensamiento creativo, puesto que según Guilford (1967) parecían tener propiedades exclusivas que implican, fluidez, flexibilidad y aptitudes de elaboración. En los test de pensamiento divergente el examinado obtiene un buen puntaje según la cantidad y variedad de sus respuestas y en algunos casos por el nivel de calidad.

[26] Tomada de (Guilford, The Nature Of Human Intelligence, 1967)

Hay que aclarar que en la categoría de las operaciones, para Guilford (1967) el conocimiento es básico, puesto que si no hay conocimiento no hay memoria, si no hay memoria no hay producción, y si no hay conocimiento y producción no puede haber evaluación. En este sentido en la producción divergente y convergente existe una clara dependencia con el conocimiento y la memoria.

Por otro lado, hay que entender que para Guilford (1967) el concepto de "producto" corresponde a la manera en que se manifiesta cualquier información, y un sinónimo de producto podría ser el de concepción que también hace referencia a las formas de conocer o comprender la información.

Aptitudes de la producción divergente

En relación con este tema el autor habla de la fluidez, la flexibilidad, la originalidad y la elaboración, como aptitudes de producción divergente a las cuales ha llegado a través de estudios de análisis factorial. Además, hace énfasis en que estos aspectos deben ser de especial importancia para el pensamiento creativo.

Por otra parte, es de considerar la información referenciada por Guilford (1967) acerca de los estudios de Torrance (1962), quien trabajó con test de producción divergente con niños para la investigación de la creatividad, donde encontró que los niños que tienen puntajes elevados en los test de producción divergente en los grados inferiores generalmente son aquellos que no suelen seguir las normas, no miden las consecuencias de sus actos o tienen ideas traviesas, en especial en los varones.

Finalmente, Guilford (1967) también buscó las relaciones entre los puntajes de los tests de la producción divergente y el de coeficiente intelectual CI, que en general son bajas, pero propuso que, aunque un CI elevado no es condición suficiente para obtener buenos resultados en los test de la PD, poseer un CI por encima del promedio es algo casi necesario, como lo ilustra el diagrama de dispersión (ver Figura 3).

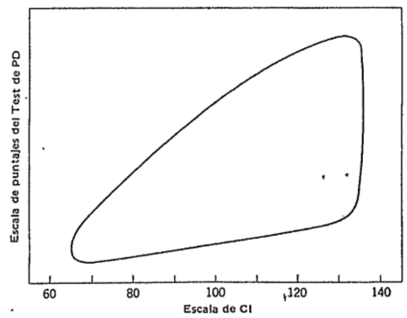


Figura 3. Diagrama de dispersión[27]

Por otra parte, también se toman referentes teóricos para la creatividad y pensamiento divergente de Runco (2008, 2009, 2012, 2017). Al respecto Runco (2008) asegura que la creatividad nunca será plenamente comprendida utilizando el enfoque científico tradicional, puesto que la creatividad requiere originalidad y la originalidad es típicamente impredecible, o al menos no predecible con mucha precisión. También sugiere que la creatividad no es evaluable mediante el pensamiento divergente, puesto que las pruebas de pensamiento divergente sirven como predictores en lugar de criterios de desempeño de la creatividad.

Para este autor la fluidez es entendida como la cantidad de ideas que surgen en relación con una situación o problema, la originalidad suele definirse en términos de infrecuencia estadística de las ideas y la flexibilidad como la que conduce a diversas ideas que utilizan variedad de categorías conceptuales.

De igual manera, Runco (2008) recalca que el pensamiento divergente puede llevar a una alta originalidad que carece de encaje y eficacia, y esto es precisamente la razón por la cual el pensamiento divergente no es sinónimo de resolución creativa de problemas, puesto que regularmente conduce a ideas muy originales, pero la originalidad no es suficiente para la creatividad. Las cosas creativas de todo tipo, ya sean ideas, soluciones, productos, inventos, etc., son originales y efectivas.

[27] Tomada de (Guilford, The Nature Of Human Intelligence, 1967)

Así mismo, Runco (2012b) plantea que las pruebas de pensamiento divergente se utilizan frecuentemente en las investigaciones sobre creatividad, sin embargo, estas no garantizan logros creativos reales, pero son predictores fiables y en cierta medida válidos de determinados criterios de rendimiento. De hecho, las pruebas de pensamiento divergente conducen directamente a hipótesis comprobables y permiten la evaluación del potencial de pensamiento creativo. La palabra clave es la del potencial, puesto que el pensamiento divergente no es lo mismo que la creatividad. Una persona puede salir bien en una prueba de pensamiento divergente y nunca tener una idea creativa.

Runco (2017) asegura que el pensamiento divergente es una de las teorías más útiles para las investigaciones sobre la creatividad, no solo porque las pruebas tienen altos índices de confiabilidad y validez sino porque las tareas de pensamiento divergente también son útiles como ejercicios cuando se intenta comprender el pensamiento creativo, puesto que a partir de su análisis se puede establecer nuevas hipótesis.

Ahora bien, el autor no solo centra su investigación en la resolución de problemas, sino que también menciona que hay creatividad en la proposición o identificación de problemas. Runco (1996) asume la creatividad como polifacética y multidimensional puesto que según él se manifiesta en las intenciones y la motivación para cambiar el mundo objetivo en interpretaciones originales, junto con la capacidad de deducir cuándo es útil y cuándo no. En este sentido este investigador añade la discreción como la acción de discernir entre las ideas inútiles que pueden reflejar originalidad pero no eficacia, y su respectiva evaluación mediante las leyes de la lógica para quedarse únicamente con la información e ideas útiles.

Lo anterior se puede entender como una confluencia entre el pensamiento divergente y el pensamiento convergente en los procesos creativos, puesto que el pensamiento divergente permite al individuo generar varias ideas en relación con una situación o problema, mientras que el pensamiento convergente es el que permite acoger o descartar entre todas estas ideas para generar ideas eficaces.

Finalmente, en Runco (2012a) se hace un barrido histórico donde se evidencia el hecho de que varios investigadores han intentado dar una definición estándar de creatividad; sin embargo, dichas definiciones en la práctica muestran inconsistencias o son circulares, como las definiciones clásicas de los diccionarios, y en otros casos se asumen como sinónimos de originalidad o pensamiento divergente.

Aunque este tema de la definición de la creatividad aún hoy es objeto de debate, también se han conseguido algunos consensos y aspectos que en definitiva se deben tener en cuenta como la originalidad y la utilidad; en muchos casos la primera es cambiada por novedad o rareza y la segunda por eficacia o ajuste. En este sentido se puede decir que las definiciones de creatividad han evolucionado, sin llegar a ser perfectas, y esto precisamente es lo que hace que se enriquezca la investigación en el tema, ya que si existiera una definición absoluta podría considerarse que se entiende completamente y quedaría poco por estudiar.

Sin embargo, y de acuerdo con Kaufman y Baer (2012) el hecho de que no haya acuerdo en una definición única de creatividad no quiere decir que no pueda ser estudiada. No obstante, es importante especificar a qué se refiere cuando se utiliza la palabra, para saber qué se está hablando de lo mismo. Pero es aceptable que las definiciones tengan un poco de margen de maniobra y que permitan cierta ambigüedad.

2.2.1. Definición de creatividad matemática

Como se mencionó en el apartado anterior la definición de creatividad general ha sido uno de los desafíos en el desarrollo de su investigación y no hay una definición clara y aceptada; esta situación es extensible a la definición de la creatividad matemática.

Según Sriraman (2009) hay más de 100 definiciones contemporáneas de creatividad matemática, lo cual hace que el panorama de cómo se investiga sea en principio un poco confuso.

Según Poincaré (1948), crear consiste precisamente en no hacer combinaciones inútiles y en hacer aquellas que son útiles las cuales constituyen sólo una pequeña minoría. Sin embargo, en esta caracterización de la creatividad se pasa por alto la originalidad o novedad, puesto que se podrían hacer combinaciones útiles pero llegar solo a soluciones convencionales sin mostrar creatividad.

Por otro lado, Sriraman (2009) afirma que la definición de Poincaré (1948) fue producto de su profundo estudio de las funciones fuchsianas. Este autor definió esta primera etapa como período preliminar de trabajo consciente, lo que también es llamado por Hadamard (1945) como etapa preparatoria.

La segunda etapa, llamada como estado de incubación por Hadamard (1945), se da cuando se entiende el problema, pero al no encontrar solución inmediata se deja de lado por un período de tiempo en el cual la mente se ocupa de otros problemas no relacionados.

Posteriormente, de repente mientras quizás se tiene la mente ocupada en otras cosas o problemas, aparece la solución lo que es considerado como la tercera etapa también llamada por Hadamard (1945) como la etapa iluminadora que, según Poincaré (1948), es un signo manifiesto de un trabajo previo largo e inconsciente.

Finalmente, hay una cuarta etapa, la verificación, en la cual por medio del lenguaje o escritura se expresan los resultados, se precisan procedimientos y se buscan posibles conexiones a través de la aplicación del resultado.

Estas etapas corresponden al modelo Gestalt que se inició en la década de 1920 en Berlín, Alemania. Este movimiento buscaba determinar cómo la mente configura, mediante ciertas leyes o principios básicos, los elementos que llegan a ella a través de los canales sensoriales o de la memoria. Sin embargo, según Sriraman (2009) este modelo tiene algunas deficiencias puesto que se aplica a problemas que han sido planteados con anterioridad por matemáticos ignorando el proceso mediante el cual se llega a las preguntas reales y porque atribuye gran parte de lo que sucede a los impulsos subconscientes en las fases de iluminación e incubación.

Por otro lado, Polya (1954) propone un modelo en el que la heurística puede verse como un mecanismo para la toma de decisiones en el que se describen de forma general las etapas que siguen los matemáticos para resolver problemas. Sin embargo, su propuesta se ha aplicado ampliamente en el ámbito educativo en la resolución de problemas para la enseñanza en matemáticas.

En esta propuesta Polya (1954) observó que cuando se intenta resolver un problema se consideran diferentes aspectos como comprender el problema, concebir un plan para su solución, ejecutar el plan y examinar la solución. Esto conduce al matemático por un cierto camino, cuyo resultado puede o no ser fructífero.

Tal y como asegura Leikin (2021) proporcionar una definición precisa y ampliamente aceptada de la creatividad matemática es extremadamente difícil. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones de la creatividad toman una de dos direcciones: la creatividad extraordinaria, conocida como la gran C, o la creatividad cotidiana, conocida como la pequeña c. La primera se refiere a conocimientos o productos excepcionales que aportan al campo del conocimiento y son el tipo de aporte que pueden cambiar la visión del mundo y la segunda considerada la creatividad ordinaria o de todos los días que tiene más importancia en entornos locales y escolares (Kaufman y Beghetto, 2009).

En contextos generales o específicos la mayoría de las definiciones incluyen los aspectos de originalidad y utilidad (Sternberg 2000), también conocida como la definición estándar de creatividad (Runco 2012). Lo que es útil y original depende del contexto del proceso creativo de un individuo puesto que los criterios de lo que se considera original y útil en artes no son los mismos criterios que se consideran en matemáticas, ni tampoco en una clase de matemáticas de secundaria.

Finalmente, Sriraman (2009) asegura no tener conocimiento en la literatura sobre una definición explícita de creatividad en educación matemática y, teniendo en cuenta la creatividad como la capacidad de producir un trabajo novedoso u original, propone su propia definición como: "*el proceso que resulta en soluciones inusuales y perspicaces a un problema dado, independientemente del nivel*"[28].

Sin embargo, posteriormente en Haavold, Hwa Lee, & Sriraman (2018) se hace un refinamiento de esta definición que precisamente es la que se tiene en cuenta para la presente investigación: "*La creatividad matemática en un entorno K-12 puede definirse como el proceso que da como resultado una solución o idea novedosa a un problema matemático o la formulación de nuevas preguntas, producidas por un individuo o varios individuos, y consideradas dignas de ser preservadas en el contexto de las matemáticas escolares*"[29].

Esta definición se ajusta al trabajo con estudiantes de secundaria, no sin antes mencionar que la creatividad con este tipo de estudiantes, como asegura Leikin (2012), se considera con respecto a su propia historia educativa y en comparación con otros estudiantes.

2.2.2. Fundamentos sobre la medición de la creatividad

De acuerdo con Runco (2012) en la literatura se pueden identificar cuatro formas de medir la creatividad, las pruebas de pensamiento divergente, inventarios de actitudes e intereses, inventarios de personalidad e inventarios biográficos. Todos brindan información útil, pero la investigación ha estado dominada por las pruebas de pensamiento divergente.

Guilford (1956) relaciona el pensamiento divergente con el potencial creativo y plantea hipótesis de varios aspectos que caracterizan el pensamiento divergente, sin embargo las evidencias empíricas apoyaron a

[28] Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 13-27

[29] Haavold, Hwa Lee, & Sriraman (2018) Creatividad en Educación Matemática. En: Lerman S. (eds) Enciclopedia de Educación Matemática. p (2).

unos más que a otros, al punto que en la actualidad la mayoría de las pruebas de pensamiento divergente se tratan únicamente de la fluidez (número de ideas diferentes que se puede producir), la flexibilidad (la variedad de ideas), la originalidad (lo inusual de las ideas) y la elaboración que es la menos común y se refiere a la riqueza de detalles en las ideas que un individuo produce.

Kaufman y Baer (2012) aseguran que en una prueba de pensamiento divergente lo que parece más razonable es que se evalúen estos cuatro aspectos y posteriormente se sumen dichas puntuaciones. Sin embargo, advierte que este procedimiento para puntuar la prueba, en realidad está sesgado hacia la fluidez y que bastaría con proponer muchas ideas en relación con una situación o problema sin importar si dichas ideas son razonables, productivas o útiles.

Algo similar puede suceder con los otros aspectos, por ejemplo, en la originalidad, puede haber ideas muy poco comunes, de tal forma que su puntuación sea alta, pero nuevamente al producir muchas ideas, sin importar su utilidad, se hace que sea más probable quedar en un grupo con altos índices de originalidad.

Según Kaufman y Baer (2012) la correlación que hay entre las escalas de flexibilidad, originalidad y elaboración con la fluidez es tan amplia, que varios expertos argumentan que es casi igual de preciso contar simplemente el número de respuestas (fluidez) que molestarse con procedimientos más complicados.

Según Runco (2008) lo mencionado anteriormente ha tenido un efecto negativo, puesto que en primer lugar se asumen las pruebas de pensamiento divergente como pruebas que miden la creatividad y por otro lado las pruebas de pensamiento divergente en ocasiones son únicamente pruebas de flexibilidad.

Sin embargo, según Runco (2008), Cropley (2017), Carreira (2018), y Tabach y Levenson (2018) los procesos evaluativos, el razonamiento lógico y en general los aspectos relacionados con el pensamiento convergente, unidos a los aspectos de la producción divergente hacen que sea más probable que se generen ideas no sólo originales, sino que también sean efectivas.

Finalmente, se puede concluir que a pesar de que en la literatura no hay una forma definida para medir la creatividad, se han desarrollado modelos que en muchos casos son guiados por los aspectos de la producción divergente. Según Runco (2012, 2017) y Kaufman & Baer (2012) aunque no son indicadores directos de creatividad son predictores fiables y razonablemente válidos de criterios de rendimiento, además son útiles cuando se intenta comprender el pensamiento creativo y favorecen el desarrollo de la creatividad.

2.2.3 La medición de la creatividad matemática en la escuela

En el ámbito de la educación matemática, la investigación sobre la medición de la creatividad se ha centrado en los aspectos de la fluidez, flexibilidad y originalidad propuestos por Guilford (1956). Aunque Guilford plantea cuatro aspectos incluyendo la elaboración, diferentes autores como Leikin (2009), Silver (1997), Pitta-Pantazi (2012), entre otros, no han utilizado este criterio debido a que es difícil obtener confiabilidad entre evaluadores en la elaboración, así como para determinar diferentes niveles de elaboración en la resolución de un problema o una demostración.

En la literatura revisada se han encontrado tres modelos para la medición de la creatividad, a saber, el de Leikin (2009), el de Pitta-Pantazi (2012) y el de Carreira (2018). Estos modelos tienen en cuenta directa o indirectamente los aspectos de la producción divergente. Sin embargo, la fluidez, la flexibilidad y la originalidad se tienen en cuenta con relación únicamente a las respuestas eficaces al problema.

Aunque los tres modelos resultan interesantes, en la presente investigación se asumen algunas de las ideas del modelo propuesto por Leikin (2009), el cual se expone a continuación:

El modelo de evaluación contiene definiciones operacionales correspondientes a un esquema de puntuación basado en tres dimensiones: la originalidad, la fluidez y la flexibilidad. Además de hacer uso de los espacios de solución presentados en Leikin (2007).

La originalidad de una solución está definida en relación con la infrecuencia dentro del grupo objeto de estudio, por tanto, se propone: $O_{ri} = 10$ cuando $P < 15\%$, $O_{ri} = 1$ cuando $15\% \leq P \leq 40\%$, $O_{ri} = 0.1$ cuando $P \geq 40\%$. Donde *P* es el porcentaje de estudiantes del grupo que produce una solución particular. Para asignar un puntaje general a cada estudiante de acuerdo con las soluciones originales que aporta se suman los puntajes obtenidos de cada solución mediante la fórmula $O_r = \sum_{i=1}^{n} O_{r_i}$ donde n es el número de soluciones apropiadas en el espacio correspondiente.

En palabras de Leikin (2009): *"Las decisiones sobre el 15% y el 40% como límites entre los diferentes niveles de originalidad se basaron en el experimento… También comparamos los resultados de los exámenes escritos con el desempeño de los estudiantes en entrevistas individuales y discusiones en el aula. Encontramos que en las pruebas escritas estos porcentajes (15% y 40%) coinciden con bastante precisión con los diversos niveles de originalidad de las soluciones producidas y presentadas tanto durante las entrevistas como en la discusión en el aula"*[30].

En cuanto a la fluidez, Leikin (2009) la define como el número de soluciones en el espacio de soluciones individuales. La flexibilidad se evalúa en base a los grupos de soluciones en el espacio de soluciones expertos y se puntúa $Flx_k = 10$ para la primera solución apropiada, o si pertenece a un grupo diferente de las soluciones realizadas anteriormente. $Flx_i = 1$ si la solución pertenece a uno de los grupos utilizados anteriormente, pero tiene una clara distinción menor $Flx_i = 0.1$ si la solución es casi idéntica a una solución anterior. La sumatoria de todas puntuaciones de la flexibilidad da como resultado la flexibilidad total $Flx = \sum_{i=1}^{n} Flx_i$.

[30] Leikin, R. (2009). Exploring Mathematical Creativity. *Creativity in Mathematics and the Education*, p.136.

Posteriormente se define creatividad total y creatividad final de la siguiente manera: La creatividad total (Cr) de una solución particular es el producto de la originalidad y flexibilidad de la solución: $Cr_i = Flx_i \times Or_i$. La creatividad final (CR) es el producto de la fluidez por la creatividad total $CR = n(\sum_{i=1}^{n} Flx_i \times Or_i)$.

Esta propuesta de evaluación de la creatividad a través de actividades de soluciones múltiples brinda varias posibilidades no solo para evaluar y asignar un nivel de creatividad a un estudiante específico frente a un grupo determinado, sino que también permite evaluar las actividades teniendo en cuenta los espacios de solución de expertos.

Sin embargo, como el principal objetivo de este estudio es buscar las relaciones entre el pensamiento divergente y la creatividad, también se contabilizan y analizan las ideas y estrategias que se consideren potencialmente efectivas, que mediante un pequeño ajuste o adaptación puedan llegar a convertirse en ideas originales y efectivas.

2.4. Referentes sobre la teoría de resolución de problemas

La resolución de problemas constituye un enfoque poderoso para propiciar una robusta enseñanza aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles educativos. *"Si tuviéramos que sintetizar el espíritu de este enfoque, diríamos que el énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos resolutores de problemas. Al decir esto queremos resaltar el interés en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas, a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido matemático específico"*[31]. Estos criterios muestran la importancia de este enfoque para el aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria.

---

[31] Pochulu, M. y Rodríguez M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires. Argentina. p. 151.

Definiciones de problemas, estrategias y fases de resolución, se han abordado por diferentes investigadores en el área de la Educación Matemática, para formar la hoy conocida teoría de la resolución de problemas. Entre estos autores se tienen a Polya (1965); Krulik y Rudnik (1987), (1985); Schoenfeld (1985); Mason, Burton y Stacey (1988); Labarrere (1988); Campistrous y Rizo (1996); Sriraman y English (2010); Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012); Liljedahl y Santos-Trigo, (2019), entre otros.

Con respecto a la definición de problema Polya (1965) plantea que: *"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata"*[32]. Labarrere (1988) enuncia que: *"… un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar*[33]*".*

Por su parte Krulik y Rudnik (1987) afirman que: *"Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[34]. En la presente investigación se asume esta definición.

Los investigadores Campistrous y Rizo (1996); Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006); Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros, plantean diferentes rasgos (algunos de los cuales coinciden) que están presentes en las definiciones de problemas abordadas en la literatura. En esta investigación se asumen los rasgos propuestos por Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006):

- La existencia de condiciones iniciales o finales que exprese la necesidad de transformación.

---

[32] POLYA, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad México: Editorial Trillas. p.117

[33] Labarrere, A. (1988). Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. p. 6

[34] Krulik, S. y Rudnik, J. (1987). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon, p. 3.

- La vía que permite pasar de una situación a otra debe ser desconocida o, al menos, no ha de ser inmediatamente accesible.
- Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, teniendo presente que lo que puede ser un problema para uno puede no serlo para otro.
- Que el estudiante disponga de los elementos necesarios para realizar la transformación: nivel de conocimientos, habilidades y motivación.

Resolver un problema es una de las categorías más importantes para esta teoría. *Polya, (1962) asegura que "...resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"[35].*

Según Polya (1957) *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por medios propios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimir una huella imperecedera en la mente y en el carácter"[36].*

Pólya (1957), Schoenfeld (1985), Mason, Burton y Stacey (2010), entre otros, han propuesto fases o estrategias para el proceso de la resolución de problemas. En esta investigación se asume la propuesta por Polya (1957), la cual expresa en su libro: *How to solve it,* en cuatro etapas: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y revisión retrospectiva.

---

[35] Polya, G. (1962) Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York: Jhon Wiley p.6
[36] Polya, G. (1957). How to Solve It, second edition, recuperable 12 de 10 de 2021, de la URL: https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf, p.2

Motivar a los estudiantes a que aborden problemas desafiantes y que además tengan la posibilidad de obtener diferentes vías de solución, o diferentes soluciones, contribuye a que los estudiantes desarrollen habilidades como la fluidez y flexibilidad que esclarecen el camino para construir conexiones entre propiedades y conceptos matemáticos y por ende se ejercite el pensamiento divergente y se potencialice la creatividad.

A continuación, se explican cada una de estas fases contextualizadas al tipo de problemas que se abordarán en la presente investigación. Además, se proponen ciertas preguntas heurísticas (adaptadas de Ballester y otros 1992), que se les pueden formular a los estudiantes, en caso de presentar dificultades, para que sean capaces de ir a la búsqueda de las múltiples soluciones del problema de manera autónoma.

Orientación hacia el problema: esta fase es básica para la resolución de todo problema, pues aquí se debe garantizar *"… la búsqueda del problema o motivación, el planteamiento del problema y la comprensión del problema"*[37]. En este caso específico en el que los problemas tienen o bien distintas soluciones posibles o diferentes vías de solución, es necesario que los estudiantes piensen divergentemente para generar todo tipo de ideas, por tanto, algunas preguntas que se pueden formular con el ánimo de propiciar una mejor compresión son: ¿Qué se debe determinar?, ¿Qué datos están disponibles?, ¿Qué datos puedo determinar?, con los datos que se dispone ¿Que propiedades geométricas puedo aplicar?

Trabajo en el problema: en esta fase es necesario lograr "… *la precisión del problema, el análisis del problema y la búsqueda de la solución"*[38]. En esta etapa es donde la fluidez de ideas propuesta en la etapa anterior debe ponerse en marcha mediante estrategias de ataque al problema que permitan

[37] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 411.
[38] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. pp. 413 y 414.

solucionarlo, por esta razón es conveniente preguntar ¿este problema es semejante a un problema ya conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿es posible hacer alguna construcción auxiliar que simplifique el trabajo o que clarifique ideas? ¿Es posible trabajar un problema similar pero más simple?, ¿El problema se puede dividir en varios sub-problemas?, entre otras.

Solución del problema: en esta fase se valora *"… la realización del plan de solución y la representación de la solución"*[39]. Para lograr el éxito en esta fase el docente debe realizar las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede usted demostrarlo? En esta parte por lo general resulta importante aplicar el pensamiento convergente o razonamiento lógico a las ideas y estrategias propuestas para poder validar o descartar posibles soluciones.

Evaluación de la solución y de la vía: en esta fase se debe considerar la comprobación del problema, la cual se realiza en el texto del problema. En este momento se le sugiere al docente formular las siguientes interrogantes: ¿puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? Sin embargo, en esta etapa también es necesario motivar a los estudiantes a que exploren nuevas formas de solución del problema con preguntas como ¿habrá otra forma de resolver el problema?, ¿se pueden evitar algunos procedimientos? o ¿se puede hacer el problema de manera más simple?, ¿el problema se puede ver desde una nueva perspectiva? Como, por ejemplo, ver un problema geométrico desde un punto de vista aritmético o algebraico.

[39] Ballester, S. y otros (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática, Tomo I. La Habana. Ed. Pueblo y educación. p. 420.

La resolución de problemas resulta importante para la presente investigación ya que es la principal vía para el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad. Pero además en los procesos de solución también se presentan dificultades que se pueden ver como oportunidades para intervenir adecuadamente y hacer sugerencias a los estudiantes o simplemente clarificar y explicar conceptos.

Por otro lado, si bien la resolución de problemas se ha venido introduciendo cada vez más en los currículos y cada vez más profesores son conscientes de su aplicación en la clase de matemáticas. También es cierto que la mayoría de los problemas que se abordan son problemas con solución única y que, aunque en muchas ocasiones tienen distintas vías de solución estas no se hacen evidentes a los estudiantes. Por tanto, es necesario abordar este tipo de problemas en la clase y hacer evidentes todas sus posibles soluciones motivando el desarrollo de conexiones entre propiedades y conceptos matemáticos.

2.4.1. Problemas abiertos

Según Pehkonen (1997) el método de utilizar problemas abiertos en la clase de matemática se desarrolló en Japón en la década de 1970 y aproximadamente al mismo tiempo en Inglaterra este tipo de problemas se hizo popular y su idea fue difundida gracias al informe Cockcroft (1982) el cual plantea qué matemáticas deben saber los estudiantes de los niveles primario y secundario y cómo deben ser enseñadas. Ya para la década de 1980 la idea de proponer alguna forma de problemas abiertos ya se había extendido por todo el mundo y su exploración e investigación se empezó a desarrollar por varios autores como Nohda (1988), Pehkonen (1989), Silver (1989), Mason (1991), entre otros.

Para Pehkonen (1997) un problema es cerrado si su situación de partida y de llegada están cerradas, es decir que quien intenta resolver el problema, a pesar de que no conoce su solución, comprende claramente un procedimiento para determinar la solución y comúnmente no indaga otras posibilidades, es decir que un problema cerrado difícilmente activa el pensamiento divergente. Por el contrario, si la situación inicial y/o la situación final son abiertas entonces se tiene un problema abierto, el cual permite la exploración de muchas posibles soluciones diferentes.

Según varios investigadores como Pehkonen (1997), Leikin (2009), Silver (1997), Kwon (2006), entre otros, los problemas cerrados son los que principalmente se desarrollan en las matemáticas escolares y los libros tradicionales de texto y no dejan mucho espacio para el pensamiento creativo.

Por otra parte, Nohda (2000) hace una clasificación de este tipo de problemas como el que se sintetiza a continuación:

Problema con proceso abierto: este tipo de problema tiene múltiples formas correctas para conseguir resolver el problema original. En otras palabras, el procedimiento o estrategias de solución pueden variar, pero el resultado es único.

Los productos finales están abiertos: este tipo de problemas tiene múltiples soluciones, múltiples respuestas correctas. Es decir, que se parte de una situación inicial y hay múltiples posibilidades, estrategias y procedimientos para abordar una solución efectiva.

Las vías de desarrollo están abiertas: este tipo de problemas propone una situación inicial que no necesariamente debe estar completamente estructurada, permitiendo a los estudiantes proponer sus propias preguntas y problemas y mostrar diferentes interpretaciones y soluciones.

El término problema abierto en este documento, hace referencia a los problemas mencionados en esta sección en contextos escolares y no se debe confundir con los problemas abiertos de las matemáticas, los cuales son problemas de los que se conoce su formulación, pero se desconoce todavía su solución.

2.4.2. Problemas con múltiples soluciones

Los problemas con proceso abierto son ampliamente estudiados por Leikin (2007, 2008, 2012, 2018), los cuales ha llamado tareas con múltiples soluciones, estos tienen un requisito explícito para resolver un problema o demostrar un enunciado matemático de múltiples maneras (Leikin, 2012).

Según Leikin (2012) la diferencia entre las soluciones puede manifestarse en el uso de diferentes representaciones de un concepto matemático, en diferentes propiedades, definiciones, teoremas, construcciones auxiliares de conceptos matemáticos en un tema matemático concreto o en herramientas matemáticas y teoremas pertenecientes a diferentes ramas de las matemáticas.

Este tipo de problemas según Polya (1973), Shoenfeld (1988), NTCM (2000), son eficaces para la construcción del conocimiento matemático y por otro lado para la evaluación de conocimiento, las habilidades y la creatividad.

Los problemas que pueden resolverse o abordarse de varias maneras son necesarios en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que es bueno que los estudiantes vean múltiples soluciones, puesto que por lo general tienden a pensar en base a sus experiencias que solo hay una manera de resolver los problemas matemáticos. En este proceso es importante que los estudiantes vean que no solo el resultado final es lo que importa, sino que también son significativas las conexiones que se pueden obtener de los diferentes enfoques de las soluciones (Shoenfeld,1994).

La comprensión matemática va más allá de una colección de contenidos, reglas y definiciones separadas, por lo tanto, las conexiones entre varios temas, conceptos, representaciones y sus propiedades hacen que dichos aspectos tomen significado y que se vinculen nuevas ideas con las relacionadas (Sierpinska,1994). Esto puede alcanzarse al resolver problemas desafiantes buscando conceptos y procedimientos conocidos que puedan ayudar en situaciones nuevas (Leikin, 2012).

Finalmente, el abordaje de problemas con múltiples vías de solución promueve que los estudiantes generen varias ideas (fluidez) en relación a un problema, también permiten que se exploren nuevos procedimientos, estrategias y que el problema sea atacado desde distintos puntos de vista, es decir, permite el desarrollo de la flexibilidad y la superación de fijaciones y auto-restricciones (Haylock, 1987) y debido a la constante búsqueda de nuevas soluciones es más probable que se lleguen a desarrollar soluciones originales. Los tres aspectos, fluidez, flexibilidad y originalidad son característicos del desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad.

2.4.3. Problemas retadores

Los problemas retadores se consideran dentro de los problemas no rutinarios, este tipo de problema exige que el estudiante desarrolle su potencial creativo, además son propicios para el trabajo con múltiples soluciones.

En la tesis se asume lo expresado por Pérez (2004) al plantear que los problemas retadores *"… son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento"*[40]. También plantea que estos problemas *"exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior"*[41].

Una de las características de los problemas retadores es generar motivación e interés en los estudiantes, Falk (1980) expresa que es *"… una situación que estimule el pensamiento, que sea interesante para el*

[40] Pérez, F. (2004). Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

[41] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

alumno, y que la solución no sea inmediata"[42]. El proceso de resolución de un problema retador exige del estudiante integración de saberes, creatividad y sentido de pertenencia, cualidades necesarias para lograr el éxito en dicho proceso.

Falk (2001) plantea que un problema retador es aquel *"… cuya solución en el fondo exige que el estudiante establezca redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidas. Este aspecto hace una contribución a la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como a la investigación acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático en sí".*

En la literatura, los problemas retadores también son conocidos como problemas desafiantes, Leikin (2014) recopilando las ideas de Polya (1962); Schoenfeld (1985); Charles y Lester (1982) asegura que "*Un problema desafiante debe cumplir cuatro condiciones: En primer lugar, la persona que realiza la tarea tiene que estar motivada para encontrar una solución. En segundo lugar, la persona tiene que carecer de procedimientos disponibles para encontrar una solución. En tercer lugar, la persona tiene que hacer un intento y persistir para alcanzar una solución. En cuarto lugar, la tarea o situación tiene varios enfoques de solución"*[43].

Según Leikin (2014) la exigencia de múltiples soluciones transforma un problema convencional o rutinario en uno desafiante y no convencional. Además, promueve el desarrollo de conocimiento matemático, la flexibilidad mental y el pensamiento crítico, que de cierta manera contribuyen a profundizar en la comprensión matemática, ya que conducen a conexiones matemáticas de diferentes tipos.

El reto matemático está determinado por el nivel de familiaridad de los estudiantes con las estrategias que pueden utilizar, puesto que deben establecer conexiones entre lo que saben y las ideas que surgen

[42]Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. p. 16.
[43] Leikin R. (2014) Challenging Mathematics with Multiple Solution Tasks and Mathematical Investigations in Geometry. In: Li Y., Silver E., Li S. (eds) Transforming Mathematics Instruction. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham. P. 62

para solucionar el problema, conexiones que requieren un pensamiento creativo. Un problema cuya estrategia de solución es algorítmica puede promover nuevos enfoques cuando debe ser resuelto de varias maneras.

Sin embargo, un reto matemático es subjetivo, puesto que esto depende de las habilidades y conocimientos de los estudiantes. Además, un reto matemático también es relativo, puesto que mientras que un problema es un reto para el estudiante A, puede ser demasiado fácil y poco desafiante para el estudiante B, y el mismo problema puede ser demasiado desafiante para el estudiante C (Leikin, 2014).

Es común ver, cuando se trabajan problemas con múltiples soluciones, que algunos estudiantes encuentren una solución al problema rápidamente, mientras que a otros les cueste trabajo y tiempo. Pero también sucede que luego de que un estudiante encuentra la primera solución fácilmente se complica buscando nuevas posibilidades y el problema se convierte en un reto, mientras que aquel que le costó trabajo encontrar la primera solución, tal vez se desatasque y fluyan varias ideas. Es aquí donde está la riqueza de trabajar con este tipo de problemas.

Por supuesto que en la presente investigación se asumen los problemas con múltiples vías de solución y con múltiples soluciones como problemas retadores, teniendo en cuenta la naturaleza relativa de lo que se considera un reto en matemáticas escolares y de la creatividad matemática. Además, porque este tipo de problemas en geometría *"se encuentran entre los enfoques didácticos que conducen al desarrollo del conocimiento de la geometría"*[44].

2.5. Fundamentos de la visualización matemática

44 Leikin R. (2014) Challenging Mathematics with Multiple Solution Tasks and Mathematical Investigations in Geometry. In: Li Y., Silver E., Li S. (eds) Transforming Mathematics Instruction. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham. P. 70

A finales del siglo XIX se generó gran controversia por el surgimiento de las geometrías no euclidianas, las cuales trajeron varios cuestionamientos sobre las verdades matemáticas. También, se generaron dudas en relación a la existencia de los entes matemáticos, ya que se tenía la creencia de que la cuestión de existencia podría responderse si algo podía ser interpretado geométricamente.

Ante esta situación los matemáticos reaccionaron con desconfianza hacia la intuición, lo que conlleva posteriormente al fortalecimiento de la lógica y la aritmetización de la matemática. Esto desencadenó en una tendencia a dejar de lado los procesos de visualización para abordar los problemas matemáticos, incluso considerando la visualización como un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas.

Sin embargo, la posibilidad de hacer gráficos detallados en el computador junto con estudios sobre el desarrollo de la mente, hicieron que investigadores en la educación matemática prestaran atención por la importancia de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Presmeg, 2006).

Investigadores como Del Grande, (1990); Zimmermann y Cunningham (1991); De Guzmán, (1996); Duval (1999); Arcavi (2003); Presmeg (2006); Arzarello (2021), han estudiado la visualización matemática, sus definiciones, habilidades y estrategias para su uso en el aula de clases. Además, ellos abordan su importancia en los diferentes niveles educativos.

A continuación, se referencian algunas definiciones e ideas que se consideran importantes:

Zimmermann y Cunningham (1991) declaran que: *"… la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática"*[45]. Además, plantean que la visualización sirve para *"…describir los procesos de producción o uso de representaciones geométricas de conceptos matemáticos, principios o problemas, tanto si se dibujan a mano, como si se*

[45] Zimmermann and Cunningham, (1991). What Is Mathematical Visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Eds. *MAA Notes Number* 19, 1991, p. 3.

generaran por ordenador"[46].

Por su parte, Presmeg (2006) afirma que la visualización "… *incluye procesos tanto de construcción como de transformación de imágenes visuales que nos hacemos en la mente y todas las inscripciones de naturaleza espacial que podrían estar implicadas en el quehacer matemático"*[47]*.* Lo que es consecuente con Cantoral y Espinosa (2001) quienes consideran que la visualización es una habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.

De Guzmán (1996) aporta que *"… la visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático"*[48]*.*

Para Hitt (2002) *"La visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede conducir al resolutor a profundizar en la situación que se está tratando. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado"*[49]*.*

En esta investigación se asume la definición dada por Arcavi (2003), pues considera que la visualización *"… es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras,*

---

[46] Zimmermann and Cunningham, (1991). What Is Mathematical Visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Eds. MAA Notes Number 19, 1991, p. 1.

[47] Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (pp. 205-236). Rotterdam: Sense p.219.

[48] De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p. 3.

[49] Hitt, F. (2002). Representations and mathematics visualization. North American Chapter of IGPME, Cinvestav-IPN, México. pág. viii

imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión"[50].

Los rasgos que caracterizan las distintas definiciones de visualización propuestas por Zimmermann y Cunningham, (1991); De Guzmán (1996); Cantoral y Espinoza, (2001); Hitt (2002); Arcavi (2003); Presmeg (2006), entre otros, se concretan según Rojas (2009) en:

- La existencia de imágenes mentales que se corresponden entre sí y generan el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos geométricos.
- Involucran el pensamiento matemático.
- Proceso representable que permite comunicar información del quehacer matemático.
- Brinda forma mental o física a ciertos conceptos, procesos y problemas geométricos.

Estas características se reflejan y se consideran en los problemas de cada una de las actividades de la tesis. Del mismo modo, las representaciones e imágenes visuales sustentan la visualización matemática. La imagen visual en el contexto escolar tiene ciertas características (De Guzmán, 1996).

- Matriz de la que surgen los conceptos y métodos para la geometría.
- Estimuladora de problemas de interés relacionados con los objetos de la geometría.
- Propicia la generación de relaciones entre los elementos dados para la resolución de los problemas geométricos.
- Permite la transmisión eficaz de las ideas geométricas.

Las imágenes mentales constituyen un apoyo a la visualización matemática, según Presmeg (1986) estas

[50] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics 52: 215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 217

se clasifican en:

- Imágenes concretas que son figurativas de objetos físicos.
- Imágenes de fórmulas que son representadas por relaciones esquemáticas.
- Imágenes de patrones a través de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas.
- Imágenes dinámicas en la que las figuras geométricas o algunos de sus elementos se desplazan.

Por otra parte, Del Grande (1990) define las habilidades de la visualización matemática y actividades para desarrollar en cada una. Estas habilidades se ajustan para la resolución de problemas con múltiples soluciones, donde se imbrique la creatividad matemática.

- Coordinación ojo-motor: seguir caminos con un lápiz, construir bloques según un dibujo, colorear regiones, entre otras.
- Conservación de la percepción: percibir la constancia en forma, tamaño, constancia de forma con percepción de figura y espacio.
- Percepción figura-contexto: localizar figuras escondidas, formar figuras ensambladas e invertir una figura respecto al contexto.
- Percepción de la posición en el espacio: realizar inversiones y rotaciones, cambiar posiciones, desarrollar simetrías, entre otras.
- Percepción de relaciones espaciales: relacionar la posición de dos o más objetos, completar una figura, completar secuencias, construir una figura de cubos.
- Discriminación visual: identificar un objeto que es diferente de otros o varios objetos que son los mismos pero diferentes entre otros.

Estos insumos teóricos permiten concretar un aspecto pertinente y relevante a tener en cuenta en la búsqueda de las relaciones, diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad, puesto que los procesos de visualización permiten explorar y desarrollar:

- El significado y el sentido de los objetos geométricos y sus interrelaciones en el proceso de búsqueda de diferentes vías de solución a un problema.
- Diversas construcciones auxiliares que permiten revelar propiedades y evitar cálculos.
- La identificación y representación de propiedades y conceptos básicos a través de imágenes, dibujos, figuras que contribuyen al proceso creativo del estudiante.
- El pensamiento geométrico.

Por otra parte, los problemas geométricos con múltiples vías de solución o múltiples soluciones permiten establecer conexiones entre representaciones visuales que normalmente deben complementarse con explicaciones numéricas o verbales, lo que contribuye a la flexibilidad del pensamiento, aspecto importante para desarrollar la creatividad.

La visualización promueve la construcción de líneas auxiliares, lo que constituye un puente entre lo que el estudiante conoce de una figura geométrica y lo que puede inferir o deducir. El atreverse a dibujar diferentes líneas auxiliares en un mismo problema puede servir para desarrollar la fluidez de ideas y llegar a generar ideas originales, producto de observaciones cada vez más agudas y perspicaces.

Finalmente, se puede asegurar que los procesos de visualización rescatan el carácter intuitivo de la geometría y mediante la implementación de problemas con múltiples vías de solución se convierten en herramientas que favorecen tanto el pensamiento divergente como la consecución de ideas creativas.

1.5. Conclusiones del capítulo 2

Las bases teóricas sobre la creatividad y el pensamiento divergente en el ámbito general y en el específico de las matemáticas, tienen orígenes filosóficos y psicológicos que son pertinentes para la consecución de definiciones operacionales, así como para adopción y ajuste de modelos que permitan evaluar la creatividad.

La fluidez, la flexibilidad y la originalidad se presentan como aspectos de la producción divergente que desarrollan procesos creativos.

Las pruebas de pensamiento divergente constituyen una herramienta útil no solo para predecir el potencial creativo, sino que también son útiles para promover el desarrollo de habilidades que regularmente no se tienen en cuenta en los currículos escolares.

En la investigación en educación matemática este desarrollo se hace evidente mediante la resolución de problemas con un enfoque abierto, dentro de los que se encuentran los problemas con múltiples vías de solución y los problemas con múltiples soluciones.

Las teorías e investigaciones sobre la resolución de problemas han determinado que para que un problema genere conocimiento y procesos creativos debe ser desafiante, o en otras palabras representar un reto a quien lo intenta resolver.

Cuando se combinan los problemas retadores junto con el ingrediente adicional de las múltiples vías de solución o múltiples soluciones, se obtiene una herramienta que promueve varios focos de atención, entre los que se destacan la cantidad y variedad de ideas generadas por los estudiantes, así como también su originalidad, lo que se pueden considerar piezas claves para el desarrollo de la creatividad en las aulas de matemáticas en el nivel de secundaria.

En particular en la geometría, el trabajo con este tipo de problemas favorece procesos de visualización, donde el estudiante se ve involucrado en situaciones donde es necesario establecer relaciones entre diferentes conceptos y propiedades que desarrollan la intuición y promueven la construcción de líneas auxiliares, configuración y reconfiguración de figuras, identificación de simetrías, aplicación de rotaciones, entre otros, que en definitiva desarrollan el pensamiento geométrico.

En conclusión, la consolidación de fundamentos teóricos relacionados con el tema permite adoptar posturas en cuanto a definiciones, enfoques de investigación, modelos, tipos de problemas, relaciones entre teorías y demarcar un camino a seguir en la investigación que conlleve a partir del análisis a diseñar, proponer y ejecutar nuevas ideas e hipótesis relacionadas con el objetivo de la investigación.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para el estudio del pensamiento divergente y la creatividad en el proceso de resolución de problemas geométricos, en la presente investigación se asume un enfoque de investigación mixto con un diseño de investigación acción. Además, en este capítulo se valora la población, la muestra y las fases a seguir.

3.1. Diseño metodológico

Se considera que difícilmente la creatividad pueda ajustarse únicamente a métodos cualitativos o cuantitativos debido a su carácter impredecible y espontáneo; por tanto, la investigación se concreta en un enfoque mixto de investigación (cualitativo-cuantitativo).

Por otra parte, el diseño de investigación acción "… *constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula*"[51]. Por lo que se infiere que este diseño permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente en el aula.

Este diseño permite investigar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, para perfeccionar y enriquecer la resolución de problemas geométricos con múltiples vías de solución, con el fin de determinar avances en las diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad en los estudiantes de secundaria. Además, como resultado se propicia la experimentación, búsqueda y exploración del contenido geométrico, que a la vez estimule y permita el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad. También, la forma cómo se concibe este diseño para investigar en el aula contribuye a mejorar las actividades propuestas, a partir de las posibilidades que tienen los estudiantes de plantear, expresar y comprobar sus ideas, compartirlas y confrontarlas, durante el proceso de resolución de problemas.

[51] Minerva, F. (2006). El proceso de investigación científica. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

3.2. Métodos teóricos y empíricos, técnicas e instrumentos

En la investigación se aplican los métodos teóricos histórico - lógico, análisis- síntesis y análisis de fuentes.

Histórico – lógico. Lo histórico está relacionado con el estudio de la trayectoria real de los fenómenos y acontecimientos en el curso de una etapa o período, lo lógico se ocupa de investigar las leyes generales del funcionamiento y desarrollo del fenómeno y estudia su esencia.

Lo lógico y lo histórico se complementan y vinculan mútuamente. Para poder descubrir las leyes fundamentales de los fenómenos, el método lógico debe basarse en los datos que proporciona el método histórico, de manera que no constituya un simple razonamiento especulativo. De igual modo lo histórico no debe limitarse sólo a la simple descripción de los hechos, sino también debe descubrir la lógica objetiva del desarrollo histórico del objeto de investigación.

Análisis-síntesis. De acuerdo con García (2014) el análisis es una operación intelectual que posibilita descomponer mentalmente un todo complejo en sus partes, cualidades, relaciones y componentes, y la síntesis es la operación inversa que establece mentalmente la unión entre las partes previamente analizadas y posibilita descubrir relaciones y características generales entre los elementos de la realidad.

Análisis de fuentes. Esto se usa para constatar el estado del arte y sentar las bases teóricas que sustentan la investigación.

En la presente investigación se utilizan los siguientes métodos empíricos:

La observación participante: observación de clases para obtener información sobre los procesos divergentes hacia la consecución de ideas originales en el colegio Virginia Gutiérrez de Pineda.

Entrevista: se utilizan para conocer el criterio de especialistas en el tema en cuanto al diseño de problemas y estructura de la investigación.

Encuesta: a los profesores de matemáticas para obtener información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en el nivel secundario en el que se imbrique el pensamiento divergente y la creatividad.

Test: aplicados a los estudiantes para conocer las habilidades relacionadas con el pensamiento divergente y la creatividad.

Instrumentos de contenido (problemas): se elaboran 11 actividades compuestas por problemas de múltiples vías de solución o múltiples soluciones, las cuales permiten la consecución del objetivo general.

3.4. Población y muestra

La población está compuesta por los estudiantes de secundaria del Colegio Virginia Gutiérrez de Pineda de la localidad de Suba, UPZ el Rincón, en el barrio Gloria Lara. El colegio tiene un total de 2200 estudiantes, unos 1200 de ellos en bachillerato y el resto en primaria, con dos y en algunos casos tres grupos por cada grado, de sexto a undécimo. Aproximadamente un 57% son mujeres y 43% son hombres.

La muestra está conformada por estudiantes de grado octavo a grado once.

3.5. Fases de la investigación

Para guiar la investigación se plantean cuatro fases: preparatoria, trabajo de campo, analítica e informativa. A continuación, se explican cada una de estas fases con sus respectivas acciones.

Fase preparatoria. En esta fase se presentan los elementos que permiten abordar el problema de investigación. Para ello se implementan los siguientes pasos.

1. Diseño de instrumentos: observación participante, encuesta, entrevista a especialistas.
2. Planteamiento inicial del problema de investigación y el objetivo general.

3. Búsqueda exhaustiva del estado del arte, la cual permite confirmar el problema de investigación, reestructurar el objetivo general y determinar las tendencias actuales.
4. Establecimiento del marco teórico y la metodología de la investigación apropiada.
5. Elaboración de la propuesta de actividades de la investigación.

Trabajo de campo. En esta fase se aplican los instrumentos diseñados, así como las actividades propuestas para complementar el objetivo de la investigación. Además, se validan las actividades.

Fase analítica. En esta fase se recogen los datos arrojados por los instrumentos y se analizan las diferentes actividades, considerando las ideas y anotaciones propuestas en las soluciones desarrolladas por los estudiantes. Se elabora el aporte teórico de la investigación.

Fase informativa. En esta fase se comunican los resultados de la investigación a partir de la sustentación de la tesis ante el jurado, la presentación de avances y resultados en congresos y eventos, y la publicación de los principales hallazgos en revistas indexadas.

1.6. Conclusiones del capítulo 3

El enfoque mixto permite ser flexible durante las fases de desarrollo de la investigación y, sí es necesario, devolverse, para ajustar las preguntas, planteamiento del problema, hipótesis, métodos de recolección de datos, entre otros. Además, su diseño de investigación de forma circular permite ir aplicando instrumentos e irlos afinando mientras se investiga.

Además, este enfoque se nutre de la revisión de la literatura, la cual puede complementarse en cualquier etapa del estudio, con el fin de apoyar o descartar nuevas hipótesis desde el planteamiento del problema hasta la elaboración de resultados.

CAPÍTULO 4. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA FAVORECER EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS A TRAVÉS DEL PENSAMIENTO DIVERGENTE Y LA CREATIVIDAD

A continuación, se describe el proceso de concepción del sistema de actividades y su sustento teórico. Se expone el tema, el objetivo, sugerencias metodológicas, materiales a utilizar y desarrollo de las actividades. Finalmente, se presenta el sistema de actividades.

1.3. Fundamentos del sistema de actividades desde el marco teórico

Los problemas propuestos y el diseño de las actividades obedecen a la exploración de diferentes aspectos como: la implementación de actividades exploratorias (ver Anexo 1), encuestas con docentes de secundaria (ver Anexo 2), entrevistas con investigadores en educación matemática (ver Anexo 3), quienes no solo aportaron sugerencias y ajustes, sino que avalaron el sistema de actividades. También se tuvieron en cuenta las investigaciones sobre creatividad en educación matemática mediante problemas no rutinarios con múltiples vías de solución o problemas abiertos de Kwon, Park, & Park (2006); Leikin & Lev (2007); Leikin & Levav-Waynberg (2008); Pitta-Pantazi, Paraskevi, & Constantinos (2012); Fortes, E. C., & Andrade, R. R. (2019), Gridos, P., Athanasios, G., Iliada, E., & Eleni Deliyianni. (2019), Gridos, P., & Avgerinos, E. (2021) entre otros.

Con base en lo anterior, se propone un sistema de actividades que busca promover el pensamiento divergente y la creatividad mediante problemas que permitan explorar distintas alternativas para llegar a la solución o soluciones.

Específicamente en el ámbito de la geometría escolar, los problemas que promueven el trazado de líneas auxiliares, la composición, recomposición y comparación de figuras, así como procesos en los que los estudiantes tienen que aplicar simetrías, rotaciones y/o traslaciones antes de tener que aplicar métodos algorítmicos son ideales para la generación de ideas y permiten a los estudiantes desarrollar su pensamiento flexible.

Por tanto, en el presente sistema de actividades se ha optado por proponer a los estudiantes problemas ya sea con múltiples vías de solución y hacer explícito este requisito, o bien proponerles problemas con muchas o infinitas soluciones. En el siguiente esquema (Figura 4) se muestra como el sistema de actividades se relaciona con el marco teórico.

Figura 4. Relación entre el marco teórico y el sistema de actividades

4.2. Propuesta del sistema de actividades

La propuesta de actividades considera el tema de la creatividad geométrica. Se interesa especialmente en su desarrollo a partir del pensamiento divergente, por tanto, se hace importante que los problemas promuevan la fluidez de ideas y la flexibilidad en relación con la utilización de diferentes estrategias para llegar a la solución, y finalmente que se generen ideas originales con el ánimo de concretar soluciones creativas.

Por otra parte, en cuanto a las sugerencias metodológicas, en cada una de las actividades se expone una pequeña explicación de los problemas a los estudiantes, con el fin de que comprendan de manera clara lo que el problema requiere hacer y se aclaran dudas en cuanto a las posibilidades de solución que propongan. También se indaga en el acto, mediante cuestionamientos o se pide aclaración en los casos en los que los estudiantes aporten ideas o estrategias fuera de lo común o potencialmente creativas.

A cada estudiante se le facilitan hojas con el problema copiado varias veces, con el fin de promover libremente el desarrollo de ideas, hacer construcciones auxiliares, equivocarse y continuar en otra figura del problema nueva. De esta manera también queda evidencia de los intentos fallidos que posteriormente se analizarán. Al finalizar cada actividad los estudiantes tienen un espacio en las hojas para explicar ideas o estrategias con sus propias palabras, o bien en la fase de análisis se entrevistan cuando es necesario. En las actividades 9, 10 y 11, además de las fotocopias, se les aporta varillas de pasta y plastilina para que los estudiantes puedan explorar las diferentes soluciones y luego dibujarlas.

Acerca de la propuesta de actividades

A continuación, se presentan factores diferenciadores que caracterizan la propuesta de actividades en la presente investigación:

- Se proponen problemas que son accesibles a todos los estudiantes de secundaria, no solo a estudiantes superdotados o con niveles avanzados en matemáticas.
- La propuesta de actividades aborda problemas con múltiples soluciones y problemas con infinitas soluciones.
- Se proponen actividades relacionadas con geometría del espacio las cuales no son comunes en la literatura.
- Se tienen en cuenta todas las ideas de los estudiantes, no solo las ideas efectivas.
- Metodológicamente se les brinda a los estudiantes material suficiente, para que se puedan equivocar y que se tenga la evidencia de la equivocación o de sus ideas.

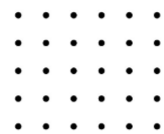
En seguida, se hace una breve descripción de las actividades.

Desarrollo de las actividades

1.4. Actividad # 1. Uniendo puntos

Objetivo: Desarrollar la fluidez de ideas y el desarrollo de estrategias de rotación, traslación y simetría.

Problema: A partir de una cuadrícula de puntos de 5 por 6 como la que se muestra en la figura, dibujar una sola línea que comienza y termina en el mismo punto, respetando las siguientes reglas:

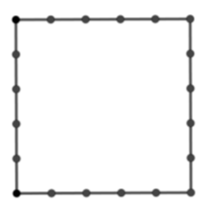


1.Los puntos se pueden conectar solo horizontal y verticalmente. 2. La línea no puede cruzarse en ninguna parte en ningún punto. 3. La línea debe pasar por todos los 30 puntos.

1.5. Actividad # 2. Cuadrado cinco áreas

Objetivo: Promover la comparación, descomposición y recomposición de figuras de igual área.

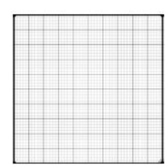
Problema: Divide el cuadrado en cinco partes de igual área. Encontrar tantas soluciones diferentes como sea posible.



1.6. Actividad # 3. Cuatro partes congruentes

Objetivo: Desarrollar disecciones a partir de procesos de visualización, establecimiento de simetrías, rotaciones y conservación de área y forma.

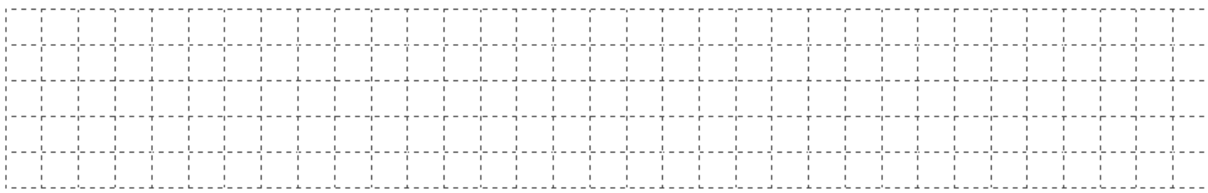
Problema: Muestre varias formas de dividir un cuadrado en cuatro partes congruentes, es decir, de igual forma y tamaño.



1.7. Actividad # 4. Figuras de igual perímetro

Objetivo: Aplicar propiedades geométricas para construir diferentes figuras con igual perímetro.

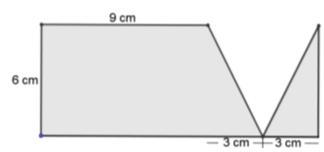
Problema: Cada cuadrado en la cuadrícula corresponde a una unidad, construye todas las figuras de perímetro 24 unidades, sin importar su forma, que se te puedan ocurrir.



1.8. Actividad # 5. Área cuadrilátero triangulo.

Objetivo: Promover la construcción de líneas auxiliares, para determinar el área de diferentes maneras de una figura compuesta por un cuadrilátero y un triángulo.

Problema: Encuentre varias formas diferentes de determinar su área.

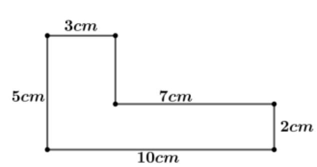


Determina el área de la figura de todas las maneras que puedas y describe con tus palabras tus ideas lo más detalladamente posible.

1.9. Actividad # 6. Área hexágono L

Objetivo: Promover la construcción de líneas auxiliares, para determinar el área de diferentes maneras de un hexágono irregular cóncavo.

Problema: Dado el hexágono encuentre varias formas diferentes de determinar su área.



1.10. Actividad # 7. Área hexágono regular

Objetivo: Hacer construcciones auxiliares y aplicar diferentes propiedades geométricas para determinar el área de un hexágono regular de varias maneras.

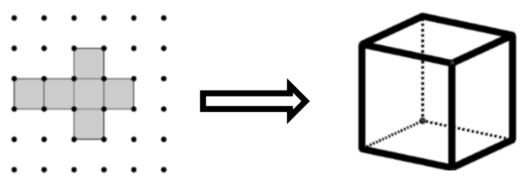
Problema: Dado un hexágono regular de lado 6 cm encuentre varias formas de determinar su área.

Determina el área del hexágono de todas las maneras en que puedas y describe con tus palabras tus ideas lo más detalladamente posible.

1.11. Actividad # 8. Plantillas del cubo

Objetivo: Aplicar propiedades geométricas y hacer uso de la visualización para construir diferentes plantillas 2D con las que se pueda construir un cubo 3D

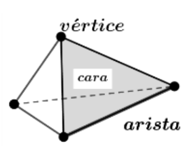
Problema: A continuación, se muestra en la rejilla de puntos una de las plantillas con la que podemos recortar y construir un cubo. Utiliza las rejillas que se presentan a continuación para determinar todas las plantillas con las que se podría construir un cubo, diferentes a la que se mostró en el ejemplo.



1.12. Actividad # 9. Poliedros y aristas.

Objetivo: desarrollar la visualización para configurar poliedros con un número de aristas fijo.

Problema: La figura muestra un punto vértice, un polígono sombreado que constituye una cara y un segmento que constituye una arista del poliedro. Dibuje todos los posibles poliedros que se puedan configurar, que tengan exactamente 12 aristas.



1.13. Actividad # 10. Poliedros y caras.

Objetivo: desarrollar la visualización para configurar poliedros con un número de caras fijo.

Problema: Dibuje todos los posibles poliedros que tengan exactamente 6 caras.

1.14. Actividad # 11. Poliedros y vértices

Objetivo: desarrollar la visualización para configurar poliedros con un número de vértices fijo.

Problema: Dibuje todos los posibles poliedros que tengan exactamente 6 vértices.

1.7. Conclusiones del capítulo 4

Mediante la aplicación de estudios exploratorios y las sugerencias de especialistas se ha concebido un sistema de actividades que permite explorar la creatividad geométrica a partir de la generación de varias ideas, es decir, promoviendo el pensamiento divergente. Por lo tanto, se han ajustado y diseñado problemas retadores ya sea con múltiples vías de solución o con múltiples soluciones. El requisito explícito de encontrar varias soluciones se convierte en un reto y una posibilidad para establecer conexiones entre diferentes nociones, conceptos y propiedades geométricas, además de que conduce a los estudiantes a tener que razonar antes de aplicar procedimientos algorítmicos.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, se presenta el proceso de validación del sistema de actividades, el análisis de los resultados de los instrumentos, así como del sistema de actividades. Finalmente se presenta una propuesta de definiciones que permiten la consecución de los avances en la caracterización de las diferencias, relaciones y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

5.1. Validación del sistema de actividades

Posterior a la aplicación de diferentes pruebas piloto de problemas implementados con diferentes estudiantes de secundaria y su respectivo análisis, se diseñó la propuesta del sistema de actividades que permitiera hacer la caracterización.

En primer lugar, el sistema de actividades fue validado mediante el criterio de especialistas de reconocida trayectoria en el campo de las matemáticas y la educación matemática, a saber Dr. José Carlos Leiva (Brasil), Bernardo Recaman Santos (Colombia), Dra. Mary Falk De Losada (Colombia), Dr. Juan E. Nápoles (Argentina) y el Dr. Miguel Cruz Ramírez (Cuba), quienes aportaron desde su experiencia, sugerencias que permitieron mejorar las actividades en relación con:

- El diseño de las actividades de tal forma que se permitiera evidenciar no solo el producto, sino también el proceso creativo. En este sentido, se optó por diseñar las actividades donde fuera posible evidenciar no solo los aciertos de los estudiantes, sino todo tipo de ideas que produjeran. Además de hacer un registro mediante videos y fotografías del proceso creativo de los estudiantes y su relación con el pensamiento divergente.
- Ideas para el análisis de las actividades no solo desde el pensamiento divergente, sino también involucrando el pensamiento convergente.
- Sugerencias bibliográficas relacionadas con posibles problemas que desarrollan la creatividad y el pensamiento divergente.

- Referencias a problemas reconocidos en la historia de las matemáticas en los que se puede apreciar tanto el pensamiento divergente como la creatividad.

Finalmente, los evaluadores dieron un balance positivo al sistema de actividades y aprobaron los problemas, consensuando que permiten y promueven el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad, por tanto, son pertinentes para avanzar en la caracterización del objetivo de esta investigación.

En segundo lugar, el sistema de actividades se validó en la práctica, donde se pudo verificar (ver epígrafe 5.3) que los problemas permiten medir la fluidez, flexibilidad y originalidad, aspectos del pensamiento divergente y la creatividad que brindan insumos para avanzar en la caracterización.

5.2. Análisis de los resultados de los instrumentos

Se aplicaron actividades exploratorias, una encuesta a docentes y una entrevista a investigadores. Estos instrumentos aportaron problemas, necesidades y sugerencias que se tuvieron en cuenta para el avance en la caracterización propuesta. A continuación, se presentan algunos de los aspectos que se consideran de relevancia para la investigación:

- Las actividades exploratorias permitieron identificar qué tipo de problemas promueven de forma evidente el desarrollo de variabilidad de ideas, es decir, de pensamiento divergente. Por otro lado, también permitieron identificar el nivel de dificultad de los problemas apropiado para la población objetivo.
- En cuanto a la encuesta a docentes, permitió evidenciar la necesidad de plantear problemas originales, así como implementar actividades con problemas que se desarrollaran con material concreto.

- Por otra parte, los docentes hacen énfasis en que se debe regular el nivel de dificultad de los problemas propuestos, ya que en muchos casos un problema muy complicado puede frustrar a los estudiantes o uno muy sencillo puede hacerles perder el interés.
- Finalmente, las entrevistas con investigadores aportaron algunas características para la consecución de los problemas, ya que se advirtió que los problemas tendrían que fomentar la creación de procedimientos nuevos y no de simple inspección y aplicación de algoritmos. También se acogió la sugerencia de que los problemas tendrían que generar una interpretación, reflexión y análisis antes de empezar a resolverlos.

5.3. Análisis de resultados de la aplicación del sistema de actividades.

A continuación, se realiza el análisis de la aplicación de las actividades. Para este proceso se hace una introducción de cada uno de los problemas, posteriormente se hace un análisis de los aspectos de la fluidez, flexibilidad y la originalidad y finalmente en las conclusiones se relatan los aportes de cada actividad a la caracterización de las relaciones y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

Cabe resaltar que en la fluidez se hace un análisis de las ideas efectivas y no efectivas, en cuanto a la flexibilidad se hace un análisis de las estrategias de solución de los estudiantes siguiendo los planteamientos de Leikin (2007) y en la originalidad se analizan las soluciones en consonancia con lo que propone Leikin (2009). Sin embargo, en las actividades que así lo permiten también se analizaron las ideas potencialmente creativas.

5.3.1. Análisis de la actividad 1. Uniendo puntos.

El problema propuesto por Baggett & Ehrenfeucht (2019) fue desarrollado para trabajar áreas y perímetros. Sin embargo, se ha adaptado en este estudio para observar y desarrollar el pensamiento divergente y la creatividad. A continuación, se muestran las soluciones conocidas hasta el momento según Baggett & Ehrenfeucht (2019) clasificadas en tres categorías:

- Categoría 1. Soluciones con dos cuadrados en la columna del centro (ver Figura 5).
- Categoría 2. Soluciones con tres cuadrados en la columna del centro (ver Figura 6).
- Categoría 3. Soluciones con cuatro cuadrados en la columna del centro (ver Figura 7).

Es de resaltar que se ha añadido una codificación a cada solución lo que permitió su análisis posterior.

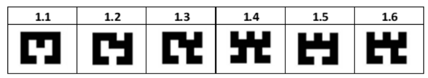


Figura 5. Categoría 1. Soluciones con dos cuadrados en la columna del centro. Tomado de Baggett & Ehrenfeucht (2019)

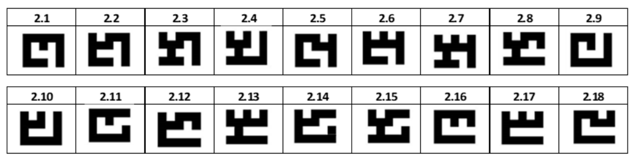


Figura 6. Categoría 2. Soluciones con tres cuadrados en la columna del centro. Tomado de Baggett & Ehrenfeucht (2019)

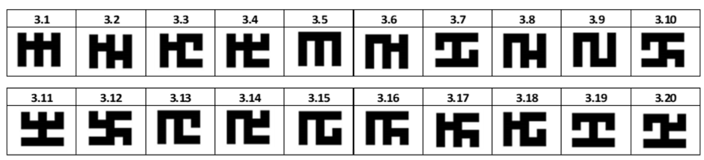


Figura 7. Categoría 3. Soluciones con cuatro cuadrados en la columna del centro. Tomado de Baggett & Ehrenfeucht (2019)

Se ha encontrado en el análisis de esta actividad que el proceso creativo a partir de problemas que promueven el pensamiento divergente lleva un proceso gradual, que inicia con intentos mediante estrategias de ensayo y error, y posteriormente se van involucrando algunos conceptos geométricos, los cuales se aplican para llegar a soluciones convencionales. Luego algunos estudiantes partieron de dichas soluciones y crearon diferentes estrategias que les permitieron encontrar soluciones nuevas. De esta manera se van reuniendo los elementos necesarios para posteriormente construir soluciones no solo eficaces sino también originales, lo que se considera en este estudio como soluciones creativas. A continuación, se muestran algunos de los desarrollos hechos por los estudiantes.

Uno de los estudiantes presentó una gran cantidad de ideas, sin embargo, no logró configurar una idea eficaz, es decir, no obtuvo ninguna solución. La Figura 8 muestra algunas de sus 54 ideas, siendo este estudiante quien registró el mayor número de intentos, todos fallidos.

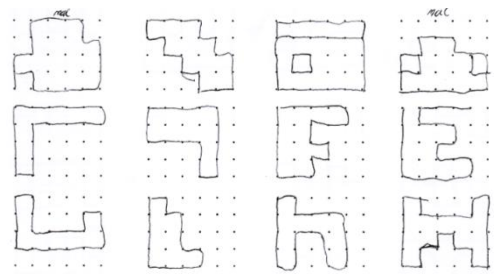


Figura 8. Soluciones del estudiante

Así mismo, se puede observar en la Figura 9 algunas de las 18 soluciones y de los 42 intentos fallidos que presentó otro estudiante. Sin embargo, se puede observar que a partir de una solución logra conseguir nuevas soluciones por medio de la rotación.

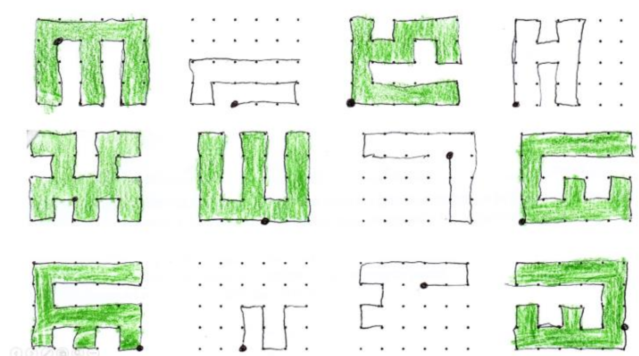


Figura 9. Soluciones del estudiante

En la Figura 10 se puede observar algunas de las 19 soluciones y 21 intentos fallidos de un estudiante, quien obtuvo mayor número de soluciones y presentó algunas soluciones originales en relación con todo el grupo, como la obtenida en la primera columna con la tercera fila, la cual tiene forma de “s” acostada. En las soluciones se puede observar la estrategia de rotación, para obtener una nueva solución.

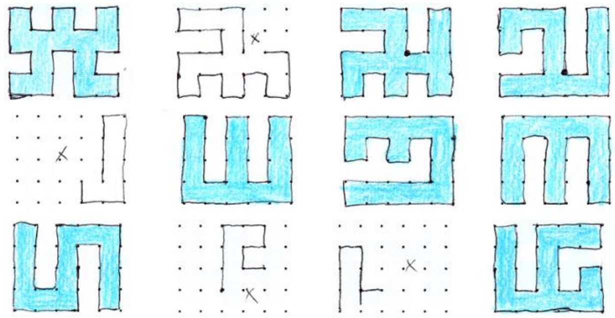


Figura 10. Algunas ideas del estudiante con mayor número de soluciones.

En resumen y como ya se había mencionado anteriormente, los estudiantes parten del ensayo y error logrando soluciones convencionales y luego van incorporando algunos conceptos geométricos para generar nuevas soluciones, como se muestra en la Figura 11.

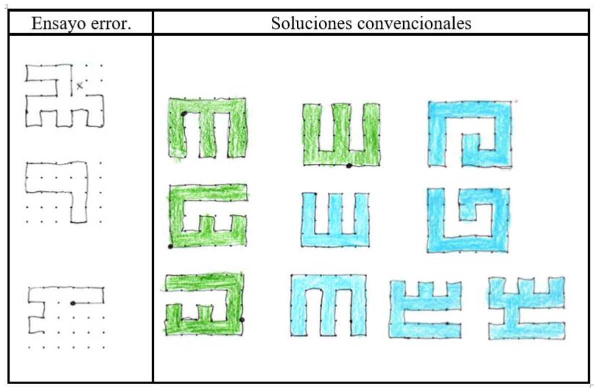


Figura 11. Paso del ensayo error a soluciones convencionales

A continuación, se presenta un análisis sobre la fluidez, la flexibilidad y la originalidad, de las respuestas dadas en la actividad, estos factores son determinantes para la construcción del proceso creativo en los estudiantes.

Fluidez: Para este aspecto, se analizaron todas las respuestas de los estudiantes, tanto los intentos fallidos como los que efectivamente resolvían el problema. En total se analizaron 1629 respuestas, de las cuales 439 (26.94%) fueron soluciones efectivas y 1190 (73.05%) fueron intentos fallidos. De acuerdo con los datos obtenidos, se puede considerar que la actividad logró desarrollar una adecuada fluidez, puesto que en promedio se le ocurrieron alrededor de 27 ideas diferentes a cada uno de los estudiantes, 20 de esas ideas fueron intentos fallidos, es decir el 74% y siete ideas efectivas, que representan el 26%.

Flexibilidad: Para la flexibilidad se tuvieron en cuenta las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes para obtener soluciones eficaces. Por lo que se lograron identificar 3 estrategias diferentes:

Soluciones generadas por rotación (R): a partir de una solución se hace una rotación para obtener una nueva solución (ver Figura 12).

Figura 12. Solución generada por rotación

Soluciones generadas por simetría (S): a partir de una solución se consigue una nueva, realizando una simetría con respecto a uno de los lados del rectángulo que se forma con la rejilla de puntos de 5 por 6 (ver Figura 13).

Figura 13. Solución generada por simetría

Soluciones generadas por translación de cuadrados (T): a partir de una solución se toma uno o dos cuadrados y se trasladan de tal manera que se conforme una nueva solución sin alterar la regla de que pase por todos los puntos (ver Figura 14).

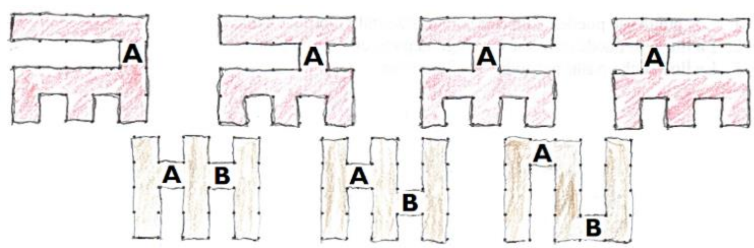


Figura 14. Soluciones generadas por translación de cuadrados

En relación con estas tres categorías se analizaron cada una de las actividades de los estudiantes y se verificó si utilizaban una, dos o las tres estrategias para llegar a soluciones efectivas. Hay que aclarar que para esta actividad también hay estudiantes que llegaron a conseguir soluciones únicamente haciendo uso de la estrategia de ensayo y error, que prácticamente es la estrategia con la que todos comienzan para posteriormente ir encontrando las estrategias mencionadas.

Un 32% de los estudiantes utilizaron una de estas tres estrategias, 24% usaron dos de estas estrategias y el 3% aplicó las tres estrategias. El resto de los estudiantes que corresponde al 41% recurrió a la estrategia de ensayo y error. Un 56% de los estudiantes usó la estrategia (R), 26% la estrategia (S) y 6% la estrategia (T).

De esta manera se puede considerar que la actividad permite identificar y de cierta manera caracterizar la flexibilidad de los estudiantes en cuanto a las diversas formas de llegar a las soluciones del problema.

Originalidad: Para este aspecto se analizaron solo las 439 respuestas efectivas de todos los estudiantes. A continuación, se muestran algunos resultados interesantes producto de este ejercicio.

Soluciones más frecuentes: la solución más recurrente de todos los estudiantes es la 3.5 (ver Figura 15), puesto que fue construida por alrededor de un 82% del grupo.

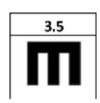


Figura 15. Solución más frecuente

A esta le siguen las soluciones 3.1, 2.17 y 2.16, con 56%, 47% y 44% respectivamente que se muestran en la Figura 16.

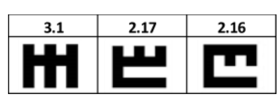


Figura 16. Segunda, tercera y cuarta solución más frecuente.

De acuerdo con Leikin (2009) las soluciones se pueden considerar originales dentro de un grupo de estudiantes mayor a 10, si su frecuencia es de menos del 15%. Por tanto, a continuación, se muestran las soluciones originales obtenidas por los estudiantes.

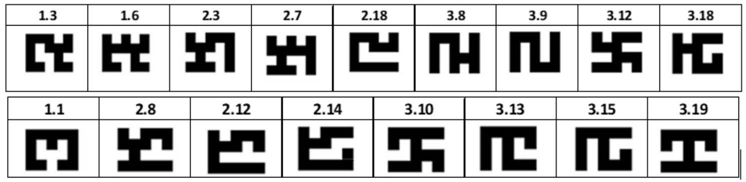


Figura 17. Soluciones originales aportadas por los estudiantes

El 39% de los estudiantes tuvieron al menos una idea original y en algunos casos las ideas fueron únicas dentro del grupo. Estas soluciones en términos generales no provienen de la estrategia de ensayo y error, sino que provienen de las estrategias (R), (S), y (T).

Conclusiones de la actividad

Efectivamente se puede evidenciar, que a pesar de que haya una gran fluidez de ideas o pensamiento divergente en el desarrollo de la actividad, esto no necesariamente conduce directamente a soluciones y mucho menos a soluciones creativas del problema propuesto. Sin embargo, también se puede ver que las ideas creativas no surgen de la nada y que el pensamiento divergente y convergente es prácticamente necesario para explorar nuevos caminos que pueden conducir a soluciones creativas.

Por otra parte, la actividad permite observar, además de procesos creativos, la aplicación de conceptos geométricos como la rotación, simetría y traslación, los cuales se consideran no solo decisivos a la hora de generar nuevas soluciones, sino que además hicieron parte del proceso de generar ideas originales.

5.3.2. Análisis de la actividad 2. Cuadrado cinco áreas.

El problema propuesto por Baggett & Ehrenfeucht (2019) y adaptado por Pita-Pantazi (2013) propone dividir un cuadrado en 5 partes de igual área, cada lado del cuadrado está dividido en 5 partes lo que sugiere a los estudiantes hacer una cuadrícula, para determinar varias soluciones. Sin embargo, cada solución que se propone hace uso de las figuras de un rompecabezas conocido como pentominó, donde todas sus fichas tienen área de 5 unidades, pero tienen formas distintas. De esta manera no solo se puede proponer la actividad de dividir el cuadrado, sino que se pueden proponer otras figuras compuestas por las mismas figuras del pentominó.

El problema no tiene restricciones, los estudiantes pueden o no hacer uso de la cuadrícula sugerida y pueden proponer figuras de todo tipo siempre y cuando tengan 5 unidades de área. Algunas posibles soluciones se muestran a continuación en la figura 18.

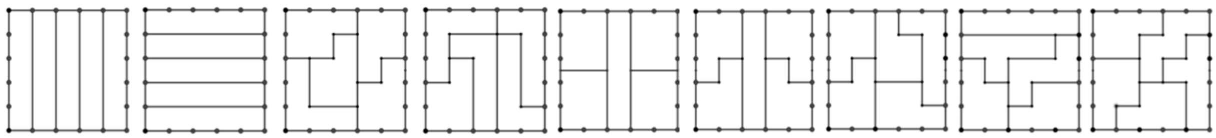


Figura 18. Algunas posibles soluciones al problema propuesto

Al dar la libertad a los estudiantes de que exploren la actividad y busquen hacer las divisiones de diferentes maneras e intentando ser creativos, inicialmente consiguen algunas ideas convencionales, sin embargo, también es posible ver que se producen ideas infructuosas que parecen no tener sentido como se muestra en la Figura 19.

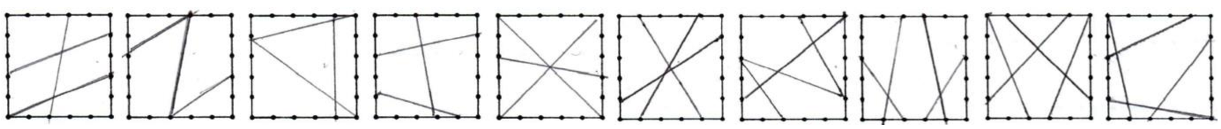


Figura 19. Ideas infructuosas propuestas por un estudiante.

Por otro lado, también se puede observar, que producto del pensamiento divergente se obtienen ideas que están enfocadas a buscar nuevas formas o estrategias para llegar a ideas originales, pero sin embargo no logran llegarse a concretar.

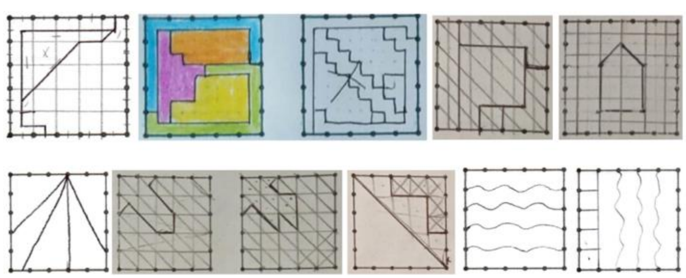


Figura 20. Ideas enfocadas pero ineficientes

En la figura 20 se puede observar que los estudiantes proponen diferentes estrategias, como dividir la figura en cuadrados o triángulos más pequeños, formando rejillas donde se puedan conformar figuras compuestas por unidades iguales. También buscan conseguir soluciones solo con triángulos, además de buscar soluciones con regiones curvas. Algunos estudiantes finalmente lograron concretar algunas de estas ideas que se especificarán más adelante.

Fluidez: La actividad logra desarrollar la fluidez de manera adecuada, puesto que los estudiantes generaron 870 ideas, de las cuales el 47,13% fueron ideas eficaces y 52,87% ineficaces. En promedio cada estudiante generó 15 ideas, 7 de ellas efectivas y 8 ineficaces. Los estudiantes aportaron 119 ideas diferentes que solucionan el problema.

Flexibilidad: Los estudiantes desarrollaron 7 estrategias para conseguir grupos de soluciones. A continuación, se ilustran cada una de ellas.

1. *Soluciones con rectángulos horizontales y verticales*

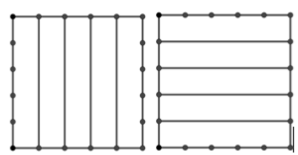


Figura 21. soluciones estrategia 1

2. *Soluciones creadas a partir de cuadrados de la cuadrícula sugerida*. En esta estrategia los estudiantes utilizaron los puntos dados a cada lado del cuadrado, para dibujar o imaginar, una cuadrícula de cinco por cinco (Figura 22). De esta manera generaron soluciones tomando cada cuadrado pequeño como una unidad y conformaban cada una de las cinco partes con 5 cuadrados.

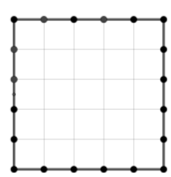


Figura 22. Cuadrícula dibujada o imaginada para crear soluciones.

Algunas de las soluciones se muestran en la Figura 23.

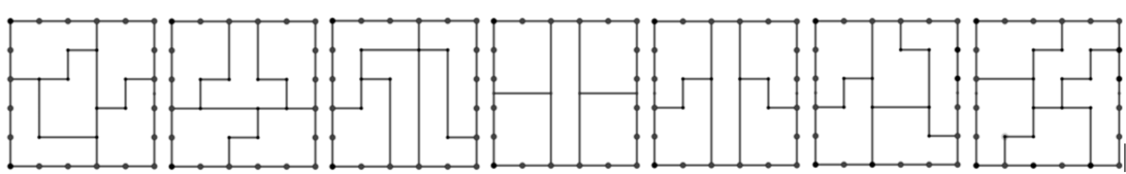


Figura 23. Soluciones estrategia 2

3. *Soluciones creadas por cuadrados y triángulos de la cuadrícula sugerida*. Los estudiantes mediante la cuadrícula (Figura 22) generan las 5 partes de igual área conformando figuras compuestas por 5 cuadrados o su equivalente con partes triangulares (ver Figura 24).

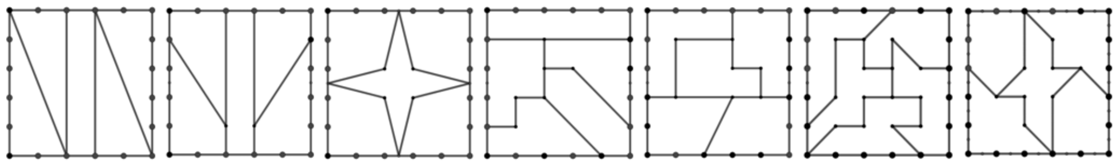


Figura 24. Soluciones estrategia 3

4. *Soluciones con solo triángulos*. Algunos estudiantes intentaron conseguir soluciones utilizando los puntos a cada lado del cuadrado, para conformar únicamente triángulos de área 5, en relación con la cuadrícula (Figura 22). Sin embargo, sólo se concretó una solución de este tipo (ver Figura 25).

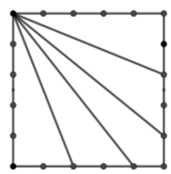


Figura 25. Solución estrategia 4

5. *Soluciones creadas dividiendo en 4 cuadrados cada cuadrado de la cuadrícula sugerida.* Los estudiantes dibujan o imaginan una cuadrícula más refinada con 100 cuadrados (Figura 26).

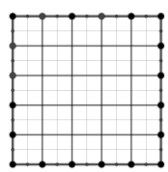


Figura 26. Cuadrícula de 10 por 10.

Luego plantean soluciones donde cada una de las 5 partes de igual área está compuesta por 20 cuadrados pequeños. A continuación, en la Figura 27 se muestran algunas soluciones de este tipo.

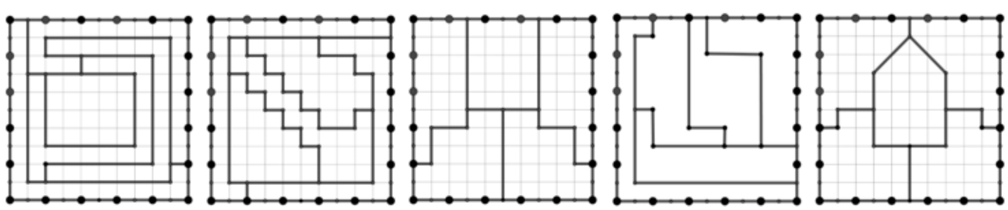


Figura 27. Soluciones estrategia 5.

6. *Soluciones creadas dividiendo en 4 triángulos cada cuadrado de la cuadrícula sugerida.* Esta estrategia es similar a la anterior, pero en vez de dividir cada cuadrado de la cuadrícula sugerida en 4 cuadrados se divide en 4 triángulos, como muestra la Figura 28. Cada parte de las 5 de igual área está compuesta por 20 triángulos de los pequeños tomados como unidad de medida.

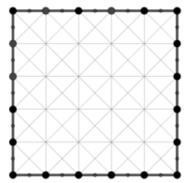


Figura 28. Rejilla de triángulos.

De esta manera se consiguen soluciones como la que se muestra a continuación en la Figura 29.

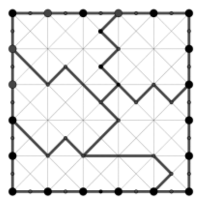


Figura 29. Solución estrategia 6

7. *Regiones curvas*. En esta estrategia los estudiantes intentaron hacer algunas subdivisiones con regiones curvas (ver Figura 30).

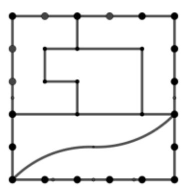


Figura 30. Solución estrategia 7

Se considera que la actividad permite desarrollar la flexibilidad eficientemente ya que los estudiantes exploraron varias estrategias para conseguir grupos de soluciones. A continuación, se muestra en la Tabla 1, el porcentaje de estudiantes que aplicó cada una de las estrategias.

Tabla 1. Porcentaje de cada estrategia

Estrategia	1	2	3	4	5	6	7
Porcentaje	93%	98%	50%	30%	5%	2%	7%

En términos generales, en promedio cada estudiante aplicó 3 de las 7 estrategias propuestas.

Originalidad: En primer lugar, se tienen en cuenta las soluciones convencionales, como las que se muestran en la Figura 31, las cuales fueron aportadas por el 81.67% y 78.33%. Este tipo de soluciones típicas son propuestas por la mayoría de los estudiantes, sin embargo, algunos estudiantes no las proponen, pero sí lograron configurar soluciones originales.

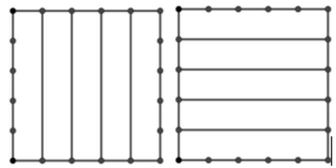


Figura 31. Soluciones convencionales

Por otro lado, tenemos las soluciones aportadas por entre el 15 y el 40 por ciento de los estudiantes de las que se muestran algunas a continuación en la figura 32.

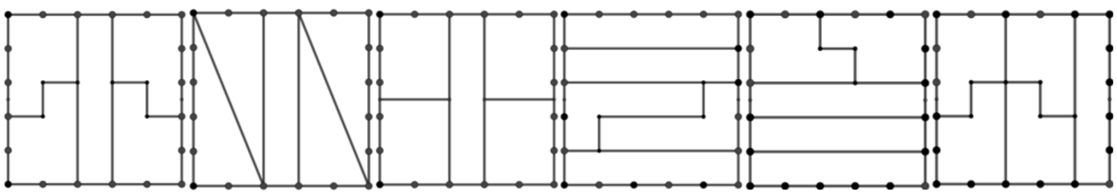


Figura 32. Soluciones aportadas entre 15% y 40% de los estudiantes.

Todas estas soluciones corresponden a la *estrategia 2* en la que cada una de las 5 partes, es producto de dibujar o imaginar la cuadrícula sugerida por los puntos de los lados del cuadrado. Algunos estudiantes conformaron una solución de estas y posteriormente movían las figuras de lugar para conseguir nuevas soluciones, otros sustituían una de las figuras por otra y reacomodaron las demás figuras y conseguían soluciones nuevas.

Finalmente se consideran originales las soluciones aportadas por menos del 15% de los estudiantes. La gran mayoría de los estudiantes obtuvo al menos una solución original, considerando que la actividad tiene infinitas soluciones posibles. A continuación en la Figura 33, se muestran las ideas menos frecuentes y con mayor detalle y elaboración que aportaron los estudiantes.

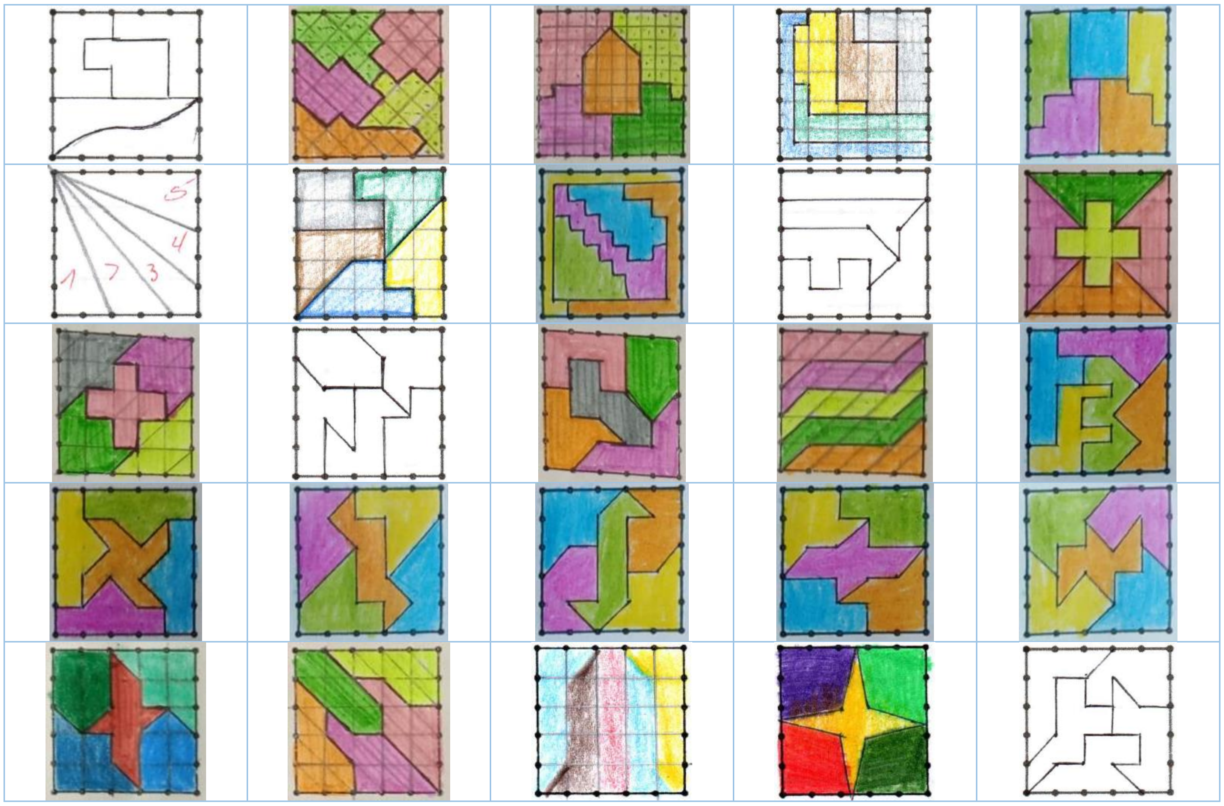


Figura 33. Algunas soluciones originales aportadas por los estudiantes

Conclusiones de la actividad

La actividad permite evidenciar fluidez, flexibilidad y originalidad en las respuestas de los estudiantes. Las estrategias utilizadas permitieron establecer grupos de soluciones. La variedad de soluciones que permite el problema favorece la producción de estrategias e ideas originales por parte de los estudiantes.

Se evidencia que no solo en las respuestas correctas hay creatividad, la mayoría de las soluciones originales, es decir las de menor frecuencia, son producto de explorar cada una de las estrategias propuestas. Estrategias como la 2, 3 y 4 fueron ampliamente exploradas por los estudiantes, al punto que casi todos tienen alguna solución original de estos tipos. Sin embargo, usando las estrategias 5, 6 y 7 a pesar de haber sido explorada por varios estudiantes no se lograron consolidar muchas soluciones eficaces con estas características.

5.3.3. Análisis de la actividad 3. Cuatro partes congruentes.

El problema consiste en dividir en cuatro partes congruentes un cuadrado de todas las formas en que al estudiante se le ocurra. Para esto se les proporcionó a los estudiantes hojas con cuadrados con una cuadrícula de 10 por 10 que podían o no utilizar para conseguir soluciones. Algunas soluciones del problema se muestran en la Figura 34.

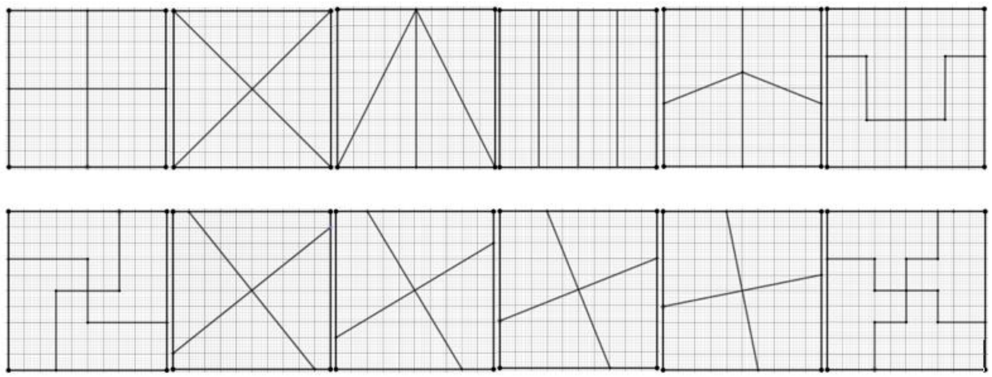


Figura 34. Algunas posibles soluciones de la actividad # 3. Cuatro partes congruentes

Por otra parte, se puede evidenciar que algunos estudiantes tienen ideas divergentes infructuosas, en la que no parece haber una clara intención de resolver el problema, según las condiciones dadas como se muestra en la Figura 35. Sin embargo, este tipo de rayones o dibujar lo que primero se viene a la mente se convierte para algunos estudiantes en una especie de lluvia de ideas con la que después descartan las que definitivamente no sirven y se centran en algunas que a su criterio pueden llegar a concretarse.

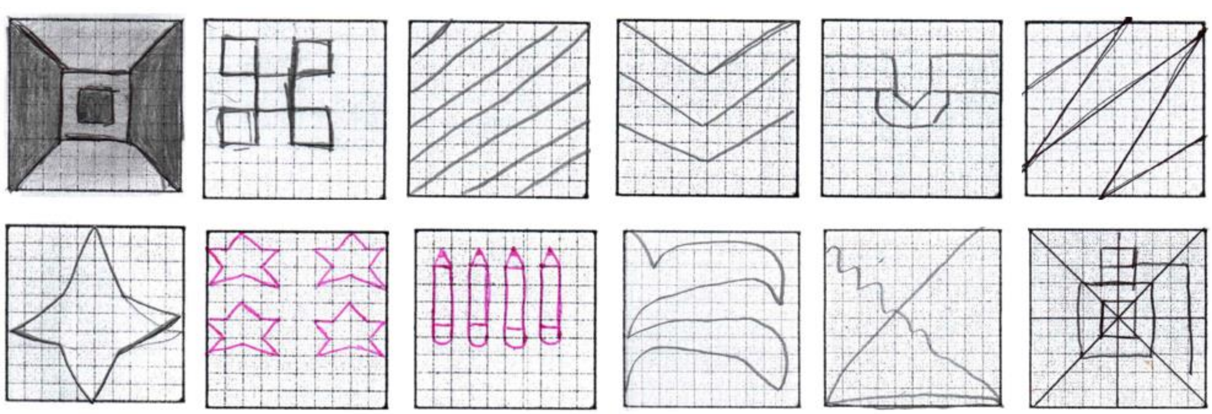


Figura 35. Ideas producto del pensamiento divergente-infructuoso. Actividad #3

A continuación (Figura 36) se presentan ideas propuestas por los estudiantes que se consideran producto del pensamiento divergente enfocado pero ineficiente. En estas ideas podemos observar algunos intentos erróneos por resolver el problema, sin embargo, estas ideas solo son parte del proceso de búsqueda de nuevas soluciones y del intento por buscar ideas originales. La mayoría de las ideas de este tipo mediante ajustes se convierten finalmente en soluciones eficaces y algunas en soluciones originales.

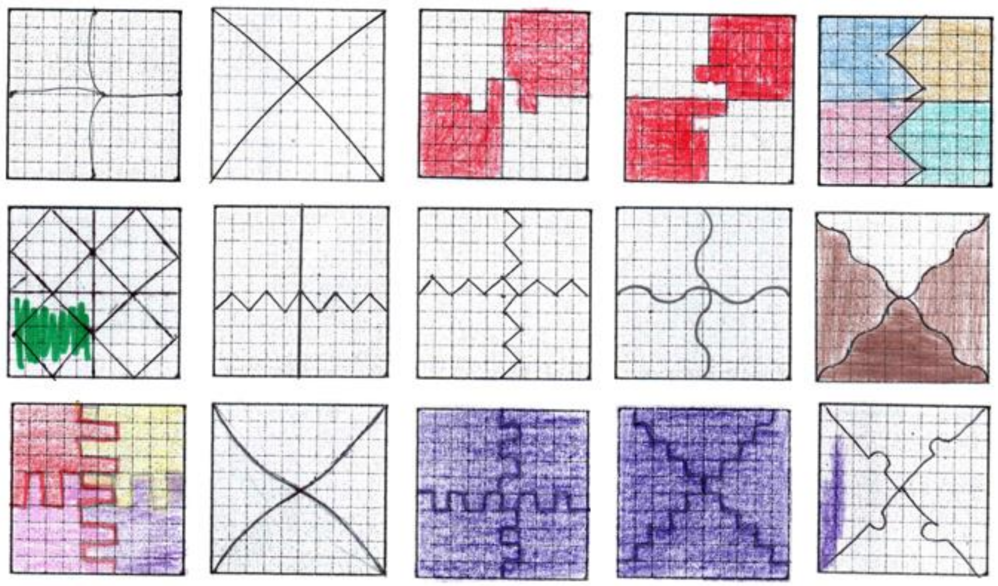


Figura 36. Ideas enfocadas-ineficientes. Actividad # 3. Cuatro partes iguales

Fluidez: Los estudiantes propusieron 800 ideas en total de las cuales 277 (34,63%) fueron ideas eficaces y 523 (65.38%) ineficaces; en promedio a cada estudiante se le ocurrieron aproximadamente 5 ideas eficaces y 9 ideas ineficaces. En total se aportaron 60 soluciones diferentes al problema, por lo que se considera que la actividad logra desarrollar la fluidez.

Flexibilidad: En este apartado se clasifican las ideas de los estudiantes intentando encontrar alguna regularidad en sus respuestas. Dichas respuestas en muchos casos constituyen estrategias con las que se encuentran familias de soluciones con características comunes. Se pueden evidenciar cuatro grandes estrategias, las cuales tienen en muchos casos subcasos y en otras soluciones se evidencia la aplicación de varias estrategias a la vez.

1. *Cortes perpendiculares (CP).* A partir del centro del cuadrado se trazan dos segmentos perpendiculares que dividen el cuadrado en cuatro partes iguales como se muestra en la figura 37

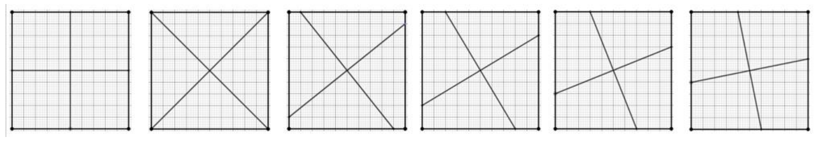


Figura 37. Estrategia cortes perpendiculares.

2. *Rectángulos congruentes (RC).* Consiste en dividir el cuadrado, horizontal o verticalmente en dos rectángulos congruentes y luego cada rectángulo dividirlo en dos figuras congruentes (ver figura 38).

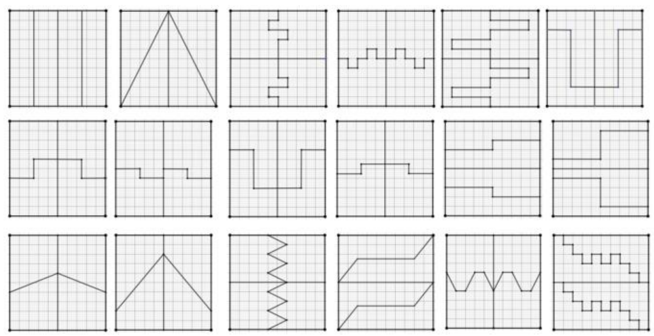


Figura 38. Estrategia rectángulos congruentes.

En esta estrategia también se puede observar cómo los estudiantes hacen uso de la simetría para dividir cada rectángulo en figuras que se puedan teselar.

3. *Segmentos perpendiculares (SP).* Se trazan dos segmentos perpendiculares (segmentos rojos) en el centro del cuadrado y posteriormente desde cada vértice de dichos segmentos se trazan caminos (trazos en azul) hacia cualquier lado o vértice del cuadrado de tal manera que dichos caminos trazados con segmentos no se crucen. Al hacer esto exactamente de la misma manera en los cuatro vértices de los segmentos centrales se divide el cuadrado en cuatro partes congruentes (Figura 39).

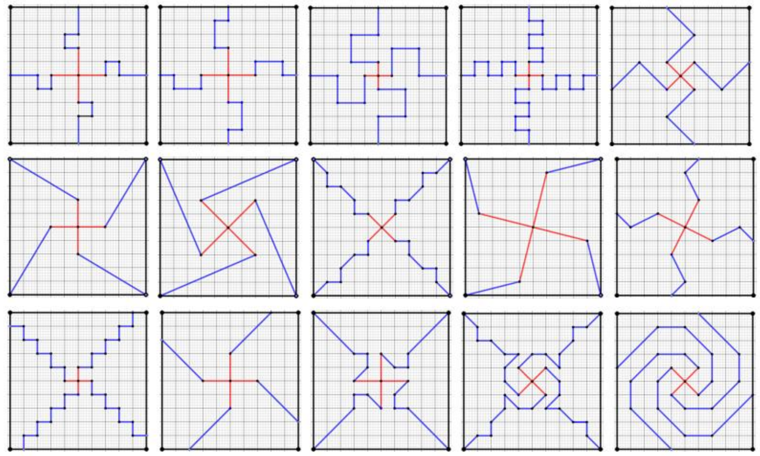


Figura 39. Estrategia segmentos perpendiculares

4. *Cortes curvos (CC).* Consiste en aplicar alguna de las estrategias anteriores, pero en vez de trazar segmentos se hacen trazos curvos como se muestra en la Figura 40.

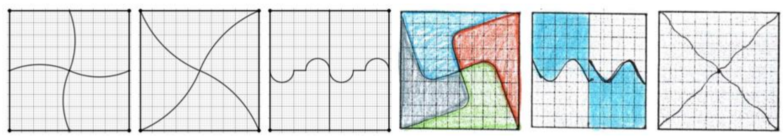


Figura 40. Estrategia cortes curvos

La aplicación de una o varias de las estrategias mencionadas anteriormente por parte de los estudiantes supone un desarrollo efectivo de la flexibilidad. El 100% de los estudiantes utilizó la estrategia (CP), un 82% usó la estrategia (RC), 15% aplicó la estrategia (SP) y finalmente el 19% usó la estrategia (CC).

Originalidad: Las soluciones menos originales, es decir las más convencionales y que aportaron la mayoría de los estudiantes se muestran en la figura 41.

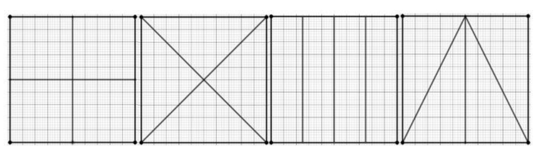


Figura 41. Soluciones convencionales. Actividad # 3. Cuatro partes congruentes.

Por otra parte, en la Figura 42 se puede observar las soluciones que fueron aportadas por más de un estudiante; cada una de estas soluciones se repetía entre 3% y el 12% de los estudiantes.

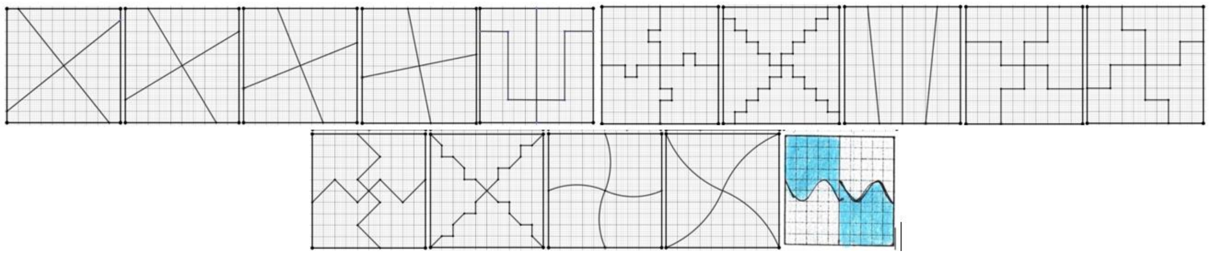


Figura 42. Soluciones aportadas entre el 3% y 12% de los estudiantes en la actividad # 3. Cuatro partes congruentes.

Finalmente, se presentan algunas de las soluciones originales aportadas por los estudiantes, cada una de estas son soluciones únicas dentro del grupo de estudio (ver Figura 43).

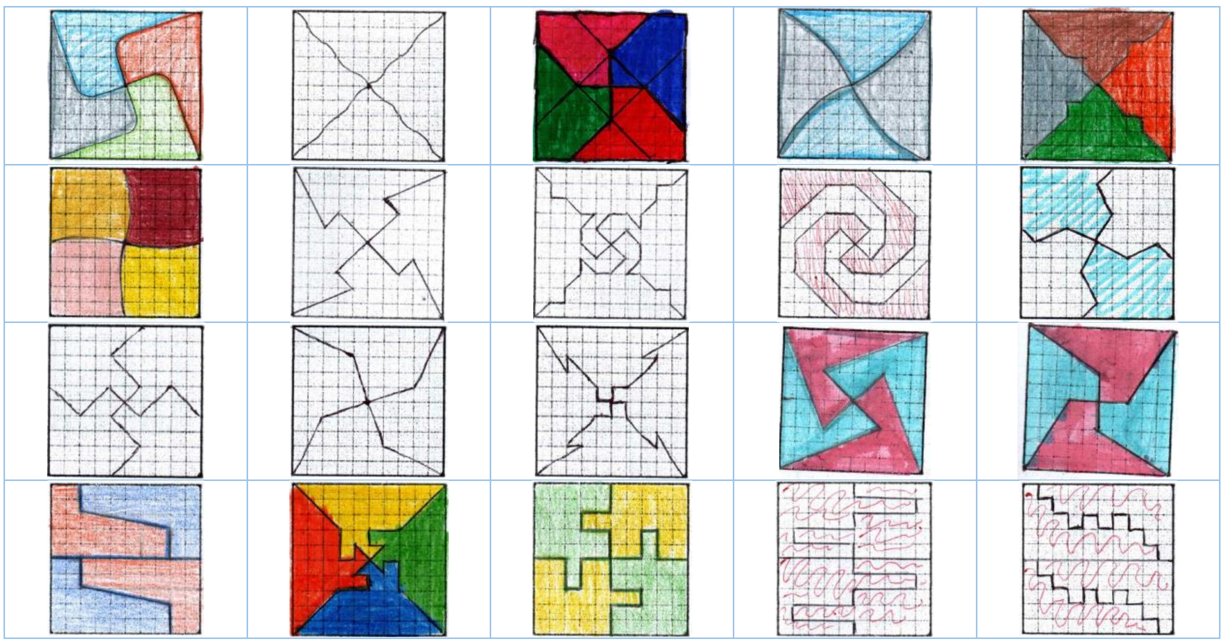


Figura 43. Soluciones originales. Actividad #3.

Conclusiones de la actividad

La actividad claramente permite desarrollar cada uno de los aspectos de la creatividad, fluidez, flexibilidad y originalidad. La diversidad de soluciones únicas y aportadas por menos del 15% de los estudiantes evidencia cómo la actividad promueve la originalidad de estudiantes no eminentes en matemáticas e incluso en estudiantes con discapacidades cognitivas. El hecho de que la actividad tenga infinitas soluciones hace que hasta los estudiantes menos aventajados puedan concretar soluciones con estrategias no tan elaboradas, y, sin embargo, a los estudiantes más creativos, les permite explorar diversas estrategias más elaboradas y en el caso de ser posible, las combinan para concretar soluciones creativas.

5.3.4. Análisis de la actividad 4. Figuras de igual perímetro.

En este problema se propone a los estudiantes dibujar en una hoja cuadriculada todas las figuras de perímetro 24 unidades, donde cada uno de los cuadrados de la cuadrícula representa una unidad. Se espera que los estudiantes dibujen diferentes figuras, algunas con dimensiones enteras, decimales y fraccionarias. Además, se espera que hagan uso de las ternas pitagóricas para construir algunas de las soluciones. En la Figura 44 se presentan algunas de las soluciones esperadas.

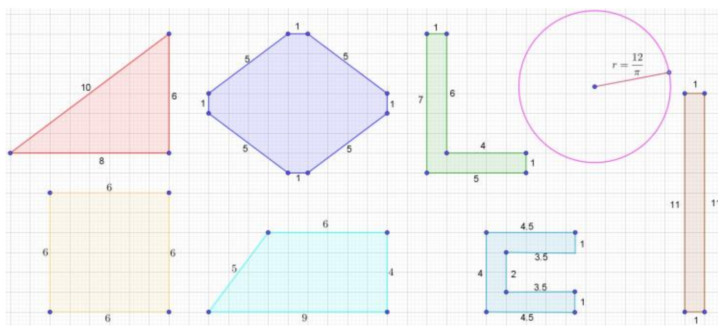


Figura 44. Soluciones esperadas por los estudiantes.

Por otra parte, los estudiantes exploran el problema haciendo trazos al parecer aleatorios en los que no se observa con claridad una intención de resolver el problema, lo cual se ha definido como pensamiento divergente infructuoso y en la Figura 45 se muestran ejemplos tomados de las actividades.

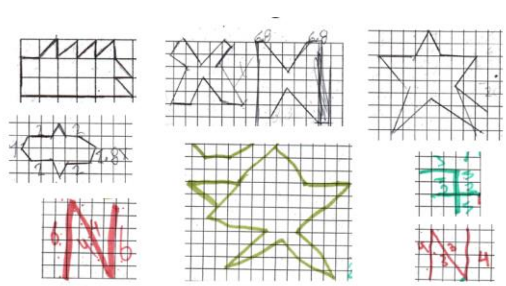


Figura 45. Evidencia del pensamiento divergente infructuoso en la actividad # 4. Figuras de igual perímetro.

En cuanto al pensamiento divergente enfocado pero ineficiente se observa (Figura 46) que hay estudiantes interesados en construir un triángulo equilátero de lado 8, figuras simétricas donde además se toman unidades por mitad y el intento de construir una circunferencia.

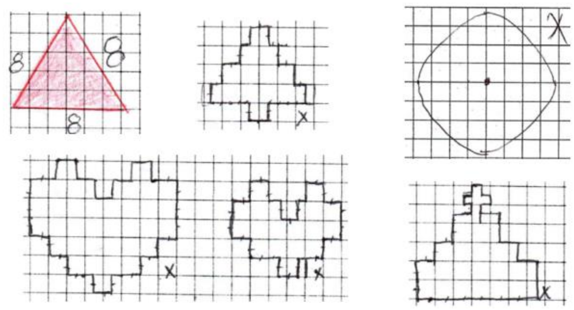


Figura 46. Pensamiento divergente enfocado pero ineficiente. Actividad # 4 figuras de igual perímetro

Por otro lado, también se puede observar (Figura 47) otro intento por hacer una circunferencia y otros intentos por utilizar trazos en diagonal, algunos de ellos teniendo en cuenta la terna pitagórica de 3, 4, 5.

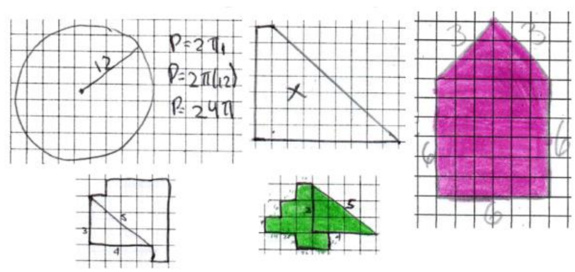


Figura 47. Pensamiento divergente enfocado ineficiente II. actividad #4 figuras de igual perímetro.

Finalmente, se observan intentos por llegar a soluciones que posteriormente se convirtieron en estrategias para encontrar varias soluciones como es el caso de las figuras en forma de U y las figuras en forma de L (ver Figura 48).

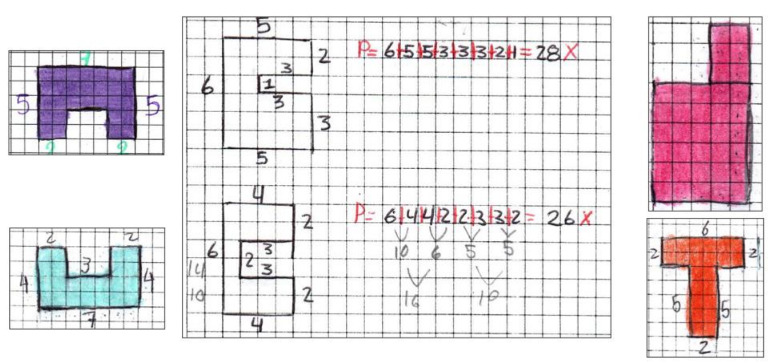


Figura 48. Pensamiento divergente ineficaz III. Actividad # 4. Figuras de igual perímetro.

Fluidez: La fluidez de esta actividad se ve claramente representada puesto que los estudiantes generaron 538 ideas de las cuales 48,51% fueron ideas efectivas y 51,49% fueron ineficaces. En promedio a cada estudiante se le ocurrieron 9 ideas, de las cuales 4 fueron efectivas y 5 ineficaces. Finalmente, los estudiantes aportaron 124 soluciones distintas al problema.

Flexibilidad: En esta actividad se lograron observar 9 estrategias diferentes las cuales se describen a continuación:

1. *Rectángulos.* Esta es una de las primeras estrategias exploradas por los estudiantes y consiste en configurar todos los posibles rectángulos con perímetro 24 unidades, modificando dimensiones enteras del largo y el ancho (ver Figura 49)

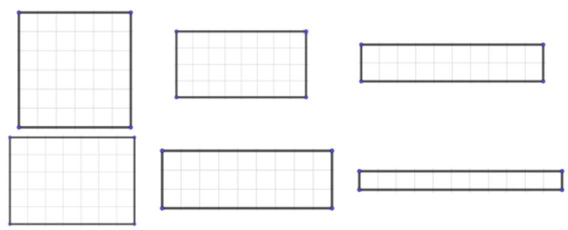


Figura 49. Soluciones estrategia rectángulos.

2. *Recorte rectángulo - rectángulo 1 (RR1).*

   A partir de cualquier rectángulo de perímetro 24 unidades, los estudiantes advierten que quitando o recortando imaginariamente un rectángulo de menor tamaño desde uno de los vértices del rectángulo original, se forman figuras en forma de L que también tienen perímetro 24 unidades (ver Figura 50).

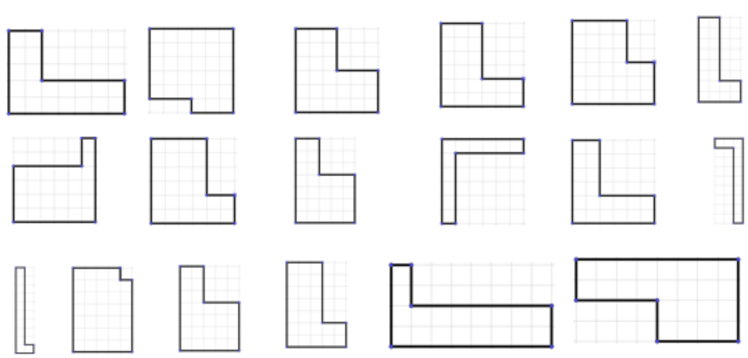


Figura 50. Ejemplos de solución por medio de la estrategia (RR1)

3. *Recorte rectángulo - rectángulo 2 (RR2).*

A partir de cualquier rectángulo de perímetro 24 unidades los estudiantes advierten que quitando o recortando imaginariamente dos rectángulos de menor tamaño desde 2 de los 4 vértices del rectángulo original se forman diferentes figuras que también tienen perímetro 24 unidades (ver Figura 51)

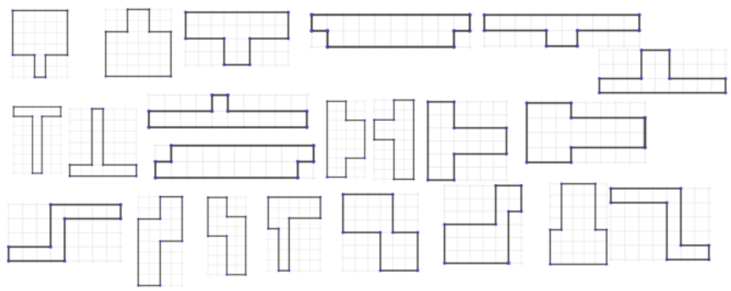


Figura 51. Ejemplos de solución por medio de la estrategia (RR2)

4. *Recorte rectángulo - rectángulo 3 (RR3).*

A partir de cualquier rectángulo de perímetro 24 unidades los estudiantes advierten que quitando o recortando imaginariamente tres rectángulos de menor tamaño desde alguno de los 4 vértices del rectángulo original se forman diferentes figuras que también tienen perímetro 24 unidades (ver Figura 52)

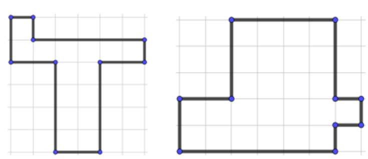


Figura 52. Ejemplos de solución por medio de la estrategia (RR3)

5. *Recorte rectángulo - rectángulo 4 (RR4).*

A partir de cualquier rectángulo de perímetro 24 unidades los estudiantes advierten que quitando o recortando imaginariamente cuatro rectángulos de menor tamaño desde alguno de los 4 vértices del rectángulo original se forman diferentes figuras que también tienen perímetro 24 unidades (ver Figura 53)

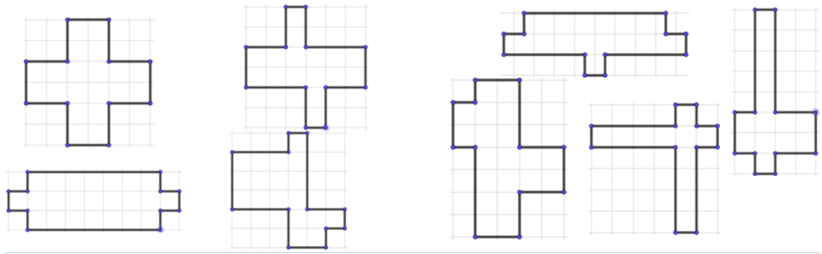


Figura 53. Ejemplos de solución por medio de la estrategia (RR4).

6. *Escaleras.* Los estudiantes, teniendo en cuenta las estrategias mencionadas anteriormente, advierten que a partir de cualquier rectángulo de perímetro 24 unidades pueden construir figuras con forma de escalones (ver figura 54)

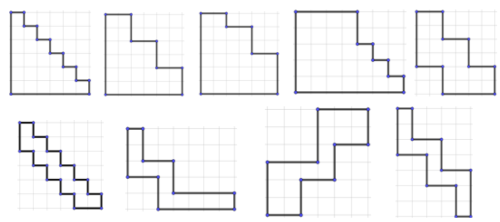


Figura 54. Ejemplos de la estrategia escaleras.

7. *Figuras cóncavas a partir de un rectángulo.*

   Los estudiantes toman un rectángulo con perímetro entre 16 y 22 unidades; posteriormente construyen una concavidad, donde su profundidad está en función de generar las unidades faltantes para llegar a concretar las 24 unidades de perímetro que pide el problema. En todos los casos se hizo la concavidad siguiendo la cuadrícula (ver Figura 55).

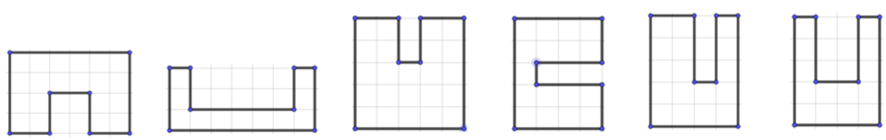


Figura 55. Ejemplos de la estrategia de figuras cóncavas a partir de un rectángulo.

8. *Ternas pitagóricas:* Se proponen soluciones teniendo en cuenta la terna pitagórica 3,4,5 con diagonales de 5 unidades y el resto de las unidades siguiendo la cuadrícula. En otros casos se propuso la solución mediante un triángulo rectángulo con dimensiones 6,8,10 unidades (ver Figura 56).

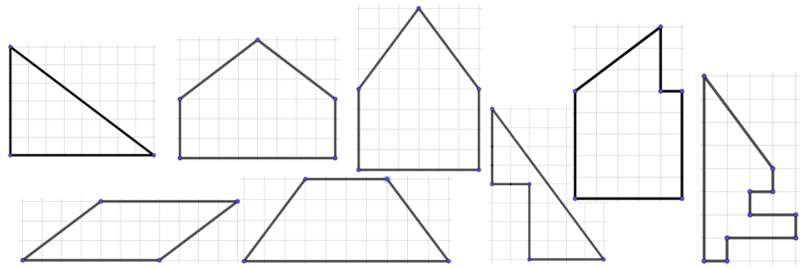


Figura 56. Ejemplos de la estrategia ternas pitagóricas.

9. *Figuras simétricas:* se proponen soluciones que son simétricas, en muchos casos aplicando las estrategias mencionadas anteriormente. En la búsqueda de este tipo de soluciones algunos estudiantes propusieron figuras con dimensiones donde dividen en dos partes la unidad (ver Figura 57)

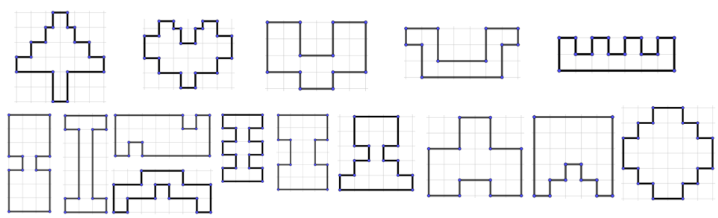


Figura 57. Ejemplos de la estrategia figuras simétricas

10. *Figuras asimétricas:* Este tipo de soluciones se caracterizó por dos aspectos, el primero de los cuales tiene que ver con la estrategia de ensayo y error; los estudiantes prueban dibujando figuras al azar hasta conseguir una con perímetro 24 unidades. El segundo tiene que ver con los estudiantes que se empeñaron en buscar soluciones originales y en muchos casos aplican varias estrategias de las anteriormente mencionadas (ver Figura 58)

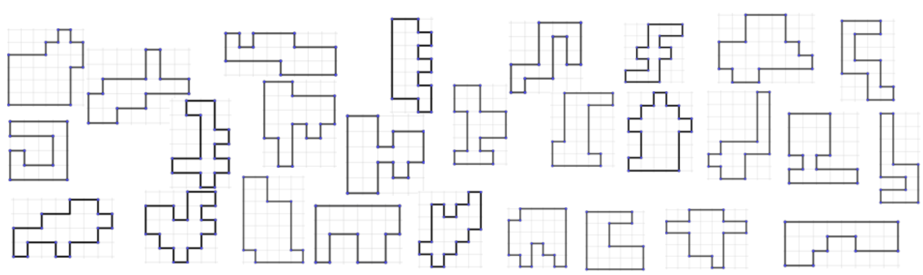


Figura 58. Ejemplos de la estrategia Figuras asimétricas.

11. *Circunferencia:* se propone una circunferencia con un radio aproximadamente de 3.8 unidades para generar un perímetro de aproximadamente 24 unidades (ver Figura 59)

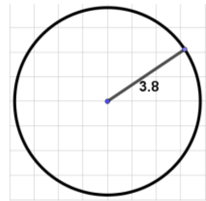


Figura 59. Ejemplo de la estrategia de circunferencia.

La actividad logra desarrollar adecuadamente la flexibilidad, puesto que se generaron 11 estrategias distintas para conseguir soluciones. En promedio cada estudiante propuso entre dos y tres estrategias distintas. A continuación, en la Tabla 2 se relaciona el porcentaje de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias mencionadas en el apartado anterior.

Tabla 2. Porcentaje de cada estrategia.

Estrategia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
porcentaje	72%	35%	28%	3%	22%	25%	17%	20%	13%	22%	3%

Originalidad: La solución más convencional fue el cuadrado de 6 por 6 el cual fue aportado por el 43% de los estudiantes (ver Figura 60).

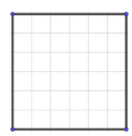
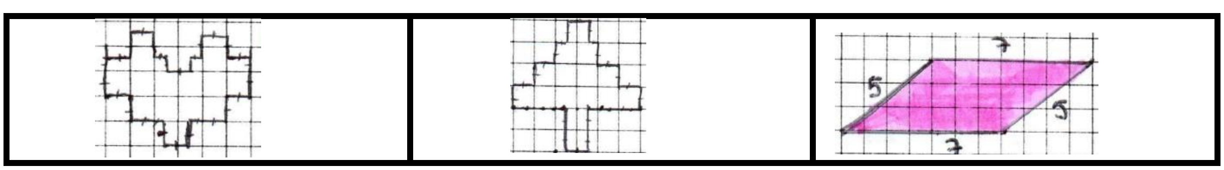


Figura 60. Solución convencional.

La actividad desarrolla el aspecto de la originalidad, ya que los estudiantes aportaron 99 soluciones únicas, aplicando las estrategias descritas en el apartado de la flexibilidad; sin embargo se considera que las soluciones originales y creativas están relacionadas con las estrategias menos frecuentes y con los casos donde se combinaron distintas estrategias y hay mayor nivel de detalle y elaboración como las que se muestran a continuación (ver Figura 61).



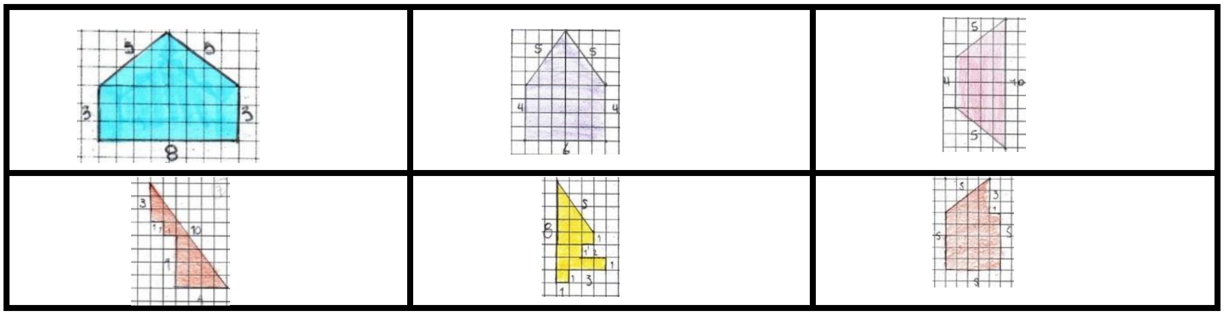


Figura 61. Soluciones originales. Actividad # 4

Conclusiones de la actividad

La actividad permite el desarrollo de los aspectos de la creatividad, fluidez, flexibilidad y originalidad. El utilizar la cuadrícula como unidad de medida permite que los estudiantes aborden soluciones aplicando las ternas pitagóricas; sin embargo en otros casos parece que sesgó a los estudiantes a construir solo figuras trazadas por la cuadrícula.

Hay claridad en las estrategias de los estudiantes para encontrar familias de soluciones hasta agotarlas. Cabe resaltar que las soluciones más elaboradas y con mayor nivel de detalle, son precisamente aquellas que exploran la combinación de más de una de las estrategias propuestas. Es decir, que el tener más elementos y conocer más a fondo el problema permite establecer conexiones entre las ideas producidas con anterioridad y las ideas nuevas.

Al parecer cuando se abordan problemas con figuras planas, el explorar construcciones, ideas o soluciones con partes curvas permite explorar soluciones con un nivel de originalidad mayor.

El proceso creativo en esta actividad parte de la exploración de figuras convencionales como los rectángulos y, posterior a conseguir una solución, se exploran nuevas posibilidades y ajustes que permiten encontrar nuevas ideas; haciendo uso de conocimientos como de las ternas pitagóricas y combinado este conocimiento con las soluciones anteriores se consiguen nuevas soluciones originales.

De igual forma la búsqueda de soluciones simétricas produjo la necesidad de partir la unidad de medida en dos, lo cual produjo otro conjunto de soluciones originales y se considera posible gracias al requisito explícito de solicitar a los estudiantes múltiples soluciones.

5.3.5. Análisis de la actividad 5. Área cuadrilátero triángulo.

En este problema se espera que los estudiantes dibujen distintas construcciones auxiliares y hagan descomposiciones y recomposiciones, para posteriormente determinar el área (ver Figura 62).

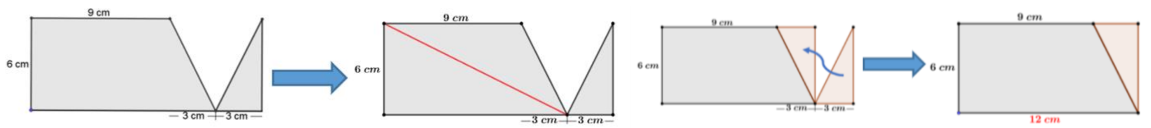


Figura 62. Algunas posibles estrategias de solución al problema

Cuando se abordan problemas con múltiples vías de solución, es común ver que algunos estudiantes encuentran una solución rápidamente, mientras que a otros les cuesta trabajo y tiempo. Pero también sucede que luego de que un estudiante encuentra la primera solución, fácilmente se complica buscando nuevas posibilidades y el problema se convierte en un reto, mientras que a aquél que le costó trabajo encontrar la primera solución tal vez se desatasca y de pronto le fluyen varias ideas.

Se considera que producto del pensamiento convergente los estudiantes logran conseguir soluciones convencionales al problema aplicando las fórmulas del trapecio y triángulo para determinar el área directamente como se muestra en la figura 63:

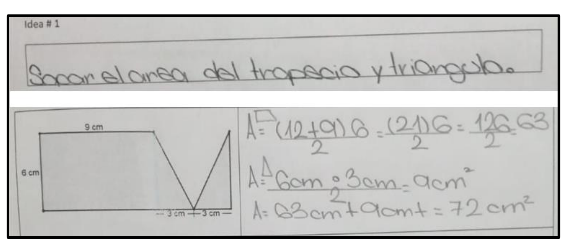


Figura 63. Solución aportada por un estudiante

Otros estudiantes examinan el problema mediante el trazado de líneas auxiliares (Figura 64) y encuentran distintas formas para determinar el área de la figura. Se considera que el uso de construcciones auxiliares es producto del pensamiento divergente y su exploración bien puede considerarse como una lluvia de ideas, consecuencia de la visualización de la figura y que puede conllevar al desarrollo de ideas creativas.

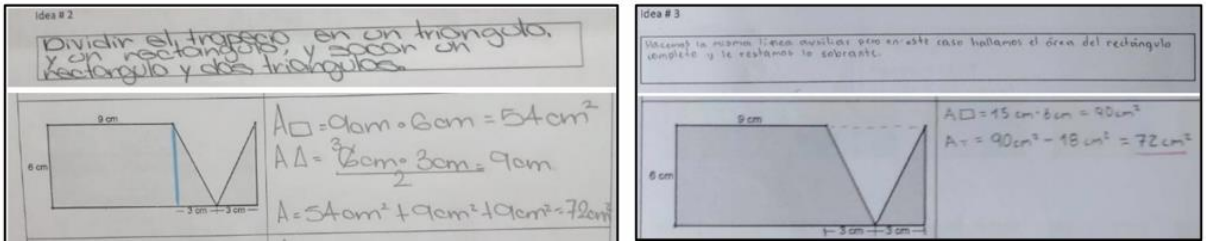


Figura 64. Soluciones aportadas por los estudiantes mediante construcciones auxiliares

Sin embargo, cabe aclarar que muchas de estas construcciones no resultan eficaces debido a que los estudiantes no encuentran las herramientas adecuadas para llevarlas a feliz término o porque asumen características geométricas que no son coherentes con los datos aportados por el problema, como se muestra en la Figura 65, donde el estudiante asumió que la construcción auxiliar configuraba un triángulo rectángulo y con esta suposición aplicó el teorema de Pitágoras.

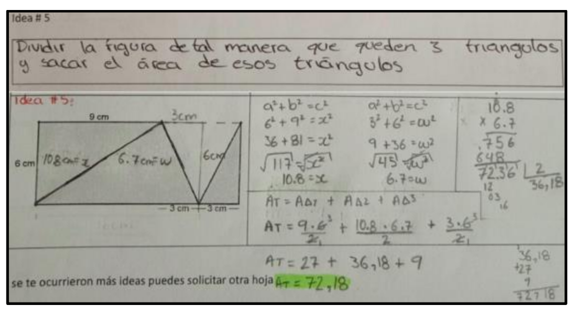


Figura 65. Idea de estudiante ineficaz

Por otro lado, otros estudiantes optaron por descomponer la figura dada y recomponerla en una o dos figuras nuevas ya conocidas para determinar el área (ver Figura 66). Esto también se considera como una acción producto de la visualización, donde el estudiante intenta desarrollar una idea que encaje en una situación que le sea familiar, en este caso particular en un rectángulo.

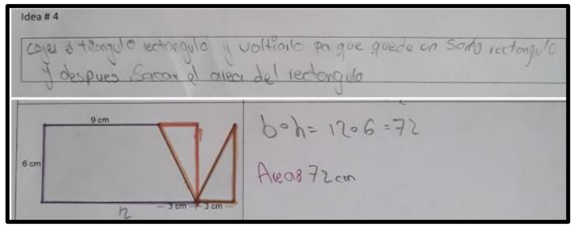


Figura 66. Solución mediante descomposición y recomposición de figuras

Sin embargo, hay reconfiguraciones que a pesar de estar enfocadas en el desarrollo efectivo del problema no se lograron concretar como la que se muestra en la Figura 67, donde el estudiante descompuso la figura y la recompuso en un rectángulo y un triángulo, pero falló en su desarrollo.

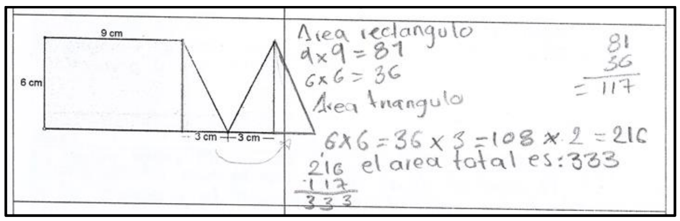


Figura 67. Idea de solución enfocada adecuadamente con errores de ejecución

No obstante, no se considera que las ideas originales ineficaces, como la de la Figura 67, necesariamente deban ser condenadas a no ser tenidas en cuenta únicamente por errores de tipo numérico o algorítmico, ya que la descomposición y recomposición de figuras muestra una clara idea de la equivalencia de áreas lo cual es un proceso importante en la construcción del concepto de área y una forma válida en la que se pueden conseguir ideas creativas.

Por su parte, algunos estudiantes no lograron configurar ninguna solución, a pesar de hacer intentos mediante construcciones auxiliares y operaciones aplicando fórmulas referentes a áreas de polígonos (ver Figura 68).

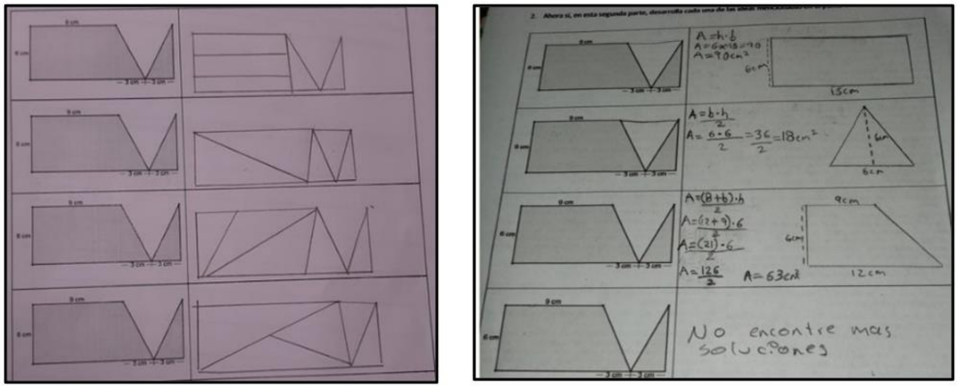


Figura 68. Ideas infructuosas aportadas por estudiantes

En resumen, los problemas geométricos con múltiples soluciones promueven la generación de ideas que no necesariamente están ligadas al desarrollo algorítmico y numérico, como la generación de construcciones auxiliares y la composición y recomposición de figuras, pero que son igualmente válidas como una forma de razonar y buscar soluciones. A continuación, se hace un análisis sobre los aspectos de fluidez, flexibilidad y originalidad.

Fluidez: En este apartado se analizaron todas las respuestas de los estudiantes, tanto los intentos fallidos como los que efectivamente resolvían el problema. En total se analizaron 417 respuestas de las cuales 216 (52%) fueron soluciones efectivas y 201 (48%) fueron intentos fallidos. Consideramos que la actividad sí logra de manera adecuada y efectiva generar fluidez de ideas en los estudiantes, puesto que en promedio a cada estudiante se le ocurrieron alrededor de tres ideas, de las cuales dos fueron efectivas y una fue un intento fallido.

Flexibilidad: El requisito explícito de proponer múltiples soluciones al problema produjo 31 soluciones diferentes y 5 ideas potenciales que estaban bien enfocadas pero no se llegaron a concretar. A continuación, se presentan las estrategias propuestas por los estudiantes, que se pueden resumir en aplicación directa de las fórmulas del trapecio y el triángulo, construcción de trazos auxiliares y recomposición de figuras.

Construcciones auxiliares: hay dos tipos de construcciones auxiliares

Tipo 1: Los estudiantes por medio de construcciones auxiliares descomponen la figura principal en sub-figuras conocidas y determinan el área haciendo la suma de las partes. En varias ocasiones se presentan conjuntos de sub-figuras congruentes (ver Figura 69).

Subdivisión en tres partes

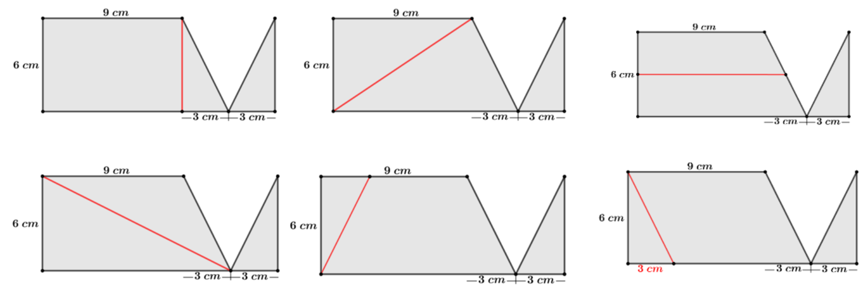


Figura 69. Soluciones mediante construcciones auxiliares interiores. Subdivisión en tres partes

Subdivisión en cuatro partes (ver Figura 70).

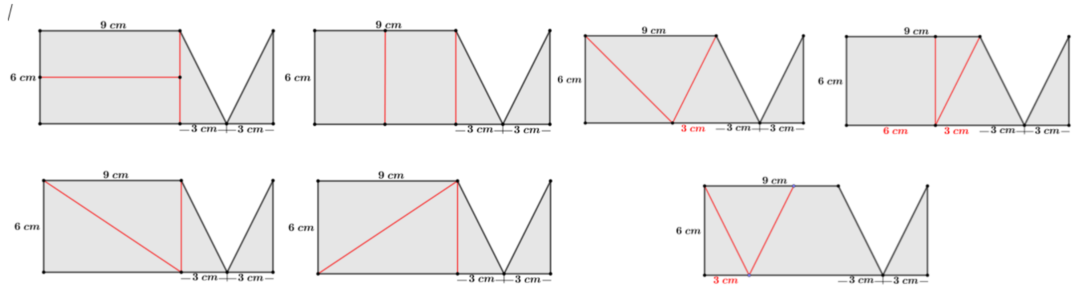


Figura 70. Soluciones mediante construcciones auxiliares interiores. Subdivisión en cuatro partes

Subdivisión en cinco partes (ver Figura 71).

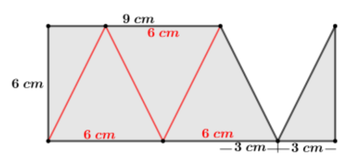


Figura 71. Solución mediante construcciones auxiliares interiores. Subdivisión en cinco partes

Subdivisión en seis partes (ver Figura 72).

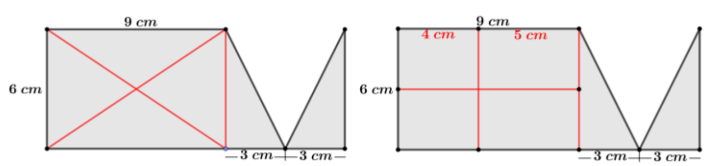


Figura 72. Soluciones mediante construcciones auxiliares interiores. Subdivisión en seis partes

Subdivisión en ocho partes (ver Figura 73).

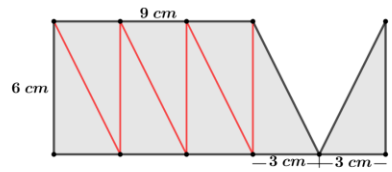


Figura 73. Soluciones mediante construcciones auxiliares interiores. Subdivisión en ocho partes

Tipo 2: Los estudiantes por medio de construcciones auxiliares hacen una ampliación de la figura para formar una figura conocida, determinan su área y restan el área sobrante que también constituye una figura conocida. En algunos casos también subdividen la figura principal en sub-figuras conocidas (ver Figura 74).

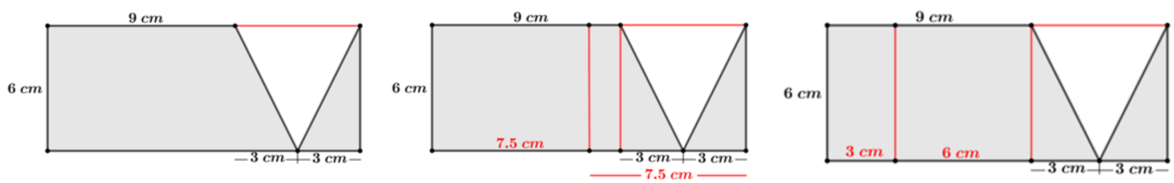


Figura 74. Soluciones mediante construcciones auxiliares exteriores y/o interiores

Recomposición de figuras: Los estudiantes hacen la descomposición de la figura principal y luego hacen una recomposición de esas partes, para configurar otra u otras figuras que conocen y determinar el área. (ver Figura 75).

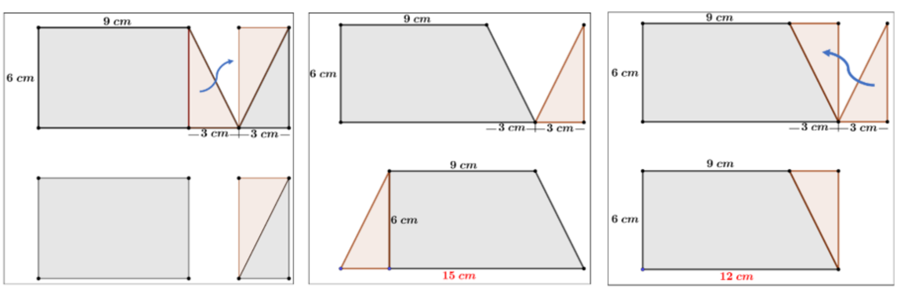


Figura 75. Soluciones mediante descomposición y recomposición de figuras

Originalidad: Los estudiantes aportaron 27 ideas originales y 15 de ellas fueron soluciones únicas dentro del grupo. La mayoría (88%) de estas soluciones originales consistían en el trazado de construcciones auxiliares de las categorías mencionadas en el apartado anterior y el 12% fueron desarrolladas por reconstrucción de figuras. A continuación, se muestran algunas de ellas en la Figura 76.

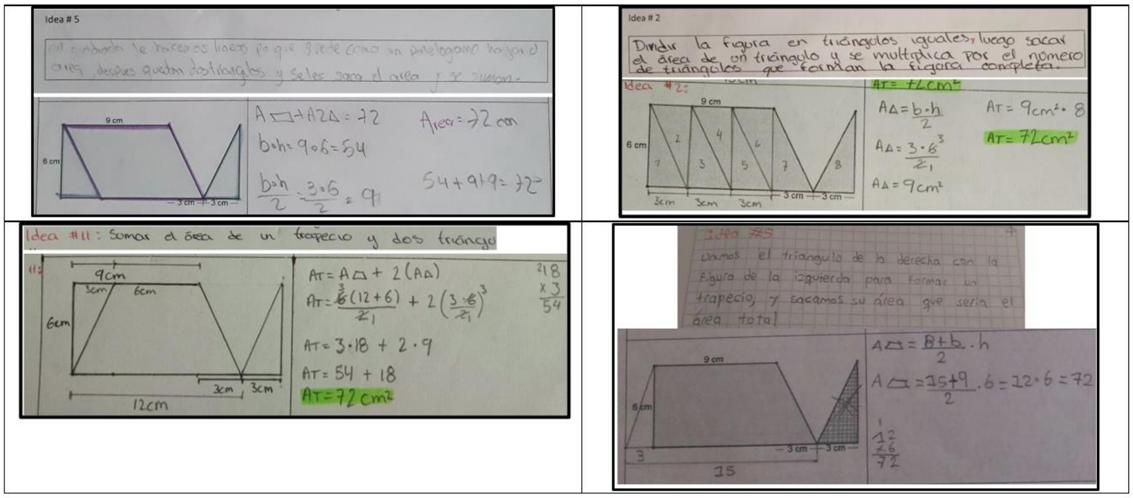


Figura 76. Soluciones originales aportadas por los estudiantes

Es importante mencionar que algunas ideas originales no efectivas conducían acertadamente a la solución del problema (ver Figura 77). Consideramos que este tipo de ideas bien puede servir para que el docente posteriormente muestre su desarrollo, puesto que puede influir positivamente en la generación de ideas similares cuando el estudiante se enfrente a nuevos problemas.

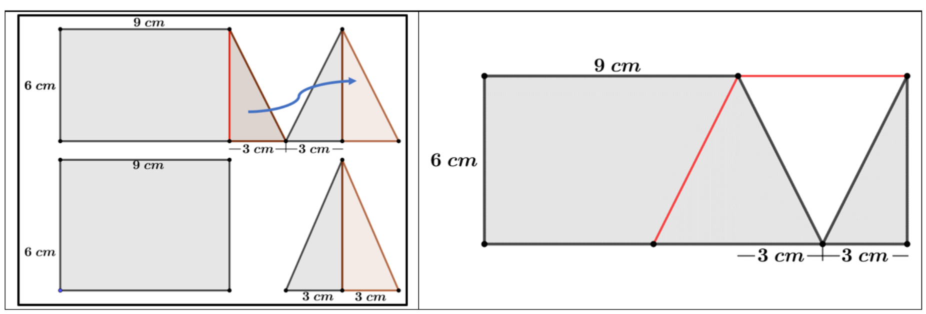


Figura 77. Ideas originales y enfocadas pero ineficaces

Conclusiones de la actividad

Se logra verificar que tanto las construcciones auxiliares como las composiciones y recomposiciones de figuras hacen parte fundamental de las ideas creativas para este problema. Se considera que la creatividad no solo está presente en las respuestas efectivas de los estudiantes, sino que también, producto del pensamiento divergente, pueden surgir ideas originales que mediante un ajuste o adecuación pueden conducir a soluciones creativas.

5.3.6. Análisis de la actividad 6. Área hexágono L.

Dado un hexágono en forma de L como el que se muestra en la Figura 78, el problema consiste en encontrar el área de la figura de todas las maneras en que se les ocurra a los estudiantes. Se espera que los estudiantes dibujen construcciones auxiliares por dentro y fuera de la figura formando diferentes polígonos de los que sean capaces de determinar su área.

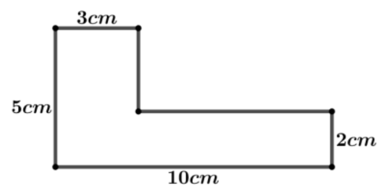


Figura 78. Hexágono en forma de L

Algunas de las construcciones auxiliares que se espera que los estudiantes hagan para solucionar el problema se muestran a continuación (Figura 79)

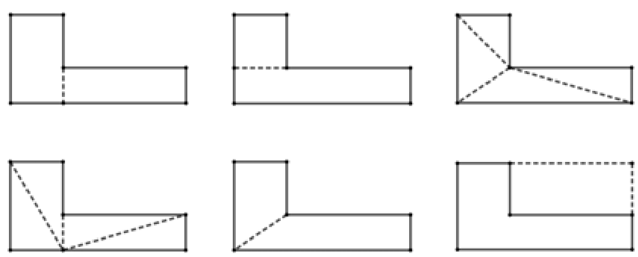


Figura 79. Construcciones auxiliares esperadas para la actividad # 6

Por otro lado, producto del pensamiento divergente se encontraron algunas ideas de solución o estrategias erróneas que se consideran infructuosas, puesto que los procedimientos no corresponden a las construcciones auxiliares dibujadas, se aplican teoremas, fórmulas o algoritmos al azar sin aportar a la solución del problema. En muchos casos se intentó aplicar el teorema de Pitágoras a como diera lugar sin analizar si en realidad se justificaba su uso. Algunas imágenes de lo mencionado anteriormente se pueden apreciar en la Figura 80.

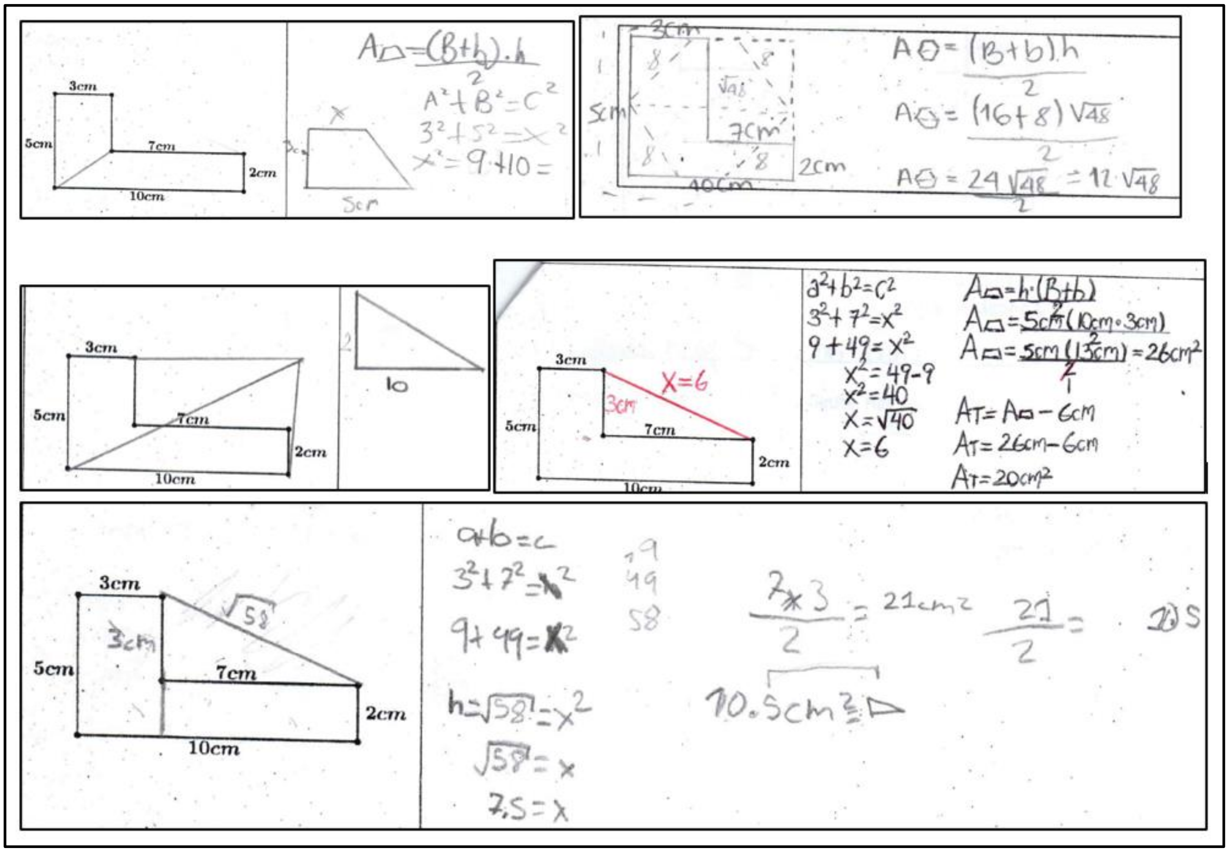


Figura 80. Ideas pensamiento divergente infructuoso. Actividad # 6.

Sin embargo, producto del pensamiento divergente también surgen algunas ideas que bien pueden llevarse a cabo, puesto que están enfocadas adecuadamente a solucionar el problema, pero en las que se falló en la aplicación de procedimientos (ver Figura 81).

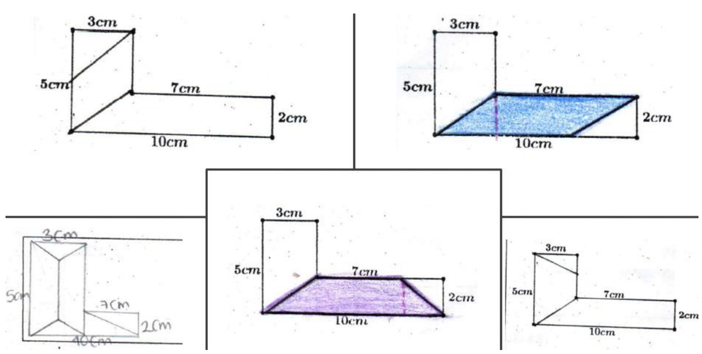


Figura 81. Pensamiento divergente enfocado- ineficiente. Actividad #6

Fluidez: Los estudiantes aportaron 274 ideas en total de las cuales 215 o el 78.47% fueron eficaces y el 21,53% ineficaces. En promedio a cada estudiante se le ocurrió 5 ideas, 4 de ellas eficaces y una ineficaz.

En total los estudiantes aportaron 26 soluciones diferentes al problema. De acuerdo con estos datos obtenidos se considera que la actividad desarrolla favorablemente la fluidez.

Flexibilidad: Para este problema los estudiantes desarrollaron 7 estrategias distintas, las cuales están relacionadas con construcciones auxiliares al interior y al exterior de la figura y con las fórmulas de las áreas de figuras planas como rectángulos, triángulos, trapecios que los estudiantes lograron recordar y aplicar. Algunos solo recordaron la forma de hallar el área de una figura e hicieron varias construcciones auxiliares con esta misma figura. Otros recordaron más de una y además propusieron soluciones que combinaban varias figuras.

1. *Rectángulos (R):* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares de tal forma que la figura inicial quede dividida en rectángulos. Posteriormente se determinan las áreas de dichos rectángulos y se suman para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 82).

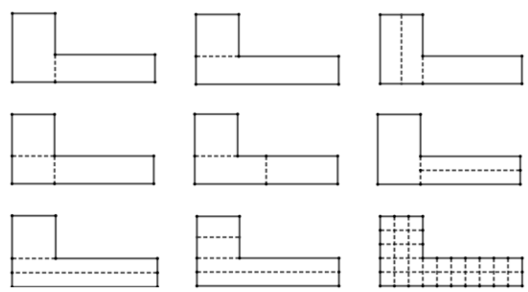


Figura 82. Construcciones auxiliares. Estrategia Rectángulos (R)

2. *Triángulos (Tri):* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares de tal forma que la figura inicial quede dividida en triángulos. Posteriormente se determinan las áreas de dichos triángulos y se suman para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 83).

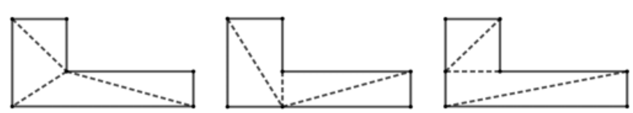


Figura 83. Construcciones auxiliares. Estrategia triángulos (R).

3. *Rectángulos y triángulos (RT):* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares de tal forma que la figura inicial quede dividida en rectángulos y triángulos. Luego se determinan las áreas de estas figuras y se suman para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 84).

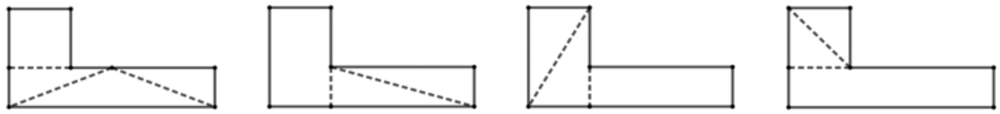


Figura 84. Construcciones auxiliares. Estrategia rectángulos y triángulos (R).

4. *Triángulos y trapecios (TT):* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares de tal forma que la figura inicial quede dividida en triángulos y trapecios. Luego se determinan las áreas de estas figuras y se suman para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 85).

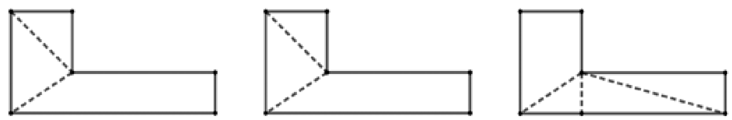


Figura 85. Construcciones auxiliares. Estrategia triángulos y trapecios (TT).

5. *Rectángulos, triángulos y trapecios (RTT).* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares de tal forma que la figura inicial quede dividida en rectángulos, triángulos y trapecios. Luego se determinan las áreas de estas figuras y se suman para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 86).

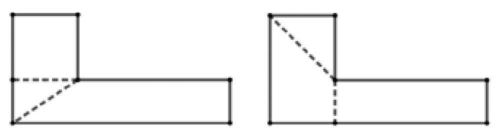


Figura 86. Construcciones auxiliares. Estrategia rectángulos, triángulos y trapecios (RTT)

6. *Trapecios (Tra):* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares de tal forma que la figura inicial quede dividida en trapecios. Posteriormente se determinan las áreas de dichos trapecios y se suman para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 87).

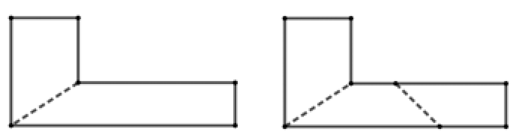


Figura 87. Construcciones auxiliares. Estrategia trapecios (Tra)

7. *Construcciones auxiliares exteriores (CAE).* Los estudiantes hacen construcciones auxiliares exteriores a la figura para determinar el área de una figura que sobrepasa totalmente o en parte a la figura inicial y posteriormente se resta el exceso de área calculando el área de otra figura para conseguir el área total del hexágono (ver Figura 88).

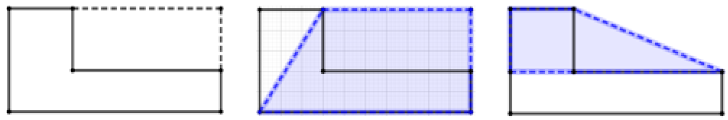


Figura 88. Construcciones auxiliares. Estrategia construcciones auxiliares exteriores (CAE)

Se considera que la actividad permite desarrollar la flexibilidad adecuadamente ya que los estudiantes propusieron varias estrategias para conseguir grupos de soluciones. A continuación, se muestra en la Tabla 3 el porcentaje de estudiantes que aplicó cada una de las estrategias.

Tabla 3. Porcentajes por estrategia

Estrategia	R	Tri	RT	TT	RTT	Tra	CAF
Porcentaje	97%	98%	50%	30%	5%	2%	7%

En promedio cada estudiante aplicó 3 de las 7 estrategias propuestas.

Originalidad: Las soluciones convencionales o con mayor frecuencia son las que se muestran a continuación en la Figura 89. La de la izquierda fue aportada por el 78,33% de los estudiantes mientras que la de la derecha fue aportada por el 73,33% de los estudiantes

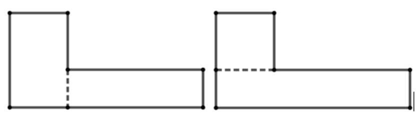


Figura 89. Soluciones convencionales. Actividad # 6

Por otro lado, las soluciones aportadas por entre el 15% y el 40 % de los estudiantes se pueden observar en la Figura 90. La idea de la izquierda fue aportada por el 21,67%, la del centro y la derecha fueron aportadas por el 48,33%.

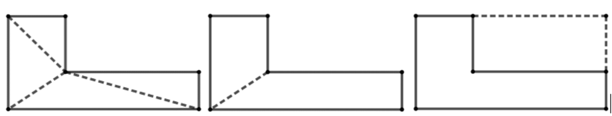


Figura 90. Soluciones aportadas

Finalmente se referencian algunas de las construcciones auxiliares que constituyeron soluciones originales aportadas por menos por el 15% de los estudiantes. Algunas de estas fueron soluciones únicas dentro del grupo. A continuación, se muestran las ideas menos frecuentes y con mayor detalle y elaboración que aportaron los estudiantes (ver Figura 91). Cabe aclarar que de izquierda a derecha la en las figuras 1 y 2 los estudiantes primero determinaron el área de los trapecios que se formaban con las construcciones dibujadas.

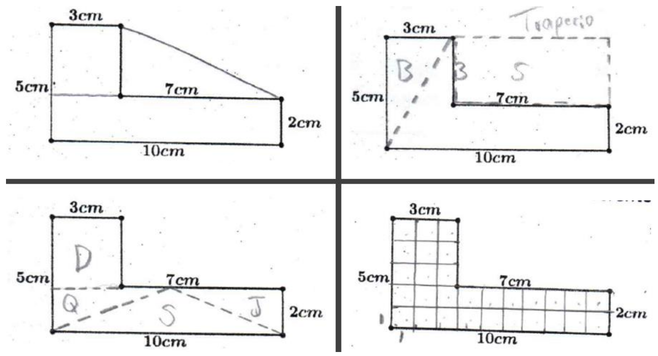


Figura 91. Soluciones originales. Actividad # 6

Conclusiones de la actividad

De acuerdo con los datos obtenidos en la actividad se considera que desarrolla claramente los aspectos de la creatividad, fluidez, flexibilidad y originalidad. Algo interesante que se pudo observar es que algunos estudiantes sólo recordaban cómo determinar el área de una figura, ya fuera el triángulo, rectángulo o trapecio y, aun así, lograron determinar varias formas de dividir la figura inicial y conseguir soluciones.

También son interesantes los intentos fallidos mostrados en la Figura 78, ya que allí se proponían construcciones auxiliares originales (*ninguna de las soluciones aportadas en la actividad incluyó un paralelogramo como los dibujados*) que no llegaron a concretarse y bien pueden ser aprovechadas para abordarlas en clase y mostrar en donde fallaron.

Si bien muchas de las construcciones auxiliares pasan de ser prácticas y necesarias, a ser exageradas e innecesarias, se considera que hacen parte del proceso de aprender a dibujarlas y de comprender cuando son realmente importantes, sobre todo en los estudiantes más jóvenes.

5.3.7. Análisis de la actividad 7. Área del hexágono.

El problema consiste en determinar el área de un hexágono regular de lado 6cm. Se espera que los estudiantes desarrollen distintas construcciones auxiliares que les permitan dividir la figura en otras figuras y determinen el área haciendo la suma de las áreas de las respectivas partes. Obviamente también se espera que los estudiantes recuerden la fórmula y la apliquen para determinar el área. Algunas de las soluciones esperadas se presentan en la Figura 92.

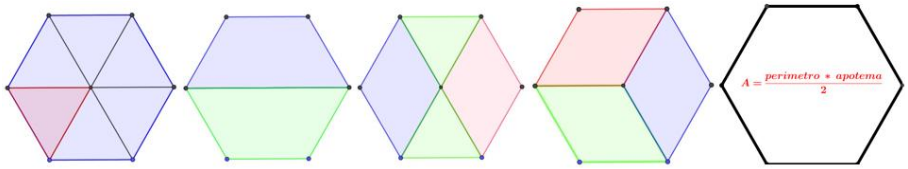


Figura 92. Posibles soluciones al problema, mediante construcciones auxiliares y aplicación de la fórmula

A continuación, en la Figura 93 se muestran algunos intentos de los estudiantes por resolver el problema, en los que no es posible ver con claridad una idea que conlleve a la solución. Estas propuestas se consideran producto del pensamiento divergente-infructuoso.

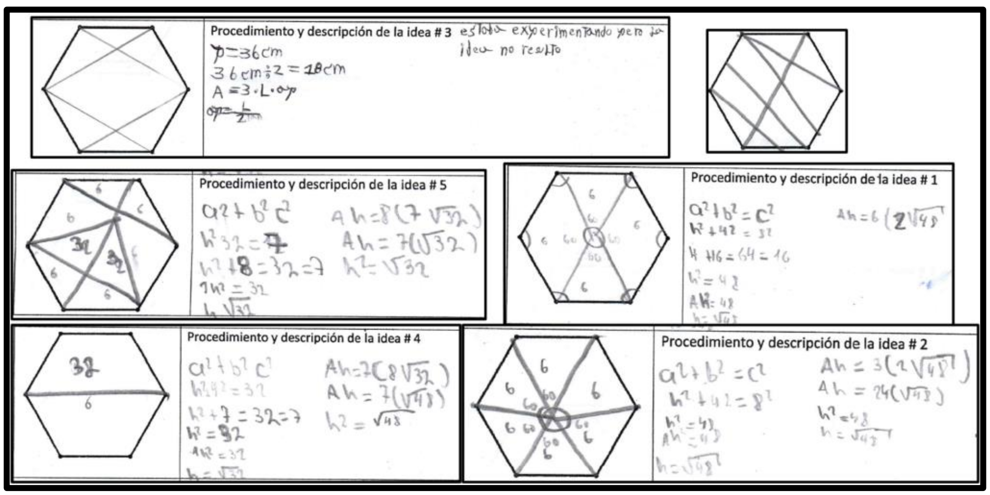


Figura 93. Ideas producto del pensamiento divergente-infructuoso. Actividad # 7

Algunos estudiantes dibujaron ciertas construcciones auxiliares que bien podrían concretarse en soluciones efectivas; sin embargo, no lo pudieron llevar a cabo por múltiples factores. En algunos casos fue porque no conocían cómo determinar el área de una figura específica en las que quedaba dividida el hexágono. Muchos estudiantes hacían trazos y formaban trapecios, rombos, paralelogramos, entre otros, pero no recordaban cómo se determinaba el área de uno de ellos. Por tanto, no conseguían solucionar el problema con esta construcción auxiliar por lo que muchas de las soluciones están condicionadas al conocimiento de las formas de determinar las áreas de los polígonos en los que podía ser dividido el hexágono. Estas ideas se consideran enfocadas pero ineficaces y producto del pensamiento divergente (ver Figura 94).

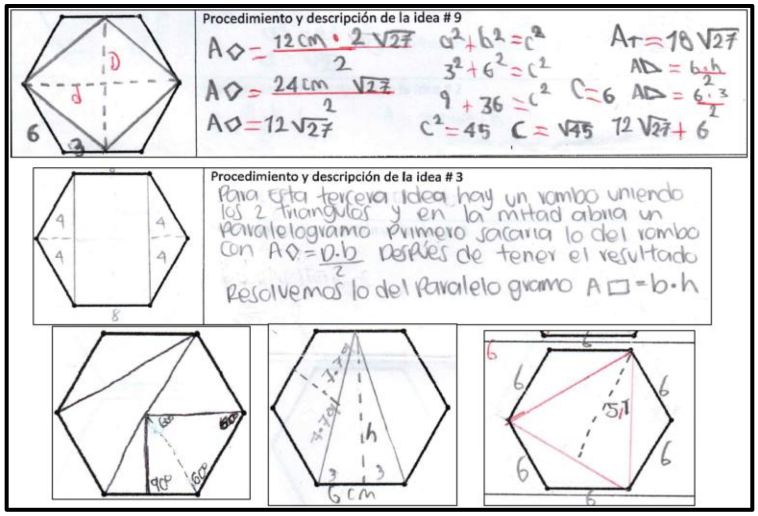


Figura 94. Ideas producto del pensamiento divergente enfocado- ineficaz. Actividad #7

Fluidez: Para esta actividad los estudiantes propusieron 295 ideas en total, de las cuales 180 o el 61,02% fueron eficaces y 115 o el 38,98% fueron ineficaces. Cada estudiante en promedio propuso alrededor de 5 ideas, de las que 3 fueron eficaces y 2 ineficaces. Se registraron 33 soluciones distintas al problema. A partir de estos resultados se puede concluir que la actividad desarrolla efectivamente la fluidez.

Flexibilidad: Los estudiantes propusieron diversas maneras de abordar el problema. Como se esperaba, se hicieron construcciones auxiliares al interior del hexágono, pero también se propusieron construcciones auxiliares por fuera del hexágono conformando ideas válidas y originales de abordar el problema. Tan solo el 10% de los estudiantes determinó el área del hexágono mediante la fórmula de perímetro por apotema dividido entre dos. Algo que tampoco se esperaba y se hizo por parte de los estudiantes fue hacer construcciones auxiliares para descomponer el hexágono en varias figuras y luego recomponer otra figura de la que se conociera como determinar el área.

Se clasificaron las respuestas de los estudiantes en 5 estrategias, de las cuales las tres primeras están relacionadas con la forma en que se determinan las áreas de polígonos como el triángulo, el trapecio, rectángulo, paralelogramo y rombo. Se hizo de esta manera puesto que los estudiantes desarrollaban sus soluciones en relación con las figuras de las que saben determinar su área. Es decir, si un estudiante solo recuerda cómo determinar el área del triángulo, basa sus soluciones en construcciones auxiliares que le permitieran usar ese recurso, mientras que, si recuerda las áreas de otras figuras, las combina para determinarla dividiéndola en partes con estas figuras.

A continuación, se presentan con detalle las estrategias utilizadas por los estudiantes.

1. *Una figura plana:* consiste en dividir el hexágono utilizando una sola figura, es decir, se dividen únicamente utilizando triángulos, trapecios, rombos y paralelogramos, para posteriormente calcular el área de las partes y sumarlas para determinar el área total del hexágono (ver Figura 95).

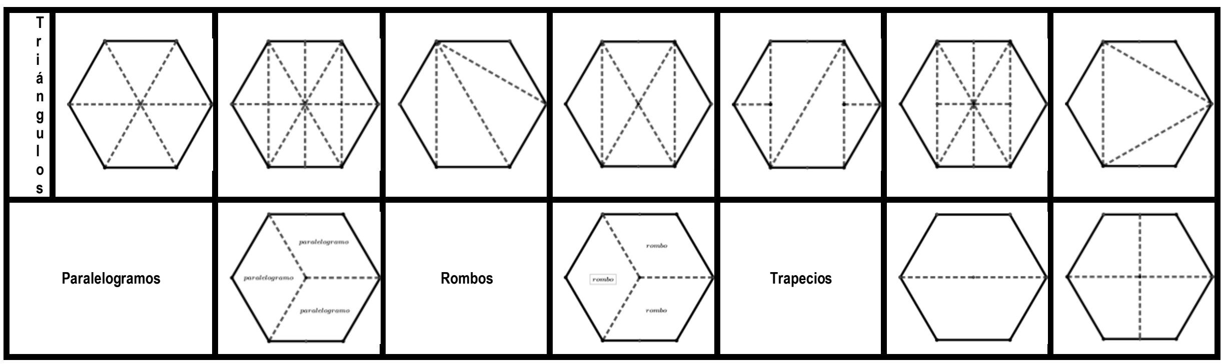


Figura 95. Construcciones auxiliares estrategia una figura plana

Como se observa una misma construcción auxiliar puede abordarse desde distintos puntos de vista y por tanto con procedimientos distintos. Para algunos estudiantes el trazado de líneas auxiliares como las de la Figura 96, configuraba tres paralelogramos, pero para otros configuraba tres rombos y por lo tanto sus procedimientos fueron distintos. Incluso algunos estudiantes advirtieron esta posibilidad e hicieron no solo estas dos soluciones por aparte, sino que propusieron soluciones donde combinaban paralelogramos y rombos como se puede ver en la Figura 97.

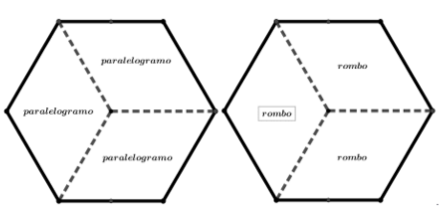


Figura 96

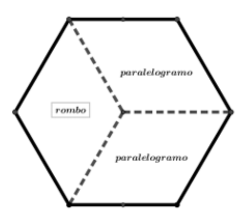


Figura 97

2. *Dos figuras planas*: consiste en dividir el hexágono utilizando dos figuras planas diferentes, para posteriormente calcular el área de las partes y sumarlas para determinar el área total del hexágono. En esta estrategia los estudiantes propusieron soluciones con triángulos y rectángulos, trapecios y triángulos, rombos y triángulos, paralelogramos y triángulos, y finalmente, paralelogramos y rombos como se muestra en la Figura 98.

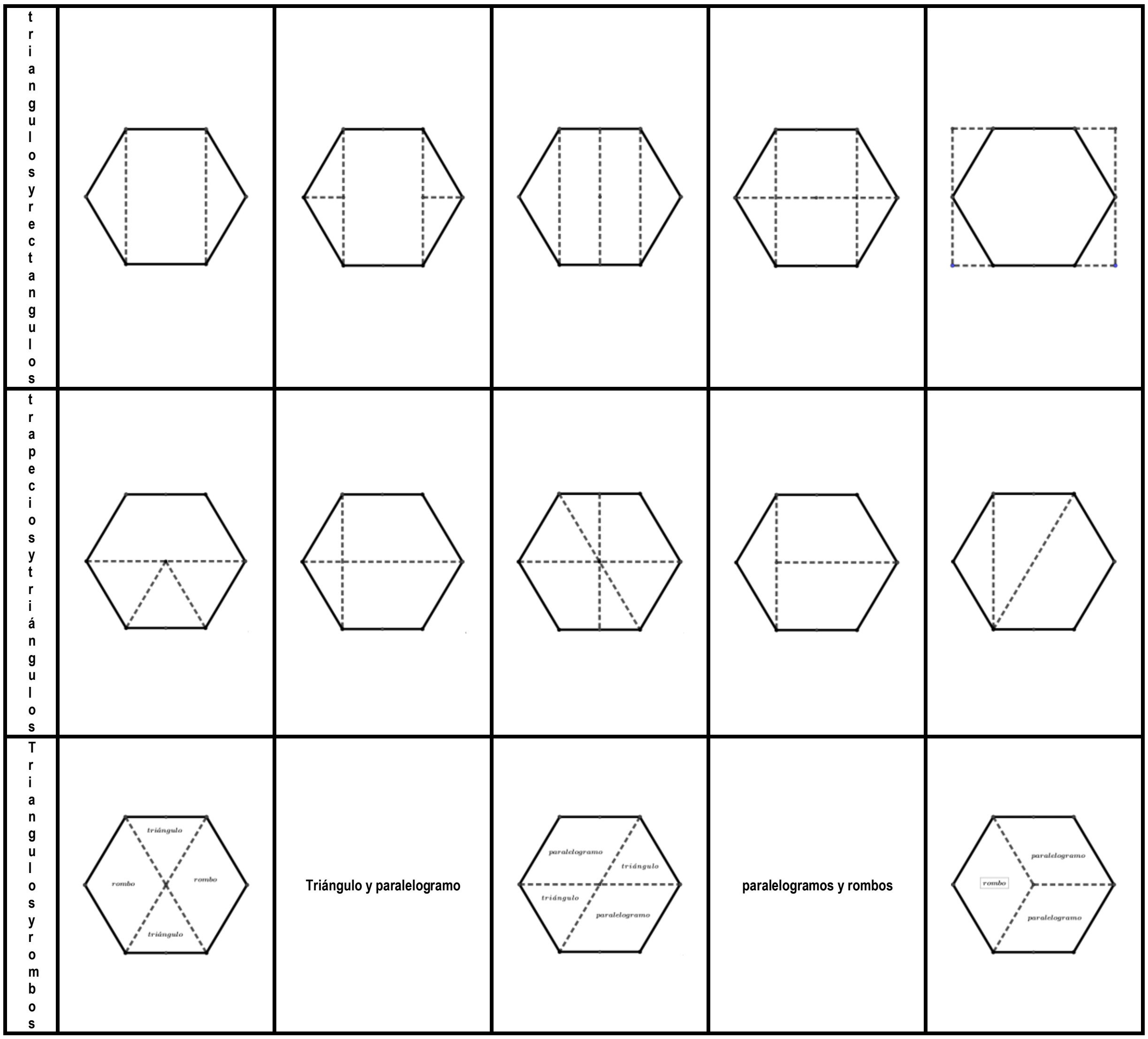


Figura 98. Construcciones auxiliares estrategia dos figuras planas.

Nuevamente ocurre algo similar a lo sucedido en la estrategia anterior, algunos estudiantes dividen la figura en dos rombos y dos triángulos, pero otros estudiantes con la misma construcción asumen dos paralelogramos y dos triángulos y por lo tanto sus procedimientos son distintos. Otros estudiantes hacen los dos procedimientos asumiendo dos formas distintas de solucionar el problema.

También se aplicó esta estrategia mediante construcciones auxiliares por fuera de la figura, configurando un rectángulo y restando el área de 4 triángulos rectángulos de las esquinas como se evidencia en la Figura 99.

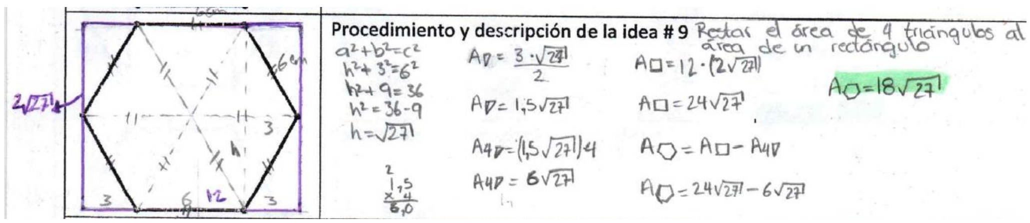


Figura 99. Solución con construcciones auxiliares exteriores aportada por un estudiante

3. *Tres figuras planas:* consiste en dividir el hexágono utilizando tres figuras planas diferentes, para posteriormente calcular el área de las partes y sumarlas para determinar el área total del hexágono. En esta estrategia los estudiantes propusieron soluciones con trapecio, rombo y triángulo; trapecio, triángulo y rectángulo; y trapecio, triángulo y paralelogramo, como se muestra en la Figura 100.

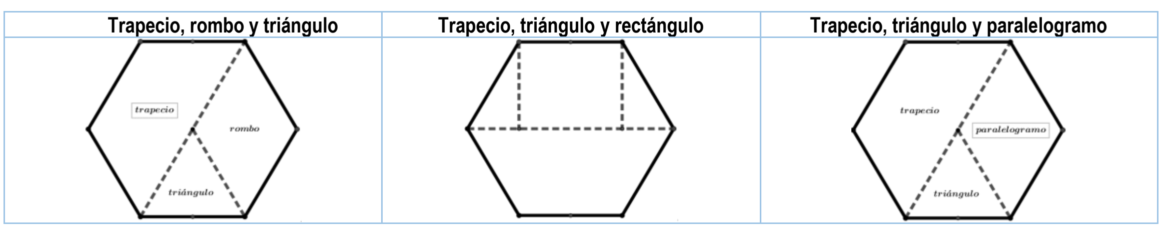


Figura 100. Construcciones auxiliares estrategia tres figuras planas.

4. *Descomposición y recomposición*: consiste en hacer trazos auxiliares para dividir el hexágono en varias partes y posteriormente con estas partes recomponer una nueva figura para calcular su área, que resulta ser equivalente al área de la figura original (ver Figura 101).

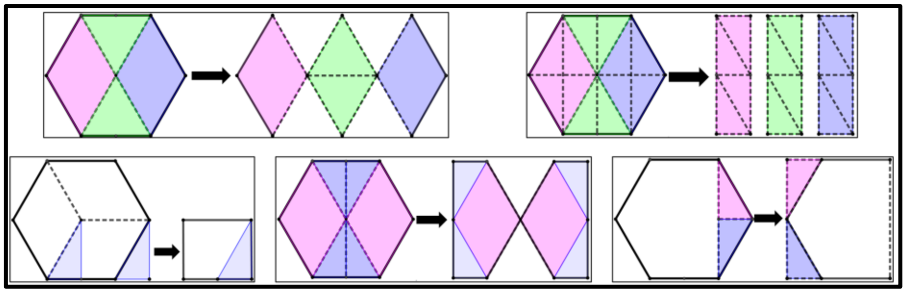


Figura 101. Ilustración de descomposición y recomposición de figuras. Actividad #7.

En la Figura 102, se puede observar un estudiante que hace uso de esta estrategia.

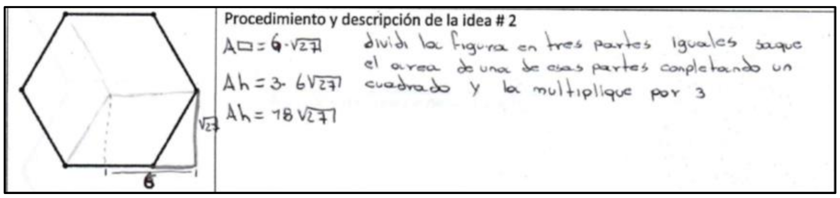


Figura 102. Aplicación de la estrategia de descomposición y recomposición de figuras. Actividad # 7

5. *Uso de la fórmula:* consiste en aplicar la fórmula para determinar el área de polígonos regulares $A = \frac{perímetro \cdot apotema}{2}$.

La actividad logra desarrollar adecuadamente la flexibilidad, puesto que se generaron 5 estrategias distintas para conseguir soluciones, en las tres primeras hay unas subcategorías que se aplicaron por separado y también combinadas. A continuación, en la Tabla 4 se relaciona el porcentaje de estudiantes que utilizaron cada una de las estrategias mencionadas y sus respectivas subcategorías.

Tabla 4. Relación de estrategias y su porcentaje de aplicación. Actividad #7

<table>
<tr><th colspan="60">UNA FIGURA PLANA</th></tr>
<tr><td colspan="60">91,67%</td></tr>
<tr><td colspan="15">Triángulos</td><td colspan="15">Paralelogramos</td><td colspan="15">Rombos</td><td colspan="15">Trapecios</td></tr>
<tr><td colspan="15">83,33%</td><td colspan="15">1,67%</td><td colspan="15">11,67%</td><td colspan="15">76,66%</td></tr>
<tr><th colspan="60">DOS FIGURAS PLANAS</th></tr>
<tr><td colspan="60">48,33%</td></tr>
<tr><td colspan="12">Triángulos y rectángulos</td><td colspan="12">Triángulos y trapecios</td><td colspan="12">Triángulo y rombo</td><td colspan="12">Triángulo y paralelogramo</td><td colspan="12">Paralelogramo y rombo</td></tr>
<tr><td colspan="12">45%</td><td colspan="12">45%</td><td colspan="12">6,67%</td><td colspan="12">1,67%</td><td colspan="12">1,67%</td></tr>
<tr><th colspan="60">TRES FIGURAS</th></tr>
<tr><td colspan="60">5%</td></tr>
<tr><td colspan="20">Trapecio, rombo y triángulo</td><td colspan="20">Trapecio, triángulo y rectángulo</td><td colspan="20">Trapecio, triángulo y paralelogramo</td></tr>
<tr><td colspan="20">3,33%</td><td colspan="20">1,67%</td><td colspan="20">1,67%</td></tr>
<tr><th colspan="60">DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN DE FIGURAS</th></tr>
<tr><td colspan="60">13,33%</td></tr>
<tr><th colspan="60">FÓRMULA ÁREA HEXÁGONO</th></tr>
<tr><td colspan="60">10%</td></tr>
</table>

Originalidad: A continuación, se muestran las construcciones auxiliares más comunes o convencionales que usaron los estudiantes para posteriormente calcular el área de cada una de sus partes y sumarlas para conseguir el área total del hexágono. (Ver Figura 103).

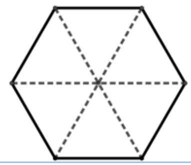
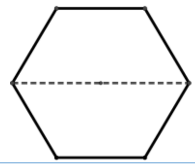
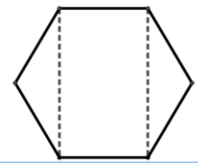
		
80%	75%	41,67%

Figura 103. Soluciones convencionales. Actividad # 7.

A estas soluciones le siguen la división del hexágono en tres rombos con un 11,67%, o su división en dos rectángulos y dos triángulos con un 8,33% y la división en dos rombos y dos triángulos con un 6,67%. Por otro lado, con el 10% se tiene la descomposición del hexágono en dos rombos y dos triángulos, para luego recomponerlo en tres rombos y finalmente, con el 10% la aplicación de la fórmula, perímetro por apotema entre dos (ver Figura 104).

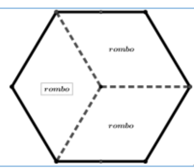
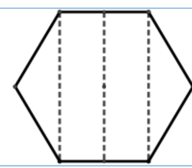
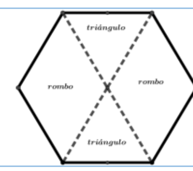
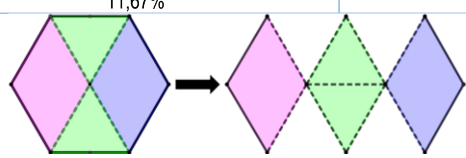
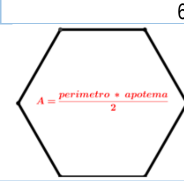
		
11,67%	8,33%	6,67%
		
10%	10%	

Figura 104. Soluciones aportadas entre el 6% y el 12 % de los estudiantes. Actividad # 7.

Finalmente, en las figuras 105 y 106 se muestran algunas de las soluciones más originales propuestas por los estudiantes y aportadas por menos del 4% de ellos.

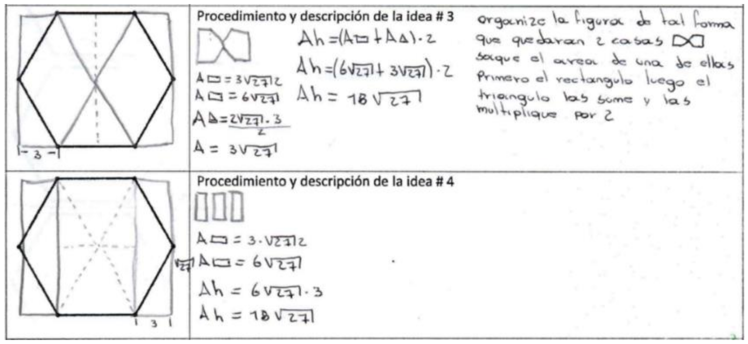


Figura 105. Soluciones originales 1. Actividad #7

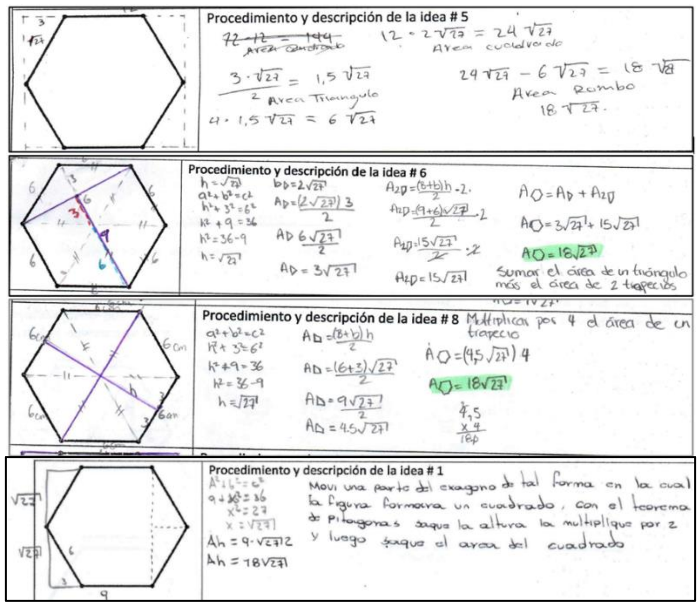


Figura 106. Soluciones originales 2. Actividad #7

Conclusiones de la actividad

La actividad promueve el desarrollo efectivo de la fluidez, flexibilidad y originalidad. Es interesante ver que hay ideas de solución como las mostradas en la Figura 91, que bien pueden convertirse en soluciones creativas, pero que también sirven para el análisis posterior con los estudiantes y descifrar en qué fallaron. Este tipo de ideas permite afirmar que las ideas creativas no solo se pueden observar en las ideas eficaces de los estudiantes, puesto que hay ideas valiosas en los errores cuya evaluación y consecución pueden establecer nuevas conexiones entre conceptos.

Por otra parte, cabe destacar que la aplicación de la fórmula, perímetro por apotema entre dos, fue aplicada tan solo por el 10% de los estudiantes que la recordaron. Para autores como Leikin (2007) las soluciones aportadas por menos del 15% de los individuos dentro de un grupo son consideradas originales; sin embargo, en este caso no se considera así, puesto que parece ser solo la aplicación de una fórmula que se recuerda, pero no hay un aporte de nuevos elementos en el desarrollo de la solución del problema.

En algunos casos se pueden apreciar soluciones muy simples y originales, mientras que en otros casos hay gran elaboración de procedimientos. Se considera que la actividad promueve estas dos formas de producir soluciones originales; a veces la creatividad en la escuela es el resultado de recordar y establecer relaciones entre diferentes conceptos aprendidos, pero en otros casos precisamente consiste en hacer evidente un camino más corto en el que se evitan procedimientos innecesarios.

Finalmente, se consideran las construcciones auxiliares como una característica de la creatividad. Sin embargo, se pudo evidenciar que una misma construcción auxiliar en algunos casos promueve diferentes procesos de solución por diferentes estudiantes o simplemente un solo estudiante percibe varias formas de proceder mediante la misma construcción. Esto también se considera como un factor que promueve el establecimiento de conexiones entre conceptos y que por ende puede favorecer el desarrollo de la creatividad.

5.3.8. Análisis de la actividad 8. Plantillas del cubo.

Para esta actividad se propone a los estudiantes dibujar todas las plantillas con las que posteriormente se pueda construir un cubo. Las posibles respuestas utilizando cuadrados se muestran en la Figura 107.

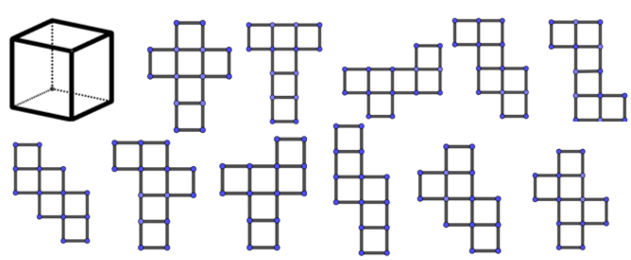


Figura 107. Soluciones plantillas del cubo

El propósito es que los estudiantes, mediante procesos de visualización, determinen qué características deben tener estas plantillas para que efectivamente se pueda construir un cubo con ellas y desarrollen estrategias para validar o rechazar posibles plantillas.

A continuación, en la Figura 108 se muestran algunos de los intentos de los estudiantes, donde no hay claridad de la intención de resolver el problema, solamente parecen ideas al azar que los estudiantes resultan dibujando. Esto es considerado como pensamiento divergente-infructuoso.

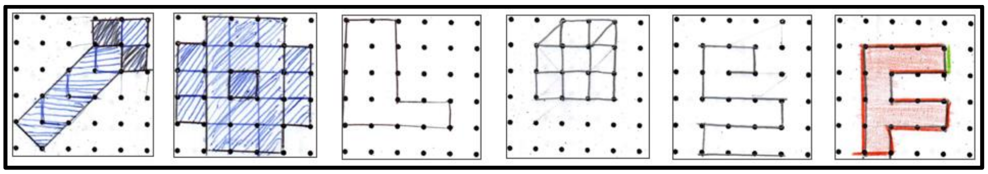


Figura 108. Ideas producto del pensamiento divergente-infructuoso. Actividad # 8.

Por otra parte, los estudiantes también proponen ideas en las que intentan dibujar plantillas que no necesariamente utilizan cuadrados. En la Figura 109 se observa cómo los estudiantes dibujan plantillas utilizando triángulos, partes curvas e intentan hacer plantillas que encajen como figuras de rompecabezas. Ninguna de estas figuras conforma efectivamente la plantilla de un cubo. Pero se consideran ideas originales y creativas que, en muchos casos, como se muestra más adelante, se adecuaron y concretaron en ideas efectivas. Estas ideas se consideran ideas producto del pensamiento divergente enfocado-ineficiente.

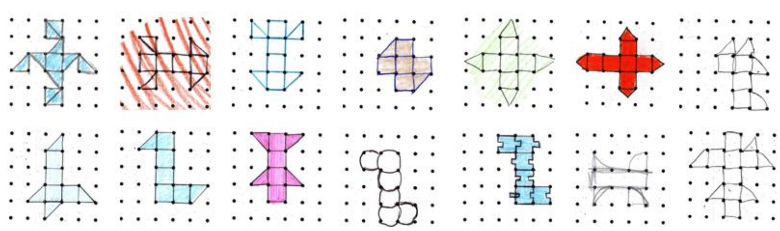


Figura 109. Ideas encocadas-ineficientes. Actividad # 8

Fluidez: Los estudiantes propusieron 595 ideas en total, de las cuales 228 o el 38.32% fueron eficaces y 367 o el 61.68% fueron ineficaces. Cada estudiante en promedio propuso alrededor de 10 ideas de las que 4 fueron eficaces y 6 ineficaces. En el proceso de solución se registraron 20 soluciones distintas al problema. A partir de estos resultados se puede concluir que la actividad desarrolla efectivamente la fluidez.

Flexibilidad: Para esta actividad los estudiantes desarrollaron su flexibilidad, ya que no sólo propusieron soluciones con partes cuadradas, sino que guiaron sus ideas en otra dirección y lograron crear plantillas con cuadrados y triángulos, y cuadrados combinadas con otras figuras en las que dividían uno de los cuadrados. Algunos estudiantes propusieron, como se pudo ver en la Figura 101, algunas alternativas con partes curvas que no fueron concretadas.

A continuación, se presentan con detalle las estrategias utilizadas por los estudiantes:

1. *Plantillas con cuadrados (CP)*. Consiste en explorar todas las posibilidades para conformar la plantilla de un cubo mediante el dibujo de cuadrados. En total hay 11 posibilidades que se muestran en la Figura 110.

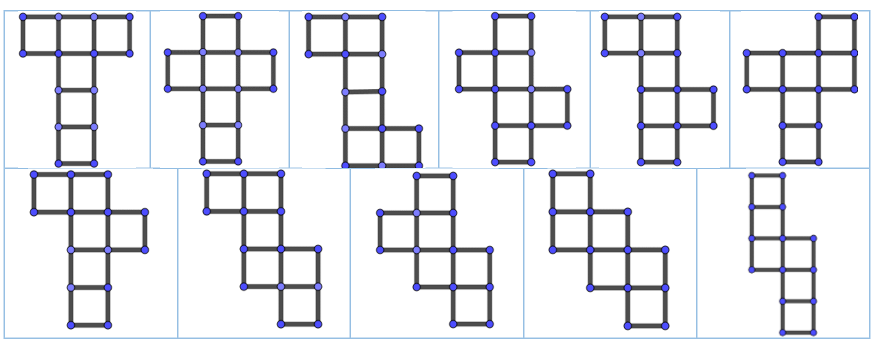
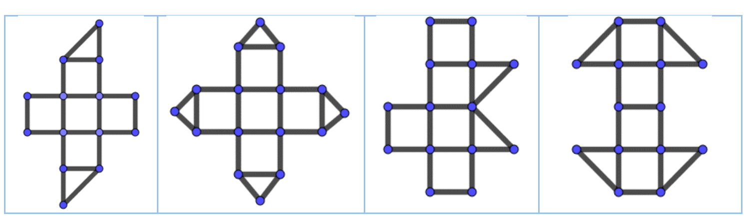


Figura 110. Plantillas con cuadrados.

2. *Plantillas con cuadrados y triángulos (PCT):* consisten en explorar las posibilidades de conformar plantillas para un cubo utilizando tanto cuadrados como triángulos. Los estudiantes propusieron 8 soluciones distintas usando esta estrategia, las cuales se muestran en la Figura 111.



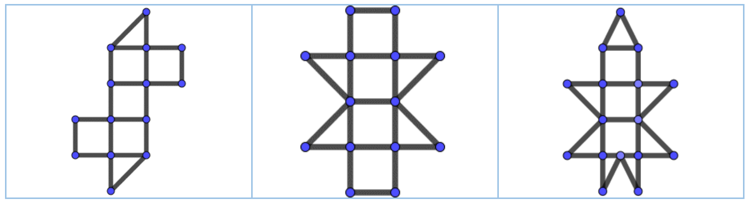


Figura 111. Plantillas con cuadrados y triángulos.

3. *Plantillas con cuadrados y otras figuras (PCF):* consisten en explorar las posibilidades de conformar plantillas para un cubo utilizando cuadrados y otras partes conformadas por fracciones del cuadrado, que al realizar el desarrollo del cubo encajan para formar las caras. Los estudiantes propusieron 2 soluciones distintas usando esta estrategia, las cuales se muestran en la Figura 112.

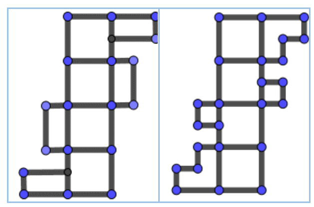


Figura 112. Plantillas con cuadrados y otras figuras.

La estrategia *(PC)* fue aplicada por el 90% de los estudiantes, mientras que la estrategia *(PCT)* fue aplicada por el 18% de los estudiantes y finalmente la estrategia *(PCF) un 2%*. De acuerdo con estos datos se considera que la actividad promueve efectivamente la fluidez, puesto que no solo se plantearon soluciones con cuadrados, sino que se exploraron nuevas posibilidades que permitieron desarrollar otras plantillas distintas y que se considera favorecen los procesos de visualización.

Originalidad: Las cuatro soluciones más convencionales se muestran a continuación con su respectivo porcentaje en la Figura 113.

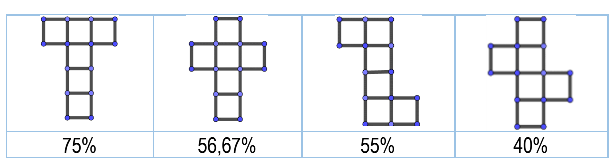


Figura 113. Soluciones convencionales. Actividad # 8.

A estas le siguen soluciones propuestas por entre el 15% y 40% de los estudiantes que se muestran en la Figura 114.

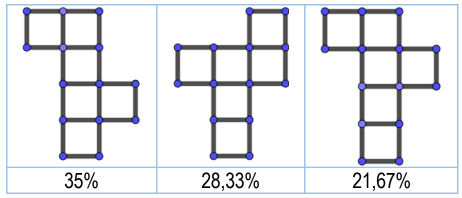


Figura 114. Soluciones aportadas por entre el 15% y 40% de los estudiantes. Actividad # 8.

Finalmente, se muestran las soluciones más originales y creativas dentro del grupo con una frecuencia menor al 15% (ver Figura 115).

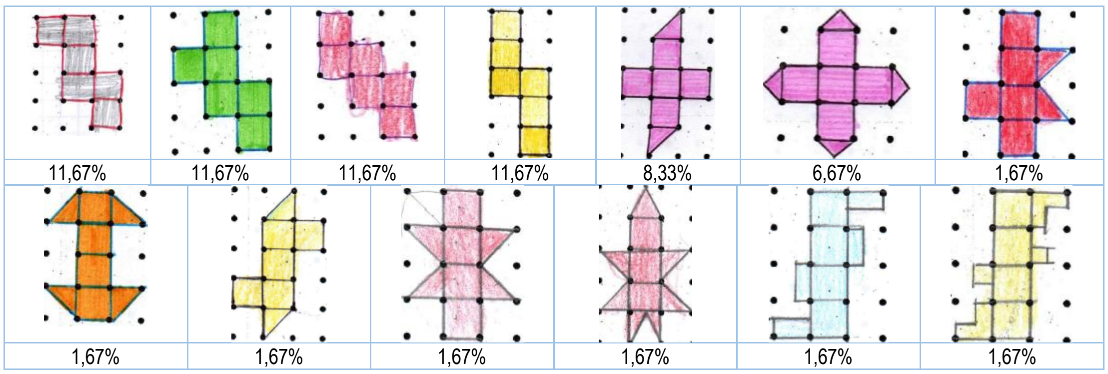


Figura 115. Soluciones aportadas por menos del 15% de los estudiantes. Actividad # 8.

Conclusiones

Claramente la actividad promueve la fluidez, flexibilidad y originalidad, aspectos importantes para la creatividad. La actividad permite generar procesos de visualización en los que los estudiantes propusieron plantillas con figuras distintas a los cuadrados convencionales. Se considera que este es un aspecto clave para la creatividad, puesto que permite salirse de los parámetros convencionales y proponer ideas con diferentes construcciones. En particular, nuevamente se hacen presentes las ideas con partes curvas, que si bien no se concretaron sí se pueden adecuar estas ideas y hacerlas funcionar, tal y como se logró hacer en las soluciones en las que se aplicó la estrategia *(PCF)*.

Es interesante ver que el pensamiento divergente infructuoso hace parte de las ideas de varios estudiantes que luego proponen ideas originales. El simple hecho de permitir a los estudiantes la equivocación hace que de forma espontánea sus ideas exploren otras direcciones que mediante el pensamiento convergente se adecúan o simplemente se rechazan.

5.3.9. Análisis de la actividad 9. Poliedros y aristas.

La actividad consiste en solicitar a los estudiantes que dibujen en una hoja cuadriculada todos los poliedros que puedan imaginar con 12 aristas. Para esto se suministra a los estudiantes varillas de pasta y plastilina, con el fin de que puedan explorar algunas soluciones con ayuda del material. La pasta no viene cortada, sino que se espera que ellos la corten a conveniencia dependiendo del poliedro que imaginen y puedan construir. Algunas de las soluciones que se esperan por parte de los estudiantes se muestran en la Figura 116.

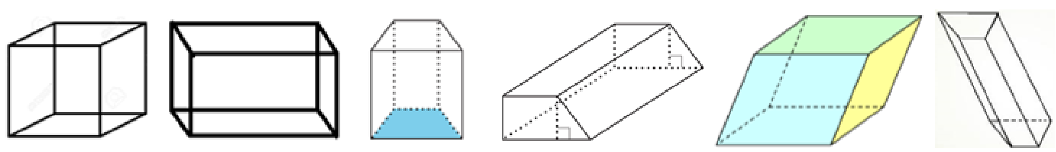


Figura 116. Algunas posibles soluciones. Actividad # 9

Por otra parte, algunos estudiantes, a pesar de tener el material y poder verificar la cantidad de aristas, al parecer hicieron algunos dibujos al azar. Como se muestra en la Figura 117.

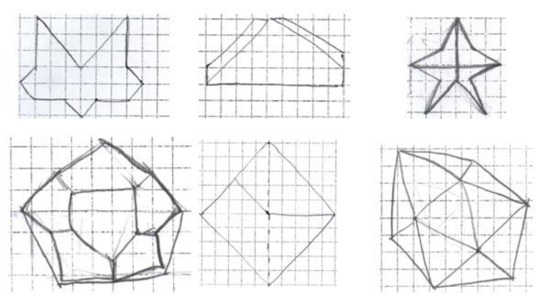


Figura 117. Pensamiento divergente-infructuoso. Actividad # 9

Ideas de este tipo van más allá de estudiantes que no comprenden la actividad, puesto que, este tipo de ideas se evidencian también en estudiantes que aportan soluciones efectivas, no sólo convencionales sino también originales dentro del grupo. Este tipo de ideas se consideran producto del pensamiento divergente-infructuoso.

Por otra parte, también hay ideas claramente enfocadas en solucionar el problema, algunos estudiantes logran concretarlas mediante alguna adecuación, como las que se muestran en la Figura 118. Los estudiantes propusieron dibujos en relación con las construcciones que hacían con la pasta y la plastilina, algunos advierten el error de que están utilizando más aristas y logran adecuar la figura y llegar a una solución.

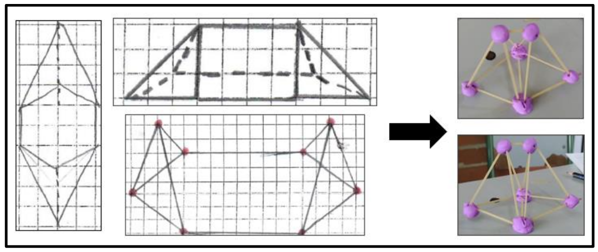


Figura 118. Idea ineficaz con más de 12 aristas y una adecuación aportada por un estudiante.

Aquí se muestra otra idea de construir un poliedro con doce aristas (Figura 119). Los estudiantes unían la pasta, pero no tenían en cuenta las aristas del polígono que se forma en el centro del sólido. Algunos advierten el error y logran conseguir un octaedro.

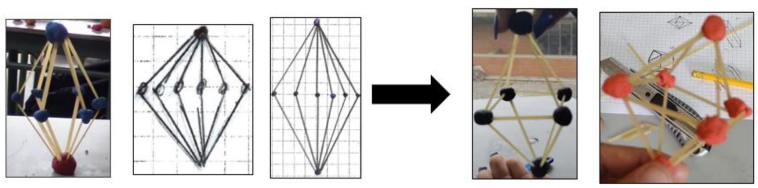


Figura 119. Idea ineficaz de que no tiene en cuenta todas las aristas del sólido y la adecuación aportada por dos estudiantes.

En este caso (Figura 120), se puede observar por una parte que nuevamente se ignoran aristas que normalmente formaría el sólido dibujado; sin embargo, mediante un ajuste se logra construir un poliedro con un prisma triangular y tetraedro con las 12 aristas solicitadas. Por otra parte, en el segundo dibujo se tiene un prisma triangular, pero este está unido por una de sus caras laterales a una pirámide de base cuadrada, formando un sólido de 13 aristas. Algunos lograron advertir el error y hacer adecuaciones para conseguir un poliedro igual al del primer caso.

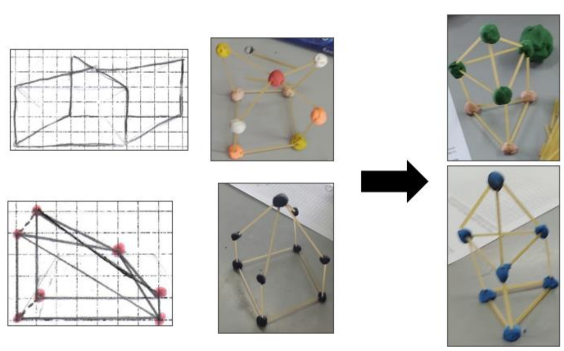


Figura 120. Ideas ineficaces que algunos estudiantes adecuaron para lograr una solución efectiva

Los casos en los que no se logra concretar una solución efectiva al problema se consideran ideas producto del pensamiento divergente enfocado pero ineficiente. También se considera que el uso del material concreto promueve la exploración divergente de diferentes formas de poliedros que mentalmente no pueden llevarse a cabo.

Otro caso interesante que se pudo observar es que los estudiantes, en la exploración y búsqueda de soluciones creativas, propusieron algunas ideas como las que se muestran en la figura 121. En las que no se advierte que se están formando sólidos con caras curvas.

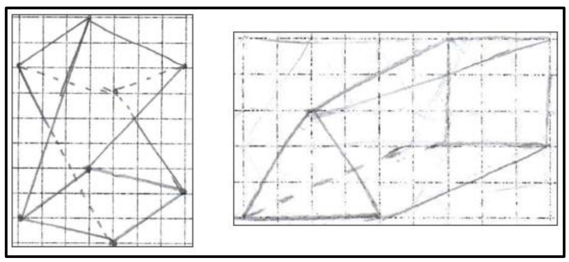


Figura 121. Intento de solución ineficaz con caras curvas.

Fluidez: Los estudiantes propusieron 344 ideas en total, de las cuales 151 o el 43,9% fueron eficaces y 193 o el 56,1% fueron ineficaces. Cada estudiante en promedio propuso alrededor de 6 ideas de las que 3 fueron eficaces y 3 ineficaces. Se registraron 20 soluciones distintas al problema. A partir de estos resultados se puede concluir que la actividad desarrolla efectivamente la fluidez.

Flexibilidad: La flexibilidad en esta actividad estuvo influenciada en parte por el uso del material concreto, puesto que permitió a los estudiantes explorar nuevas posibilidades hasta conseguir soluciones fuera de lo común. Dentro de las familias de soluciones que propusieron los estudiantes se pueden clasificar los que construyeron y dibujaron prismas, pirámides, tronco de pirámide, octaedros, kiosco (prisma triangular unido a una pirámide triangular) y finalmente los que propusieron soluciones que son efectivamente poliedros de 12 aristas, pero que no se clasifican en ningún sólido conocido. A continuación, se detallan cada una de estas clases.

1. *Prismas*: Consiste en construir o dibujar prismas rectos y oblicuos cuyas bases son cuadriláteros de todo tipo, cóncavos y convexos (ver Figura 122).

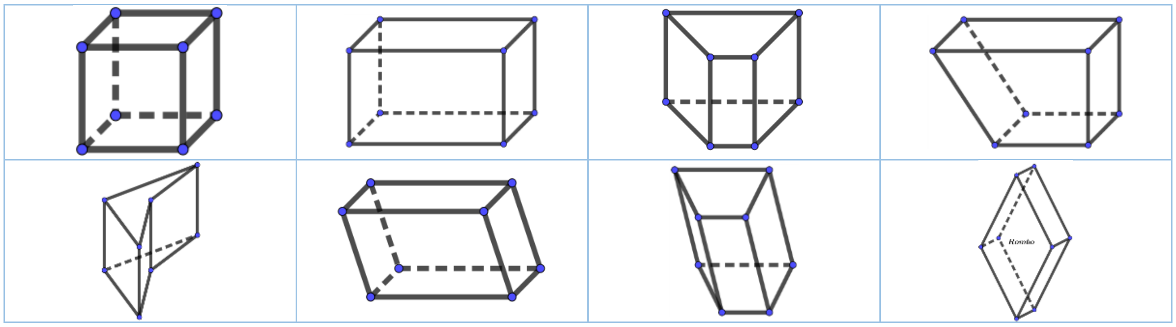


Figura 122. Soluciones con forma de prisma. Actividad # 9

2. *Pirámide*: Consiste en construir o dibujar pirámides hexagonales rectas u oblicuas de base regular o irregular (ver Figura 123).

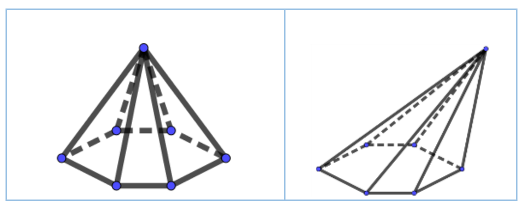


Figura 123. Soluciones con forma de pirámide hexagonal.

3. *Tronco de pirámide:* Consiste en construir o dibujar el tronco de una pirámide con base cuadrangular (ver Figura 124).

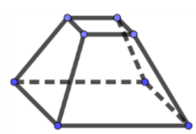


Figura 124. Solución en forma de tronco de pirámide.

4. *Octaedro:* Consiste en construir o dibujar un poliedro de ocho caras triangulares y 12 aristas (ver Figura 125).

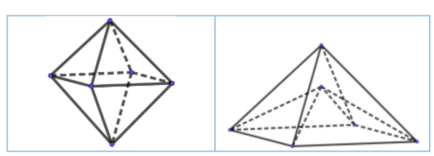


Figura 125. Soluciones en forma de Octaedro.

5. *Kiosco*: Consiste en construir o dibujar un poliedro compuesto por un prisma triangular junto con una pirámide triangular (ver Figura 126).

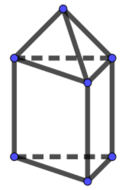


Figura 126. Solución en forma de kiosco.

6. *Poliedro no clasificado*: Consiste en construir o dibujar un poliedro de 12 aristas que no coincide con ninguna de las clasificaciones mencionadas anteriormente (ver Figura 127).

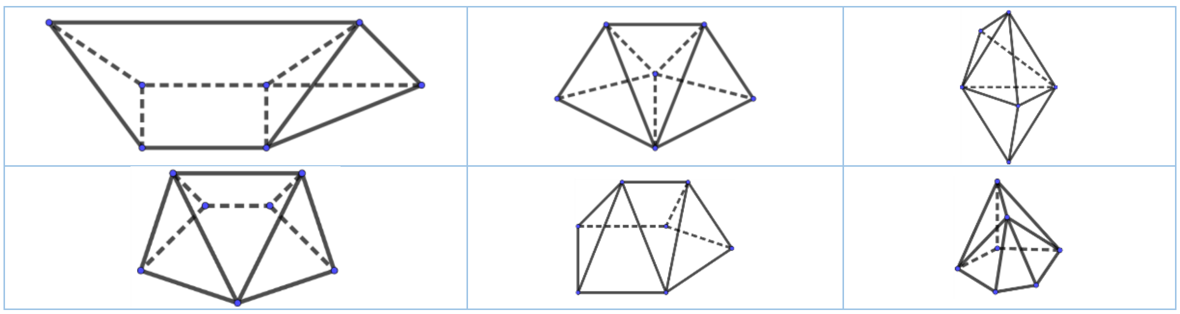


Figura 127. Soluciones con poliedros de 12 aristas no clasificados.

El 87% de los estudiantes dibujó *prismas*, el 42% *pirámides*, el 8% *tronco de pirámide*, el 18% *octaedros*, el 7% *kioscos* y el 7% *poliedros no clasificados*. El uso del material concreto favoreció la propuesta de figuras no convencionales. El hecho de construir con el material las figuras y posteriormente dibujarlas puso a prueba habilidades de visualización de 3D a 2D.

Originalidad: En primer lugar, se muestran las soluciones que con mayor frecuencia fueron aportadas por los estudiantes con porcentajes mayores al 40% (ver Figura 128).

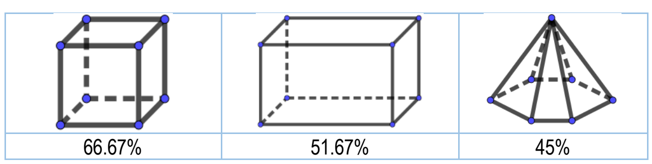


Figura 128. Soluciones convencionales. Actividad # 9.

En segundo lugar, se muestran las soluciones aportadas por entre el 15% y el 40% (ver Figura 129).

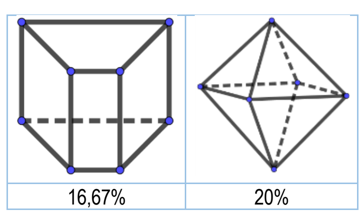


Figura 129. Soluciones aportadas por entre el 15% y el 40%.

Finalmente se muestran las soluciones aportadas por menos del 15% de los estudiantes, consideradas originales y creativas (ver Figura 130).

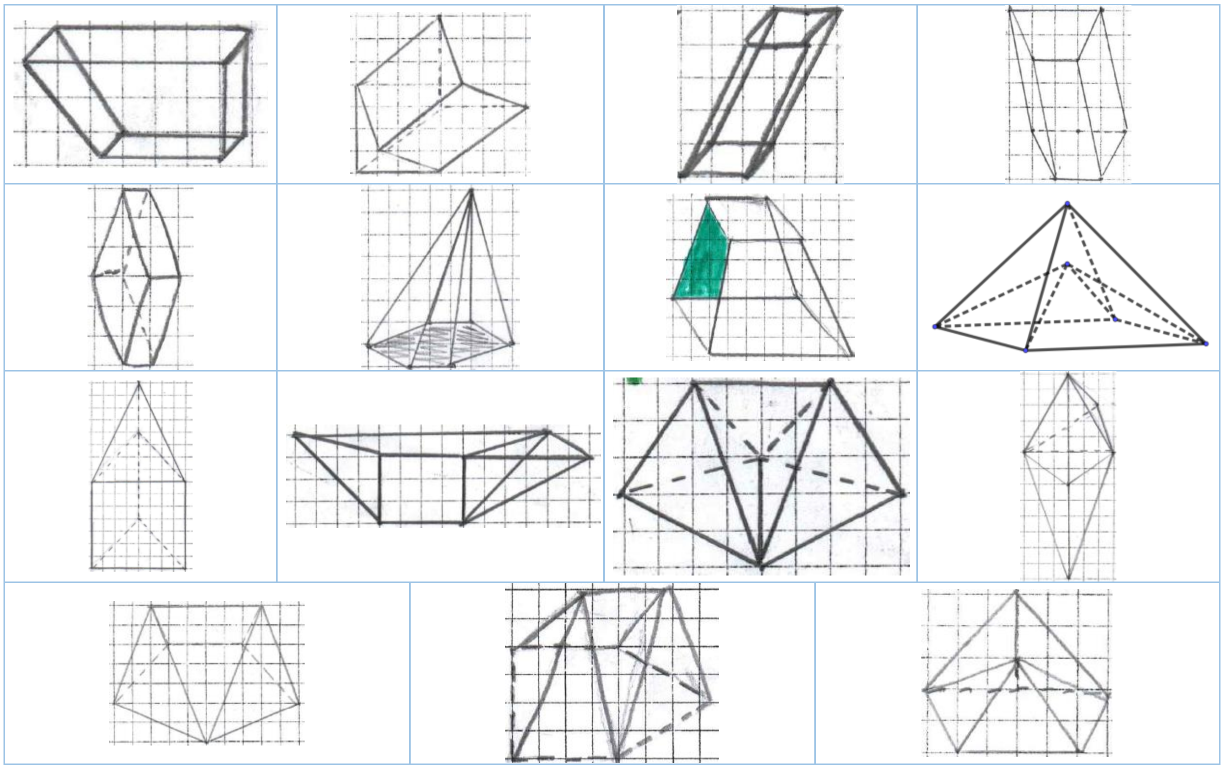


Figura 130. Soluciones originales aportadas por menos del 15% de los estudiantes. Actividad # 9.

Conclusiones de la actividad

La actividad promueve el desarrollo de la fluidez, flexibilidad y originalidad, aspectos importantes en la creatividad.

La actividad promueve procesos de visualización y de construcción que favorecen la creatividad geométrica.

El material concreto, permitió a los estudiantes hacer exploraciones de las figuras que podían proponer, y promovió la búsqueda de estrategias y de poliedros diferentes y originales que tuvieran las 12 aristas.

La actividad permite explorar la creatividad en geometría del espacio, la cual no es comúnmente abordada según la literatura revisada. Esto permite vislumbrar oportunidades de mejoramiento en la consolidación de conceptos y sus conexiones con la geometría en el plano.

5.3.10. Análisis de la actividad 10. Poliedros y caras.

La actividad consiste en dibujar todos los poliedros que se puedan imaginar que tengan exactamente seis caras. Nuevamente se les brinda a los estudiantes varillas de pasta y plastilina, para que puedan construir poliedros con las condiciones dadas, en los que las aristas son formadas por trozos de pasta y los vértices son en plastilina. A continuación, en la Figura 131 se presentan algunas de las soluciones al problema.

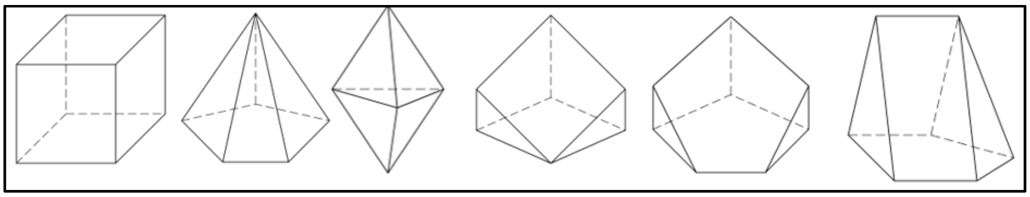


Figura 131. Algunas posibles soluciones. Actividad # 10

Los resultados muestran evidencias del pensamiento divergente-infructuoso en los estudiantes (Figura 132). En general, para esta actividad son intentos fallidos de configurar un poliedro de seis caras, sin embargo, se puede apreciar que dichas figuras no están enfocadas a resolver el problema, parecen solo intentos azarosos de encontrar una solución, o de dibujar alguna figura conocida esperando que cumpla con las condiciones dadas, lo cual no se logra.

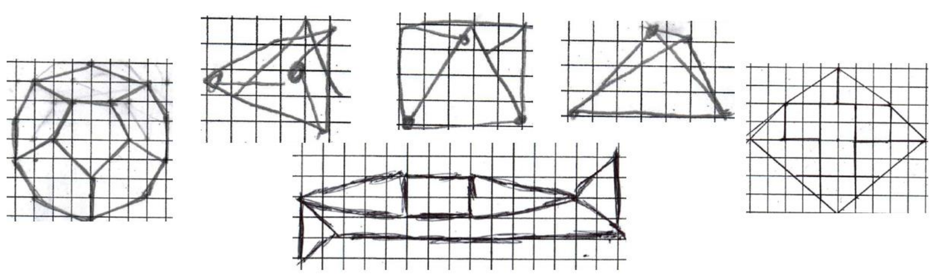


Figura 132. Pensamiento divergente-infructuoso. Actividad # 10

Por otra parte, se observan intentos que no se lograron consolidar en soluciones, pero en los que se puede apreciar una clara intención de resolver el problema. Se pueden apreciar algunas ideas, donde no se advierte que se están utilizando más o menos caras de las solicitadas (ver Figura 133).

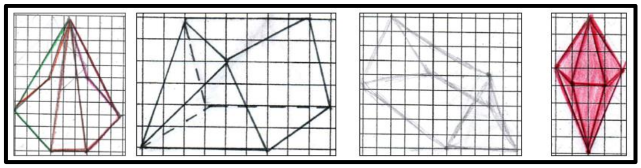


Figura 133. Ideas de solución con más o menos caras. Actividad # 10.

También hay ideas en las que simplemente se coloca una arista más en un poliedro de 5 caras, puesto que los estudiantes piensan que esto añade una cara más y se forma un hexaedro (ver Figura 134).

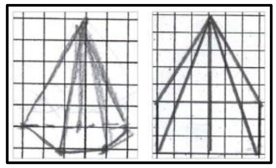


Figura 134. Pirámides de bases cuadrangulares con una arista añadida en una de sus caras laterales

Finalmente, se presentaron casos en los que no se tiene en cuenta que las caras de los poliedros deben ser planas y se proponen sólidos con regiones curvas (ver Figura 135).

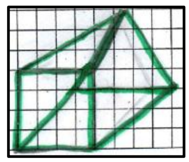


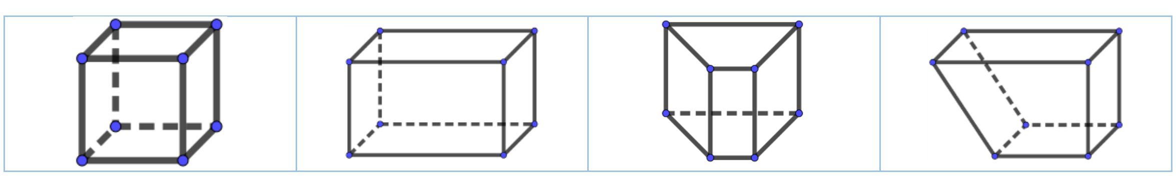
Figura 135. Sólido geométrico con caras planas y caras curvas.

Estos intentos son considerados producto del pensamiento divergente enfocado pero ineficiente.

Fluidez: En total se analizaron 289 respuestas, de las cuales 202 (69,9%) fueron soluciones efectivas y 87 (30,1%) fueron intentos fallidos. Según estos datos, se puede considerar que la actividad logró desarrollar una adecuada fluidez, puesto que en promedio se le ocurrieron alrededor de 5 ideas diferentes a cada uno de los estudiantes, donde una de estas ideas fue un intento fallido y cuatro fueron ideas efectivas. En total el grupo aportó 20 soluciones distintas al problema.

Flexibilidad: Las soluciones que propusieron los estudiantes se pueden clasificar en prismas, pirámides, tronco de pirámide, doble tetraedro y hexaedros irregulares no clasificados. A continuación, se detallan cada una de estas soluciones.

1. *Prismas*: Consiste en construir o dibujar prismas rectos y oblicuos cuyas bases son cuadriláteros (ver Figura 136).



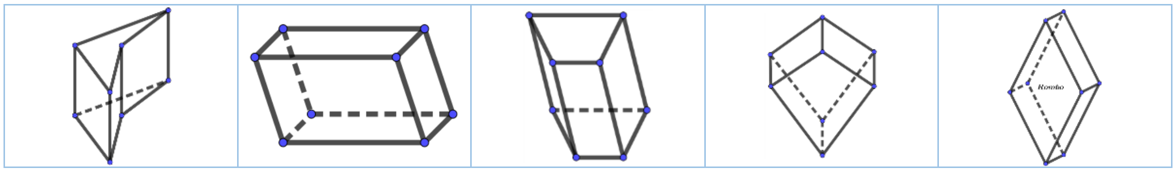


Figura 136. Soluciones con forma de prisma. Actividad # 10.

2. *Pirámide*: Consiste en construir o dibujar pirámides hexagonales rectas u oblicuas de base regular o irregular (ver Figura 137).

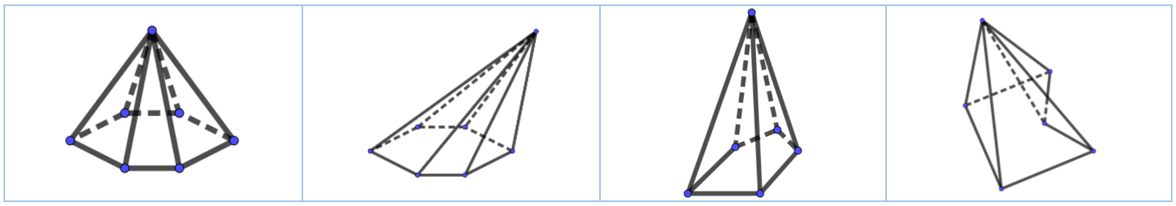


Figura 137. Soluciones con forma de pirámides. Actividad #10.

3. *Tronco de pirámide:* Consiste en construir o dibujar el tronco de una pirámide con base cuadrangular (ver Figura 138).

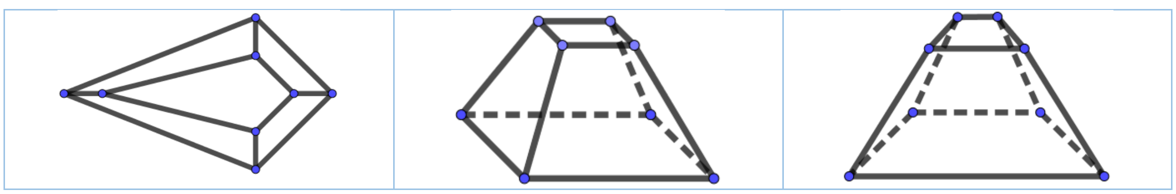


Figura 138. Soluciones en forma de tronco de pirámide. Actividad # 10.

4. *Doble tetraedro:* Consiste en construir o dibujar un poliedro de 6 caras triangulares, uniendo dos tetraedros (ver Figura 139).

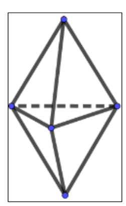


Figura 139. Doble tetraedro.

5. *Hexaedros irregulares no clasificados*: Consiste en construir o dibujar un poliedro de 6 caras que no coincide con ninguna de las clasificaciones mencionadas anteriormente (ver Figura 140).

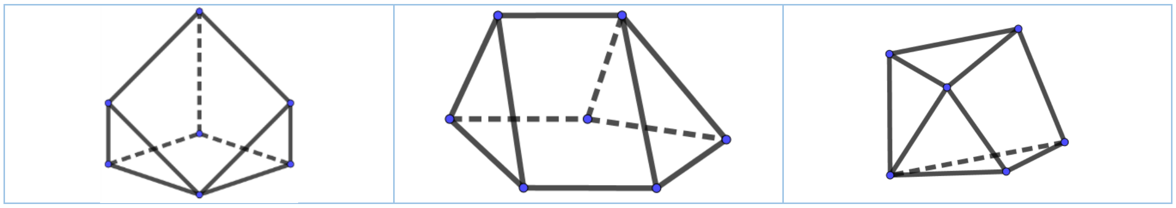
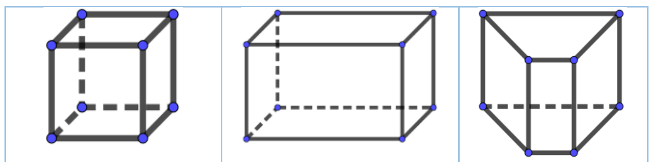


Figura 140. Soluciones con poliedros de 6 caras no clasificados.

El 97% de los estudiantes dibujó *prismas*, el 45% *pirámides*, el 18% *tronco de pirámide*, el 15% *doble tetraedro* y el 8% *hexaedros irregulares no clasificados*.

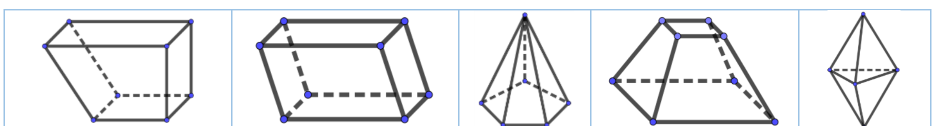
Originalidad: En primer lugar, se muestran las soluciones que con mayor frecuencia fueron aportadas por los estudiantes con porcentajes mayores al 40% (ver Figura 141).



76.67%	68.33%	48.33%

Figura 141. Soluciones convencionales. Actividad # 10.

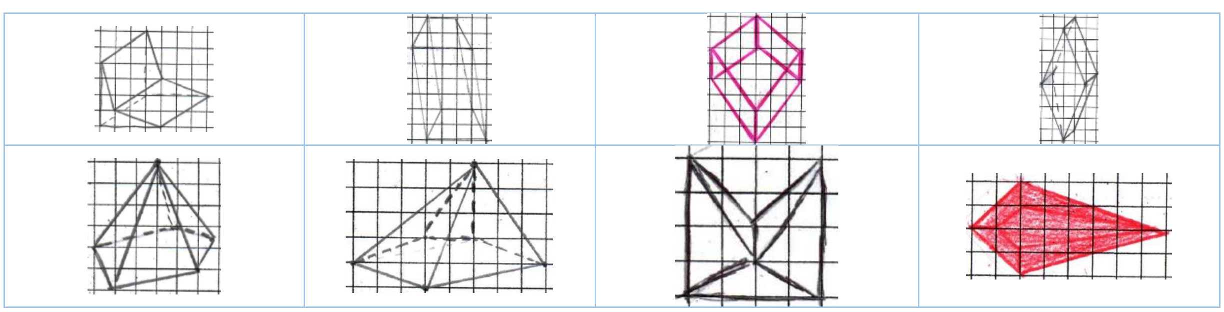
En segundo lugar, se muestran las soluciones aportadas por desde 15%, inclusive, al 40% (ver Figura 142).



18,33%	16,67%	37,67	15%	15%

Figura 142. Soluciones aportadas entre el 15% y 40%.

Finalmente, se muestran las soluciones aportadas por menos del 15% de los estudiantes, consideradas originales y creativas (ver Figura 143).



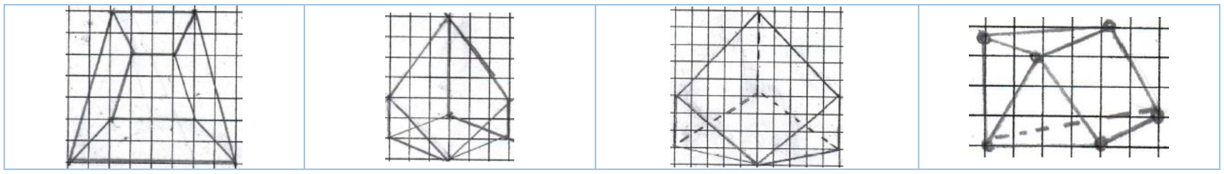


Figura 143. Soluciones originales aportadas por menos del 15% de los estudiantes. Actividad # 10.

Conclusiones de la actividad

De acuerdo con los datos obtenidos se puede afirmar que la actividad promueve los aspectos de la creatividad, fluidez, flexibilidad y originalidad. El material concreto posibilitó la construcción de soluciones no convencionales, originales y creativas.

Algunos estudiantes advirtieron que sus ideas tenían caras curvas, sin embargo, esto fue corregido y adecuado para conseguir algunas soluciones o finalmente descartar ideas.

Por otro lado, algunos estudiantes lograron adecuar sólidos con más o menos caras para posteriormente conseguir hexaedros. Ejemplos de estos se pueden apreciar cómo a partir de una pirámide de base cuadrangular, se pasaba a un tronco de pirámide cuadrangular, o como cuando se pasó de un octaedro conformado por dos pirámides de base cuadrangular a un doble tetraedro formado por dos pirámides de base triangular.

Para esta actividad los estudiantes consideraron prismas y pirámides oblicuas e irregulares, saliéndose de los poliedros convencionales con caras regulares rectos.

Se considera que la actividad promueve habilidades de visualización, más específicamente el paso de una figura tridimensional a una figura bidimensional, además de favorecer la imaginación y el pensamiento visual.

5.3.11. Análisis de la actividad 11. Poliedros y vértices

La actividad consiste en dibujar todos los poliedros que el estudiante pueda imaginar o construir con el material (pasta y plastilina) que tengan exactamente 6 vértices. Algunas de las posibles soluciones se muestran a continuación en la Figura 144.

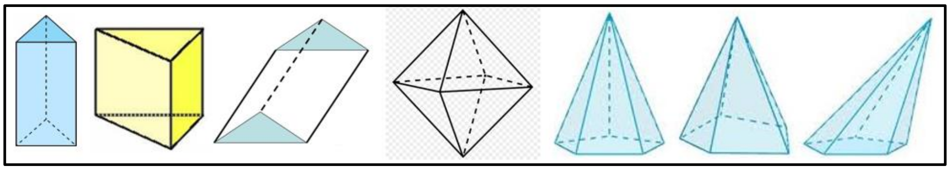


Figura 144. Algunas soluciones posibles. Actividad # 11

En cuanto a las ideas producto del pensamiento divergente infructuoso, el cual se caracteriza por ideas aleatorias que se plasman en las respuestas, pero que no parecen tener relación con la solución del problema, puesto que no corresponden a ideas legítimas que puedan llevarse a cabo, no son ideas que mediante una adecuación puedan convertirse en soluciones. Tan solo son ideas que rápidamente se pueden descartar mediante el pensamiento convergente (ver Figura 145).

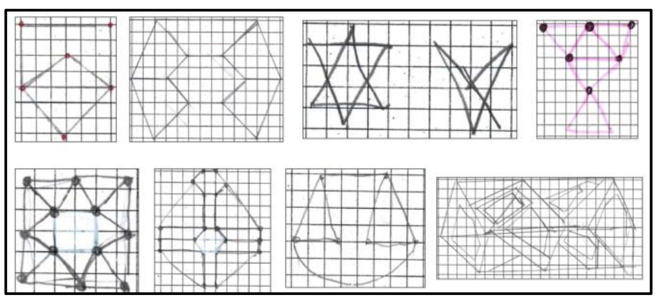


Figura 145. Ideas pensamiento divergente infructuoso. Actividad # 11.

Algunos estudiantes plasman estas ideas, por no tener comprensión de la actividad o porque no se les ocurren ideas que permitan configurar una solución. Sin embargo, a algunos estudiantes simplemente les es necesario hacer algunos rayones e intentos azarosos en primera instancia y de pronto de alguno de ellos surgen ideas que se pueden adecuar y convertir en soluciones.

Por otra parte, se encuentran las ideas producto del pensamiento divergente enfocado ineficiente, en las que los estudiantes no tienen en cuenta todas las condiciones del problema, como por ejemplo no percatarse que los sólidos que dibujaron o construyeron tienen más o menos vértices de los solicitados, o también que no se tiene en cuenta que los poliedros deben tener sus caras planas y fácilmente se cae en el error de construir sólidos con caras curvas, entre otros errores. Sin embargo, estas ideas, en muchos casos se pueden corregir, adecuar o ajustar para que sean soluciones reales al problema y posiblemente también generen soluciones originales dentro del grupo.

A continuación, se muestran algunas de las ideas mencionadas anteriormente en la Figura 146, tanto en dibujos en el papel como en construcción con el material.

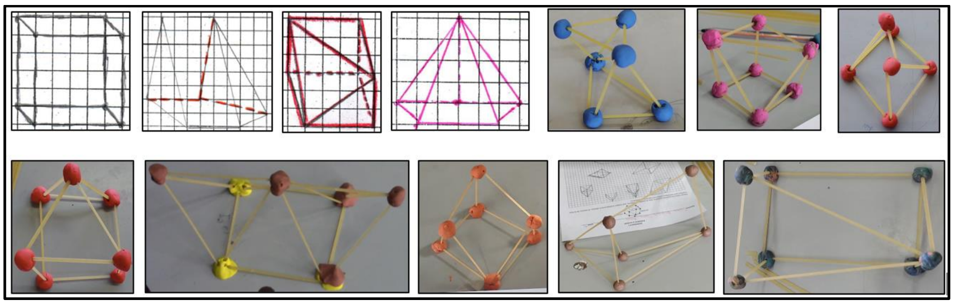


Figura 146. Pensamiento divergente enfocado ineficiente. Actividad # 11.

Fluidez: Para esta actividad los estudiantes generaron 300 ideas de las cuales el 49,33% fueron ideas efectivas y el 50,67% fueron ineficaces. En promedio a cada estudiante se le ocurrieron 5 ideas, de las cuales 2 fueron efectivas y 3 ineficaces. Finalmente, los estudiantes aportaron 16 soluciones distintas al problema.

Flexibilidad: Las soluciones propuestas por los estudiantes se pueden clasificar en:

Prisma: consiste en construir o dibujar un prisma de base triangular recto u oblicuo (ver Figura 147).

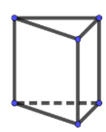


Figura 147. Prisma triangular

Pirámide: consiste en construir o dibujar una pirámide de base pentagonal regular o irregular, recta u oblicua (ver Figura 148).

Figura 148. Representación de las pirámides pentagonales propuestas por los estudiantes.

Pirámide truncada: consiste en construir o dibujar el tronco de una pirámide triangular (ver Figura 149).

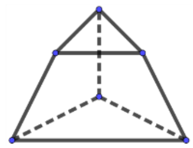


Figura 149. Pirámide triangular truncada.

Octaedro: consiste en construir o dibujar un poliedro de ocho caras con exactamente 6 vértices; los estudiantes propusieron octaedros regulares, irregulares y cóncavos (ver Figura 150).

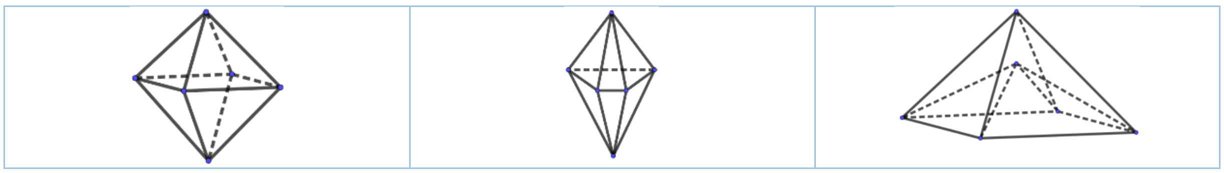


Figura 150. Representación de los octaedros propuestos por los estudiantes.

Poliedro no clasificado: consiste en construir o dibujar poliedros que cumplen la condición de tener 6 vértices y que no corresponden a ninguno de los poliedros mencionados anteriormente. Los estudiantes propusieron los siguientes (ver Figura 151).

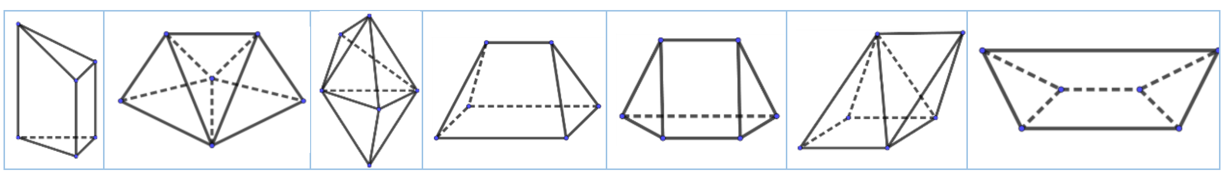
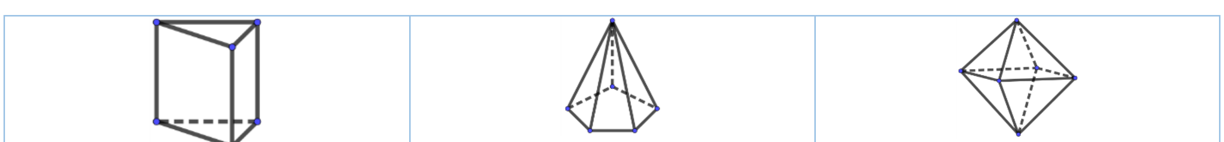


Figura 151. Representación de los octaedros propuestos por los estudiantes.

El 73% de los estudiantes dibujó *prismas*, el 53% *pirámides*, el 10% *tronco de pirámide*, el 48% *octaedros* y el 28% *poliedros no clasificados*.

Originalidad: Para esta actividad las soluciones con prismas triangulares, la pirámide pentagonal regular recta y el octaedro regular, fueron las ideas aportadas por los estudiantes con mayor porcentaje de ocurrencia (ver Figura 152).



73.33%	43.33%	40%

Figura 152. Representación de las soluciones convencionales de los estudiantes. Actividad #11.

Algunas soluciones con frecuencias intermedias desde el 10% al 14%, se muestran a continuación en la Figura 153.

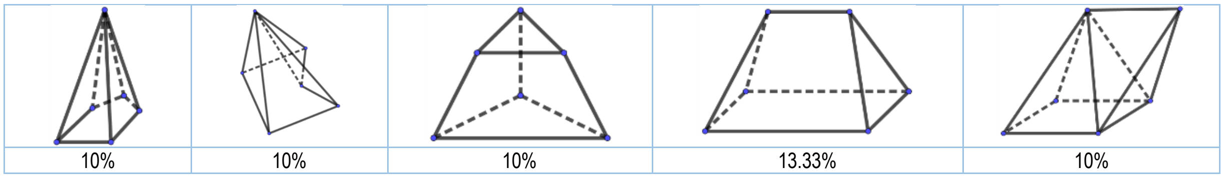


Figura 153. Soluciones con frecuencias desde el 10% al 14%

Finalmente, se presentan las soluciones aportadas por menos del 15% de los estudiantes las cuales se consideran ideas originales y creativas (ver Figura 154)

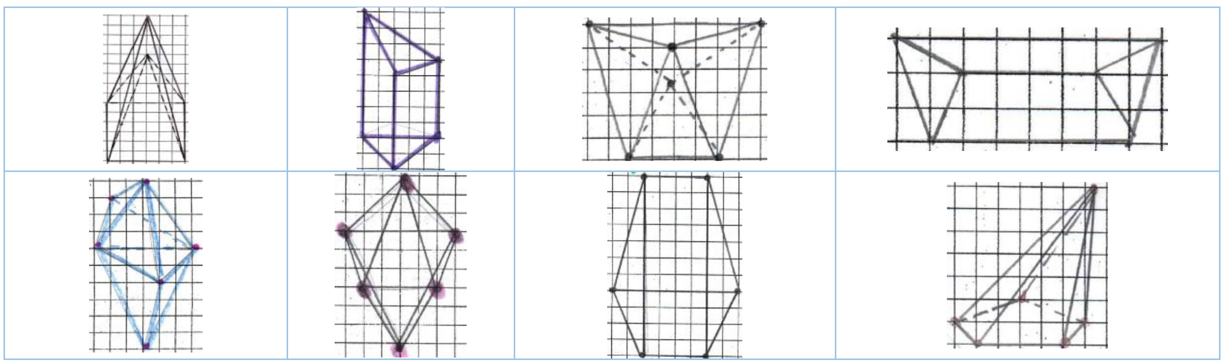


Figura 154. Ideas originales de los estudiantes. Actividad # 11.

Conclusiones de la actividad

De acuerdo con los datos obtenidos la actividad promueve eficientemente los aspectos de fluidez, flexibilidad y originalidad de la creatividad.

El trabajo con material concreto favorece el desarrollo del pensamiento divergente y la visualización, puesto que permite a los estudiantes probar con diferentes construcciones analizar, adecuar y descartar ideas de solución. Algunas de las soluciones creativas del grupo fueron producto de la exploración del material concreto, por lo que se considera que en geometría y en especial en geometría del espacio el material concreto puede influir en la creatividad frente a determinados problemas.

En algunos casos los errores se convierten en oportunidades para aprender propiedades de los poliedros y de esta manera buscar formas de corregir ideas y conseguir soluciones convencionales y originales. Un ejemplo de esto se puede ver en las ideas de los estudiantes en las que alguna cara del poliedro que proponían quedaba curva. Sin embargo, algunos advirtieron este error y añadieron más aristas a su construcción con el fin de conseguir una solución válida que tuviera los 6 vértices solicitados.

Por otro lado, también se pudo observar que los estudiantes recurren a construcciones aprendidas con anterioridad y buscan hacer adecuaciones ya sea añadiendo o quitando caras, aristas o vértices para conseguir algunas soluciones. Es decir esto parece indicar que los conocimientos y la experiencia son importantes para la creatividad.

La actividad favorece los procesos implícitos en el paso de construir una figura en 3D y dibujarla en 2D.

1.8. Conclusiones del capítulo 5

Los diferentes instrumentos validados, aplicados y analizados permitieron hacer una exploración detallada de las actividades propuestas. Dicho análisis permite clasificar las ideas de los estudiantes, sus estrategias y otras formas de conseguir ideas creativas.

Las actividades permitieron avanzar en la caracterización de los diferentes momentos o fases del pensamiento divergente, su relación con el pensamiento convergente y la creatividad. Se logró evidenciar en el trabajo con los estudiantes que las ideas creativas no necesariamente deben ser eficaces.

1.9. CAPÍTULO 6. CARACTERIZACIÓN DE LAS DIFERENCIAS, RELACIONES Y FRONTERAS ENTRE EL PENSAMIENTO DIVERGENTE Y LA CREATIVIDAD EN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN ESTUDIANTES DE 13 A 15 AÑOS

En este capítulo se presenta el aporte teórico de la investigación construido a partir de los resultados del análisis del sistema de actividades aplicado, lo cual obedece al objetivo principal de este estudio.

2.1. Definición y caracterización de conceptos básicos

En este apartado se toman como referencia las definiciones de Guilford (1967) sobre pensamiento divergente y convergente y las relaciones entre estos constructos teóricos propuestas por Runco (1996), Storme (2015) y Cropley (2017). Además, se considera la aplicación y análisis de los resultados de las actividades para proponer las siguientes definiciones, en relación con el pensamiento divergente y la creatividad, asociada a la resolución de problemas abiertos con múltiples vías de solución o múltiples soluciones, que permiten establecer las diferencias y fronteras entre estos constructos teóricos.

Pensamiento divergente infructuoso: Se caracteriza por ideas que no se adecúan a las condiciones del problema propuesto. Más específicamente, en el contexto de resolución de problemas geométricos con múltiples soluciones o vías de solución en estudiantes de secundaria se manifiesta en:

- Efectuar construcciones auxiliares que no funcionan o simplemente trazos en los que se prueba mediante ensayo y error.
- Aplicar propiedades, teoremas, fórmulas o algoritmos que no se ajusten o no son coherentes con una posible solución del problema.
- Asumir medidas mediante estimaciones visuales, o utilizar instrumentos como la regla y el transportador para determinar medidas directamente.
- Asumir condiciones que el problema no define.

- Desconocer o ignorar condiciones o propiedades del problema.

Por otra parte, se pudo observar que algunos estudiantes hacen evidente este tipo de pensamiento, debido a la carencia de conocimientos, el poco entendimiento de las condiciones del problema y la aplicación errónea de propiedades o conceptos. Sin embargo, otros estudiantes lo demuestran por medio de una especie de lluvia de ideas que simplemente plasman en el papel, pero que logran descartar rápidamente mediante el pensamiento convergente.

Pensamiento divergente enfocado-ineficiente: se caracteriza por ideas que no solucionan el problema propuesto, pero en las que se pueden identificar posibles soluciones convencionales e ideas originales, que mediante algún ajuste o adecuación pueden concretarse en soluciones creativas. Se manifiesta:

- En la intención de aplicar propiedades, algoritmos y fórmulas que se ajusten a las condiciones del problema.
- En el trazo de construcciones auxiliares que conllevan a posibles vías de solución.
- En la explicación con palabras de procedimientos correctos que no se llevan a cabo o no se concretan efectivamente.
- No comprobar la validez de ideas o procedimientos, sino asumir su funcionamiento eficaz.
- Planteamiento de ideas o conjeturas correctas que posteriormente no se pueden validar.
- Ausencia de eficacia en el desarrollo de procedimientos, cálculos y estimaciones.

Soluciones convencionales: son soluciones producto de procesos convergentes o de la dinámica divergente-convergente, que son típicas, muy frecuentemente aportadas por los estudiantes y en los que no hay estrategias novedosas. Estas soluciones se caracterizan por:

- Ideas enfocadas que se ejecutan correctamente.

- Aplicación de procedimientos y algoritmos típicos aprendidos previamente.
- Desarrollo de procesos divergentes y convergentes para validar o rechazar ideas.

Soluciones creativas: soluciones conseguidas mediante la adecuación o ajuste de las ideas originales. Estas soluciones suelen ser producto de dinámicas de pensamiento divergente-convergente. Se caracterizan por:

- La producción de fórmulas o algoritmos no convencionales.
- El trazo de construcciones auxiliares efectivas y poco frecuentes, que en algunos casos minimizan procedimientos o cálculos.
- La combinación de diferentes estrategias efectivas.
- La consecución de soluciones utilizando distintas propiedades y conjuntos numéricos.
- La aplicación de teorías o conocimientos propios de otras ramas de la matemática.
- Desarrollo de ideas sin utilizar algoritmos.
- Establecimiento de propiedades o estrategias que generan varias soluciones.
- La descomposición y recomposición de figuras.
- La generación de soluciones haciendo uso de partes curvas.
- El uso de unidades de área de diferentes formas y tamaños.

Por otra parte, las soluciones creativas también surgieron luego de que los estudiantes conseguían una solución convencional y exploraban cómo cambiar algunas de sus características o propiedades sin que se vieran afectadas las condiciones iniciales del problema.

En varias de las actividades propuestas muchas de las ideas originales y creativas fueron producto de buscar soluciones con partes curvas, ya que la mayoría de los estudiantes buscaban soluciones utilizando únicamente segmentos rectos.

Pensamiento creativo o creatividad

De acuerdo con lo anterior y en el contexto de la resolución de problemas geométricos en secundaria, se considera que la creatividad puede surgir cuando se da el paso del pensamiento divergente enfocado ineficiente a las ideas creativas. Por tanto, no solo en las soluciones efectivas está presente la creatividad. También está presente en el análisis y adecuación y nuevos puntos de vista a partir de una solución convencional.

La creatividad es un proceso cognitivo mediante el cual un individuo combina ideas nuevas, producto de la exploración del problema o situación, con conocimientos previos, para producir soluciones o posibles soluciones a un problema.

2.2. Análisis de las diferencias, relaciones y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

A continuación, se establecen las diferentes dinámicas que se pudieron observar entre el pensamiento divergente y la creatividad.

Diferencias entre el pensamiento divergente y la creatividad

De acuerdo a la información recabada en el estado del arte, el marco teórico y la aplicación y análisis de las actividades, se puede concluir que la principal diferencia entre el pensamiento divergente y la creatividad, es que el primero puede surgir al intentar solucionar un problema, y sin embargo no producirse ninguna idea o solución creativa, como se referencia en el pensamiento divergente-infructuoso, donde hay variabilidad de ideas, pero ninguna de estas se adecúa a la solución del problema propuesto.

Sin embargo, no se considera que necesariamente estas ideas sean inútiles, o descabelladas, en relación con el proceso creativo. Tal vez no aportan a la solución del problema específico, pero los estudiantes que logran descartar estas ideas, mediante una evaluación consciente de sus características y propiedades, pueden encontrar un camino, forma o estrategia para evaluar otras ideas que sí aporten a la solución del problema.

Relaciones entre el pensamiento divergente y la creatividad

Considerando que las ideas creativas surgen de la dinámica entre pensamiento divergente y convergente se concluye que el pensamiento divergente se *relaciona* con la creatividad, precisamente cuando se evidencia un pensamiento divergente enfocado ineficiente, donde surgen ideas que aportan a la solución del problema. Estas ideas pueden ser de dos tipos, convencionales u originales. Las primeras mediante procesos convergentes se pueden convertir en soluciones típicas o convencionales, mientras que las segundas mediante procesos similares se pueden convertir en soluciones creativas.

Otra situación donde se presenta la dinámica divergente-convergente se da cuando los estudiantes consiguen soluciones creativas mediante la exploración, ajuste o cambio de una solución convencional. Es decir, aplican pensamiento convergente para validar una solución convencional, pero posteriormente aplican a esta solución más pensamiento divergente y consiguen nuevas soluciones creativas a partir de la que ya se tenía.

Se considera que estas soluciones creativas a partir de soluciones convencionales se hacen más evidentes al proponer problemas con múltiples vías de solución o múltiples soluciones puesto que el requerimiento de tener que buscar varias soluciones promueve que el estudiante a partir de una solución busque hacer algunos cambios, o intente aplicar otras propiedades, o en el mejor de los casos establezca relaciones con otras teorías de las matemáticas para conseguir nuevas soluciones creativas.

En conclusión, se puede asegurar que existe una intersección donde se encuentran el pensamiento divergente y la creatividad (ver Figura 155).

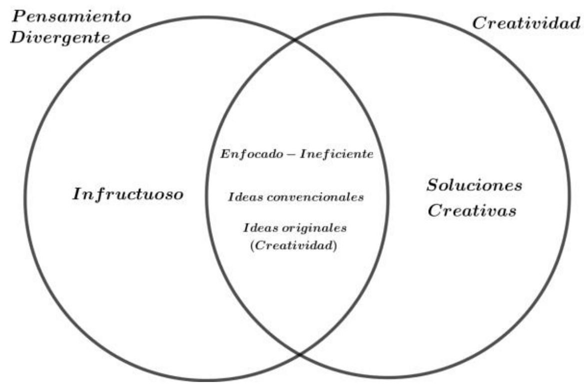


Figura 155. Relaciones entre el pensamiento divergente y la creatividad.

Fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que la frontera entre el pensamiento divergente y la creatividad se da cuando se proponen ideas suficientemente originales en la fase del pensamiento divergente enfocado-ineficiente. Es decir que, cuando se tiene una idea original y enfocada a hacia la solución de un problema, se tiene una idea creativa.

Estas ideas mediante la evaluación y/o adecuación del pensamiento convergente conducen a soluciones creativas. Si por el contrario dichas ideas no resultan ser efectivas, no necesariamente dejan de ser creativas, puesto que pueden constituir nuevos caminos o estrategias que sí sirvan como técnicas o herramientas novedosas para resolver problemas similares de forma creativa, o simplemente falte el desarrollo de más pensamiento convergente para lograrlas adecuar al problema o situación.

Un claro ejemplo de esto en la matemática surge con Evariste Galois quien propuso antes de morir varias teorías que la comunidad matemática catalogó como consistentes, pero no se comprendía en el momento para que servían. Es decir, tuvo ideas creativas para las cuales no se había desarrollado el pensamiento convergente que permitiera encajarlas en una teoría o se adecuaran a la solución de un problema específico.

Algo similar se pudo evidenciar con estudiantes de grados inferiores (octavo y noveno de bachillerato) cuando proponen construcciones auxiliares que permiten solucionar un problema geométrico de forma creativa, pero no encuentran las formas o estrategias que les permitan desarrollar sus ideas, puesto que para llevarlas a cabo es necesario saber algo de trigonometría, la cual no se aborda hasta grado décimo. Finalmente, se muestra un esquema en la Figura 156 que resume las relaciones, diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

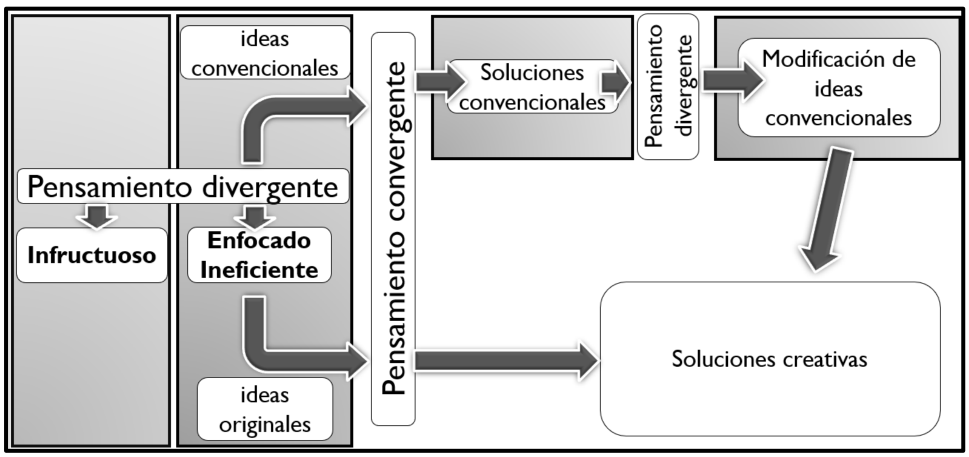


Figura 156. Diferencias, relaciones y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

Como se puede ver, el pensamiento convergente es un ingrediente clave para la consecución de las soluciones ya sean convencionales o creativas, ya que es el que permite evaluar cada una de las ideas, validarlas o rechazarlas.

Conclusiones del capítulo 6.

En este capítulo se logran establecer constructos teóricos, que se adecúan al proceso creativo de estudiantes de secundaria en el contexto de resolución de problemas geométricos con múltiples soluciones o múltiples vías de solución.

Se plantea que el pensamiento divergente dos facetas inconcluyentes, infructuoso y enfocado-ineficiente. El primero no se relaciona con la creatividad directamente, simplemente se asume como una etapa preparatoria hacia la consecución de ideas más elaboradas. Mientras que en el segundo puede o no surgir la creatividad dependiendo de la originalidad de las ideas propuestas.

Por otra parte, se plantean definiciones para la creatividad o pensamiento creativo, las soluciones convencionales y las soluciones creativas, que permiten establecer relaciones, diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad.

Finalmente, se señala la importancia para la creatividad del pensamiento convergente, ya que es el que permite validar o rechazar ideas de todo tipo.

CONCLUSIONES

La revisión de la literatura relacionada con el pensamiento divergente y la creatividad permitió distinguir entre dos tendencias de investigación. La primera indaga sobre el proceso creativo, el cual se caracteriza por seguir las etapas de preparación, incubación, iluminación y verificación propuestos por la psicología Gestalt, la segunda tiene en cuenta los productos creativos en los que se suele analizar tres aspectos, la fluidez, la flexibilidad y la originalidad.

A partir de estas dos categorías se evidenciaron estudios donde la población es variada, puesto que se han llevado a cabo investigaciones con niños de primaria, secundaria y estudiantes superdotados, así como también se han desarrollado estudios con matemáticos y con profesores en formación y en ejercicio.

Por otro lado, distintas teorías se han relacionado con la creatividad y han aportado diferentes enfoques y correlaciones que han mostrado resultados válidos, entre las que se destacan la relación entre creatividad y la inteligencia, el pensamiento divergente y convergente, los estilos cognitivos, la visualización y la creatividad general y específica.

En cuanto a los instrumentos utilizados para explorar la creatividad, el interés se ha centrado en elaborar pruebas y modelos para medir y evaluar la creatividad. Específicamente en el terreno de la educación matemática se ha indagado sobre el tipo de situaciones o problemas que la desarrollan. Las investigaciones han aplicado enfoques cualitativos, cuantitativos y mixtos relacionándolos con aspectos psicológicos, cognitivos y socioculturales.

En cuanto a las bases teóricas sobre la creatividad y el pensamiento divergente en el ámbito general y en el específico de las matemáticas, estas tienen orígenes filosóficos y psicológicos que son pertinentes para la consecución de definiciones operacionales, así como para adopción y ajuste de modelos que permiten evaluar la creatividad.

En este sentido la fluidez, la flexibilidad y la originalidad se consideran aspectos de la producción divergente que desarrollan procesos creativos, y las pruebas de pensamiento divergente constituyen una herramienta útil para predecir el potencial creativo. En particular en la educación matemática las pruebas de pensamiento divergente se suelen desarrollar mediante la resolución de problemas con un enfoque abierto, dentro de los que se encuentran los problemas con múltiples vías de solución y los problemas con múltiples soluciones.

Las teorías e investigaciones sobre la resolución de problemas han determinado que, para que un problema genere conocimiento y procesos creativos, debe ser desafiante o en otras palabras representar un reto a quien lo intenta resolver. Al combinar los problemas retadores junto con el ingrediente adicional de las múltiples vías de solución o múltiples soluciones, se obtiene una herramienta que promueve varios focos de atención entre los que se destacan la cantidad y variedad de ideas generadas por los estudiantes, así como también su originalidad, lo que se pueden considerar piezas claves para el desarrollo de la creatividad en el nivel de secundaria.

En particular en la geometría, el trabajo con este tipo de problemas favorece procesos de visualización en los que los estudiantes se ven involucrados en situaciones donde es necesario establecer relaciones entre diferentes conceptos y propiedades que desarrollan la intuición y promueven la construcción de líneas auxiliares, configuración y reconfiguración de figuras, identificación de simetrías, aplicación de rotaciones, entre otros, que en definitiva desarrollan el pensamiento geométrico.

La consolidación de los fundamentos teóricos relacionados con el tema permitió adoptar posturas en cuanto a definiciones, enfoques de investigación, modelos, tipos de problemas, relaciones entre teorías y demarcar una ruta a seguir en la investigación con el fin de desarrollar la caracterización de la propuesta.

Por otra parte, considerando que difícilmente la creatividad pueda ajustarse únicamente a métodos cuantitativos debido a su carácter impredecible y espontáneo, se optó por un enfoque mixto de investigación (cualitativo-cuantitativo), con un diseño de investigación acción. Se aplicaron estudios exploratorios y se tuvieron en cuenta las sugerencias de especialistas para concebir un sistema de actividades que permitiera caracterizar la creatividad geométrica a través de la resolución de problemas.

En cuanto la aplicación de las actividades propuestas y su posterior análisis se puede concluir que:

- Cada una de las 11 actividades promovió de manera efectiva la fluidez, flexibilidad y originalidad, los cuales son aspectos importantes para el desarrollo de la creatividad.
- Se pudo evidenciar que a pesar de que haya una gran fluidez de ideas en el desarrollo de un problema, esto no necesariamente conduce directamente a soluciones y mucho menos a soluciones creativas del problema propuesto.
- Las ideas creativas no surgen de la nada; una dinámica entre el pensamiento divergente y el pensamiento convergente es prácticamente necesario para explorar nuevos caminos que pueden conducir a soluciones creativas.
- Proponer problemas con múltiples vías de solución o múltiples soluciones favorece la producción de estrategias e ideas originales por parte de los estudiantes.
- No solo en las respuestas correctas hay creatividad, la mayoría de las soluciones originales fueron producto de la exploración de varias estrategias y la posterior combinación de ellas. En muchos casos las ideas no resultaban eficaces por diferentes factores, como imprecisiones, procedimientos incorrectos entre otros, que mediante un ajuste podrían hacerse eficaces y originales, es decir convertirse en soluciones creativas.

- La creatividad puede desarrollarse en cualquier tipo de estudiante ya que en las actividades se observaron soluciones creativas de estudiantes no eminentes en matemáticas e incluso en estudiantes con discapacidades cognitivas.
- Una potencialidad de los problemas propuestos fue el hecho de que tuvieran múltiples soluciones, puesto que permitió que los estudiantes menos aventajados pudieran concretar algunas soluciones y a los estudiantes más adelantados, les permitió explorar diversas estrategias y en algunos casos combinarlas, para concretar soluciones creativas.
- Otra potencialidad de las actividades propuestas fueron los problemas con infinitas soluciones, puesto que permitieron a los estudiantes generar diferentes familias o conjuntos de soluciones.
- Las soluciones más elaboradas y con mayor nivel de detalle aportadas por los estudiantes, son las que exploran la combinación de más de una de las estrategias propuestas. El tener más elementos y conocer más a fondo el problema permite establecer conexiones entre las ideas producidas con anterioridad y las ideas nuevas.
- Cuando se abordan problemas con figuras planas, el explorar construcciones, ideas o soluciones con partes curvas permite explorar soluciones con un nivel de originalidad mayor.
- Tanto las construcciones auxiliares, como las composiciones y recomposiciones de figuras hacen parte fundamental de las ideas creativas para varios de los problemas propuestos.
- La creatividad necesita de conocimientos previos; varios estudiantes acudían a varios conceptos, propiedades y teoremas para conseguir sus ideas creativas, sin embargo, esto no limita la creatividad, otros estudiantes solo recordaban una propiedad o característica y se las arreglaban para conseguir soluciones creativas usando solo ese recurso.
- Se observaron dos tipos de construcciones auxiliares, uno en las que se aprovecha su practicidad y generan soluciones más cortas y se evitan algunos cálculos y otro en la cual las producciones dan la

impresión de ser exageradas e innecesarias, pero que debido a su rareza terminan siendo originales y creativas.

- En línea con el párrafo anterior, se pudo evidenciar que una misma construcción auxiliar en algunos casos promueve diferentes procesos de solución para diferentes estudiantes o simplemente un solo estudiante percibe varias formas de proceder mediante la misma construcción. Esto también se considera como un factor que promueve el establecimiento de conexiones entre conceptos y que por ende puede favorecer el desarrollo de la creatividad.
- A pesar de que se tuvieron en cuenta las ideas de Leikin (2007) en cuanto a los porcentajes de frecuencia de las soluciones de los estudiantes para considerarlas originales, estos porcentajes no se ajustaron a las actividades, 3, 7 y 11 ya que las soluciones se encontraban en los extremos, o muy originales, es decir, con una frecuencia menor del 15% o muy convencionales, con frecuencias mayores a 40%, no se registraron respuestas entre el 15 y 40%.
- En relación con el apartado anterior, también se registró una respuesta en la actividad # 6 que registró una frecuencia de 10%, pero que no se consideró como original, puesto que solo consistía en aplicar una fórmula conocida con anterioridad.
- En cuanto a los procedimientos para conseguir ideas originales se encontraron ideas muy simples y originales, mientras que en otros casos hay gran elaboración. Se considera que las actividades propuestas promueven estas dos formas de producir soluciones originales puesto que a veces la creatividad en la escuela es el resultado de recordar y establecer relaciones entre diferentes conceptos aprendidos, pero en otros casos precisamente consiste en hacer evidente un camino más corto en el que se evitan procedimientos innecesarios.
- Las actividades promovieron la visualización y el pensamiento visual, ya que permitieron a los estudiantes imaginar, construir, deconstruir y proponer diferentes líneas auxiliares para conseguir ideas creativas.

- El modo en que se plantearon las actividades, de tal manera que se permitiera la equivocación y quedara registro de ésta, favoreció el desarrollo del pensamiento divergente, puesto que hizo que los estudiantes fueran espontáneos para explorar libremente otras direcciones y puntos de vista para atacar los problemas.
- El uso de material concreto en las actividades 9, 10 y 11, permitió a los estudiantes hacer exploraciones de las figuras que podían proponer y favoreció la búsqueda de estrategias y de poliedros diferentes y originales que tuvieran las condiciones dadas en cada problema.
- Las actividades 9, 10 y 11 permitieron explorar la creatividad en geometría del espacio, la cual no es comúnmente abordada según la literatura revisada. También permitieron vislumbrar oportunidades de mejoramiento en la consolidación de conceptos y sus conexiones con la geometría en el plano y promover específicamente el paso de una figura tridimensional a una figura bidimensional.
- En las actividades se evidenció la consecución de soluciones creativas a partir de la modificación de soluciones convencionales.
- A través de las actividades los estudiantes aplicaron conceptos, propiedades y teoremas de la geometría plana y del espacio.

Por otra parte, se logró identificar dos facetas importantes del pensamiento divergente, una que tiene que ver con el pensamiento divergente infructuoso y otra que tiene que ver con el pensamiento divergente enfocado-ineficiente. El pensamiento divergente-infructuoso, a pesar de que no aporta ideas a la solución del problema, sí sirve a muchos estudiantes para iniciar un proceso de descarte y validación de ideas mediante el pensamiento convergente. Este proceso se puede apreciar claramente cuando se abordan las ideas del pensamiento enfocado-ineficiente, donde se rechazan las ideas infructuosas y se aceptan y ajustan las demás ideas en soluciones convencionales y soluciones creativas.

Se pudo establecer que cuando se habla de pensamiento divergente infructuoso, no se está en presencia de ideas creativas, lo cual puede ser la principal diferencia entre pensamiento divergente y la creatividad. El pensamiento divergente en esta fase se puede ver más como una lluvia de ideas que generan los estudiantes, en muchos casos azarosas, incompletas e incomprensibles, que no aportan nada a la solución del problema; sin embargo, como ya se mencionó en el apartado anterior, para algunos estudiantes esto hace parte del proceso creativo y puede considerarse la etapa de preparación según la psicología Gestalt.

Por otro lado, el pensamiento divergente enfocado-ineficiente y la creatividad sí están directamente relacionados, puesto que, en esta faceta del pensamiento divergente, se proponen ideas convencionales y originales de las cuales surgen las soluciones convencionales, y las ideas más profundas y elaboradas se convierten en soluciones creativas. Este proceso se hace mediante la validación que permite el pensamiento convergente.

Producto del pensamiento divergente enfocado-ineficiente también surgen ideas originales que no se logran concretar, puesto que los estudiantes no tienen los conocimientos específicos para desarrollar la idea, o incluso se cometen errores en los cálculos o procedimientos. Estas ideas también son consideradas creativas.

RECOMENDACIONES

Producto del proceso de investigación sobresalen cuestiones de interés para la educación matemática relacionados con el tema, los cuales pueden convertirse en focos para posteriores análisis y estudio, y que se mencionan a continuación:

- Los estudios sobre la creatividad se han desarrollado principalmente en aritmética, geometría y cálculo, lo cual deja un amplio horizonte de ramas de la matemática escolar en las que se pueden hacer nuevas investigaciones.
- Es posible ampliar las investigaciones sobre la creatividad en los cuales se traten problemas que permitan relacionar diferentes ramas de la matemática a nivel escolar.
- A pesar de que los modelos para medir la creatividad han avanzado significativamente, se considera que aún siguen siendo terrenos que se pueden explorar con más detalle para conseguir instrumentos más refinados.
- El uso positivo del error se puede aplicar en las propuestas originales de los estudiantes que no se logran concretar debido a la falta de conocimientos específicos.
- Es pertinente ampliar la investigación en relación con la creatividad de los docentes a la hora de diseñar y proponer problemas que generen pensamiento divergente y creatividad en sus estudiantes.
- A pesar de que en la literatura se encuentran varias propuestas en relación con la creatividad en geometría, se puede fortalecer las propuestas en geometría del espacio, geometría analítica, geometría proyectiva y en general en el amplio terreno de las geometrías no euclidianas.
- La creatividad en geometría y el uso de las tecnologías es otro tema de interés que requiere más investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Arzarello, F. S. (2021). Imaging and visualizing in geometry: explorations by mathematics university students. *ICME-14.* Shanghai, China.

Ballester, S. y. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* La Habana: Pueblo y Educación.

Becker, J., & Shimada, S. (1997). *A new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: NTCM.

Blajenkova, O., & Kozhevnikov, M. (2009). The new object-spatial-verbal. *Applied Cognitive Psychology, 23(5)*, 638-663.

Campistrous, L., & Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La Habana: Pueblo y Educación.

Cantoral Uriza, R., & Montiel Espinoza, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how.* Palo Alto: Dale Seymour Publications.

Cropley, D. H. (2017). Psychological and Neuroscientific Perspectives on Mathematical Creativity and Giftedness. En R. Leikin, & B. Sriraman, *Creativity and Giftedness. Advances in Mathematics Education* (págs. 183-199). Springer, Cham.

Csikszentmihalyi, M. (2000). Implications of a systems perspective. En J. Sternberg, *Handbook of creativity* (págs. 313-338). Cambridge: Cambridge University.

Davis, P. J., & Reuben, H. (1981). *The mathematical experience.* New York: Houghton Mifflin.

Davydov, V. (1996). *Theory of Developing Education.* Moscow: Intor (In Russian).

De Guzmán, M. (1996). El papel de la visualización. En M. De Guzmán, *El Rincón de la Pizarra* (pág. cap 0). Madrid: Pirámide.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37(6)*, 14-20.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education .* Morelos, Mexico.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* New York: Taylor and francis e-library.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 42-53). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá : Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 8*, 15-26.

Fortes , E. C., & Andrade, R. R. (2019). Mathematical Creativity In Solving Non-Routine Problems. *The Normal Lights*, 108-135.

García, M. (2014). *Metodología De La Investigación Educativa.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Gontijo, C. H. (2018). Mathematics Education and Creativity: A Point of View from the Systems Perspective on Creativity. En Carreira, *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving* (págs. 375-386). Springer, Cham.

Gridos , P., Athanasios , G., Iliada , E., & Eleni Deliyianni. (2019). Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical. *Actas del Undécimo Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en la Enseñanza de las Matemáticas (CERME).* Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Gridos, P., & Avgerinos, E. (2021). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *J de Sci and Math Educ*.

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). The case study method and evolving systems approach for understanding unique creative people at work. En Sternberg, *Handbook of creativity* (págs. 93-115). Cambridge: Cambridge University Press.

Guilford, J. P. (1956). The Structure of Intellect. *Psychological Bulletin, 53*, 267-293.

Guilford, J. P. (1967). *The Nature Of Human Intelligence.* (N. Cortada de kohan, Trad.) New York: McGraw-hill.

Haavold, P., Hwa Lee, K., & Sriraman , B. (2018). Creativity in Mathematics. *Encyclopedia of Mathematics Education*.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field. Dover Publication, INC. New York.* New York: Dover Publication.

Haylock, D. W. (1987). *A framework for assessing mathematical creativity in school children.* Norwich: Springer.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, V. (1996). Space and shape. En Bishop, *International handbook of mathematics education* (págs. 161-201). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hitt, F. (. (2002). Representations and mathematics visualization. *International Group for the Psychology of Mathematics Education North American* .

House, P., & Coxford, A. (1995). *Connecting mathematics across the curriculum.* Reston, VA: NCTM.

Huang, P. S., Peng, S. L., Chen, H. C., Tseng, L. C., & Hsu, L. C. (2017). The relative influence of domain knowledge and domain-general divergent thinking on scientific creativity and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity, 25*, 1-9.

Kaufman, J. C., & Baer, J. (2012). *Being Creative Inside and Outside the Classroom.* Rotterdam.

Kaufman, J., & Beghetto, R. (2009). Beyond big and little: The four C model of creativity. *Review of General Psychology, 13*, 1-12.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1987). *Problem Solving: a handbook for teacher .* Boston : Allyn and Bacon.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, H. J. (2006). Cultivating Divergent Thinking in Mathematics through an. *Asia Pacific Education Review*, 51-61.

Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas.* La Habana: Editorial Pueblo.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge University.

Leikin , R. (2009). Exploring Mathematical Creativity. *Creativity in Mathematics and the Education*, 129-145.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. *The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematical Education* (págs. 2330-2339). Larnaca, Chipre: CERME 5.

Leikin, R. (2014). Challenging Mathematics with Multiple Solution Tasks and Mathematical Investigations in Geometry. En S. E. Li Y., *Transforming Mathematics Instruction. Advances in Mathematics Education.* Springer, Cham.

Leikin, R. (2018). Openness and Constraints Associated with Creativity-Directed Activities in Mathematics for All Students. *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving, Research in Mathematics Education*, 387-397.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 161-168.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks. *CANADIAN JOURNAL OF SCIENCE, MATHEMATICS,*, 233–251.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2012). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal Of Science, Mathematics*, 311-333.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM*, 159-166.

Leontiev. (1983). Analysis of activity. *Vestnik MGU, 14*.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics, 26(1)*, 20–23.

Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: open, closed and exploratory in the UK. *ZDM, 23 (1)*, 14-19.

Mason, J., Burton, L., & Kaye, S. (2010). *Thinking Mathematically.* Pearson.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Madrid: Labor.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Nohda, N. (1988). Problem solving using "open-ended problems" in mathematics teaching. En S. G. H. Burkhardt, *Problem Solving - A World View (* (págs. 225-235). Nottingham: Shell Centre.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (págs. 39-54). Japan.

Pásztor, A. (2015). Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement. *Thinking Skills and Creativity, 18*, 32-42.

Pehkonen, E. (1989). Der Umgang mit Problemfeldern im Mathematikunterricht der Sek. En *Beitrage zum Mathematikunterricht* (págs. 290-293). Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

Pehkonen, E. (1995). Using open-ended problem in mathematics. *ZDM, 27(2)*, 67-71.

Pehkonen, E. (1997). *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom.* Helsinki: University of Helsinki, Dept. of Teacher Education, P.O. Box 38.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pitta-Pantazi, D., Paraskevi , S., & Constantinos , C. (2012). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers:their mathematical creative abilities. *ZDM Mathematics Education*, 199–213.

Pochulu, M., & Mabel, R. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente.* Buenos Aires: Universitaria Villa María.

Poincaré, H. (1948). *Science and method.* New York: Dover.

Polya, G. (1954). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve It.* New York: Doubleday.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Wiley.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6 (3)*, 42-46.

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (págs. 205-236). Rotterdam: Sense.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. (Tesis doctoral no publicada).* Holguín, Cuba: Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero.

Runco, M. A. (1996). Personal creativity: Definition and developmental issues. *New Directions for Child Development, 72*, 3-30.

Runco, M. A. (2008). Commentary: Divergent Thinking Is Not Synonymous With Creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, 93-96.

Runco, M. A. (2011). Divergent thinking. *Encyclopedia of Creativity*, 356-361.

Runco, M. A. (2012a). Divergent Thinking as an Indicator of Creative Potential. *Creativity Research Journal*, 66-75.

Runco, M. A. (2012b). The Standard Definition of Creativity. *Creativity Research Journal*, 92-96.

Runco, M. A. (2017). Divergent Thinking. *Springer Science+Business Media*, 1-5.

Ryhammar, L., & Brolin, C. (1999). Creativity research: Historical considerations and main lines of development. *Scandinavian, 43(3)*, 259-273.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. L. Santos-Trigo, *Mathematical Problem Solving, ICME-13 Monographs.*

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*, 145-166.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics.* Washington, DC: Falmer.

Sigarreta, J. M., Rodriguez, M, J., & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión Histórico-didáctica. *Boletín de la Asociaciación Matemática Venezolana*, 53-66.

Silver, E. A. (1989). Problem posing by middle school mathematics teachers. *Proceedings of PMENA 11 Conference. 1*, págs. 293-309. New Brunswick: Rutgers University.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Analyses*, 75-80.

Singh, B. (1987). The development of tests to measure mathematical creativity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 18(2)*, 181-186.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 13-27.

Sriraman, B., English, & Lyn. (2010). Theories of mathematics education: seeking new frontiers. *ZDM, 42*, 503-506.

Sriraman, B., Yaftian, N., & Hwa Lee, K. (2011). Mathematical creativity and mathematics education. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*, 119–130.

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook of creativity.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist*(51), 677-688.

Storme, M. (2015). A cross-cultural study of task specificity in creativity. *Journal of Creative Behaviour*, 1-15.

Tabach, M., & Levenson, E. (2018). Solving a Task with Infinitely Many Solutions: Convergent and Divergent Thinking in Mathematical Creativity. En Carreira, & Jones, *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving.* Springer, Cham.

Torrance, E. P. (1966). *The Torrance tests of creative thinking: Norms-technical manual. Research edition. Verbal tests, forms A.* Princeton, NJ: Personnel.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking.* Bensenville: Scholastic Testing.

Torrance, E. P. (1994). *Creativity: Just wanting to know.* Pretoria, South Africa: Benedic books.

Toshihiro, I. (2000). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(2)*, 187-193.

Treffinger, D. J. (2004). *Creativity and giftedness.* Thousand Oaks: Corwin Press.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2018). The Power of Seeing in Problem Solving and Creativity: An Issue Under Discussion. En Carreira, & Jones, *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving* (págs. 243-272). Springer, Cham.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wallach, M., & Kogan, N. (1965). *Modes of thinking in young children: A study of the creativity-intelligence distinction.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Wallas, G. (1926). *The art of thought.* New York: Harcourt Brace.

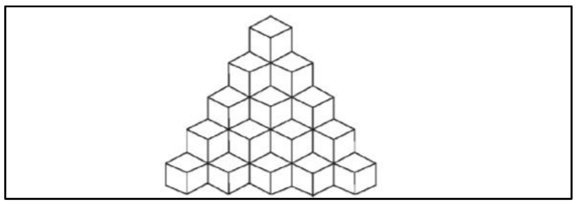
Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). What Is Mathematical Visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics. *What Is Mathematical Visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics, 19*, 1-7.

ANEXOS

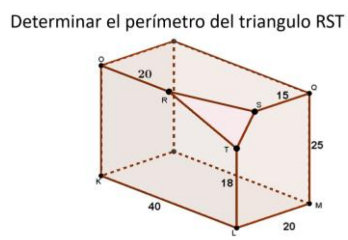
1.10. Anexo 1. Actividades exploratorias

Objetivo: Determinar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas con múltiples soluciones.

1. Esta torre está hecha con 35 cubos dispuestos en 5 capas. ¿Cuántos cubos harán falta para construir una torre de 10 capas?



2. Determinar el perímetro de triángulo RST



3. Determine el volumen de un prisma de altura $10cm$ si se sabe que la base es un hexágono regular cuyas diagonales miden $8\ cm$ y $4\sqrt{3}$

1.11. Anexo 2. Encuesta a docentes de matemáticas

Objetivo: Establecer diferencias entre el pensamiento divergente y la creatividad en relación con la resolución de problemas geométricos.

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo. El pensamiento divergente y la creatividad en muchos casos se han confundido y equiparado, sin embargo, no son lo mismo y hasta el momento algunos investigadores como Guilford (1956), Wallach

(1965), Robinson (2009), Runco (1995) han mencionado algunas diferencias. Siguiendo las ideas de estos autores consideran el pensamiento divergente como el proceso en el cual hay gran fluidez, entendida como la cantidad de ideas, de todo tipo, que surgen en relación con una situación o problema. En dichas ideas, suelen haber ideas que se salen de lo común y de los métodos tradicionales, por lo tanto, se pueden clasificar como ideas originales. La originalidad suele definirse en términos de infrecuencia estadística, es decir si una idea es presentada por muy pocas personas dentro de un grupo determinado, se le considera una idea original. Además, el pensamiento divergente también tiene que ver con la flexibilidad que se concibe como la capacidad de abordar problemas con diversas ideas que utilizan variedad de categorías conceptuales. Un ejemplo de flexibilidad sería trabajar un problema aritmético o algebraico de forma geométrica o viceversa, es decir la flexibilidad de pensamiento permite abordar los problemas desde otros puntos de vista.

Sin embargo, la fluidez, flexibilidad y originalidad no son suficientes para la creatividad, puesto que las cosas creativas de todo tipo ya sean soluciones, productos o inventos, son además de originales efectivas.

Estimado docente, su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca avanzar en la caracterización de las diferencias entre el pensamiento divergente y la creatividad a través de la resolución de problemas geométricos. Muchas gracias por su colaboración.

I. Datos Generales.

Datos Generales.

Nombre ____

Institución ____

Especialidad ____

Correo electrónico ____

Postgrado: ____

Años de experiencia orientado cursos de matemáticas: ____________________

II. Preguntas

Valora en una escala del (1) al (5), donde (1) es nunca, (2) es rara vez, (3) es algunas veces, (4) es casi siempre y (5) es siempre, a las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1. ¿En sus clases propone problemas que permitan el desarrollo de la creatividad y el pensamiento divergente en los estudiantes?					
2. ¿Considera usted que la resolución de problemas aporta al desarrollo de la creatividad y del pensamiento divergente en los estudiantes?					
3. ¿Utiliza instrumentos o materiales didácticos que fomenten la creatividad y el pensamiento divergente, para la enseñanza-aprendizaje de la geometría en clase?					
4. ¿En el desarrollo de las clases propone usted problemas que tienen diferentes vías de solución y que les permita a sus estudiantes trabajar de manera independiente?					
5. ¿Considera que el uso de herramientas tecnológicas en la clase de geometría fomenta el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad?					
6. Acepta y valida soluciones a problemas, por parte de los estudiantes, a pesar de que se utilicen otras herramientas, procedimientos o conocimientos que no han sido tratados en la clase o no tienen relación con las temáticas tratadas.					
7. ¿Considera que sus estudiantes solucionan problemas geométricos de forma creativa?					

III. Responde las siguientes preguntas

1. Mencione algún tipo de problema o actividad propuesta por usted, en la clase de geometría, en la que sus estudiantes hicieron uso del pensamiento divergente, pero no generaron ideas creativas.

2. Mencione un problema geométrico, en el que, de acuerdo con su experiencia, obtuvo respuestas creativas por parte de sus estudiantes.

3. Mencione que tipo de materiales ha utilizado, en la clase de geometría, que según su criterio favorecen el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad. Explique por qué lo considera así.
4. ¿Considera posible que exista la creatividad sin pensamiento divergente? Justifique su respuesta

1.12. Anexo 3. Entrevista a investigadores en educación matemática

Objetivo: Establecer diferencias entre el pensamiento divergente y la creatividad en relación con la resolución de problemas geométricos.

Fuente: Elaboración propia

Desarrollo. El pensamiento divergente y la creatividad en muchos casos se han confundido y equiparado, sin embargo, no son lo mismo y hasta el momento algunos investigadores como Guilford (1956), Wallach (1970), Robinson (2009), Runco (1995) han mencionado algunas diferencias. Siguiendo las ideas de estos autores se considera el pensamiento divergente como el proceso en el cual hay gran fluidez, entendida como la cantidad de ideas, de todo tipo, que surgen en relación con una situación o problema. En dichas ideas, suelen haber ideas que se salen de lo común y de los métodos tradicionales, por lo tanto, se pueden clasificar como ideas originales. La originalidad suele definirse en términos de infrecuencia estadística, es decir si una idea es presentada por muy pocas personas dentro de un grupo determinado, se le considera una idea original. Además, el pensamiento divergente también tiene que ver con la flexibilidad que se concibe como la capacidad de abordar problemas con diversas ideas que utilizan variedad de categorías conceptuales. Un ejemplo de flexibilidad sería trabajar un problema aritmético o algebraico de forma geométrica o viceversa, es decir la flexibilidad de pensamiento permite abordar los problemas desde otros puntos de vista.

Sin embargo, la fluidez, flexibilidad y originalidad no son suficientes para la creatividad, puesto que las cosas creativas de todo tipo ya sean soluciones, productos o inventos, son además de originales efectivas.

Estimado docente, su opinión y experiencia como docente e investigador en la educación matemática, es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que busca avanzar en la caracterización de las diferencias entre el pensamiento divergente y la creatividad a través de la resolución de problemas geométricos. Muchas gracias por su colaboración.

Datos Generales.
Nombre ________________________________Nacionalidad __________
Institución ____
Especialidad ____
Correo electrónico ____
II. Preguntas.

1. ¿Qué tipo de acciones se deben poner en práctica en la clase de geometría, para favorecer el pensamiento divergente y la creatividad?
2. ¿Qué tipo de acciones se deben procurar evitar en la clase de geometría para fomentar el pensamiento divergente y potenciar la creatividad en los estudiantes?
3. ¿Considera que al trabajar cualquier tipo de problema geométrico se fomenta el pensamiento divergente y la creatividad o hay algún tipo de problemas que, en particular, favorezcan más este tipo de procesos?
4. ¿Qué tipo de material didáctico o material concreto considera pertinente para desarrollar el pensamiento divergente y la creatividad en la clase de geometría?
5. ¿Considera desde su experiencia, que el uso de herramientas tecnológicas puede fomentar el pensamiento divergente y la creatividad en la clase de geometría?

6. ¿Considera posible que exista la creatividad sin pensamiento divergente?

7. ¿Cómo considera que se puede establecer diferencias y fronteras entre el pensamiento divergente y la creatividad?

1.13. Anexo 4. Aplicación de método Delphi a encuesta docentes

Método Delphi

Estudiante: Carlos Chávez

Encuestados 10

1. ¿En sus clases propone problemas que permitan el desarrollo de la creatividad y el pensamiento divergente en los estudiantes?
2. ¿Considera usted que la resolución de problemas aporta al desarrollo de la creatividad y del pensamiento divergente en los estudiantes?
3. ¿Utiliza instrumentos o materiales didácticos que fomenten la creatividad y el pensamiento divergente, para la enseñanza-aprendizaje de la geometría en clase?
4. ¿En el desarrollo de las clases propone usted problemas que tienen diferentes vías de solución y que les permita a sus estudiantes trabajar de manera independiente?
5. ¿Considera que el uso de herramientas tecnológicas en la clase de geometría fomenta el desarrollo del pensamiento divergente y la creatividad?
6. Acepta y valida soluciones a problemas, por parte de los estudiantes, a pesar de que se utilicen otras herramientas, procedimientos o conocimientos que no han sido tratados en la clase o no tienen relación con las temáticas tratadas.
7. ¿Considera que sus estudiantes solucionan problemas geométricos de forma creativa?

TABLA DE VALORES ABSOLUTOS

PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	UN
1=A	0	5	5	0	0
2=B	9	1	0	0	0
3=C	2	4	4	0	0
4=D	0	8	2	0	0
5=E	3	5	2	0	0
6=F	10	0	0	0	0
7=G	0	4	4	2	0

TABLA DE FRECUENCIA DE VALORES ABSOLUTOS ACUMULADOS

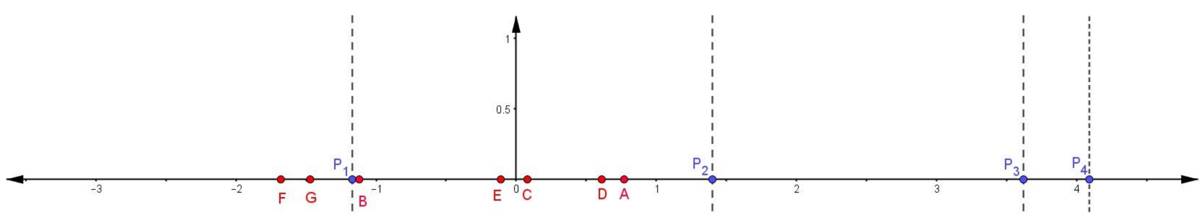
PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	UN
A	0	5	10	10	10
B	9	10	10	10	10
C	2	6	10	10	10
D	0	8	10	10	10
E	3	8	10	10	10
F	10	10	10	10	10
G	0	4	8	10	10

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS

PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	UN
A	0	0,5	1	1	1
B	0.9	1	1	1	1
C	0,2	0,6	1	1	1
D	0	0,8	1	1	1
E	0,3	0,8	1	1	1
F	1	1	1	1	1
G	0	0,4	0,8	1	1

FUNCIÓN RECÍPROCA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DE CORTE O LÍMITES

PREGUNTAS	S	CS	AV	RV	NU	SUMA	PROM	N-P
A	-4.09	0	4.09	4.09	4.09	8.18	1.636	0.77
B	1.29	4.09	4.09	4.09	4.09	17.65	3.53	-1.12
C	-0.84	0,25	4.09	4.09	4.09	11.68	2.33	0,08
D	-4.09	0,84	4.09	4.09	4.09	9.02	1.804	0,61
E	-0,52	0,84	4.09	4.09	4.09	12.59	2.518	-0,11
F	4.09	4.09	4.09	4.09	4.09	20.45	4.09	-1,68
G	-4.09	-0,25	0,84	4.09	4.09	4.68	0.936	-1.47
SUMA	-8.25	9.86	25.38	28.63	28.63	84.25	16.844	
PUNTOS DE CORTE	-1.17	1.40	3.62	4.09	4.09	12.03	/7	2.41
PP						/5	2.41	



Análisis de los resultados: De acuerdo con los puntos de corte (P_1, P_2, P_3, P_4), los puntos (A, B, C, D, E, F, G) que representan cada pregunta y ubicándolos sobre la gráfica, se observa que las preguntas F y G están en el primer intervalo $(x < -1.17)$ de los puntos de corte, y las demás preguntas están en el segundo intervalo $(1.40 < x < 3.62)$ Por lo tanto, se puede inferir que las preguntas son adecuadas para el objetivo propuesto en la presente investigación.